



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

DIPLOMARBEIT

Pólyasche Abzähltheorie und Anwendungen

ausgeführt am

Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
TU Wien

unter der Anleitung von

**Ao.Univ.Prof.Dipl.-Ing. Dr.techn
Bernhard Gittenberger**

durch

Anna-Maria Januskovecz

Matrikelnummer: 1125477

Vordere Sonnleitenstraße 27

2630 Ternitz-Pottschach

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
I Pólyasche Abzähltheorie	9
1 Einleitung	11
1.1 Motivation - ein Beispiel	11
1.2 Grundlagen und Definitionen	11
2 Das Lemma von Burnside und der Satz von Pólya	15
2.1 Grundlagen und Vorbereitungen	15
2.2 Lemma von Burnside	16
2.3 Satz von Pólya	18
2.4 Zyklenzeiger des direkten Produkts zweier Gruppen	20
2.5 Spezielle Permutationsgruppen	21
2.5.1 Die symmetrische Gruppe S_n	22
2.5.2 Die alternierende Gruppe A_n	23
2.5.3 Die zyklische Gruppe C_n	23
2.5.4 Die Diedergruppe D_n	25
2.5.5 Die allgemeine lineare Gruppe GL_n	26
2.5.6 Die affine Gruppe Aff_n	34
II Anwendungen	37
3 Der Satz von Pólya in der Musik	39
3.1 Zwölftonmusik und Zwölfton-Reihen	39
3.2 Mathematischer Aufbau von Zwölfton-Reihen	41
3.2.1 Tonhöhen-Klassen, Zwölfton-Skala, Zwölfton-Reihen	41
3.2.2 Transposition	43
3.2.3 Umkehrung	44
3.2.4 Verknüpfung von Transposition und Umkehrung	44
3.2.5 Krebs	45
3.2.6 Quarten- und Quintenzirkel	45
3.2.7 Verschiebung	46
3.2.8 Fünf-Stufen-Schritt	47

3.2.9	Verknüpfung von Krebs, Verschiebung und Fünf-Stufen-Schritt	47
3.3	Äquivalenzklassen in der Zwölftonmusik	48
4	Erzeugende Funktion von injektiven Funktionen	51
5	Graphen	53
5.1	Grundlagen und Definitionen	53
5.2	Wurzelbäume	55
5.3	Bäume	57
5.4	Wälder	61
5.5	Markierte Graphen	62
6	Moleküle - Chemie	67
6.1	Graphentheoretische Grundlagen	67
6.2	Zählen von Isomeren	69
6.2.1	Benzol	69
6.2.2	Naphthalin	71
7	Numerischer Algorithmus zur Berechnung der Koeffizienten	75
7.1	Algorithmus	76
7.2	Matrizen aufstellen	78
7.3	Rechenaufwand	80
	Literaturverzeichnis	81

Vorwort

Diese Diplomarbeit wurde im Jahr 2017 am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie der Technischen Universität Wien unter der Betreuung von Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn Bernhard Gittenberger geschrieben.

In dieser Diplomarbeit wird das Thema **Pólyasche Abzähltheorie** behandelt. Die Grundlage für meine Arbeit ist der Artikel *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen* von G. Pólya, [P637]. Die Diplomarbeit besteht aus zwei Teilen, dem theoretischen Teil über die Abzähltheorie nach Pólya und dem Teil, der Anwendungen behandelt.

In Kapitel 1 wird die zugrundeliegende Fragestellung der Theorie anhand eines Beispiels erklärt und anschließend die notwendigen Grundlagen und Definitionen erläutert. Danach werden im Kapitel „Das Lemma von Burnside und der Satz von Pólya“, Kapitel 2, diese beiden wichtigen Sätze vorgestellt und bewiesen. Der wichtigste Satz für diese Arbeit ist der Satz von Pólya, Satz 2.9. Weiters werden die Zyklenzeiger bestimmter Permutationsgruppen bestimmt. Ich habe jene Permutationsgruppen betrachtet, auf die später in der Arbeit zurückgegriffen wird.

Im zweiten Teil der Arbeit werden verschiedene Anwendungen des Satzes von Pólya behandelt. Ich habe mir die Themen Musik, injektive Funktionen, Graphen und Moleküle in der Chemie ausgesucht. Es gibt aber viel mehr Anwendungsbeispiele, als die hier erwähnten.

Zu guter Letzt habe ich in Kapitel 7 noch einen Algorithmus beschrieben, der die Koeffizienten des Polynoms, das man mit dem Satz von Pólya erhält, berechnet.

*Mathematik ist Musik des Geistes,
Musik ist Mathematik der Seele.*

Daniil Charms
(1905 - 1942)

Teil I

Pólyasche Abzähltheorie

Kapitel 1

Einleitung

In diesem Kapitel werden Ergebnisse von [Pó37] verwendet.

1.1 Motivation - ein Beispiel

Beispiel 1.1.

Die sechs Seitenflächen eines Würfels sollen so eingefärbt werden, dass drei Seiten rot, zwei Seiten grün und eine Seite blau ist. Man interessiert sich nun für die Anzahl der verschiedenen Färbungen.

Wenn man nun davon ausgeht, dass man sechs Farben zur Verfügung hat (jedoch nur drei verschiedene), so gibt es $6!$ Möglichkeiten, diese Farben zu permutieren und sie somit den Seitenflächen zuzuordnen. Um die Permutationen innerhalb der selben Farbe zu verhindern, muss noch durch die jeweiligen Anzahlen geteilt werden. Daraus folgt, dass falls jede der sechs Seiten fixiert oder als wohl unterschieden angesehen wird, die Anzahl der möglichen Färbungen durch

$$\frac{6!}{3!2!1!} = 60$$

gegeben ist.

Die Seiten eines Würfels sind aber nicht fixiert oder unterscheidbar. Man will also die Anzahl der möglichen nicht äquivalenten Färbungen der Seitenflächen des Würfels mit drei roten, zwei grünen und einer blauen Seite. Zwei Färbungen sollen als äquivalent angesehen werden, wenn sie durch Drehungen des Würfels in einander übergeführt werden können.

Um diese Anzahl bestimmen zu können, muss man also die Drehungen und die dadurch entstandenen Permutationen der Seitenflächen untersuchen. \circ

1.2 Grundlagen und Definitionen

Um Fragestellungen wie im Beispiel 1.1 aus Abschnitt 1.1 allgemein zu formulieren, werden nun einige Definitionen und Erklärungen benötigt.

Definition 1.2. Eine Menge \mathcal{F} von wohl unterschiedenen Elementen F_1, F_2, \dots , die **Figuren** genannt werden, heißt **Figurenvorrat**.

Jede der Figuren F_i enthält k Kategorien, wobei $\alpha_{i,j}$ Elemente der Kategorie j in der Figur F_i enthalten sind, kurz gesagt die Figur F_i hat den **Inhalt** $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,k})$.

Die Anzahl der Figuren mit Inhalt $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ sei $a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$. Die Potenzreihe

$$\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_k=0}^{\infty} a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_k^{\alpha_k} =: f(z_1, z_2, \dots, z_k) \quad (1.1)$$

wird **abzählende Potenzreihe** des Figurenvorrats \mathcal{F} genannt.

Definition 1.3. Sei M eine endliche Menge mit n Elementen. Die Gruppe der Permutationen auf der Menge M mit der Hintereinanderausführung nennt man die **Permutationsgruppe** \mathcal{P}_M vom **Grad** n und der **Ordnung** $|\mathcal{P}_M| =: h$.

Definition 1.4. Sei $\pi \in \mathcal{P}_M$ eine Permutation mit $j_i = j_i(\pi)$ Zyklen der Länge i für $i = 1, 2, \dots, n$. Der Vektor $j = [j_1, j_2, \dots, j_n]$ heißt der **Typ** der Permutation.

Bemerkung 1.5. Für den Typ einer Permutation gilt

$$1 \cdot j_1 + 2 \cdot j_2 + \cdots + n \cdot j_n = n.$$

Definition 1.6. Sei M eine endliche Menge mit n Elementen und $\pi \in \mathcal{P}_M$ eine Permutation des Typs $j = [j_1, j_2, \dots, j_n]$. Dann ist das Polynom

$$ZT(\pi) := x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n} \quad (1.2)$$

der **Zyklentyp** von π .

Man kann auch Polynome betrachten, die die Zyklenstrukturen ganzer Untergruppen \mathfrak{S} von \mathcal{P}_M beschreiben.

Definition 1.7. Sei \mathfrak{S} eine Untergruppe von \mathcal{P}_M . Der **Zykluszeiger** der Gruppe \mathfrak{S} ist durch das Polynom

$$P_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{1}{|\mathfrak{S}|} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}} ZT(\pi) = \frac{1}{|\mathfrak{S}|} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}} x_1^{j_1(\pi)} x_2^{j_2(\pi)} \cdots x_n^{j_n(\pi)}$$

gegeben.

Bemerkung 1.8. Fasst man in dieser Summe die Permutationen des gleichen Typs $j = [j_1, j_2, \dots, j_n]$ zusammen, so erhält man

$$P_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|\mathfrak{S}|} \sum_{j=[j_1, j_2, \dots, j_n]} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}, \quad (1.3)$$

wobei h_{j_1, j_2, \dots, j_n} die Anzahl der Permutationen mit Typ $j = [j_1, j_2, \dots, j_n]$ ist.

Die Elemente der Menge M werden nun von 1 bis n durchnummeriert und jedem Element $m_i \in M$ wird eine Figur aus dem Figurenvorrat \mathcal{F} zugeordnet. Auf diese Weise entsteht ein n -Tupel (f_1, f_2, \dots, f_n) , das die Zuordnung $m_i \mapsto f_i$ festhält, wobei mehreren m_i auch die selbe Figur aus \mathcal{F} zugeordnet werden darf, es ist also $f_i = f_j$ erlaubt. Diese n -Tupel werden **Konfigurationen** genannt, wobei zwei Konfigurationen (f_1, \dots, f_n) und (f'_1, \dots, f'_n) gleich heißen, wenn $f_i = f'_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, das heißt wenn sie genau die selbe Zuordnung beschreiben. Jede Konfiguration $f = (f_1, \dots, f_n)$ hat einen sogenannten **Gesamtinhalt** $\alpha(f) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, der beschreibt, wieviele Elemente insgesamt aus den k Kategorien enthalten sind. Das bedeutet die Kategorie i kommt in der Konfiguration f genau α_i mal vor. Für festes $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ gilt

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i(f) = \alpha(f),$$

wobei $\alpha_i(f)$ der Inhalt der Figur f_i in der Konfiguration f ist. Zwei Konfigurationen f und f' werden in Bezug auf eine Teilmenge \mathfrak{S} von \mathcal{P}_M äquivalent, in Zeichen $f \sim_{\mathfrak{S}} f'$, genannt, wenn es eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}$ gibt, sodass $\pi(f) = f'$ gilt. Durch diese Äquivalenzrelation $\sim_{\mathfrak{S}}$ kann man die Menge aller Konfigurationen \mathcal{K} in Äquivalenzklassen einteilen, also \mathcal{K} nach der Äquivalenzrelation $\sim_{\mathfrak{S}}$ faktorisieren.

Definition 1.9. Die Menge aller Konfigurationen faktorisiert nach der Äquivalenzrelation $\sim_{\mathfrak{S}}$ wird mit

$$\mathcal{K}/\sim_{\mathfrak{S}}$$

bezeichnet.

Sei nun $A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$ die Anzahl der verschiedenen Äquivalenzklassen aus $\mathcal{K}/\sim_{\mathfrak{S}}$ mit Gesamtinhalt $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, also die Anzahl der in Bezug auf \mathfrak{S} inäquivalenten Konfigurationen f mit Gesamtinhalt $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$.

Bemerkung 1.10. Sei \mathcal{K}^α die Menge aller Konfigurationen mit Gesamtinhalt $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$. Dann kann $A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$ angegeben werden als

$$A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} = |\mathcal{K}_{\sim_{\mathfrak{S}}}^\alpha|.$$

Die Reihe

$$\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_k=0}^{\infty} A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_k^{\alpha_k} =: F(z_1, z_2, \dots, z_k) \quad (1.4)$$

wird **abzählende Potenzreihe** oder **erzeugende Funktion** der in Bezug auf \mathfrak{S} inäquivalenten Konfigurationen genannt. Die Koeffizienten $A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$ von $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_k^{\alpha_k}$ in dieser Potenzreihe sind also die Anzahlen der in Bezug auf \mathfrak{S} inäquivalenten Konfigurationen mit Gesamtinhalt $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$.

Beispiel 1.11.

[Fortsetzung Beispiel 1.1] Der Würfel hat sechs Seiten, also gibt es in der Menge M sechs verschiedene Elemente und auf der Menge M $6! = 720$ Permutationen, also $h = |\mathcal{P}_M| = 720$.

Interessant ist nun die Untergruppe \mathfrak{S} von \mathcal{P}_M , die die Drehungen des Würfels in sich selbst beschreibt. \mathfrak{S} besitzt folgende Elemente mit den dazugehörigen Zyklentypen:

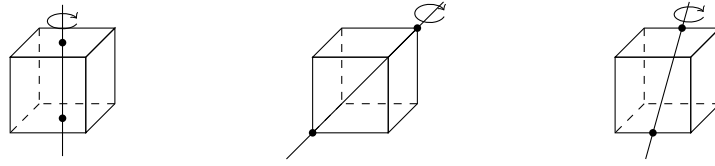


Abbildung 1.1: Drehachsen eines Würfels

- id: $ZT(\text{id}) = x_1^6$
- drei $\pm 90^\circ$ Drehungen um die Achse durch den Mittelpunkt zweier gegenüberliegender Seitenflächen: $ZT(\pi) = x_1^2 x_4^1$
- drei 180° Drehungen um die Achse durch den Mittelpunkt zweier gegenüberliegender Seitenflächen: $ZT(\pi) = x_1^2 x_2^2$
- vier $\pm 120^\circ$ Drehungen um die Achse durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte: $ZT(\pi) = x_3^2$
- sechs 180° Drehungen um die Achse durch den Mittelpunkt zweier gegenüberliegender Kanten: $ZT(\pi) = x_2^3$

Das sind insgesamt 24 Drehungen, also $|\mathfrak{S}| = 24$ und der Zyklenzeiger ist gegeben durch

$$P_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{24} (x_1^6 + 6x_1^2 x_4^1 + 3x_1^2 x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2^3).$$

Im gegebenen Kontext gibt es nur drei Figuren ($|\mathcal{F}| = 3$) und drei Kategorien ($k = 3$) (rot, grün, blau). Hier gilt also $|\mathcal{F}| = 3 = k$.

Insbesondere gibt es in diesem Beispiel eine Bijektion zwischen den Figuren und Kategorien, da es nur eine rote, eine grüne und eine blaue Seite mit den Inhalten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ gibt. Jede dieser gefärbten Seiten ist eine Figur im Figurenvorrat. Die Kategorien sind also die verschiedenen Farben und die Figuren die gefärbten Seiten. Da es keine Seiten gibt, die mehrere Farben beinhalten, ist die Bijektion zwischen den Figuren und den Kategorien leicht zu erkennen.

Es wird nun die Anzahl der in Bezug auf \mathfrak{S} inäquivalenten Färbungen (Konfigurationen) mit drei roten, zwei grünen und einer blauen Seitenfläche (Gesamtinhalt $(r, g, b) = (3, 2, 1)$), also die Anzahl $A_{3,2,1}$ gesucht. \circ

Kapitel 2

Das Lemma von Burnside und der Satz von Pólya

2.1 Grundlagen und Vorbereitungen

In [dB64] wird das Lemma von W. Burnside aus [Bur11] auf Permutationsgruppen angewandt. Das daraus resultierende Lemma gibt eine erste Möglichkeit, gesuchte Anzahlen, die in Abschnitt 1.1 beschrieben wurden, zu bestimmen.

Für das Lemma von Burnside sind einige Definitionen und Resultate über Gruppen notwendig, die im folgenden zusammengefasst werden.

Definition 2.1. Sei G eine Gruppe und seien g und h zwei Elemente dieser Gruppe. Die Elemente g und $h^{-1}gh$ werden **konjugiert** genannt.

Definition 2.2. Ein Element $g \in G$ wird **selbstkonjugiert** genannt, wenn es mit allen seinen konjugierten Elementen übereinstimmt, also

$$g = h^{-1}gh, \quad \forall h \in G.$$

Das neutrale Element ist in jeder Gruppe selbstkonjugiert. In jeder kommutativen Gruppe gilt auf Grund

$$g = h^{-1}gh = \underbrace{h^{-1}h}_{=\text{id}}g = g,$$

dass alle Elemente selbstkonjugiert sind.

Analog können auch ganze Untergruppen als konjugiert und selbstkonjugiert beziehungsweise als Normalteiler bezeichnet werden.

Definition 2.3. Sei H eine Untergruppe von G und sei g eine Abbildung auf G . Dann heißen die Gruppen H und $g^{-1}Hg$ **konjugierte Untergruppen** von G .

Definition 2.4. Eine Untergruppe H von G wird **Normalteiler** genannt, wenn sie mit allen ihren konjugierten Untergruppen übereinstimmt, also

$$H = g^{-1}Hg, \quad \forall g \in G.$$

Definition 2.5. Sei die Ordnung der Gruppe G' kleiner als die Ordnung der Gruppe G . Die Gruppen G und G' werden **homomorph** genannt, wenn

- eine eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen der Gruppe G und denen der Gruppe G' existiert und
- falls $g_1, g_2 \in G$ den Elementen $g'_1, g'_2 \in G'$ zugeordnet werden, folgt, dass $g_1 g_2$ dem Element $g'_1 g'_2$ zugeordnet wird.

Es existiert also ein **Homomorphismus** zwischen G und G' .

2.2 Lemma von Burnside

Der folgende Satz (aus [Bur11]) ist nun eine Vorbereitung auf das Lemma von Burnside, das zur Anzahlbestimmung verschiedener Äquivalenzklassen von $\mathcal{K}_{/\sim_{\mathfrak{S}}}^{\alpha}$ verwendet werden kann.

Satz 2.6 (Homomorphiesatz). *Sei $f : G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus zwischen G und G' . Dann folgt:*

1. der Kern $\text{kern}(f)$ ist ein Normalteiler von G und
2. die Faktorgruppe $G/\text{kern}(f)$ ist isomorph zum Bild $f(G)$.

Die endliche Gruppe G aus Satz 2.6 ist die Menge aller Konfigurationen mit Gesamtinhalt $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ der Menge M . Diese ist homomorph zur Menge der in Bezug auf \mathfrak{S} inäquivalenten Konfigurationen, $G' = \mathcal{K}_{/\sim_{\mathfrak{S}}}^{\alpha}$ (siehe Bemerkung 1.10). Das Ziel ist es nun die Anzahl der Elemente dieser Menge zu bestimmen, also $|\mathcal{K}_{/\sim_{\mathfrak{S}}}^{\alpha}|$. Das führt auf das folgende Lemma:

Lemma 2.7 (Lemma von Burnside II). *Sei \mathcal{K}^{α} die Menge aller möglichen Konfigurationen mit Gesamtinhalt $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ der Menge M mit Figuren aus \mathcal{F} und \mathfrak{S} eine Teilmenge der Permutationen auf M . Dann ist die Anzahl der in Bezug auf \mathfrak{S} inäquivalenten Konfigurationen mit Gesamtinhalt α gegeben durch*

$$|\mathcal{K}_{/\sim_{\mathfrak{S}}}^{\alpha}| = \frac{1}{|\mathfrak{S}|} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}} |\{f \in \mathcal{K}^{\alpha} : \pi(f) = f\}|.$$

Beweis

Die Anzahl der Fixpunkte unter \mathfrak{S} kann auch folgendermaßen berechnet werden:

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}} |\{f \in \mathcal{K}^{\alpha} : \pi(f) = f\}| = \sum_{f \in \mathcal{K}^{\alpha}} |\{\pi \in \mathfrak{S} : \pi(f) = f\}| \quad (2.1)$$

Für festes f sei $\{\pi \in \mathfrak{S} : \pi(f) = f\} =: \mathfrak{S}_f$ und $|\{\pi \in \mathfrak{S} : \pi(f) = f\}| =: n(f)$. \mathfrak{S}_f bildet eine Untergruppe von \mathfrak{S} .

Sei g eine zu f äquivalente Abbildung, $f \sim_{\mathfrak{S}} g$. Dann existiert ein $\tilde{\pi} \in \mathfrak{S}$, sodass $\tilde{\pi}(f) = g$ gilt. Weiters gibt es ein $\hat{\pi} \in \mathfrak{S}$, sodass auch $\hat{\pi}(g) = f$ gilt, da $\sim_{\mathfrak{S}}$ eine Äquivalenzrelation ist. Daraus folgt, dass $\hat{\pi}(\tilde{\pi}(f)) = f$ gilt, also $\hat{\pi}\tilde{\pi}$ in der Menge

\mathfrak{S}_f enthalten ist. Das bedeutet, es gibt genau $n(f)$ Möglichkeiten ein $\tilde{\pi}$ zu finden, sodass $\tilde{\pi}(f) = g$ gilt:

$$|\{\pi \in \mathfrak{S} : \pi(f) = g\}| = n(f)$$

Daraus und aus Satz 2.6 folgt, dass die Gruppe \mathfrak{S} in Untergruppen aufgeteilt werden kann, die alle $n(f)$ Elemente besitzen. Jedes Element einer dieser Untergruppen wird genau einem Element der Äquivalenzklasse von f zugeordnet. Daraus folgt:

$$|[f]_{\sim_{\mathfrak{S}}}| = \frac{|\mathfrak{S}|}{n(f)} \Leftrightarrow n(f) = \frac{|\mathfrak{S}|}{|[f]_{\sim_{\mathfrak{S}}}|}.$$

Wenn nun über alle Elemente der selben Äquivalenzklasse aufsummiert wird, ergibt sich

$$\sum_{g \in [f]_{\sim_{\mathfrak{S}}}} n(g) = |\mathfrak{S}|,$$

und bei der Summation über alle Elemente aus \mathcal{K}^α muss noch mit der Anzahl der Äquivalenzklassen multipliziert werden. Gemeinsam mit Gleichung (2.1) folgt nun die gewünschte Aussage:

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}} |\{f \in \mathcal{K}^\alpha : \pi(f) = f\}| &= \sum_{f \in \mathcal{K}^\alpha} |\{\pi \in \mathfrak{S} : \pi(f) = f\}| \\ &= |\mathfrak{S}| \left| \mathcal{K}_{/\sim_{\mathfrak{S}}}^\alpha \right| \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.8.

[Fortsetzung Beispiel 1.11] Um die Anzahl der in Bezug auf \mathfrak{S} inäquivalenten Färbungen (Konfigurationen) mit drei roten, zwei grünen und einer blauen Seitenfläche (Gesamtinhalt $(r, g, b) = (3, 2, 1)$) mit dem Lemma von Burnside, Lemma 2.7, berechnen zu können, muss für jede Permutation π aus \mathfrak{S} die Anzahl der Fixpunkte ermittelt werden.

- id: $ZT(\text{id}) = x_1^6$
→ alle $\frac{6!}{3!2!1!} = 60$ möglichen Färbungen sind Fixpunkte
- drei $\pm 90^\circ$ Drehungen um die Achse durch den Mittelpunkt zweier gegenüber liegender Seitenflächen: $ZT(\pi) = x_1^2 x_4^1$
→ 0 Fixpunkte
- drei 180° Drehungen um die Achse durch den Mittelpunkt zweier gegenüber liegender Seitenflächen: $ZT(\pi) = x_1^2 x_2^2$
→ Um einen Fixpunkt zu erhalten, muss die blaue Seite eine der Seiten sein, durch die die Drehachse geht, also die einen Zyklus der Länge 1 bilden. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten. Weiters muss die zweite Seite, durch die die Drehachse geht, eine rote Seite sein und die beiden Seitenpaare, die die Zyklen der Länge 2 bilden sind grün und rot. Hier gibt es wieder zwei Möglichkeiten. Das ergibt insgesamt 4 Fixpunkte.

- vier $\pm 120^\circ$ Drehungen um die Achse durch zwei gegenüber liegende Eckpunkte:
 $ZT(\pi) = x_3^2$
 $\rightarrow 0$ Fixpunkte
- sechs 180° Drehungen um die Achse durch den Mittelpunkt zweier gegenüber liegender Kanten: $ZT(\pi) = x_2^3$
 $\rightarrow 0$ Fixpunkte

Nach Lemma 2.7 gibt es somit

$$\frac{1}{|\mathfrak{S}|} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}} |\{f \in \mathcal{K}^{(3,2,1)} : \pi(f) = f\}| = \frac{1}{24} (1 \cdot 60 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0) = \frac{72}{24} = 3$$

in Bezug auf \mathfrak{S} inäquivalenten Färbungen des Würfels mit drei roten, zwei grünen und einer blauen Seitenfläche. \circ

2.3 Satz von Pólya

Der Satz von Pólya erklärt wie man die erzeugende Funktion der in Bezug auf \mathfrak{S} inäquivalenten Konfigurationen, die in (1.4) definiert wurde, erhält. Dies ist mit Hilfe der abzählenden Potenzreihe des Figurenvorrats (1.1) möglich.

Satz 2.9 (Satz von Pólya). *Die erzeugende Funktion der in Bezug auf \mathfrak{S} inäquivalenten Konfigurationen erhält man, in dem man die Potenzreihe des Figurenvorrats in den Zyklenzeiger von \mathfrak{S} folgendermaßen einsetzt:*

$$F(z_1, z_2, \dots, z_k) = P_{\mathfrak{S}}(f(z_1, z_2, \dots, z_k), f(z_1^2, z_2^2, \dots, z_k^2), \dots, f(z_1^n, z_2^n, \dots, z_k^n))$$

Beweis

Gegeben seien der Figurenvorrat \mathcal{F} sowie die zugehörige abzählende Potenzreihe $f(z_1, z_2, \dots, z_k)$. Gesucht ist die erzeugende Funktion der in Bezug auf \mathfrak{S} inäquivalenten Konfigurationen mit Gesamtinhalt $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, $F(z_1, z_2, \dots, z_k)$. Für diese Potenzreihe gilt, wie in (1.4) definiert

$$[z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_k^{\alpha_k}] F(z_1, z_2, \dots, z_k) = A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} = A_\alpha.$$

Man betrachtet zunächst die Anzahl der Konfigurationen $f = (f_1, f_2, \dots, f_s)$ mit Figuren aus \mathcal{F} und Gesamtinhalt $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$. Die Inhalte der einzelnen Figuren F_i seien $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,k})$ für $i = 1, \dots, s$ und es gilt

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^s \alpha_{i,1} = \alpha_1, \quad \sum_{i=1}^s \alpha_{i,2} = \alpha_2, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^s \alpha_{i,k} = \alpha_k.$$

Werden die Figuren F_i unabhängig von einander den Plätzen f_i der Konfiguration zugewiesen, so kann man dieser Konfiguration die Reihe

$$\begin{aligned} & \sum_{F_1 \in \mathcal{F}} \sum_{F_2 \in \mathcal{F}} \cdots \sum_{F_s \in \mathcal{F}} F_1 F_2 \cdots F_s z_1^{\alpha_{1,1} + \alpha_{2,1} + \cdots + \alpha_{s,1}} z_2^{\alpha_{1,2} + \alpha_{2,2} + \cdots + \alpha_{s,2}} \cdots z_k^{\alpha_{1,k} + \alpha_{2,k} + \cdots + \alpha_{s,k}} \\ &= \sum_{F_1 \in \mathcal{F}} F_1 z_1^{\alpha_{1,1}} z_2^{\alpha_{1,2}} \cdots z_k^{\alpha_{1,k}} \sum_{F_2 \in \mathcal{F}} F_2 z_1^{\alpha_{2,1}} z_2^{\alpha_{2,2}} \cdots z_k^{\alpha_{2,k}} \cdots \sum_{F_s \in \mathcal{F}} F_s z_1^{\alpha_{s,1}} z_2^{\alpha_{s,2}} \cdots z_k^{\alpha_{s,k}} \end{aligned}$$

zuordnen.

Setzt man nun in dieser Reihe $F_i = 1$, so ergibt sich die erzeugende Funktion der Konfigurationen (ohne Berücksichtigung der in Bezug auf \mathfrak{S} äquivalenten Konfigurationen) mit Gesamtinhalt α als Produkt der abzählenden Potenzreihen des Figureinhalts,

$$\sum_{\alpha} \tilde{A}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_k^{\alpha_k} = f(z_1, z_2, \dots, z_k)^s$$

mit $\tilde{A}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$ als Anzahl der Konfigurationen mit Gesamtinhalt α .

Sei nun $\pi \in \mathfrak{S}$ eine Permutation des Typs $j = [j_1, j_2, \dots, j_n]$ und $X_{\alpha}(\pi)$ die Anzahl der Konfigurationen mit Gesamtinhalt α , die durch π in sich selbst übergeführt werden. Man betrachtet nun die zugehörige Potenzreihe,

$$\sum_{\alpha} X_{\alpha}(\pi) z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_k^{\alpha_k}.$$

Sei $(a_1, a_2, \dots, a_{\lambda})$ ein Zyklus der Länge λ in π . Um zu gewährleisten, dass die Konfiguration f durch π in sich selbst übergeführt wird, also $\pi(f) = f$ gilt, muss $F_{a_1} = F_{a_2} = \cdots = F_{a_{\lambda}}$ gelten. Allgemein muss gelten, dass Figuren innerhalb eines Zyklus immer identisch sein müssen, jedoch in verschiedenen Zyklen unabhängig von einander gewählt werden können.

Jeder Zyklus der Länge λ trägt zum Gesamtinhalt der Konfiguration das λ -fache des Inhalts der ihm zugeordneten Figur bei. Für den oben erwähnten Zyklus, wäre der Gesamtinhalt $\lambda \cdot \alpha_{a_1} = (\lambda \alpha_{a_1, 1}, \lambda \alpha_{a_1, 2}, \dots, \lambda \alpha_{a_1, k})$. Die abzählende Potenzreihe dieses Zyklus der Länge λ ist dann

$$f(z_1^{\lambda}, z_2^{\lambda}, \dots, z_k^{\lambda}).$$

Man erhält als Potenzreihe der durch π in sich selbst übergeführten Konfigurationen

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha} X_{\alpha}(\pi) z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_k^{\alpha_k} = \\ & = f(z_1, z_2, \dots, z_k)^{j_1} f(z_1^2, z_2^2, \dots, z_k^2)^{j_2} \cdots f(z_1^n, z_2^n, \dots, z_k^n)^{j_n}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sei $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ eine bestimmte Konfiguration aus \mathcal{K}^{α} mit Gesamtinhalt α und sei $\mathfrak{S}' = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m\}$ die Menge aller Permutationen aus \mathfrak{S} , die g fest lassen, also $\pi_i(g) = g$ für alle $i = 1, \dots, m$. Nach dem Lemma von Burnside I, Satz 2.6, ist die Anzahl der Konfigurationen, die zu g in Bezug auf \mathfrak{S} äquivalent sind, $\frac{|\mathfrak{S}'|}{m}$. Jede dieser Konfigurationen wird von m Permutationen aus \mathfrak{S} in sich selbst übergeführt (nämlich von einer zu \mathfrak{S}' konjugierten Untergruppe in \mathfrak{S}). Jede dieser zu g in Bezug auf \mathfrak{S} äquivalenten Konfigurationen wird in m Termen der Summe

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}} X_{\alpha}(\pi)$$

mitgezählt, also wird die Äquivalenzklasse von g , $[g]_{\sim_{\mathfrak{S}}}$ insgesamt $\frac{|\mathfrak{S}'|}{m} \cdot m = |\mathfrak{S}'|$ mal in dieser Summe gezählt, also

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}} X_{\alpha}(\pi) = |\mathfrak{S}'| \cdot A_{\alpha}.$$

Für die erzeugende Funktion der in Bezug auf \mathfrak{S} äquivalenten Konfigurationen erhält man nun durch Umformen

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2, \dots, z_k) &= \sum_{\alpha} \frac{\sum_{\pi \in \mathfrak{S}} X_{\alpha}(\pi)}{|\mathfrak{S}|} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_k^{\alpha_k} \\ &= \frac{1}{|\mathfrak{S}|} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}} \sum_{\alpha} X_{\alpha}(\pi) z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_k^{\alpha_k} \end{aligned}$$

und Einsetzen von (2.2)

$$F(z_1, z_2, \dots, z_k) = \frac{1}{|\mathfrak{S}|} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}} f(z_1, z_2, \dots, z_k)^{j_1} f(z_1^2, z_2^2, \dots, z_k^2)^{j_2} \cdots f(z_1^n, z_2^n, \dots, z_k^n)^{j_n}.$$

Es können nun noch die Permutationen des gleichen Typs zusammengefasst werden um das gewünschte Ergebnis zu erhalten,

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2, \dots, z_k) &= \\ &= \frac{1}{|\mathfrak{S}|} \sum_j h_{j_1, j_2, \dots, j_s} f(z_1, z_2, \dots, z_k)^{j_1} f(z_1^2, z_2^2, \dots, z_k^2)^{j_2} \cdots f(z_1^n, z_2^n, \dots, z_k^n)^{j_n} = \\ &= P_{\mathfrak{S}}(f(z_1, z_2, \dots, z_k), f(z_1^2, z_2^2, \dots, z_k^2), \dots, f(z_1^n, z_2^n, \dots, z_k^n)). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.10. Das Einsetzen der Potenzreihe des Figurenvorrats $f(z_1, z_2, \dots, z_k)$ in den Zyklenzeiger $P_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ der Permutationsgruppe \mathfrak{S} , wird ab nun durch

$$P_{\mathfrak{S}}(f(z_1, z_2, \dots, z_k)) := P_{\mathfrak{S}}(f(z_1, z_2, \dots, z_k), f(z_1^2, z_2^2, \dots, z_k^2), \dots, f(z_1^n, z_2^n, \dots, z_k^n)) \quad (2.3)$$

kurz geschrieben.

2.4 Zyklenzeiger des direkten Produkts zweier Gruppen

In diesem Abschnitt wird wie in [Pó37] ab Seite 176 vorgegangen.

Seien \mathcal{G} und \mathcal{H} zwei Permutationsgruppen der Ordnungen g und h und den Größen r und s . Weiters bezeichnen $P_{\mathcal{G}}(x_1, x_2, \dots, x_r)$ und $P_{\mathcal{H}}(x_1, x_2, \dots, x_s)$ die Zyklenzeiger der beiden Gruppen. Die in \mathcal{G} permutierenden Elemente werden mit g_1, g_2, \dots, g_r und die in \mathcal{H} permutierenden Elemente mit h_1, h_2, \dots, h_s benannt. Zwei Permutationen $\pi_{\mathcal{G}}$ und $\pi_{\mathcal{H}}$ der beiden Gruppen können in folgender Weise notiert werden.

$$\pi_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_i & \cdots & g_r \\ g_{1'} & g_{2'} & \cdots & g_{i'} & \cdots & g_{r'} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \pi_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_j & \cdots & h_s \\ h_{1'} & h_{2'} & \cdots & h_{j'} & \cdots & h_{s'} \end{pmatrix}$$

Für das direkte Produkt $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ wird aus den Gruppen \mathcal{G} und \mathcal{H} je eine Permutation gewählt. Hierfür gibt es insgesamt $g \cdot h$ Möglichkeiten. Dem Paar $\pi_{\mathcal{G}}, \pi_{\mathcal{H}}$ wird die Permutation

$$\begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_i & \cdots & g_r & h_1 & \cdots & h_j & \cdots & h_s \\ g_{1'} & \cdots & g_{i'} & \cdots & g_{r'} & h_{1'} & \cdots & h_{j'} & \cdots & h_{s'} \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Das bedeutet, die beiden einzelnen Permutationen werden einfach gleichzeitig ausgeführt.

Die Zyklentypen der einzelnen Permutationen bleiben gleich. Es werden nur zwei Permutationen gleichzeitig ausgeführt. Man muss also die Zyklentypen zusammenfassen und das funktioniert, indem man die beiden Zyklenzeiger miteinander multipliziert. Der Zyklenzeiger von $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ ist also das Produkt der beiden Zyklenzeiger $P_{\mathcal{G}}$ und $P_{\mathcal{H}}$,

$$P_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}} = P_{\mathcal{G}} \times P_{\mathcal{H}}.$$

Das Produkt wird hier mit dem Symbol \times geschrieben, da es sich um ein Produkt von Polynomen in mehreren Variablen handelt. Dieses Produkt ist wie in [Fri97] folgendermaßen definiert.

Definition 2.11. Seien $P_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $P_2(x_1, x_2, \dots, x_m)$ Polynome über \mathbb{Q} in den Variablen $x_1, x_2, \dots, x_{\max\{n, m\}}$. Diese können als

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(j)} p_{(j)} \prod_{i=1}^n x_i^{j_i} \quad \text{und} \quad P_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{(k)} q_{(k)} \prod_{i=1}^m x_i^{k_i}$$

dargestellt werden. Das **Produkt** der beiden Polynome ist definiert als

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \times P_2(x_1, x_2, \dots, x_m) := \sum_{(j)} \sum_{(k)} p_{(j)} q_{(k)} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{j_i} \right) \times \left(\prod_{i=1}^m x_i^{k_i} \right),$$

wobei

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i^{j_i} \right) \times \left(\prod_{i=1}^m x_i^{k_i} \right) := \prod_{i=1}^n \prod_{\ell=1}^m (x_i^{j_i} \times x_{\ell}^{k_{\ell}})$$

und

$$x_i^{j_i} \times x_{\ell}^{k_{\ell}} := x_{\text{kgV}(i, \ell)}^{j_i k_{\ell} \text{ggT}(i, \ell)}$$

gilt.

Weiters wird die k -te Potenz eines Polynoms $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ durch

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n)^{\times k} := \underbrace{P(x_1, x_2, \dots, x_n) \times \cdots \times P(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{k\text{-mal}}$$

definiert.

2.5 Spezielle Permutationsgruppen

Für die Beschreibung der Permutationsgruppen wird zusätzlich zu [P637] das Buch [Tit14] verwendet.

2.5.1 Die symmetrische Gruppe S_n

Die symmetrische Gruppe S_n besteht aus allen Permutationen einer n -elementigen Menge. Die Operation dieser Gruppe ist die Hintereinanderausführung von Permutationen. Eine Verknüpfung zweier Permutationen wird von rechts nach links gelesen, $\pi_i\pi_j$ bedeutet also, dass zuerst π_j und dann π_i ausgeführt wird. Im Allgemeinen ist die Hintereinanderausführung von Permutationen nicht kommutativ, das Ergebnis hängt also von der Reihenfolge der Permutationen ab.

Um den Zyklenzeiger, wie in Definition 1.7 beziehungsweise in Bemerkung 1.8 definiert, aufstellen zu können, benötigt man die Anzahl der Permutationen des gleichen Typs. Sei $j = [j_1, j_2, \dots, j_n]$ ein Typ von Permutationen in S_n . Wie viele Permutationen mit dem Typ $j = [j_1, j_2, \dots, j_n]$ gibt es in S_n ?

Permutationen vom Typ $j = [j_1, j_2, \dots, j_n]$ können auf $j_1!j_2!\cdots j_n!$ verschiedene Arten, die sich nur durch Permutationen der Zyklen unterscheiden, dargestellt werden. Alle j_i Zyklen der Länge i können auf genau i verschiedene Arten dargestellt werden, also gibt es insgesamt i^{j_i} Möglichkeiten die Elemente dieser j_i Zyklen anzuordnen. Daraus folgt, dass es

$$\frac{n!}{1^{j_1}j_1!2^{j_2}j_2!\cdots n^{j_n}j_n!}$$

verschiedene Permutationen vom Typ $j = [j_1, j_2, \dots, j_n]$ gibt. Mit der Formel (1.3) aus Bemerkung 1.8 folgt nun die Darstellung des Zyklenzeigers der symmetrischen Gruppe,

$$P_{S_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{j=[j_1, j_2, \dots, j_n]} \frac{n!}{1^{j_1}j_1!2^{j_2}j_2!\cdots n^{j_n}j_n!} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}. \quad (2.4)$$

In dem Fall, dass $\mathfrak{S} = S_n$ gilt, ist jede Konfiguration zu jeder anderen äquivalent, die aus ihr durch eine der $n!$ Permutationen aus S_n hervorgeht. Die Reihenfolge der n Figuren in der Konfiguration spielt für die Äquivalenz keine Rolle. Es kommt nur darauf an, welche Figuren in der Konfiguration vorkommen. $A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$ ist also die Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung von n Figuren aus dem Figurenvorrat \mathcal{F} mit Gesamtinhalt $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$.

Lemma 2.12. *Der Zyklenzeiger der symmetrischen Gruppe erfüllt die Rekursion*

$$P_{S_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k P_{S_{n-k}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k}), \quad P_{S_0} := 1.$$

Beweis

Die Richtigkeit der Aussage folgt aus der Überlegung, dass wenn man einen neuen Zyklus der Länge k einfügen möchte und eine Permutation in der symmetrischen Gruppe S_n erhalten will, dies nur in der symmetrischen Gruppe S_{n-k} tun kann. Anderenfalls wäre die Bedingung aus Bemerkung 1.5 für S_n verletzt. \square

2.5.2 Die alternierende Gruppe A_n

Die alternierende Gruppe A_n besteht aus allen geraden Permutationen einer n -elementigen Menge. Die Gruppenoperation ist wiederum die Hintereinanderausführung von Permutationen.

Es gibt mehrere Möglichkeiten zu definieren, was es bedeutet, dass eine Permutation gerade oder ungerade ist. Hier wird die Version genannt, auf die bei der Überlegung für den Zyklenzeiger der alternierenden Gruppe zurückgegriffen wird.

Definition 2.13. Jede Permutation lässt sich in Zyklen zerlegen. Eine Permutation ist genau dann **gerade**, wenn die Anzahl der Zyklen gerader Länger gerade ist.

Um den Zyklenzeiger der alternierenden Gruppe wie in Bemerkung 1.8 zu erhalten, muss man sich nun die Anzahl der Permutationen gleichen Zyklentyps überlegen. Als erste Beobachtung ist festzuhalten, dass es keine ungeraden Permutationen gibt. Es gibt natürlich genauso viele gerade Permutationen des gleichen Zyklentyps wie schon in der symmetrischen Gruppe. Die Mächtigkeit der alternierenden Gruppe ist allerdings nicht mehr $n!$, sondern $\frac{n!}{2}$, was die zweite wichtige Beobachtung für die Darstellung des Zyklenzeigers der alternierenden Gruppe ist.

Diese beiden Eigenschaften können nun zusammengefasst werden, indem man beim Koeffizienten der symmetrischen Gruppe aus Gleichung (2.4) den Faktor

$$(1 + (-1)^{j_2+j_4+j_6+\dots})$$

ergänzt.

Schlussendlich ergibt sich dann

$$P_{A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{j=[j_1, j_2, \dots, j_n]} \frac{n! (1 + (-1)^{j_2+j_4+j_6+\dots})}{1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots n^{j_n} j_n!} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$$

als Zyklenzeiger der alternierenden Gruppe A_n .

2.5.3 Die zyklische Gruppe C_n

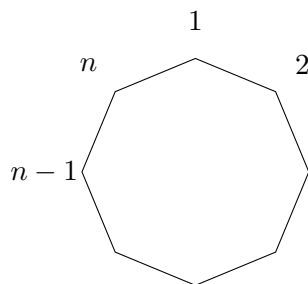
Eine Gruppe, die von einem Element π erzeugt wird, wird zyklische Gruppe genannt. Sie besteht aus Potenzen des Erzeugers,

$$\langle \pi \rangle := \{\pi^i : i \in \mathbb{Z}\}.$$

Für jede natürliche Zahl n gibt es eine zyklische Gruppe C_n mit genau n Elementen. Für zyklische Gruppen der Ordnung n gilt, dass π^n das neutrale Element $e = \text{id} = \pi^0$ ist, $\pi^n = e$, und höhere Potenzen den jeweiligen Elementen entsprechen, $\pi^m = \pi^{m \bmod n}$.

Zyklische Gruppen sind isomorph zu Drehgruppen regelmäßiger n -Ecke. Jede Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ entspricht einer Permutation einer n -elementigen Menge. Die Drehgruppe C_n kann durch Potenzen der Permutation $\pi = (1, 2, \dots, n)$ dargestellt werden,

$$C_n = \{e = \pi^0, \pi^1, \dots, \pi^{n-1}\}.$$

Abbildung 2.1: n -Eck

Um den Zyklenzeiger dieser Gruppe zu erhalten, muss man die Zyklensstrukturen der Elemente der Gruppe untersuchen, also die Potenzen π^k von $\pi = (1, 2, \dots, n)$.

Sei g der größte gemeinsame Teiler von k und n , $g = \text{ggT}(k, n)$, wobei $k \leq n$ auf Grund von $\pi^k = \pi^{k \bmod n}$ vorausgesetzt werden kann. Das bedeutet es gibt zwei natürliche Zahlen c und d , sodass $c = \frac{k}{g}$ und $d = \frac{n}{g}$ gilt. Diese beiden Beziehungen können umgeschrieben werden und man erhält

$$g = \frac{n}{d} \quad \text{und} \quad k = c \cdot g = c \cdot \frac{n}{d},$$

woraus der Zusammenhang

$$n \cdot c = k \cdot d$$

folgt. Da C_n eine zyklische Gruppe der Ordnung n ist, gilt

$$\text{id} = \pi^{n \cdot c} = \pi^{k \cdot d} = (\pi^k)^d.$$

Da $\frac{n}{d}$ der größte gemeinsame Teiler ist, ist d die kleinste Zahl mit obiger Eigenschaft (anderenfalls wäre der ggT größer). Daraus kann nun geschlossen werden, dass die Permutation π^k in insgesamt $\frac{n}{d}$ Zyklen der Länge d zerfällt. Der Zyklenzeiger hat also die Gestalt

$$P_{C_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} c_d x_d^{\frac{n}{d}},$$

wobei die Koeffizienten c_d noch bestimmt werden müssen. Es ist also noch die Frage nach der Anzahl der Permutationen aus C_n mit genau $\frac{n}{d}$ Zyklen der Länge d zu beantworten.

Jede natürliche Zahl k mit $1 \leq k \leq n$ und $\text{ggT}(k, n) = \frac{n}{d}$ liefert eine Permutation $\sigma = \pi^k$ aus C_n mit $\frac{n}{d}$ Zyklen der Länge d . Aus

$$\text{ggT}(k, n) = \text{ggT}\left(c \cdot \frac{n}{d}, d \cdot \frac{n}{d}\right) = \frac{n}{d}$$

folgt, dass c und d teilerfremd sind. Das bedeutet jede zu d teilerfremde Zahl c , die kleiner oder gleich d ist, liefert mit $k = c \cdot \frac{n}{d}$ eine Permutation $\sigma = \pi^k$ mit der gewünschten Eigenschaft.

Die Anzahl der zu d teilerfremden Zahlen, die kleiner oder gleich d sind, kann mit der Eulerschen Phi-Funktion $\varphi(d)$ berechnet werden, also gilt für die Koeffizienten $c_d = \varphi(d)$. Der Zyklenzeiger der zyklischen Gruppe C_n hat folgende Darstellung:

$$P_{C_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{\frac{n}{d}} \quad (2.5)$$

2.5.4 Die Diedergruppe D_n

Weitere Literatur, die für diesen Abschnitt verwendet wird, ist das Buch [KPR13].

Die Diedergruppe ist die Transformationsgruppe eines regelmäßigen n -Ecks. Diese Gruppe besteht aus den n Drehungen um die Winkel

$$0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

und n Spiegelungen an Geraden. Bei geradem n gehen die Hälfte dieser Achsen durch gegenüberliegende Eckpunkte und die andere Hälfte der Geraden durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten. Wenn n ungerade ist, liegt jede der n Geraden durch einen Eckpunkt und durch den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante.



Abbildung 2.2: Spiegelachsen von n -Ecken

Die Drehungen der Diedergruppe werden von einer beliebigen Drehung, zum Beispiel $\pi = (1, 2, \dots, n)$ (vergleiche dazu Abschnitt 2.5.3), erzeugt und bilden somit eine zyklische Untergruppe der Ordnung n . Die gesamte Gruppe D_n erhält man nun durch Hinzufügen einer beliebigen Spiegelung, zum Beispiel die Spiegelung mit Achse durch den Eckpunkt n . Diese Spiegelung hat die folgenden Zyklen Schreibweisen:

$$\begin{aligned} \sigma &= (1, n-1)(2, n-2) \cdots \left(\frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}+1\right) \left(\frac{n}{2}\right) (n), & n \text{ gerade} \\ \sigma &= (1, n-1)(2, n-2) \cdots \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) (n), & n \text{ ungerade} \end{aligned}$$

Alle weiteren Spiegelungen σ_k erhält man durch Anwendung der Spiegelungen, $\sigma_k = \pi^k \sigma$. Die Diedergruppe kann also dargestellt werden als

$$D_n = \langle \pi, \sigma : \pi^n = \sigma^2 = \text{id}, \sigma\pi\sigma = \pi^{-1} \rangle.$$

Die n Drehungen tragen zum Zyklenzeiger den gleichen Beitrag bei, wie bei der zyklischen Gruppe aus Abschnitt 2.5.3. Man muss also noch die Spiegelungen genauer untersuchen.

Für gerades n gibt es $\frac{n}{2}$ Spiegelungen die zwei Fixpunkte haben und die anderen Elemente jeweils Zweierzyklen bilden. Die andere Hälfte der n Spiegelungen bilden lauter Zweierzyklen. Diese Permutationen tragen also die Summanden

$$\frac{n}{2}x_1^2x_2^{\frac{n-2}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{n}{2}x_2^{\frac{n}{2}}$$

zum Zyklenzeiger der Diedergruppe D_n für gerades n bei.

Bei ungeradem n gibt es nur Spiegelungen mit Achse durch einen Eckpunkt und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite, wie in Abbildung 2.2b dargestellt. Das bedeutet jede dieser Spiegelungen hat genau einen Einserszyklus und sonst lauter Zweierzyklen. Sie liefern zum Zyklenzeiger also den Summanden

$$nx_1x_2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Gemeinsam mit Formel (2.5) folgt nun die Darstellung des Zyklenzeigers der Diedergruppe D_n .

$$P_{D_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \left(\frac{n}{2}x_1^2x_2^{\frac{n-2}{2}} + \frac{n}{2}x_2^{\frac{n}{2}} + \sum_{d|n} \varphi(d)x_d^{\frac{n}{d}} \right) & , n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2n} \left(nx_1x_2^{\frac{n-1}{2}} + \sum_{d|n} \varphi(d)x_d^{\frac{n}{d}} \right) & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Durch Umformen erhält man die (einfachere) Gestalt,

$$P_{D_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi(d)x_d^{\frac{n}{d}} + \begin{cases} \frac{1}{4} \left(x_1^2x_2^{\frac{n-2}{2}} + x_2^{\frac{n}{2}} \right) & , n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}x_1x_2^{\frac{n-1}{2}} & , n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

2.5.5 Die allgemeine lineare Gruppe GL_n

Zur Beschreibung der allgemeinen linearen Gruppe GL_n und der affinen Gruppe Aff_n und ihrer Zyklenzeiger werden die Bücher [DM96] und [Hav06] und der Artikel [Fri97] verwendet.

Die allgemeine lineare Gruppe und ihr Zyklenzeiger sind hilfreich für den Zyklenzeiger der affinen Gruppe. Deshalb wird sie hier zuerst besprochen.

Die allgemeine lineare Gruppe vom Grad n eines Vektorraums V über einem endlichen Körper K , $GL_n(K)$ ist die Menge aller bijektiven, linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} f : V &\rightarrow V \\ x &\mapsto Ax, \end{aligned}$$

also aller regulären $n \times n$ -Matrizen.

$$GL_n(K) = \{A : f : V \rightarrow V \text{ mit } f(x) = Ax \text{ und } \det(A) \neq 0\}$$

Für den Zyklenzeiger der allgemeinen linearen Gruppe und später auch für den Zyklenzeiger der affinen Gruppe werden einige Definitionen und Eigenschaften der klassischen Normalform einer linearen Abbildung benötigt, die hier mit weiterer Hilfe von [Fri94] zusammengefasst werden.

Sei $K := F_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen, V ein n -dimensionaler Vektorraum über K und A eine lineare Abbildung auf V .

Zwei Abbildungsmatrizen A_1 und A_2 aus $GL_n(K)$ werden **konjugiert** genannt, in Zeichen $A_1 \sim A_2$, wenn eine Matrix B in $GL_n(K)$ existiert, sodass

$$A_1 = BA_2B^{-1} \quad (2.6)$$

gilt. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Bemerkung 2.14. Zwei Permutationen sind genau dann konjugiert, wenn sie den gleichen Zyklentyp haben.

Definition 2.15. Ein Polynom $\varphi(x) \in K[x]$ wird genau dann **Annulatorpolynom zu A von $v \in V$** genannt, wenn

$$\varphi(A)v = 0$$

gilt. Weiters wird $\varphi(x) \in K[x]$ **Annulatorpolynom zu A von V** genannt, wenn $\varphi(x)$ ein Annulatorpolynom zu A von v für alle $v \in V$ ist.

Definition 2.16. Ein Annulatorpolynom zu A , das normiert ist und minimalen Grad hat, heißt **Minimalpolynom zu A** .

Definition 2.17. Das **charakteristische Polynom zu A** wird definiert durch

$$\chi_A(x) = \det(A - xE).$$

Kann das Minimalpolynom $\varphi(x)$ von V geschrieben werden als

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^s \varphi_i(x)^{c_i}$$

mit paarweise verschiedenen, normierten, irreduziblen Polynomen $\varphi_i(x)$, so gibt es eine Zerlegung des Vektorraums V in eine direkte Summe von unter A invarianten Unterräumen U_i , sodass $\varphi(x)^{c_i}$ die Minimalpolynome der U_i sind,

$$V = \bigoplus_{i=1}^s U_i. \quad (2.7)$$

Weiters ist jeder dieser Unterräume U_i eine direkte Summe von zyklischen Unterräumen $W_{i,j}$ mit $j = 1, 2, \dots, r(i)$.

Definition 2.18. Sei $A : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung auf einem Vektorraum und $v \in V$. Der **A -zyklische Vektorraum W** , der durch v generiert wird, ist der Raum mit der Basis

$$\{v, Av, A^2v, \dots\}.$$

Für die zyklischen Unterräume $W_{i,j}$ gilt, dass $\varphi_i(x)^{c_i}$ das Minimalpolynom von $W_{i,r(i)}$ ist und das Minimalpolynom von $W_{i,j}$ ein Teiler des Minimalpolynoms von $W_{i,j+1}$ für alle $j = 1, 2, \dots, r(i) - 1$ ist.

$$U_i = \bigoplus_{j=1}^{r(i)} W_{i,j} \quad (2.8)$$

Sei Z ein zyklischer Unterraum der Dimension d mit Basis

$$\{v, Av, A^2v, \dots, A^{d-1}v\}$$

und Minimalpolynom

$$\varphi(x) := \sum_{i=0}^d a_i x^i \quad \text{und} \quad a_d = 1.$$

Dann kann die Einschränkung von A auf Z bezüglich obiger Basis durch die sogenannte **Begleitmatrix** $C(\varphi)$ von $\varphi(x)$ beschrieben werden.

$$C(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{d-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

Dies ist durch die Annulator-Eigenschaft des Minimalpolynoms leicht zu sehen.

$$\begin{aligned} \varphi(A) \cdot v = 0 \quad \forall v \in V &\Leftrightarrow A^d \cdot v + a_{d-1} A^{d-1} \cdot v + \cdots + a_1 A \cdot v + a_0 E \cdot v = 0 \\ &\Leftrightarrow A^d \cdot v = -a_0 E \cdot v - a_1 A \cdot v - \cdots - a_{d-1} A^{d-1} \cdot v \end{aligned}$$

Falls Z ein zyklischer Unterraum der Dimension dk mit Minimalpolynom $\varphi(x)^k$ ist, existiert eine Basis von Z , sodass die Einschränkung von A auf Z durch die **Hyper-Begleitmatrix** $H(\varphi^k)$ von $\varphi(x)^k$ beschrieben werden kann.

$$H(\varphi^k) = \left(\begin{array}{cccccc} C(\varphi) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ E_{1d} & C(\varphi) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{1d} & C(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{1d} & C(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & E_{1d} & C(\varphi) \end{array} \right) \Bigg\} k, \quad E_{1d} := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Um diese Darstellung einzusehen, benutzt man wieder die Annulator-Eigenschaft des Minimalpolynoms und zerlegt es geeignet in Faktoren.

$$\varphi(A)^k \cdot v = 0 \quad \forall v \in V \Leftrightarrow \varphi(A) \varphi(A)^{k-1} \cdot v = 0 \quad \forall v \in V$$

Definiert man nun $x_1 := \varphi(A)^{k-1} \cdot v$, so erhält man

$$\varphi(A) \cdot x_1 = 0.$$

Da $\varphi(x)$ ein Minimalpolynom zu A ist, gilt diese Gleichheit und man erhält als Basiselemente

$$\{x_1, Ax_1, A^2x_1, \dots, A^{d-1}x_1\}$$

und somit die letzte Spalte in der Blockdiagonalmatrix $H(\varphi^k)$.
Faktoriert man das Minimalpolynom durch

$$\varphi(A)^k \cdot v = 0 \quad \forall v \in V \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(A)^2 \varphi(A)^{k-2} \cdot v = 0 \quad \forall v \in V$$

und definiert man $x_2 := \varphi(A)^{k-2} \cdot v$, so erhält man mit dem Zusammenhang

$$\begin{aligned} \varphi(A) \cdot x_2 = x_1 &\Leftrightarrow A^d \cdot x_2 + a_{d-1}A^{d-1} \cdot x_2 + \dots + a_1A \cdot x_2 + a_0E \cdot x_2 = x_1 \\ &\Leftrightarrow A^d \cdot x_2 = -a_0E \cdot x_2 - a_1A \cdot x_2 - \dots - a_{d-1}A^{d-1} \cdot x_2 + x_1 \end{aligned}$$

die vorletzte Spalte der Matrix. Weitere Basiselemente sind also

$$\{x_2, Ax_2, A^2x_2, \dots, A^{d-1}x_2\}.$$

Setzt man dieses Verfahren fort, erhält man als Basis des Vektorraums

$$\{x_k, Ax_k, \dots, A^{d-1}x_k, x_{k-1}, Ax_{k-1}, \dots, A^{d-1}x_{k-1}, \dots, x_1, Ax_1, \dots, A^{d-1}x_1\} \quad (2.10)$$

mit

$$x_m := \varphi(A)^{k-m} \cdot v.$$

Die Hyper-Begleitmatrix $H(\varphi^k)$ aus (2.9) beschreibt also die Einschränkung von A auf Z bezüglich dieser Basis (2.10). Im Falle $k = 1$ gilt für die Hyper-Begleitmatrix, dass sie mit der Begleitmatrix ident ist, $H(\varphi^1) = C(\varphi)$.

Sei nun V ein Vektorraum mit der Zerlegung aus (2.7) und (2.8) und mit Minimalpolynom

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^s \varphi_i(x)^{c_i}$$

und charakteristischem Polynom

$$\chi_A(x) = \prod_{i=1}^s \varphi_i(x)^{\gamma_i} \quad \text{mit } \gamma_i \geq c_i.$$

Für γ_i gilt

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{c_i} j \cdot \lambda_j^{(i)}, \quad (2.11)$$

wobei $\lambda_j^{(i)}$ die Anzahl der zyklischen Unterräume der U_i mit Minimalpolynom $\varphi_i(x)^j$ ist. Für diese Anzahlen gilt außerdem für alle $i = 1, \dots, s$

$$\lambda_j^{(i)} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, c_i \quad \text{und} \quad \lambda_{c_i}^{(i)} \geq 1, \quad \text{für } j = c_i.$$

Die $\lambda_j^{(i)}$ werden nun zu Vektoren $\lambda^{(i)}$ zusammengefasst,

$$\lambda^{(i)} := \left(\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_{c_i}^{(i)} \right).$$

Die **klassische Normalform** der Matrix A ist dann die Blockdiagonalmatrix

$$\text{diag} \left(D(\varphi_1, \lambda^{(1)}), D(\varphi_2, \lambda^{(2)}), \dots, D(\varphi_s, \lambda^{(s)}) \right), \quad (2.12)$$

wobei die Matrizen $D(\varphi_i, \lambda^{(i)})$ folgende Blockdiagonalmatrizen der Gestalt

$$\begin{aligned} D(\varphi_i, \lambda^{(i)}) &= \text{diag} \left(\underbrace{C(\varphi_i), \dots, C(\varphi_i)}_{\lambda_1^{(i)}}, \underbrace{H(\varphi_i^2), \dots, H(\varphi_i^2)}_{\lambda_2^{(i)}}, \underbrace{H(\varphi_i^3), \dots, H(\varphi_i^3), \dots}_{\lambda_3^{(i)}} \right) = \\ &= \text{diag} \left(\underbrace{H(\varphi_i^1), \dots, H(\varphi_i^1)}_{\lambda_1^{(i)}}, \underbrace{H(\varphi_i^2), \dots, H(\varphi_i^2)}_{\lambda_2^{(i)}}, \underbrace{H(\varphi_i^3), \dots, H(\varphi_i^3), \dots}_{\lambda_3^{(i)}} \right) \end{aligned}$$

sind.

In jeder Äquivalenzklasse der Relation aus (2.6), der sogenannten Konjugiertheitsklasse, liegt eine dieser Blockdiagonalmatrizen (2.12). Somit wurden also die Konjugiertheitsklassen bestimmt. Die Zyklentypen innerhalb einer Konjugiertheitsklasse sind nach Bemerkung 2.14 gleich, daher ist es nun Ziel die Mächtigkeit dieser Klassen zu berechnen.

Die Mächtigkeit einer Konjugiertheitsklasse kann mit Hilfe des Satzes von Lagrange berechnet werden.

Satz 2.19 (Satz von Lagrange). *Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe. G/U und $U \backslash G$ seien die Mengen aller Links- und Rechtsnebenklasse. Für die Nebenklassen gilt $|G/U| = |U \backslash G|$. Weiters gilt*

$$|G| = |U \backslash G| \cdot |U|.$$

Man sieht also $GL_n(K)$ als Transformationsgruppe auf sich selbst und betrachtet die Abbildungen

$$\begin{aligned} X &: GL_n(K) \rightarrow GL_n(K) \\ M &\mapsto XMX^{-1}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Mit dieser Abbildungsvorschrift gilt auch $XY = X \circ Y$, da

$$XY(M) = XYM(XY)^{-1} = XYMY^{-1}X^{-1} = X(Y(M)) = (X \circ Y)(M),$$

wobei links die Matrixmultiplikation von X und Y steht und rechts die Hintereinanderausführung der Funktionen X und Y .

Der Zentralisator \mathcal{Z}_A zu der Abbildung A ist die Menge aller mit A kommutierenden Funktionen. Mit den Abbildungen aus (2.13) gilt für den Zentralisator

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_A &= \{B \in GL_n(K) : AB = BA\} = \\ &= \{B \in GL_n(K) : A = BAB^{-1}\} = \\ &= \{B \in GL_n(K) : B(A) = A\}. \end{aligned}$$

Die Konjugiertheitsklasse zu A , \mathcal{K}_A , kann mit Hilfe der Funktionen aus (2.13) durch

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_A &= \left\{ \tilde{A} \in GL_n(K) : \exists B \in GL_n(K) \text{ mit } \tilde{A} = BAB^{-1} \right\} = \\ &= \left\{ \tilde{A} \in GL_n(K) : \exists B \in GL_n(K) \text{ mit } \tilde{A} = B(A) \right\} = \\ &= \{B(A) : B \in GL_n(K)\}\end{aligned}$$

beschrieben werden.

Man betrachtet nun die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \mathcal{K}_A &\rightarrow GL_n(K)/\mathcal{Z}_A \\ B(A) &\mapsto B \circ \mathcal{Z}_A.\end{aligned}$$

Für alle Elemente X aus dem Zentralisator \mathcal{Z}_A gilt

$$(B \circ X)(A) = B(X(A)) = B(A),$$

woraus die Bijektivität der Abbildung \mathcal{F} folgt. Weiters kann man durch die Definition $Y := B \circ X$ die Menge $B \circ \mathcal{Z}_A$ schreiben als

$$\begin{aligned}B \circ \mathcal{Z}_A &= \{B \circ X : X \in \mathcal{Z}_A\} = \\ &= \{Y \in GL_n(K) : Y(A) = B(A)\}.\end{aligned}$$

Daraus ist leicht ersichtlich, dass die Mengen

$$\mathcal{K}_A = \{B(A) : B \in GL_n(K)\} \text{ und } GL_n(K)/\mathcal{Z}_A = \{Y \in GL_n K : Y(A) = B(A)\}$$

gleich mächtig sind. Mit Hilfe des Satzes von Lagrange, Satz 2.19, folgt nun

$$|\mathcal{K}_A| = |GL_n(K)/\mathcal{Z}_A| = \frac{|GL_n(K)|}{|\mathcal{Z}_A|}.$$

Die Mächtigkeit der linearen Gruppe $GL_n(K)$ ist gegeben durch

$$|GL_n(K)| = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1}),$$

wobei q die Anzahl der Elemente von K ist, $|K| = q$. Es bleibt also noch die Mächtigkeit des Zentralisators zu bestimmen. Nach [Kun81] gilt folgendes Lemma.

Lemma 2.20. *Sei φ ein normiertes, irreduzibles Polynom in $K[x]$ vom Grad d und $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_c)$ so, dass $c = \sum_{i=1}^c i\lambda_i$ gilt. Seien weiters die μ_i durch*

$$\mu_i := \sum_{k=1}^i k\lambda_k + \sum_{k=i+1}^c i\lambda_k$$

definiert. Dann ist die Mächtigkeit des Zentralisators zu $D(\varphi, \lambda)$ gegeben durch

$$b(d, \lambda) := \prod_{i=1}^c \prod_{k=1}^{\lambda_i} (q^{d\mu_i} - q^{d(\mu_i - k)}).$$

Für die Konjugiertheitsklasse von A , \mathcal{K}_A , mit der klassischen Normalform (2.12) von A erhält man dann

$$|\mathcal{K}_A| = \frac{|GL_n(K)|}{\prod_{i=1}^s b(d_i, \lambda^{(i)})},$$

wenn die Polynome $\varphi_i(x)$ Grad d_i haben.

Um den Zykluszeiger der Konjugiertheitsklassen bestimmen zu können, wird der sogenannte Exponent (auch Ordnung oder Periode genannt) benötigt, der in [LN94] wie folgt definiert ist.

Definition 2.21. Sei f ein Polynom über dem Galoisfeld F_q mit $f(0) \neq 0$. Der **Exponent** (oder **Ordnung** oder **Periode**) ist die kleinste natürlich Zahl e , sodass $x^e - 1$ von $f(x)$ geteilt wird, also

$$e := \exp(f) = \min\{n \in \mathbb{N} : f(x) \mid x^n - 1\}.$$

Zunächst ist man am Zyklentyp der Hyperbegleitmatrix $H(\varphi^k)$ für ein festes k interessiert. Der endliche Körper, oder das Galoisfeld, F_q hat q Elemente. Der Raum F_q^d ist der Raum der Vektoren der Dimension d und Einträgen aus F_q . Dieser Raum hat q^d verschiedene Elemente. Der Zyklentyp dieser Hyperbegleitmatrix $H(\varphi^k)$ ist gegeben durch

$$x_1 \prod_{i=1}^k x_{e_i}^{\frac{q^{id} - q^{(i-1)d}}{e_i}}, \quad (2.14)$$

wobei $e_i := \exp(\varphi^i)$ der Exponent von φ^i für $1 \leq i \leq k$ ist. Die Hochzahl, also die Anzahl der Zyklen der Länge e_i , ist

$$\frac{q^{id} - q^{(i-1)d}}{e_i},$$

weil man insgesamt $q^{id} - q^{(i-1)d}$ Elemente für φ^i hat, die in den Zyklen der Länge e_i vorkommen. Die Zahl $q^{id} - q^{(i-1)d}$ erhält man, indem man von der Gesamtanzahl q^{id} , die Anzahl der für bereits $\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{(i-1)}$ verwendeten Elemente $q^{(i-1)d}$ abzieht.

Eine Abbildung $A \in GL_n(K)$ gegeben in klassischer Normalform (2.12) kann nach Abschnitt 2.4 durch das direkte Produkt

$$\times_{i=1}^s \times_{j=1}^{\gamma_i} \times_{k=1}^{\lambda_j^{(i)}} H(\varphi_i^j)$$

beschrieben werden, das auf dem Raum

$$\times_{i=1}^s \times_{j=1}^{\gamma_i} \times_{k=1}^{\lambda_j^{(i)}} F_q^{jd_i}$$

operiert, wobei d_i die Grade der Polynome φ_i sind.

Deshalb reicht es, den Zyklentyp von Hyperbegleitmatrizen (2.14) zu kennen, um den Zykluszeiger von $GL_n(K)$ zu erhalten. Dazu muss man also alle klassischen Normalformen (2.12) aus $GL_n(K)$ bestimmen.

Die Anzahl der normierten, irreduziblen Polynome vom Grad d über F_q ist in [LN94] gegeben durch

$$N_q(d) = \frac{1}{d} \sum_{t|d} \mu(t) q^{\frac{d}{t}},$$

wobei $\mu(t)$ die Möbius-Funktion,

$$\mu(t) := \begin{cases} 1 & , t = 1 \\ (-1)^k & , t \text{ ist das Produkt von } k \text{ verschiedenen Primzahlen} \\ 0 & , t \text{ ist durch das Quadrat einer Primzahl teilbar} \end{cases}$$

ist.

Jedes normierte, irreduzible Polynom vom Grad kleiner oder gleich n , außer das Polynom $P(x) = x$, kann als Teiler des charakteristischen Polynoms einer regulären Matrix $A \in GL_n(K)$ auftreten. Diese

$$t_n := \sum_{i=1}^n N_q(i) - 1$$

verschiedenen Polynome werden nun mit $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{t_n}(x)$ benannt. Um daraus die charakteristischen Polynome und somit die Matrizen $A \in GL_n(K)$ erstellen zu können, werden alle Lösungen $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{t_n}) \in \mathbb{N}^{t_n}$ von

$$\sum_{i=1}^{t_n} \gamma_i \cdot d_i = n \tag{2.15}$$

gesucht. Für diese Lösungen werden dann wiederum alle möglichen Vektoren $\lambda^{(i)} = (\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_{c_i}^{(i)}) \in \mathbb{N}^{c_i}$, auch Zyklentypen genannt, mit

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{c_i} j \cdot \lambda_j^{(i)}$$

gesucht (vergleiche (2.11)). Die Mengen aller möglichen Zyklentypen werden mit

$$ZT(\gamma_i) := \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{c_i}) : \gamma_i = \sum_{j=1}^{c_i} j \cdot \lambda_j \right\}$$

bezeichnet.

Somit kann die klassische Normalform (2.12) der Konjugiertheitsklasse von A mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{t_n} \varphi_i(x)^{\gamma_i}$$

als

$$\text{diag} \left(D(\varphi_1, \lambda^{(1)}), D(\varphi_2, \lambda^{(2)}), \dots, D(\varphi_{t_n}, \lambda^{(t_n)}) \right)$$

geschrieben werden, wobei

$$\lambda^{(i)} \in ZT(\gamma_i)$$

für alle $i = 1, 2, \dots, t_n$ gilt.

Zusammengefasst ergibt das für den Zyklenzeiger $P_{GL_n(K)}$ der allgemeinen linearen Gruppe $GL_n(K)$ folgende Gestalt:

Satz 2.22. Seien e_{ik} der Exponent von $\varphi_i(x)^k$, a_{ik} definiert als

$$a_{ik} := \frac{q^{kd_i} - q^{(k-1)d_i}}{e_{ik}}$$

und $b(d_i, \lambda^{(i)})$ die Größe des Zentralisators von $D(\varphi_i, \lambda^{(i)})$. Dann kann der Zyklenzeiger $P_{GL_n(K)}$ der allgemeinen linearen Gruppe durch

$$\frac{1}{|GL_n(K)|} \sum_{\gamma} \sum_{\lambda} \frac{|GL_n(K)|}{\prod_{i=1}^{t_n} b(d_i, \lambda^{(i)})} \times_{i=1}^{t_n} \times_{j=1}^{\gamma_i} \left(x_1 \prod_{k=1}^j x_{e_{ik}}^{a_{ik}} \right) \times_{j=1}^{\lambda_j^{(i)}}$$

berechnet werden. Die erste Summe läuft über alle Lösungen $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{t_n})$ von (2.15) und die zweite Summe über alle t_n -Tupel $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(t_n)}) \in \times_{i=1}^{t_n} ZT(\gamma_i)$ (für die Definition der Produkte siehe Definition 2.11).

2.5.6 Die affine Gruppe Aff_n

Eine bijektive, affine Abbildung auf einem Vektorraum V über einem endlichen Körper K ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f: V &\rightarrow V \\ x &\mapsto Ax + v \end{aligned}$$

mit $A \in GL_n(K)$ und $v \in V$. Diese Abbildung f wird durch die Abbildungsmatrix A und den Vektor v beschrieben. Statt f kann man auch (A, v) schreiben.

Hat man zwei Abbildungen (A_1, v_1) und (A_2, v_2) , so ergibt ihre Hintereinanderausführung

$$(A_1, v_1) \circ (A_2, v_2) = (A_1 A_2, A_1 v_2 + v_1)$$

wieder eine bijektive, affine Abbildung $(A_1 A_2, A_1 v_2 + v_1)$. Ebenso ist die Inverse einer Funktion

$$(A, v)^{-1} = (A^{-1}, A^{-1}v)$$

auch eine bijektive, lineare Funktion. Die Menge aller bijektiven, affinen Abbildungen

$$\text{Aff}_n(K) = \{(A, v) : A \in GL_n(K), v \in V\}$$

bilden also eine Gruppe, die affine Gruppe.

Beispiel 2.23.

Für den Fall, dass $n = 1$ gilt und $K = \mathbb{Z}_{12}$ der Restklassenkörper mit 12 Elementen ist, ist eine bijektive, affine Abbildung nichts anderes als eine Geradengleichung. Die

affine Gruppe $\text{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12})$ ist dann also die Menge der bijektiven, linearen Abbildungen auf \mathbb{Z}_{12} ,

$$\text{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12}) = \{f(x) = ax + b : a, b \in \mathbb{Z}_{12}\}.$$

○

Wie schon im letzten Abschnitt über die allgemeine lineare Gruppe 2.5.5 erwähnt, wird in diesem Teil darauf zurück gegriffen. Um dies tun zu können, wird das folgende Lemma benötigt.

Lemma 2.24. *Sei $A : K^n \rightarrow K^n$ eine reguläre, lineare Abbildung und $b \in K^n$. Wenn die Abbildung*

$$v \mapsto Av - v$$

bijektiv ist, so folgt, dass die Abbildung

$$v \mapsto B(v) := Av + b$$

den gleichen Zyklentyp hat wie die Abbildung $v \mapsto Av$.

Beweis

Wenn die Abbildung $A - \text{id}$ bijektiv ist, so existiert $c := (A - \text{id})^{-1}(b)$ und ist wohldefiniert. Weiters ist die Abbildung

$$\begin{aligned} T : K^n &\rightarrow K^n \\ v &\mapsto v - c \end{aligned}$$

eine Permutation von K^n und es gilt

$$\begin{aligned} (T^{-1} \circ B \circ T)(v) &= A(v - c) + b + c = \\ &= Av - Ac + (A - \text{id})(c) + c \\ &= Av. \end{aligned}$$

Also sind die beiden Abbildungen $v \mapsto Av$ und $v \mapsto B(v)$ konjugiert zueinander und haben somit den gleichen Zyklentyp. \square

Die klassische Normalform der Abbildung $(A, b) \in \text{Aff}_n(K)$ auf K^n , wobei K weiterhin als F_q angenommen wird, kann als ein direktes Produkt von Abbildungen (A', b') auf Unterräumen von K^n dargestellt werden. Hierbei ist A' eine Hyperbegleitmatrix eines normierten, irreduziblen Polynoms $\varphi_i(x) \in K[x]$.

Falls $\varphi_i(x) \neq x - 1$ gilt, dann ist die Abbildung $v \mapsto H(\varphi_i^j)v - v$ eine reguläre, lineare Abbildung. Nach Lemma 2.24 gilt somit, dass der Zyklentyp von $(H(\varphi_i^j), b)$ nicht von b abhängt, also gleich dem Zyklentyp von $(H(\varphi_i^j), 0)$ ist.

Man muss also noch den Fall $\varphi_i(x) = x - 1$ betrachten. Für dieses spezielle Polynom hat die Hyperbegleitmatrix die Gestalt

$$A := H(\varphi_i^j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seien $b = (b_1, b_2, \dots, b_j)^T \in K^j$, $b' = (b_1, 0, \dots, 0)^T \in K^j$ und $\tilde{b} = (-b_2, -b_3, \dots, -b_j, 0)^T \in K^j$ drei Vektoren und weiters

$$\begin{aligned} T : K^j &\rightarrow K^j \\ v &\mapsto v + \tilde{b} \end{aligned}$$

eine Permutation auf K^j . Da für die beiden Abbildungen $A : v \mapsto Av + b$ und $B : v \mapsto Av + b'$

$$\begin{aligned} (T^{-1} \circ A \circ T)(v) &= T^{-1}(AT(v) + b) = \\ &= AT(v) + b - \tilde{b} = \\ &= Av + \underbrace{A\tilde{b} + b - \tilde{b}}_{=b'} = \\ &= B(v) \end{aligned}$$

gilt, sind sie mittels T konjugiert zueinander. Der Zusammenhang

$$A\tilde{b} + b - \tilde{b} = b'$$

ist leicht nachzurechnen.

Das bedeutet, dass für alle q^{j-1} Vektoren $b \in K^j$ mit $b_1 = 0$, die Zyklentypen der affinen Abbildungen (A, b) und $(A, 0)$ gleich sind. Es muss also nur mehr der Zyklentyp von $B(v) := Av + b'$ für den Fall, dass $b_1 \neq 0$ gilt, berechnet werden.

Für diese Berechnung sei nun $A' := H(\varphi_i^{j+1}) \in GL_{j+1}(K)$. Damit gilt

$$A' \begin{pmatrix} b_1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ B(v) \end{pmatrix}.$$

Alle Elemente $(b_1, v)^T \in K^{j+1}$ haben bezüglich A' das selbe Minimalpolynom $\varphi_i^{j+1}(x)$, also liegen sie alle in $\frac{q^j}{e_{i,j+1}}$ Zyklen der Länge $e_{i,j+1}$ von A' .

Zusammengefasst ergibt das für den Zyklenzeiger $P_{\text{Aff}_n(K)}$ der affinen Gruppe $\text{Aff}_n(K)$ folgende Gestalt:

Satz 2.25. *Seien e_{ik} der Exponent von $\varphi_i(x)^k$ und a_{ik} definiert als*

$$a_{ik} := \frac{q^{kd_i} - q^{(k-1)d_i}}{e_{ik}}.$$

Weiters seien die u_{ij} durch

$$u_{ij} := \begin{cases} q^{jd_i} x_1 \prod_{k=1}^j x_{e_{ik}}^{a_{ik}} & , \varphi_i(x) \neq x - 1 \\ q^{j-1} x_1 \prod_{k=1}^j x_{e_{ik}}^{a_{ik}} + q^{j-1} (q-1) x_{e_{i,j+1}}^{\frac{q^j}{e_{i,j+1}}} & , \varphi_i(x) = x - 1 \end{cases}$$

definiert und $b(d_i, \lambda^{(i)})$ die Größe des Zentralisators von $D(\varphi_i, \lambda^{(i)})$. Dann kann der Zyklenzeiger $P_{\text{Aff}_n(K)}$ der affinen Gruppe durch

$$\frac{1}{|\text{Aff}_n(K)|} \sum_{\gamma} \sum_{\lambda} \frac{|GL_n(K)|}{\prod_{i=1}^{t_n} b(d_i, \lambda^{(i)})} \times_{i=1}^{t_n} \times_{j=1}^{\gamma_i} \lambda_j^{(i)}$$

berechnet werden. Die erste Summe läuft über alle Lösungen $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{t_n})$ von (2.15) und die zweite Summe über alle t_n -Tupel $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(t_n)}) \in \times_{i=1}^{t_n} ZT(\gamma_i)$.

Teil II

Anwendungen

Kapitel 3

Der Satz von Pólya in der Musik

In diesem Abschnitt wird zu Beginn die Zwölftonmusik nach Arnold Schönberg aus musikalischer Sicht erklärt. Hier wird allerdings nur auf die Reihenfolge der Töne eingegangen, also genau genommen werden Zwölfton-Reihen besprochen. Für die Darstellung von Noten werden die Artikel [TME11] und [Pur04] zu Hilfe genommen.

Bei der mathematischen Beschreibung der Zwölfton-Reihen wird hauptsächlich wie in Artikel [FL15] vorgegangen. Ein weiteres Werk, das sich mit dieser Thematik beschäftigt und auch in diesem Kapitel verwendet wird, ist das Buch [Ilo08].

3.1 Zwölftonmusik und Zwölfton-Reihen

Für dieses Kapitel werden die Wikipediaeinträge [Wik17] und [Wik15] verwendet. Für genauere und ausführlichere Erklärungen der Musiktheorie (nicht nur Zwölftonmusik) von A. Schönberg sei auf sein Buch [Sch78] verwiesen.

Kompositionsverfahren, die in den 1920-er Jahren von Komponisten um Arnold Schönberg entwickelt wurden, werden als Zwölftonmusik oder Dodekaphonie zusammengefasst. Grundlage dieser Verfahren ist die Komposition mit zwölf aufeinander bezogenen Tönen. Zwölfton-Reihen müssen zwei Forderungen erfüllen:

- Alle zwölf Tonhöhen der chromatischen Tonleiter müssen vorkommen, wobei enharmonische Verwechslungen und Oktavierungen keine Rolle spielen.
- Ein Ton darf in der Zwölftonkomposition erst dann ein zweites Mal verwendet werden, wenn alle anderen Töne schon vorgekommen sind.

Es ist also nur die Tonfolge festgelegt. Andere Toneigenschaften, wie Länge oder Lautstärke bleiben unbestimmt und können von Ton zu Ton variieren. Enharmonische Verwechslung und Oktavierung außer Acht zu lassen, bedeutet, dass beispielsweise das cis' auch für die Töne cis/cis'' und des/des'/des'' steht. Eine Zwölftonreihe ist also eine beliebige aber vollständige Anordnung der zwölf Halbtöne der chromatischen Tonleiter.



Abbildung 3.1: chromatische Tonleiter

Eine Zwölftonreihe ist aber noch keine Komposition, sondern nach Schönberg eine Themaform, welche als Gebilde angesehen wird, aus dem ein Thema abgeleitet werden kann. Jeder Komposition liegt eine Zwölftonreihe zu Grunde, man spricht von der Grundreihe einer Komposition. Aus einer Grundreihe kann man nach Arnold Schönberg noch drei weitere Tonreihen bilden.

- **Krebs:** Grundreihe rückwärts
- **Umkehrung** oder **Spiegelung:** Jedes in der Grundreihe vorkommende Intervall, wird in die andere Richtung gelesen. Ein aufsteigendes Intervall wird zu einem absteigenden und umgekehrt.
- **Krebsumkehrung:** Umkehrung des Krebs oder Krebs der Umkehrung

Wie oben erwähnt sind die Oktavlagen frei wählbar, wodurch sich folgende Tonreihen als Krebs, Umkehrung und Krebsumkehrung, wie in Abbildung 3.2 dargestellt, ergeben.



Abbildung 3.2: Grundreihe, Krebs, Umkehrung, Krebsumkehrung

Es kann nun auch noch jede der vier Reihen auf jede beliebige Höhe der 12 Tonhöhen transponiert werden, also mit jedem beliebigen Ton anfangen und dann die entsprechenden Intervalle beibehalten werden. Somit ergeben sich insgesamt $4 \cdot 12 = 48$ Tonreihen, die für die Komposition eines Musikstückes zur Verfügung stehen.

Manchmal werden auch noch folgende weitere Veränderungen einer Zwölftonreihe betrachtet.

- **Quartenzirkel:** Die chromatische Skala wird so verändert, dass aufeinanderfolgende Töne eine Quart bilden. Eine Quart ist ein Intervall von fünf Halbtönen.
- **Quintenzirkel:** Die chromatische Skala wird so verändert, dass aufeinanderfolgende Töne eine Quint bilden. Eine Quint ist ein Intervall von sieben Halbtönen.
- **Verschiebung:** Die Tonreihe wird um einen Ton verschoben. Die Verschiebung wird in der Musik-Theorie auch öfters Rotation genannt.
- **Fünf-Stufen-Schritt:** Die Reihenfolge der Töne in der neuen Zwölfton-Reihe erhält man aus der ursprünglichen Reihe, indem man alle fünf Töne nimmt.

3.2 Mathematischer Aufbau von Zwölfton-Reihen

3.2.1 Tonhöhen-Klassen, Zwölfton-Skala, Zwölfton-Reihen

In der Musik ist ein Ton durch seine Frequenz $f > 0$ festgelegt. Zwei Töne mit den Frequenzen f und $2 \cdot f$ bilden eine Oktave und eine Oktave ist in 12 gleichgroße Teile unterteilt. Diese 12 Intervalle bilden die **Zwölfton-Skala**. Die Frequenzen f_i der elf Töne zwischen den beiden Tönen mit den Frequenzen f und $2f$ sind gegeben durch $f_i = f \cdot 2^{\frac{i}{12}}$ mit $1 \leq i \leq 11$. Wird nun außer Acht gelassen, dass das menschliche Gehör nur Töne mit den Frequenzen zwischen 20 Hz und 20 kHz wahrnehmen kann, kann man alle Töne der Zwölfton-Skala als eine abzählbar unendliche Menge angeben,

$$\{f \cdot 2^{\frac{k}{12}} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Da man nicht an den genauen Frequenzen interessiert ist, kann man den Faktor f weglassen. Somit wird jeder Ton durch ein $k \in \mathbb{Z}$ repräsentiert und man erhält als Modell der Zwölfton-Skala die ganzen Zahlen \mathbb{Z} .

Wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, spielen Oktavierungen keine Rolle. Alle Töne, die Oktaven bilden, sind als äquivalente Töne anzusehen. Das bedeutet alle Töne mit Frequenzen $f \cdot 2^{\frac{i}{12}} 2^k = f \cdot 2^{\frac{12k+i}{12}}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ bilden eine Äquivalenzklasse, in der der Ton mit der Frequenz $f \cdot 2^{\frac{i}{12}}$ für $0 \leq i \leq 11$ enthalten ist. Ein Ton der durch die Zahl $n \in \mathbb{Z}$ repräsentiert wird, ist also in der Äquivalenzklasse

$$\bar{n} := n \bmod 12 = 12k + i \bmod 12 = i = \bar{i}.$$

Jede Äquivalenzklasse von Tönen kann als durch eine Restklasse in den ganzen Zahlen \mathbb{Z} modulo 12 beschrieben werden. Auf diese Weise erhält man als Zwölfton-Skala den Restklassenkörper \mathbb{Z}_{12} und spricht von **Tonhöhen-Klassen**. Im Folgenden wird zwischen Ton und Tonhöhen-Klasse nicht mehr unterschieden, das heißt mit Tönen sind Tonhöhen-Klassen gemeint. Diese Vereinheitlichung ist legitim, da Oktavierungen in der Zwölftonmusik keine Rolle spielen. Genauer gesagt werden Zwölfton-Reihen, die sich nur durch Oktavlagen unterscheiden, nicht als verschiedenen angesehen.

Eine **Zwölfton-Reihe** ist eine Folge von 12 Tönen, wobei alle 12 verschiedenen möglichen Töne vorkommen müssen. Es dürfen also nicht an 2 verschiedenen Positionen in der Reihe die gleichen Töne stehen. Zwölfton-Reihen sind also eindeutige Zuordnungen von Tönen auf bestimmte Plätze. Man kann sie mit bijektiven Funktionen,

$$f : \{1, 2, \dots, 12\} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$$

beschreiben, wobei die Menge $\{1, 2, \dots, 12\}$ die Plätze beziehungsweise Stellen symbolisiert. Die Menge aller Zwölfton-Reihen stimmt also mit der Menge aller bijektiven Funktionen von $\{1, 2, \dots, 12\}$ nach \mathbb{Z}_{12} überein und wird mit \mathcal{R} bezeichnet.

$$\mathcal{R} = \{f : f : \{1, 2, \dots, 12\} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}, f \text{ bijektiv}\}$$

Zwölfton-Reihen werden ab jetzt als Funktionen bezeichnet. Insgesamt gibt es

$$12! = 479.001.600$$

verschiedene Zwölfton-Reihen.

Man ist nun interessiert an der Anzahl der nicht äquivalenten Zwölfton-Reihen. Nach Arnold Schönberg zählen als äquivalente Zwölfton-Reihen Reihen, die durch Anwendung des Krebs, der Umkehrung oder Spiegelung, der Krebsumkehrung oder beliebiger Transposition erhalten werden können (siehe Abschnitt 3.1). Weiters können auch andere Systeme betrachtet werden, in denen Zwölfton-Reihen als äquivalent gelten, wenn sie nach Anwendung einer Teilmenge von allen oben erwähnten Operationen ident sind. Wenn diese Teilmenge der Operationen größer ist, gibt es natürlich weniger Äquivalenzklassen, also ist die Anzahl der nicht äquivalenten Zwölfton-Reihen kleiner.

Die Transposition, die Umkehrung und die Quarten- und Quintenzirkel sind Abbildungen, die auf eine Zwölfton-Reihe angewandt werden. Diese Funktionen werden **Tonhöhen-Klassen-Operationen** genannt. Im Gegensatz zu diesen beiden Funktionen, beeinflussen der Krebs, die Verschiebung und der Fünf-Stufen-Schritt die Reihenfolge der Töne, nehmen also Einfluss auf die Plätze beziehungsweise Stellen. Diese Abbildungen sind also für die Ordnung zuständig und werden **Ordnungs-Operationen** genannt. Dementsprechend ist die Krebsumkehrung eine Zusammensetzung von Funktionen, die einerseits auf den Stellen operiert und andererseits auf Zwölfton-Reihen angewandt wird.

Die Zwölfton-Skala kann man als reguläres 12-Eck darstellen.

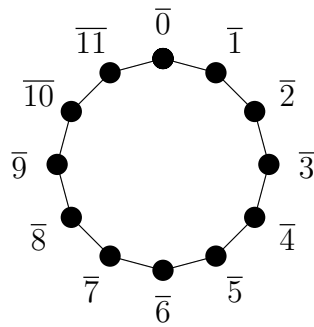


Abbildung 3.3: Zwölfton-Skala als 12-Eck

In den folgenden Abschnitten werden diese Operationen behandelt und mathematisch beschrieben.

3.2.2 Transposition

Zunächst werden nur einzelne Töne betrachtet, die wie in Abschnitt 3.1 erklärt durch ganze Zahlen k repräsentiert werden können. Das am Ende des Abschnitts erklärte Transponieren auf einen Halbton höher wird mathematisch durch die Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ k &\mapsto k + 1 \end{aligned}$$

beschrieben. Durch mehrmaliges Anwenden dieser Abbildung kann man Töne auch auf beliebige Tonhöhen transponieren. Wenn die Abbildung n ($n \in \mathbb{N}$) mal hintereinander ausgeführt wird, folgt die Darstellung

$$\begin{aligned} T^n &:= T \circ T^{n-1} \\ T^n(k) &= k + n \end{aligned}$$

für das Transponieren um n Halbtöne nach oben. Lässt man $n \in \mathbb{Z}$ zu, so erhält man für $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ auch die Abbildungen, die das Transponieren um n Töne nach unten realisieren. Um diese Funktionen auf Zwölfton-Klassen anwenden zu können, also auf Elemente des Restklassenkörpers \mathbb{Z}_{12} , wird die Addition modulo 12 benötigt. Außerdem genügt es $n \in \{-11, -10, \dots, 10, 11\}$ zuzulassen, da man ja nur von Tonhöhen-Klassen spricht. Somit gilt

$$\begin{aligned} T^n : \mathbb{Z}_{12} &\rightarrow \mathbb{Z}_{12} \\ \bar{k} &\mapsto \overline{k + n} = k + n \pmod{12} \end{aligned}$$

und

$$T^{-n} = T^{12-n}$$

für $n \in \{0, 1, \dots, 10, 11\}$.

Es ist klar, dass für Transpositionen die Identität

$$T^{n+m} = T^n \circ T^m$$

für alle $n, m \in \{0, 1, \dots, 11\}$ gilt. Weiters hat dieser Operator die Ordnung 12, also

$$T^{12} = \text{id}.$$

Die Permutationsgruppe, die alle T^n , $n \in \{0, 1, \dots, 11\}$ enthält ist eine zyklische Gruppe der Ordnung 12 (siehe Abschnitt 2.5.3),

$$C_{12} \cong \langle T \rangle = \{\text{id}, T, T^2, \dots, T^{11}\}.$$

3.2.3 Umkehrung

Die Umkehrung oder Spiegelung einer Grundreihe kehrt jedes Intervall um. Das bedeutet ein aufsteigendes Intervall wird zu dem gleichen absteigenden Intervall und umgekehrt. In Abbildung 3.2 kann man die Umkehrung (3. Zeile) von der Grundreihe (1. Zeile) erkennen. In diesem Beispiel ist der erste Ton der Grundreihe und der Umkehrung gleich. Auf Grund der Transposition muss das aber nicht so sein. Es kann ein beliebiger Ton fest bleiben, da man mit Hilfe der Transposition die erhaltene Tonreihe danach auf jede beliebige der 12 Tonhöhen transponieren kann.

Sei $t_0 \in \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{11}\}$ ein beliebiger Ton (eigentlich eine Tonhöhen-Klasse), der festgehalten wird. Für jeden anderen Ton $t_1 \neq t_0$, $t_1 \in \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{11}\}$ existiert eine natürliche Zahl r , so dass t_1 entweder um r Halbtöne höher oder tiefer als t_0 ist. Bei der Umkehrung wird t_1 nun auf den Ton abgebildet, der r Halbtöne tiefer oder höher als t_0 ist.

Die Abbildung ist also durch die Vorschrift

$$U_{t_0} : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$$

$$t_1 \mapsto \begin{cases} t_0 - (t_1 - t_0) & , t_1 > t_0 \\ t_0 + (t_0 - t_1) & , t_1 < t_0 \end{cases} = 2t_0 - t_1$$

gegeben. Die Funktion vereinfacht sich, indem man $t_0 = \bar{0}$ setzt zu

$$U : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$$

$$\bar{t} \mapsto \overline{-t}.$$

Es ist einfach einzusehen, dass $U^2(\bar{t}) = \bar{t}$ für diese Abbildung gilt. Die Umkehrung ist somit eine Permutation und hat die Zykelschreibweise

$$(\bar{0})(\bar{1}, \bar{11})(\bar{2}, \bar{10})(\bar{3}, \bar{9})(\bar{4}, \bar{8})(\bar{5}, \bar{7})(\bar{6}).$$

3.2.4 Verknüpfung von Transposition und Umkehrung

Betrachtet man die Hintereinanderausführung von U und T , so erhält man

$$(U \circ T)(\bar{t}) = U(\overline{t+1}) = \overline{-t-1} = \overline{-t+11} = (T^{11} \circ U)(\bar{t}) = (T^{-1} \circ U)(\bar{t}).$$

Analog erhält man die Gleichheit

$$U \circ T^k = T^{-k} \circ U$$

für alle $k \in \{0, 1, \dots, 11\}$. Jede Abbildung die eine Komposition von Transpositionen und Umkehrungen ist, kann so dargestellt werden, dass die Transpositionen zusammengefasst werden und auf die Umkehrungen angewandt werden. Da T die Ordnung 12 und U die Ordnung 2 hat, erhält man mit

$$\langle T, U \rangle = \{T^r U^j : 0 \leq r \leq 11, 0 \leq j \leq 1\}$$

eine Gruppe mit 24 Elementen. Das ist die Diedergruppe D_{12} , die Transformationsgruppe eines regelmäßigen 12-Ecks (siehe Abschnitt 2.5.4), also

$$\langle T, U \rangle \cong D_{12}.$$

Wendet man nun auf die Zwölfton-Skala, wie in Abbildung 3.3 dargestellt, Transpositionen und Umkehrung an, so erhält man folgende Darstellungen.

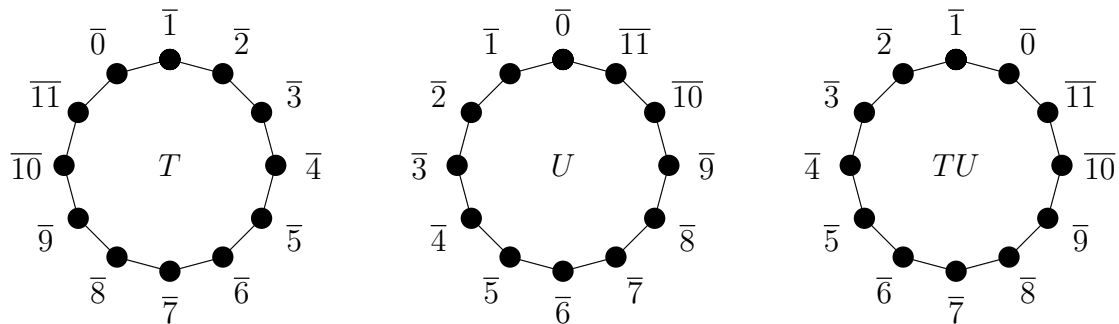


Abbildung 3.4: Transposition und Umkehrung

3.2.5 Krebs

Beim Krebs wird die Grundreihe rückwärts gelesen. Diese Abbildung ist eine Ordnungs-Operation, sie arbeitet auf den Plätzen beziehungsweise Stellen. Um die umgekehrte Ordnung zu erhalten, muss die Abbildung

$$K : \{1, 2, \dots, 12\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 12\}$$

$$i \mapsto 12 - i + 1$$

auf die Definitionsmenge einer Zwölfton-Reihe f angewendet werden.

Diese Operation ist eine Permutation der Menge $\{1, 2, \dots, 12\}$ und ihre Zyklen-schreibweise ist

$$(1, 12)(2, 11)(3, 10)(4, 9)(5, 8)(6, 7),$$

woraus folgt, dass ihre Ordnung 2 ist.

3.2.6 Quarten- und Quintenzirkel

Der Quartenzirkel ist eine Permutation einer Zwölfton-Reihe, so dass die chromatische Skala in eine Reihe verwandelt wird, in der alle aufeinanderfolgenden Intervalle Quarten sind, also zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tönen immer fünf Halbton-schritte liegen.

Der Quartenzirkel Q ist eine Tonhöhen-Klassen-Operation, die Abbildung ist also auf \mathbb{Z}_{12} definiert.

$$Q : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12} \\ \bar{t} \mapsto \overline{5 \cdot t}$$

Die Zyklenschreibweise dieser Permutation ist durch

$$(\overline{0})(\overline{1}, \overline{5})(\overline{2}, \overline{10})(\overline{3})(\overline{4}, \overline{8})(\overline{6})(\overline{7}, \overline{11})(\overline{9})$$

gegeben.

Der Quintenzirkel ist die Umkehrung des Quartenzirkles. Hier wird die chromatische Skala so verändert, dass aufeinanderfolgende Töne eine Quint bilden, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tönen also immer sieben Halbtöne liegen. Die Abbildung \tilde{Q} ist ebenfalls auf \mathbb{Z}_{12} definiert und hat die Abbildungsvorschrift

$$\tilde{Q} : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12} \\ \bar{t} \mapsto \overline{7 \cdot t}.$$

Auf Grund der Tatsache, dass $\overline{7 \cdot t} = \overline{-5 \cdot t}$ gilt, besteht zwischen Quartenzirkel und Quintenzirkel der Zusammenhang

$$\tilde{Q} = U \circ Q = Q \circ U.$$

Ist also in einer Gruppe sowohl Quartenzirkel als auch Umkehrung enthalten, so ist auch automatisch der Quintenzirkel in dieser Gruppe und umgekehrt. Deshalb wird der Quintenzirkel hier erwähnt, aber im Folgenden nicht mehr explizit angeführt.

3.2.7 Verschiebung

Die Verschiebung bildet die Zwölfton-Reihe auf eine Reihe ab, die mit dem zweiten Ton der ursprünglichen Reihe beginnt und den ersten Ton der ursprünglichen Reihe als letzten hat. Es wird die Reihenfolge der Töne verändert, also auf den Plätzen beziehungsweise Stellen operiert. Somit ist die Verschiebung eine Ordnungs-Operation und ist auf der Definitionsmenge $\{1, 2, \dots, 12\}$ einer Zwölfton-Reihe definiert.

Die Abbildung V , die die Verschiebung beschreibt wird durch

$$V : \{1, 2, \dots, 12\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 12\} \\ i \mapsto \begin{cases} i + 1 & , i \leq 11 \\ 1 & , i = 12 \end{cases}$$

beschrieben.

Diese Operation V ist eine Permutation der Menge $\{1, 2, \dots, 12\}$ mit der Zyklenschreibweise

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$$

und der Ordnung 12.

3.2.8 Fünf-Stufen-Schritt

Durch den Fünf-Stufen-Schritt wird eine neue Zwölfton-Reihe gebildet, indem man hintereinander jeden fünften Ton von der ursprünglichen Reihe nimmt. Da 12 und 5 teilerfremd sind, entsteht dadurch wieder eine Zwölfton-Reihe. Wie beim Krebs (siehe Abschnitt 3.2.5) und der Verschiebung (siehe Abschnitt 3.2.7) wird bei dieser Abbildung die Reihenfolge der Töne verändert. Es handelt sich also wieder um eine Ordnungs-Operation.

Der Fünf-Stufen-Schritt wird durch die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 6 & 11 & 4 & 9 & 2 & 7 & 12 & 5 & 10 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

beschrieben und kann rekursiv aufgeschrieben werden,

$$F(i+1) = F(i) + 5 \bmod 12, \quad i \in \{1, 2, \dots, 11\}, \quad F(1) = 1. \quad (3.1)$$

Um auf eine explizite Darstellung für F zu kommen, setzt man in die Beziehung (3.1) rekursiv ein und erhält

$$\begin{aligned} F(i) &= F(i-1) + 5 \bmod 12 = \\ &= F(i-2) + 2 \cdot 5 \bmod 12 = \\ &= F(i-3) + 3 \cdot 5 \bmod 12 = \\ &\quad \vdots \\ &= F(i-(i-1)) + (i-1) \cdot 5 \bmod 12 = \\ &= \underbrace{F(1)}_{=1} + (i-1) \cdot 5 \bmod 12. \end{aligned}$$

Die Funktionsvorschrift für den Fünf-Stufen-Schritt F lautet also

$$\begin{aligned} F : \{1, 2, \dots, 12\} &\rightarrow \{1, 2, \dots, 12\} \\ i &\mapsto (i-1) \cdot 5 + 1 \bmod 12. \end{aligned}$$

3.2.9 Verknüpfung von Krebs, Verschiebung und Fünf-Stufen-Schritt

Wie in Abschnitt 3.2.2 ist die Gruppe $\langle V \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 12, sie ist also isomorph zu C_{12} , in Zeichen

$$C_{12} \cong \langle V \rangle.$$

Weiters ist analog zu Abschnitt 3.2.4 die Gruppe $\langle V, K \rangle$ isomorph zur Diedergruppe D_{12} , also

$$D_{12} \cong \langle V, K \rangle.$$

Zunächst betrachtet man die Gruppe $\langle V, K, F \rangle$ mit der Verschiebung V , dem Krebs K und dem Fünf-Stufen-Schritt F als Erzeuger. Durch genaue Betrachtung der drei Abbildungsvorschriften und gemeinsam mit Beispiel 2.23 zeigt sich, dass die Gruppe $\langle V, K, F \rangle$ isomorph zur eindimensionalen affinen Gruppe $\text{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12})$,

$$\text{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12}) \cong \langle V, K, F \rangle.$$

Bemerkung 3.1. Die Gruppe $\langle V, R, F \rangle$ enthält neben dem Fünf-Stufen-Schritt mit

$$F \circ V \circ K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 8 & 3 & 10 & 5 & 12 & 7 & 2 & 9 & 4 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

auch den Sieben-Stufen-Schritt. Dieser ist in Abschnitt 3.1 nicht explizit erwähnt, weil er ähnlich wie der Quintenzirkel nicht weiter betrachtet wird.

3.3 Äquivalenzklassen in der Zwölftonmusik

Mathematisch gesehen macht es keinen Unterschied, ob Zwölfton-Reihen als Funktionen die Definitionsmenge $\{1, 2, \dots, 12\}$ oder \mathbb{Z}_{12} haben. Mittels der Funktion

$$\begin{aligned} \iota : \{1, 2, \dots, 12\} &\rightarrow \mathbb{Z}_{12} \\ i &\mapsto i - 1 \end{aligned}$$

kann jedes Element der einen Menge mit einem der anderen Menge eindeutig identifiziert werden. Zwölfton-Reihen können also auch als Funktionen

$$f : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$$

von \mathbb{Z}_{12} in sich selbst gesehen werden. Somit können Zwölfton-Reihen als Permutationen von \mathbb{Z}_{12} aufgefasst werden. Die Menge aller Permutationen von \mathbb{Z}_{12} ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_{12} (siehe Abschnitt 2.5.1), also sind Zwölfton-Reihen nichts anderes als Elemente der symmetrischen Gruppe S_{12} .

Somit können die Permutationsgruppen auf \mathbb{Z}_{12} direkt in Doppelnebenklassen (Rechts- und Linksnebenklassen) von S_{12} übersetzt werden.

Mit Hilfe der Identifikation ι kann man sagen, dass die Verschiebung V der Transposition T , der Krebs K der Hintereinanderausführung von Umkehrung und Transposition UT , sowie der Fünf-Stufen-Schritt F dem Quartenzirkel Q entsprechen.

Zwölfton-Reihen werden als äquivalent gesehen, wenn sie durch Anwendung von bestimmten Permutationen ineinander überführbar sind. Es gibt nun mehrere Möglichkeiten, die Permutationsgruppe aus den genannten Permutationen zu wählen und zu erzeugen.

In der Tabelle 3.1 sind die verschiedenen Permutationsgruppen, Doppelnebenklassen und die zugehörige Anzahl der inäquivalenten Zwölfton-Reihen zusammengefasst.

Permutationsgruppe	Doppelnebenklassen	Anzahl inäquivalenter Reihen
$\langle T \rangle \times \langle K \rangle$	$C_{12} \setminus S_{12} / \langle K \rangle$	19 960 320
$\langle T, U \rangle \times \langle K \rangle$	$D_{12} \setminus S_{12} / \langle K \rangle$	9 985 920
$\langle T \rangle \times \langle V \rangle$	$C_{12} \setminus S_{12} / C_{12}$	3 326 788
$\langle T, U \rangle \times \langle V \rangle$	$D_{12} \setminus S_{12} / C_{12}$	1 664 354
$\langle T, U \rangle \times \langle V, K \rangle$	$D_{12} \setminus S_{12} / D_{12}$	836 017
$\langle T, U, Q \rangle \times \langle V, K \rangle$	$\text{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12}) \setminus S_{12} / D_{12}$	419 413
$\langle T, U \rangle \times \langle V, K, F \rangle$	$D_{12} \setminus S_{12} / \text{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12})$	419 413
$\langle T, U, Q \rangle \times \langle V, K, F \rangle$	$\text{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12}) \setminus S_{12} / \text{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12})$	211 012

Tabelle 3.1: verschiedene Permutationsgruppen auf der Menge der Zwölftton-Reihen, Tabelle aus [FL15]

Die Zwölftton-Musik nach Arnold Schönberg ist in Tabelle 3.1 in der zweiten Zeile dargestellt. Wie in Abschnitt 3.1 erklärt, sind die Permutationen Transposition T , Umkehrung U und Krebs K zulässig. Nach Schönberg ist auch die Krebsumkehrung eine erlaubte Transformation. Diese muss allerdings nicht extra erwähnt werden, da sie eine Hintereinanderausführung von Krebs und Umkehrung ist und somit in der Permutationsgruppe enthalten ist.

Nach Arnold Schönberg gibt es also

$$9\,985\,920$$

verschiedene inäquivalente Zwölftton-Reihen.

Kapitel 4

Erzeugende Funktion von injektiven Funktionen

Als Grundlage für dieses Kapitel dient das Buch [HP14].

Mit Hilfe des Satzes von Pólya wird die Gestalt der erzeugenden Funktion $I(x)$ bewiesen. Der Koeffizient von x^n dieser abzählenden Potenzreihe ist die Anzahl injektiver Funktionen von n ununterscheidbaren Elementen in eine Menge von Objekten.

Die erzeugende Funktion $I(x)$ der Klasse aller injektiven Funktionen wird durch die abzählenden Potenzreihen der symmetrischen Gruppe und der alternierenden Gruppe (siehe Abschnitte 2.5.1 und 2.5.2) dargestellt.

Sei Y eine Menge von Objekten, $c(x)$ die zugehörige abzählende Potenzreihe und E die Gruppe, die nur die Identität enthält. Weiters ist E^A die Potenzgruppe auf der Menge Y^X für $X = \{1, 2, \dots, n\}$ eingeschränkt auf die injektiven Funktionen. Mit $I(x)$ wird die erzeugende Funktion der injektiven Funktionen, die durch E^A bestimmt sind, bezeichnet. Der Koeffizienten von x^n in dieser Reihe ist die Anzahl der injektiven Funktionen von n Objekten. Diese Potenzreihe wird mit Hilfe des Satzes von Pólya, Satz 2.9, und der abzählenden Potenzreihe $c(x)$, der Potenzreihe des Figurenvorrats, dargestellt.

Satz 4.1. *Die erzeugende Funktion $I(x)$ der Klasse aller injektiven Funktionen von n ununterscheidbaren Elementen in eine Menge von Objekten mit abzählender Potenzreihe $c(x)$ ist durch*

$$I(x) = P_{A_n}(c(x)) - P_{S_n}(c(x))$$

gegeben, wobei $P_{A_n}(x)$ und $P_{S_n}(x)$ die Zyklenzeiger der alternierenden und der symmetrischen Gruppe repräsentieren.

Beweis

Die abzählende Potenzreihe der Menge Y ist $c(x)$. Man betrachtet die Potenzgruppe E^{S_n} auf der Menge Y^X mit $X = \{1, 2, \dots, n\}$ und Y als Menge aller Objekte. E symbolisiert die Gruppe, die nur die Identität enthält und S_n ist die symmetrische Gruppe.

Die Menge Y^X ist die Menge aller Funktionen

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y \\ i &\mapsto y_i. \end{aligned}$$

Diese Menge ist also die Menge aller geordneten n -Tupel von Objekten aus Y .

Durch Anwendung des Satzes von Pólya, Satz 2.9, erhält man als erzeugende Funktion *aller* Funktionen

$$P_{S_n}(c(x)).$$

Es muss also gezeigt werden, dass in $P_{A_n}(c(x))$ die injektiven Funktionen doppelt und alle anderen Funktionen einfach gezählt werden.

Die Anzahl von Konjugiertheitsklassen von injektiven Funktionen von X in sich selbst bestimmt durch E^{A_n} ist 2, da die eine Klasse aus allen geraden und die andere aus allen ungeraden injektiven Funktionen besteht. Daher werden die Konjugiertheitsklassen von E^{S_n} aus injektiven Funktionen von $P_{A_n}(c(x))$ doppelt gezählt.

Zu zeigen ist noch, dass $P_{A_n}(c(x))$ die Konjugiertheitsklassen der nicht-injektiven Funktionen von E^{S_n} nur einfach zählt.

Seien dafür f und g zwei Funktionen aus einer dieser Konjugiertheitsklassen. Daher existiert eine Permutation π in S_n , sodass $f(x) = g(\pi x)$ für alle $x \in X$ gilt. Nun gilt es zu zeigen, dass f und g auch in der selben Konjugiertheitsklasse von E^{A_n} liegen.

Wenn π eine gerade Permutation ist, folgt das direkt aus der Gleichung $f(x) = g(\pi x)$. Sei also π eine ungerade Permutation. Da f nicht injektiv ist, existieren x_1, x_2 in X , $x_1 \neq x_2$, sodass $f(x_1) = f(x_2)$ gilt. Sei $\sigma \in S_n$ die Permutation, die x_1 und x_2 vertauscht und alle anderen Elemente in X festlässt. Die Permutation σ ist als Transposition ungerade und daher ist $\pi\sigma$ eine gerade Permutation. Somit gilt $f(x) = g(\pi\sigma x)$ für eine gerade Permutation $\pi\sigma$ und es folgt, dass f und g in der selben Konjugiertheitsklasse von E^{A_n} liegen, womit bewiesen ist, dass $P_{A_n}(c(x))$ die Konjugiertheitsklassen von E_{S_n} mit nicht-injektiven Funktionen nur einmal zählt. Damit folgt die Aussage des Satzes. \square

Kapitel 5

Graphen

In diesem Kapitel werden Anzahlbestimmungen von Graphen behandelt. Als Unterlagen werden die Arbeit [P637], das Buch [HP14] und der Artikel [Ott48] verwendet.

Graphen werden in der Mathematik für die Beschreibung vieler verschiedener Anwendungen eingesetzt. Beispiele dafür sind Molekülstrukturen, Computernetze, Kombinationsmöglichkeiten, Straßennetze, Wasserleitungen und noch viele mehr.

5.1 Grundlagen und Definitionen

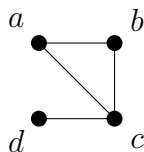
Um eine einheitliche Notation zu haben, werden zu Beginn die notwendigen Definitionen der Graphentheorie wiederholt. Dafür wird zusätzlich das Buch [Tit14] benutzt.

Definition 5.1. Ein **ungerichteter Graph** $G = (V, E)$ ist ein System von zwei endlichen Mengen, den Knoten V und den Kanten E . Jeder Kante $e \in E$ sind zwei Knoten $u, v \in V$ zugeordnet, man schreibt die Kante $e = \{u, v\}$ für $u, v \in V$ auch als ungeordnetes Paar von zwei Knoten. Die Knoten u und v heißen **Endknoten** der Kante e . Die Anzahl der Knoten wird mit n , $n := |V|$, und die Anzahl der Kanten mit m , $m := |E|$ bezeichnet.

Definition 5.2. Zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, heißen **adjazent**. Hat eine Kante e den Endknoten v , so heißen e und v **inzident**.

Definition 5.3. Der **Knotengrad** $d(v)$ eines Knoten $v \in V$ ist die Anzahl der Kanten, die mit v inzident sind oder äquivalent dazu die Anzahl der Knoten, die zu v adjazent sind.

Graphen werden meist auch graphisch dargestellt. Knoten werden durch Punkte und Kanten durch Verbindungsgeraden dargestellt. In Abbildung 5.1 ist der Graph $G = (V, E)$ mit den Mengen $V = \{a, b, c, d\}$ und $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c\}\}$ gezeichnet.

Abbildung 5.1: Graph $G = (V, E)$

Definition 5.4. Eine **Untergraph** oder **Teilgraph** $H = (W, F)$ von $G = (V, E)$ ist ein Graph, für den

$$W \subseteq V \quad \text{und} \quad F \subseteq E \quad \text{und} \quad F \subseteq W \times W$$

gilt.

Definition 5.5. Eine **Kantenfolge** der Länge k von $u \in V$ nach $v \in V$ in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine alternierende Folge von Knoten und Kanten

$$u = v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_k, v_{k+1} = v, \quad v_i \in V, e_i \in E \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (k+1)$$

für die

$$e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \quad \forall i = 1, \dots, k$$

gilt. Stimmen Anfangs- und Endknoten einer Kantenfolge überein, heißt sie **geschlossen**. Sind alle Kanten e_i , $i = 1, \dots, k$ paarweise verschieden, so nennt man diese Kantenfolge auch **Kantenzug**. Kommt weiters jeder Knoten nur einmal vor, spricht man von einem **Weg**. Ein **Kreis** ist ein geschlossener Weg, also eine Kantenfolge bei dem Anfangs- und Endknoten übereinstimmen, aber alle anderen Knoten höchstens einmal vorkommen.

Definition 5.6. Der **Abstand** $d(u, v)$ von zwei Knoten u und v ist die Länge des kürzesten Weges zwischen den beiden Knoten.

Definition 5.7. Ein **zusammenhängender ungerichteter Graph** $G = (V, E)$ ist ein Graph, bei dem je zwei verschiedene Knoten durch eine Kantenfolge verbunden sind. Ein maximaler zusammenhängender Teilgraph eines Graphen $G = (V, E)$ heißt eine **Zusammenhangskomponente** von G .

Definition 5.8. Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Graph, der keine Kreise enthält.

Definition 5.9. Die **Zusammenhangszahl** $\mu(G)$ eines Graphen G ist k , wenn es keine Menge von maximal k Kanten gibt, die durch Entfernen den Zusammenhang von G zerstört.

Bemerkung 5.10. Die Zusammenhangszahl eines Graphen $G = (V, E)$ kann mit Hilfe von

$$\mu(G) = n - m + 1$$

berechnet werden.

Für zusammenhängende Graphen G gilt, dass die Zusammenhangszahl $\mu(G)$ stets nichtnegativ, $\mu(G) \geq 0$, ist.

Definition 5.11. Ein Baum mit einem ausgezeichneten Knoten heißt **Wurzelbaum**.

5.2 Wurzelbäume

In diesem Abschnitt wird mit Hilfe des Satzes von Pólya, Satz 2.9, eine Darstellung der erzeugenden Funktion von Wurzelbäumen hergeleitet.

Für diese Herleitung wird die Darstellung

$$P_{S_\infty}(f(x)) := \sum_{n=0}^{\infty} P_{S_n}(f(x)) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(x^k)}{k}\right) \quad (5.1)$$

der Summe über die Zyklenzeiger aller symmetrischen Gruppen verwendet. Diese Darstellung wird hier nicht bewiesen. Der Beweis greift auf die Rekursion aus Lemma 2.12 und die Definition des Zyklenzeigers der symmetrischen Gruppe (2.4) zurück.

Die äquivalente Darstellung

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{S_n}(f(x)) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(x^k)}{k}\right) \quad (5.2)$$

erhält man durch Herausziehen des ersten Terms aus der Summe auf der linken Seite.

Sei nun T_n die Anzahl der Wurzelbäume mit n Knoten. Daher ist

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n$$

die erzeugende Funktion der Wurzelbäume.

Folgender Satz wird zur Berechnung der Koeffizienten T_n der erzeugenden Funktion benutzt.

Satz 5.12. *Die erzeugende Funktion der Klasse aller Wurzelbäume $T(x)$ erfüllt die Funktionalgleichung*

$$T(x) = x \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T(x^k)}{k}\right).$$

Um diesen Satz zu beweisen wird nun der Satz von Pólya, Satz 2.9, verwendet.

Beweis

Im ersten Schritt des Beweises wird die erzeugende Funktion $W_n(x)$ der Wurzelbäume, deren Wurzel Knotengrad n hat, ermittelt. Diese speziellen Wurzelbäume können als eine Kombination mit Wiederholung von n Wurzelbäumen dargestellt werden. Hat man n Wurzelbäume, so kann man daraus einen Wurzelbaum mit Wurzelgrad n machen, indem man einen neuen Knoten als Wurzel definiert und dann diese Wurzel mit den n Bäumen über deren Wurzel verbindet. In der Abbildungen 5.2 und 5.3 ist ein Beispiel für $n = 3$ aufgezeichnet.

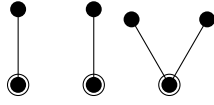


Abbildung 5.2: 3 Wurzelbäume

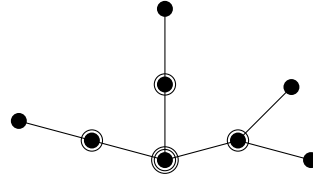


Abbildung 5.3: zugehöriger Wurzelbaum mit Wurzelgrad 3

Alle Wurzelbäume mit Wurzelgrad n können auf diese Weise erhalten werden.

Weiters betrachtet man die Potenzgruppe E^{S_n} auf der Menge Y^X mit $X = \{1, 2, \dots, n\}$ und Y als Menge aller Wurzelbäume. E symbolisiert die Gruppe, die nur die Identität enthält und S_n die symmetrische Gruppe.

Die Menge Y^X ist die Menge aller Funktionen

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y \\ i &\mapsto w_i, \end{aligned}$$

also nichts anderes als die Menge aller geordneten n -Tupel von Wurzelbäumen.

Da S_n alle Permutationen von X enthält, entspricht die Gruppe E^{S_n} genau der Menge der Wurzelbäume mit Wurzelgrad n .

$T(x)$ ist die abzählende Potenzreihe von Y , deren Koeffizienten von x^n die Anzahl der Wurzelbäume mit n Knoten sind. Die Anzahl der Knoten einer Funktion $f \in Y^X$, also eines n -Tupels von Wurzelbäumen, ist definiert als die Summe der Knoten der einzelnen Bäume. Sei also $\omega(w)$ die Anzahl der Knoten eines Baumes $w \in Y$, dann ist die Anzahl der Knoten einer Funktion f definiert als

$$\omega(f) := \sum_{i \in X} \omega(f(i)).$$

Die Anzahl der Knoten einer beliebigen Funktion g aus E^{S_n} , also eines Wurzelbaums mit Wurzelgrad n ist um 1 kleiner als die Anzahl der Knoten des Baumes zu dessen Äquivalenzklasse er gehört.

Wendet man nun den Satz von Pólya mit $\mathfrak{S} = S_n$ und $f(x) = T(x)$ als abzählende Potenzreihe des Figurenvorrats an, so erhält man für die erzeugende Funktion der Wurzelbäume mit Wurzelgrad n

$$\widetilde{W}_n(x) = P_{S_n}(T(x)). \quad (5.3)$$

Die Funktion ist mit $\widetilde{W}_n(x)$ bezeichnet, da zu beachten ist, dass in dieser Potenzreihe der Koeffizient von x^k die Anzahl der Wurzelbäume mit Wurzelgrad n und $k+1$ Knoten ist. (Für $k < n$ ist diese Anzahl natürlich 0, da es keinen Baum mit Wurzelgrad n und echt weniger als $n+1$ Knoten gibt. Man kann also $k \geq n$ voraussetzen.) Um zu erreichen, dass der Koeffizient von x^k die Anzahl der Wurzelbäume mit k Knoten ist, muss die erzeugende Funktion einfach mit x multipliziert werden. Somit wird die Gleichung (5.3) zu

$$W_n(x) = x P_{S_n}(T(x))$$

Um die erzeugende Funktion der Wurzelbäume $T(x)$ zu erhalten muss nun über alle $W_n(x)$ aufsummiert werden,

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} P_{S_n}(T(x))$$

Mit der Identität (5.1) folgt nun die Behauptung des Satzes. \square

Bemerkung 5.13. Eine alternative Möglichkeit diesen Satz zu beweisen, ist wie in [FS09]. Die Klasse aller Wurzelbäume kann wie folgt als Klasse von Multimengen aufgefasst werden. Ein Wurzelbaum kann als eine Wurzel, an der ein Wald von Wurzelbäumen hängt, dargestellt werden. Somit ist das eine Klasse von Multimengen und ihre erzeugende Funktion kann mit Hilfe dieser Konstruktion bewiesen werden.

5.3 Bäume

Die erzeugende Funktion der Bäume wird im Gegensatz zu der der Wurzelbäume mit einem kleinen t bezeichnet. Sei also t_n die Anzahl der Bäume mit n Knoten. Dann ist

$$t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n$$

die erzeugende Funktion der Bäume. Um die Darstellung

$$t(x) = T(x) - \frac{1}{2} (T^2(x) - T(x^2))$$

in Satz 5.18 beweisen zu können, werden die folgenden zwei Lemmata benötigt. Diese beiden Aussagen sind nicht nur für Bäume sondern für beliebige Graphen gültig.

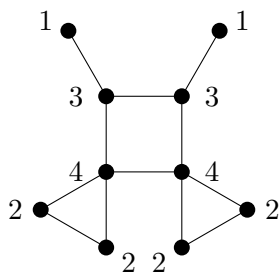
Sei G ein beliebiger Graph und p^* die Anzahl der unterschiedlichen Knoten. Zwei Knoten heißen nicht unterschiedlich, wenn sie die selbe Anzahl an nicht unterschiedlichen Nachbarn haben. Also ist p^* die Anzahl der Äquivalenzklassen von Knoten bestimmt durch die adjazenten Knoten.

Weiters sei b^* die Anzahl der unterschiedlichen Blöcke des Graphen G , zum Beispiel eine Strecke, ein Dreieck, ein Viereck und so weiter. Zwei Blöcke sind nicht unterschiedlich, wenn sie die selben Knoten mit den selben Anzahlen beinhalten. Die Anzahl der unterschiedlichen Knoten innerhalb des Blockes i wird mit p_i^* bezeichnet.

Um diese Definitionen anschaulicher zu erklären, ist hier folgendes Beispiel illustriert.

Beispiel 5.14.

Sei der Graph G graphisch gegeben.

Abbildung 5.4: Graph G

Die Knoten sind in der Abbildung mit der Anzahl ihrer Nachbarn beschriftet. Zwei Knoten, die in der gleichen Äquivalenzklasse sind, haben in diesem Beispiel den gleichen Namen. In diesem Beispiel ist also $p^* = 4$.

Die Anzahl der unterschiedlichen Blöcke ist $b^* = 3$ und die Blöcke sind zweimal ein Dreieck, einmal ein Viereck und zwei einzelne Strecken. \circ

Lemma 5.15. *Für jeden beliebigen Graphen G und die oben genannten Anzahlen p^*, b^* und p_i^* gilt der Zusammenhang*

$$p^* - 1 = \sum_{i=1}^{b^*} (p_i^* - 1). \quad (5.4)$$

Beispiel 5.16.

[Fortsetzung Beispiel 5.14] Die Anzahlen der unterschiedlichen Knoten in den Blöcken ist jeweils 2, also $p_1^* = p_2^* = p_3^* = 2$. Mit den gegebenen Anzahlen kann das Lemma für dieses spezielle Beispiel überprüft werden.

$$3 = 4 - 1 = (2 - 1) + (2 - 1) + (2 - 1)$$

\circ

Das Lemma wird nun auch allgemein bewiesen.

Beweis

Der Beweis des Lemmas erfolgt durch vollständige Induktion über die Anzahl der unterschiedlichen Blöcke b^* . Wenn $b^* = 1$ ist, es also nur einen Block gibt, dann ist auch $p^* = p_1^*$ und der Zusammenhang

$$p^* - 1 = p_1^* - 1$$

ist richtig.

Sei nun G ein beliebiger Graph mit der Anzahl an unterschiedlichen Blöcken b^* . Weiters betrachtet man einen beliebigen Block, der nur einen gemeinsamen Knoten mit einem anderen Block hat. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann dieser Block als der Block Nummer 1 angenommen werden.

Durch Entfernen aller Knoten aus dem Graphen, die in der Äquivalenzklasse der Knoten in diesem Block mit Ausnahme des Verbindungsknoten zum anderen Block liegen, entsteht ein neuer Graph G' . Dieser Graph hat nun $b^* - 1$ verschiedene Blöcke und $p^* - (p_1^* - 1)$ Knotenklassen.

Laut Induktionsannahme gilt der Zusammenhang (5.4) für den Graphen G' und sieht folgendermaßen aus.

$$p^* - (p_1^* - 1) - 1 = \sum_{i=2}^{b^*} (p_i^* - 1)$$

Durch Umformen dieser Gleichung folgt nun direkt die Richtigkeit des Lemmas. \square

Das Lemma 5.15 gilt für allgemeine Graphen. Um im Weiteren eine ähnliche Aussage für Bäume zu bekommen, werden zunächst noch ein paar Begriffe erklärt.

Sei wieder p^* die Anzahl der unterschiedlichen Knoten und q^* die Anzahl der unterschiedlichen Kanten, wobei zwei Kanten als nicht unterschiedlich gelten, wenn sie jeweils die selbe Anzahl an nicht unterschiedlichen Nachbarkanten haben. Weiters ist eine Kante eine **Symmetriekante**, wenn sie die selben Endpunkte besitzt. Die Anzahl der Symmetriekanten in einem Baum wird mit s bezeichnet.

Das **Zentrum** eines Graphen ist die Menge aller Knoten, deren maximaler Abstand zu allen anderen Knoten minimal ist.

Lemma 5.17. *Die Anzahl der Symmetriekanten eines Baumes ist entweder 1 oder 0 und es gilt*

$$p^* - (q^* - s) = 1.$$

Beweis

Die Anzahl der Symmetriekanten s ist 1 genau dann, wenn das Zentrum des Baumes aus zwei gleichen Knoten besteht. Anderenfalls ist $s = 0$.

Da ein Baum keine Kreise enthält bestehen die Blöcke in Bäumen nur aus Strecken. Zwei Blöcke sind also nicht unterschiedlich, wenn sie die selben Knoten beinhalten. Es gilt also $b^* = q^*$.

Für Blöcke, die Symmetriekanten sind, gilt also $p_i^* = 1$ und für alle anderen $p_i^* = 2$. Daher ist die rechte Seite von (5.4) $q^* - s$ und es folgt

$$p^* - 1 = q^* - s,$$

womit das Lemma bewiesen ist. \square

Nun kann der Satz über die erzeugende Funktion der Bäume bewiesen werden.

Satz 5.18. *Die erzeugende Funktion der Bäume $t(x)$, formuliert in Ausdrücken der abzählenden Potenzreihe der Wurzelbäume $T(x)$, hat die Gestalt*

$$t(x) = T(x) - \frac{1}{2} (T^2(x) - T(x^2)).$$

Beweis

Sei L_n die Anzahl der Bäume mit n Knoten, die eine Kante als „Wurzel“ haben, also eine ausgezeichnete Kante besitzen, die keine Symmetriekante ist. Mit Hilfe des Lemmas 5.17 erhält man durch Aufsummieren der Gleichung über alle Bäume mit n Knoten

$$\sum_{\substack{\text{Bäume mit} \\ n \text{ Knoten}}} p^* - \sum_{\substack{\text{Bäume mit} \\ n \text{ Knoten}}} (q^* - s) = \sum_{\substack{\text{Bäume mit} \\ n \text{ Knoten}}} 1$$

und den Gleichheiten $\sum 1 = t_n$, $\sum p^* = T_n$ und $\sum (q^* - s) = L_n$ den Zusammenhang

$$T_n - L_n = t_n. \quad (5.5)$$

Die Identität

$$\sum_{\substack{\text{Bäume mit} \\ n \text{ Knoten}}} 1 = t_n$$

ist klar, weil ja über alle Bäume mit n Knoten summiert wird.

Da man aus einem Baum einen Wurzelbaum machen kann, indem man einen Knoten als Wurzel auszeichnet, gibt es pro Baum p^* Möglichkeiten einen Wurzelbaum zu bekommen. Damit folgt die zweite Gleichung

$$\sum_{\substack{\text{Bäume mit} \\ n \text{ Knoten}}} p^* = T_n.$$

Ähnlich ist es bei den Bäumen mit einer ausgezeichneten Kante, die keine Symmetriekante ist. Man muss also von der Anzahl der unterschiedlichen Kanten q^* noch die Anzahl der Symmetriekanten s abziehen und es folgt

$$\sum_{\substack{\text{Bäume mit} \\ n \text{ Knoten}}} (q^* - s) = L_n$$

Sei $L(x)$ die zu L_n gehörende erzeugende Funktion. Aus Gleichung (5.5) folgt

$$t(x) = T(x) - L(x). \quad (5.6)$$

Mit der erzeugenden Funktion der Klasse aller injektiver Funktionen aus Kapitel 4 kann $L(x)$ durch Terme in $T(x)$ ausgedrückt werden.

Zwei verschiedene Wurzelbäume beschreiben einen Baum mit einer ausgezeichneten Kante, die keine Symmetriekante ist, indem die beiden Wurzeln durch eine Kante verbunden werden und diese Kante ausgezeichnet wird. Die folgende Abbildung zeigt diese Überlegung.

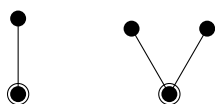


Abbildung 5.5: 2 Wurzelbäume

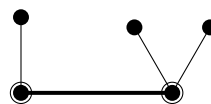


Abbildung 5.6: zugehöriger Baum mit ausgezeichneter Kante

Es ist wichtig, dass die beiden Wurzelbäume verschieden sind. Wäre es zweimal der selbe Baum, dann wäre die ausgezeichnete Kante eine Symmetriekante und das soll nicht sein.

Die Bäume mit ausgezeichneter Kante, die keine Symmetriekante ist, können also als Tupel von Wurzelbäumen aufgefasst werden. Somit kann der Satz 4.1 aus Kapitel 4 mit $n = 2$ angewandt werden.

$$\begin{aligned} L(x) &= P_{A_2}(T(x)) - P_{S_2}(T(x)) \\ &= \frac{1}{2} (T^2(x) - T(x^2)) \end{aligned}$$

Gemeinsam mit Gleichung (5.6) folgt die Aussage des Satzes. \square

5.4 Wälder

Wälder sind Graphen, die aus Bäumen bestehen. Ein zusammenhängender Wald ist also wieder ein Baum.

Sei

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_{n,k} x^k$$

die erzeugende Funktion der Wälder mit n Knoten. Die Koeffizienten $f_{n,k}$ von x^k sind die Anzahl der Wälder mit n Knoten und k Kanten. Die bivariate erzeugende Funktion aller Wälder ist dann gegeben durch

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) y^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f_{n,k} x^k y^n.$$

Um Ausdrücke für $f_n(x)$ und $f(x, y)$ zu erhalten, wird die erzeugende Funktion der Bäume verwendet.

Lemma 5.19. *Die erzeugende Funktion der Klasse aller Wälder mit n Knoten gezählt bezüglich der Kantenzahl ist durch*

$$f_n(x) = \sum_{j=[j_1, j_2, \dots, j_n]} \prod_{i=1}^n \binom{t_i + j_i - 1}{j_i} x^{(i-1)j_i} \quad (5.7)$$

gegeben.

Beweis

Die Anzahl der Wälder mit genau j_i Bäumen mit jeweils i Knoten ist gegeben durch die Anzahl von Kombinationen mit Wiederholung,

$$\binom{t_i + j_i - 1}{j_i}.$$

Man muss nun das Produkt über alle i von 1 bis n bilden, um die Anzahl der Wälder mit maximal n Knoten zu bekommen. Da ein Wald aus Bäumen besteht, muss die Anzahl der Kanten auch noch berücksichtigt werden. Es darf also nicht über alle beliebigen $j = [j_1, j_2, \dots, j_n]$ das Produkt gebildet werden.

Um genau n Knoten und k Kanten zu erhalten, ist die Bedingung

$$k = \sum_{i=1}^n (i-1)j_i$$

zu berücksichtigen. Als Anzahl der Wälder mit n Knoten und k Kanten bekommt man

$$f_{n,k} = \sum_{j=[j_1, j_2, \dots, j_n]} \prod_{i=1}^n \binom{t_i + j_i - 1}{j_i}.$$

Somit erhält man

$$f_n(x) = \sum_{j=[j_1, j_2, \dots, j_n]} \prod_{i=1}^n \binom{t_i + j_i - 1}{j_i} x^{(i-1)j_i},$$

womit der Beweis vollständig ist. \square

Multipliziert man die Gleichung (5.7) nun noch mit y^n und summiert über alle positiven n , so erhält man die Gleichung für die erzeugende Funktion der Wälder,

$$1 + f(x, y) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{t_k}{n} (x^{k-1} y^k)^n \right).$$

Hier wird auf den Beweis der letzten technischen Rechenschritte verzichtet. Für eine andere Herleitung dieser Gleichung sei auf den Artikel [Har55] verwiesen.

5.5 Markierte Graphen

Markierte Graphen sind Graphen deren Knoten markiert, also benannt sind. Meistens werden die Knoten von 1 bis $|V|$ durchnummeriert.

Um die erzeugende Funktion aller markierten ungerichteten Graphen mit dem Satz von Pólya, Satz 2.9, erstellen zu können, muss eine Permutationsgruppe beschrieben werden, die die Äquivalenzklassen der Graphen mit n Knoten und k Kanten bestimmt.

Sei also

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} g_{n,k} x^k$$

die erzeugende Funktion der markierten Graphen mit n Knoten. Die Anzahl der markierten Graphen mit n Knoten und k Kanten ist durch den Koeffizienten $g_{n,k}$ von x^k gegeben.

Die Koeffizienten dieser Potenzreihe sind symmetrisch,

$$g_{n,k} = g_{n, \binom{n}{2} - k}.$$

Durch Entfernen aller Kanten in einem Graph und Hinzufügen der Kanten, die ursprünglich nicht vorhanden waren, erhält man den Komplementärgraph. Durch Erstellen des komplementären Graphs eines Graphs mit k Kanten, bekommt man einen Graph mit $\binom{n}{2} - k$ Kanten. Es gibt also genau so viele Graphen mit n Knoten und k Kanten wie Graphen mit n Knoten und $\binom{n}{2} - k$ Kanten.

Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ sind als äquivalent anzusehen, wenn es eine Abbildung zwischen den beiden Graphen gibt, die die Knoten und die entsprechenden Kanten aufeinander abbildet. Das bedeutet, dass eine Funktion F existiert, durch die alle Kanten $\{u, v\}$ aus E_1 auf die Kanten $\{F(u), F(v)\}$ aus E_2 abgebildet wird.

Es wird nun eine Entsprechung zwischen Graphen und Funktionen hergestellt, um den Satz von Pólya wie in den vorangegangenen Abschnitten anwenden zu können.

Seien $Y = \{0, 1\}$, $X = \{1, 2, \dots, n\}$ und $X^{(2)}$ die Menge aller 2-elementigen Teilmengen von X . Die Menge aller Funktionen

$$f : X^{(2)} \rightarrow Y$$

repräsentiert alle markierten ungerichteten Graphen mit n Knoten in folgender Weise. Jede Funktion f beschreibt einen Graphen $G(f)$ mit der Knotenmenge $X = \{1, 2, \dots, n\}$ und der Kantenmenge $\{\{i, j\} : f(\{i, j\}) = 1\}$. Zwei Funktionen f und h erzeugen genau dann den selben Graphen, wenn eine Permutation π von X existiert, sodass wenn zwei Knoten i und j in $G(f)$ adjazent sind, πi und πj auch in $G(h)$ adjazent sind, also

$$f(\{i, j\}) = h(\{\pi i, \pi j\}) \quad \forall \{i, j\} \in X^{(2)}, \quad (5.8)$$

Sei A eine Permutationsgruppe auf X . Die Gruppe $A^{(2)}$ ist die von A induzierte Permutationsgruppe auf $X^{(2)}$. Für jedes Element π aus A gibt es also ein Element π' in $A^{(2)}$, definiert durch

$$\pi'\{i, j\} = \{\pi i, \pi j\}.$$

Der Grad der Gruppe $A^{(2)}$ ist $\binom{n}{2}$ und es gilt, dass A und $A^{(2)}$ isomorph sind, solange $A \neq S_2$ ist. In diesem Fall wären die beiden Gruppen ident.

Die Bedingung (5.8) ist genau die Voraussetzung, dass die beiden Funktionen f und h in der selben Äquivalenzklasse von $E^{S_n^{(2)}}$ liegen. Die Menge $E^{S_n^{(2)}}$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen von Graphen mit n Knoten bezüglich der oben beschriebenen Äquivalenzrelation.

Satz 5.20. *Die erzeugende Funktion $g_n(x)$ der markierten Graphen mit n Knoten bezüglich der Kanten ist durch*

$$g_n(x) = P_{S_n^{(2)}}(1 + x)$$

gegeben, wobei $P_{S_n^{(2)}}(x)$

$$\frac{1}{n!} \sum_{j=[j_1, j_2, \dots, j_n]} \frac{n!}{1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots n^{j_n} j_n!} \prod_k x_{2k+1}^{kj_{2k+1}} \prod_k (x_k x_{2k}^{k-1})^{j_{2k}} x_k^{k \binom{j_k}{2}} \prod_{r < t} x_{kg}^{ggT(r,t)j_r j_t}$$

ist.

Beweis

Die abzählende Potenzreihe des Figureninhalts ist in diesem Fall $1 + x$, da eine Kante zwischen zwei Knoten entweder vorhanden sein kann, oder nicht.

Die Anzahl der Kanten einer Funktion $f \in Y^{X^{(2)}}$ ist definiert als die Anzahl der Tupel, die auf 1 abgebildet werden. Sei also $\omega(f)$ die Anzahl der Kanten im Graphen $G(f)$, definiert durch

$$\omega(f) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} \omega(f(x_i)),$$

wobei

$$\omega(f(x)) = \begin{cases} 0 & , f(x) = 0 \\ 1 & , f(x) = 1 \end{cases}$$

gilt. Es werden also die Kanten im Graphen $G(f)$ gezählt. Es wird nun die Anzahl der Äquivalenzklassen, die durch die Anzahl der Kanten bestimmt sind, von $E^{S_n^{(2)}}$ gesucht.

Wendet man nun wie im Beweis von Satz 5.12 wieder den Satz von Pólya, Satz 2.9, an, so erhält man als erzeugende Funktion der markierten Graphen mit n Knoten

$$g_n(x) = P_{S_n^{(2)}}(1+x).$$

Für den vollständigen Beweis des Satzes muss noch die Gestalt des Zyklenzeigers $P_{S_n^{(2)}}(x)$ bewiesen werden. Man überlegt sich auf welche Permutation aus $S_n^{(2)}$ eine Permutation aus S_n mit Zyklusindex $x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}$ abgebildet wird.

Es wird also eine Abbildung

$$\begin{aligned} S_n &\rightarrow S_n^{(2)} \\ x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n} &\mapsto x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \cdots x_m^{\ell_m}, \end{aligned}$$

genauer gesagt der Ausdruck $x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \cdots x_m^{\ell_m}$ mit $m = \binom{n}{2}$ gesucht.

Sei also π eine Permutation aus S_n mit dem Zyklentyp $x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}$. Es gibt nun zwei mögliche Fälle für die zugehörige Permutation π' in $S_n^{(2)}$. Im ersten Fall besteht das Element aus $X^{(2)}$ aus zwei Elementen aus $X = \{1, 2, \dots, n\}$, die bei der Permutation π im selben Zyklus liegen und im zweiten Fall liegen sie in zwei unterschiedlichen Zyklen von π .

Fall 1:

Zuerst wird der Fall betrachtet, dass die zwei Elemente aus X im selben Zyklus von π liegen. Sei σ_k ein Zyklus in π der Länge k für gerades k . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man diesen Zyklus anschreiben als

$$\sigma_k = (1, 2, \dots, k),$$

da anderenfalls nur die Elemente umbenannt werden. Dieser Zyklus induziert nun in $X^{(2)} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \dots, \{n, n-1\}\}$ ebenfalls Zyklen, die allerdings nur auf einer Teilmenge von $X^{(2)}$ operieren, nämlich der Menge $\{1, 2, \dots, k\}^{(2)}$.

Wenn das Element $\{1, 2\}$ im Zyklus vorkommt, so hat er die Gestalt

$$(\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \dots, \{k, 1\}).$$

Kommt das Element $\{1, 3\}$ vor, erhält man

$$(\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \dots, \{k-1, 1\}, \{k, 2\}).$$

Diesen Gedanken kann man nun bis zum Element $\{1, \frac{k}{2}\}$ weiterführen und man bekommt den Zyklus

$$\left(\left\{ \left\{ 1, \frac{k}{2} \right\}, \left\{ 2, \frac{k}{2} + 1 \right\}, \left\{ 3, \frac{k}{2} + 2 \right\}, \dots, \underbrace{\left\{ k - \left(\frac{k}{2} - 2 \right), 1 \right\}}_{= \left\{ \frac{k}{2} + 2, 1 \right\}}, \dots, \left\{ k, \frac{k}{2} - 1 \right\} \right) \right).$$

Alle diese $\frac{k}{2} - 1$ Zyklen haben ebenfalls die Länge k .

Nun fehlt nur noch das Element $\{1, \frac{k}{2} + 1\}$. Für dieses Element hat der Zyklus die Gestalt

$$\left(\left\{ 1, \frac{k}{2} + 1 \right\}, \left\{ 2, \frac{k}{2} + 2 \right\}, \left\{ 3, \frac{k}{2} + 3 \right\}, \dots, \left\{ \frac{k}{2}, k \right\} \right).$$

Die Länge dieses Zyklus ist $\frac{k}{2}$. Insgesamt wird der Zyklus σ_k mit dem Zyklentyp x_k^1 also auf den Zyklentyp

$$x_{\frac{k}{2}} x_k^{\frac{k}{2}-1}$$

abgebildet.

Sei nun k ungerade. Durch eine ähnliche Überlegung ergibt sich, dass der Zyklenzeiger x_k^1 auf

$$x_k^{\frac{k-1}{2}}$$

abgebildet wird.

Wenn daher j_k Zyklen der Länge k in π vorkommen, bilden die Paare von Elementen von X , die im gleichen Zyklus liegen, den Teil $x_k^{j_k}$ vom Zyklenzeiger von π folgendermaßen ab.

$$x_k^{j_k} \mapsto \begin{cases} \left(x_{\frac{k}{2}} x_k^{\frac{k}{2}-1} \right)^{j_k} & , k \text{ gerade} \\ x_k^{j_k \frac{k-1}{2}} & , k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Fall 2:

Im zweiten Fall liegen die beiden Elemente von $x \in X^{(2)}$ aus X in zwei verschiedenen Zyklen von π . Seien also σ_r und σ_s zwei Zyklen von π der Längen r und s . Die Zyklen σ_r und σ_s induzieren auf einem Paar von Elementen aus X , die in jeweils einem der Zyklen liegen, m Zyklen der Länge ℓ_m , mit $m = \text{ggT}(r, s)$ und $\ell_m = \text{kgV}(r, s)$.

Wenn $r = s$ gilt, dann ergeben sich $r \binom{j_r}{2}$ Zyklen der Länge r , da $\text{ggT}(r, r) = r$ und $\text{kgV}(r, r) = r$ gilt. Weiters gibt es $\binom{j_r}{2}$ Möglichkeiten zwei der j_r Zyklen miteinander zu kombinieren.

Insgesamt ergibt das für die Paare, die aus zwei Elementen aus verschiedenen Zyklen bestehen, die Abbildungsvorschrift

$$x_r^{j_r} x_s^{j_s} \mapsto \begin{cases} x_{\text{kgV}(r,s)}^{\text{ggT}(r,s) j_r j_s} & , r \neq s \\ x_r^{\binom{j_r}{2}} & , r = s \end{cases}.$$

Damit hat der Zyklenzeiger der Gruppe $S_n^{(2)}$ die gewünschte Gestalt und der Satz ist vollständig bewiesen. \square

Kapitel 6

Moleküle - Chemie

Für dieses Kapitel wird als Unterlage das Buch [VFR⁺04] verwendet.

Moleküle stehen in engem Zusammenhang mit Graphen. Deshalb werden zu Beginn dieses Kapitels noch weitere Definitionen der Graphentheorie, die im vorangegangenen Kapitel (siehe Abschnitt 5.1) nicht erwähnt sind, in Verbindung mit der Chemie wiederholt.

6.1 Graphentheoretische Grundlagen

Moleküle sind mehratomige Teilchen, die durch chemische Bindungen zwischen Atomen entstehen. Diese chemischen Bindungen können auch Doppel- oder Mehrfachbindungen sein, wodurch der Begriff eines Multigraphen hier notwendig wird.

Definition 6.1. Ein **Multigraph** ist ein Graph $G = (V, E)$, bei dem E nicht notwendiger Weise aus lauter verschiedenen Kanten bestehen muss. Es sind also Mehrfachkanten zwischen den gleichen Knoten erlaubt.

Definition 6.2. Die **Vielfachheit einer Kante** ist die Anzahl dieser Kante im Graphen.

Definition 6.3. Die **Knotengrad-Folge** eines Graphen G ist die Folge, in der die Anzahlen der Knoten nach dem Knotengrad sortiert stehen.

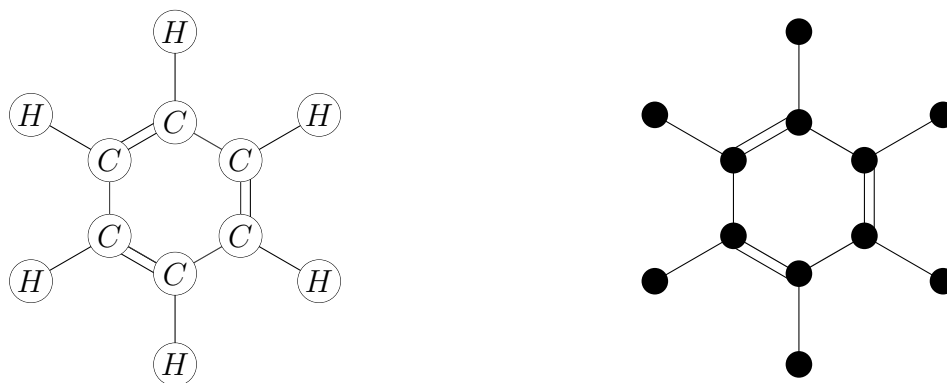
Beispiel 6.4.

Der Graph aus Abbildung 6.1 repräsentiert die Strukturformel von Benzol, C_6H_6 und daneben ist der zugehörige Multigraph dargestellt.

In diesem Multigraph gibt es Kanten der Vielfachheit 1 und 2. Die Knotengradfolge dieser Graphen ist

$$(0, 6, 0, 0, 6),$$

da es 0 Knoten mit Knotengrad 0, 6 Knoten mit Knotengrad 1, 0 Knoten mit Knotengrad 2 und 3 und 6 Knoten mit Knotengrad 4 gibt.

Abbildung 6.1: Benzol, C_6H_6 und der zugehörige Multigraph

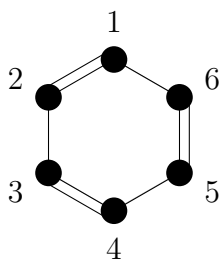
○

Moleküle sind immer zusammenhängende Graphen. Die Valenz der Atome, also die Anzahl der Bindungen, wird in der Graphentheorie mit dem Knotengrad gleichgesetzt und die Bindungsordnung, also die Anzahl der Bindungen zwischen zwei Atomen mit der Vielfachheit einer Kante.

Ein Molekül besteht nie aus nur einem Atom, es gibt immer eine Bindung. Das bedeutet in der Knotengrad-Folge ist die erste Zahl immer 0 und kann somit auch einfach weggelassen werden. Weiters sind die Valenz und die Bindungsordnung beschränkt. Die meisten Moleküle haben maximal eine Valenz von 4. Die Bindungsordnung kann natürlich nie größer sein als die Valenz.

Der rechte Graph in Abbildung 6.1 ist der unmarkierte zugehörige Graph zur Strukturformel von Benzol, die links abgebildet ist. Wird dieser Graph nun zu einem markierten Graphen, so gibt es viele Möglichkeiten, die Knoten zu benennen. Zwei markierte Graphen symbolisieren die gleiche Strukturformel, also den gleichen unmarkierten Graphen, wenn es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

Besteht das Molekül aus einem Benzol-Ring, also einem C_6 -Ring, bei dem bei jedem vorhandenen Kohlenstoffatom noch eine Bindung frei ist, der Gestalt



wie in Abbildung 6.1 dargestellt, so sind alle möglichen Markierungen des Graphen unter allen Drehungen und Spiegelungen äquivalent. Damit ist die Isomorphismengruppe die Diedergruppe D_6 , siehe Abschnitt 2.5.4. Die Äquivalenzklassen werden in diesem Fall also durch die Diedergruppe D_6 bestimmt.

Bei einem Benzol-Ring steht wie oben erwähnt, bei jedem der 6 Kohlenstoffatome noch eine Bindung zur Verfügung. Das bedeutet im graphentheoretischen Sinne, dass

an jeden Knoten des Rings noch ein Knoten oder ein Graph mittels einer einfachen Kante gehängt wird.

6.2 Zählen von Isomeren

Isomerie ist das Vorhandensein von mehreren chemischen Molekülen mit der selben Summenformel, aber unterschiedlicher Strukturformel, die sich also in der räumlichen Anordnung unterscheiden. Die Menge aller dieser Moleküle nennt man dann Isomere.

6.2.1 Benzol

An den in Abschnitt 6.1 erwähnten Benzol-Ring kann man nun lauter Wasserstoff-Atome, H , hängen und es entsteht C_6H_6 , Benzol. Jedes der H -Atome kann nun durch ein Chlor-Atom, Cl ersetzt werden. Diese Moleküle heißen dann, abhängig von der Anzahl der Cl -Atome, k -Chlor-Benzol.

Beispiel 6.5.

Eine mögliche Strukturformel von 2-Chlor-Benzol, $C_6H_4Cl_2$.

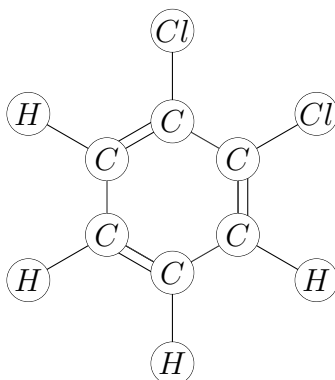


Abbildung 6.2: 2-Chlor-Benzol, $C_6H_4Cl_2$

○

Das Molekül von k -Chlor-Benzol ist also nichts anderes als ein regelmäßiges Sechseck, bei dem k Ecken „eingefärbt“ werden. Die abzählende Potenzreihe des Figurenvorrats ist also

$$f(x) = 1 + x,$$

weil jedes Wasserstoff-Atom entweder durch ein Chlor-Atom ersetzt werden kann oder nicht. Die Ecke wird also entweder eingefärbt oder nicht.

Um die erzeugende Funktion der k -Chlor-Benzol Isomere zu erhalten muss man also nach dem Satz von Pólya, Satz 2.9, die Funktion $f(x) = 1+x$ in den Zyklenzeiger

von D_6 , siehe Abschnitt 2.5.4, einsetzen. Das führt zu

$$\begin{aligned}
 P_{D_6}(f(x)) &= \frac{1}{12} \sum_{d|n} \varphi(d) f(x^d)^{\frac{6}{d}} + \frac{1}{4} (f(x^1)^2 f(x^2)^2 + f(x^2)^3) \\
 &= \frac{1}{12} \sum_{d=1,2,3,6} \varphi(d) f(x^d)^{\frac{6}{d}} + \frac{1}{4} (f(x^1)^2 f(x^2)^2 + f(x^2)^3) \\
 &= \frac{1}{12} (f(x^1)^6 + f(x^2)^3 + 2f(x^3)^2 + 2f(x^6)) + \\
 &\quad + \frac{1}{4} (f(x^1)^2 f(x^2)^2 + f(x^2)^3) \\
 &= x^6 + x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1.
 \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung der abzählenden Potenzreihe der Chlor-Benzol Isomere kann man nun leicht die Anzahl der k -Chlor-Benzol Isomere ablesen. Der Koeffizient von x^k ist genau die gesuchte Anzahl.

Beispiel 6.6.

[Fortsetzung Beispiel 6.5] Der Koeffizient von x^2 in der abzählenden Potenzreihe der Chlor-Benzol Isomere ist 3, das heißt es gibt 3 Strukturformeln zur Summenformel $C_6H_4Cl_2$, die sich unterscheiden. Diese sind in der folgenden Abbildung dargestellt.

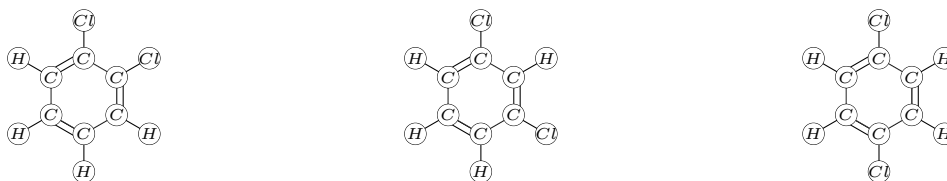


Abbildung 6.3: 2-Chlor-Benzol Isomere, $C_6H_4Cl_2$

○

Bemerkung 6.7. Die 2-Chlor-Benzol Isomere aus Abbildung 6.3 heißen auch $\{1, 2\}$ -Chlor-Benzol, $\{1, 3\}$ -Chlor-Benzol und $\{1, 4\}$ -Chlor-Benzol. Alle anderen $\{i, j\}$ -Chlor-Benzole sind zu einem der drei äquivalent.

Betrachtet man weiters Moleküle, die entstehen, wenn an einen Benzol-Ring auch andere Atome angehängt werden, so ändert sich die abzählende Potenzreihe des Figurenvorrats. Lässt man zum Beispiel zu, dass Wasserstoff-Atome nicht nur durch Chlor-Atome getauscht werden können, sondern auch durch eine OH -Gruppe, so hat die abzählende Potenzreihe des Figurenvorrats die Gestalt

$$f(x, y) = 1 + x + y,$$

da es zwei mögliche Figuren gibt, die an den Ecken des regelmäßigen Sechsecks liegen können. Um die Anzahl der Isomere mit k Chlor-Atomen und ℓ OH -Gruppen zu erhalten, muss dann der Koeffizient von $x^k y^\ell$ aus der abzählenden Potenzreihe

$$P_{D_6}(f(x, y))$$

abgelesen werden.

Abhängig von der Anzahl k der möglichen Atome, die die Wasserstoff-Atome ersetzen können, hat die abzählende Potenzreihe die Gestalt

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k. \quad (6.1)$$

6.2.2 Naphthalin

Der Unterschied von Benzol und Naphthalin liegt in der Grundstruktur der Kohlenstoff-Atome. Naphthalin hat als Grundstruktur einen doppelten Benzol-Ring, also 10 Kohlenstoff-Atome. Die Summenformel von Naphthalin ist $C_{10}H_8$. Das Molekül ist in Abbildung 6.4 dargestellt.

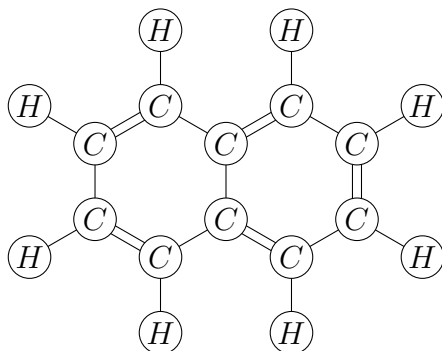


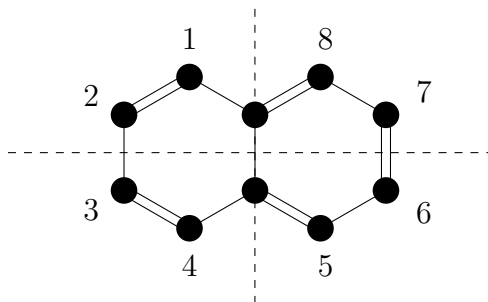
Abbildung 6.4: Naphthalin, $C_{10}H_8$

Genauso wie beim Benzol, Abschnitt 6.2.1, können auch hier die Wasserstoff-Atome durch andere Atome, zum Beispiel Chlor, ersetzt werden.

Die Anzahl der entsprechenden Isomere kann wieder als Koeffizient in der abzählenden Potenzreihe der Naphthalin Isomere abgelesen werden. Diese erzeugende Funktion erhält man wieder mit Hilfe des Satzes von Pólya, 2.9.

Um die entsprechende Potenzreihe, siehe Gleichung 6.1, in den Zyklenzeiger der Permutationsgruppe einsetzen zu können, muss zuerst die Permutationsgruppe und ihr Zyklenzeiger bestimmt werden.

Dazu betrachtet man den Multigraphen, der die Strukturformel aus Abbildung 6.4 repräsentiert.

Abbildung 6.5: Multigraph zu Naphthalin, $C_{10}H_8$

An jedem nummerierten Knoten hängt noch ein Wasserstoff-Atom. Es muss also die Permutationsgruppe dieser acht Elemente bestimmt werden. Auf der Menge dieser acht Elemente gilt es $8! = 4320$ Permutationen \mathcal{P}_M . Es ist nun die Untergruppe dieser Permutationen $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{P}_M$ gesucht, die das Molekül in sich selbst überführt. In Abbildung 6.5 sind bereits die Symmetrie-Achsen des Multigraphen eingezeichnet. Anhand dieser Achsen kann man sich die gesuchte Permutationen überlegen (ähnlich wie in Beispiel 1.11).

Die Permutationsgruppe \mathfrak{S} besteht aus folgenden Permutationen:

- id: $ZT(\text{id}) = x_1^8$
- eine Spiegelung an der senkrechten Achse mit der Zyklendarstellung

$$(18)(27)(36)(45)$$

und dem Zyklentyp: $ZT(\pi) = x_2^4$

- eine Spiegelung an der waagrechten Achse mit der Zyklendarstellung

$$(14)(23)(58)(67)$$

und dem Zyklentyp: $ZT(\pi) = x_2^4$

- eine Permutation, die die Elemente kreuzweise vertauscht mit der Zyklendarstellung

$$(15)(26)(37)(48)$$

und dem Zyklentyp: $ZT(\pi) = x_2^4$

Diese Permutation ist die Hintereinanderausführung der beiden vorher genannten Permutationen, also der Spiegelungen an den beiden Achsen.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Insgesamt gibt es also 4 Drehungen, $|\mathfrak{S}| = 4$ und somit ist der Zyklenzeiger der Permutationsgruppe \mathfrak{S} durch

$$P_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = \frac{1}{4} (x_1^8 + 3x_2^4)$$

gegeben.

Um nun die erzeugende Funktion der Isomere der Chlor-Naphthaline zu erhalten, setzt man die abzählenden Potenzreihe des Figurenvorrats

$$f(x) = 1 + x$$

in den Zyklenzeiger ein.

$$\begin{aligned} P_{\mathfrak{S}}(f(x)) &= \frac{1}{4} ((1+x)^8 + 3(1+x^2)^4) = \\ &= x^8 + 2x^7 + 10x^6 + 14x^5 + 22x^4 + 14x^3 + 10x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

Mit dieser abzählenden Potenzreihe erhält nun wieder die Anzahl der k -Chlor-Naphthalin Isomere, indem man den entsprechenden Koeffizienten abliest.

Kapitel 7

Numerischer Algorithmus zur Berechnung der Koeffizienten

Als Unterlage für dieses Kapitel dient der Artikel [RMH⁺16].

Der Satz von Pólya beruht, wie schon in den ersten Kapiteln zu sehen ist, auf der Symmetrie der Struktur, kurz gesagt der Symmetriegruppe, die durch die Permutationen in Zykelschreibweise repräsentiert wird. Mit Hilfe des Satzes von Pólya, Satz 2.9, wird immer das gesamte Polynom der abzählenden Potenzreihe berechnet. Diese Berechnung kann sehr aufwändig, man denke zum Beispiel an eine Fläche mit 50 verschiedenen Feldern und 20 möglichen Farben, und teilweise auch unnötig sein, wenn man nur an der Anzahl an Möglichkeiten eines bestimmten Verhältnisses interessiert ist.

Der in diesem Kapitel besprochene Algorithmus basiert auf der Idee nicht das gesamte Polynom zu berechnen, sondern nur die gesuchten Koeffizienten.

In diesem Kapitel sind Figuren und Kategorien gleichzusetzen. Es gibt also für jede Kategorie eine zugehörige Figur. Man stelle sich zum Beispiel als Kategorien Farben vor und jedem Element wird eine Farbe zugeordnet. Dann gibt es für jede Farbe eine Figur, also sind Kategorien und Farben in diesem Fall das gleiche.

Seien k die Anzahl der Figuren beziehungsweise Kategorien, n die Anzahl der Elemente und der Vektor $[c_1 : c_2 : \dots : c_k]$ das gesuchte Verhältnis der Figuren. In diesem Fall ist die abzählende Potenzreihe des Figurenvorrats durch die Funktion

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1 + x_2 + \dots + x_k \quad (7.1)$$

gegeben. Um die Anzahl der Möglichkeiten dieses Figurenverhältnisses zu erhalten, muss in der abzählenden Potenzreihe $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$ der entsprechende Koeffizient,

$$[x_1^{c_1} x_2^{c_2} \dots x_k^{c_k}] P(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

abgelesen werden.

Wie in Definition 1.7 erklärt, erhält man den Zyklenzeiger einer Permutationsgruppe \mathfrak{S} durch aufsummieren der Zyklentypen der einzelnen Permutationen,

$$P_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{1}{|\mathfrak{S}|} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}} ZT(\pi).$$

Es genügt also auch, die Koeffizienten von $x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_k^{c_k}$ im Zyklentyp jeder Permutation π zu berechnen und diese dann aufzusummieren und durch die Mächtigkeit der Permutationsgruppe zu dividieren.

Es stellt sich also die Frage, wie man diese Koeffizienten für eine Permutation berechnet.

7.1 Algorithmus

Sei π eine Permutation des Typs $[j_1, j_2, \dots, j_n]$, also eine Permutation mit j_i Zyklen der Länge i für alle $i = 1, \dots, n$. Setzt man in den Zyklentypen dieser Permutation die abzählende Potenzreihe des Figurenvorrats (7.1) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} & (x_1^1 + x_2^1 + \dots + x_k^1)^{j_1} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2)^{j_2} \cdots (x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n)^{j_n} = \\ &= \prod_{i=1}^n (x_1^i + x_2^i + \dots + x_k^i)^{j_i} = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{\ell=1}^k x_\ell^i \right)^{j_i} = \sum_{\ell=1}^k \prod_{i=1}^n x_{\ell}^{j_i} \end{aligned}$$

Jedem Zyklus der Länge i , $i = 1, \dots, n$ wird nun eine Figur (Kategorie) zugewiesen. Sei $s_{i,j}$ die Anzahl der Zyklen der Länge i und der zugewiesenen Kategorie j , die in eine Matrix geschrieben werden, $S = \{s_{i,j}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k}}$. Für diese Matrix gelten 3 Bedingungen:

- (i) $s_{i,j} \geq 0 \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$
- (ii) Zeilensummenbedingung: $\sum_{j=1}^k s_{i,j} = j_i$
In einer Zeile steht die Gesamtanzahl der Zyklen der Länge i .
- (iii) Spaltensummenbedingung: $\sum_{i=1}^n i \cdot s_{i,j} = c_j$
In einer Spalte steht die Zyklenanzahl, die die Figuren der Kategorie j zugeordnet hat. Mit der jeweiligen Zyklenlänge multipliziert und aufsummiert ergibt das dann die Gesamtanzahl der Figuren mit der Kategorie j .

Es ist natürlich möglich, dass es keinen Zyklus einer bestimmten Länge gibt. In diesem Fall wird die entsprechende Zeile in der Matrix einfach gelöscht.

Für jede dieser Matrizen gibt es

$$F(S) = \prod_{i=1}^n \binom{j_i}{s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,k}}$$

Möglichkeiten die Kategorien den Zyklen zuzuordnen. Nun muss noch über alle möglichen Matrizen, die die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllen, summiert werden um den gesuchten Koeffizienten $[x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_k^{c_k}]$ vom Zyklentyp der Permutation π zu erhalten.

$$[x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_k^{c_k}] ZT_\pi(f(x_1, x_2, \dots, x_k)) = \sum_{\substack{\text{Matrix } S: \\ (i),(ii),(iii) \text{ sind erfüllt}}} F(S)$$

$ZT_\pi(f(x_1, x_2, \dots, x_k))$ steht hier für den Zyklentyp der Permutation π , in den die abzählende Potenzreihe des Figurenvorrats in der Form

$$ZT_\pi(f(x_1, x_2, \dots, x_k)) = f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1)^{j_1} f(x_1^2, x_2^2, \dots, x_k^2)^{j_2} \cdots f(x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n)^{j_n}$$

eingesetzt wird (vergleiche Gleichung (1.2) und (2.3)).

Beispiel 7.1.

Betrachtet wird eine Permutation π mit 2 Zyklen der Länge 1, 3 Zyklen der Länge 2 und 1 Zyklus der Länge 4. Weiters sucht man die Anzahl der möglichen Färbungen dieser 12 Flächen mit 4 roten, 6 grünen und 2 blauen Flächen unter dieser Permutation.

Diese Berechnung muss nun für jede Permutation π aus der Permutationsgruppe \mathfrak{S} durchgeführt werden. Die erhaltenen Koeffizienten können nun gemittelt, also aufsummiert und durch die Mächtigkeit $|\mathfrak{S}|$ von \mathfrak{S} dividiert, werden, um so den gewünschten Koeffizienten zu erhalten.

es werden also 3×3 -Matrizen S gesucht, die

(i) $s_{i,j} \geq 0 \forall i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 3$

(ii) Zeilensummenbedingung: $S \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Spaltensummenbedingung: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

erfüllen.

Die fünf Matrizen

$$\begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

sind alle Matrizen, die die genannten Eigenschaften erfüllen. Weiters werden die einzelnen Werte $F(S)$ berechnet. Dazu werden die Multinomialkoeffizienten

$$\begin{aligned} \binom{2}{0,0,2} &= \binom{2}{0,2,0} = \binom{2}{2,0,0} = 1, \\ \binom{3}{0,3,0} &= 1, \quad \binom{3}{2,1,0} = \binom{3}{0,2,1} = \binom{3}{2,0,1} = 3, \quad \binom{3}{1,1,1} = 6 \text{ und} \\ \binom{1}{1,0,0} &= \binom{1}{0,1,0} = 1 \end{aligned}$$

benötigt. Es ergeben sich die Werte

$$F(S_1) = 1, \quad F(S_2) = F(S_3) = F(S_4) = 3, \text{ und } F(S_5) = 6.$$

Das ergibt eine Gesamtzahl von $1 + 3 + 3 + 3 + 6 = 16$ mögliche Färbungen.

Überprüft man dies mit dem Satz von Pólya, so sieht man nach Umformen des Ausdrucks

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4),$$

dass der Koeffizient von $x_1^4 x_2^6 x_3^2$ 16 ist. \circ

Insgesamt kann der gesuchte Koeffizient in der erzeugenden Funktion durch

$$[x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_k^{c_k}]P(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{1}{|\mathfrak{S}|} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}} \sum_{\substack{\text{Matrix } S: \\ (i), (ii), (iii) \text{ sind erfüllt}}} F(S)$$

berechnet werden.

Diese Überlegung hängt nur vom Zyklentyp ab, also muss die Berechnung nur für jeden verschiedenen Zyklentyp gemacht werden. Die Permutationen (13)(2)(4) und (24)(1)(3) haben zum Beispiel den selben Zyklentyp. Somit muss die Berechnung für diesen beiden Permutationen nur einmal durchgeführt werden und kann dann einfach mit 2 multipliziert werden.

Der Algorithmus zur Berechnung der Koeffizienten besteht aus folgenden Schritten.

- Die Permutationsgruppe \mathfrak{S} wird in Äquivalenzklassen bezüglich des Zyklentyps aufgeteilt. Für jede dieser Äquivalenzklassen müssen alle Matrizen S , die die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllen, gefunden werden.
- Für jede dieser Matrizen wird $F(S)$ berechnet.
- Die Werte $F(S)$ mit der Mächtigkeit der Äquivalenzklassen multiplizieren.
- über alle Äquivalenzklassen summieren und durch $|\mathfrak{S}|$ dividieren.

Es bleibt nun noch zu klären, wie die Matrizen effizient gefunden werden können.

7.2 Matrizen aufstellen

Es werden Matrizen gesucht, die abhängig von einer Permutation π die Bedingungen

$$(i) \quad s_{i,j} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k$$

$$(ii) \quad \text{Zeilensummenbedingung: } \sum_{j=1}^k s_{i,j} = j_i$$

$$(iii) \quad \text{Spaltensummenbedingung: } \sum_{i=1}^n i \cdot s_{i,j} = c_j$$

erfüllen.

Für ein Polynom

$$(x_1^r + x_2^r + \dots + x_k^r)^d$$

sind die Exponenten für jedes x_i aus der Menge

$$V = \{0, r, 2r, 3r, \dots, dr\}. \quad (7.2)$$

Die Summendarstellung dieses Polynoms ist durch

$$(x_1^r + x_2^r + \dots + x_k^r)^d = \sum_{\substack{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k: \\ \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_k = d}} \mu_\ell \prod_{i=1}^k x_i^{r\ell_i},$$

gegeben, wobei die Koeffizienten μ_ℓ durch Multinomialkoeffizienten

$$\mu_\ell = \binom{n}{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k} = \prod_{i=1}^k \binom{\sum_{j=1}^i \ell_j}{\ell_i} \quad (7.3)$$

bestimmt sind.

Der Zyklentyp, in den die abzählende Potenzreihe des Figurenvorrats schon eingesetzt ist, kann als

$$ZT_\pi(f(x_1, x_2, \dots, x_k)) = \prod_{\alpha=1}^n M_\alpha^{r_\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

geschrieben werden. In dieser Gleichung bezeichnet $M_\alpha^{r_\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ein Polynom der Form $(x_1^{r_\alpha} + x_2^{r_\alpha} + \dots + x_k^{r_\alpha})^{d_\alpha}$ für den α -ten verschiedenen Zyklus der Länge r_α mit der Vielfachheit d_α . Jedes dieser $M_\alpha^{r_\alpha}$ entspricht also einer Zeile in den gesuchten Matrizen.

Wenn das Verhältnis $[c_1 : c_2 : \dots : c_k]$ bekannt ist, kann die Anzahl der möglichen Folgen $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ beschränkt werden und es muss weniger berechnet werden.

Es werden nur die Kombinationen aus $V_\alpha = \{v_{i,\alpha}\}_{i=1}^{d_\alpha+1}$ genommen, die die Bedingung

$$\sum_{\alpha=1}^m v_{i,\alpha} = c_i \quad (7.4)$$

erfüllen. Diese Bedingung ist äquivalent zur Spaltensummenbedingung. Die Menge V_α ist von der Gestalt (7.2) und beinhaltet alle möglichen Werte in der α -ten Zeile von S .

Als erstes wird für die Kategorie 1, also x_1 überprüft, ob die Bedingung (7.4) erfüllt ist. Man sucht eine Menge $\{\ell_{1,\alpha}\}_{\alpha=1}^n$, sodass

$$\sum_{\alpha=1}^n \ell_{1,\alpha} = c_1$$

stimmt und erhält eine Menge an möglichen Werten für die erste Spalte in der Matrix S . Anschließend kann auf Grund von $\ell_{1,\alpha}$, eine Menge $\{\ell_{i,\alpha}\}_{i=2}^k$ bestimmt werden, sodass

$$\ell_{1,\alpha} + \ell_{2,\alpha} + \dots + \ell_{k,\alpha} = d_\alpha$$

erfüllt ist, was äquivalent zur Zeilensummenbedingung ist.

So wird eine Menge von Folgen

$$S_j = \{S_{j,\alpha}\}_{\alpha=1}^n = \{(\ell_{1,\alpha}, \ell_{2,\alpha}, \dots, \ell_{k,\alpha})\}_{\alpha=1}^n$$

gebildet, die die transponierten gesuchten Matrizen repräsentieren. Die Anzahl der Matrizen zu einer Permutation, also das maximale j , hängt vom gegebenen Verhältnis $[c_1 : c_2 : \dots : c_k]$ ab. Wenn alle Matrizen

$$S = \{S_j\}$$

aufgestellt wurden, kann dann der Koeffizient im Zyklentyp dieser Permutation mit der Gleichung (7.3)

$$\sum_j \prod_{\alpha=1}^n \binom{d_\alpha}{S_{j,\alpha}}$$

berechnet werden.

Dieser Vorgang muss nun für alle Permutationen π in \mathfrak{S} wiederholt werden, die einzelnen Koeffizienten müssen aufsummiert werden und anschließend mit $|\mathfrak{S}|$ normiert werden.

7.3 Rechenaufwand

Der Algorithmus ist auf der Kenntnis des gewünschten Verhältnisses der Figuren aufgebaut. Mögliche Matrizen, die nicht zum gesuchten Koeffizienten beitragen, werden dadurch frühestmöglich ausgeschlossen und verworfen.

Die erzeugende Funktion, die man mit dem Satz von Pólya, Satz 2.9, erhält, basiert auf den Permutationstypen, also auf den Zyklentypen. Daher kann die Komplexität des Algorithmus sehr stark variieren, wenn eine andere Gruppenoperation untersucht wird.

Die Elemente zweier verschiedener Permutationsgruppen sind im Allgemeinen wesentlich verschieden und unterscheiden sich auch in ihrer Zyklendarstellung. Daher ist es schwierig, Aussagen über die Komplexität zu treffen.

Grundsätzlich gilt für die Worst-Case-Analys, dass je größer die Mächtigkeit der Permutationsgruppe ist, desto aufwändiger ist die Suche nach den Matrizen. Zu beachten ist, dass manche Gruppen der gleichen Größe viel mehr verschiedene Zyklentypen als andere haben.

Die Rechenzeit ist proportional zur Anzahl der zu berechnenden Matrizen. Numerische Experimente belegen, dass die Anzahl der Matrizen

- *exponentiell* mit der Anzahl der möglichen Figuren,
- *linear* mit der Anzahl der Elemente in der Menge und
- *linear* mit der Gruppengröße steigt.

Literaturverzeichnis

- [Bur11] William Burnside. Theory of Groups of Finite Order. University, 1911.
- [dB64] Nicolaas Govert de Bruijn. Pólya's Theory of Counting. Applied combinatorial mathematics, pages 144–184, 1964.
- [DM96] John D Dixon and Brian Mortimer. Permutation Groups, volume 163. Springer Science & Business Media, 1996.
- [FL15] Harald Friepertinger and Peter Lackner. Tone Rows and Tropes. J. Math. Music, 9(2):111–172, 2015.
- [Fri94] Harald Friepertinger. Zyklenzeiger linearer Gruppen und Abzählung linearer Codes. Sém. Lothar. Combin., 33:Art. B33d, approx. 11 pp. 1994. 33. Tagung des Lotharingischen Kombinatorikseminars (Freiberg, 1994).
- [Fri97] Harald Friepertinger. Cycle Indices of Linear, Affine, and Projective Groups. Linear Algebra Appl., 263:133–156, 1997.
- [FS09] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick. Analytic Combinatorics. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [Har55] Frank Harary. The Number of Linear, Directed, Rooted, and Connected Graphs. Trans. Amer. Math. Soc., 78:445–463, 1955.
- [Hav06] Hans Havlicek. Lineare Algebra für Technische Mathematiker. Heldermann, 2006.
- [HP14] Frank Harary and Edgar M Palmer. Graphical Enumeration. Elsevier, 2014.
- [Ilo08] Tuukka Ilomäki. On the Similarity of Twelve-Tone Rows, volume 30. Sibelius Acad., 2008.
- [KPR13] Mikhail Klin, Reinhard Pöschel, and Kurt Rosenbaum. Angewandte Algebra für Mathematiker und Informatiker: Einführung in gruppentheoretisch-kombinatorische Methoden. Springer-Verlag, 2013.
- [Kun81] Joseph P. S. Kung. The Cycle Structure of a Linear Transformation Over a Finite Field. Linear Algebra Appl., 36:141–155, 1981.

- [LN94] Rudolf Lidl and Harald Niederreiter. Introduction to Finite Fields and Their Applications. Cambridge university press, 1994.
- [Ott48] Richard Otter. The Number of Trees. Ann. of Math. (2), 49:583–599, 1948.
- [Pur04] Roman Purkhart. Notensatz mit LATEX. 2004.
- [Pó37] G. Pólya. Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. Acta Math., 68(1):145–254, 1937.
- [RMH⁺16] Conrad W. Rosenbrock, Wiley S. Morgan, Gus L. W. Hart, Stefano Curtarolo, and Rodney W. Forcade. Numerical Algorithm for Pólya Enumeration Theorem. ACM J. Exp. Algorithmics, 21:1.11, 17, 2016.
- [Sch78] Arnold Schönberg. Theory of Harmony. Univ of California Press, 1978.
- [Tit14] Peter Tittmann. Einführung in die Kombinatorik. Springer-Verlag, 2014.
- [TME11] Daniel Taupin, Ross Mitchell, and Andreas Egler. MusiXTEX–Using TEX to Write Polyphonic or Instrumental Music, Version 1.15. 2011.
- [VFR⁺04] D.P. Visco, J.L.M. Faulon, D.C. Roe, Sandia National Laboratories, United States. Department of Energy, United States. Department of Energy. Office of Scientific, and Technical Information. Enumerating Molecules. United States. Department of Energy, 2004.
- [Wik15] Wikipedia. Zwölftonreihe — wikipedia, die freie enzyklopädie, 2015. [Online; Stand 17. Juli 2017].
- [Wik17] Wikipedia. Zwölftontechnik — wikipedia, die freie enzyklopädie, 2017. [Online; Stand 17. Juli 2017].