Aktivitäten mit POLYEDERN

A) Klassische Polyederaufgaben mit CAD2D

(Wir betrachten Polyeder als Festkörper, also nicht nur deren Oberflächen)

1) Würfelaufgaben:

Wir laden die Datei WUERFEL (oder ORIGINAL) und versuchen folgende Aufgaben zu lösen:

a) Die von einem Eckpunkt *A* ausgehenden Flächendiagonalen eines Würfels bilden drei Seitenkanten eines (dem Würfel eingeschriebenen) Tetraeders; aus allen Flächendiagonalen des Würfels lassen sich daher zwei (um 90° verdrehte) Tetraeder bilden; die Vereinigungsmenge dieser beiden Polyeder bildet die Stella octangula, der Durchschnitt der beiden Objekte ergibt ein Oktaeder.

b) Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen eines Würfels, so erhält man die Kanten eines Oktaeders.

c) Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seitenkanten eines Würfels, so erhält man die Kanten eines Kuboktaeders.

d) Setzt man einem Würfel quadratische Pyramiden (Basisfläche ist die Seitenfläche eines Würfels, Höhe gleich der Seitenkantenlänge des Würfels) auf, so erhält man das Rhombendodekaeder.

Beachte: Je zwei Seitenflächen benachbarter Pyramiden liegen in einer Ebene.

2) Tetraederaufgaben:

Wir verwenden ein Teilergebnis der Aufgabe 1a) Tetraeder im Würfel:

a) Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen eines Tetraeders, so erhält man die Kanten eines Tetraeders. (Dualität)

b) Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seitenkanten eines Tetraeders, so erhält man die Kanten eines Oktaeders.

c) Setzt man einem Tetraeder regelmäßige dreiseitige Pyramiden (Basisfläche ist die Seitenfläche des Tetraeders, Höhe $h = a/\sqrt{6}$) auf, so erhält man einen Würfel (Analogon zur Aufgabe 1d).

3) Aufgaben zu Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder:

a) Da Ikosaeder und Dodekaeder bzw. Oktaeder und Würfel zueinander dual sind, gilt jeweils: Die Verbindungskanten der Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen eines Dodekaeders (Ikosaeders, Oktaeders) liegen auf einem Ikosaeder (Dodekaeder, Würfel).

b) Welches Objekt entsteht, wenn man benachbarte Seitenkantenmittelpunkte eines Oktaeders miteinander verbindet? (Kuboktaeder; daher auch der Name!)

c) Welches Objekt entsteht, wenn man benachbarte Seitenkantenmittelpunkte eines Dodekaeders (Ikosaeders) miteinander verbindet?

Wir ermitteln durch Überlegen:

DODEKAEDER: es entstehen zwölf 5-Ecke (in den Seitenflächen) und zwanzig 3-Ecke (abgeschnittene Ecken) ----> Name ?

IKOSAEDER: es entstehen zwanzig 3-Ecke (in den Seitenflächen) und zwölf 5-Ecke (abgeschnittene Ecken) ----> Name ?

Wie erwartet entsteht derselbe Körper, nämlich das Ikosidodekaeder (vgl. Kuboktaeder).

B) Klassische Polyederaufgaben mit CAD3D

Obwohl die nun folgenden Beispiele und Aufgaben zu den bereits behandelten ähnlich (wenn nicht identisch) sind, ist doch der Zugang zur Lösung der Aufgaben ein völlig anderer.

1) TETRAEDER:
Die Erzeugung eines Tetraeders mit 3D-Paketen kann auf zwei unterschiedliche Arten erfolgen; je nach Aufgabenstellung entwerfen wir ein Tetraeder
*) als rm. dreiseitige Pyramide mit gleichen Seitenkantenlänge oder
**) wir schneiden das Tetraeder aus einem Würfel aus (ganzzahlige Eckpunktskoordinaten!)

a) Berechne In- und Umkugelradius, Volumen und Oberfläche eines Tetraeders und konstruiere die Inkugel. (Kontrolle über „Seitenriß“)
b) Konstruiere die Stella octangula als Vereinigung bzw. das Oktaeder als Durchschnitt zweier nach **) konstruierter Tetraeder.

2) OKTAEDER:
Ein Oktaeder wird aus zwei kongruenten quadratischen Pyramiden (Spiegelung) zusammengesetzt.

a) Berechne In- und Umkugelradius, Volumen und Oberfläche eines Oktaeders und konstruiere die Inkugel. (Kontrolle über „Seitenriß“)

3) WUERFEL:
Die mit dem CAD2D-Paket konstruierten Aufgaben können jetzt wesentlich eleganter unter Ausnutzung der Menüpunkte Durchsägen und Löschen gelöst werden.

a) Setze quadratische Pyramiden auf die Seitenflächen des Würfels, so daß die Eckpunkte des Pyramidenbasisquadrates die Seitenkantenmitten des Würfels sind: die Höhe der Pyramide betrage die halbe Seitenkantenlänge a des Ausgangswürfels; es entsteht das Octaedron elevatum
Wir erkennen: Das Octaedron elevatum kann als Vereinigungsmenge eines Oktaeders und eines Würfels erzeugt werden; der Durchschnitt dieser Objekte ergibt ein Kuboktaeder. Damit haben wir eine einfache Erzeugung eines Kuboktaeder als Durchschnitt von Oktaeder (Kantenlänge $b = a\sqrt{2}$) und Würfel (Kantenlänge a) gefunden.
(Hinweis: Wir werden später einige archimedische Polyeder als Durchschnittsmengen platonischer Körper erzeugen)
b) Wir erzeugen ein Rhombendodekaeder auf analoge Weise (Aufsetzen quadratischer Pyramiden) und berechnen In- und Umkugelradius (Beweis der Nichtexistenz), Volumen und Oberfläche.

4) DODEKAEDER:
Wir gehen analog zur Aufgabe 3a) vor und erzeugen das zu Stella octangula und Octaedron elevatum analoge Gebilde:

a) Setze auf die Seitenflächen des Pentagondodekaeders rm. 5-seitige Pyramiden, deren Eckpunkte die Seitenkantenmittelpunkte des Dodekaeders sind; die Höhe beträgt (vgl. Skizze):

$$h = r * \tan\delta = \frac{a}{2} * \cot\frac{\beta}{2} * \tan\delta$$

mit folgenden Bezeichnungen:

r ... Inkreisradius eines Seitenpolygons
β ... Zentriwinkel des Seitenpolygons
δ ... Neigungswinkel der Pyramidenkanten

wobei

$\beta = \frac{360°}{n}$ und $\delta = 90° - \frac{\alpha}{2}$ gilt.

(n ... Anzahl der Ecken des Polygons
α ... Flächenwinkel des Polyeders)

Für unser Oktaederbeispiel ergibt dies:
$h \approx a/2 * \cot 36° * \tan(31{,}72°) \approx a * 0{,}42536$.

Einfacher können wir das Objekt als Vereinigungsmenge eines Ikosaeders mit der Seitenlänge $b = \frac{h}{2 * \sin\delta} = \frac{a}{\tan\frac{\beta}{2} * \cos\delta}$ (hier also rund a*1,6177) und eines Dodekaeders (Seitenlänge a) erzeugen:

Für $a = 40$ erhalten wir $b = 64{,}70917$

Achtung: Fehler bei CAD3D (Version 2.5): Kantenlänge 40 beim Dodekaeder ergibt eine tatsächliche Kantenlänge von 51,575 ----------> Streckung mit Faktor 0,77556 notwendig . In der neuen Version bereits verbessert - welch Serviceleistung!

Ein wenig Hintergrundinformation:
Die hergeleiteten Formeln können für alle Platonischen Körper verwendet werden; wir erhalten allerdings keine neuen Objekte. Die Stella octangula, das Octaedron elevatum und das aus Ikosaeder und Dodekaeder bestehende Gebilde entstehen jeweils durch Vereinigung reziproker Polyeder. Reziproke Polyeder wiederum entstehen durch Polarisierung an der jeweiligen Kanteninkugel. Dabei werden aus den Seitenflächen Eckpunkte und aus den Kantenwinkel werden Flächenwinkel; einander entsprechende Kanten stehen zueinander normal.
Zur Erinnerung: Polarisiert man ein Platonisches Polyeder an seiner Inkugel so liegen die Ecken des neuen (dualen) Polyeders jeweils in den Mitten der Seitenflächen des Ausgangskörpers, umgekehrt liegen bei Polarisierung an der Umkugel die Ecken des alten Polyeders in den Seitenflächenmittelpunkten des entstehenden Polyeders (vgl. vorangegangene Übungen, Arbeitsblätter Manfred DOPLER).

b) Bildet man jeweils den Durchschnitt reziproker Polyeder so erhält man
aus dem Tetraederpaar ein Oktaeder
aus dem Würfel-Oktaederpaar ein Kuboktaeder und
aus dem Dodekaeder-Ikosaederpaaar ein Ikosidodekaeder.

c) Verbindet man jeweils die „Spitzen“ dieser reziproker Polyederpaare (dies entspricht dem Aufsetzen geeigneter Pyramiden, deren Basisflächen die Seitenflächen des

jeweiligen Ausgangspolyeders sind - vgl. Aufgaben A1a und 3b), so erhält man Polyeder mit kongruenten rhombischen Seitenflächen. Dies sind
ein dem Tetraederpaar umschriebene Würfel
ein dem Würfel-Oktaederpaar umschriebener Rhombendodekaeder und
ein dem Dodekaeder-Ikosaederpaar umschriebener rhombischer Triakontaeder.

d) Wir betrachten jene Sternpolyeder, die beim Einschreiben der Platonischen Körper in ein Dodekaeder entstehen:
10 Tetraeder oder 5 Würfel, deren Ecken mit denen des Dodekaeders zusammenfallen bzw.
5 Oktaeder, deren Ecken den Kantenmittelpunkten des Dodekaeders entsprechen bilden als Vereinigungsmengen hübsche Sternpolyeder, deren Konstruktion die Schulung der Raumvorstellung unterstützt.

5) Weitere Einsatzmöglichkeiten:
a) Berechne Kanten- und Flächenwinkel trigonometrisch (Kontrolle durch Messung)
b) Einpassen der Platonischen Körper in ein geeignetes Koordinatensystem - vektorielles Berechnen der Kanten- und Flächenwinkel.
c) Basteln (vgl. Netze auf Diskette)

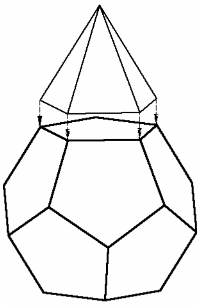
Name	F	Polygone	K	E	Oberfläche	Volumen
Tetraeder	4	Dreiecke	6	4	$\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$
Würfel	6	Quadrate	12	8	$6a^2$	a^3
Oktaeder	8	Dreiecke	12	6	$2\sqrt{2}a^2$	$2\sqrt{3}a^3$
Dodekaeder	12	Fünfecke	30	20	$3\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\,a^2$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{7}a^3$
Ikosaeder	20	Dreiecke	30	12	$5\sqrt{3}a^2$	$\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3$

Name	Umkugelradius	Inkugelradius	cos α	α
Tetraeder	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$	$\frac{1}{3}$	70°31’44’’
Würfel	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	0	90°
Oktaeder	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}a$	$-\frac{1}{3}$	109°28’16’’
Dodekaeder	$\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}a$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}}a$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	116°33’54’’
Ikosaeder	$\frac{\sqrt{2}(5+\sqrt{5})}{4}a$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}a$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	138°11’23’’

C) Klassische Sternpolyeder mit CAD3D

Verzichtet man bei der Definition regelmäßiger Polyeder auf die Eigenschaft konvex, läßt man also auch Polyeder mit kongruenten, nicht konvexen Seitenflächen zu, so erhält man neben den Platonischen Polyedern noch vier weitere sternförmige.

1) Das große DODEKAEDER:



Setzt man auf die Seitenflächen eines Dodekaeders regelmäßige fünfseitige Pyramiden so auf, daß die Seitenflächen der Pyramide mit den zugehörigen des Dodekaeders in einer Ebene liegen, so erhält man das große Dodekaeder. Die Höhen *h* dieser Pyramiden können mittels Inkreisradius *r* des Seitenpolygons und Flächenwinkel α als $h = r * \tan(180° - \alpha)$ berechnet werden.

Es kann gezeigt werden, daß beim Dodekaeder *h* genau doppelt so groß wie der Inkreisradius *r* ist; es gilt also *h* = 2*r*.

Geschickte Vorgangsweise zur Erzeugung des großen Dodekaeders: Wir verwenden als Seitenkantenlänge *a* des Dodekaeders 40mm (Streckungsfaktor !!), können so eine entsprechende Pyramide mit der Höhe *h*=55,0553mm entwerfen und in die richtige Stellung mittels Snapen verlagern. Durch Drehung um die x-Achse (Drehwinkel 180°) erzeugen wir die „untere Pyramide“. Spiegeln wir die beiden Pyramiden an einer geeigneten Diagonalebene des Dodekaeders, so erhalten wir je eine Pyramide des „unteren bzw. oberen Kranzes“. Diese werden abschließend um die z-Achse um je 72° (4x) verdreht.

($h = (\sqrt{5} - 1) * r \approx 1{,}3764 * a$ *r* ... Inkugelradius des Dodekaeders)

2) Das große STERNDODEKAEDER:

Eine analoge Vorgangsweise erlaubt durch Aufsetzen geeigneter dreiseitiger Pyramiden auf die Seitenflächen eines Ikosaeders eine einfache Konstruktion des großen Sternpolyeders. Dazu müssen wir uns allerdings die Struktur des Ikosaeders etwas genauer ansehen:

*) Die einem Eckpunkt gegenüberliegenden Seitenkanten einer Eckenfigur liegen in einer Ebene und bilden ein regelmäßiges Fünfeck.

*) Die Seitenkanten jeder Dreiecksfacette liegen in je zwei solcher Fünfecksebene.

Jene Fünfecksebenen deren Schnittpunkt außerhalb des Ikosaeders liegt, sind Seitenflächen des großen Sterndodekaeders.

Wir gehen experimentell vor:

a) Wir entwerfen ein Ikosaeder und schneiden dieses nach drei „richtigen“ Fünfecksebenen.

b) Aus einem ausreichend groß dimensionierten Quader schneiden wir eine geeignete Pyramide aus (Durchsägen mit den Fünfecksebenen) und messen den Abstand der Spitze von der Dreiecksfacette ab.

c) Nun können wir in einer neuen Zeichnung ein Ikosaeder und eine dazu passende Pyramide erzeugen und durch mehrfaches Kopieren und geschicktes Verlagern das Sternpolyeder konstruieren.

(*k* = 30mm ----> *h* = 45,346mm bzw. $h = 2\,r \approx 1{,}5116 * a$ *r* ... Inkugelradius des Ikosaeders)

3) Das kleine STERNDODEKAEDER:

Verwenden wir in obiger Konstruktion die zweite Art von Fünfecksebenen (hier liegen die Schnittpunkte jeweils innerhalb des Ikosaeders), so erhält man die Spitzen bzw. Höhen von Pyramiden, die vom Ikosaeder ausgenommen werden müssen. Wieder bietet sich ein analoger, experimenteller Zugang an.

(*k* = 30mm ----> *h* = 10,705mm)

4) Das große IKOSAEDER entzieht sich einem „elementaren CAD3D-Zugang“.

D) Archimedische Polyeder als Durchdringungskörper

Bei der Aufgabe B4b haben wir ein Kuboktaeder als Durchschnittsmenge geeignet dimensionierter und gelagerter Oktaeder und Würfel konstruiert. Auf ähnliche Weise erzeugen wir nun weitere Archimedische Polyeder und zwar die durch „Abschneiden einer Polyederecke" erzeugbaren abgestumpften Tetraeder, Würfel, Oktaeder, ...

1) Das abgestumpfte Tetraeder:

Teilt man die Kanten eines Tetraeders in drei gleich lange Strecken und verbindet je zwei benachbarte (nicht in einer Kante liegende) Teilungspunkte, so erhält man das abgestumpfte Tetraeder, dessen Seitenflächen aus gleichseitigen Dreiecken und regelmäßigen Sechsecken bestehen.

Man kann sich dieses Archimedische Polyeder auch so entstanden denken, daß man ein Tetraeder jeweils mit zu den Seitenflächen parallelen Ebenen in der Höhe 2/3*h* schneidet. Man erkennt leicht (?) (vgl. Kopie), daß die neu entstehenden Dreiecksebenen in den Seitenflächen eines um 90° verdrehten Tetraeders liegen. Dieses größere Tetraeder entsteht aus dem ursprünglichen Tetraeder durch Streckung um den Faktor 5/3 (vgl. GR, AR-Skizze). Bildet man nun den Durchschnitt der beiden Tetraeder, so erhält man das abgestumpfte Tetraeder.

2) Der abgestumpfte Würfel und das abgestumpfte Oktaeder:

Wir stellen eine Serie von Würfel-Oktaederpaaren her, beginnend mit einem dem Würfel eingeschriebenen Oktaeder und endend mit einem dem Oktaeder eingeschriebenen Würfel:

a) Oktaeder dem Würfel eingeschrieben: $b = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

b) Oktaeder vergrößern: $b = 0{,}85\,a$ ---------> in den Ecken entstehen Quadrate, in den Flächen unregelmäßige Sechsecke

Weiteres Vergrößern des Oktaeders führt in den Oktaederseitenflächen auf rm. Sechsecke

c) abgestumpftes Oktaeder: $b = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,a$

Wir vergrößern weiter, bis aus den Sechsecken rm. Dreiecke entstehen:

d) Kuboktaeder: $b = \sqrt{2}\,a$

Wird das Oktaeder noch größer gewählt, so verkleinern sich die gleichseitigen Dreiecke in den Oktaederflächen und aus den Quadraten in den Würfelflächen werden Achtecke.

e) abgestumpfter Würfel: $b = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})\,a$

3) Eine ähnliche Serie mit dem Dodekaeder-Ikosaederpaar führt auf das abgestumpfte Ikosaeder, den Ikosidodekaeder und das abgestumpfte Dodekaeder. Damit sind die elementaren Möglichkeiten zur Konstruktion Archimedischer Polyeder vorerst erschöpft.

E) Vermischtes:

POLYEDER BEI M.C. ESCHER

Bild von ESCHER (Polyederhimmel und Wasserfall)
Analysiere und konstruiere einige Polyederanordnungen

RÖSCHELWÜRFEL:

Würfelecke mit gegenüberliegenden Seitenkantenmitten verbinden ---> es entsteht ein Polyeder, der der Würfelinkugel umschrieben ist.
Konstruiere das entstehende Polyeder durch Eckenabschneiden (wegen der 3x8=24 Schnittebenen sehr mühsam und fehleranfällig ---> suche besseren Weg)
Beweise, daß der Röschelwürfel eine Inkugel besitzt:

a) heuristisch mit CAD3D (Vermutung)
b) Beweis sechsseitige Pyramide ---> bessere Konstruktionsmöglichkeit

Anwendung: Mathematik
Analog: für alle Platonischen Polyeder (Hinweis)

CHEMIEPOLYEDER:

Ermittle alle konvexen Polyeder mit kongruenten Quadraten, rm. Fünfecken und rm. Dreiecken -----> 7 Objekte (Basteln, Anwendung in der Chemie)
Erzeuge daraus Bilder von Molekülen

QUERSCHNITTE VON POLYEDERN NACH REGELMÄSSIGEN FIGUREN:

Tetraeder nach Quadrat (Puzzle) (Wieviel Ebenen, Gleichung?)
Würfel und Oktaeder nach rm. 6-Ecken (Wieviel Ebenen, Gleichung?)

POLYEDERNETZE:

Ermittle alle möglichen Tetraeder-, Würfel- und Oktaedernetze (Schulung der RV)
Geodätische auf Polyedern (Spinne - Fliege - Aufgaben)

Literatur:

Andreas Asperl: „Bekanntes und weniger Bekanntes über Polyeder“, IBDG 1/1991, S. 17-28
Übersichtsartikel über Polyedereigenschaften.

Andreas Asperl: „Computer aided geometry lessons in Austrian schools“, Proceedings of seminars on computational geometry, SCG 96, Vol. 5, p. 129-135
Übersichtsartikel über Anwendungsmöglichkeiten im GZ-Unterricht

Andreas Asperl: „Die DG und ihr Nutzen in der Chemie - Fächerübergreifende Projekte im DG-Unterricht“, Projekt der Hochschuljubiläumsstiftung der Stadt Wien, erscheint 3/98
Beschreibung polyedraler Moleküle (u.a. die 7 Dreiecksflächner) und ihre mögliche Umsetzung im Geometrieunterricht.

Max Brückner: „Vielecke und Vielflache - Theorie und Geschichte“, Verlag B.G.Teubner, Leipzig, 1900
Fundgrube für exotische Polyeder

Ingo Buchholz: „Zur vektorgeometrischen Behandlung der regulären Polyeder“, MU 4-91
Ausführliche vektorgeometrische Behandlung der regulären Polyeder, gut für den Mathematikunterricht geeignet.

Peter Hilton, Jean Pedersen: „Build your own Polyhedra“, Addison-Wesley, 1994
ISBN 0 - 201 - 49096 - X
Originelle Bastelanleitungen für verschiedenste Polyeder

Locher u.a.: „Die Welten des M.C.Escher“, Manfred Pawlak Verlagsgesellschaft, Herrsching, 1971, *„Geometrische Schatzkiste!“*

Koji Miyazaki: „Polyeder und Kosmos“, Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1983
ISBN 3 - 528 - 08590 - 8
Viele „mystische“ Eigenschaften und Geschichten, bunt illustriert, wenig Theorie .

Kurt Peter Müller: „Körperpackungen und Raumvorstellung“, MU 6-83
Kugelpackungen und raumfüllende Polyeder werden betrachtet, gut lesbar.

Tiberiu Roman: „Reguläre und halbreguläre Polyeder“, Verlag Harri Deutsch, Thun - Frankfurt am Main, 1986, ISBN 3 - 87144 - 983 - 0
Netze fast aller Archimedischer und Dualarchimedischer Körper, Zusammenhänge mit der Kristallographie werden erklärt, etliche Übungsaufgaben

Michael Toepell: „Platonische Körper in Antike und Neuzeit“, MU 4-91
Deckt die historische Entwicklung der Polyederforschung und ihr geistiges Umfeld sehr gut ab, umfangreiche Literaturliste.

WWW-Seiten: http://www.li.net/~george/pavilion.html
http://www.li.net/~george/virtual-polyhedra/vp.html