1) Berechnen Sie

$$\int \frac{6-2x}{(x-1)(x-2)}\,dx.$$

Lösung: Umformen des Integranden mittels Partialbruchzerlegung:

$$\frac{6-2x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \qquad / \cdot (x-1)(x-2)$$

$$6-2x = A(x-2) + B(x-1) = (A+B)x + (-2A-B)$$

Daraus folgt $A+B=-2$ und $2A+B=-6$ und daher $A=-4$ und $B=2$. Nun läßt sich das Integral leicht lösen:

$$\int \frac{6-2x}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{-4}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx = -4\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + C.$$

2) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren die stationären Punkte der Funktion $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ unter der Nebenbedingung $x + y = 3$.

Lösung: Die stationären Punkte sind jene Punkte, die die sowohl die Gleichungen $F_x(x,y,\lambda) = 0$ und $F_y(x,y\lambda) = 0$ als auch die Nebenbedingung erfüllen. Dabei bezeichnet F die Lagrange-Funktion $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ mit $g(x,y) = x + y - 3$. Gesucht sind also die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x - \lambda &= 0 \\ 4y - \lambda &= 0 \\ x + y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $2x = 4y$. Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt $3y - 3 = 0$ und daher $y = 1$, $x = 2$. Der einzige stationäre Punkt ist daher $(2,1)$.

3) Lösen Sie die lineare Rekursion

$$a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2} + 2^{n-1}$$

mit $a_0 = 2, a_1 = 3$.

Lösung: Die charakteristische Gleichung lautet $x^2 - 8x + 16 = 0$ und hat die doppelte Nullstelle 4. Daher ist die homogene Lösung $a_n^{(h)} = (C_1 + C_2 n)4^n$. Für $a_n^{(p)}$ kann man den Ansatz $a_n^{(p)} = A2^n$ verwenden. Einsetzen in die Rekursion ergibt

$$A2^n - 8A2^{n-1} + 16A2^{n-2} = 2^{n-1}.$$

Daraus folgt $A = 1/2$. Die allgemeine Lösung der Rekursion ist also

$$a_n = (C_1 + C_2 n)4^n + 2^{n-1}.$$

Einsetzen in die Anfangsbedingung ergibt

$$\begin{aligned} C_1 + \frac{1}{2} &= 2 \\ 4C_1 + 4C_2 + 1 &= 3 \end{aligned}$$

Daraus folgt $C_1 = 3/2$ und $C_2 = -1$ und daher

$$a_n = \left(\frac{3}{2} - n\right) 4^n + 2^{n-1}.$$

4) Wie ist eine Kurve im $\mathbb{R}^3$ definiert? Was versteht man unter einem Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$? Was versteht man unter dem Kurvenintegral eines Vektorfelds längs einer solchen Kurve? Wann heißt so ein Kurvenintegral wegunabhängig? Geben Sie eine hinreichende Bedingung für Wegunabhängigkeit an.

Lösung: siehe Buch, Abschnitt 6.4.4

5) Was versteht man unter einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung? Wie sieht die Lösungsgesamtheit einer inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung aus? Beschreiben Sie ein Verfahren zur Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung und illustrieren Sie dieses anhand eines Beispiels.

Lösung: siehe Buch, Abschnitt 7.6.1