



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

INSTITUT FÜR
DISKRETE MATHEMATIK UND GEOMETRIE

FORSCHUNGSGRUPPE
DIFFERENTIALGEOMETRIE UND
GEOMETRISCHE STRUKTUREN

33. Süddeutsches Kolloquium über Differentialgeometrie

Wien, Mai 2008

Tagungsband

Impressum

Herausgeber

Technische Universität Wien
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
Forschungsgruppe: Differentialgeometrie und geometrische Strukturen

Redaktion

Boris Odehnal

Gestaltung

Hans Havlicek, Boris Odehnal

Umschlag

Boris Odehnal

Druck und Endverarbeitung

digiDruck

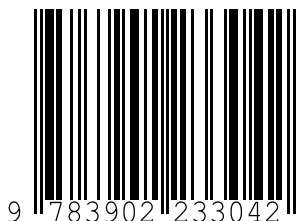
Ansprechpartner

Hans Havlicek, Friedrich Manhart, Boris Odehnal
Technische Universität Wien
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
Forschungsgruppe Differentialgeometrie und geometrische Strukturen
A-1040 Wien
Wiedner hauptstraße 8–10
Tel: +43(1)58801-11321
Fax: +43(1)58801-11399
email: {havlicek,manhart,odehnal}@geometrie.tuwien.ac.at

Copyright ©2008 by Differential Geometry and Geometric Structures.
All rights reserved.

Oktober 2008

ISBN 978-3-902233-04-2



9 783902 233042

33. Süddeutsches
Differentialgeometriekolloquium

Wien, 23. und 24. Mai 2008

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
Mike Scherfner & Simon Weiß: Towards a Proof of the Chern Con- jecture for Isoparametric Hypersurfaces in Spheres	1
Hans Havlicek: Erinnerungen an Heinrich Brauner	14
Georg Nawratil: Main Theorem on Planar Parallel Manipulators with Cylindrical Singularity Surface	35
Eberhard Teufel: Konforme Breite in der Möbius-Geometrie	58
Johann Hartl: Polynomiale Drehflächen	61
Horst Martini & Konrad J. Swanepoel: Characterizations and a Construction of Equiframed Curves	66
Programm	73
Teilnehmer	73
Kurzfassungen aller Vorträge	75
Bisherige Kolloquien	89

Vorwort

Im Mai 2008 veranstaltete die Forschungsgruppe Differentialgeometrie und Geometrische Strukturen des Institutes für Diskrete Mathematik und Geometrie das 33. Süddeutsche Differentialgeometriekolloquium. Diese Veranstaltungsreihe, die geographisch nicht auf Süddeutschland beschränkt ist, soll vor allem auch jungen Kollegen die Möglichkeit zur Präsentation ihrer Forschungsergebnisse und zum Meinungsaustausch geben.

Die gehaltenen Vorträge widmeten sich nebst numerischen Methoden zur Minimalflächenberechnung, der Chern-Vermutung, speziellen Minimalflächen und deren Konstruktion auch Fragestellungen aus dem Bereich der Parametrisierungen rationaler Drehflächen und den verallgemeinerten LN-Flächen. Auch der Starrheit gewisser nichtkonvexer Polyeder und dem Begriff der konstanten Breite in der Möbius-Geometrie sowie Verallgemeinerungen der Radon-Kurven und den Anwendungen lokaler geodätischer Abbildungen aus Drehflächen konstanter Krümmung zur Übertragung und Visualisierung inzidenzgeometrischer Begriffe in nichteuklidischen Geometrien waren Vorträge gewidmet. Die Frage nach architektonisch singulären Plattformen mit zylindrischer Singularitätenfläche wurde ebenso beantwortet.

Die Vielfalt der Themen ist ein Beleg dafür, wie weit der Begriff Differentialgeometrie gefaßt werden kann.

Am 21. November 2008 jährt sich zum 80. Mal der Geburtstag von Heinrich Brauner. Aus diesem Anlaß hat Hans Havlicek im Rahmen dieses Kolloquiums einen Vortrag mit sehr persönlichen Erinnerungen gehalten. Das wissenschaftliche Werk wie auch die hervorragenden Vorträge und Vorlesungen Heinrich Brauners haben eine Vielzahl von Geometern, darunter viele Teilnehmer des Kolloquiums nachhaltig geprägt.

Für das 34. Süddeutsche Differentialgeometriekolloquium im Jahr 2009 ist München als Veranstaltungsort vorgesehen.

Hans Havlicek, Friedrich Manhart, Boris Odehnal

Proc. 33. Süddeutsches Differentialgeometriekolloquium
Wien, 23. Mai 2008
pp. 1 – 13
ISBN 978-3-902233-04-2

Towards a Proof of the Chern Conjecture for Isoparametric Hypersurfaces in Spheres

MIKE SCHERFNER & SIMON WEISS

Abstract: We present the framework and a short history of the Chern conjecture for isoparametric hypersurfaces in spheres and its generalizations. Main results will be presented and we summarize the progress for this topic.

1 Introduction

The Chern conjecture for isoparametric hypersurfaces in spheres can be stated as follows:

Let M be a closed, minimally immersed hypersurface of the $(n + 1)$ -dimensional sphere \mathbb{S}^{n+1} with constant scalar curvature. Then M is isoparametric.

It was originally proposed in a less strong version by Chern in [11] and Chern, do Carmo and Kobayashi in [12], in 1968 and 1970 respectively. So far, no proof for the conjecture has been found, although partial results exist in particular for low dimensions and with additional conditions for the curvature functions of M . We will give an overview of these results and discuss several possible generalizations of the Chern conjecture.

Its original version relates to the following theorem, first proved by Simons [21]:

Theorem 1.1. *Let $M \subset \mathbb{S}^{n+1}$ be a closed, minimally immersed hypersurface and S the squared norm of its second fundamental form. Then*

$$\int_M (S - n)S \geq 0.$$

In particular, for $S \leq n$ one has either $S = 0$ or $S = n$ identically on M .

Note that since M is minimally immersed S is constant if and only if the scalar curvature κ is constant. In this case it follows that $S = 0$ or $S \geq n$, which led Chern to propose the following

Conjecture 1.2. *Consider closed minimal hypersurfaces $M \subset \mathbb{S}^{n+1}$ with constant scalar curvature κ . Then for each n the set of all possible values for κ (or equivalently S) is discrete.*

The only known examples for minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in \mathbb{S}^{n+1} are isoparametric, i.e. all of their principal curvature functions are constant. From the classification of isoparametric hypersurfaces in spheres, given by Münzner in [17], one obtains that S equals $(g - 1)n$, where g is the number of pairwise distinct principal curvatures and can only take the values 1, 2, 3, 4 or 6, which establishes the conjecture in this case. Based on this, Verstraelen, Montiel, Ros and Urbano first formulated the stronger version of the conjecture given initially (see [22]). Most of the later results refer to this version.

2 Preliminaries

In the following we present the natural framework in order to attack the problem for the case $n = 4$, since the recent results are given for this dimension and it is obvious how to generalize (or restrict) the equations given below.

Let M^4 be a 4-dimensional hypersurface in a unit sphere $\mathbb{S}^5(1)$. We choose a local orthonormal frame field $\{e_1, \dots, e_5\}$ in $\mathbb{S}^5(1)$, so that restricted to M^4 , e_1, \dots, e_4 are tangent to M^4 . Let $\omega_1, \dots, \omega_5$ denote the dual co-frame field in $\mathbb{S}^5(1)$. We use the following convention for the indices: A, B, C, D range from 1 to 5 and i, j, k from 1 to 4. The structure equations of $\mathbb{S}^5(1)$ as a hypersurface of the Euclidean space \mathbb{R}^6 are given by

$$\begin{aligned} d\omega_A &= -\sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \\ d\omega_{AB} &= -\sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \frac{1}{2} \sum_{C,D} \bar{R}_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D, \end{aligned}$$

where \bar{R} is the Riemannian curvature tensor

$$\bar{R}_{ABCD} = \delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}.$$

The contractions $\bar{R}_{AC} = \sum_B \bar{R}_{ABCB}$ and $\bar{R} = \sum_{A,B} \bar{R}_{ABAB}$ are the Ricci curvature tensor and the scalar curvature of $\mathbb{S}^5(1)$, respectively. Next, we restrict all the tensors to M^4 . First of all, since $\omega_5 = 0$ on M^4 , $\sum_i \omega_{5i} \wedge \omega_i = d\omega_5 = 0$. By Cartan's lemma we can write

$$\omega_{5i} = \sum_j h_{ij} \omega_j, \quad h_{ij} = h_{ji}. \quad (1)$$

Here $h = \sum_{i,j} h_{ij} \omega_i \omega_j$ denotes the second fundamental form of M^4 and the principal curvatures λ_i are the eigenvalues of the matrix (h_{ij}) . Furthermore the mean curvature is given by $H = \frac{1}{4} \sum_i h_{ii} = \frac{1}{4} \sum_i \lambda_i$ and $K = \det(h_{ij}) = \prod_i \lambda_i$ is the Gauß-Kronecker curvature. On M^4 we have

$$\begin{aligned} d\omega_i &= -\sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \\ d\omega_{ij} &= -\sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l, \end{aligned}$$

where R is the Riemannian curvature tensor on M^4 with components satisfying

$$0 = R_{ijkl} + R_{ijlk}.$$

These structure equations imply the following integrability condition (Gauß equation):

$$R_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}).$$

For the scalar curvature we have

$$\kappa = 12 + 16H^2 - S,$$

where $S = \sum_{i,j} h_{ij}^2$ is the squared norm of h .

If we consider minimal hypersurfaces, the Ricci curvature and scalar curvature are given by, respectively,

$$R_{ij} = 3\delta_{ij} - \sum_k h_{ik}h_{jk}, \quad (2)$$

$$\kappa = 12 - S. \quad (3)$$

It follows from (3) that κ is constant if and only if S is constant. The covariant derivative ∇h with components h_{ijk} is given by

$$\sum_k h_{ijk}\omega_k = dh_{ij} + \sum_k h_{jk}\omega_{ik} + \sum_k h_{ik}\omega_{jk}. \quad (4)$$

Then the exterior derivative of (2) together with the structure equations yields the following Codazzi equation

$$h_{ijk} = h_{ikj} = h_{jik}. \quad (5)$$

For any fixed point on M^4 , we can choose a local orthonormal frame $\{e_1, \dots, e_4\}$, such that

$$h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}.$$

We define the symmetric functions f_3 and f_4 on M^4 as follows:

$$f_3 := \sum_{i,j,k} h_{ij}h_{jk}h_{ki} = \sum_i \lambda_i^3, \quad f_4 := \sum_{i,j,k,l} h_{ij}h_{jk}h_{kl}h_{li} = \sum_i \lambda_i^4. \quad (6)$$

3 Results

The trivial case is given for $n = 2$. Here (under the premises of the conjecture)

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad (7)$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \text{const} \tag{8}$$

and we have $\lambda_1 = -\lambda_2 = \text{const}$.

The first partial result was achieved by Peng and Terng, who gave further constraints for the possible values of S :

Theorem 3.1 (PENG, TERNG 1983 [18]). *For every $n \geq 3$ there exists a maximal $C(n)$ with the following property: Let $M \subset \mathbb{S}^{n+1}$ be a closed minimal hypersurface with constant $S > n$. Then it follows that $S \geq n + C(n)$ and one has $C(3) = 3$, $C(n) \geq \frac{1}{12n}$.*

Since for isoparametric hypersurfaces the next highest possible value for S is $2n$, they in particular proposed the following

Conjecture 3.2. $C(n) \geq n$.

The originally shown inequality has since been improved considerably by Yang and Cheng ([23],[24],[25]) to $C(n) \geq \frac{26}{61}n - \frac{16}{61} > \frac{1}{3}n$ and, under the additional assumption that the sum of cubes of the principal curvatures f_3 is constant, $C(n) \geq \frac{13}{15}n - \frac{4}{5} \geq \frac{2}{3}n$.

The lowest dimension for which the Chern conjecture is non-trivial is $n = 3$. In this case, a more general theorem has been proven:

Theorem 3.3 (ALMEIDA, BRITO 1990 [3]; CHANG 1993 [7]). *Let $M \subset \mathbb{S}^4$ be a closed hypersurface with constant mean curvature H and constant scalar curvature κ . Then M is isoparametric.*

Almeida and Brito initially showed this in [3] under the additional assumption that κ is non-negative. The approach of this proof has since been used to show a number of other results (see below), and can be sketched as follows: Let Y be the set of points where all principal curvatures are distinct. It is easy to see that it is sufficient to proof that the principal curvatures are constant on Y . One defines a three-form ψ on Y depending on the principal curvature directions, which satisfies $d\psi = F \text{vol}$ for a non-negative function F . Using Stokes' theorem and an estimate on the boundary of Y , one obtains $F = 0$ from which the claim follows directly.

Chang then completed the proof in [7] by showing that κ is non-negative under these assumptions. He proved this separately for manifolds with three everywhere distinct principal curvatures and those where two principal curvatures coincide in a point, in the former case generalizing a proof earlier given by Peng and Terng in [19] for minimal hypersurfaces.

Instead of manifolds in low dimensions, one can also consider those with a certain number g of pairwise different principal curvatures. Again, $g = 3$ is the first non-trivial case, and one has the following result:

Theorem 3.4 (CHANG 1994 [9]). *Let $M \subset \mathbb{S}^{n+1}$ be a closed hypersurface with constant mean and scalar curvatures which has exactly three pairwise distinct principal curvatures in every point. Then M is isoparametric.*

For the case $n = 4$ a partial result has recently been proven under the additional assumption that M is a Willmore hypersurface, i.e. a critical point of the Willmore functional $W(M) := \int_M \rho^2$ with $\rho^2 = S - nH^2$. For minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in spheres this has been shown by Li in [14] to be equivalent to $f_3 = 0$. This is the case for most minimal isoparametric hypersurfaces of \mathbb{S}^5 , which motivates the assumption. One has:

Theorem 3.5 (LUSALA, SCHERFNER, SOUSA JR. 2005 [16]). *Let $M \subset \mathbb{S}^5$ be a closed minimal Willmore hypersurface with constant non-negative scalar curvature. Then M is isoparametric.*

The proof follows essentially the same approach as that of [3].

In fact, [16] claims that this is true even in the case of negative scalar curvature. However, the proof as given there contains an incorrect step; namely, an integral estimate is made to show that on the set Y of points with four distinct principal curvatures one has $\kappa = 0$. For this it is claimed that a certain integral term goes to zero in the limit, which is not generally the case.

4 Generalizations

One obvious generalization is that on non-closed manifolds, i.e. a local version of the conjecture. This has in particular been proposed by Bryant for the case $n = 3$:

Conjecture 4.1. *Let $M \subset \mathbb{S}^4$ be a minimal hypersurface with constant scalar curvature. Then M is isoparametric.*

The following is a result of the proof of the (global) Chern conjecture in this case:

Theorem 4.2 (CHANG 1993 [8]). *Let $M \subset \mathbb{S}^4$ be a minimal Hypersurface with constant scalar curvature such that there is a point $p \in M$ in which two principal curvatures coincide. Then M is isoparametric.*

Another possible generalization is that on hypersurfaces of constant mean curvature. It has already been mentioned that the proofs for the cases $n = 3$ and $g = 3$ remain valid under this more general assumption. One also has the following inequalities in analogy to Theorem 1.1:

Theorem 4.3 (ALENCAR, DO CARMO 1994 [1]). *There exist continuous positive functions B_n with $B_n(0) = n$ and the following property:*

Let $M \subset \mathbb{S}^{n+1}$ be a closed hypersurface with constant mean curvature H . If

$$\tilde{S} := \sum_i (\lambda_i - H)^2 \leq B_n(H),$$

then it follows that $\tilde{S} = 0$ or $\tilde{S} = B_n(H)$ identically on M .

Theorem 4.4 (HOU 1997 [13]). *Let $M \subset \mathbb{S}^{n+1}$ be a closed hypersurface with constant mean curvature. If $S < 2\sqrt{n-1}$, then M is a hypersphere.*

Note that in both cases there exist isoparametric hypersurfaces for which the upper bounds are assumed, such that the inequalities are sharp.

A number of the results mentioned in section 3 can also be generalized to hypersurfaces in Riemannian manifolds R^{n+1} of constant curvature $c \leq 0$; for details see the second table in section 5 (note that it is sufficient to consider $c \in \{-1, 0\}$).

One can also more generally ask what can be said about manifolds with other combinations of constant curvature functions. For this one defines the r -th mean curvature (or mean curvature of order r) σ_r as

$$\sigma_r := \binom{n}{r}^{-1} \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_r},$$

that is up to a factor as the r -th elementary symmetric polynomial of the principal curvatures. Note that σ_1 equals the mean curvature H , σ_2 equals the scalar curvature κ up to additive and multiplicative constants ($\kappa = n(n-1)(1+\sigma_2)$) and σ_n equals the Gauß-Kronecker curvature K .

The Chern conjecture can now be stated as follows: If $\sigma_1 = 0$ and σ_2 are constant, then so are all other σ_r . This suggests the question for which other combinations of indices such a statement is true. For hypersurfaces immersed in certain manifolds there exists the following remarkable result:

Theorem 4.5 (BIVENS 1983 [6]). *Let M be a compact hypersurface in \mathbb{R}^{n+1} , the hyperbolic space \mathbb{H}^{n+1} or the open half-sphere \mathbb{S}_+^{n+1} . If for some $1 \leq r < n$ the two mean curvature functions σ_r and σ_{r+1} are constant, then M is a geodesic hypersphere (and thus isoparametric).*

For hypersurfaces in \mathbb{S}^4 , Almeida and Brito proved the following using a similar approach to that in [3]:

Theorem 4.6 (ALMEIDA, BRITO 1997 [4]). *Let $M \subset \mathbb{S}^4$ be a closed hypersurface with mean curvature $H = \sigma_1$, scalar curvature $\kappa = 12(1 + \sigma_2)$ and Gauß-Kronecker curvature $K = \sigma_3$.*

If κ and K (or equivalently σ_2 and σ_3) are constant with $\kappa \geq 0$ ($\sigma_2 \geq -1$), then M is isoparametric.

If H and $K \neq 0$ (or equivalently σ_1 and $\sigma_3 \neq 0$) are constant with $HK^{-1} \geq -1$ ($\sigma_1\sigma_3^{-1} \geq -1$), then M is also isoparametric.

In [5] Almeida, Brito and Sousa recently claimed that this is the case even without assuming the inequalities. However, the proof given there uses the same incorrect argument as [16] (see above).

Lusala and Oliveira showed in [15] that if H and $K = 0$ are constant, H is also zero. In this case there exist non-isoparametric examples ([2], see also [20]).

5 Summary

The table given below recapitulates the dimensions and additional conditions for which the Chern conjecture and its generalizations for hypersurfaces of constant mean curvature and non-closed hypersurfaces have been proven.

In the following, let \tilde{S} and B_n be defined as in theorem 4.3 and let g be the number of pairwise distinct principal curvatures as a function on M .

n	Chern Conjecture	Chern Conjecture ($H \neq 0$)	Chern Conjecture (locally)
2	Yes	Yes	Yes
3	Yes, [19], [8]	Yes, [3], [7]	If $S \leq 3$, [12] or $g = 2$ in p , [8]
4	If $f_3 \equiv 0$, $S \leq 12$, [16] or f_3 const., $S < \frac{20}{3}$, [25] or $S < \frac{372}{61}$, [25] or $g \equiv 3$, [9]	If $\tilde{S} \leq B_4(H)$, [1] or $S \leq 2\sqrt{3}$, [13] or $g \equiv 3$, [9] or $M \subset \mathbb{S}_+^5$, [6]	If $S \leq 4$, [12]
> 4	If f_3 const., $S < \frac{28}{15}n - \frac{4}{5}$, [25] or $S < \frac{97}{61}n - \frac{16}{61}$, [25] or $g \equiv 3$, [9]	If $\tilde{S} \leq B_n(H)$, [1] or $S \leq 2\sqrt{n-1}$, [13] or $g \equiv 3$, [9] or $M \subset \mathbb{S}_+^{n+1}$, [6]	If $S \leq n$, [12]

For closed hypersurfaces in a Riemannian manifold R^{n+1} of constant curvature c which have constant mean and scalar curvature, the equivalent of the Chern conjecture can be proved in the following cases:

n	$c = 0$	$R^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$	$c = -1$	$R^{n+1} = \mathbb{H}^{n+1}$
2	Yes*	Yes*	Yes*	Yes*
3	Yes** (analogous to [10])	Yes** ([6],[10])	If $S \leq 9H^2 - 6$ ([3])	Yes ([6])
> 3	If $g \equiv 3$ (analogous to [9])	Yes ([6])	If $g \equiv 3$ (analogous to [9])	Yes ([6])

*: Also true locally **: Also true for complete hypersurfaces.

Finally, the following table gives the results that are known for closed hypersurfaces in S^4 with two constant mean curvature functions.

Constant σ_r		Result
σ_1	σ_2	isoparametric ([3],[7])
σ_1	$\sigma_3 \neq 0$	isoparametric if $\sigma_1\sigma_3^{-1} \geq -1$ ([4])
$\sigma_1 \neq 0$	$\sigma_3 = 0$	does not occur ([15])
$\sigma_1 = 0$	$\sigma_3 = 0$	non-isoparametric examples ([2], [20])
σ_2	σ_3	isoparametric if $\sigma_2 \geq -1$ ([4])

References

- [1] H. ALENCAR, M. DO CARMO, *Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Spheres*, Proc. Amer. Math. Soc., 120 (1994), 1223–1229.
- [2] S. ALMEIDA, F. BRITO, *Minimal hypersurfaces of \mathbb{S}^4 with constant Gauss-Kronecker curvature*, Math. Z., 195 (1987), 99–107.
- [3] S. ALMEIDA, F. BRITO, *Closed 3-dimensional hypersurfaces with constant mean curvature and constant scalar curvature*, Duke Math. J., 61 (1990), 195–206.
- [4] S. ALMEIDA, F. BRITO, *Closed hypersurfaces of S^4 with two constant symmetric curvatures*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 6 (1997), 187–202.
- [5] S. ALMEIDA, F. BRITO, L.A.M. SOUSA, JR., *Closed Hypersurfaces of \mathbb{S}^4 with Two Constant Curvature Functions*, Results in Math., 50 (2007), 17–26.
- [6] I. BIVENS, *Integral formulas and hyperspheres in a simply connected space form*, Proc. Amer. Math. Soc., 88 (1983), 113–118.
- [7] S. CHANG, *A closed hypersurface with constant scalar curvature and constant mean curvature in \mathbb{S}^4 is isoparametric*, Comm. Anal. Geom., 1 (1993), 71–100.
- [8] S. CHANG, *On minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in S^4* , J. Differential Geom., 37 (1993), 523–534.
- [9] S. CHANG, *On closed hypersurfaces of constant scalar curvatures and mean curvatures in S^{n+1}* , Pacific J. Math., 165 (1994), 67–76.
- [10] Q.-M. CHENG, Q.-R. WAN, *Complete Hypersurfaces of R^4 with Constant Mean Curvature*, Monatshefte f. Math., 118 (1994), 171–204.
- [11] S.-S. CHERN, *Minimal submanifolds in a Riemannian manifold*, Mimeographed Lecture Note, Univ. of Kansas (1968).

-
- [12] S.-S. CHERN, M. DO CARMO, S. KOBAYASHI, *Minimal submanifolds in a sphere with second fundamental form of constant length*, Functional Analysis and Related Fields (ed. F. Browder), Springer-Verlag, Berlin (1970).
- [13] Z.H. HOU, *Hypersurfaces in a Sphere with Constant Mean Curvature*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 1193–1196.
- [14] H. LI, *Willmore hypersurfaces in a sphere*, Asian J. Math., 5 (2001), 365–378.
- [15] T. LUSALA, A.G. OLIVEIRA, *Closed hypersurfaces of S^4 with constant mean curvature and zero Gauss-Kronecker curvature*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 340 (2005), 437–440.
- [16] T. LUSALA, M. SCHERFNER, L.A.M. SOUSA, JR., *Closed minimal Willmore hypersurfaces of $S^5(1)$ with constant scalar curvature*, Asian J. Math., 9 (2005), 65–78.
- [17] H.F. MÜNZNER, *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären*, Math. Ann., 251 (1980), 57–71.
- [18] C.-K. PENG, C.-L. TERNG, *Minimal hypersurfaces of spheres with constant scalar curvature*, Seminar on Minimal Submanifolds (ed. E. Bombieri), Ann. of Math. Studies, 103 (1983), Princeton, NY, 179–198.
- [19] C.-K. PENG, C.-L. TERNG, *The scalar curvature of minimal hypersurfaces in spheres*, Math. Ann., 266 (1983), 105–113.
- [20] J. RAMANATHAN, *Minimal hypersurfaces of S^4 with vanishing Gauss-Kronecker curvature*, Math. Z., 205 (1990), 645–658.
- [21] J. SIMON, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math., 88 (1968), 65–105.
- [22] L. VERSTRAELEN, *Sectional curvature of minimal submanifolds*, Proceedings Workshop on Differential Geometry (ed. S. Robertson et al.), Univ. Southampton (1986), 48–62.
- [23] H. YANG, Q.-M. CHENG, *A note on the pinching constant of minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in the unit sphere*, Chinese Science Bull., 36 (1991), 1–6.
- [24] H. YANG, Q.-M. CHENG, *An estimate of the pinching constant of minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in the unit sphere*, Manuscripta Math., 84 (1994), pp. 89–100.

- [25] H. YANG, Q.-M. CHENG, *Chern's conjecture on minimal hypersurfaces*,
Math. Z., 227 (1998), 377–390.

Mike Scherfner, Simon Weiß

Faculty II - Mathematics and Natural Science, Institute of Mathematics

Technische Universität Berlin

Straße des 17. Juni 136

10623 Berlin, Germany

{scherfner,weiß}@math.tu-berlin.de

Proc. 33. Süddeutsches Differentialgeometrie-Kolloquium
Wien, 23. Mai 2008
pp. 14 – 34
ISBN 978-3-902233-04-2

Erinnerungen an Heinrich Brauner (1928–1990)

HANS HAVLICEK

Kurzfassung: Zur 80. Wiederkehr des Geburtstages von Heinrich Brauner sollen Eigenschaften, Wesensmerkmale und Leistungen dieses österreichischen Geometers aufgezeigt werden. Dabei möchte ich zumindest ein wenig von dem vermitteln, was aus meiner Sicht das Besondere dieses außergewöhnlichen Wissenschaftlers und Menschen ausmachte. *Mathematics Subject Classification* (2000): 01A70

1 Einleitung

In meinem Vortrag möchte ich einige Worte der persönlichen Erinnerung an meinen Lehrer,

Herrn O.Univ.Prof. Mag.rer.nat. Dr.phil. Dr.techn. Heinrich Brauner,

sprechen, dessen Geburtstag sich im Jahr 2008 zum achtzigsten Male jährt. Zunächst sei sein Lebensweg ganz kurz skizziert, wobei ich mich auf die Angaben in [1] stütze.

Heinrich Brauner wurde am 21. November 1928 in Wien geboren, wo er auch das Realgymnasium besuchte. Von 1946 bis 1952 studierte er an der Universität Wien und der Technischen Hochschule Wien. Brauner legte die Lehramtsprüfungen für die Fächer *Mathematik*, *Physik* und *Darstellende Geometrie* und die erste Staatsprüfung aus *Technischer Physik* ab. Er verfasste



Abbildung 1: Festkolloquium 1988

zwei Dissertationen: *Über $n + 1$ fache Orthogonalsysteme von Riemannschen Hyperflächen der Klasse 1 im euklidischen Raum R^{n+1}* bei Johann Radon sowie *Kongruente Verlagerung kollinearere Räume in axiale Lage* bei Walter Wunderlich. Brauner wurde an der Universität Wien zum Doktor der Philosophie und an der Technischen Hochschule Wien zum Doktor der Technischen Wissenschaften promoviert.

Ab 1950 war Brauner im Schuldienst tätig und daneben ab 1951 teilbeschäftigte wissenschaftliche Hilfskraft am 1. Institut für Geometrie der Technischen Hochschule Wien. Erst 1954 konnte er ebendort eine Stelle als vollbeschäftigter Hochschulassistent antreten.

Schon 1956 habilitierte sich Brauner an der Technischen Hochschule Wien für das Fach *Geometrie, insbesondere Darstellende Geometrie* und im Jahr darauf, in einem davon unabhängigen Verfahren, an der Universität Wien für



Abbildung 2: Festkolloquium 1988

das Fach *Mathematik*.

Im Jahre 1960 nahm er einen Ruf auf ein Ordinariat an der Technischen Hochschule Stuttgart an. Ab 1969 war Brauner Ordentlicher Universitätsprofessor für Geometrie an der Technischen Hochschule (Technischen Universität) Wien.

Brauner wurde im Jahr 1970 zum Honorarprofessor der Universität Wien ernannt. Ferner war er ab 1972 korrespondierendes Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften und in weiterer Folge Träger des Ehrenkreuzes für Wissenschaft und Kunst I. Klasse.

Die Abbildungen 1 und 2 zeigen Brauner beim Festkolloquium, das aus Anlass seines 60. Geburtstages am 21. Oktober 1988 am Institut für Geometrie der Technischen Universität Wien stattfand. Er litt zu diesem Zeitpunkt bereits an Osteoporose. Brauner kämpfte gegen diese sehr schmerzhaft

heit mit unendlicher Geduld an und nahm seine Aufgaben am Institut bis wenige Wochen vor seinem Ableben wahr. Heinrich Brauner erlag seinem schweren Leiden am 1. Juni 1990.

2 Der Lehrer Heinrich Brauner: Es begann mit einem Punktsack

Meine erste Begegnung mit Heinrich Brauner war im Wintersemester 1972/73 in seiner Vorlesung *Projektive Geometrie I* für die erstjährigen Lehramtskandidaten. Ich hatte keine Ahnung, was mich erwarten würde – weder inhaltlich noch den Vortragenden betreffend. Brauner begann die erste Vorlesung und brachte sogleich mein in der Schule erworbenes Bild der Geometrie kräftig ins Wanken. Da kamen nämlich ein *Punktsack* \mathfrak{P} und ein *Geradensack* \mathfrak{G} zum Vorschein, gemeinsam mit einer *Inzidenz* genannten Teilmenge von $\mathfrak{P} \times \mathfrak{G}$. Dann wurden drei Axiome präsentiert, und fertig war die Definition einer projektiven Ebene! Zur Abrundung gab es noch drei Modelle: Die projektiv abgeschlossene Anschauungsebene, die Sieben-Punkte-Ebene von Fano und das Bündelmodell der gewöhnlichen projektiven Ebene, in dem zur allgemeinen Verwirrung übliche Geraden als „Punkte“ und übliche Ebenen als „Geraden“ zu bezeichnen waren. Kurz gesagt: Es versprach spannend zu werden. Und es wurde spannend!

In den folgenden Jahren hörte ich bei Brauner Vorlesungen über *Differentialgeometrie*, *Höhere Differentialgeometrie*, *Liniengeometrie* und *Abbildungsverfahren der konstruktiven Geometrie*. Als junger Assistent begleitete ich ihn auch in die Vorlesungen über *Darstellende Geometrie* für Studierende der Architektur, des Bauingenieurwesens und der Geodäsie.

Leider gibt es nur ganz wenige Bilder aus Brauners Lehrveranstaltungen. Das Foto in Abbildung 3 habe ich im Sommersemester 1982 in einer Vorlesung über Differentialgeometrie aufgenommen, die an der Technischen Universität Wien stattfand. Zu sehen ist Brauner, wie er gerade den Hauptsatz der Hyperflächentheorie beweist: *Zwei Immersionen mit derselben ersten und zweiten Fundamentalform sind bewegungsgleich*. Im Wintersemester 1983 entstanden ebenfalls an der Technischen Universität Wien in einer der ersten Vorlesungen über Differentialgeometrie jene beiden Aufnahmen, die in den



Abbildung 3: Vorlesung über Differentialgeometrie 1982

Abbildungen 4 und 5 zu sehen sind: Brauner erklärt hier, den Blick ins Unendliche gerichtet, was unter einer *geometrischen Aussage über eine Kurve* zu verstehen sei.

Brauners Vorlesungen über *Differentialgeometrie* sind mir in bester Erinnerung. Sie fanden während meiner Studienzeit nicht an der Technischen Hochschule Wien, sondern an der Universität Wien in den Räumen des Priesterseminars statt. Brauner setzte von Anfang an voraus, dass man Analysis und Lineare Algebra *schon gelernt hatte*. Das führte dazu, dass bereits in der

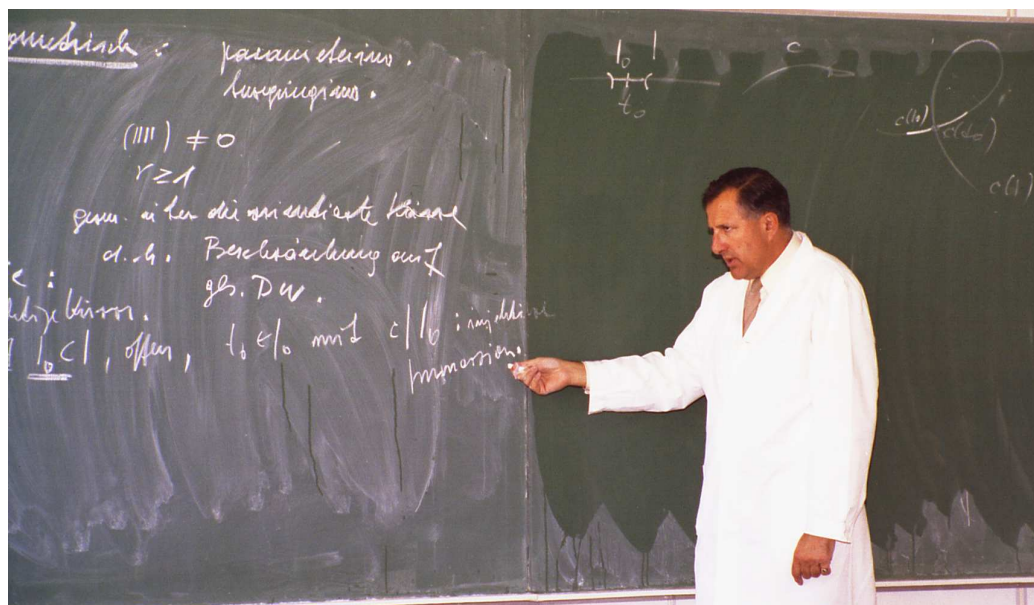


Abbildung 4: Vorlesung über Differentialgeometrie 1983

zweiten Vorlesung deutlich weniger Hörerinnen und Hörer waren, als in der ersten. So fand wenigstens ab diesem Zeitpunkt jeder einen Sitzplatz. Das war auch gut so. Da es nämlich kein Skriptum gab, mussten wir auf den kleinen, an den Hörsaalstühlen angebrachten Klapptischchen all das mitschreiben, was Brauner rasant auf der Tafel notierte.

Die Zielsetzung für diese Vorlesungen kann auch heute noch in der Einleitung seines Lehrbuches der Differentialgeometrie nachgelesen werden. Dort schreibt Brauner:

„Differentialgeometrie ist meines Erachtens ein Gebiet, das sich wegen zahlreicher Querverbindungen zu anderen mathematischen Disziplinen und seiner Bedeutung etwa für die theoretische Physik besonders gut als Vorlesung für den zweiten Studienabschnitt einer Mathematikerausbildung eignet.“

Wie ich zuvor schon andeutete, war Brauner in seinen Vorlesungen sehr zügig unterwegs. Langatmige Motivationen oder ausgedehnte Wiederholungen des Stoffes waren ihm fremd. Dennoch war es einfach faszinierend und vor allem lohnend, seine Vorlesungen zu besuchen. Mathematisch präzise Formu-



Abbildung 5: Vorlesung über Differentialgeometrie 1983

lierungen und glasklare Definitionen, gepaart mit anschaulich-geometrischen Erklärungen und zahlreichen Handskizzen, bildeten die Basis seiner Vorlesungen. Wer regelmäßig seine Veranstaltungen besuchte, wusste immer, worum es gerade ging.

Eine seiner besonderen Eigenarten war es, beim Fenster hinaus blickend zu unterrichten. In solchen Augenblicken wussten wir Studenten: Jetzt ist er voll bei der Sache; nichts und niemand kann ihn aufhalten. Aber gelegentlich hielt Brauner von sich aus plötzlich inne, dachte wortlos nach, schüttelte manchmal auch den Kopf, schwieg nochmals für einige Sekunden, um dann im gewohnten Tempo weiterzumachen.

In seinen Lehrveranstaltungen konnte Brauner begeistern und mitreißen.

Einer meiner Studienkollegen wollte im Anschluss an ein Seminar im Studienjahr 1975/76 zum Thema *Nichtdesarguessche Projektive Ebenen* in seiner Hausarbeit unbedingt das Problem der Existenz oder Nichtexistenz einer projektiven Ebene der Ordnung 10 lösen. Brauner, der um die extreme Schwierigkeit der Fragestellung wusste, hat ihm mit Recht ein anderes Thema vorgeschlagen. Das genannte Problem wurde übrigens von Lam, Thiel und Swiercz erst 1989 unter Einsatz des Computers gelöst. Wir wissen seither, dass es keine solche Ebene gibt.

Brauners Vortragsstil war in jeder Hinsicht brilliant. Mit wenigen, treffenden Worten das Richtige zu sagen, das war eine seiner Stärken. Er sprach laut, deutlich und in ganzen Sätzen, die in vielen Fällen druckreif waren. Ich erinnere mich an einen Artikel in einer Studentenzeitung aus den 1980er Jahren. Dort wurde Brauner als der „ungekrönte Meister des Schachtelsatzes“ bezeichnet. Dem habe ich nichts hinzuzufügen.

Gelegentlich streute Brauner in seinen Unterricht aber auch launische Bemerkungen ein. So erklärte er in einer Vorlesung über Differentialgeometrie die kovariante Ableitung auf einer Fläche mit Hilfe von „auf einer Fläche lebenden Käfern“ und bemerkte dabei verschmitzt:

„Nur differenzieren sollten die Käfer schon können.“

In einer Vorlesung direkt vor den Osterferien schrieb er zum Abschluss

Frohe O*

auf die Tafel, um dann wortlos schmunzelnd den Raum zu verlassen. In seinen Vorlesungen für Ingenieurstudenten betonte er zur Illustration eines räumlichen Rechtssystems immer wieder nachdrücklich:

„Die z -Achse weist nach oben, die y -Achse nach rechts, und die x -Achse sticht Sie in den Bauch.“

Brauner übersetzte in einer Vorlesung aus projektiver Geometrie das Wort *oskulieren* korrekt als *küssen* und meinte danach nur trocken:

„Was *hyperoskulieren* bedeutet, müssen Sie selbst herausfinden.“

Viele Inhalte der Vorlesungen von Heinrich Brauner können auch heute noch in den sechs von ihm verfassten Büchern nachgelesen werden. Sie behandeln die Themen *Geometrie Projektiver Räume* (2 Bände), *Baugeometrie* (2 Bände, gemeinsam mit Walter Kicking), *Differentialgeometrie* und *Konstruktive Geometrie*. Seinen außergewöhnlichen Vortragsstil können sie aus meiner Sicht leider nicht vermitteln.

3 Der Forscher Heinrich Brauner

Brauner arbeitete an seinen Artikeln und Büchern weitgehend alleine und vorzugsweise daheim. Er gab aber die von seiner Sekretärin mit der Schreibmaschine ausgearbeiteten Manuskripte immer uns Assistenten zum Durchlesen, Kommentieren und Korrigieren. Aus diesem Grund sind nur sehr wenige handgeschriebene Aufzeichnungen von Brauner vorhanden. Abbildung 6 zeigt ein Manuskript aus dem Jahre 1986, in dem er sich mit den Derivationen des komplexen Zahlkörpers beschäftigte. Er hat darüber aber nichts publiziert.

Umgekehrt nahm sich aber Brauner auch immer sehr viel Zeit, um die Artikel seiner Mitarbeiter gewissenhaft zu studieren und zu verbessern. So manches meiner Manuskripte war kaum mehr zu erkennen, nachdem es Brauner gelesen und – wie immer mit Bleistift – seine Anmerkungen angebracht hatte. Seine Kritik bezog sich dabei primär auf den mathematischen Inhalt, wo er bei anderen dieselben strengen Maßstäbe ansetzte wie bei sich selbst. Er markierte aber prinzipiell alles, was ihm falsch erschien. Oft formulierte er seine Bemerkungen zusätzlich sehr pointiert, aber niemals unhöflich, im persönlichen Gespräch. So war etwa sein trockener Kommentar, nachdem er das erste Kapitel meiner Dissertation gelesen hatte: „Herr Havlicek, ihre Beistrichsetzung möchte ich nicht haben!“

Brauner legte immer allergrößten Wert auf wissenschaftliche Gespräche mit seinen Mitarbeitern. So knapp konnte seine Zeit gar nicht bemessen sein, dass er dafür nicht ein paar Minuten erübrigen konnte. Und so manche Unterredung hat dann deutlich länger gedauert, als ursprünglich geplant war. So sprachen wir einmal sicher für mehr als eine halbe Stunde – auch wenn es unglaublich klingen mag – über die *leere Menge*.

Selbstverständlich hat Brauner seine Forschungsergebnisse auf Tagungen prä-

1) $(x+yi)f = xf + yf(i)$ d.h. er genügt $f \in \mathbb{R}$ und if zu bekommen. $\text{Re } f \in \mathbb{R} \neq \mathbb{R}!$

2) $f(0)=0, f(1)=1 \Rightarrow f(u)=u, u \cdot \frac{1}{u} = 1 \Rightarrow uf(\frac{1}{u}) = 1 \Rightarrow f(\frac{1}{u}) = \frac{1}{u}$
 $f \in \mathbb{R} = \text{id}_{\mathbb{R}}$

3) $f \in \mathbb{C} := g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $x \in \mathbb{R} \mapsto xg = \text{Re}(xg) + \text{Im}(xg)i = x\psi + y\psi i$
 $\psi: x \mapsto \text{Re}(xg)$
 $\psi: x \mapsto \text{Im}(xg)$
 $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$(x+y)g = xg + yg \Rightarrow x\psi + y\psi + (x\psi + y\psi)i \Rightarrow$

$$\begin{aligned} (x+y)\psi &= x\psi + y\psi \\ (x+y)\psi i &= x\psi i + y\psi i \end{aligned}$$

$(x+y)g = xg + yg = (x\psi + y\psi) + (x\psi i + y\psi i) = x\psi + y\psi + (x\psi i + y\psi i)$

$(x+y)g = xg + yg = (x\psi + y\psi) + (x\psi i + y\psi i) = x\psi + y\psi + (x\psi i + y\psi i)$

$$\begin{aligned} (x+y)\psi &= x\psi + y\psi \\ (x+y)\psi i &= x\psi i + y\psi i \end{aligned}$$

1. Problem: 2 Vektoren $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- 1) $\varphi\psi = 0 \quad g \in \mathbb{R}$
- 2) $\varphi\psi = 0$
- 3) $(x+y)\varphi = x\varphi + y\varphi$
- 3) $(x+y)\psi = x\psi + y\psi$
- 3) $(x+y)\varphi = (x\varphi) + (y\varphi) - (x\psi)(y\psi)$
- 3) $(x+y)\psi = (x\psi) + (y\psi) + (x\psi)(y\psi)$

folgendes:

A) φ ist die lineare Abb., also $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, also $\text{id}_{\mathbb{R}}$

B) $(-x)\varphi = -(x\varphi), (-x)\psi = -(x\psi)$... symmetrisch eine Verknüpfung mit $(\varphi\psi) + (\psi\varphi)$

C) $(x^2)\varphi = (x\varphi)(x\varphi) - (x\psi)(x\psi)$
 $(x^2)\psi = (x\psi)(x\psi) + (x\varphi)(x\varphi)$

$x = \sqrt{2}; \quad \psi = (\sqrt{2}\varphi)^2, \quad 0 = 2(\sqrt{2}\varphi)(\sqrt{2}\psi) \Rightarrow \sqrt{2}\psi = 0$

also $\sqrt{2}\varphi = \sqrt{2}, \quad \sqrt{2}\psi = 0$

$x = \sqrt{2}; \quad \psi = (\sqrt{2}\varphi)^2 - (\sqrt{2}\psi)^2$
 $0 = 2(\sqrt{2}\varphi)(\sqrt{2}\psi)$ ergibt 3)

D) $(z_1+z_2)f = z_1f + z_2f = x\varphi + y\psi + (x\psi i + y\psi i) + [y\varphi + (y\psi i)](k_0 + i_0) =$
 $\stackrel{\text{ob/}i_0}{\text{ob/}k_0} = x\varphi + y\psi + k_0 - y\psi i_0 + (x\psi + y\psi i_0 + y\psi i_0) i$

$(z_1+z_2)f = z_1f + z_2f:$
 $(x_1+y_1)\varphi + (x_2+y_2)\psi + (x_1+y_1)\psi i_0 + (x_2+y_2)\psi i_0 + (y_1+y_2)\varphi + (y_1+y_2)\psi i_0 + (y_1+y_2)\psi i_0 =$
 $x_1\varphi + y_1\psi + x_2\varphi + y_2\psi + (x_1+y_1)\psi i_0 + (x_2+y_2)\psi i_0 + (y_1+y_2)\varphi + (y_1+y_2)\psi i_0 + (y_1+y_2)\psi i_0$

$(z_1+z_2)f = z_1f + z_2f$

Abbildung 6: Ein von Brauner verfasstes Manuskript



Abbildung 7: Vortrag im Stift Rein 1983

sentiert. Alles das, was ich zuvor über seine Vorlesungen angemerkt habe, trifft auch auf den Stil seiner Vorträge zu. Die Abbildungen 7 und 8 zeigen ihn beim *Zweiten Österreichischen Geometrie-Kolloquium*, welches im Mai 1983 im Stift Rein stattfand. Er sprach damals über den *Satz von Pohlke im n -dimensionalen euklidischen Raum*.

Brauners sehr breit gestreutes wissenschaftliches Werk hat Walter Wunderlich in seinem Nachruf [3] ausführlich gewürdigt. Im Anhang 1 zu diesem Artikel ist ein Schriftenverzeichnis so wiedergegeben, wie es Brauner selbst geführt hat. Es umfasst einundneunzig Arbeiten.

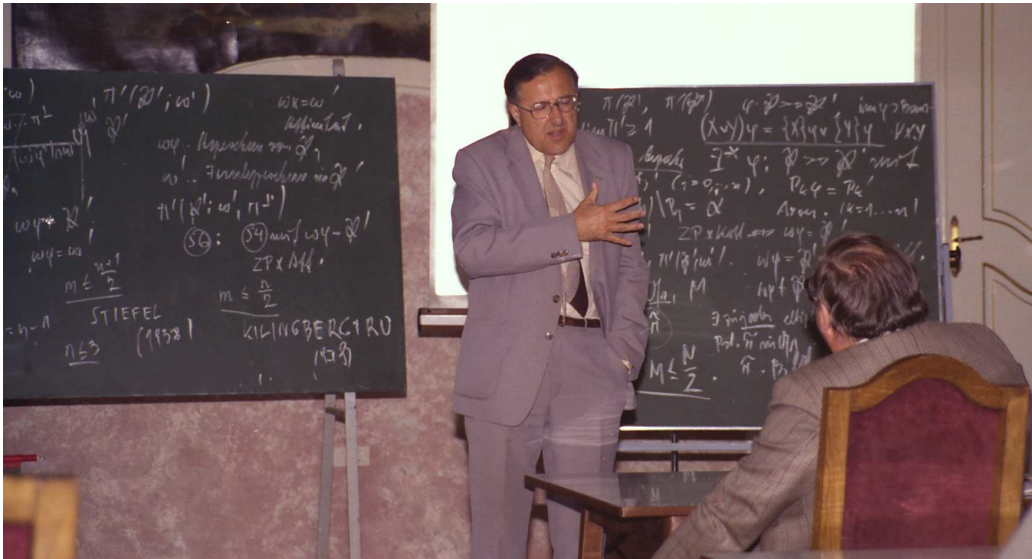


Abbildung 8: Vortrag im Stift Rein 1983

4 Schlussbemerkungen

Es gäbe noch viel zu berichten, etwa über die zwanzig von Brauner betreuten Dissertationen (vgl. dazu den Anhang 2) und die wohl mehr als einhundert von ihm vergebenen Haus- und Diplomarbeiten, über welche es allerdings keine vollständigen schriftlichen Aufzeichnungen geben dürfte.

Neben seinen Aktivitäten in der universitären Lehre und Forschung galt sein großes Engagement insbesondere dem Unterrichtsfach *Darstellende Geometrie*, und zwar in inhaltlicher, didaktischer und fachpolitischer Hinsicht. Auch dieser Aspekt muss hier leider ausgeklammert bleiben.

Hingegen möchte ich zum Abschluss die große Hilfsbereitschaft Brauners in großen wie in kleinen Dingen erwähnen. Dazu sei eine der Situationen geschildert, in denen mir Brauner entscheidend geholfen hat:

Zum Ende meines Studiums hatte ich Brauner als Prüfer für die mündliche Lehramtsprüfung aus Darstellender Geometrie gewählt. Aber genau eine Woche vor dieser Prüfung hätte ich eine Truppenübung beim österreichischen Bundesheer absolvieren müssen. Ich stellte einen Antrag auf Aufschub der Einberufung und gab als Begründung an, dass ich mich in Ruhe auf mei-

ne Abschlussprüfung vorbereiten müsste. Mein Antrag wurde abgelehnt, da keine Terminkollision vorlag. Einer meiner Studienkollegen, dem Brauner in anderem Zusammenhang erfolgreich geholfen hatte, empfahl mir, in Brauners Sprechstunde zu gehen. Ich folgte seinem Rat und schilderte Brauner mein Problem. Dieser setzte einfach eine „Vorprüfung“ mitten im Zeitraum der Truppenübung an und verfasste eine Bestätigung darüber. Mit diesem Schreiben legte ich erfolgreich Berufung gegen die Entscheidung der ersten Instanz ein.

Damit bin ich am Ende meiner Ausführungen angelangt. Im Mittelpunkt standen meine ganz persönlichen Erinnerungen an den Menschen Heinrich Brauner, seine Eigenschaften, Wesensmerkmale und Leistungen. Wer mehr erfahren möchte, dem seien neben seinem wissenschaftlichen Werk (vgl. das Schriftenverzeichnis im Anhang 1) auch der Artikel [1], die Ausarbeitung seiner Wiener Antrittsvorlesung vom 28. Jänner 1970 [2] und der schon erwähnte Nachruf [3] wärmstens ans Herz gelegt.

Anhang 1: Publikationen von H. Brauner

1. Orthogonalsysteme von Riemannschen Hyperflächen der Klasse 1. *Anz. Öster. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.* **88** (1951). 29–36.
2. Kongruente Verlagerung kollinearere Räume in axiale Lage. *Monatsh. Math.* **57** (1953). 75–87.
3. Kongruente Verlagerung kollinearere Räume in halbaxiale Lage. *Monatsh. Math.* **58** (1954). 13–26.
4. Quadriken als Bewegflächen. *Monatsh. Math.* **59** (1955). 45–63.
5. Erzeugung eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides durch Bewegung einer gleichseitigen Hyperbel. *Arch. Math. (Basel)* **6** (1955). 330–334.
6. Geodätische Falllinien einer Geländefläche. *Anz. Öster. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.* **92** (1955). 171–175.
7. Über die Projektion mittels der Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung. *Monatsh. Math.* **59** (1955), 258–273.
8. Über die ähnlichen und sich ähnlich projizierenden Kegelschnitte auf Quadriken. *Arch. Math. (Basel)* **7** (1956), 78–86.
9. Konstruktive Durchführung der durch die Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung vermittelten Abbildung des Raumes auf eine Ebene. *Monatsh. Math.* **60** (1956), 231–248.

10. Die automorphen involutorischen Korrelationen koaxialer projektiver Schraubungen (mit Rudolf Bereis). *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. S.-B. II.* **165** (1956), 327–355.
11. Über Mannigfaltigkeiten von Strahlen mit kongruenten Netzrissen. *Arch. Math. (Basel)* **7** (1957), 406–416.
12. Über koaxiale euklidische Schraubungen (mit Rudolf Bereis). *Monatsh. Math.* **61** (1957), 225–245.
13. Schraubung und Netzprojektion. *Elem. Math.* **12** (1957). 33–41.
14. Eine Verallgemeinerung der Zyklographie. *Arch. Math. (Basel)* **9** (1958), 470–480.
15. Über die durch einen quadratischen Komplex der Charakteristik (11)(112) vermittelte Projektion I. *Monatsh. Math.* **62** (1958), 119–131.
16. Über die durch einen quadratischen Komplex der Charakteristik (11)(112) vermittelte Projektion II. *Monatsh. Math.* **62** (1958), 132–145.
17. Bestimmung einer Strahlfläche aus ihren sphärischen Bildern. *Anz. Öster. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.* **95** (1958). 103–107.
18. Über Strahlflächen von konstantem Drall. *Monatsh. Math.* **63** (1959), 101–111.
19. Die dualen Gegenstücke zu flächentheoretischen Sätzen von O. Bonnet und E. Beltrami. *Anz. Öster. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.* **96** (1959), 194–200.
20. Eine Verallgemeinerung des Problems der Cesàrokurven. *Math. Ann.* **138** (1959), 27–41.
21. Beiträge zur Theorie des mit einer euklidischen Schraubung verknüpften kubischen Nullsystems (mit Rudolf Bereis). *Math. Nachr.* **20** (1959), 239–258.
22. Die Strahlfläche 3. Grades mit konstantem Drall. *Monatsh. Math.* **64** (1960), 101–109.
23. Erweiterung des Begriffes Drall auf Mongesche Flächen. *Anz. Öster. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.* **97** (1960). 139–144.
24. Die konstant gedrahlte Netzfläche 4. Grades. *Monatsh. Math.* **65** (1961), 53–73.
25. Eine einheitliche Erzeugung konstant gedrahlter Strahlflächen. *Monatsh. Math.* **65** (1961), 301–314.
26. Die verallgemeinerten Böschungsflächen. *Math. Ann.* **143** (1961), 431–439.
27. Die Affinnormalen der Tangentialschnitte einer Fläche. *Anz. Öster. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.* **99** (1962). 9–14.
28. Eine Scherungsinvariante der Strahlflächen. *Monatsh. Math.* **66** (1962), 105–109.
29. Die konstant gedrahlten windschiefen Flächen 4. Grades mit reduzibler Fernkurve. *Math. Z.* **82** (1963), 420–433.

30. Die windschiefen Flächen konstanter konischer Krümmung. *Math. Ann.* **152** (1963), 257–270.
31. Geometrie auf der Cayleyschen Fläche. *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. II* **173** (1964), 93–128.
32. Kreisgeometrie in der isotropen Ebene. *Monatsh. Math.* **69** (1965), 105–128.
33. Die quadratischen Strahlkomplexe der Charakteristik (321). *Math. Z.* **88** (1965), 320–357.
34. Geometrie des zweifach isotropen Raumes. I. Bewegungen und kugeltreue Transformationen. *J. Reine Angew. Math.* **224** (1966), 118–146.
35. Die Flächen mit einem kinematischen Netz aus Schmieglinien (mit Hermann Schaal). *Arch. Math. (Basel)* **18** (1967), 91–99.
36. Geometrie des zweifach isotropen Raumes II. Differentialgeometrie der Kurven und windschiefen Flächen. *J. Reine Angew. Math.* **226** (1967), 132–158.
37. Die algebraischen windschiefen Gesimsflächen. *Monatsh. Math.* **71** (1967), 300–318.
38. Geometrie des zweifach isotropen Raumes III. Flächentheorie. *J. Reine Angew. Math.* **228** (1967), 38–70.
39. *Differentialgeometrie*. Universität Stuttgart, Stuttgart 1967. vi+127 Seiten.
40. Neuere Untersuchungen über windschiefe Flächen: Ein Bericht. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **70** (1967) Heft 2, Abt. 1, 61–85.
41. *Analytische Geometrie I*. Universität Stuttgart, Stuttgart 1967. vi+114 Seiten.
42. Die algebraischen windschiefen Flächen mit einer stetigen Schar ebener Schattengrenzen. *Math. Ann.* **176** (1968), 1–14.
43. *Analytische Geometrie II*. Universität Stuttgart, Stuttgart 1968. iv+90 Seiten.
44. *Analytische Geometrie III*. Universität Stuttgart, Stuttgart 1968. ii+223 Seiten.
45. Die Flächen mit Böschungslinien als Falllinien. *Monatsh. Math.* **72** (1968), 385–411.
46. Die Flächen mit zwei Scharen konstant geböschter Schmieglinien (mit Hermann Schaal). *Arch. Math. (Basel)* **20** (1969), 81–87.
47. Die windschiefen Kegelschnittflächen. *Math. Ann.* **183** (1969), 33–44.
48. Die Flächen, welche stetige Scharen ebener geodätischer Linien tragen. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **71** (1969), Heft 3, Abt. 1, 160–166.
49. *Differentialgeometrie*. Universität Stuttgart, Stuttgart 1969. ii+336 Seiten.
50. *Riemannsche Geometrie*. Universität Stuttgart, Stuttgart 1969. 136 Seiten.

51. Gedanken über Geometrie. *Antrittsvorlesungen der Technischen Hochschule Wien* **12**. Verlag der Technischen Hochschule Wien, Wien 1970. 11 Seiten.
52. Differentialgeometrie ebener Kurven. *Wiss. Nachrichten* **26** (1971), 21–24.
53. Eine geometrische Kennzeichnung linearer Abbildungen. *Monatsh. Math.* **77** (1973), 10–20.
54. Abbildungsmethoden der konstruktiven Geometrie. 7. Steiermärkisches Mathematisches Symposium (Graz, 1975), *Ber. Math.-Statist. Sektion, Forschungszentrum Graz* Nr. **38** (1975). 11 Seiten.
55. *Geometrie projektiver Räume I*. Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich 1976. x+225 Seiten. (ISBN 10: 3-411-01512-8).
56. *Geometrie projektiver Räume II*. Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich 1976. viii+250 Seiten. (ISBN 10: 3-411-01513-6).
57. *Baugeometrie I* (mit Walter Kickingger). 1. Auflage. Wiesbaden-Berlin, Bauverlag 1977. 88 Seiten. (ISBN 10: 3-762-50825-9).
58. Über schmieglintreue Isometrien. *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II* **188** (1979), no. 1–3, 15–21.
59. Die erzeugendentreuen konformen Abbildungen aus Regelflächen. *Arch. Math. (Basel)* **33** (1979/80), no. 5, 470–477.
60. *Geometrija u Graditeljstvu* (mit Walter Kickingger), Školska knjiga, Zagreb 1980. 156 Seiten. (Übersetzung von *Baugeometrie I*, in kroatischer Sprache).
61. Abbildungen aus Regelflächen. 12. Steiermärkisches Mathematisches Symposium (Graz, 1980), *Ber. Math.-Statist. Sektion, Forschungszentrum Graz* Nr. **140** (1980). 14 Seiten.
62. *Differentialgeometrie*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1981. xvii+424 Seiten. (ISBN 10: 3-528-03809-8).
63. Gedanken zum Unterricht in Darstellender Geometrie. *ÖMG Didaktik-Reihe* **6** (1981). 76 Seiten.
64. Darstellende Geometrie im Schulunterricht. *Mathematikunterr.* **27** (3), (1981), 5–68.
65. Die flächentreuen Abbildungen aus Regelflächen, bei denen die Erzeugenden geradlinig bleiben. *Arch. Math. (Basel)* **38** (1982), no. 2, 102–105.
66. *Baugeometrie II* (mit Walter Kickingger). Wiesbaden-Berlin, Bauverlag 1982. 89 Seiten. (ISBN 10: 3-7625-0927-1).
67. Gebaute Geometrie. Beispiele aus dem Bauwesen für den Schulunterricht der Darstellenden Geometrie (mit Walter Kickingger). *Mathematikunterr.* **28** (2) (1982), 5–28.

68. Zur Theorie linearer Abbildungen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **53** (1983), 154–169.
69. Die windschiefen Flächen mit Böschungsschmieglinien. *Anz. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl.* **121** (1984), 125–127 (1985).
70. Zur theoretischen Begründung der Darstellenden Geometrie. *Ber. Math.-Statist. Sektion, Forschungszentrum Graz* Nr. **227** (1985). 2 Seiten.
71. Zur Methodik der Darstellenden Geometrie I. Die konstruktive Behandlung der Ebene. *Informationsblätter Darstellende Geometrie* (Univ. Innsbruck) **4** (1), (1985), 11–17.
72. Die erzeugendentreuen geodätischen Abbildungen aus Regelflächen. *Monatsh. Math.* **99** (1985), no. 2, 85–103.
73. Zur Methodik der Darstellenden Geometrie II. Der Anfangsunterricht. *Informationsblätter Darstellende Geometrie* (Univ. Innsbruck) **4** (2), (1985), 15–24.
74. Lineare Abbildungen aus euklidischen Räumen. *Beiträge Algebra Geom.* **21** (1986), 5–26.
75. Die verallgemeinerten Böschungsflächen mit Böschungsschmieglinien. *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II* **194** (1985), no. 1–3, 55–61.
76. Zur Methodik der Darstellenden Geometrie III. Lösung stereometrischer Aufgaben mit Hilfe von Normalprojektionen. *Informationsblätter Darstellende Geometrie* (Univ. Innsbruck) **5** (1), (1986), 7–13.
77. *Lehrbuch der konstruktiven Geometrie*. Wien, Springer, 1986. 384 Seiten. (ISBN 10: 3-211-81833-2).
78. Zur Methodik der darstellenden Geometrie IV. Parallelriß einer Ellipse. *Informationsblätter Darstellende Geometrie* (Univ. Innsbruck) **5** (2) (1986), 11–16.
79. Eine Kennzeichnung der Minimalflächen von G. Thomsen. *Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet.* no. **435**, (1988), 1–15.
80. Zum Satz von K. Pohlke in n -dimensionalen euklidischen Räumen. *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II* **195** (1986), no. 8–10, 585–591.
81. Zur Methodik der darstellenden Geometrie V. Methodische Miniaturen. *Informationsblätter Darstellende Geometrie* (Univ. Innsbruck) **6** (1) (1987), 13–20.
82. Darstellende Geometrie an der AHS – ein Unterrichtsgegenstand im Wandel. *Informationsblätter Darstellende Geometrie* (Univ. Innsbruck) **6** (1) (1987), 3–10.
83. Zur Methodik der darstellenden Geometrie VI. Der Unterrichtsgegenstand Darstellende Geometrie im Zeitalter des Computers. *Informationsblätter Darstellende Geometrie* (Univ. Innsbruck) **6** (2) (1987), 11–18.

84. Die Drehflächen mit Böschungsschmieglinien. *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II* **196** (1987), no. 4–7, 217–226.
85. Zur Methodik der darstellenden Geometrie VII. Abbildungen im Unterricht der darstellenden Geometrie, Teil 1. *Informationsblätter Darstellende Geometrie* (Univ. Innsbruck) **7** (1), (1988), 7–16.
86. Eine Kennzeichnung der Ähnlichkeiten affiner Räume mit definiter Orthogonalitätsstruktur. *Geom. Dedicata* **29** (1989), no. 1, 45–51.
87. Zur Methodik der darstellenden Geometrie VIII. Abbildungen im Unterricht der Darstellenden Geometrie, Teil 2, Abbildungsgleichungen zur Herstellung von Rissen. *Informationsblätter Darstellende Geometrie* (Univ. Innsbruck) **7** (2), (1988), 13–22.
88. Über die von Kollineationen projektiver Räume induzierten Geradenabbildungen. *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II* **197** (1988), no. 4–7, 327–332.
89. Zur Methodik der Darstellenden Geometrie IX. Abbildungen im Unterricht der Darstellenden Geometrie, Teil 3. *Informationsblätter Darstellende Geometrie* (Univ. Innsbruck) **8** (1) (1989), 5–14.
90. *Baugeometrie I* (mit Walter Kickingger). 2. Auflage. Wiesbaden Berlin, Bauverlag 1989. 91 Seiten. (ISBN 10: 3-762-52690-7).
91. Die Schraubflächen und die Spiralfächen mit Böschungsschmieglinien. *Glas. Mat. Ser. III* **25** (45) (1990), no. 1, 157–165.

Anhang 2: Dissertationen (Betreuer und Erstgutachter H. Brauner)

1. Oswald Giering: *Bestimmung von Eibereichen und Eikörpern durch Steiner-Symmetrisierungen*. Technische Hochschule Stuttgart 1962.
Erschienen in: *Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss. München* (1962), 225–253.
2. Wolfgang Jenne: *Eine natürliche Affingeometrie der Strahlflächen*. Technische Hochschule Stuttgart, 1964.
Erschienen in: *Math. Zeitschr.* **83** (1964), 214–237.
3. Gerd Blind: *Ebene Lagerungen von Kreisen, deren Radien nicht sehr verschieden sind*. Technische Hochschule Stuttgart 1966. 42 Seiten.
4. Heinrich Wölpert: *Transformationstheorie der quadratischen Strahlkomplexe der Charakteristik [(33)]*. Technische Hochschule Stuttgart 1967.

5. Richard Koch: *Geometrien mit einer Cayleyschen Fläche dritten Grades als absolutem Gebilde*. Universität Stuttgart (Technische Hochschule) 1968. 132 Seiten.
6. Manfred Oehler: *Axiomatisierung der Geometrie auf der Cayley'schen Fläche*. Universität Stuttgart (Technische Hochschule) 1969. 71 Seiten.
7. Lothar Profke: *Kongruente Verlagerung projektiver Ebenen in Grenzlage*. Universität Stuttgart 1969. 97 Seiten.
8. Gunther Rösler: *Zur Differentialgeometrie des Flächenelementes dritter Ordnung*. Universität Stuttgart 1969. 44 Seiten.
9. Siegfried Grüner: *Zur Differentialgeometrie der isotropen Möbiusebene*. Universität Stuttgart 1970. 95 Seiten.
10. Kurt Peter Müller: *Zur Geometrie der symplektischen Gruppe im reellen dreidimensionalen projektiven Raum*. Universität Stuttgart 1970. 63 Seiten.
11. Georg Kronhuber: *Regelflächen im zentroaffinen Raum*. Technische Hochschule Wien 1972. 52 Seiten.
12. Gunter Weiß: *Über die Striktionslinie reeller analytischer windschiefer Flächen*. Technische Hochschule Wien 1973.
13. Rolf Riesinger: *Verallgemeinerte zirkulare und verallgemeinerte zyklische quadratische Komplexe*. Technische Hochschule Wien 1973. 114 Seiten.
14. Hans-Peter Paukowitsch: *Differentialgeometrie der Kurven bezüglich der Scherungsgruppe in n -dimensionalen reellen affinen Räumen*. Technische Hochschule Wien, 1975. 54 Seiten.
15. Friedrich Anzböck: *Eine durch das Kleinsche Übertragungsprinzip vermittelte projektive Differentialgeometrie der windschiefen Flächen*. Technische Hochschule Wien 1976, 87 Seiten.
Erschienen in: *J. Reine Angew. Math.* **299/300** (1978), 92–112.
16. Herbert Fritsche: *Eine geometrische Kennzeichnung der linearen Abbildungen der Geraden des projektiven, dreidimensionalen Raumes in eine projektive Ebene*. Technische Universität Wien 1978. 56 Seiten.
17. Hans Havlicek: *Lineare Abbildungen aus Graßmann-Räumen*. Technische Universität Wien 1980. 100 Seiten.
Erschienen als: Zur Theorie linearer Abbildungen I, II. *J. Geom.* **16** (1981), 152–167, 168–180.
18. Friedrich Manhart: *Zur relativen Differentialgeometrie der Hyperflächen*. Technische Universität Wien 1982. 68 Seiten.
19. Ingrid Muhr: *Flächen mit konstant geböschten Schmieglinien*. Technische Universität Wien 1983. 34 Seiten.

20. Andreas Asperl: *Zweifach Blutelsche Kegelschnittsflächen des projektiven dreidimensionalen Raumes*. Technische Universität Wien 1990. 93 Seiten.¹

Anhang 3: Dissertationen (Zweitgutachter H. Brauner)

1. Hubert Bitzel: *Zur Konstruktion von übertragungsgünstigen, ebenen Kurvengetrieben mit schwingendem oder umlaufendem Abtriebsglied*. Technische Hochschule Stuttgart 1969. 80 Seiten. Erstgutachter: J. Jehlicka.
2. Gunther Petersch: *Algebraische Raumkurven vierter Ordnung mit fester Hauptnormalenneigung*. Technische Hochschule Wien 1974. 67 Seiten. Erstgutachter: Walter Wunderlich.
3. Günter Eigenthaler: *Zur Theorie der Polynome und Polynomfunktionen*. Technische Hochschule Wien 1975. 93 Seiten. Erstgutachter: Winfried Nöbauer.
4. Maximilian Kreuzer: *Eichunabhängige Schwelleneffekte bei vereinheitlichten Theorien der starken, schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkungen*. Technische Universität Wien 1986, 109 Seiten. Erstgutachter: Wolfgang Kummer.
5. Hartwig Sorger: *Eigenschaftengrenzen konvexer Körper und Verwandtes*. Technische Universität Wien 1987, 68 Seiten. Erstgutachter: Peter M. Gruber.
6. Peter Grandits: *C-Diskrepanz von Flächen im Raum*. Technische Universität Wien 1990, 71 Seiten. Erstgutachter: Rudolf Taschner.

¹Andreas Asperl stellte seine von Heinrich Brauner betreute Dissertation einen Monat nach dessen Ableben fertig. Erstgutachter war Gunter Weiß.

Literaturverzeichnis

- [1] Österreichische Gelehrte im Ausland, Heinrich Brauner / Mathematik, Stuttgart. *Österreichische Hochschulzeitung*, Ausgabe vom 15. Mai 1967.
- [2] H. Brauner. Gedanken über Geometrie. *Antrittsvorlesungen der Technischen Hochschule Wien* **12**, Verlag der Technischen Hochschule Wien, Wien 1970.
- [3] W. Wunderlich. Heinrich Brauner (Nachruf). *Almanach der Österreichischen Akademie der Wissenschaften* **140** (1990), 341–349.

Hans Havlicek

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie

Technische Universität Wien

Wiedner Hauptstraße 8–10, A-1040 Wien, Austria

havlicek@geometrie.tuwien.ac.at

Proc. 33. Süddeutsches Differentialgeometrie-Kolloquium
Wien, 23. Mai 2008
pp. 35 – 57
ISBN 978-3-902233-04-2

Main Theorem on Planar Parallel Manipulators with Cylindrical Singularity Surface

GEORG NAWRATIL

Abstract: In this article we prove that there do not exist non-architecturally singular Stewart Gough Platforms with planar base and platform and no four anchor points collinear, whose singularity set for any orientation of the platform is a cylindrical surface with rulings parallel to a given fixed direction p in the space of translations.

Key Words: *Stewart Gough Platform, planar parallel manipulator, cylindrical singularity surface, architecture singular manipulators*

1 Introduction

The geometry of the parallel manipulator is given by the six base anchor points $\mathbf{M}_i := (A_i, B_i, C_i)^T$ in the fixed space and by the six platform anchor points $\mathbf{m}_i := (a_i, b_i, c_i)^T$ in the moving space. By using Euler Parameters (e_0, e_1, e_2, e_3) for the parametrization of the spherical motion group the coordinates \mathbf{m}'_i of the platform anchor points with respect to the fixed space can

be written as $\mathbf{m}'_i = K^{-1}\mathbf{R}\cdot\mathbf{m}_i + \mathbf{t}$ with

$$\mathbf{R} := (r_{ij}) = \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & 2(e_1e_3 - e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 - e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 + e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 + e_0e_2) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

the translation vector $\mathbf{t} := (t_1, t_2, t_3)^T$ and $K := e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$. Moreover it should be noted that K is used as homogenizing factor whenever it is suitable.

It is well known (see e.g. [4]) that the set of singular configurations is given by $Q := \det(\mathbf{Q}) = 0$, where the i^{th} row of the 6×6 matrix \mathbf{Q} equals the Plücker coordinates $(\mathbf{l}_i, \widehat{\mathbf{l}}_i) := (\mathbf{R}\cdot\mathbf{m}_i + \mathbf{t} - K\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_i \times \mathbf{l}_i)$ of the carrier line of the i^{th} leg.

As we consider only manipulators with planar platform we may suppose $C_i = c_i = 0$ for $i = 1, \dots, 6$. Moreover it was proven by Karger in [2] that for planar parallel manipulators with no four points on a line we can assume $A_1 = B_1 = B_2 = a_1 = b_1 = b_2 = 0$ and $A_2B_3B_4B_5a_2(a_4 - a_3)\text{coll}(3, 4, 5) \neq 0$ with

$$\text{coll}(i, j, k) := a_i(b_j - b_k) + a_j(b_k - b_i) + a_k(b_i - b_j). \quad (2)$$

$\text{coll}(i, j, k) = 0$ characterizes collinear platform anchor points $\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_j$ and \mathbf{m}_k .

2 Preliminary Considerations

The set of Stewart Gough Platforms whose singularity set for any orientation is a cylindrical surface with rulings parallel to a given direction p also contains the set of architecturally singular manipulators. This is due to the fact that the singularity surface of these manipulators equals the whole space of translations for any orientation.

It can easily be seen from the following example that the above two sets are distinct:

The non-planar manipulator determined by $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2$, $\mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_4$, $\mathbf{m}_5 = \mathbf{m}_6$ and $\overline{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2} \parallel \overline{\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4} \parallel \overline{\mathbf{M}_5\mathbf{M}_6} \parallel p$ has for any orientation of the platform a cylindrical surface with rulings parallel to the direction p without being

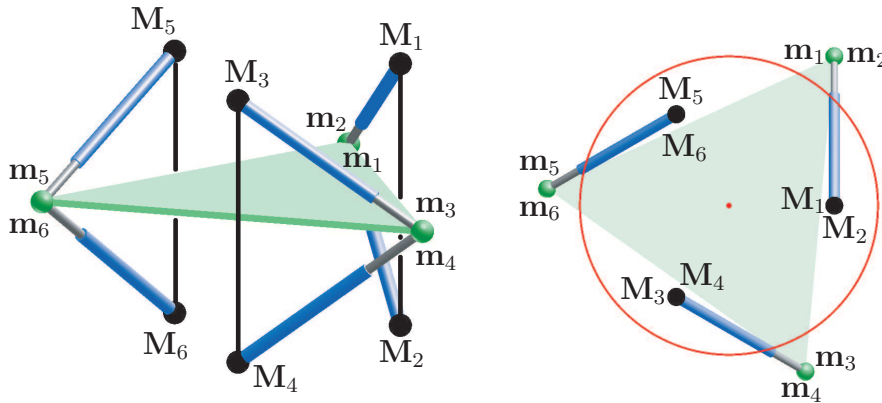


Figure 1: Non-planar manipulator with cylindrical singularity surface: (a) Axonometric view. (b) Projection in direction p : The singularity surface (with respect to the barycenter of the platform) is displayed as conic.

architecturally singular (see Fig. 1). This manipulator is in a singular configuration if and only if the three planes $[\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{m}_1]$, $[\mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4, \mathbf{m}_3]$ and $[\mathbf{M}_5, \mathbf{M}_6, \mathbf{m}_5]$ have a common intersection line.

As the direct kinematics of this manipulator can be put down to that of a 3-dof RPR parallel manipulator, a rational parametrization of its singularity surface according to [1] can be given. The singularity surface is a quadratic cylinder due to the singular affine correspondence between the base and the platform (cf. [3]).

Moreover, if $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_6$ are coplanar we get an example for a planar parallel manipulator with this property. Now the question arises, whether there exist non-architecturally singular planar manipulators with no four anchor points on a line possessing such a singularity surface. In the following section we prove that such manipulators do not exist.

3 The Main Theorem and its Proof

Theorem *The set of planar parallel manipulators with no four anchor points on a line which posses a cylindrical singularity surface with rulings parallel to a given fixed direction p for any orientation of the platform equals the set of planar architecture singular manipulators (with no four anchor points on*

a line).

The analytical proof of this theorem is based on the following idea: We choose a Cartesian frame in the base such that one axis t_i is parallel to the given direction p . Then $Q = 0$ must be independent of t_i for all $e_0, \dots, e_3, t_j, t_k$ with $j \neq k \neq i \neq j$. Our proof is based on the resulting equations and Theorem 1 of [2].

We have to distinguish between two cases, depending on whether the base of the manipulator is parallel to p or not.

Base is not parallel to p :

The proof of the case where the base is orthogonal to p is hidden in the proof of Theorem 1 of [2]. For all other cases the proof was given by the author in [5].

Base is parallel to p :

In this case we take as translation vector $\mathbf{t} := (\cos \phi t_1 - \sin \phi t_2, \sin \phi t_1 + \cos \phi t_2, t_3)^T$. After performing the same elementary operations with the matrix \mathbf{Q} as described on page 1154 of [2], we can replace the sixth row of \mathbf{Q} by

$$(r_{11}K_1 + r_{12}A_2K_2, r_{21}K_1 + r_{22}A_2K_2, r_{31}K_1 + r_{32}A_2K_2, 0, r_{31}A_2K_3 + r_{32}A_2K_4, -r_{21}A_2K_3 - r_{22}A_2K_4)D^{-1} \quad (3)$$

with $D := A_2B_3B_4B_5 \text{coll}(3, 4, 5)$. $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 0$ are the four conditions given in [2] which are satisfied iff a planar manipulator (with no four points on a line) is architecturally singular. We distinguish between the following two cases:

- **M_1M_2 is parallel to p .** The proof of this part can be done by considering only the four equations (12-15) given in [5].
- **M_1M_2 is not parallel to p .** This part of the proof is the primary concern of this paper, because it was too long to be given in [5]. In the cited paper only the two solutions were given which fulfill all equations resulting from the coefficients of t_1 of Q without contradicting

$$A_2B_3B_4B_5a_2(a_4 - a_3)\text{coll}(3, 4, 5)K_2 \sin \phi \neq 0. \quad (4)$$

These two solutions S_1 and S_2 are

$$S_1 : \quad A_i = B_i \cot \phi, \quad A_j = B_j \cot \phi, \quad A_k = A_2 + B_k \cot \phi, \quad (5)$$

$$b_k = 0, \quad a_2 = a_k, \quad a_i = K_1 b_i / (K_2 A_2), \quad a_j = K_1 b_j / (K_2 A_2), \quad (6)$$

$$K_3 = 0 \quad \text{and} \quad K_4 = 0 \quad (7)$$

$$S_2 : \quad A_i = A_2 + B_i \cot \phi, \quad A_j = A_2 + B_j \cot \phi, \quad A_k = B_k \cot \phi, \quad (8)$$

$$a_i = a_2 + b_i K_3 / K_4, \quad a_j = a_2 + b_j K_3 / K_4, \quad a_k = b_k = 0, \quad (9)$$

$$A_2 K_2 + K_4 = 0 \quad \text{and} \quad K_1 + K_3 = 0 \quad (10)$$

for $i, j, k \in \{3, 4, 5\}$ and $i \neq j \neq k \neq i$. In the following we proof that for $K_2 \neq 0$ all coefficients of t_1 can only vanish for the above two given solutions. Moreover we prove that for $K_2 = 0$ all coefficients of t_1 only vanish for architecturally singular manipulators, i.e., $K_1 = K_3 = K_4 = 0$. The proof is split into the following two cases given in subsection 3.1 and 3.2, respectively.

1 $M_1 M_2$ is orthogonal to p

We denote the coefficients of $t_1^i t_2^j t_3^k$ from Q by $Q^{i,j,k}$. From all $Q^{i,j,k}$ with $i > 0$ we can factor out K . From $Q^{1,0,0}$ we can even factor out K^2 .

For this case we set $\phi = \pi/2$ and eliminate t_1 from Q . Now we can additionally factor out $(e_0 e_1 - e_2 e_3)$ of $Q^{2,j,k}$. We denote the coefficient of $e_0^a e_1^b e_2^c e_3^d$ of $Q^{i,j,k}$ by $P_{a,b,c,d}^{i,j,k}$ and compute the following 15 polynomials:

$$P_1[18] := P_{2,2,0,0}^{1,1,1} \quad P_2[42] := P_{1,0,1,0}^{2,0,1} \quad P_3[12] := P_{3,3,0,0}^{1,1,0} \quad (11)$$

$$P_4[42] := P_{2,0,2,0}^{2,0,0} \quad P_5[72] := P_{2,1,1,0}^{2,0,0} \quad (12)$$

$$P_6[36] := P_{3,2,1,0}^{1,0,0} - P_{2,3,0,1}^{1,0,0} - P_{1,0,3,2}^{1,0,0} + P_{0,1,2,3}^{1,0,0} \quad (13)$$

$$P_7[42] := P_{4,1,1,0}^{1,0,1} - P_{1,4,0,1}^{1,0,1} - P_{1,0,4,1}^{1,0,1} + P_{0,1,1,4}^{1,0,1} \quad (14)$$

$$P_8[30] := P_{4,2,0,0}^{1,0,1} + P_{2,4,0,0}^{1,0,1} + P_{0,0,4,2}^{1,0,1} + P_{0,0,2,4}^{1,0,1} \quad (15)$$

$$P_9[30] := P_{4,2,0,0}^{1,0,1} + P_{2,4,0,0}^{1,0,1} - P_{0,0,4,2}^{1,0,1} - P_{0,0,2,4}^{1,0,1} \quad (16)$$

$$P_{10}[18] := P_{2,1,1,0}^{1,1,1} - P_{1,2,0,1}^{1,1,1} \quad P_{11}[42] := P_{3,1,1,1}^{1,0,1} + P_{1,3,1,1}^{1,0,1} \quad (17)$$

$$P_{12}[36] := P_{3,2,1,0}^{1,1,0} - P_{2,3,0,1}^{1,1,0} \quad P_{13}[24] := P_{3,1,2,0}^{1,1,0} - P_{2,0,3,1}^{1,1,0} \quad (18)$$

$$P_{14}[12] := P_{3,3,0,0}^{1,0,0} + P_{0,0,3,3}^{1,0,0} \quad P_{15}[24] := P_{2,1,2,1}^{1,0,0} - P_{1,2,1,2}^{1,0,0} \quad (19)$$

It should be noted that the number in the square brackets denotes the number of terms in the expression. In the first step we compute the resultant of P_3 and P_{14} with respect to A_3 which yields

$$a_2^2 b_3 b_4 b_5 B_3 B_4 B_5 K_2 \text{coll}(3, 4, 5) [K_2(A_4 B_5 - A_5 B_4) + K_4(B_5 - B_4)]. \quad (20)$$

Therefore we have to distinguish between the following three cases:

Case I) $K_2 = 0$

We set K_2 equal to zero and compute P_1 and P_{10} which factor into $K_1 F_1[6]$ and $K_1 F_{10}[6]$, respectively.

Part [A] $K_1 \neq 0$: The resultant of F_1 and F_{10} with respect to B_3 yields

$$b_3 B_4 B_5 \text{coll}(3, 4, 5) (b_4 B_5 - b_5 B_4). \quad (21)$$

(i) $b_3 = 0$ implies $b_4 b_5 \neq 0$. From $P_1 = 0$ we get $B_4 = B_5$. Substituting this into P_{10} yields $K_1 B_3 B_5 \text{coll}(3, 4, 5)$ and therefore a contradiction.

(ii) So we set $b_5 = b_4 B_5 / B_4$ and plug this into P_1 and P_{10} which yields:

$$K_1 B_5 b_4 (B_4 - B_5) (B_4 b_3 - B_3 b_4) \quad \text{and} \quad K_1 B_5 (a_4 - a_5) (B_4 b_3 - B_3 b_4). \quad (22)$$

If we set $a_4 = a_5$ and $B_4 = B_5$ we get $b_4 = b_5$ and thus $\text{coll}(3, 4, 5) = 0$, a contradiction. For $b_4 = B_4 b_3 / B_3$ the polynomial P_{14} factors into $a_2 b_3 B_4 B_5 K_4 \text{coll}(3, 4, 5)$ which implies $K_4 = 0$. Now P_8 , which splits into $b_3 B_4 B_5 K_1 \text{coll}(3, 4, 5)$, yields a contradiction.

Part [B] $K_1 = 0$: We compute

$$P_3 = a_2 K_4 F_1, \quad P_8 = a_2 K_4 F_{10}, \quad P_{11} = a_2 K_3 F_1, \quad P_{13} = a_2 K_3 F_{10}, \quad (23)$$

which implies that $K_3 = K_4 = 0$ or $F_1 = F_{10} = 0$ must hold. We assume $K_3 \neq 0$ and $K_4 \neq 0$ and consider again the resultant of F_1 and F_{10} with respect to B_3 given in Eq. (21).

(i) For $b_3 = 0$ we get $B_4 = B_5$ from $P_3 = 0$. Substituting this into P_8 and P_{13} yields $a_2B_3B_5K_4coll(3, 4, 5)$ and $a_2B_3B_5K_3coll(3, 4, 5)$.

(ii) If we plug $b_5 = b_4B_5/B_4$ into $P_3 = 0$, $P_8 = 0$, $P_{11} = 0$ and $P_{13} = 0$ we see that these equations can only vanish for $b_4 = B_4b_3/B_3$ or $a_4 = a_5$ and $B_4 = B_5$. The later contradicts again $coll(3, 4, 5) \neq 0$. Therefore we set $b_4 = B_4b_3/B_3$ and substitute this into P_{14} and P_{15} which yields $a_2b_3B_3B_5K_4coll(3, 4, 5)$ and $a_2b_3B_3B_5K_3coll(3, 4, 5)$, respectively.

Case II) $b_i = 0$, $K_2 \neq 0$

Without loss of generality we can say $b_3 = 0$, which implies $b_4b_5 \neq 0$. Now P_3 factors into $a_2B_3b_4b_5[K_2(A_4B_5 - A_5B_4) + K_4(B_5 - B_4)]$. From the last factor we compute A_5 . Now the resultant of P_8 and P_1 with respect to A_3 yields $K_2a_2B_3B_4B_5coll(3, 4, 5)R_1$ with

$$R_1 := K_2A_2(a_4b_5B_5 - a_5b_4B_4) + K_1b_4b_5(B_4 - B_5) + K_4a_2(b_5B_5 - b_4B_4). \quad (24)$$

From $R_1 = 0$ we compute a_5 . Then P_1 simplifies to

$$B_5(b_4 - b_5)[K_2B_4(a_2A_3 - a_3A_2) - a_2B_3(K_4 + K_2A_4)]. \quad (25)$$

If $b_4 = b_5$ the equation $P_9 = 0$ can only vanish (w.c.) for $A_4 = -K_4/K_2$. Now $P_8 = 0$ implies $a_3 = a_2A_3/A_2$ and $P_{10} = 0$ yields a contradiction. Therefore we set $a_3 = a_2[K_2(A_3B_4 - A_4B_3) - K_4B_3]/(K_2A_2B_4)$. Now $P_{10} = 0$ can only vanish (w.c.) for $K_2A_2a_4 - K_1b_4 + K_4a_2 = 0$. From this equation we compute a_4 . $P_9 = 0$ implies $A_4 = -K_4/K_2$. Then P_7 factors into $a_2B_3(K_2A_3 + K_4)F_7[8]/(K_2^2A_2)$. As $K_2A_3 + K_4 = 0$ yield $coll(3, 4, 5) = 0$ we set F_7 equal to zero:

Part [A] $K_1K_4 - K_2K_3A_2 \neq 0$: Under this assumption we can compute b_4 from $F_7 = 0$. $P_{12} = 0$ splits into several factor, where only one does not lead to a direct contradiction. From this factor we compute

$$b_5 = a_2[K_2^2A_3B_5(A_2 - A_3) + K_4B_3(K_2A_2 + K_4)]/[B_3(K_1K_4 - K_2K_3A_2)]. \quad (26)$$

Finally $P_6 = 0$ yields a contradiction.

Part [B] $K_1K_4 - K_2K_3A_2 = 0$:

(i) Assuming $K_3 \neq 0$ we can compute A_2 . Now F_7 factors into $a_2K_4^2(B_5 - B_4)(K_1 + K_3)/K_3$.

- Firstly we consider the case $K_1 = -K_3$. Now $P_{12} = 0$ implies $A_3 = 0$ and we get solution S_2 for $\cos \phi = 0$ and $k = 3$.
- $B_4 = B_5, K_1 + K_3 \neq 0$: From $P_{12} = 0$ we compute B_3 as

$$B_3 = K_2 A_3 B_4 (K_2 K_3 A_3 - K_1 K_4) / (K_4^2 (K_1 + K_3)). \quad (27)$$

Plugging this into $P_6 = 0$ yields the contradiction.

(ii) Assuming $K_3 = 0$ yields $K_1 K_4 = 0$.

- We start with $K_4 = 0$. $P_{12} = 0$ can only vanish (w.c.) for $A_2 = A_3$ which yields solution S_1 for $\cos \phi = 0$ and $k = 3$.
- $K_1 = 0, K_4 \neq 0$: We compute P_{13} which factors into

$$a_2^3 K_4 B_3 (K_2 A_2 + K_4) (K_2 A_3 + K_4) (B_4 - B_5) / (K_2^2 A_2^2). \quad (28)$$

$K_2 A_3 + K_4 = 0$ contradicts $\text{coll}(3, 4, 5) \neq 0$.

(α) For $A_2 = -K_4/K_2$ we get from $P_{12} = 0$ the condition $A_3 = 0$. We get solution S_2 for $\cos \phi = 0$ and $k = 3$ with the additional condition $K_1 = 0$.

(β) $B_4 = B_5, K_4 + K_2 A_2 \neq 0$: Now $P_6 = 0$ can only vanish (w.c.) for $A_3 = (K_2 A_2 (B_5 - B_3) - K_4 B_3) / (B_5 K_2)$ or $A_3 = 0$. For both cases we get a contradiction from $P_{12} = 0$.

Case III) $K_2(A_4 B_5 - A_5 B_4) + K_4(B_5 - B_4) = 0, b_3 b_4 b_5 K_2 \neq 0$

From the above condition and $P_3 = 0$ we compute A_3 and A_4 as

$$A_i = [K_2 B_i A_5 + K_4 (B_i - B_5)] / (K_2 B_5) \quad \text{for } i = 3, 4. \quad (29)$$

In the next step we calculate the resultant of P_1 and P_{10} with respect to a_2 which yields $B_3 B_4 B_5 \text{coll}(3, 4, 5) K_4 R_2 [12]$.

Part [A] $K_4 = 0$: Now P_9 equals $K_2 A_2 B_3 B_4 A_5 \text{coll}(3, 4, 5)$ which implies $A_5 = 0$. Then P_2 simplifies to $A_2 K_3 F_2$ with

$$F_2 := B_3 (a_5 b_4 - a_4 b_5) + B_4 (a_3 b_5 - a_5 b_3) + B_5 (a_4 b_3 - a_3 b_4). \quad (30)$$

(i) $F_2 = 0$:

- If we assume $b_4B_5 - b_5B_4 \neq 0$ we can compute a_3 from F_2 . Now the polynomials P_4 and P_5 factors into

$$K_3A_2(a_4b_5 - a_5b_4)F_4[8] \quad \text{and} \quad K_3A_2(a_4b_5 - a_5b_4)F_5[6], \quad (31)$$

respectively. The factor $a_4b_5 - a_5b_4 = 0$ implies $coll(3, 4, 5) = 0$.

(α) Therefore we assume $K_3 \neq 0$ and compute the resultant of F_4 and F_5 with respect to B_3 , which yields

$$b_3B_4B_5(B_4 - B_5)(b_3 - b_4)(b_4B_5 - b_5B_4)(b_5 - b_3)(a_4b_5 - a_5b_4). \quad (32)$$

For the cases $B_4 = B_5$ or $b_3 = b_i$ for $i = 4, 5$ equation $F_5 = 0$ yields a contradiction. The last factor of Eq. (32) implies $coll(3, 4, 5) = 0$.

(β) $K_3 = 0$: Now the P_1 and P_{10} factors into F_5C and F_4C with

$$C := K_2A_2(a_4B_5 - a_5B_4) - K_1(b_4B_5 - b_5B_4). \quad (33)$$

For $C = 0$ we compute a_4 from this equation and plug the obtained expression into $P_8 = 0$, which already yields a contradiction. Therefore we consider again the resultant of F_4 and F_5 with respect to B_3 given in Eq. (32). For all possible cases ($B_4 = B_5$ or $b_3 = b_i$ for $i = 4, 5$) the equation $P_1 = 0$ can only vanish (w.c.) for $C = 0$.

- We proceed with $b_4 = B_4b_5/B_5$. Now the polynomial F_2 equals

$$(a_4B_5 - a_5B_4)(b_3B_5 - b_5B_3)/B_5. \quad (34)$$

(α) $a_4 = B_4a_5/B_5$: $P_5 = 0$ can only vanish (w.c.) for $K_3 = 0$. Then $P_8 = 0$ implies $a_5 = K_1b_5/(K_2A_2)$. $P_1 = 0$ yields a contradiction.

(β) $b_3 = b_5B_3/B_5$: Now we consider $P_1 = A_2K_2b_5F_1[6]/B_5$ and $P_{10} = K_2A_2F_{10}[6]$. The resultant of F_1 and F_{10} with respect to a_3 yields

$$B_3(B_3 - B_4)(B_3 - B_5)(a_4B_5 - a_5B_4). \quad (35)$$

For $B_3 = B_i$ for $i = 4, 5$ the equation $P_1 = 0$ yields the contradiction. If we set $a_4 = B_4a_5/B_5$ the equation $P_5 = 0$ implies $K_3 = 0$. Now P_8 equals $B_3B_4coll(3, 4, 5)(K_1b_5 - a_5K_2A_2)$. From the last factor we compute a_5 and plug this into $P_1 = 0$ which yields the contradiction.

(ii) $K_3 = 0, F_2 \neq 0$: Computing the resultant of P_1 and P_{10} with respect to A_2 yields $K_1 K_2 B_3 B_4 B_5 \text{coll}(3, 4, 5) F_2$. This implies $K_1 = 0$.

- Assuming $b_4 \neq b_5$ we can compute a_3 from $P_1 = 0$. Now P_{10} splits into $K_2 A_2 B_3 (a_4 B_5 - a_5 B_4) \text{coll}(3, 4, 5) / (b_4 - b_5)$. Plugging $a_4 = B_4 a_5 / B_5$ into $P_8 = 0$ yields a contradiction.
- $b_4 = b_5$: Now P_1 factors into $K_2 A_2 B_3 (b_3 - b_5) (a_4 B_5 - a_5 B_4)$. As $b_3 = b_5$ contradicts $\text{coll}(3, 4, 5) \neq 0$ we set $a_4 = B_4 a_5 / B_5$. $P_{10} = 0$ can only vanish (w.c.) for $a_3 = B_3 a_5 / B_5$. Again $P_8 = 0$ yields a contradiction.

Part [B] $R_2 = 0, K_4 \neq 0$:

(i) If we assume $B_4 \neq B_5$ we can compute a_3 from $R_2 = 0$. Now P_1 splits up into the two factors C and F_1 with

$$C := K_4 a_2 (B_4 - B_5) + K_1 (b_4 B_5 - b_5 B_4) + K_2 A_2 (a_5 B_4 - a_4 B_5) \quad (36)$$

$$F_1 := b_3 B_3 (B_4 - B_5) + b_4 B_4 (B_5 - B_3) + b_5 B_5 (B_3 - B_4). \quad (37)$$

If we compute a_2 from $C = 0$, the resulting equation $P_8 = 0$ cannot vanish without contradiction. If we compute b_3 from $F_1 = 0$ the polynomial P_{10} splits into 4 factors. Three of them yield $\text{coll}(3, 4, 5) = 0$. The fourth factor equals C .

(ii) We get $R_2 = (B_3 - B_5) [K_2 A_2 (a_5 - a_4) + K_1 (b_4 - b_5)]$ for the remaining case $B_4 = B_5$. If $B_3 = B_5$ the equation $P_8 = 0$ yields a contradiction. Therefore we compute a_4 from the second factor. Now P_{15} factors into $a_2 B_5 \text{coll}(3, 4, 5) (B_3 - B_5) (K_1 b_5 - K_2 A_2 a_5)$. This implies $a_5 = K_1 b_5 / (K_2 A_2)$ and finally $P_8 = 0$ yields the contradiction. \square

2 $M_1 M_2$ is not orthogonal to p

Due to the above studied cases we can assume $\cos \phi \neq 0$ and $\sin \phi \neq 0$ when eliminating t_1 from Q . For the proof of this part we need the following 20

polynomials:

$$P_1[12] := (P_{3,3,0,0}^{1,0,0} + P_{0,0,3,3}^{1,0,0}) / (a_2 \sin \phi) \quad P_3[78] := P_{0,4,0,2}^{1,0,1} - P_{2,0,4,0}^{1,0,1} \quad (38)$$

$$P_2[36] := (P_{3,0,3,0}^{1,0,0} - P_{0,3,0,3}^{1,0,0}) / (a_2 \cos \phi) \quad P_4[66] := P_{4,0,2,0}^{1,0,1} - P_{2,0,4,0}^{1,0,1} \quad (39)$$

$$P_5[30] := (P_{4,2,0,0}^{1,0,1} + P_{0,0,4,2}^{1,0,1}) / \sin \phi \quad P_7[36] := P_{4,2,0,0}^{1,0,1} - P_{0,0,2,4}^{1,0,1} \quad (40)$$

$$P_6[66] := (P_{4,0,2,0}^{1,0,1} + P_{0,4,0,2}^{1,0,1}) / \cos \phi \quad P_8[42] := P_{0,0,4,2}^{1,0,1} - P_{0,0,2,4}^{1,0,1} \quad (41)$$

$$P_9[18] := (P_{3,1,0,0}^{1,0,2} + P_{1,3,0,0}^{1,0,2}) / \sin \phi \quad P_{11}[108] := P_{3,1,1,1}^{1,0,1} - P_{1,3,1,1}^{1,0,1} \quad (42)$$

$$P_{10}[18] := (P_{2,0,1,1}^{1,0,2} - P_{1,1,2,0}^{1,0,2}) / \cos \phi \quad P_{12}[102] := P_{3,1,1,0}^{1,0,1} - P_{1,4,0,1}^{1,0,1} \quad (43)$$

$$P_{13}[24] := (P_{3,2,1,0}^{1,0,0} - P_{0,1,2,3}^{1,0,0} - P_{2,3,0,1}^{1,0,0} + P_{1,0,3,2}^{1,0,0}) / (a_2 \sin \phi) \quad (44)$$

$$P_{14}[42] := (P_{3,2,1,0}^{1,0,0} + P_{0,1,2,3}^{1,0,0} + P_{2,3,0,1}^{1,0,0} + P_{1,0,3,2}^{1,0,0}) / A_2 \quad (45)$$

$$P_{15}[48] := P_{3,2,1,0}^{1,0,0} + P_{0,1,2,3}^{1,0,0} - P_{2,3,0,1}^{1,0,0} - P_{1,0,3,2}^{1,0,0} \quad (46)$$

$$P_{16}[36] := P_{3,1,2,0}^{1,0,0} - P_{0,2,1,3}^{1,0,0} - P_{2,0,3,1}^{1,0,0} + P_{1,3,0,2}^{1,0,0} \quad (47)$$

$$P_{17}[66] := P_{4,1,1,0}^{1,0,1} + P_{1,4,0,1}^{1,0,1} + P_{1,0,4,1}^{1,0,1} + P_{0,1,1,4}^{1,0,1} \quad (48)$$

$$P_{18}[54] := P_{4,1,1,0}^{1,0,1} - P_{1,4,0,1}^{1,0,1} + P_{1,0,4,1}^{1,0,1} - P_{0,1,1,4}^{1,0,1} \quad (49)$$

$$P_{19}[48] := P_{3,2,0,1}^{1,0,1} - P_{2,3,1,0}^{1,0,1} - P_{0,1,3,2}^{1,0,1} + P_{1,0,2,3}^{1,0,1} \quad (50)$$

$$P_{20}[150] := P_{3,2,0,1}^{1,0,1} + P_{2,3,1,0}^{1,0,1} - P_{0,1,3,2}^{1,0,1} - P_{1,0,2,3}^{1,0,1} \quad (51)$$

Firstly we compute the resultant of P_9 and P_{10} with respect to A_5 , which yields the expression $a_2 B_3 B_4 B_5 K_2 \text{coll}(3, 4, 5) R_1$ with

$$R_1 := K_2 B_3 (A_2 a_4 - A_4 a_2) + K_2 B_4 (A_3 a_2 - A_2 a_3) + K_1 (b_3 B_4 - b_4 B_3). \quad (52)$$

In the following section we show that for $K_2 = 0$ the equations $P_i = 0$ for $i = 1, \dots, 20$ can only be fulfilled for $K_1 = K_3 = K_4 = 0$.

$K_2 = 0$

Now the polynomials P_9 and P_{10} factors into $K_1 F_9$ and $K_1 F_{10}$ with

$$F_9 := B_3 B_4 b_5 (a_4 - a_3) + B_4 B_5 b_3 (a_5 - a_4) + B_3 B_5 b_4 (a_3 - a_5), \quad (53)$$

$$F_{10} := B_3 B_4 b_5 (b_4 - b_3) + B_4 B_5 b_3 (b_5 - b_4) + B_3 B_5 b_4 (b_3 - b_5). \quad (54)$$

(i) $K_1 \neq 0$: We compute the resultant of F_9 and F_{10} with respect to B_3 which yields $b_3 B_4 B_5 (b_4 B_5 - b_5 B_4) \text{coll}(3, 4, 5)$. We start with $b_3 = 0$. Now

$F_{10} = 0$ implies $B_4 = B_5$ and F_9 equals $K_1 B_3 B_5 \text{coll}(3, 4, 5)$. Therefore we set $b_4 = B_4 b_5 / B_5$. Now F_9 splits up into $B_4(a_4 - a_5)(b_3 B_5 - b_5 B_3)$. If we set $b_3 = B_3 b_5 / B_5$ the equation $P_5 = 0$ yields the contradiction. For $a_4 = a_5$ the equation $F_{10} = 0$ implies $b_3 = B_3 b_5 / B_5$, which yields via $P_5 = 0$ the contradiction.

(ii) $K_1 = 0, K_4 \neq 0$: Now P_5 equals $K_4 a_2 F_9$. Moreover from P_1 also K_4 factors out. We compute the resultant of F_9 and $F_1 := P_1 / K_4$ with respect to B_3 which yields

$$b_3 B_4 B_5 \text{coll}(3, 4, 5)(a_4 b_5 B_4 - a_5 b_4 B_5). \quad (55)$$

- For $b_3 = 0$ we get $P_1 = K_4 a_3 b_4 b_5 (B_4 - B_5)$.
 - (α) For $a_3 = 0$ the equation $P_5 = 0$ implies $b_5 = b_4 a_5 B_5 / (a_4 B_4)$. Now $P_{14} = 0$ and $P_8 = 0$ yield $A_3 = B_3 = 0$, a contradiction.
 - (β) For $B_4 = B_5$ we get the contradiction from $P_5 = 0$.
- Now we set $a_4 b_5 B_4 - a_5 b_4 B_5 = 0$.
 - (α) We assume $b_i = 0$ which yields $a_i = 0$ for $i, j \in \{4, 5\}$ and $i \neq j$. Then equation $P_5 = 0$ can only vanish (w.c.) for $a_3 = a_j b_3 B_4 / (b_j B_3)$. The equations $P_{14} = 0$ and $P_8 = 0$ yield $A_i = B_i = 0$, a contradiction.
 - (β) For $b_4 b_5 \neq 0$ we can compute a_4 . Now the polynomial P_1 factorize into $K_4 b_4 (B_4 - B_5)(a_3 b_5 B_3 - a_5 b_3 B_5)$. For $a_3 = b_3 a_5 B_5 / (B_3 b_5)$ we get $P_{15} = a_5 B_5 K_4 F_{15} / (b_5 B_3 B_4)$ ($a_5 = 0$ implies $a_3 = a_4 = 0$ a contradiction) and $P_8 = K_4 F_8 / (B_3 B_4)$. Computing $F_8 - 2F_{15} = 0$ yields the contradiction. For $B_4 = B_5$ the condition $P_5 = 0$ also implies $a_3 = b_3 a_5 B_5 / (B_3 b_5)$ and we can construct the same contradiction as before.

(iii) $K_1 = 0, K_4 = 0, K_3 \neq 0$: Now the polynomials P_{18} and P_{15} split into $K_3 a_2 \sin \phi F_9$ and $K_3 A_2 \sin \phi F_1$. We consider again the resultant which is given in Eq. (55).

- For $b_3 = 0$ the polynomial F_1 splits into $a_3 b_4 b_5 (B_4 - B_5)$. As for $B_4 = B_5$ the equation $F_9 = 0$ yields a contradiction, we set $a_3 = 0$. Now $F_9 = 0$ implies $b_5 = b_4 a_5 B_5 / (a_4 B_4)$. From $P_6 = 0$ we get $A_4 = A_5$. $P_{17} = 0$ yields the contradiction.

- Now we set $a_4b_5B_4 - a_5b_4B_5 = 0$:

(α) We assume $b_i = 0$ which yields $a_i = 0$ for $i, j \in \{4, 5\}$ and $i \neq j$. Now $P_{18} = 0$ implies $a_3 = a_jb_3B_4/(b_jB_3)$. Then $P_6 = 0$ can only vanish (w.c.) for $A_3 = A_j$. Finally $P_{17} = 0$ yields the contradiction.

(β) $b_4b_5 \neq 0$: We compute a_4 and factorize P_2 and F_1 which yield

$$K_3b_4(A_4 - A_5)(a_3b_5B_3 - a_5b_3B_5) \quad \text{and} \quad b_4(B_4 - B_5)(a_3b_5B_3 - a_5b_3B_5). \quad (56)$$

For $A_4 = A_5$ and $B_4 = B_5$ the equation $P_6 = 0$ can only vanish (w.c.) for $A_3 = A_5$. Now $P_{17} = 0$ implies $B_3 = B_5$, a contradiction. Therefore we set $a_3 = b_3a_5B_5/(B_3b_5)$. P_6 factors into $K_3a_2F_6$ with

$$F_6 := b_3b_4B_5(A_3 - A_4) + b_3b_5B_4(A_5 - A_3) + b_4b_5B_3(A_4 - A_5). \quad (57)$$

Assuming $B_4b_3 - b_4B_3 \neq 0$ we can compute A_5 from $F_6 = 0$. Inserting this into $P_{17} = 0$ yields the contradiction. For $b_3 = b_4B_3/B_4$ the equation $P_6 = 0$ implies $A_3 = A_4$. Again $P_{17} = 0$ yields the contradiction. Hence, we can assume $K_2 \neq 0$ for the rest of the proof.

$R_1 = 0, K_2 \neq 0$

We proceed by setting R_1 of Eq. (52) equal to zero. We compute A_3 from $R_1 = 0$ and plug this into P_9 which splits into $B_3(a_3 - a_4)F_9$ with

$$F_9 := K_2B_4(A_5a_2 - A_2a_5) + K_2B_5(A_2a_4 - A_4a_2) + K_1(b_5B_4 - b_4B_5). \quad (58)$$

From $F_9 = 0$ we can compute A_5 . Now the resultant of P_1 and P_5 with respect to A_2 simplifies to $K_2B_3B_4B_5coll(3, 4, 5)R_2[12]/a_2$.

Case I) $a_3b_4b_5[K_4a_2(a_4 - a_5) + K_1(b_4a_5 - b_5a_4)] \neq 0$

Under this assumption we can compute B_3 from $R_2 = 0$.

Part [A] Assuming $a_4a_5(b_4B_5 - b_5B_4) \neq 0$ we can compute A_2 from the common factor of P_1 and P_5 . Now

$$P_8 = B_3B_5coll(3, 4, 5)F_8[8] \quad \text{and} \quad P_7 = B_3B_5coll(3, 4, 5)F_7[27].$$

$F_7 = 0$ and $F_8 = 0$ are homogeneous linear equations in the unknowns $\sin \phi$ and $\cos \phi$. So we compute the determinant of then coefficient-matrix which yields $K_2(b_4B_5 - b_5B_4)B_4a_2a_5D[21]$. From $D[21] = 0$ we can compute A_4 . Now we get $F_7 = F_8 = a_4a_5(b_4B_5 - b_5B_4)C[8]$. From $C = 0$ we compute B_4 and plug the expression into P_{11} , which splits into $coll(3, 4, 5)F_{11}$. The factor F_{11} is quadratic in the unknown B_5 . Therefore we obtain two solutions for

$$B_5 = \frac{2[K_1(a_ib_5 - b_ia_5) + K_4a_2(a_5 - a_i)]K_1b_5 \sin \phi}{(K_4a_2 - K_1b_i)K_2a_2a_5 \cos \phi} \quad (59)$$

with $i = 3, 4$. If we plug B_5 into B_i we get $B_i = 0$, a contradiction.

Part [B] $a_i = 0$ for $i, j \in \{4, 5\}$ and $i \neq j$. We compute P_5 which splits into $B_jb_3F_5[8]$. As $b_3 = 0$ yields $B_3 = 0$ we can assume $b_3 \neq 0$.

(i) Assuming $d := K_4(a_3 - a_j)(b_iB_j - b_jB_i) \neq 0$ we can compute

$$a_2 = K_1[B_ib_j(a_jb_3 - a_3b_j) + b_i^2B_j(a_3 - a_j)]/d \quad (60)$$

from $F_5 = 0$. Inserting this into $P_1 = 0$ yields the contradiction.

(ii) $K_4 = 0$: Now P_1 equals $b_3b_iB_jK_1(a_3b_j - a_jb_3)(b_iB_j - b_jB_i)/(a_2b_2)$. For both possible cases (i.e. $a_3 = b_3a_j/b_j$ and $b_i = b_jB_i/B_j$) the equation $P_5 = 0$ yields the contradiction.

(iii) $B_j = b_jB_i/b_i, K_4 \neq 0$: Now $P_5 = 0$ implies $K_1 = 0$ and $P_1 = 0$ yields the contradiction.

(iv) $a_3 = a_j$: Again $P_5 = 0$ yields $K_1 = 0$ and $P_1 = 0$ the contradiction.

Part [C] $b_4 = b_5B_4/B_5, a_4a_5 \neq 0$: $P_5 = 0$ implies $K_1 = 0$ and $P_1 = 0$ yields the contradiction.

Case II) $K_4a_2(a_4 - a_5) + K_1(b_4a_5 - b_5a_4) = 0$

We do this case without the assumption $a_3 - a_4 \neq 0$, such that a later reindexing can be done without loss of generality.

Part [A] Assuming $K_4(a_4 - a_5) \neq 0$ we can compute a_2 . Now the factor R_2 simplifies to $K_1a_4a_5b_3(b_4B_5 - b_5B_4)coll(3, 4, 5)$.

(i) For $b_3 = 0$ we compute A_2 from $P_5 = 0$ which yields $A_2 = K_1(b_4 - b_5)/[K_2(a_4 - a_5)]$. Now $P_7 = 0$ can only vanish (w.c.) for

$$B_4 = (K_4 + A_4K_2) \sin \phi / (K_2 \cos \phi). \quad (61)$$

We compute P_3 which splits up into $coll(3, 4, 5)K_1B_3F_3$ [18].

- Assuming $K_1(b_4a_5 - b_5a_4) + K_3b_4(a_5 - a_4) + K_4a_4(a_4 - a_5) \neq 0$ we can compute B_5 from $F_3 = 0$. Now $P_2 = 0$ can only vanish (w.c.) for $a_3 = 0$ and a factor F_2 [14] = 0. As for $a_3 = 0$ the equation $P_{20} = 0$ yields a contradiction, we compute B_3 from $F_2 = 0$. Again $P_{20} = 0$ yields a contradiction.
- $K_1(b_4a_5 - b_5a_4) + K_3b_4(a_5 - a_4) + K_4a_4(a_4 - a_5) = 0$:
 - (α) We can compute b_5 from this equation for $a_4 \neq 0$. Now $F_3 = 0$ can only vanish (w.c.) for $K_1 = -K_3$. Then $P_2 = 0$ implies $a_3 = 0$. This yields solution S_2 for $k = 3$.
 - (β) For $a_4 = 0$ we get $b_4a_5(K_1 + K_3) = 0$ which implies $K_1 = -K_3$. $P_3 = 0$ can only vanish (w.c.) for $b_4 = (K_1b_5 + K_4a_5)/K_1$. $P_{18} = 0$ implies $a_3 = 0$. We get solution S_2 for $k = 3$ with the additional condition $a_4 = 0$.

(ii) $a_i = 0, b_3 \neq 0$ for $i, j \in \{4, 5\}$ and $i \neq j$. As $P_5 = 0$ yields a contradiction if we set $a_3 = 0$ or $b_3 = b_jB_3/B_j$, we can assume $a_3(b_jB_3 - b_3B_j) \neq 0$. Now we can compute A_2 from $P_5 = 0$. $P_8 = 0$ can only vanish (w.c.) for $b_j = 0$ and a second factor $F_8 = 0$.

- For $b_j = 0$ we compute B_4 from the only factor of $P_7 = 0$ which does not yield a contradiction.
 - (α) Assuming $K_1 + K_3 \neq 0$ we can compute B_3 from the only factor of $P_3 = 0$ which does not yield a contradiction. From the factor of $P_{13} = 0$ which does not yield a contradiction we compute B_5 . Then $P_6 = 0$ yields the contradiction.
 - (β) For $K_1 = -K_3$ we compute b_3 from $F_3 = 0$. Plugging this into $P_{13} = 0$ yields the contradiction.
- $F_8 = 0, b_j \neq 0$: We compute A_4 from $F_8 = 0$. Then $P_{11} = 0$ yields the contradiction.

(iii) $b_4 = b_5 B_4 / B_5, a_4 a_5 b_3 \neq 0$: As $P_5 = 0$ yields a contradiction if we set $a_3 = 0$ or $b_5 = b_3 B_5 / B_3$, we can assume $a_3(b_5 B_3 - b_3 B_5) \neq 0$. Now we can compute A_2 from $P_5 = 0$. We compute A_4 from the only non-contradicting factor of $P_8 = 0$. Finally $P_{11} = 0$ yields a contradiction.

Part [B1] $K_4 = 0$ and $K_1 = 0$:

(i) Assuming $B_4 a_5 b_5 (a_4 b_3 - a_3 b_4) + B_5 a_4 b_4 (a_3 b_5 - a_5 b_3) \neq 0$ we can compute B_3 from $P_1 = 0$. Now $P_5 = 0$ can only vanish (w.c.) for $(B_4 b_5 - B_5 b_4) = 0$ or $a_i = 0$ with $i = 4, 5$.

- For $a_i = 0$ ($i, j \in \{4, 5\}, i \neq j$) we compute $P_{16} = 0$, which can only vanish (w.c.) for $K_3 = 0$ or $F_{16} = 0$. As $P_8 = 0$ yields a contradiction if we compute B_4 from $F_{16} = 0$, we set $K_3 = 0$. Now $P_{19} = 0$ implies $a_3 = [a_2(b_j - b_3) + a_j b_3] / b_j$. $P_{14} = 0$ can only vanish (w.c.) for $F_{16} = 0$.
- $b_4 = B_4 b_5 / B_5$: $P_7 = 0$ can only vanish (w.c.) for

$$A_4 = (\sin \phi A_2 a_4 + \cos \phi B_4 a_2) / (a_2 \sin \phi).$$

$P_8 = 0$ yields the contradiction.

(ii) $B_4 a_5 b_5 (a_4 b_3 - a_3 b_4) + B_5 a_4 b_4 (a_3 b_5 - a_5 b_3) = 0$:

- Assuming $b_4 b_5 (a_4 B_5 - a_5 B_4) \neq 0$ we can compute a_3 . Now $P_1 = 0$ vanish (w.c.) for $b_3 = 0, b_5 B_4 - B_5 b_4 = 0$ or $a_i = 0$ with $i = 4, 5$.
 - (α) $a_i = 0$: From $P_7 = 0$ we get B_4 . $P_8 = 0$ yields a contradiction.
 - (β) $b_3 = 0, a_4 a_5 \neq 0$: We get $a_4 = a_2 (\sin \phi A_4 - \cos \phi B_4) / (A_2 \sin \phi)$ from $P_{15} = 0$. Now $P_5 = 0$ can vanish (w.c.) for $B_4 = \sin \phi A_4 / \cos \phi$ or $b_4 = b_5 B_4 / B_5$. For both cases $P_8 = 0$ yields the contradiction.
 - (γ) $b_4 = b_5 B_4 / B_5, b_3 a_4 a_5 \neq 0$: Now $P_7 = 0$ implies a_4 of (β). Plugging this into $P_8 = 0$ yields the contradiction.
- $b_i = 0$ ($i = 4, 5$): Eq. (ii) can only vanish (w.c.) for $a_4 = 0$ or $a_5 = 0$.
 - (α) For $a_i = 0$ we compute B_4 from $P_{15} = 0$. Now $P_5 = 0$ only vanish (w.c.) for $a_3 = 0, a_j = 0$ or $b_3 = b_j B_3 / B_j$. For all three cases equation $P_8 = 0$ yields the contradiction.

(β) $a_j = 0, a_i \neq 0$: $P_5 = 0$ can only vanish (w.c.) for $a_3 = 0$. From the only non-contradicting factor of $P_7 = 0$ we compute B_4 . Now $P_{15} = 0$ can only vanish (w.c.) for $K_3 = 0$ or $B_3 = B_j$. For $K_3 = 0$ the equation $P_6 = 0$ implies $a_2 = a_i$. This yields solution S_1 for $k = i$ with the additional condition $K_1 = 0$. For $B_3 = B_j$ and $K_3 \neq 0$ the equation $P_4 = 0$ yields the contradiction.

- $a_4 = a_5 B_4 / B_5, b_4 b_5 \neq 0$:

(α) Assuming $b_5 B_4 - b_4 B_5 \neq 0$ we can compute a_5 from $P_5 = 0$. Now $P_1 = 0$ implies $b_4 = [B_3 b_5 + b_3 (B_4 - B_5)] / B_3$. $P_7 = 0$ implies $B_4 = \sin \phi A_4 / \cos \phi$ and $P_8 = 0$ yields the contradiction.

(β) $b_4 = b_5 B_4 / B_5$: Now $P_5 = 0$ can only vanish for $a_3 = 0$ or $b_3 = B_3 b_5 / B_5$. In both cases we compute A_2 from the only non-contradicting factor of $P_7 = 0$. $P_8 = 0$ yields the contradiction.

Part [B2] $K_4 = 0$ and $b_4 a_5 - b_5 a_4 = 0, K_1 \neq 0$:

(i) With $a_5 \neq 0$ we can set $b_4 = b_5 a_4 / a_5$. Now $P_1 = 0$ vanishes without contradiction for $a_4 = 0, a_4 B_5 - B_4 a_5 = 0$ or $K_1 b_5 - K_2 A_2 a_5 = 0$.

- $a_4 = 0$: As $P_5 = 0$ yields a contradiction if we set $a_3 = 0$ or $b_3 = b_5 B_3 / B_5$, we can assume $a_3 (b_3 B_5 - b_5 B_3) \neq 0$. Now we can compute A_2 from $P_5 = 0$. $P_7 = 0$ implies A_4 . $P_{14} = 0$ yields a contradiction.
- $B_4 = a_4 B_5 / a_5, a_4 \neq 0$: For the same reason as above we can again assume $a_3 (b_3 B_5 - b_5 B_3) \neq 0$ and compute A_2 from $P_5 = 0$. From the only non-contradicting factor of $P_{15} = 0$ we compute

$$B_5 = (K_2 A_4 a_2 a_5 - K_3 a_4 b_5) \sin \phi / (K_2 a_2 a_4 \cos \phi).$$

$P_8 = 0$ can only vanish without contradiction for $b_3 = 0$ or $F_8[8] = 0$.

(α) $P_7 = 0$ implies $K_3 = 0$ for $b_3 = 0$. Then $P_6 = 0$ implies $a_2 = a_3$ which corresponds with solution S_1 for $k = 3$ with the additional condition $B_4 = a_4 B_5 / a_5$.

(β) Now we can assume $b_3 \neq 0$ for the case $F_8 = 0$. We can compute B_3 from $F_8 = 0$. Plugging this into $P_2 = 0$ yields the contradiction.

- $K_1b_5 - K_2A_2a_5 = 0$, $a_4(a_4B_5 - B_4a_5) \neq 0$: We set $A_2 = K_1b_5/(K_2a_5)$ and compute $P_5 = 0$ which yields $b_3 = 0$. From $P_7 = 0$ we get $B_4 = \sin \phi A_4 / \cos \phi$ and plug this into $P_2 = 0$, which can only vanish (w.c.) for $K_3 = 0$ or $B_5 = A_4 \sin \phi / \cos \phi$, respectively.

(α) For $K_3 = 0$ we obtain from $P_6 = 0$ the condition $a_2 = a_3$, which corresponds with solution S_1 for $k = 3$.

(β) Now we can assume $K_3 \neq 0$ and set $B_5 = A_4 \sin \phi / \cos \phi$. Again $P_6 = 0$ implies $a_2 = a_3$, but now $P_4 = 0$ yields a contradiction.

(ii) Assuming $a_5 = 0$ yields $b_5 = 0$ or $a_4 = 0$.

- $b_5 = 0$: We obtain $B_4 = [K_2(a_2A_4 - a_4A_2) + K_1b_4] \sin \phi / (a_2K_2 \cos \phi)$ from $P_{15} = 0$. Now $P_7 = 0$ can only vanish for $K_1b_i - K_2A_2a_i = 0$ with $i = 3, 4$ or $F_7[4] = 0$. If we set $a_i = K_1b_i/(K_2A_2)$ the equation $P_8 = 0$ yields the contradiction. Therefore we compute B_3 from $F_7 = 0$ which yields $B_3 = b_3[K_2(A_4a_2 - A_2a_4) + K_1b_4] \sin \phi / (a_2b_4K_2 \cos \phi)$. Plugging this into $P_5 = 0$ yields the contradiction.
- $a_4 = 0, b_5 \neq 0$: Now $P_1 = 0$ can only vanish (w.c.) for $b_4 = 0$ or $b_5 = b_4B_5/B_4$. For both cases $P_5 = 0$ yields the contradiction.

Part [C] $a_4 = a_5, K_4 \neq 0$

Now the condition of case II can only vanish (w.c.) for $K_1 = 0$ and $a_4 = 0$.

(i) $K_1 = 0$: $P_5 = 0$ can only vanish (w.c.) for $a_4 = -a_2K_4/(A_2K_2)$ or $b_4 = B_4b_5/B_5$.

- $a_4 = -a_2K_4/(A_2K_2)$: We get $B_4 = (K_2A_4 + K_4) \sin \phi / (K_2 \cos \phi)$ from $P_7 = 0$. Now $P_8 = 0$ can only vanish (w.c.) for $b_3 = 0$.

(α) $K_3 \neq 0$: We can compute b_4 from the only non-contradicting factor $F_4[9] = 0$ of $P_4 = 0$. Moreover if we assume $a_3(a_2 - a_3) \neq 0$ we can compute B_5 from $F_6[5] = 0$, which is the only factor of $P_6 = 0$, which does not yield a direct contradiction. Plugging this into $P_2 = 0$ yields the contradiction. For both remaining cases ($a_3 = 0$ and $a_2 = a_3$) the equation $F_6 = 0$ already yields the contradiction.

(β) $K_3 = 0$: Now $F_4 = 0$ can only vanish (w.c.) for $A_2 = -K_4/K_2$ or $B_5 = \sin \phi(K_2A_4 + K_4)/(K_2 \cos \phi)$. For $A_2 = -K_4/K_2$ the equation $P_6 = 0$ implies $a_3 = 0$, which yields solution S_2 for $k = 3$ with the additional condition $K_1 = K_3 = 0$. Now we can assume $A_2 \neq -K_4/K_2$ and set $B_5 = \sin \phi(K_2A_4 + K_4)/(K_2 \cos \phi)$. From $P_6 = 0$ we can compute B_3 . Plugging this into $P_2 = 0$ yields the contradiction.

- $b_4 = B_4b_5/B_5, a_4 \neq -a_2K_4/(A_2K_2)$: We get $B_4 = (a_2A_4 - a_4A_2) \sin \phi / (a_2 \cos \phi)$ from $P_7 = 0$. Now $P_4 = 0$ can only vanish (w.c.) for $a_4 = 0$ or $a_4 = a_2$. For both cases we compute B_3 from the non-contradicting factor of $P_{18} = 0$ and plug the obtained expression into $P_1 = 0$ which yields the contradiction.

(ii) $a_4 = 0, K_1 \neq 0$: As $P_5 = 0$ yields the contradiction if we set $b_4 = b_5B_4/B_5$, we can assume $b_4B_5 - b_5B_4 \neq 0$. Now we can compute a_2 from $P_5 = 0$. $P_1 = 0$ can only vanish (w.c.) for $b_i = 0$ ($i, j \in \{4, 5\}, i \neq j$). Then $P_{14} = 0$ can only vanish (w.c.) for $K_1(b_j - b_3) + A_2a_3K_2 = 0$ and a second factor $F_{14} = 0$.

- If we solve $F_{14} = 0$ for B_4 we get from $P_4 = 0$ the condition $K_1 = -K_3$. From $P_3 = 0$ we compute b_3 and plug the obtained expression into $P_{17} = 0$, which can only vanish (w.c.) for $A_2 = -K_4/K_2$. This corresponds with solution S_2 for $k = i$ with the additional condition $a_j = 0$.
- $A_2 = K_1(b_3 - b_j)/(K_2a_3), F_{14} \neq 0$: From $P_{18} = 0$ we get $K_1 = -K_3$. $P_7 = 0$ yields the contradiction.

Case III) $b_i = 0$ for $i = 4, 5$

For $b_i = 0$ the factor R_2 simplifies to

$$R_2 := b_3b_ja_iB_i[K_4a_2(a_3 - a_j) + K_1(b_3a_j - b_ja_3)] \quad (62)$$

with $i, j \in \{4, 5\}$ and $i \neq j$. Therefore the two possibilities are $a_i = 0$ or $K_4a_2(a_3 - a_j) + K_1(b_3a_j - b_ja_3) = 0$. The latter was already done in case II just for another indexing. Therefore we obtain the same solutions as in case II just for another index k .

The remaining discussion of $a_i = 0$ can be done under the assumption $K_4 a_2 (a_4 - a_5) + K_1 (b_4 a_5 - b_5 a_4) \neq 0$ due to case II. If we consider $P_{15} = 0$ and $P_{16} = 0$ we see that these equations can only vanish (w.c.) for $K_1 = -K_3$ and $A_2 = -K_4/K_2$ or for the common factor $G = 0$.

Part [A] $G = 0$: From this equation we compute B_4 .

(i) $K_1 \neq 0$: We can compute b_3 from $P_8 = 0$. From $P_5 = 0$ we get a_j .

- Assuming $K_2 A_2 (a_2 K_4 + b_j K_3) - K_4 (K_1 b_j - a_2 K_4) \neq 0$ we can compute B_3 from $P_6 = 0$. $P_4 = 0$ yields the contradiction.
- $K_2 A_2 (a_2 K_4 + b_j K_3) - K_4 (K_1 b_j - a_2 K_4) = 0$:
 - (α) Assuming $A_2 K_2 + K_4 \neq 0$ we can compute a_2 . $P_3 = 0$ yields the contradiction.
 - (β) $A_2 = -K_4/K_2$ implies $K_1 = -K_3$. We get solution S_2 for $k = i$.

(ii) $K_1 = 0$: Now we can compute a_3 from $P_8 = 0$. From $P_5 = 0$ we get $a_2 = -K_2 A_2 a_j / K_4$.

- $K_3 \neq 0$: We compute a_j from $P_4 = 0$. Then $P_6 = 0$ yields a contradiction.
- $K_3 = 0$: Now $P_4 = 0$ can only vanish for $A_2 = -K_4/K_2$, which yield solution S_2 for $k = i$ with the additional condition $K_1 = K_3 = 0$, or $B_3 = B_j$. For the later $P_{20} = 0$ yields the contradiction under the assumption $A_2 \neq -K_4/K_2$.

Part [B] $K_1 = -K_3, A_2 = -K_4/K_2, G \neq 0$:

(i) Assuming $b_3 a_j B_j - b_j B_3 a_3 \neq 0$ we can compute a_2 from $P_5 = 0$. Now $P_8 = 0$ can only vanish (w.c.) for $K_3 (b_j - b_3) - K_4 (a_j - a_3) = 0$ or a second factor $F_8 = 0$.

- $a_j = (K_3 (b_j - b_3) + K_4 a_3) / K_4$: Now $P_{12} = 0$ yields $K_3 = 0$. Then the equation $P_7 = 0$ yields the contradiction.
- $F_8 = 0, K_3 (b_j - b_3) - K_4 (a_j - a_3) \neq 0$: From $F_8 = 0$ we compute A_4 . $P_4 = 0$ implies $a_3 = 0$ and $P_6 = 0$ yields the contradiction.

(ii) $a_3 = b_3 a_j B_j / (b_j B_3)$: From $P_5 = 0$ we compute $B_j = b_j B_3 [K_3(b_3 - b_j) + K_4 a_j] / (K_4 a_j b_3)$. Now $P_{14} = 0$ implies $a_2 = (a_j K_4 - b_j K_3) / K_4$. $P_7 = 0$ yields the contradiction.

Case IV) $a_3 = 0$, $N := b_4 b_5 [K_4 a_2 (a_4 - a_5) + K_1 (b_4 a_5 - b_5 a_4)] \neq 0$

Now R_2 splits up into $a_4 a_5 b_3 (K_1 b_3 - K_4 a_2) (b_4 B_5 - b_5 B_4)$.

Part [A] $b_3 = 0$: As $P_5 = 0$ yields a contradiction if we set $a_5 = 0$ or $b_4 = b_5 B_4 / B_5$ we can assume $a_5 (b_4 B_5 - b_5 B_4) \neq 0$. Now we can compute A_2 from $P_5 = 0$. P_{14} and P_8 factors into $Ncoll(3, 4, 5) B_3 B_5 F_{14}[8]$ and $Ncoll(3, 4, 5) B_3 B_5 F_8[8]$. Computing $F_8 - 2F_{14} = 0$ yields the equation $a_2 a_5 B_4 K_2 (b_4 B_5 - b_5 B_4) \cos \phi = 0$ and therefore a contradiction.

Part [B] $a_5 = 0, b_3 \neq 0$: Assuming $K_1 b_3 - K_4 a_2 \neq 0$ we can compute B_5 from $P_5 = 0$. $P_1 = 0$ yields the contradiction. Therefore we assume $K_4 \neq 0$ and set $a_2 = K_1 b_3 / K_4$. $P_5 = 0$ implies $b_3 = b_4$ and $P_1 = 0$ yields the contradiction. For $K_4 = 0$ we get $K_1 b_3$ which is a contradiction.

Part [C] $b_4 = b_3 B_4 / B_5, a_5 b_3 \neq 0$: We can solve $P_5 = 0$ for B_3 . $P_1 = 0$ yields the contradiction.

Part [D] $K_1 b_3 - K_4 a_2 = 0, b_3 a_5 (b_4 B_5 - b_5 B_4) \neq 0$: We can assume $K_4 \neq 0$ otherwise we get a contradiction. So we can set $a_2 = K_1 b_3 / K_4$. From $P_5 = 0$ we can compute A_2 . Then we compute A_4 from the only factor of $P_8 = 0$ which does not yield a direct contradiction. Now we can compute B_4 from $P_7 = 0$. $P_{11} = 0$ yields the contradiction. End of all cases.

The close of the proof was already done by the author in [5], by showing that the solutions S_1 and S_2 imply contradictions for the choice of \mathbf{M}_6 and \mathbf{m}_6 , respectively. This finishes the proof of the given Theorem. \square

4 Conclusion

We proved that there do not exist non-architecturally singular Stewart Gough Platforms with planar base and platform and no four anchor points collinear which possess a cylindrical singularity surface with rulings parallel to a given

fixed direction p in the space of translations.

A complete list of planar parallel manipulators with such a singularity surface is in preparation [6].

References

- [1] Husty, M.L., Hayes, M.J.D., and Loibnegger, H.: The General Singularity Surface of Planar Three-Legged Platforms, *Advances in Multibody Systems and Mechantronics* (A. Kecskemethy, ed.), Duisburg, Germany, 203–214 (1999).
- [2] Karger, A.: Architecture singular planar parallel manipulators, *Mechanism and Machine Theory* **38** (11) 1149–1164 (2003).
- [3] Karger, A.: Stewart-Gough platforms with simple singularity surface, *Advances in Robot Kinematics: Mechanisms and Motion* (J. Lenarcic, B. Roth eds.), 247–254, Springer (2006).
- [4] Merlet, J.-P.: Singular Configurations of Parallel Manipulators and Grassmann Geometry, *International Journal of Robotics Research* **8** (5) 45–56 (1992).
- [5] Nawratil, G.: Results on Planar Parallel Manipulators with Cylindrical Singularity Surface, *Advances in Robot Kinematics - Analysis and Design* (J. Lenarcic, P. Wenger eds.), 321–330, Springer (2008).
- [6] Nawratil, G.: All Planar Parallel Manipulators with Cylindrical Singularity Surface, Technical Report **191**, August 2008, Geometry Preprint Series, Vienna University of Technology.

Georg Nawratil
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
Technische Universität Wien
1040 Wien, Austria
nawratil@geometrie.tuwien.ac.at

Proc. 33. Süddeutsches Differentialgeometrie-Kolloquium
Wien, 23. Mai 2008
pp. 58 – 60
ISBN 978-3-902233-04-2

Konforme Breite in der Möbius-Geometrie

EBERHARD TEUFEL

Kurzfassung: Die Breite eines konvexen Körpers in der euklidischen Ebene zu einer vorgegebenen Richtung ist der Abstand seiner zugehörigen parallelen Stützgeraden. Konvexe Körper konstanter Breite sind die wohlbekannteren “Gleichdicke”.

Dieser erweiterte Abstract beinhaltet gemeinsame Resultate mit R. Langevin (Dijon). Wir definieren eine konform invariante Breite für Paare von Kurven in der Möbius-Ebene. Wir charakterisieren insbesondere die Paare von Kurven konstanter konformer Breite.

In der Möbius-Ebene besitzt eine Kurve keine konform mit ihr verbundenen “Stützgeraden”. Konform invariant mit der Kurve verbunden sind erst ihre Schmiegekreise. Jedoch gibt es für Kreise der Möbius-Ebene keine “Parallel-Relation”. Zur einer Übertragung des Begriffs der “Breite” aus der euklidischen Geometrie in die Möbius-Geometrie erinnern wir den wohlbekanntesten Satz der euklidischen Geometrie: “Gleichdicke” sind charakterisiert durch die Eigenschaft der “Doppelnormalen”, d.h. je zwei parallele Normalen sind gleich.

Wir betrachten nun in der Möbius-Ebene Paare regulär parametrisierter Kurven $X_1(t), X_2(t), t \in I$, deren Punkte paarweise durch Doppelnormalkreise $N(t)$ aufeinander bezogen sind, d.h. $X_1(t), X_2(t) \in N(t), X_1'(t), X_2'(t) \perp N(t)$ ($t \in I, I$, Intervall in \mathbb{R}). In Gegenpunkten $X_1(t), X_2(t)$ nehmen wir die Schmiegekreise $osc_1(t), osc_2(t)$, und wir bezeichnen die “Distanz” zwischen $osc_1(t)$ und $osc_2(t)$ als *konforme Breite* $w_c(t)$. (Definition 1.)

Eine konform invariante Distanz zwischen zwei Kreisen C_1 und C_2 der euklidischen Ebene ist zum Beispiel durch die klassische “inversive Distanz”

$$w_c(C_1, C_2) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}$$

gegeben; hierbei sind r_1, r_2 die Radien von C_1, C_2 und d ist der euklidische Abstand der Mittelpunkte von C_1 und C_2 (H. S. M. Coxeter, 1966)

Im Folgenden betrachten wir speziell Kurvenpaare mit konstanter konformer Breite.

Beispiel: Triviale Beispiele sind zwei Kreise C_1, C_2 , die ein Steiner-Büschel ($C_1 \cap C_2 =$ zwei Punkte) oder ein Poncelet-Büschel ($C_1 \cap C_2 = \emptyset$) aufspannen. Das assoziierte Büschel der gemeinsamen Orthogonalkreise gibt die Doppelnormalkreise des Kurvenpaares, und da die Schmiegekreise mit C_1 und C_2 zusammenfallen ist ihre konforme Breite trivialerweise konstant längs der Kurve.

Bemerkung: Kurven konstanter euklidischer Breite (“Gleichdicke”) haben im Allgemeinen nicht konstante konforme Breite.

Kurvenpaare $X_1(t), X_2(t)$ der Definition 1 kann man auch als Einhüllende einer Kreisschar $\Sigma(t)$ betrachten, wobei gilt $X_1(t), X_2(t) \in \Sigma(t)$, $X_1'(t), X_2'(t)$ tangential $\Sigma(t)$, $t \in I$. Im Modell der Möbius-Ebene im Lorentz-Raum \mathbb{R}_1^4 , realisiert als projektiver Abschluß des Lichtkegels, werden Kreise Σ der Möbius-Ebene repräsentiert durch Punkte σ auf der de Sitter-Sphäre Λ^3 . Der Kreisschar $\Sigma(t)$ entspricht also eine Kurve $\sigma(t)$ auf der de Sitter-Sphäre Λ^3 . Die Möbius-Gruppe ist in diesem Modell die Lorentz-Gruppe. Differentialgeometrische Invarianten in \mathbb{R}_1^4 sind demnach konforme Invarianten. Wir erhalten eine erste Charakterisierung konstanter konformer Breite:

Theorem 1. *Sei $X_1(t), X_2(t), t \in I$, ein Paar regulär parametrisierter Kurven in der Möbius-Ebene, deren Punkte paarweise durch Doppelnormalkreise aufeinander bezogen sind. Sei $X_1(t), X_2(t)$ gegeben als Einhüllende einer Kreisfamilie $\Sigma(t)$. Angenommen die $\Sigma(t)$ repräsentierende Kurve $\sigma(t)$ auf der de-Sitter Sphäre Λ^3 ist eine Frenet-Kurve, dann gilt:*

Konforme Breite $w_c(t) = \text{const.}$ längs $X_1(t), X_2(t) \iff$ geodätische Krümmung $\kappa_g(t) = \text{const.}$ längs $\sigma(t)$.

Nun betrachten wir die konformen Bogenlängen τ_1, τ_2 auf den Kurven $X_1(t), X_2(t)$, die in dritter Differentiationsordnung mit ihnen verbunden sind. Wir bezeichnen als *osc-Kurve* einer Kurve der Möbius-Ebene die ihre Schmiegkreise repräsentierende Kurve auf der de Sitter-Sphäre. Wir erhalten eine zweite Charakterisierung konstanter konformer Breite:

Theorem 2. *Sei $X_1(t), X_2(t), t \in I$, ein Paar regulär parametrisierter Kurven in der Möbius-Ebene ohne Scheitelpunkte, deren Punkte paarweise durch Doppelnormalkreise aufeinander bezogen sind. Angenommen ihre osc – Kurven auf der de Sitter-Sphäre sind Frenet-Kurven, dann gilt:*

Konforme Breite $w_c(t) = \text{const.}$ längs $X_1(t), X_2(t) \iff d\tau_1(t) = d\tau_2(t)$ längs $X_1(t), X_2(t)$.

Mit diesen beiden Hauptresultaten unserer Überlegungen folgen zum einen explizite nicht-triviale Beispiele für Kurvenpaare konstanter konformer Krümmung und zum anderen weitere Resultate, etwa:

Proposition 3. *Seien $X_1(t), X_2(t)$ und $X_1(t), X_3(t), t \in I$, verschiedene Paare von Kurven konstanter konformer Breite in der Möbius-Ebene, die eine gemeinsame Familie $N(t)$ von Doppelnormalkreisen besitzen. Dann sind X_1, X_2, X_3 Kreise oder Teile von Kreisen, die alle drei einem Steiner- oder einem Poncelet-Büschel angehören (vgl. Beispiel 1).*

Eberhard Teufel
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart
70550 Stuttgart, Germany
Teufel@mathematik.uni-stuttgart.de

Proc. 33. Süddeutsches Differentialgeometrie-Kolloquium
Wien, 23. Mai 2008
pp. 61 – 65
ISBN 978-3-902233-04-2

Noch einmal polynomiale Drehflächen

JOHANN HARTL

Kurzfassung: Auf dem Differentialgeometrie-Kolloquium in Karlsruhe am 11. Juni 2004 zeigte ich, dass sich jede Drehfläche, die eine Parameterdarstellung besitzt, in der die Koordinatenfunktionen Polynome in den Parametern sind, eine polynomiale Parameterdarstellung der folgenden Gestalt besitzt:

$$\begin{bmatrix} x_1(t, u) \\ x_2(t, u) \\ x_3(t, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(t) + \frac{t_2}{p_1^2(t)+p_2^2(t)}((p_1^2(t) - p_2^2(t))\bar{p}_1(t, t_2) + 2p_1(t)p_2(t) \cdot \bar{p}_2(t, t_2)) \\ p_2(t) + \frac{t_2}{p_1^2(t)+p_2^2(t)}(2p_1(t)p_2(t)\bar{p}_1(t, t_2) - (p_1^2(t) - p_2^2(t)) \cdot \bar{p}_2(t, t_2)) \\ p_3(t + t_2) \end{bmatrix},$$

wobei

$$t_2 =: u \cdot (p_1^2(t) + p_2^2(t)),$$

und wobei die p_1, p_2, p_3 beliebige Polynome in einer Veränderlichen sind und die \bar{p}_1, \bar{p}_2 Polynome in zwei Veränderlichen sind, die auf einfache Weise von p_1 bzw. p_2 abhängen.

In der anschließenden Diskussion kam die Frage auf, welche ebenen Kurven als Meridiane solcher Drehflächen vorkommen können. Auf diese Frage soll dieser Vortrag in Wien 2008 kurz eingehen. Er wird aber nur einen bescheidenen Beitrag leisten, der keine so allgemeine Aussage liefern wird wie der Vortrag in Karlsruhe.

Eine erzeugende Kurve einer polynomialen Drehfläche Δ sei gegeben durch eine polynomiale Parameterdarstellung, kurz aufgeschrieben:

$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix},$$

in der p_1, p_2, p_3 Polynome seien.

Will man singuläre Punkte vermeiden, so ist vorauszusetzen:

$$p_1^2(t) + p_2^2(t) > 0.$$

Ein Meridian von Δ in der x_2x_3 -Ebene hat dann die Parameterdarstellung

$$\vec{m}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{p_1^2(t) + p_2^2(t)} \\ p_3(t) \end{pmatrix}.$$

Notwendig dafür, dass eine Kurve mit der Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}$$

mit einem Polynom p_3 und mit $x_2(t) > 0$ für alle t aus dem Parameterintervall auf die angegebene Weise aus einer polynomialen Parameterdarstellung einer Drehfläche entsteht, ist daher, dass x_2^2 ein Polynom ist und darüber hinaus, dass x_2^2 als Summe zweier Quadrate von Polynomen geschrieben werden kann.

Ist x_2^2 ein Polynom und $x_2^2(t) > 0$ sogar für alle $t \in \mathbb{R}$, so lässt sich leicht zeigen (wenn man weiß, wie es geht), dass x_2^2 sich stets als Summe zweier Polynome schreiben lässt. Diese Mitteilung verdanke ich Herrn Martin Peternell, der mich gleich nach dem Vortrag darauf ansprach.

Im folgenden sei nun $x_2^2(t) =: q(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit einem Polynom q . Dann ist notwendig der Grad von q gerade, also $\deg(q) = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Will man explizit q als Summe zweier Quadrate von Polynomen darstellen, so braucht man entweder die komplexen Nullstellen von q , die man für $n > 2$ nur noch numerisch bestimmen kann oder man macht den folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} q(t) &=: a_{2n}t^{2n} + a_{2n-1}t^{2n-1} + \dots + a_1t + a_0 = \\ &= (b_nt^n + b_{n-1}t^{n-1} + \dots + b_1t + b_0)^2 + (c_nt^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_1t + c_0)^2 = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n (b_k b_l + c_k c_l) t^{k+l} = \sum_{m=0}^{2n} t^m \sum_{r=0}^m (b_r b_{m-r} + c_r c_{m-r}) \end{aligned}$$

mit $c_{n+1} = \dots = c_{2n} = b_{n+1} = \dots = b_{2n} = 0$.

Das führt auf folgende Bedingungen für die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} b_n^2 + c_n^2 &= a_{2n}, \\ 2b_nb_{n-1} + 2c_nc_{n-1} &= a_{2n-1}, \\ 2b_nb_{n-2} + b_{n-1}^2 + 2c_nc_{n-2} + c_{n-1}^2 &= a_{2n-2}, \\ &\vdots \\ 2b_0b_2 + b_1^2 + 2c_0c_2 + c_1^2 &= a_2, \\ 2b_0b_1 + 2c_0c_1 &= a_1, \\ b_0^2 + c_0^2 &= a_0. \end{aligned}$$

Wählt man b_n, c_n, b_0, c_0 , so erhält man von oben her und von unten her sukzessive lineare Gleichungen. Die Pünktchen in der Mitte liefern Verträglichkeitsbedingungen.

Beispiel: Sei $q(t) = a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$. Dann erhält man die Bedingungen:

$$\begin{aligned} b_2^2 + c_2^2 &= a_4, \\ 2b_2b_1 + 2c_2c_1 &= a_3, \\ 2b_2b_0 + b_1^2 + 2c_2c_0 + c_1^2 &= a_2, \\ 2b_0b_1 + 2c_0c_1 &= a_1, \\ b_0^2 + c_0^2 &= a_0. \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} b_2 &= \sqrt{a_4} \cos u, & c_2 &= \sqrt{a_4} \sin u, \\ b_0 &= \sqrt{a_0} \cos v, & c_0 &= \sqrt{a_0} \sin v \end{aligned}$$

erhält man das lineare Gleichungssystem für b_1, c_1 :

$$2b_2b_1 + 2c_2c_1 = a_3,$$

$$2b_0b_1 + 2c_0c_1 = a_1.$$

Die Koeffizientendeterminante dieses linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2b_2 & 2c_2 \\ 2b_0 & 2c_0 \end{vmatrix} &= 4(b_2c_0 - b_0c_2) = 4\sqrt{a_0a_4}(\cos u \sin v - \cos v \sin u) = \\ &= 4\sqrt{a_0a_4} \sin(v - u) =: D. \end{aligned}$$

Der Einfachheit halber sei im folgenden $D \neq 0$ vorausgesetzt. Durch Wahl von u und v lässt sich dies sicher erreichen. Nach der Cramerschen Regel erhält man

$$b_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_3 & 2c_2 \\ a_1 & 2c_0 \end{vmatrix} = \frac{2}{D}(a_3c_0 - a_1c_2) = \frac{2}{D}(a_3\sqrt{a_0}\sin v - a_1\sqrt{a_4}\sin u)$$

$$b_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 2b_2 & a_3 \\ 2b_0 & a_1 \end{vmatrix} = \frac{2}{D}(b_2a_1 - b_0a_3) = \frac{2}{D}(a_1\sqrt{a_4}\cos u - a_3\sqrt{a_0}\cos v).$$

Die Verträglichkeitsbedingung besagt:

$$2b_2b_0 + b_1^2 + 2c_2c_0 + c_1^2 = a_2.$$

Für die oben berechneten b_1 und b_2 gilt:

$$(b_1^2 + b_2^2)D^2 = 4(a_1^2a_4 + a_3^2a_0 - 2a_1a_3\sqrt{a_0a_4}(\sin u \sin v + \cos u \cos v)) =$$

$$= 4(a_1^2a_4 + a_3^2a_0 - 2a_1a_3\sqrt{a_0a_4}\cos(v - u))$$

Dieser Ausdruck müsste nach der Verträglichkeitsbedingung gleich sein dem Ausdruck

$$D^2(a_2 - 2b_0b_2 - 2c_0c_2) =$$

$$= 16a_0a_4\sin^2(v - u) \cdot (a_2 - 2\sqrt{a_0a_4}(\cos u \cos v + \sin u \sin v)) =$$

$$= 16a_0a_4\sin^2(v - u) \cdot (a_2 - 2\sqrt{a_0a_4}\cos(v - u)).$$

Da $\sin^2(v - u) = 1 - \cos^2(v - u)$, wird die Verträglichkeitsbedingung zu

$$a_1^2a_4 + a_3^2a_0 - 2a_1a_3\sqrt{a_0a_4}\cos(v - u) =$$

$$= 4a_0a_4 \cdot (a_2 - 2\sqrt{a_0a_4}\cos(v - u)) - 4a_0a_4 \cdot (a_2\cos^2(v - u) - 2\sqrt{a_0a_4}\cos^3(v - u)).$$

Anders aufgeschrieben erhält man einen Ausdruck mit einem Polynom dritten Grades in $\cos(v - u)$:

$$8\sqrt{a_0a_4}^3\cos^3(v - u) - 4a_0a_2a_4\cos^2(v - u) + 2\sqrt{a_0a_4}(a_1a_3 - 4a_0a_4)\cos(v - u) +$$

$$+ 4a_0a_2a_4 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 = 0$$

Hat man also eine Drehfläche Δ mit einem Meridian der Gestalt

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}$$

mit einem beliebigen Polynom p_3 gegeben und mit $x_2^2(t) = a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und will man eine polynomiale Darstellung von Δ erhalten, so ermittle man eine reelle Nullstelle λ_0 des Polynoms

$$f(\lambda) = 8\sqrt{a_0a_4}^3\lambda^3 - 4a_0a_2a_4\lambda^2 + 2\sqrt{a_0a_4}(a_1a_3 - 4a_0a_4)\lambda + 4a_0a_2a_4 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2$$

mit $|\lambda_0| < 1$, wähle u und v so, dass $\cos(v-u) = \lambda_0$, gehe damit in den obigen Ansatz für b_2, c_2, b_0 und c_0 und berechne anschließend b_1 und c_1 . Damit hat man die beiden Koordinatenpolynome

$$p_1(t) := b_2t^2 + b_1t + b_0,$$

$$p_2(t) := c_2t^2 + c_1t + c_0$$

gefunden. Bei der Wahl von v und u hat man dabei noch einen Freiheitsgrad, den man gegebenenfalls für Forderungen an die Flächendarstellung ausnutzen kann.

Johann Hartl
Zentrum Mathematik M10
Technische Universität München
85747 Garching, Germany
hartl@ma.tum.de

Proc. 33. Süddeutsches Differentialgeometriekolloquium
Wien, 23. Mai 2008
pp. 66 – 72
ISBN 978-3-902233-04-2

Characterization and a Construction of Equiframed Curves

HORST MARTINI & KONRAD J. SWANEPOEL

1 Introduction

In this contribution, which is based on the paper [4], we give a constructive description of centrally symmetric *equiframed curves*, i.e., centrally symmetric closed convex curves that are touched at each of their points by some circumscribed parallelogram of smallest area. Equiframed curves and their higher dimensional analogues were introduced by Pelczynski and Szarek [7]. This class of curves properly contains the Radon curves introduced by Radon [8]. For a survey on them see [5, 6].

Clearly, any regular polygon with $2n$ sides is equiframed, and if n is even, the boundary is not a Radon curve. Equiframed curves occur as the unit circles of two-dimensional norms for which equality holds in a certain inequality in Minkowski Geometry, recently found in [6]. This inequality bounds the ratio between the area of the unit circle and a circumscribed parallelogram of smallest area ((2) below) in terms of the circumference of the unit circle. It can be seen as a dual to an old inequality of Lenz [3], bounding the ratio between the area of the unit circle and an inscribed parallelogram of largest

area in terms of the circumference (see (1)). In Section 2 we also give characterizations of equiframed curves (Proposition 2.2) similar to known ones of Radon curves (Proposition 2.3).

In Section 3 we describe the construction of a general equiframed curve based on the known construction of Radon curves. It turns out that equiframed curves are Radon curves with certain triangles added to the boundary.

2 Inequalities for Radon and equiframed curves

We let C_0 denote a centrally symmetric convex body in the plane and denote its *boundary curve* by ∂C_0 . The curve ∂C_0 is a *Radon curve* if each point of ∂C_0 is a vertex of some inscribed parallelogram of maximum area. Dually, ∂C_0 is an *equiframed curve* if each point of ∂C_0 is touched by some circumscribed parallelogram of minimum area. Note that our definition of a Radon curve is not the standard one, but chosen so as to be dual to the definition of an equiframed curve.

For any centrally symmetric C_0 we have

$$\frac{4}{\bar{v}} \leq p^-(C_0) = q^-(C_0) \text{ with equality iff } \partial C_0 \text{ is a Radon curve.} \quad (1)$$

This was first proved by Lenz [3] and subsequently rediscovered by Yaglom [9]. We now consider the dual of (1); see [6].

Theorem 2.1. *For any centrally symmetric convex body C_0 in the plane,*

$$q^+(C_0) = p^+(C_0) \leq \frac{8}{\bar{v}} \text{ with equality iff } \partial C_0 \text{ is an equiframed curve.} \quad (2)$$

The next two propositions give various characterizations of the equality case in (1) and (2).

Proposition 2.2. *The following are equivalent for a centrally symmetric curve ∂C_0 :*

1. ∂C_0 is equiframed,

2. each right semi-tangent of C_0 is a side of a circumscribed parallelogram of least area,
3. $\alpha(t)$ is constant,
4. $\alpha(t) = \frac{1}{4}p^+(C_0)|C_0|$ for all $t \in [0, U)$,
5. $p^+(C_0) = \frac{8}{U}$, i.e., in (2) equality holds.
6. each boundary point of C_0 lies on some circumscribed quadrilateral of smallest area.

The following proposition shows the subtle difference between equiframed curves and Radon curves. All of these characterizations are well-known [5, 6]. Note that 1–5 correspond to 1–5 of Proposition 2.2.

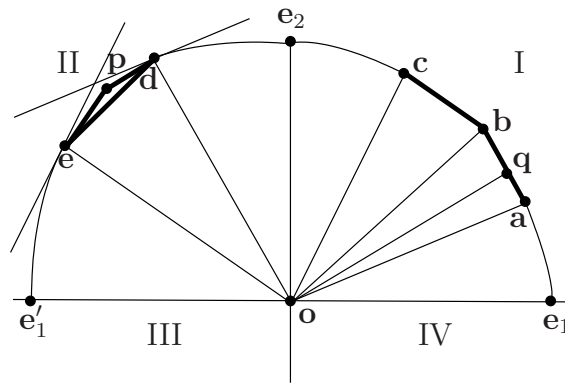


Figure 1: Gluing a triangle to a Radon curve with wedges.

Proposition 2.3. *The following are equivalent for a centrally symmetric curve ∂C_0 :*

1. ∂C_0 is a Radon curve,
2. each supporting line of C_0 is a side of some circumscribed parallelogram of smallest area,
3. $|\det[\mathbf{u}(t), \mathbf{v}]|$ is constant for all $t \in [0, U)$ and all unit vectors \mathbf{v} such that the line through $\mathbf{u}(t)$ parallel to \mathbf{v} supports C_0 ,

4. $|\det[\mathbf{u}(t), \mathbf{v}]| = \frac{1}{4}p^+(C_0)|C_0|$ for all $t \in [0, U)$ and all unit vectors \mathbf{v} as in 3,
5. $p^-(C_0) = \frac{4}{U}$, i.e., in (1) equality holds.
6. $\alpha(t) = \frac{1}{2}p^-(C_0)|C_0|$ for all $t \in [0, U)$,
7. each boundary point of C_0 is the midpoint of some circumscribed parallelogram of smallest area,

3 Construction of equiframed curves

Since equiframed curves turn out to be Radon curves, we first describe a construction of the latter. The standard construction [8, 1] is based on the fact that the “second quadrant” of a Radon curve is in some sense the rotated polar of the “first quadrant”. Since the polar of a convex body lies strictly speaking in the dual of the underlying space, one first has to fix a polarity, or in the language of linear algebra, identify the space and its dual via a nondegenerate bilinear form. In the usual construction of a Radon curve, the bilinear form is chosen to be symmetric (with the corresponding geometry being Euclidean), and then, as a second step in the construction, one has to rotate by a right angle in the Euclidean structure determined by the bilinear form. We simplify this construction by using a skew-symmetric bilinear form instead of a symmetric one (i.e., corresponding to symplectic geometry instead of Euclidean geometry). The details are as follows.

We fix the bilinear form $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ on \mathbb{R}^2 to be the determinant $\det[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, i.e., after choosing a unit of area we define $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ to be the signed area of the parallelogram with vertices $\mathbf{o}, \mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{y}$. If the line ℓ is polar to the point \mathbf{x} in the polarity defined by this form, then for any line m parallel to ℓ we write $[\mathbf{x}, m] := [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ for any $\mathbf{y} \in m$, with a similar definition for $[m, \mathbf{x}]$.

1 Construction of an arbitrary Radon curve

Let $\alpha > 0$ and fix a parallelogram P of area 4α centred at \mathbf{o} . The two lines through \mathbf{o} parallel to the sides of P divide the plane into four *quadrants*, which we label I, II, III, IV in any way such that III = -I, IV = -II, and

$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \geq 0$ for any $\mathbf{x} \in I$ and $\mathbf{y} \in II$. We consider the quadrants to be closed sets. Let \mathbf{e}_1 be the vector on a side of P on the boundary of I and IV, and \mathbf{e}_2 be the vector on a side of P on the boundary of I and II. Let $\mathbf{e}'_1 = -\mathbf{e}_1$.

Now choose any convex curve Γ_I joining \mathbf{e}_1 to \mathbf{e}_2 such that $\Gamma_I \cup \mathbf{oe}_1 \cup \mathbf{oe}_2$ is a closed convex curve. We now define a curve Γ_{II} in II. For each direction $\mathbf{v} \in \mathbf{e}_2\mathbf{e}'_1$ we let $\lambda\mathbf{v} \in \Gamma_{II}$ be such that $[\ell, \lambda\mathbf{v}] = \alpha$, where ℓ is the line parallel to \mathbf{v} supporting Γ_I . To finish the construction we let $\Gamma_{III} = -\Gamma_I$ and $\Gamma_{IV} = -\Gamma_{II}$. Then the Radon curve is $\Gamma_I \cup \Gamma_{II} \cup \Gamma_{III} \cup \Gamma_{IV}$.

Proposition 3.1. *The above construction gives a Radon curve C_0 with $p^-(C_0) = \alpha$. Furthermore, any Radon curve can be obtained in this way.*

This is due to Radon [8]. A proof may be found in [2].

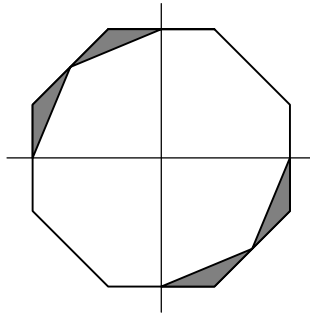


Figure 2: Constructing the regular octagon by gluing triangles to a Radon curve.

2 Construction of an arbitrary equiframed curve

Choose $\alpha > 0$ and Γ_I and proceed as in the construction of a Radon curve. Then glue triangles to Γ_{II} as follows. We define a *wedge* on a convex curve to be the union of two nonparallel segments on the curve joined at a common endpoint, called the *corner* of the wedge. Each wedge $\mathbf{ab} \cup \mathbf{bc} \subseteq \Gamma_I$ with corner \mathbf{b} on Γ_I corresponds to a segment \mathbf{de} on Γ_{II} with nonregular endpoints (Figure 1).

Here \mathbf{d} is parallel to \mathbf{ab} , \mathbf{e} is parallel to \mathbf{bc} , \mathbf{de} is parallel to \mathbf{b} , and there are supporting lines to Γ_{II} at \mathbf{d} and \mathbf{e} parallel to \mathbf{a} and \mathbf{c} , respectively. For each

such segment \mathbf{de} , choose any point \mathbf{p} in the closed triangle bounded by \mathbf{de} , the supporting line at \mathbf{d} parallel to \mathbf{a} , and the supporting line at \mathbf{e} parallel to \mathbf{c} . Replace the segment \mathbf{de} on Γ_{II} by $\mathbf{dp} \cup \mathbf{pe}$. This may be done arbitrarily for each wedge on Γ_{I} , provided that we keep the modified Γ_{II} convex. Note that it is possible for a countable infinity of triangles to be added, since there may be an infinite number of wedges on Γ_{I} .

We denote the modified Γ_{II} by Δ_{II} , and let $\Delta_{\text{IV}} = -\Delta_{\text{II}}$ (and $\Gamma_{\text{III}} = -\Gamma_{\text{I}}$ as before). Then the equiframed curve is $\Gamma_{\text{I}} \cup \Delta_{\text{II}} \cup \Gamma_{\text{III}} \cup \Delta_{\text{IV}}$.

Theorem 3.2. *The above construction gives an equiframed curve. Furthermore, any equiframed curve can be obtained in this way.*

Corollary 3.3. *An equiframed curve that does not contain any wedge is a Radon curve. In particular, an equiframed curve that is smooth or strictly convex is a Radon curve. \square*

Corollary 3.4. *An equiframed hexagon must be an affine regular hexagon or a parallelogram (if the hexagon is degenerate).*

In Figure 2 we show how a regular octagon arises as an equiframed curve in our construction.

Two shaded triangles are added to the Radon curve in the second quadrant.

Acknowledgements

Research supported by a grant from a cooperation between the Deutsche Forschungsgemeinschaft in Germany and the National Research Foundation in South Africa.

References

- [1] Birkhoff G. (1935) Orthogonality in linear metric spaces. *Duke Math. J.* **1**: 169–172.
- [2] Leichtweiss K. (1980) *Konvexe Mengen*, Berlin: Springer-Verlag, VEB Deutsch. Verl. Wiss.
- [3] Lenz H. (1958) Die Eilinen mit einer Schar konjugierter Durchmesserpaare. *Arch. Math.* **9**: 134–139.
- [4] Martini H., Swanepoel, K.J. (2004) Equiframed curves - a generalization of Radon curves. *Monatsh. Math.* **141**: 301–314.
- [5] Martini H., Swanepoel, K.J. (2006) Antinorms and Radon curves. *Aequationes Math.* **72**: 110–138.
- [6] Martini H., Swanepoel K.J., Weiß G. (2001) The geometry of Minkowski spaces - a survey. I. *Expo. Math.* **19**: 97–142.
- [7] Pełczyński A., Szarek S.J. (1991) On parallelepipeds of minimal volume containing a convex symmetric body in \mathbf{R}^n . *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **109**: 125–148.
- [8] Radon J. (1916) Über eine besondere Art ebener Kurven. *Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig. Math.-Phys. Kl.* **68**: 23–28.
- [9] Yaglom I.M. (1971) A certain extremal property of the number π . (Russian.) *Moskov. Gos. Ped. Inst. Učen. Zap.* 135–138.

Horst Martini, Konrad J. Swanepoel

Fakultät für Mathematik

Technische Universität Chemnitz

D-09107 Chemnitz, Germany

{martini,konrad-johann.swanepoel}@mathematik.tu-chemnitz.de

Programm

9.30 Eröffnung durch Hellmuth STACHEL

9.40 - 10.10 Karl-Heinz BRAKHAGE Numerische Verfahren zur Minimalflächenberechnung

10.10 - 10.40 Mike SCHERFNER Towards a proof of the Chern-conjecture for isoparametric hypersurfaces in spheres

10.40 - 11.10 Yong HE Die von Nodoiden verzweigten Flächen

11.10 - 11.30 Pause

11.30 - 12.00 Johann HARTL Noch einmal polynomiale Drehflächen

12.00 - 12.30 Martin PETERNELL On a class of rational surfaces in 4-space generalizing surfaces with linear normal vector fields

12.30 - 14.30 Mittagspause

14.30 - 15.00 Ivan IZMESTIEV On the rigidity of a class of non-convex polyhedra

15.00 - 15.30 Eberhard TEUFEL Konforme Breite in der Möbius Geometrie

15.30 - 16.00 Horst MARTINI Über eine Verallgemeinerung der Radon-Kurven

16.00 - 16.20 Pause

16.20 - 16.50 Thomas SCHNEIDER Anwendung lokaler geodätischer Abbildungen auf inzidenzgeometrische Probleme

16.50 - 17.20 Georg NAWRATIL Main Theorem on Planar Parallel Manipulators with Cylindrical Singularity Surface

17.20 - 17.40 Hans HAVLICEK Erinnerungen an Heinrich Brauner (1928 – 1990)

Heurigenbesuch

Teilnehmer

Name	Titel des Vortrags
Thomas BACKMEISTER	–
Gert BÄR	–
Gerd BARON	–
Bernhard BLASCHITZ	–
Karl-Heinz BRAKHAGE	Numerische Verfahren zur Minimalflächenberechnung
Martins BRUVERIS	–
David GRUBER	–
Johann HARTL	Noch einmal polynomiale Drehflächen
Hans HAVLICEK	Erinnerungen an Heinrich Brauner (1928 – 1990)
Yong HE	Die von Nodoiden verzweigten Flächen
Ivan IZMESTIEV	On the rigidity of a class of non-convex polyhedra
Kristoffer JOSEFSSON	–
Richard KOCH	–
Wolfgang KÜHNEL	–
Friedrich MANHART	–
Horst MARTINI	Über eine Verallgemeinerung der Radon-Kurven
Sybille MICK	–
Georg NAWRATIL	Main Theorem on Planar Parallel Manipulators with Cylindrical Singularity Surface
Boris ODEHNAL	–
Peter PAUKOWITSCH	–
Martin PETERNELL	On a class of rational surfaces in 4-space generalizing surfaces with linear normal vector fields
Steffen POPPITZ	–
Rolf RIESINGER	–
Mike SCHERFNER	Towards a proof of the Chern-conjecture for isoparametric hypersurfaces in spheres
Thomas SCHNEIDER	Anwendung lokaler geodätischer Abbildungen auf inzidenzgeometrische Probleme
Hellmuth STACHEL	–
Eberhard TEUFEL	Konforme Breite in der Möbius Geometrie
Hermann VOGEL	–
Hans VOGLER	–
Gunter WEISS	–

Kurzfassungen aller Vorträge

Numerische Verfahren zur Minimalflächenberechnung

Karl-Heinz Brakhage

brakhage@igpm.rwth-aachen.de

RWTH Aachen
Geometrie und Praktische Mathematik
Templergraben 55
D-52056 Aachen

In vielen physikalisch technischen Anwendungen trifft man auf Minimalflächen. Die bekanntesten und am besten zu visualisierenden sind wohl die Seifenfilmflächen zu einer vorgegeben Berandung aus Draht. Die Form der Fläche wird dabei durch ihre Oberflächenspannung und somit auch durch die mittlere Krümmung bestimmt. Die lokale Minimierung einer Fläche entspricht der Nullstellenbestimmung der mittleren Krümmung. Daher lassen sich Minimalflächen numerisch mittels partieller Differentialgleichungen bestimmen, indem man eine geeignete krümmungsabhängige Flussfunktion ansetzt. D.h.: Man verformt die Fläche entsprechend ihrer mittleren Krümmung. In dem Vortrag soll ein solches Verfahren, das auf der sogenannten Level Set Methode basiert, vorgestellt und erläutert werden.

Towards a proof of the Chern-conjecture for isoparametric hypersurfaces in spheres

Mike Scherfner

scherfner@math.tu-berlin.de

Inst. of Mathematics, Sekr. MA 8-3,
Str. d. 17. Juni 136,
10623 Berlin, Germany

One important problem in differential geometry is to investigate minimal hypersurfaces in space forms, and the particular problem stated below stimulated geometers during the last decades. We will be concerned with hypersurfaces of \mathbb{S}^{n+1} , which are called isoparametric of type g if they have g distinct constant principal curvatures with constant multiplicities. Such hypersurfaces with $g \leq 3$ were classified by E. Cartan long ago.

In 1968 S.-S. Chern proposed the following:

Chern conjecture: Let M^n , $n \geq 2$, be a closed minimal hypersurface of \mathbb{S}^{n+1} with constant scalar curvature, then M^n is isoparametric.

There have been many attempts in order to solve this conjecture, but without complete success. It has only been possible to prove special cases and we will list and comment some main results.

Die von Nodoiden verzweigten Flächen

Yong He

he@mathematik.tu-darmstadt.de

TU Darmstadt
Schlossgartenstr. 7
64289 Darmstadt

Die Lawson-Korrespondenz beschreibt eine 1:1 Relation (bis auf Translation) zwischen H -Flächen (d.h. Flächen konstanter mittlerer Krümmung) in \mathbb{R}^3 und Minimalflächen in der 3-Sphäre S^3 . Dadurch erhalten wir eine Methode um neue H -Fläche in \mathbb{R}^3 zu konstruieren. Von Karcher stammt die Idee, Randkurven der zu konstruierenden konjugierten Minimalflächen in S^3 als Integralkurven rotierender Vektorfelder zu beschreiben. Solche Vektorfelder sind durch Hopf-Faserung in S^3 gegeben. Mit dieser Methode können wir Minimalflächen in S^3 konstruieren, dessen konjugierte H -Flächen von Nodoiden abzweigen. In dem Vortrag wird die Konstruktionsmethode sowie einige Resultate über die Existenz und Eindeutigkeit der neuen Flächen vorgestellt.

Noch einmal polynomiale Drehflächen

Johann Hartl

hartl@ma.tum.de

Zentrum Mathematik M10
Technische Universität München
85747 Garching

Auf dem Differentialgeometrie-Kolloquium in Karlsruhe am 11. Juni 2004 zeigte ich, dass sich jede Drehfläche, die eine Parameterdarstellung besitzt, in der die Koordinatenfunktionen Polynome in den Parametern sind, eine polynomiale Parameterdarstellung der folgenden Gestalt besitzt:

$$\begin{bmatrix} x_1(t, u) \\ x_2(t, u) \\ x_3(t, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(t) + \frac{t_2}{p_1^2(t)+p_2^2(t)}((p_1^2(t) - p_2^2(t))\bar{p}_1(t, t_2) + 2p_1(t)p_2(t)\bar{p}_2(t, t_2)) \\ p_2(t) + \frac{t_2}{p_1^2(t)+p_2^2(t)}(2p_1(t)p_2(t)\bar{p}_1(t, t_2) - (p_1^2(t) - p_2^2(t))\bar{p}_2(t, t_2)) \\ p_3(t + t_2) \end{bmatrix},$$

wobei

$$t_2 =: u \cdot (p_1^2(t) + p_2^2(t)),$$

und wobei die p_1, p_2, p_3 beliebige Polynome in einer Veränderlichen sind und die \bar{p}_1, \bar{p}_2 Polynome in zwei Veränderlichen sind, die auf einfache Weise von p_1 bzw. p_2 abhängen.

In der anschließenden Diskussion kam die Frage auf, welche ebenen Kurven als Meridiane solcher Drehflächen vorkommen können. Auf diese Frage soll der Vortrag in Wien 2008 kurz eingehen.

On Generalized LN-Surfaces in 4-Space

M. Peternell

peternell@geometrie.tuwien.ac.at

**Vienna University of Technology,
Institute of Discrete Mathematics and Geometry,
Wiedner Hauptstrasse 8-10/104,
A-1040 Vienna, Austria**

A class of two-dimensional rational surfaces F in \mathbb{R}^4 is investigated, whose tangent planes satisfy the following property: For any three-space E in \mathbb{R}^4 there exists a unique tangent plane $T(u, v)$ of F which is parallel to E . For all possible varieties of tangent planes $T(u, v)$ the corresponding families of surfaces in \mathbb{R}^4 are constructed explicitly. Quadratically parameterized surfaces in \mathbb{R}^4 occur as special cases. This construction generalizes the concept of LN-surfaces in \mathbb{R}^3 to two-dimensional surfaces in \mathbb{R}^4 . Further it is shown that these surfaces have similar properties concerning the convolution operation as LN-surfaces in \mathbb{R}^3 .

On the rigidity of a class of non-convex polyhedra

Ivan Izvestiev

izvestiev@math.tu-berlin.de

**Institut für Mathematik, MA 8-3
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 136
10623 Berlin, Germany**

By a classical result of Cauchy and Dehn, every convex polyhedron is infinitesimally rigid. On the other hand, there are many examples of infinitesimally flexible non-convex polyhedra. One can ask under what conditions is a non-convex polyhedron infinitesimally rigid.

It is conjectured that a polyhedron P is infinitesimally rigid, if the following two conditions are satisfied:

1. P is *weakly convex*, that is the vertices of P are the vertices of its convex hull;
2. P is *decomposable*, that is P can be triangulated without additional vertices.

There are several partial results on this conjecture due to Schlenker and Connelly and Schlenker.

In this talk we outline a proof (from a joint work of Jean-Marc Schlenker and the speaker) of the infinitesimal rigidity of P under an additional assumption

3. P is *codecomposable*, that is the complement of P in its convex hull can be triangulated without additional vertices.

The proof relies on a result of independent interest concerning the Hilbert-Einstein function of a triangulated convex polyhedron. We determine the

signature of the Hessian of this function with respect to deformations of the interior edges. In particular, if there are no interior vertices, then the Hessian is negative definite.

Konforme Breite in der Möbius-Geometrie

Eberhard Teufel

Teufel@mathematik.uni-stuttgart.de

**Fachbereich Mathematik,
Universität Stuttgart,
70550 Stuttgart, Germany**

Die Breite eines konvexen Körpers in der euklidischen Ebene zu einer vorgegebenen Richtung ist der Abstand seiner zugehörigen parallelen Stützgeraden. Konvexe Körper konstanter Breite sind die wohlbekanntesten Gleichdicke.

Der Vortrag beinhaltet gemeinsame Resultate mit R. Langevin (Dijon): Wir definieren eine konform invariante Breite für Paare von Kurven in der Möbius Ebene. Wir charakterisieren insbesondere die Paare von Kurven konstanter konformer Breite.

Über eine Verallgemeinerung der Radon-Kurven

Horst Martini

`martini@mathematik.tu-chemnitz.de`

**Fakultät für Mathematik,
TU Chemnitz,
D-09107 Chemnitz**

Die sogenannten “equiframed curves” sind zentralsymmetrische, konvexe und planare Kurven, die in jedem Punkt von einem umbeschriebenen Parallelogramm kleinsten Flächeninhalts berührt werden. Diese Kurven sind u.a. wichtig in der Funktionalanalysis. Sie wurden deshalb, mit ihren höherdimensionalen Analoga, 1991 von den Funktionalanalytikern Pelczynski und Szarek eingeführt.

Die Klasse der Radon-Kurven, sehr wichtig in Konvex- und Minkowski-Geometrie, stellt eine wichtige Unterklasse dar. Im Vortrag wird ein konstruktiver Zugang gezeigt, der von Radon-Kurven ausgeht, und es werden für beide Kurvenklassen charakteristische Eigenschaften vorgestellt, die den Unterschied deutlich machen und auch zeigen, dass (in einem gewissen Sinne) eine Dualität zwischen beiden Kurvenklassen besteht.

Anwendungen lokaler geodätischer Abbildungen

Thomas Schneider

thomas.schneider@i-u.de

Mühlingstr. 29 Germany, Bruchsal
D-69121 Heidelberg Campus 1
D-76646 Bruchsal

Bekanntlich lassen Flächen konstanter Gauß-Krümmung *lokale geodätische Abbildungen* λ in die reelle euklidische Ebene zu, also lokale Diffeomorphismen, die Geodätische der Fläche auf Geraden bzw. Geradenstücke in der Ebene abbilden. Im Falle einer Rotationsfläche im \mathbb{R}^3 mit konstanter positiver Gauß-Krümmung K kann eine derartige Abbildung λ sehr einfach als Komposition einer lokalen Isometrie auf die Sphäre mit Radius $1/\sqrt{K}$ und der Zentralprojektion aus der Sphäre auf eine Ebene, die das Zentrum der Sphäre nicht enthält, gewonnen werden.

1. Wir können auf solchen Flächen Gebiete abgrenzen, die *lineare Räume* im Sinne der Inzidenzgeometrie sind, bei denen also zu je zwei voneinander verschiedenen Punkten genau eine Verbindungsgeodäte existiert. Mit Hilfe der geodätischen Abbildungen und ihrer Inversen übertragen sich inzidenzgeometrische Konstruktionen (z.B. Desarguesfiguren) von der reellen euklidischen Ebene auf die auf der Rotationsfläche realisierten linearen Räume.
2. Als Konsequenz des klassischen Satzes von Clairaut erhält man auf beliebigen Rotationsflächen im \mathbb{R}^3 lokale Parametrisierungen von Geodätischen, die jedoch im Allgemeinen *nicht* global fortsetzbar sind. So ergeben sich etwa im Falle der *Spindelflächen* Definitionslücken der Clairaut-Parametrisierungen an den Umkehrpunkten der Geodätischen, die zwischen zwei Breitenkreisen oszillieren.

Geodätische Abbildungen λ von einer Spindelfläche in die Ebene erweisen sich auch in diesem Kontext als hilfreich: Durch Hochhebung von

λ^{-1} in einer Überlagerung der Spindelfläche erhalten wir globale Parametrisierungen von Geodätischen. Auf dieser Grundlage gewinnen wir einen vollständiger Überblick über das globale Verhalten der Geodäten auf der Spindelfläche.

Main Theorem on Planar Parallel Manipulators with Cylindrical Singularity Surface

Georg Nawratil

nawratil@geometrie.tuwien.ac.at

Vienna University of Technology,
Institute of Discrete Mathematics and Geometry,
Wiedner Hauptstrasse 8-10/104, Vienna A-1040, Austria

In this article we prove that there do not exist non-architecturally singular Stewart Gough Platforms with planar base and platform and no four anchor points collinear, whose singularity set for any orientation of the platform is a cylindrical surface with rulings parallel to a given fixed direction p in the space of translations.

Erinnerungen an Heinrich Brauner (1928 – 1990)

Hans Havlicek

havlicek@geometrie.tuwien.ac.at

**Forschungsgruppe Differentialgeometrie und Geometrische
Strukturen,
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie,
Wiedner Hauptstraße 8–10,
A-1040 Wien, Österreich.**

Zur 80. Wiederkehr des Geburtstages von

O.Univ.Prof. Mag.rer.nat. Dr.phil. Dr.techn. Heinrich Brauner

sollen in diesem Vortrag Eigenschaften, Wesensmerkmale und Leistungen dieses österreichischen Geometers aufgezeigt werden. Dabei möchte ich zumindest ein wenig von dem vermitteln, was aus meiner Sicht das Besondere dieses außergewöhnlichen Wissenschaftlers und Menschen ausmachte.

Bisherige Kolloquien über Differentialgeometrie

1. Kolloquium am 18. 6. 1976 in München
2. Kolloquium am 10. 6. 1977 in Darmstadt
3. Kolloquium am 26. 5. 1978 in München
4. Kolloquium am 15. 6. 1979 in Würzburg
5. Kolloquium am 6. 6. 1980 in Karlsruhe
6. Kolloquium am 19. 6. 1981 in Darmstadt
7. Kolloquium am 11. 6. 1982 in Stuttgart
8. Kolloquium am 3. 6. 1983 in München
9. Kolloquium am 22. 6. 1984 in Würzburg
10. Kolloquium am 7. 6. 1985 in Karlsruhe
11. Kolloquium am 30. 5. 1986 in Darmstadt
12. Kolloquium am 19. 6. 1987 in Stuttgart
13. Kolloquium am 3. 6. 1988 in München
14. Kolloquium am 26. 5. 1989 in Würzburg
15. Kolloquium am 15. 6. 1990 in Karlsruhe
16. Kolloquium am 31. 5. 1991 in Thessaloniki
17. Kolloquium am 29. 5. 1992 in Dresden
18. Kolloquium am 11. 6. 1993 in Darmstadt
19. Kolloquium am 3. 6. 1994 in Stuttgart
20. Kolloquium am 19. 5. 1995 in München
21. Kolloquium am 7. 6. 1996 in Würzburg
22. Kolloquium am 30. 5. 1997 in Karlsruhe
23. Kolloquium am 22. 5. 1998 in Dresden
24. Kolloquium am 14. 5. 1999 in Darmstadt
25. Kolloquium am 2. 6. 2000 in Wien
26. Kolloquium am 25. 5. 2001 in Stuttgart
27. Kolloquium am 10. 5. 2002 in Würzburg
28. Kolloquium am 26. 6. 2003 in München
29. Kolloquium am 11. 6. 2004 in Karlsruhe
30. Kolloquium am 27. 5. 2005 in Dresden
31. Kolloquium am 16. 6. 2006 in Darmstadt
32. Kolloquium am 4. 5. 2007 in Stuttgart
33. Kolloquium am 23. 5. 2008 in Wien



ISBN 978-3-902233-04-2



9 783902 233042