Diskrete Methoden — Übungsbeispiele

1–4) Lösen Sie die folgenden Rekursion. Für längere Routinerechnungen nehmen Sie ein Formelmanipulationssystem zu Hilfe.

1) $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 0$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = -1$.

2) $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} = n^2$ $(n \geq 3)$, $a_0 = 3$, $a_1 = a_2 = -1$.

3) $a_n = 2a_{n-1} + 2^{2n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 1$

4) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^{2n-2} - n^2 5^{n+3}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 1, a_1 = 2$.

5) Berechnen Sie die Summen

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{m} k^2, \qquad \text{b) } \sum_{k=0}^{m} k(k+1)(k+2)$$

durch Aufstellen und Lösen einer Rekursion.

6–15) Man stelle eine Rekursion für die gesuchten Zahlen a_n auf und löse diese:

6) Es sei a_n die Anzahl aller Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten.

7) Es sei a_n wie in Beispiel 6), jedoch gilt jetzt auch 1 als Nachfolger von n (zyklische Anordnung).

8) a_n sei die größte Anzahl von Teilen, in die die Ebene durch n Geraden zerlegt werden kann.

9) a_n sei die größte Anzahl von Teilen, in die die Kugeloberfläche durch n Großkreise zerlegt werden kann.

10) Sei a_n die Anzahl der Wörter der Länge n, gebildet aus den Buchstaben a, b und c, in denen die Anzahl der a gerade ist.

11) Eine Münze werde so oft geworfen, bis man insgesamt zweimal das Ergebnis „Kopf“ erhält. Auf diese Art erhält man eine Folge, deren Glieder entweder „Kopf“ oder „Zahl“ sind. a_n bezeichne die Anzahl der möglichen Folgen der Länge n.

12) Es sei a_n die Anzahl aller 0-1-Folgen der Länge n, in denen es keine benachbarten Nullen gibt.

13) Sei a_n die Anzahl aller n-stelligen Zahlen, in denen je 3 aufeinander folgende Ziffern keinen Block der Form 000, 111, 222, …, 999 bilden.

14) Es sei $a_n = \det A_n$, wobei A_n die folgende $n \times n$-Matrix ist:

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

15) Es sei $a_n = \det A_n$, wobei A_n die folgende $n \times n$-Matrix ist:

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

16) Die Türme von Hanoi: Gegeben seien 3 Stäbe A, B, C und n verschieden Scheiben. Anfangs seien alle Scheiben auf Stab A der Größe nach aufgereiht, die größte ganz unten. Dieser Turm von Scheiben soll nun von A nach B transferiert werden, unter der Bedingung, dass in jedem Zug nur eine Scheibe bewegt und niemals eine größere Scheibe über einer kleineren platziert werden darf. Seien a_n die minimale Anzahl der benötigten Züge und b_n die minimale Anzahl benötigter Züge, wenn Bewegungen zwischen A und B nicht erlaubt sind. Bestimmen Sie a_n und b_n durch Aufstellen und Lösen einer Rekursion.

17) Zeigen Sie $e^{-sx}(D-s)^k e^{sx} = D^k$. $(D = \frac{d}{dx})$

18) Zeigen Sie $\Delta_q^k = q^k Q \Delta_1^k Q^{-1}$, wobei Δ_q durch $(\Delta_q f)(x) = f(x+1) - qf(x)$ definiert ist und Q durch $(Qf)(x) = f(x)q^x$.
Bemerkung: Es ist auch üblich, Δ_q in der Form $q^{x+k}\Delta_1^k q^{-x}$ zu schreiben.

19) Sei $\Delta = \Delta_1$ der Differenzenoperator und E der Verschiebungsoperator: $(Ef)(x) = f(x+1)$. Man zeige

$$\Delta^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\Delta^k f)(\Delta^{n-k} E^k g) \text{ für alle } n \geq 0.$$

20) Sei D der gewöhnliche Differentialoperator (nach x) und $F_k = x^k D^k$. Zeigen Sie, dass sich F_k als Polynom in F_1 darstellen lässt. Welchen Grad hat dieses Polynom?

21) Leiten Sie für den in Beispiel 20) definierten Operator F_1 eine Formel für $F_1^k(f(x)g(x))$ her.

22) Der Differentialoperator $D = \frac{d}{dx}$ erfüllt $e^{-sx}(D-s)^k e^{sx} = D^k$. Leiten Sie eine analoge Beziehung für den Operator xD her.

23) Gegeben seien die Eckpunkte eines regelmäßigen $2n$-Ecks. Es sei a_n die Anzahl der Möglichkeiten diese Punkte durch n Verbindungsstrecken zu Paaren zusammenzufassen, wobei die Verbindungsstrecken einander nicht schneiden dürfen. Gesucht ist eine Rekursion für die Folge (a_n).

24) Auf wieviele Arten kann ein konvexes n-Eck in lauter Dreiecke zerlegt werden, wenn keine zwei Diagonalen einander überschneiden dürfen?

25) $\langle F_n \rangle$ sei die Folge der Fibonacci-Zahlen mit $F_0 = 0, F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$. Sei $\langle G_n \rangle = \langle F_n^2 \rangle$ die Folge ihrer Quadrate.
Man entscheide, ob G_n eine homogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten erfüllt. Gegebenenfalls bestimme man jene kleinster Ordnung.

26) Wie Beispiel 25), jedoch allgemeiner für eine Folge $\langle a_n \rangle$, die der Rekursion $a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$ genügt.

27) Man ermittle mit Hilfe von erzeugenden Funktionen einen geschlossenen Ausdruck für $\sum_{k=0}^{n} (k^2 - k)$.

28) Man ermittle mit Hilfe von erzeugenden Funktionen einen geschlossenen Ausdruck für $\sum_{k=0}^{n}(k^2+3k+2)$.

29) Man bestimme die EF zur Folge $\langle\binom{2n}{n}\rangle_{n\geq 0}$ und zur Folge

$$b_n = \begin{cases} n^2+n \text{ für } n \text{ gerade} \\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \text{ für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

30) Sei $A(x)$ die erzeugende Funktion der Folge $\langle a_n\rangle$. Wie kann die erzeugende Funktion der Folge $\langle a_0, 0, 0, a_3, 0, 0, a_6, \dots\rangle$ mit Hilfe von $A(x)$ ausgedrückt werden? Weiters soll als Anwendung ein geschlossener Ausdruck für $\sum_{k\equiv 0 \pmod 3}\binom{n}{k}$ angegeben werden.

31–34) Man löse die folgende Rekursion mittels EF:

31) $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = 0$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 1, a_1 = -1$.

32) $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} = 0$ $(n \geq 3)$, $a_0 = 3, a_1 = a_2 = -1$.

33) $a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 1$.

34) $a_n = 2a_{n-1} + 2^{2n-2}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 1$.

35) Man löse das System von Rekursionen mittels EF:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 4b_n \\ b_{n+1} &= 3a_n + 3b_n \end{aligned}$$

für $n \geq 0$, $a_0 = b_0 = 9$.

36) Man bestimme

$$[x^{n+1}]\frac{2+3x^2}{\sqrt{1-5x^3}}.$$

37) Zeigen Sie mittels EF und mit Hilfe kombinatorischer Deutung:

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$$

für $x, y \in \mathbb{C}$.

38) Zeigen Sie für natürliche Zahlen n und k die folgenden Identitäten für Binomialkoeffizienten

a) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$;

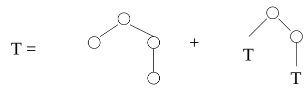
b) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2 = \begin{cases} (-1)^m\binom{2m}{m}, & \text{für } n = 2m, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$

c) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n\ell-k\ell}{n+1} = n\ell^{n-1}\binom{\ell}{2}$.

39) Ein t-ärer Baum ($t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$) ist ein ebener Wurzelbaum, bei dem jeder Knoten entweder 0 Nachfolger (Endknoten) oder genau t Nachfolger (interner Knoten) hat. Für $t = 2$ ergeben sich also genau die Binärbäume. Wieviele Endknoten hat ein t-ärer Baum mit n internen Knoten? Wie lautet die erzeugende Funktion der t-ären Bäume mit n internen Knoten (Es genügt, die Funktionalgleichung anzugeben)?

40) Sei F die Familie aller endlichen 0,1-Folgen, bei denen keine zwei Einser nebeneinander stehen. Die Größe jeder Folge sei ihre Länge. Wie kann F aus einfacheren Objekten konstruiert werden? Welcher Ausdruck ergibt sich für die EF?

41) Bestimmen Sie die Anzahl t_n aller ebenen Wurzelbäume mit n Knoten, die durch die Gleichung



erzeugt werden.

42) Sei $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ die n-te Catalan Zahl. Zeigen Sie mit Hilfe von erzeugenden Funktionen die folgende Identität:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}2^{n-2k}C_k.$$

43) Eine Klammerung ist ein Wort $a_1a_2\cdots a_n$ mit $a_i \in \{(,)\}$. Eine korrekte Klammerung ist eine Klammerung $a_1a_2\cdots a_n$, wo in jedem Anfangsabschnitt $a_1a_2\cdots a_k$ $(k < n)$ mindestens so viele öffnende Klammern (wie schließende Klammern) vorkommen. Sei k_n die Anzahl der korrekten Klammerungen mit n öffnenden und n schließenden Klammern. Bestimmen Sie k_n mit Hilfe von erzeugenden Funktionen.

44) Sei p_n die Anzahl der Partitionen der natürlichen Zahl n und $\sigma(n)$ die Summe aller Teiler von n. Zeigen Sie $np_n = \sum_{j=1}^{n}\sigma(j)p_{n-j}$.

45) Eine Partition $n = n_1 + \cdots + n_k$ heiße perfekt, wenn jede Zahl $j = 1, \dots, n$ eindeutig in der Form $j = \sum_{i\in I} n_i$ mit passender Indexmenge $I \subset \{1, \dots, k\}$ darstellbar ist, wobei gleiche Summanden n_i nicht unterschieden werden. Die perfekten Permutationen bis zur Größe 8 sind 1, 1+1, 1+1+1, 1+2, 1+1+1+1, 1+1+1+1+1, 1+2+2, 1+1+3, 1+1+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1, 1+2+4, 1+2+2+3, 1+1+1+4, 1+1+1+1+1+1+1+1 und 1+1+3+3. Zeigen Sie, dass die Anzahl der perfekten Partitionen von n gleich der Anzahl der geordneten Faktorisierungen von $n+1$ ist.

Bemerkung: Eine Faktorisierung kann auch nichtprime Faktoren haben.

Hinweis: Jede perfekte Partition muss offenbar den Summand 1 enthalten. Wie sieht der nächstgrößere Summand aus, wenn die Anzahl der Einser festgelegt wird?

46) Sei $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ eine endliche Menge und L_n die Menge aller Folgen der Länge n, gebildet aus Elementen der Menge A, die eine gegebene Folge $p_1, p_2, \dots, p_k$ als Teilfolge besitzen. Wieviele Elemente hat L_n?

47) Gegeben seien alle ungeordneten Auswahlen von 0,1,2, die eine gerade Zahl von 0, eine ungerade Zahl von 1 und höchstens 5-mal 2 enthalten. Wie lautet die EF für diese Auswahlen, wie die EF für die Anzahl der Auswahlen?

48) Gegeben seien alle ungeordneten Auswahlen von roten, grünen und blauen Kugeln, wobei die Anzahl der roten Kugeln durch 3 teilbar ist, von den grünen Kugeln entweder 2, 4, 6 oder 8 vorkommen und wenigstens 3 aber höchstens 10 blaue Kugeln dabei sind. Wie lautet die EF für diese Auswahlen, wie die EF für die Anzahl der Auswahlen?

49) Unter einer *Partition* einer positiven natürlichen Zahl n versteht man eine Darstellung von n als Summe natürlicher Zahlen ≥ 1, wobei Wiederholungen der Summanden erlaubt sind und die Reihenfolge irrelevant ist. Sei $p(n)$ die Anzahl der Partitionen von n. Man finde eine Darstellung der EF $1 + \sum_{n\geq 1} p(n)x^n$ als unendliches Produkt.

50) Man zeige mit Hilfe von EF: Die Anzahl der Partitionen von n in lauter verschiedene Summanden ist gleich der Anzahl der Partitionen von n in lauter ungerade Summanden.

51) Eine Permutation $\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$ (in Wortschreibweise, d.h. $\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$) heißt unzerlegbar, wenn es kein $k < n$ gibt, sodass bereits $\pi_1\pi_2\cdots\pi_k$ eine Permutation von $\{1, 2, \ldots, k\}$ ist. Sei $U(x)$ die erzeugende Funktion der unzerlegbaren Permutationen. Zeigen Sie, dass

$$U(x) = 1 - \frac{1}{\sum_{n\geq 0} n!x^n}$$

und berechnen Sie (mit Computerunterstützung) $u_0, \ldots, u_{10}$. Zeigen Sie weiters:

$$u_n = n! - \sum_{\substack{n_1,n_2\geq 1 \\ n_1+n_2=n}} n_1!n_2! + \sum_{\substack{n_1,n_2,n_3\geq 1 \\ n_1+n_2+n_3=n}} n_1!n_2!n_3! - \ldots.$$

52) Sei $r \in \mathbb{N}$ fest. Weiters sei $S_{n,r}$ die Anzahl der Wörter $(w_0, w_1, \ldots, w_n) \in \{0, 1, \ldots, r-1\}^{n+1}$ mit $w_0 = w_n = 0$ und $w_i \neq w_{i-1}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Bestimmen Sie eine geschlossene Form für $S_{n,r}$.

53) Die Anzahl der Kompositionen einer natürlichen Zahl n ist 2^{n-1}. Finden Sie einen elementaren Beweis. Bestimmen Sie weiters erzeugende Funktion der Anzahl aller zyklischen Kompositionen von n. Zyklische Kompositionen sind Kompositionen, wobei jedoch zyklische Vertauschungen der Summanden nicht unterschieden werden, z.B. sind 1+3+2+1+5+3 und 2+1+5+3+1+3 dieselbe zyklische Komposition der Zahl 15.

54) Es seien $2n$ Punkte auf der x-Achse gegeben. Diese sollen durch n Bögen über der x-Achse miteinander verbunden werden.

a) Auf wie viele Arten ist das möglich?

b) Auf wie viele Arten ist dies durch sich nicht kreuzende Bögen möglich?

55) Sei $R = \mathrm{GF}(p)[x]$ der Polynomring mit Koeffizienten aus dem endlichen Körper $\mathrm{GF}(p)$, p Primzahl. Ein Polynom $P(x)$ vom Grad n heißt normiert, wenn der Koeffizient von x^n in $P(x)$ gleich 1 ist. Es sei bekannt, dass jedes normierte Polynom eine eindeutige Darstellung als Produkt von irreduziblen normierten Polynomen besitzt. Sei a_n die Anzahl der irreduziblen normierten Polynome vom Grad n in R. Man zeige:

(a) $\prod_{k\geq 1}(1 + x^k + x^{2k} + \ldots)^{a_k} = \sum_{n\geq 0} p^n x^n$.

(b) $p^n = \sum d a_d$, wobei die Summe über alle Teiler $d > 0$ von n läuft.

(c) $a_n > 0$ (d.h. es existiert $\mathrm{GF}(p^n)$!).

56) Sei $P(x)$ die erzeugende Funktion der Menge der (nichtebenen) Wurzelbäume. Dann gilt $P(x) = \Psi(P(x))$ mit $\Psi(P(x)) = x \exp\left(\sum_{i\geq 1} P(x^i)/i\right)$. Seien weiters $A(x)$ und $B(x)$ zwei Potenzreihen mit $d(A(x), B(x)) = 2^{-k} < 1$ (bzgl. der formalen Metrik). Begründen Sie, warum $d(\Psi(A(x)), \Psi(B(x))) = 2^{-k-1}$ und benutzen Sie dies, um mit Hilfe eines Formelmanipulationsprogramms die ersten 20 Koeffizienten von $P(x)$ zu bestimmen. Vergleichen Sie diese mit der asymptotischen Formel $p_n \sim \frac{b\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\pi}} n^{-3/2}\rho^{-n}$, wobei $\rho \approx 0.3383219$ und $b \approx 2.6811266$.

57) Betrachten Sie die Dezimaldarstellungen der folgenden beiden rationalen Zahlen:

$$\frac{1}{89} = 0,011235\ldots,$$
$$\frac{100}{9899} = 0,01010203050813213455\ldots.$$

a) Warum tauchen hier die ersten Glieder der Fibonacci-Zahlenfolge auf?

b) Geben Sie eine reelle Zahl an, in deren Dezimaldarstellung die ersten Glieder der Catalan-Zahlenfolge auftauchen.

58) Sei $n \in \mathbb{N}^+$ eine positive natürliche Zahl.

a) Betrachten wir Kompositionen fester Länge $k \in \mathbb{N}^+$. Zeigen Sie

$$\sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_k)\in(\mathbb{N}^+)^k \\ n_1+\cdots+n_k=n}} n_1n_2\cdots n_k = \binom{n+k-1}{2k-1}.$$

b) Betrachten wir nun beliebige Kompositionen. Zeigen Sie

$$\sum_{i>0} \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_i)\in(\mathbb{N}^+)^i \\ n_1+\cdots+n_i=n}} n_1n_2\cdots n_i = F_{2n},$$

wobei F_k die k-te Fibonacci-Zahl ist ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$).

59–60) Man löse die folgende Rekursion mittels EEF:

59) $a_n - 2na_{n-1} + n(n-1)a_{n-2} = 2n \cdot n!,\ n \geq 2,\ a_0 = a_1 = 1.$

60) $a_n - 3na_{n-1} + 2n(n-1)a_{n-2} = 2^n n!,\ n \geq 2,\ a_0 = a_1 = 0.$

61) $a_n + 6na_{n-1} + 9n(n-1)a_{n-2} = n \cdot n!\ n \geq 2,\ a_0 = a_1 = 1.$

62) Bestimmen Sie die exponentiell erzeugende Funktion der ungeraden Doppelfaktoriellen $a_n = (2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\ldots 1$ für $n \geq 1$ und $a_0 = 1$.

63) Man bestimme die EEF für die Anzahlen der Permutationen in deren kanonischer Zyklenzerlegung nur Zyklen gerader Länge vorkommen und lese darin die entsprechenden Koeffizienten ab.

64) Man bestimme die EEF für die Anzahlen der Permutationen in deren kanonischer Zyklenzerlegung nur eine gerade Anzahl von Zyklen vorkommen und lese darin die entsprechenden Koeffizienten ab.

65) Man bestimme mit Hilfe der Lagrangeschen Inversionsformel (LIF) den Koeffizienten von z^n in $f(z)$, wobei $f(z)$ die Gleichung $f(z) = ze^{f(z)}$ erfüllt.

66) Man bestimme mit Hilfe der Lagrangeschen Inversionsformel (LIF) den Koeffizienten von z^n in $g(z) = 1/(1 - f(z))$, wobei $f(z)$ die Gleichung $f(z) = ze^{f(z)}$ erfüllt.

67) Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Man bestimme mit Hilfe der Lagrangeschen Inversionsformel (LIF) den Koeffizienten von z^n in $f(z)$, wobei $f(z)$ die Gleichung $f(z) = z(1 + f(z))^m$ erfüllt.

68) Die Familie der *Motzkin-Bäume* wird rekursiv so definiert: Ein Motzkin-Baum ist entweder ein Endknoten, oder er besteht aus einem internen Knoten, an dem ein oder zwei Nachfolge-Motzkinbäume hängen, wobei im Falle von zwei Nachfolgebäumen deren Links-Rechts-Reihenfolge relevant ist. Sei m_n die Anzahl der Motzkin-Bäume mit genau n internen Knoten und $M(z)$ die zugehörige gewöhnliche erzeugende Funktion. Man zeige $M(z) = 1 + zM(z) + zM(z)^2$, und bestimme mit Hilfe der LIF m_n.

69) Sei $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ the n-te Catalan Zahl. Man zeige: Für $1 \le k \le n$ gilt

$$\sum_{i_1+\cdots+i_k=n} C_{i_1}C_{i_2}\ldots C_{i_k} = \frac{k}{2n+k}\binom{2n+k}{n}.$$

(Hinweis: Lagrange Inversion)

70) Sei P_n die Menge der ebenen Wurzelbäume mit n Knoten und $P(z)$ die EF zur kombinatorischen Struktur $\bigcup_{n\ge1} P_n$. Die mittlere Anzahl $b_{n,r}$ der Knoten im Abstand r zur Wurzel in einem ebenen Wurzelbaum aus P_n erfüllt

$$b_{n,r} = \frac{1}{|P_n|}[z^n]\frac{z^r P(z)}{(1-P(z))^{2r}}.$$

Bestimmen Sie $b_{n,r}$.

71) Sei $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n \in S_n$, d.h. eine Permutation der Elemente $1, 2, \ldots, n$. σ_j heißt Links-Rechts-Maximum von σ, wenn $\sigma_k < \sigma_j$ für alle $k < j$. Sei weiters $a_{n,k}$ die Anzahl der Permutationen in S_n mit genau k Links-Rechts-Maxima. Zeigen Sie:

$$a_{n,k} = \frac{n!}{k!}[z^n]\left(\log\frac{1}{1-z}\right)^k.$$

72) Ein monoton markierter Cayleybaum ist ein markierter Wurzelbaum, wo die Markierungen auf jedem von der Wurzel ausgehenden Pfad eine monoton wachsende Folge bilden. Bestimmen Sie mit Hilfe von erzeugenden Funktionen die Anzahl der monoton markierten Cayleybäume mit n Knoten.

73) Man zeige

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}$$

für alle $x \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$!

74) Man zeige

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{x}{k} = (-1)^n\binom{x-1}{n}$$

für alle $x \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$!

75) Die *Stirlingzahlen 2. Art* $S_{n,k}$, $n, k \ge 0$ sind durch $x^n = \sum_{k\ge0} S_{n,k}[x]_k$ definiert. Man zeige, dass die Stirlingzahlen 2.Art die folgende Rekursion erfüllen:

$$S_{n+1,k} = S_{n,k-1} + kS_{n,k} \quad \text{für } n \ge 0, k \ge 1; \quad S_{n,0} = \delta_{n,0}, \quad S_{0,k} = \delta_{0,k}.$$

76) Man bestimme unter Verwendung der Definition in Aufgabe 75) die Anzahl aller Äquivalenzrelationen auf einer n-elementigen Menge mit genau k Äquivalenzklassen.

77) Man zeige mit Hilfe der Beispiele 75) und 76): $k!S_{n,k}$ ist die Anzahl aller surjektiven Abbildungen einer n-elementigen Menge auf eine k-elementige Menge.

78) Man zeige:

$$\sum_{n\ge0} S_{n,k}u^n = \frac{u^k}{(1-u)(1-2u)\ldots(1-ku)}.$$

79) Man zeige mit Hilfe von Aufgabe 78): $S_{n,k} = \sum 1^{c_1}2^{c_2}\ldots k^{c_k}$, wobei die Summation über alle k-tupel $c_1, \ldots, c_k \ge 0$ mit $c_1 + \cdots + c_k = n - k$ läuft.

80) Die *Bellzahlen* sind durch $B_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}$ definiert. Man zeige:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k \text{ für alle } n \ge 0.$$

Welche kombinatorische Deutung ergibt sich aus der kombinatorischen Deutung der Stirlingzahlen 2.Art für die B_n ?

81) Die *Stirlingzahlen 1.Art* $s_{n,k}$, $n, k \ge 0$, sind durch $[x]_n = \sum_{k\ge0} s_{n,k}x^k$ definiert. Man zeige, dass die Stirlingzahlen 1.Art die folgende Rekursion erfüllen:

$$s_{n+1,k} = s_{n,k-1} - ns_{n,k} \text{ für } n \ge 0, k \ge 1; \; s_{n,0} = \delta_{n,0}, \; s_{0,k} = \delta_{0,k}.$$

82) Man zeige mit Hilfe von Beispiel 81): $|s_{n,k}| = (-1)^{n+k}s_{n,k}$ ist die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, deren kanonische Zyklenzerlegung aus genau k Zyklen besteht.

83) Seien $L_{n,k} = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}(-1)^k$ für $n, k \ge 1$; $L_{n,0} = \delta_{n,0}$, $L_{0,k} = \delta_{0,k}$ die Koeffizienten der Laguerrepolynome (*Lah-Zahlen*). Man zeige

$$\sum_{k=0}^{n} L_{n,k}L_{k,j} = \delta_{n,j}.$$

84) Man zeige mit Hilfe von Beispiel 83): Für jedes Paar von Folgen (a_n) und (b_n) gilt:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}b_k \;\Rightarrow\; b_n = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}a_k.$$

85) Man zeige, dass die Stirlingzahlen 2.Art die folgende bivariate erzeugende Funktion haben:

$$\sum_{n\ge0,k\ge0} S_{n,k}\frac{t^n}{n!}x^k = e^{x(e^t-1)}.$$

86) Man zeige: Die Bernoullizahlen B_n (vgl. Aufgabe 0) lassen sich über folgende Formel durch die Stirlingzahlen 2.Art ausdrücken:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}k!S_{n,k}.$$

87) Man zeige mit Hilfe der exponentiell erzeugenden Funktion (EEF) für die Bernoullizahlen (Aufgabe 0) die folgende Reihenentwicklung:

$$\tanh z = \sum_{m\ge1} B_{2m}2^{2m}(2^{2m}-1)\frac{z^{2m-1}}{(2m)!}.$$

88) Zeigen Sie, dass $\frac{te^{tx}}{e^t-1}$ die exponentiell erzeugende Funktion der Bernoullipolynome $B_n(x)$ aus Beispiel 0) ist.

89) Zeigen Sie, dass die Bernoullipolynome $B_n(x)$ aus Beispiel 0) die folgende Identität erfüllen:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n-k+1} B_k(x)$$

90) Man ermittle aus der Reihenentwicklung aus Aufgabe 87) eine Reihenentwicklung für $\tan z$.

91) Man zeige:

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{m\geq 1} B_{2m}(-4)^m \frac{z^{2m-1}}{(2m)!}.$$

92) In der komplexen Analysis zeigt man

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

Sei weiters $\zeta(s) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ $(s > 1)$ die Riemannsche Zetafunktion. Man zeige mit Hilfe dieser Reihendarstellung und Aufgabe 91) die Beziehung

$$\zeta(2k) = \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}|B_{2k}| \qquad (k \geq 1).$$

93) Sei X_n die Anzahl der von der Wurzel ausgehenden Teilbäume in einem Cayleybaum (=markierter Wurzelbaum) mit n Knoten. Weiters seien alle Bäume mit n Knoten gleich wahrscheinlich. Bestimmen Sie die Verteilung und den Erwartungswert von X_n.

94) Bestimmen Sie die bivariate erzeugende Funktion für die Anzahl der Blätter in einem ebenen Wurzelbaum. Berechnen Sie mit Hilfe dieser Funktion die mittlere Anzahl der Blätter in einem ebenen Wurzelbaum mit n Knoten.

95) Bezeichne $A_n^{(m)}$ die Menge aller Platzierungen von n unterscheidbaren Kugeln in m Urnen und $a_n^{(m)}$ ihre Mächtigkeit. Zeigen Sie, dass für die erzeugende Funktion $A^{(m)}(z)$ gilt: $A^{(m)}(z) = \sum_{n\geq 0} a_n^{(m)} \frac{z^n}{n!} = e^{zm}$ und daher $a_n^{(m)} = m^n$. Bestimmen Sie weiters die mittlere Anzahl der leeren Urnen in $A_n^{(m)}$. Wie lässt sich das Problem auf Urnen mit r Kugeln verallgemeinern?

96) Sei $r \in \mathbb{N}$ fest. Sei $w_{n_1,\ldots,n_r}$ die Anzahl der Wörter $(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \{1,\ldots,r\}^n$ in denen n_1-mal 1, n_2-mal 2, usw. vorkommt. Weiters, sei $s_{n_1,\ldots,n_r}$ die Anzahl dieser Wörter für die zusätzlich je zwei aufeinanderfolgende Buchstaben verschieden sind.

1. Erklären Sie warum die multivariate erzeugende Funktion

$$W(v_1,\ldots,v_r) := \sum_{n_1,\ldots,n_r\geq 0} w_{n_1,\ldots,n_r} v_1^{n_1} \ldots v_r^{n_r},$$

durch

$$W(v_1,\ldots,v_r) = \frac{1}{1-(v_1+\cdots+v_r)}$$

gegeben ist.

2. Erklären Sie warum die multivariate erzeugende Funktion

$$S(v_1,\ldots,v_r) := \sum_{n_1,\ldots,n_r\geq 0} s_{n_1,\ldots,n_r} v_1^{n_1} \ldots v_r^{n_r},$$

die Funktionalgleichung

$$W(v_1,\ldots,v_r) = S\left(\frac{v_1}{1-v_1}, \frac{v_2}{1-v_2}, \ldots, \frac{v_r}{1-v_r}\right)$$

gilt und leiten Sie daraus eine geschlossene Form für $S(v_1,\ldots,v_r)$ her.

3. Bestimmen Sie

$$S(z) := S(z,z,\ldots,z) = \sum_{n\geq 0} s_n z^n$$

und lesen Sie die Koeffizienten s_n ab.

97) Sei $P_{n,q}$ die Menge aller (linearen) Teilräume eines n-dimensionalen Vektorraums über dem endlichen Körper $\mathrm{GF}(q)$. Für $U, V \in P_{n,q}$ gelte $U \leq V$, falls U Teilraum von V ist. Man zeige, dass $(P_{n,q}, \leq)$ eine HO ist.

98) Man zeige, dass die Anzahl der eindimensionalen Elemente in $P_{n,q}$ gleich $\frac{q^n-1}{q-1}$ ist.

99) Es sei $\binom{n}{k}_q$ die Anzahl der k-dimensionalen Teilräume von $(\mathrm{GF}(q))^n$ (*Gaußsche Binomialkoeffizienten*). Man zeige die folgende Rekursionsformel:

$$\binom{n+1}{k+1}_q = \binom{n}{k}_q \cdot q^{n-k} + \binom{n}{k+1}_q.$$

Welche Zahlen ergeben sich im Grenzwert $q \to 1$?

100) Man zeige, dass $\binom{n}{k}_q$ ein Polynom vom Grad $k(n-k)$ in q ist:

$$\binom{n}{k}_q = \sum_{l=0}^{k(n-k)} a_{n,k,l} q^l.$$

101) Man zeige (z.B. mit Hilfe von Beispiel 99), dass die Zahlen $a_{n,k,l}$ aus Beispiel 100) die Anzahl der Wege von $(0,0)$ nach $(k, n-k)$ auf dem ganzzahligen Gitter ist, wobei nur Schritte nach rechts oder nach oben erlaubt sind und die Fläche zwischen dem Weg und der x-Achse genau l ist. (Bekanntlich ist $\binom{n}{k} = \binom{n}{k}_1$ die Anzahl der Wege von $(0,0)$ nach $(k, n-k)$.)

102) Man zeige, dass die Zahlen $a_{n,k,l}$ aus Beispiel 100) die Anzahl aller Folgen $a_1a_2\ldots a_n$ der Länge n mit $a_i \in \{0,1\}$ ist, wobei genau k Nullen und l Inversionen aufreten. (Eine Inversion ist ein Paar (i,j) mit $i < j$ und $a_i > a_j$.)

103) Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $(j)_q! = \frac{q^j-1}{q-1}\frac{q^{j-1}-1}{q-1}\cdots\frac{q^1-1}{q-1}$. Man zeige, dass dann für die in Aufgabe 99) definierten Gaußschen Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(n)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!},$$

gilt, indem man die Gültigkeit der Rekursion aus 99), sowie die Übereinstimmung geeigneter Anfangswerte nachweise.

104) Sei Q der linerare Operator (auf den Polynomen $\mathbb{R}[x]$) mit $Qp(x) = p(qx)$ und $\underline{x}$ der Multiplikationsoperater mit x, d.h. $\underline{x}p(x) = xp(x)$. Man zeige, dass dann für die Operatoren $A = \underline{x}$ und $B = -\underline{x}Q$

$$BA = qAB \quad \text{und} \quad (A+B)^n 1 = \delta_{n,0}$$

gelten!

105) Seien A, B lineare Operatoren (auf den Polynomen $\mathbb{R}[x]$) mit $qAB = BA$. Man zeige, dass, falls A^{-1} existiert, für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$A^{-m}(A+B)^{m+n} = \sum_{k=-m}^{n} \binom{m+n}{m+k}_q A^k B^{n-k}$$

gilt und folgere unter Verwendung von $A = \underline{x}Q$ und $B = Q$ (Q aus Beispiel 104)

$$\sum_{k=-m}^{n} \binom{m+n}{m+k}_q q^{\binom{k}{2}} x^k$$
$$= \left(\frac{q^m}{x} + 1\right)\left(\frac{q^{m-1}}{x} + 1\right)\cdots\left(\frac{q}{x} + 1\right)(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x).$$

106) Man leite aus Aufgabe 105) die *Tripel-Produkt-Identität* von *Jacobi* her: Für $a \neq 0$ und $|t| < 1$ gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k t^{k^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + at^{2n-1})(1 + t^{2n-1}/a)(1 - t^{2n}).$$

107) Es sei $e_q(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(n)_q!}$. Man zeige $e_q(qz) - e_q(z) = (q-1)ze_q(z)$ und damit die folgende Identität von *Euler*:

$$e_q(z) = \prod_{k\geq 0} \frac{1}{1 + (q-1)q^k z} \quad \text{für} \quad |q| < 1, \ |z| < 1.$$

108) Man zeige mit Hilfe der Produktdarstellung von $e_q(z)$ (aus Aufgabe 107) dass für $|z| < 1$

$$\lim_{q\to 1-} e_q(z) = e^z$$

gilt. (Hinweis: $|\log(1+x) - x| \leq C|x|^2$ gleichmäßig für $|x| \leq 1$, $x \in \mathbb{C}$, mit einer Konstanten $C > 0$.)

109) Sei $(M, \leq)$ eine Halbordnung. Besitzt für gegebenes x, y die Teilmenge $\{z | x \leq z \wedge y \leq z\}$ ein 0-Element, so heißt dieses Supremum $x \vee y$. Analog wird das Infimum $x \wedge y$ definiert. Sei $(M, \leq)$ die Halbordnung der Teilräume von $GF(q)^n$. Wie können $x \wedge y$ und $x \vee y$ beschrieben werden? Gelten für $\vee, \wedge$ die Distributivgesetze?

110) Beweisen Sie die Eulersche Produktindentität

$$\prod_{n\geq 0} \frac{1}{1 + q^n t} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{(q^n - 1)\cdots(q-1)}$$

durch Interpretation beider Seiten als erzeugende Funktion von Zahlenpartitionen.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Identität äquivalent zu

$$\prod_{n\geq 1} \frac{1}{1 - q^n t} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{q^n t^n}{(1 - q^n)\cdots(1-q)}$$

ist. Dann zeigen Sie die Gleichheit, indem Sie beide Seiten der Gleichung

$$[t^k] \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1 - q^n t} = \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^2} \cdots \frac{1}{1-q^k} q^k$$

als erzeugende Funktion geeigneter Mengen A und B von Zahlenpartitionen deuten und eine Bijektion zwischen A und B mit Hilfe von Ferrersdiagrammen konstruieren.

111) Sei $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n^2+1)$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n^2+1$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Dilworth, dass es in π eine monotone Teilfolge der Länge $n+1$ gibt, d.h. es gibt $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1}$ mit $\pi(i_1) < \pi(i_2) < \ldots < \pi(i_{n+1})$ oder $\pi(i_1) > \pi(i_2) > \ldots > \pi(i_{n+1})$.

112) Sei G eine endliche Gruppe und U eine Untergruppe. Zeigen Sie mit Hilfe des Heiratssatzes, dass es ein gemeinsames Repräsentantensystem für die Links- und Rechtsnebenklassen von U in G gibt, d.h. es gibt $a_1, \cdots, a_k$, sodass $a_1U, a_2U, \ldots, a_kU$ bzw. $Ua_1, Ua_2, \ldots, Ua_k$ alle Links- bzw. Rechtsnebenklassen sind.

113) Sei eine *Linie* einer Matrix eine Zeile oder Spalte. Zeigen Sie: Die Minimalanzahl von Linien in einer $(0,1)$-Matrix, welche zusammen alle Einser enthalten, ist gleich der Maximalanzahl von Einsern mit der Eigenschaft, dass keine zwei auf der selben Linie liegen.

114) Stellen Sie

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

als konvexe Linearkombination von Permutationsmatrizen dar.

115) Seien $(P, \lhd)$ und $(Q, \preceq)$ zwei lokal endliche Halbordnungen. Sei $R = P \times Q$ und für $(a, x), (b, y) \in R$

$$(a, x) \leq (b, y) \Longleftrightarrow a \lhd b \wedge x \preceq y.$$

Zeigen Sie, dass $(R, \leq)$ eine Halbordnung ist und die Möbiusfunktionen von P, Q, R die Gleichung $\mu_R((a, x), (b, y)) = \mu_P(a, b) \cdot \mu_Q(x, y)$ erfüllen.

116) Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $(j)_q! = \frac{q^j - 1}{q-1} \frac{q^{j-1}-1}{q-1} \cdots \frac{q^1 - 1}{q-1}$. Weiters sei

$$e_q(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(n)_q!}$$

die q-Exponentialfunktion. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{e_q(z)} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \frac{z^n}{(n)_q!}.$$

117) Seien $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ Folgen, die durch

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$$

zusammenhängen. Zeigen Sie, dass daraus folgt, dass

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k.$$

118) Seien $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ Folgen, die durch

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q b_k$$

zusammenhängen. Man zeige, dass dann

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_q a_k$$

ist!

119) Sei P_n die Menge aller Mengenpartitionen, dh. Klasseneinteilungen, von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Für $\pi, \sigma \in P_n$ sei $\pi \leq \sigma$ genau dann, wenn jede Klasse von π in einer Klasse von σ enthalten ist. (π heißt dann Verfeinerung von σ.) Man zeige, dass $(P_n, \leq)$ eine HO ist und zeichne für $n = 1, 2, 3$ das Hasse-Diagramm.

120) Es sei $P = \{2^n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ mit der Relation der Teilbarkeit. Weiters sei

$$f(x, y) = \begin{cases} (-1)^{\frac{y}{x}+1}, & \text{falls } x|y \\ 0, & \text{sonst .} \end{cases}$$

Man berechne die Inverse bezüglich $*$ zu f.

121) Die Halbordnung (HO) $(P, \leq)$ sei gegeben durch $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $0 \leq 1 \leq 4,\ 0 \leq 2 \leq 4,\ 0 \leq 3 \leq 4$. Man berechne die Werte der Möbiusfunktion μ.

122) Man berechne die Werte von $\mu * \mu$ für die HO $(\mathbb{N}, \leq)$.

123) Wie 122), jedoch für die HO $(\mathbb{N}^+, |)$.

124) Gegeben sei die HO $(\mathbb{N}^+, |)$, $\mu(n) = \mu(1, n)$ sei die Möbiusfunktion und $\sigma(n)$ die Summe aller natürlichen Zahlen, die n teilen. Man zeige:

$$n = \sum_{d|n} \sigma(d) \mu(\frac{n}{d}), \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^+.$$

125) Man berechne für die HO aus Beispiel 124) für alle n die Summe $\sum_{d|n} \mu(d)$.

126) Für $i = 1, \ldots, k$ seien (L_i, ρ_i) lokal endliche Halbordnungen, f_i arithmetische Funktionen auf L_i und f_i^{-1} die Inversen von f_i bezüglich der Faltung auf L_i. Bestimmen Sie

$$\left(\prod_{i=1}^{k} f_i * \prod_{i=1}^{k} f_i^{-1} \right) ((x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)).$$

127) Eine Funktion $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{C}$ heißt vollständig multiplikativ, wenn für alle $m, n \in \mathbb{N}^+$ die Beziehung $f(mn) = f(m)f(n)$ und $f \not\equiv 0$ gilt. Für eine vollständig multiplikative Funktion sei $g(n)$ durch $g(n) = f(n)\mu(n)$ mit μ aus 124) definiert. Man zeige, dass $g = f^{-1}$ die inverse Funktion bezüglich $*$ ist, d.h. $(g * f)(n) = \sum_{d|n} g(d) f(\frac{n}{d}) = \delta_{n,1}$.

128) Für zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gelte $m \leq_b n$, wenn für alle Ziffern $\epsilon_j(m), \epsilon_j(n)$ $(j \geq 0)$ der Binärentwicklungen von $m = \sum_{j \geq 0} \epsilon_j(m) 2^j, n = \sum_{j \geq 0} \epsilon_j(n) 2^j$ die Beziehung $\epsilon_j(m) \leq \epsilon_j(n)$ gilt. Man zeige, dass die Möbiusfunktion der Halbordung $(\mathbb{N}, \leq_b)$ durch $\mu(k) = \mu(0, k) = (-1)^{s_b(k)}$ gegeben ist, wobei $s_b(k) = \sum_{j \geq 0} \epsilon_j(k)$ die binäre Ziffernsumme bezeichnet.

129) Die Thue-Morse-Folge (t_n) ist rekursiv durch $t_0 = 1, t_{2k} = t_k, t_{2k+1} = -t_k$ $(k \geq 0)$ definiert. Man zeige $t_n = \mu(n)$ mit $\mu(n)$ aus 128). Was kann man für die Partialsummenfolge $s_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$ aussagen?

130) Man zeige, dass die Thue-Morse-Folge keine periodische Folge ist, d.h. es gibt kein $q > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $t_{n+q} = t_n$ gilt.

131) Sei $(P, \leq)$ eine endliche HO mit 0- und 1-Element. Sei $c_0 = \delta_{0,1}$ und c_k für $k \geq 1$ die Anzahl der Ketten $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = 1$ der Länge k von 0 nach 1. Man zeige:

$$\mu(0, 1) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k c_k.$$

132) Seien $A(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ und $B(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n^s}$ zwei erzeugende *Dirichletreihen.* Zu welcher Folge ist dann $C(s) = A(s)B(s)$ die erzeugende Dirichletreihe?

133) Seien p und q beliebige Polynome. Man bestimme die erzeugende Dirichletreihe (siehe Beispiel 132) der Folgen $\langle \log n \rangle$, $\langle p(n) \rangle$ und $\langle p(n) q(\log n) \rangle$.

134) Sei $V = GF(q)^n$, U ein Unterraum von V und W ein weiterer, endlichdimensionaler Vektorraum über $GF(q)$. Bezeichne $L(U)$ die Anzahl aller linearen Abbildungen $f : V \to W$ mit $\ker f = U$ und $\hat{L}(U)$ die Anzahl aller linearen Abbildungen $f : V \to W$ mit $\ker f \supseteq U$. Bestimmen Sie $\hat{L}(U)$ und dann $L(U)$ mittels Möbiusinversion und zeigen Sie

$$L(\{\mathbf{0}\}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q (-1)^k q^{\binom{k}{2}} |W|^{n-k}.$$

135–141) Diese Aufgaben sollen mit dem Inklusions-Exklusionsprinzip gelöst werden:

135) Auf wieviele Arten können acht Türme auf ein Schachbrett gestellt werden, derart, dass sie einander nicht schlagen und die weiße Diagonale freibleibt?

136) Man bestimme die Anzahl aller Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ mit genau k Fixpunkten.

137) In einer Menge von n Personen können 8 Personen Deutsch, 6 Englisch, 5 Französisch, 5 Deutsch und Englisch, 4 Deutsch und Französisch, 3 Englisch und Französisch, 3 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n ?

138) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^6$ gibt es, die weder Quadrat, noch dritte, vierte oder fünfte Potenz einer natürlichen Zahl sind?

139) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^4$ gibt es, die durch 3, 5 und 7, aber weder durch 9 noch durch 11 teilbar sind?

140) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^3$ gibt es, die durch keine dritte Potenz einer natürlichen Zahl > 1 teilbar sind?

141) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^6$ gibt es, die weder durch 2 teilbar, noch Quadratzahlen, noch dritte, noch 4. Potenzen natürlicher Zahlen sind?

142) Man zeige, dass für die Funktionen 'max' bzw. 'min' endlicher Mengen von reellen Zahlen folgende zum Inklusions-Exklusionsprinzip analoge Formel gilt:

$$\max\{x_1, x_2, \ldots, x_q\} = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1} \sum_{K \subseteq Q, |K|=k} \min\{x_i | i \in K\},$$

wobei $Q = \{1, 2, \ldots, q\}$.

143) Man zeige, dass für die Funktionen 'max' bzw. 'min' endlicher Mengen von reellen Zahlen folgende zum Inklusions-Exklusionsprinzip analoge Formel gilt:

$$\min\{x_1, x_2, \ldots, x_q\} = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1} \sum_{K \subseteq Q, |K|=k} \max\{x_i | i \in K\},$$

wobei $Q = \{1, 2, \ldots, q\}$.

144) Sei L ein endlicher Verband, dessen Möbiusfunktion für alle $x \in L$ der Gleichung $\mu(x, 1) \neq 0$ genüge. Seien weiters A, D und Z Matrizen, deren Zeilen und Spalten mit den Elementen von L indiziert sind. A sei definiert durch

$$A_{x,y} := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \vee y = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

D bezeichne die Diagonalmatrix mit den Einträge $D_{x,x} = \mu(x, 1)$ und Z die Dreiecksmatrix gegeben durch $Z_{x,y} = \zeta(x, y)$. Zeigen Sie

(a) $ZDZ^T = A$

(b) Es gibt eine Permutation π der Elemente von L, sodass $x \vee \pi(x) = 1$ für alle $x \in L$.

145) Sei L ein endlicher semimodularer Verband mit $r(1) = n$. Zeigen Sie mit Hilfe von Beispiel 144), dass die Anzahl der Elemente von L, deren Rang mindestens $n - k$ ist, mindestens so groß wie Anzahl jener Elemente vom Rang höchstens k ist.

146) Sei L ein endlicher Verband, dann gilt bekanntlich

$$\sum_{x: x \wedge a = 0} \mu(x, 1) = 0$$

für alle $a < 1$. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Identität, dass $\mu(0_{\Pi_n}, 1_{\Pi_n}) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Π_n bezeichnet den Verband aller Partitionen einer n-elementigen Menge mit der Verfeinerung als Halbordnung. Zeigen Sie weiters, dass Π_n semimodular ist.

147) Man bestimme mit dem Lemma von Burnside auf wieviele Arten die Innenflächen eines würfelförmigen Raumes mit den Farben weiß, gelb und grün gefärbt werden können, wenn Färbungen, die durch Drehung des Würfels im Raum auseinander hervorgehen, identifiziert werden.

148) Wie 147), jedoch für die Seitenflächen einer quadratischen Pyramide.

149) Man bestimme die Zyklenzeiger der Gruppe aller Drehungen eines regulären Oktaeders im Raum bei Aktion auf den Seitenflächen bzw. auf den Kanten.

150) Man bestimme die Zyklenzeiger der Gruppen aller Drehungen eines Würfels im Raum bei Aktion auf den Seitenflächen bzw. auf den Kanten.

151) Unter der Diedergruppe D_n versteht man die Gruppe aller Decktransformationen (Drehungen und Spiegelungen) einer regelmäßigen n-Ecks bei Aktion auf den Eckpunkten. Bestimmen Sie den Zyklenzeiger von D_n.

152) Wieviele verschiedene Perlenketten, bestehend aus k weißen und m schwarzen Perlen, gibt es?

153) Wieviele verschiedene Perlenketten, bestehend aus schwarzen und weißen Perlen und insgesamt n Perlen, gibt es?

154) Es sei $P_G(x_1, \ldots, x_n)$ der Zyklenzeiger der Permutationsgruppe G. Man gebe einen Ausdruck für den Zyklenzeiger der Untergruppe der geraden Permutationen in G an.

155) Wieviele bezüglich Drehungen im Raum inäquivalente Färbungen der 12 Kanten eines regulären Oktaeders mit genau 2 Farben gibt es?

156) Man löse die Aufgabe 147) mit dem Satz von Pólya.

157) Gegeben sei ein reguläres Sechseck mit zwei Diagonalen, die jeweils gegenüberliegende Eckpunkte verbinden. Auf wieviele bezüglich Decktransformationen der Figur verschiedene Arten lassen sich die 8 Kanten mit genau 3 Farben färben?

158) Die Moleküle der 2-amino-propionsäure (*Alanin*) bilden räumlich annähernd ein reguläres Tetraeder in dessen Mittelpunkt ein (sp^3-hybridisiertes) C-Atom sitzt, während sich die Atomgruppen $-H$, $-CH_3$, $-NH_2$, $-COOH$ in den Eckpunkten befinden. Man bestimme mit dem Satz von Pólya, wieviele verschiedene derartige Moleküle es gibt, die nicht durch Drehung im Raum ineinander übergeführt werden können.

159) Gegeben sei ein Würfel, wo auf jeder Seitenfläche ein Pfeil, der auf eine der Ecken dieser Seite zeigt, aufgemalt ist. Wieviele veschiedene derartige Würfel gibt es? Was ändert sich, wenn sich auf jeder Seite entweder so ein Pfeil befindet oder die Seite leer ist?

160) Die Seitenflächen eines Würfels werden mit drei Farben und die Ecken mit zwei Farben gefärbt. Wieviele inäquivalente Färbungen gibt es?

Bemerkung: Ob die Farben der Ecken verschieden von jenen der Flächen sind, spielt für die Abzählung keine Rolle.

161) Man zeige die folgende Verallgemeinerung des Lemmas von Burnside: Sind D, R endliche Mengen, G, H Permutationsgruppen auf D bzw. R , und heißen zwei Funktionen $f, g : D \to R$ äquivalent, wenn es Permutationen $\pi \in G, \varphi \in H$ gibt, mit $\varphi \circ f = g \circ \pi$, so ist die Anzahl der Äquivalenzklassen gleich

$$\frac{1}{|G||H|} \sum_{\pi \in G, \varphi \in H} |\{f \in R^D : \varphi \circ f = f \circ \pi\}|.$$

(Hinweis: Man betrachte die Gruppe $G \times H$.)

162) Die Seiten eines Quadrates sollen mit 3 vorgegebenen Farben gefärbt werden. Zwei Färbungen sollen äquivalent sein, wenn sie durch Drehung des Quadrates und/oder durch eine Permutation der Farben ineinander übergeführt werden können. Man bestimme mit Hilfe von Beispiel 161) die Anzahl der Äquivalenzklassen.

163) Seien D, R, G und H wie in Beispiel 161). Weiters sei $\pi \in G$ vom Zyklentyp $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_d^{k_d}$ und $\varphi \in H$ vom Zyklentyp $x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \cdots x_r^{\ell_r}$. Zeigen Sie, dass dann

$$|\{f \in R^D : \varphi \circ f = f \circ \pi\}| = \prod_{i=1}^{d} \left(\sum_{j|i} j\ell_j \right)^{k_i}$$

und leiten Sie daraus her, dass die Anzahl der Äquivalenzklassen gegeben ist durch

$$ZZ_G\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_d}\right) ZZ_H\left(e^{s_1}, e^{2s_2}, \ldots, e^{rs_r}\right) \big|_{z_1 = z_2 = \ldots = z_d = 0},$$

wobei $s_j = z_j + z_{2j} + \ldots + z_{j\lfloor d/j \rfloor}$.

164) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Lemmas von Burnside: Sei $(Q, *)$ eine Gruppe und M eine endliche Menge. Jedem Element $q \in Q$ werde eine Permutation $\pi_q \in S_M$ derart zugeordnet, dass für alle $q_1, q_2 \in Q$ die Homomorphiebedingung $\pi_{q_1 * q_2} = \pi_{q_1} \circ \pi_{q_2}$ erfüllt ist. Weiters sei auf M die folgende Äquivalenzrelation definiert: $a \sim b$ genau dann, wenn es ein $q \in Q$ mit $\pi_q(a) = b$ gibt. Dann gilt

$$|M/\sim| = \frac{1}{|Q|} \sum_{q \in Q} |\{a \in M \;:\; \pi_q(a) = a\}|.$$

165) Man berechne mit Hilfe des Satzes von Pólya und einer geeigneten Permutationsgruppe einen geschlossenen Ausdruck für $\sum_{d|n} \varphi(d)$, wobei φ die Eulersche φ-Funktion ist.

166) Seien A und B endliche Mengen. Weiters seien G eine Untergruppe von S_A und H eine Untergruppe von S_B. Wieviele inäquivalente injektive Abbildungen $f : A \to B$ gibt es?

167) Man zeige, dass es in jedem einfachen Graphen G mit n Knoten wenigstens zwei Knoten mit gleichem Knotengrad gibt.

168) Sei G ein einfacher, ungerichteter Graph. Man zeige, dass dann die Anzahl der Knoten ungeraden Grades gerade ist.

169) Man zeige mittels eines geeigneten graphentheoretischen Modells, dass es in jeder Stadt mindestens zwei Bewohner mit der gleichen Anzahl von Nachbarn gibt.

170) 7 Freunde vereinbaren, dass jeder an 3 andere Ansichtskarten schickt. Man überlege an einem geeigneten graphentheoretischen Modell, ob das so geschehen kann, dass jeder nur denjenigen schreibt, die ihm auch geschrieben haben.

171) Man zeige, dass es in einem Graphen G mit $0 < \alpha_1(G) < \alpha_0(G)$ immer einen Knoten $v \in V(G)$ mit $d(v) \leq 1$ gibt.

172) Es sei G ein einfacher ungerichteter Graph mit n Knoten. und $\alpha_1(G) > (n-1)(n-2)/2$. Man zeige, dass G zusammenhängend ist!

173) M sei eine endliche Menge von n Elementen, und der Graph G sei durch

$$V(G) = \mathcal{P}(M) = \{U \,|\, U \subseteq M\},$$
$$E(G) = \{(U, V) \,|\, U, V \subseteq M,\ U \neq V,\ U \cap V = \varnothing\}$$

definiert. Bestimmen Sei $\alpha_0(G)$ und $\alpha_1(G)$!

174) Sei

$$N(d, g) = \begin{cases} 1 + d\sum_{i=0}^{r-1}(d-1)^i \text{ falls } g = 2r+1, \\ 2\sum_{i=0}^{r-1}(d-1)^i \text{ falls } g = 2r. \end{cases}$$

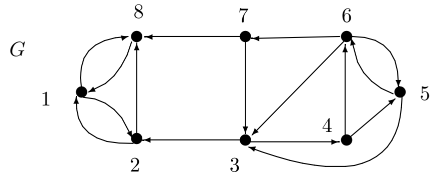
Zeigen Sie: Falls G ein Graph mit Minimalgrad $\delta(G) = \delta \geq 2$ und Taillenweite $g(G) \geq g \in \mathbb{N}$ ist, so folgt $\alpha_0(G) \geq N(\delta, g)$.

175) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Bezeichne $g(G)$ die Länge eines kürzesten Kreises (bzw. unendlich, falls G kreisfrei ist). Für zwei Knoten x, y sei $d(x, y)$ die Länge eines kürzesten x und y verbindenden Weges (bzw. unendlich, falls $x \not\sim y$). Weiters setzen wir $D(G) := \max_{x,y \in V} d(x, y)$. Beweisen Sie, dass in jedem nicht kreisfreien Graph die Ungleichung $g(G) \leq 2D(G) + 1$ gilt.

176) Gegeben sei der d-dimensionale Würfel $G = (V, E)$ mit $V = \{0, 1\}^d$ und $(a, b) \in E$ genau dann, wenn sich die beiden d-tupel a und b in genau einer Koordinate unterscheiden. Bestimmen Sie $\varepsilon(G)$, $\alpha_1(G)$, $g(G)$ sowie die Länge des längsten Kreises von G.

177) Beweisen Sie: Falls $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ isomorphe Graphen sind und $\phi : V \to V'$ ein Isomorphismus, so folgt $d_G(x) = d_{G'}(\phi(x))$ für alle $x \in V$.
Ist umgekehrt $\phi : V \to V'$ eine Abbildung mit $d_G(x) = d_{G'}(\phi(x))$ für alle $x \in V$, so müssen G und G' nicht isomorph sein.

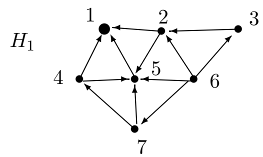
178) Man bestimme die Adjazenzmatrix $A(G)$, sowie (mit deren Hilfe) die Anzahl der gerichteten Kantenfolgen der Länge 3 von 6 nach 4. und die Anzahl der Zyklen der Länge 3, auf denen der Knoten 4 liegt.



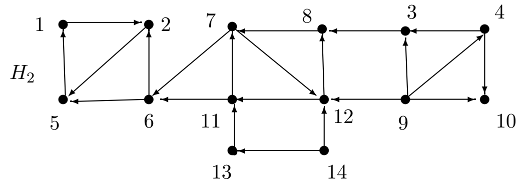
179) Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten und die Reduktion G_R des Graphen G (aus Beispiel 178). Man bestimme weiters mit deren Hilfe alle Knotenbasen des Graphen G.

180–181) Man untersuche den Graphen H_1 bzw. H_2 mit Hilfe des Markierungsalgorithmus auf Azyklizität.

180)



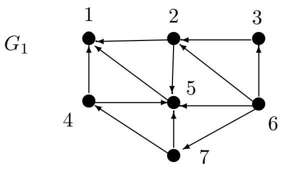
181)



182) Man bestimme im Graphen H_2 aus 181) alle Knotenbasen.

183) Sei H_3 der "inverse" Graph von H_2, d.h. alle Kantenrichtungen werden umgedreht. Man bestimme alle Knotenbasen von H_3.

184) Sei H_4 der Graph, der aus H_2 entsteht, wenn die Richtungen aller Kanten, deren Anfangspunkt eine ungerade Markierung trägt, umgedreht werden. Man bestimme alle Knotenbasen von H_4.



185) Man untersuche den Graphen G_1 mit dem Markierungsalgorithmus auf Azyklizität.

186) Sei G ein schlichter, gerichteter Graph und G_R dessen Reduktion. Weiters seien $K_1, \dots, K_\ell$ jene starken Zusammenhangskomponenten, für die gilt: $d^-_{G_R}(K_i) = 0, i = 1, \dots, \ell$. Zeigen Sie: $B \subset V(G)$ ist genau dann eine Knotenbasis, wenn für alle $i = 1, \dots, \ell$ gilt: $|B \cap K_i| = 1$ und B mit keiner anderen starken Zusammenhangskomponente einen Knoten gemeinsam hat.

187) Zeigen Sie, dass jeder Automorphismus eines Baumes einen Knoten oder eine Kante festlässt.

188) Beweisen oder widerlegen Sie, dass ein zusammenhängender Graph genau dann bipartit ist, wenn es keine zwei benachbarten Knoten gibt, die den gleichen Abstand von einem dritten Knoten haben.

189) Zeigen Sie, dass ein Graph genau dann 2-kantenzusammenhängend ist, wenn es eine Orientierung der Kanten gibt, sodass der resultierende Graph stark zusammenhängend ist.

190) Bestimmen Sie den Zusammenhang κ und den Kantenzusammenhang λ für den Weg der Länge m, C_n, K_n, $K_{m,n}$ sowie den d-dimensionalen Würfel.

191) Man zeige: Ein gerichteter Graph G ist genau dann azyklisch, wenn es eine Umordnung der Knoten gibt, so dass die Adjazenzmatrix $A(G)$ Dreiecksgestalt hat, wobei in der Diagonale nur Nullen stehen.

192) Ein gerichteter Graph T heißt *Turnier*, falls zwischen je zwei Knoten $x, y \in V(G)$ genau eine (gerichtete) Kante existiert, also entweder die Kante $\langle x, y\rangle$ oder die Kante $\langle y, x\rangle$, aber nicht beide. Ein Turnier T heißt *transitiv*, falls T der Graph einer transitiven Relation ist.
Man zeige: Gilt für ein endliches Turnier T, dass die Weggrade $d^+(x)$ der Knoten von T paarweise verschieden sind, so ist T transitiv.

193) Man zeige: Je zwei transitive Turniere mit n Knoten sind isomorph, d.h. sie unterscheiden sich nur durch die Bezeichnung der Knoten.

194) Man zeige: Jedes transitive Turnier ist azyklisch. Was kann daher über die Knotenbasen ausgesagt werden?

195) Unter n Mannschaften wird ein Turnier ausgetragen, und es haben insgesamt schon $n+1$ Spiele stattgefunden. Man zeige, dass mindestens eine Mannschaft dann bereits an mindestens 3 Spielen teilgenommen hat.

196) Drei Ehepaare wollen einen Fluss überqueren. Es ist ein zweisitziges Boot vorhanden. Die Nebenbedingung ist, dass keine Ehefreu je ohne ihren (eifersüchtigen) Ehemann in einer Gesellschaft mit anderen Männern verbleiben soll. Man zeichne einen passenden Graphen und entnehme daraus eine Lösung!

197) Sei G ein schlichter ungerichteter Graph mit $\alpha_0(G) > 4$. Man zeige, dass dann entweder G oder G^κ einen Kreis enthält. (G^κ ist der komplementäre Graph zu G, d.h. G^κ enthält die selben Knoten wie G und alle Kanten $(v, w) \in V(G) \times V(G)$, $v \neq w$, die nicht in $E(G)$ enthalten sind.)

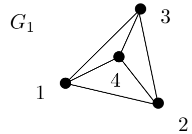
198) Sei G ein schlichter ungerichteter Graph mit mindestens 6 Knoten. Man zeige, dass dann G oder G^κ ein Dreieck enthält.

199) Man zeige: Ist H ein spannender Teilgraph von G und ist H zusammenhängend, so ist auch G zusammenhängend.

200) Man zeige: Jeder Baum ist ein paarer Graph. (Ein ungerichteter Graph G ist ein *paarer Graph*, wenn die Knotenmenge $V(G)$ in zwei disjunkte, nichtleere Teilmengen V_1, V_2 zerlegt werden kann, so dass es nur Kanten $(v_1, v_2) \in E(G)$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ gibt.)

201) Man zeige: Ein ungerichteter Graph G ist genau dann ein paarer Graph, wenn jeder Kreis in G gerade Länge hat.

202) Man bestimme im Graphen G_1 mit Hilfe der Adjazenzmatrix $A^3_{G_1}$ von G_1 die Anzahl der Dreiecke (d.h. die Anzahl der Kreise der Länge 3).



203) Man bestimme alle Bäume T, für die auch T^κ ein Baum ist.

204) Ein Knoten u eines ungerichteten Graphen G heißt zentral, wenn

$$\max_{v \in V(G)} d(u, v) = \min_{w \in V(G)} \left(\max_{v \in V(G)} d(w, v) \right)$$

erfüllt ist. Man zeige, dass es in einem Baum T entweder genau einen zentralen Knoten u_0 oder zwei zentrale Knoten u_1, u_2 mit $(u_1, u_2) \in E(T)$ gibt.

205) Man zeige, dass es in jedem Baum T mit $\alpha_0(T) > 1$ wenigstens zwei Endknoten gibt. (Ein Endknoten $v \in V(T)$ hat Knotengrad $d(v) = 1$.)

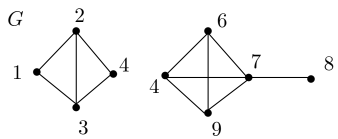
206) Man zeige: Hat ein Baum T einen Knoten $v \in V(T)$ mit Knotengrad $d(v) = d$, so hat T wenigstens d Endknoten.

207) Sei W ein Wald mit k Komponenten. Welcher Zusammenhang besteht dann zwischen $\alpha_0(W)$ und $\alpha_1(W)$?

208) Man zeige, dass in einem Baum T jede Kante eine Brücke ist. (Eine Kante $e \in E$ heißt Brücke, wenn der Graph $G \setminus e = (V(G), E(G) \setminus \{e\})$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G.)

209) Seien T_1, T_2 zwei spannende Bäume eines zusammenhängenden Graphen und $a \in E(T_1) \setminus E(T_2)$. Man zeige, dass es dann eine Kante $b \in E(T_2) \setminus E(T_1)$ gibt, sodass die Kantenmengen $(E(T_1) \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ und $(E(T_2) \setminus \{b\}) \cup \{a\}$ wieder zwei spannende Bäume festlegen.

210) Man bestimme im folgenden Graphen G mit Hilfe des Matrix-Baum-Theorems die Anzahl der Gerüste von G.



211) Man zeige: Für einen einfachen, zusammenhängenden, planaren, Graphen G gilt: $\alpha_1(G) \leq 3\alpha_0(G) - 6$. und folgere daraus, dass der vollständige Graph C_5 nicht planar ist.

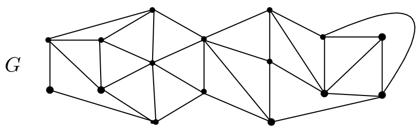
212) Zeigen Sie, dass für einen einfachen, zusammenhängenden, planaren, Graphen G, der keine Kreise mit Länge ≤ 3 besitzt, $\alpha_1(G) \leq 2\alpha_0(G) - 4$ gilt. Folgern Sie daraus, dass der vollständige paare Graph $K_{3,3}$ nicht planar ist.

213) Unter einem platonischen Körper versteht man ein Polyeder im $\mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften: Es gibt natürliche Zahlen n und k, sodass jede Seitenfläche ein regelmäsiges n-Eck ist und in jeder Ecke genau k Seitenflächen zusammentreffen. Bestimmen Sie alle platonischen Körper.

214) Sei G ein ungerichteter, nicht notwendigerweise schlichter Graph. Zeigen Sie, dass die Anzahl der azyklischen Orientierungen von G gleich $(-1)^{\alpha_0(G)}\chi_G(-1)$.

215) Zeigen Sie, dass in jedem schlichten, planaren Graph $\delta(G) \leq 5$ gilt.

216) Man untersuche, ob der folgende Graph G eine Eulersche Linie besitzt und bestimme gegebenenfalls eine!



217) Sei G ein einfacher, ungerichteter Graph. Dann wird der *line graph* G^* zu G folgendermaßen definiert: $V(G^*) = E(G)$, und (e, f) ist in $E(G^*)$, genau dann, wenn im Graphen G die Kanten e und f einen gemeinsamen Knoten haben. Man zeige: Ist G ein einfacher, ungerichteter Graph und Eulersch, so ist der line graph G^* Hamiltonsch und Eulersch.

218) Für welche m, n besitzt der vollständige paare Graph $K_{m,n}$ eine geschlossene Hamiltonsche Linie? (Die Knotenmenge V eines vollständigen paaren Graphen $K_{m,n}$ besteht aus 2 disjunkten Teilmengen V_1, V_2 mit $|V_1| = m$ und $|V_2| = n$ und die Kantenmenge E besteht aus allen ungerichteten Kanten (v_1, v_2) mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$.)

219) Ein Automorphismus φ eines Graphen G ist ein Isomorphismus von G mit sich selbst, d.h. eine bijektive Abbildung $\varphi : V(G) \to V(G)$, mit der Eigenschaft $(x, y) \in E(G) \Leftrightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in E(G)$.
Man beschreibe alle Automorphismen eines vollständigen paaren Graphen $K_{m,n}$ mit $m \neq n$.

220) Ein Zauberkünstler gibt einen Stapel von 32 Karten (je 7er, 8er, 9er, 10er, Bube, Dame, König, Ass in den Farben Herz, Karo, Pik und Treff) an eine Person im Publikum und fordert sie auf, einmal abzuheben, d.h. die obersten k Karten zu nehmen (wobei k beliebig ist) und die verbleibenden $32 - k$ Karten auf die abgehobenen k Karten zu legen. Danach soll der Stapel an den linken Nachbarn im Publikum weiter gereicht werden und der Nachbar soll dann das gleiche tun, usw.; solange, bis insgesamt 5 Personen einmal abgehoben haben und sich der Stapel bei der 6. Person befindet.
Die 6. Person soll nun die oberste Karte nehmen, sie sich ansehen, aber niemand anderem zeigen. Der Stapel (von nunmehr 31 Karten) soll an den Nachbarn weiter gereicht werden. Dies geschieht solange, bis insgesamt 5 Personen jeweils eine Karte genommen haben. Nun bittet der Zauberer

all jene, welche eine rote Karte haben, aufzustehen, jene mit schwarzen Karten sollen sitzen bleiben. Alle mit einer roten Karte stehen nun auf.
Nun sagt der Zauberer diesen 5 Personen, welche Karte sie in der Hand halten. Zu deren Verblüffung hat er alle Karten richtig erraten. Wie funktioniert dieser Zaubertrick?

221) Zeigen Sie: Ein gerichteter Graph besitzt genau dann eine geschlossene Eulersche Linie, falls für alle Knoten x gilt: $d^+(x) = d^-(x)$. Wie kann man die Existenz einer offenen Eulerschen Linie charakterisieren?

222) Sei G ein Eulerscher Graph und H eine Unterteilung von G. Ist H Eulersch? Ist H Hamiltonsch, falls G Hamiltonsch ist?

223) Beweisen Sie den Satz von Dirac: Jeder Graph G mit $\alpha_0(G) = n \geq 3$ und $\delta(G) \geq n/2$ ist zusammenhängend und Hamiltonsch.
Hinweis: Betrachten Sie einen längsten Weg $x_0, \ldots, x_k$. Zeigen Sie, dass es dann einen Knoten x_i des Weges gibt, sodass $x_i \in \Gamma(x_k)$ und $x_{i+1} \in \Gamma(x_0)$ und konstruieren Sie daraus eine Hamiltonsche Linie.

224) Sei G ein Graph, $\mathcal{C}$ dessen Kreisraum und $\mathcal{C}^*$ dessen Schnittraum. Zeigen Sie ohne Verwendung der Dimensionsformel ($U \subseteq V$, $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$) die Inklusion $\mathcal{C}^\perp \subseteq \mathcal{C}^*$.

225) Sei G ein ungerichteter Graph, B die Inzidenzmatrix von G. Bezeichne weiters $\mathcal{E}$ den Kanten- und $\mathcal{V}$ den Knotenraum von G. $\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{C}^*$ sei der Kreis- bzw. Schnittraum von G. Dann sind $B : \mathcal{E} \to \mathcal{V}$ und $B^T : \mathcal{V} \to \mathcal{E}$ Homomorphismen. Zeigen Sie, dass $\ker B = \mathcal{C}$ und dass das Bild von B^T gleich $\mathcal{C}^*$ ist.

226) Bestimmen Sie den Schnittraum und den Kreisraum des $K_{3,3}$.