

DISSERTATION

Orthogonalitätstreue Plückertransformationen hyperbolischer Räume

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der technischen Wissenschaften unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. Mag. Dr. Hans HAVLICEK
Institut für Geometrie

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Technisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

von

Mag. Klaus LIST
Lange Gasse 44/2/3/27, 1080 Wien

Wien, im Februar 1998

Kurzfassung

Sei Π ein n -dimensionaler projektiver Raum ($2 \leq n < \infty$) mit einem euklidischen Algebräisierungskörper \mathbb{K} . Ein Körper heißt euklidisch, wenn die Menge der Quadrate $\mathbb{K}^{(2)}$ ohne der 0 einen, und damit den einzigen Positivitätsbereich von \mathbb{K} bildet. In Π besitzt dann jede ovale Quadrik \mathcal{K} Innenpunkte und jede Gerade durch einen Innenpunkt ist Sekante von \mathcal{K} . Der Spurraum von Π auf der Menge der Innenpunkte von \mathcal{K} bildet das Cayley-Klein Modell eines n -dimensionalen hyperbolischen Raumes \mathcal{H} . Zwei Geraden \bar{a}, \bar{b} der Geradenmenge $\bar{\mathcal{G}}$ von \mathcal{H} bezeichnen wir als orthogonal-schneidend, wenn

$$a \cap b^\pi \neq \emptyset \quad \text{und} \quad \bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset.$$

Dabei bezeichnet π die durch die Polarität von \mathcal{K} erzeugte Abbildung auf den Unterräumen von Π , und a, b sind die projektiven Geraden, deren Schnitt mit der Menge der Innenpunkte die hyperbolischen Geraden \bar{a}, \bar{b} ergeben. Wir nennen \bar{a}, \bar{b} verwandt und schreiben dafür $\bar{a} \sim \bar{b}$, wenn $\bar{a} = \bar{b}$ gilt, oder die beiden Geraden einander orthogonal-schneiden.

Die Menge $\bar{\mathcal{G}}$ zusammen mit der binären Relation \sim bildet den Plückerraum $(\bar{\mathcal{G}}, \sim)$; d.h. \sim ist eine reflexive und symmetrische Relation, bei der es zu zwei beliebigen Geraden \bar{a}, \bar{b} eine endliche Folge $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_k \in \bar{\mathcal{G}}$ gibt mit

$$\bar{a} \sim \bar{n}_1 \sim \dots \sim \bar{n}_k \sim \bar{b}.$$

Eine Bijektion $\varphi : \bar{\mathcal{G}} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$ heißt Plückertransformation von $(\bar{\mathcal{G}}, \sim)$, wenn

$$\bar{a} \sim \bar{b} \iff \bar{a}^\varphi \sim \bar{b}^\varphi \quad \text{für alle} \quad \bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathcal{G}}.$$

Die vorliegende Arbeit untersucht die Plückertransformation von $(\bar{\mathcal{G}}, \sim)$. Es werden Punktabbildungen von \mathcal{H} bzw. Π gesucht, die Plückertransformationen induzieren. Bei dieser Untersuchung ist eine Unterscheidung der folgenden drei Fälle notwendig: $\dim \mathcal{H} = 2$, $\dim \mathcal{H} = 3$ und $\dim \mathcal{H} \geq 4$. Es zeigt sich, daß bei $\dim \mathcal{H} \neq 3$

die Plückertransformationen von $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ genau die durch Kollineationen von \mathcal{H} erzeugten Geradenabbildungen sind. Die Kollineationen von \mathcal{H} ihrerseits lassen sich stets eindeutig zu Kollineationen von Π erweitern, die mit π kommutieren. Somit werden bei $\dim \mathcal{H} \neq 3$ die Plückertransformationen von $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ genau durch die Kollineationen von Π induziert, die mit π kommutieren.

Der Fall $\dim \mathcal{H} = 3$ nimmt eine Sonderstellung ein. Sei $\mathbb{L} := \mathbb{K}(i)$ der eindeutige quadratische Erweiterungskörper von \mathbb{K} mit $i^2 = -1$, und $\Pi_{\mathbb{L}}$ die projektive Gerade über \mathbb{L} . Dann ist bei $\dim \mathcal{H} = 3$ jede Plückertransformation φ von $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ das Produkt einer durch einen Automorphismus ζ von \mathbb{L} und einer durch eine Projektivität von $\Pi_{\mathbb{L}}$ induzierten Plückertransformation. Genau im Fall $\zeta|_{\mathbb{K}} \not\subset \mathbb{K}$ kann die Plückertransformation φ nicht durch eine Kollineation von \mathcal{H} bzw. Π erzeugt werden. Da \mathbb{R} ein euklidischer Körper ist und Automorphismen $\zeta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\zeta|_{\mathbb{R}} \not\subset \mathbb{R}$ existieren, ist auch die Existenz von Plückertransformationen gezeigt, die nicht durch Kollineationen induziert werden.

In den betrachteten Plückerräumen $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ kann die Kennzeichnung von Plückertransformationen vereinfacht werden. Denn schon jede Bijektion von $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ mit

$$\overline{a} \sim \overline{b} \implies \overline{a}^\varphi \sim \overline{b}^\varphi \quad \text{für alle } \overline{a}, \overline{b} \in \overline{\mathcal{G}}$$

ist bereits Plückertransformation.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Hilfsmittel aus Algebra, Topologie und Geometrie	8
1.1 Euklidische Körper	8
1.2 Automorphismen quadratischer Erweiterungen	11
1.3 Automorphismen von \mathbb{C}	13
1.4 Die projektive Koordinatentopologie	15
1.5 Projektive und affine Räume über euklidischen Körpern	18
1.6 Miquelsche Möbiusebenen	20
2 Plücker Räume und Hyperbolische Geometrie	23
2.1 Definition eines Plücker Raumes	23
2.2 Beispiele von Plücker Räume	24
2.2.1 Satz von June Lester	24
2.2.2 Satz von Chow	24
2.2.3 Ein Beispiel aus der Liegeometrie	25
2.2.4 Orthogonalitätstreue Plückertransformationen des euklidischen Raumes \mathbb{R}^n	26
2.2.5 Orthogonalitätstreue Plückertransformationen elliptischer Räume	26

	4
2.3	Hyperbolische Räume über euklidischen Körpern 27
2.3.1	Das Cayley-Klein Modell 27
2.3.2	Der Plückerraum $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ 28
2.3.3	Problemstellung 33
3	Orthogonalitätstreue Plückertransformationen hyperbolischer Räume 34
3.1	Der Fall $\dim \mathcal{H} \geq 4$ 34
3.1.1	Induzierte Kollineation auf \mathcal{H} 34
3.1.2	Fortsetzung in den projektiven Raum 38
3.2	Der zweidimensionale Fall 40
3.2.1	Eine Kennzeichnung der Plückertransformationen 40
3.2.2	Induzierte Kollineationen auf \mathcal{H} und Π 43
3.3	Der dreidimensionale Fall 49
3.3.1	Die Plückergruppe des Raumes $(\overline{\mathcal{G}}, \parallel)$ 49
3.3.2	Die Plückergruppe des Raumes $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ 51
3.3.3	Algebraische Beschreibung der Plückergruppe von $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$. 53
3.3.4	Kollineationen und Plückertransformationen 56
Anhang	61
A.1	Rechnung zum Beweis von Satz 3.18 61
A.2	Beweis von Satz 2.2 66
Literaturverzeichnis	67

Einleitung

In *Vorlesungen über Differentialgeometrie III* [6] zeigt W. BLASCHKE, daß die Lietransformationen der Ebene genau jene Bijektionen auf der Menge der Liezykel sind, die berührende Lage erhalten. Zuvor hat er die Lietransformationen rein analytisch definiert. Damit kennzeichnet er als einer der ersten eine Menge von Abbildungen in einer Geometrie dadurch, daß eine binäre Relation unter diesen Abbildungen erhalten bleiben.

Nach W. BLASCHKE und insbesondere in der neueren Zeit haben sich viele Geometer mit ähnlichen Problemstellungen auseinandergesetzt. So haben zum Beispiel F.S. BECKMAN und D.A. QUARLES 1953 in ihrer Arbeit *On isometries of Euclidean Spaces* [2] gezeigt, daß Abbildungen eines euklidischen Raumes \mathbb{R}^n ($n > 1$), die einen Abstand $k \in \mathbb{R}^+$ stets erhalten, bereits Kongruenzabbildungen von \mathbb{R}^n sind. Weitere Beispiele für Kennzeichnungen von Abbildungen durch möglichst schwache Bedingungen findet man bei J. LESTER [29], W.L. CHOW [10], W.-L. HUANG [23], W. BENZ [3] und H. HAVLICEK [17], [18], [21], [22].

In *Geometrische Transformationen* [3] führt W. BENZ den Begriff eines Plücker-raumes ein. Ein Plückerraum ist nichts anderes als eine beliebige Menge M zusammen mit einer Relation \sim . Die Relation \sim muß reflexiv und symmetrisch sein, und weiters muß es zu zwei verschiedenen Elementen $a, b \in M$ stets eine endliche Kette von in Relation stehender Elementen aus M geben, die a mit b “verbindet”. Eine Plückertransformation ist dann eine Bijektion auf M , die das in Relation Stehen in beiden Richtungen erhält. Viele der obigen Beispiele (W. BLASCHKE [6], J. LESTER [29], W.L. CHOW [10], W. BENZ [3], W.-L. HUANG [23] und H. HAVLICEK [17], [18], [21]) erweisen sich als Plückerräume, und die gekennzeichneten Abbildungen als die zugehörigen Plückertransformationen (siehe dazu auch Abschnitt 2.2).

W. BENZ und E.M. SCHRÖDER haben in *Bestimmung der orthogonalitätstreuen Permutationen euklidischer Räume* [5] folgenden Plückerraum untersucht: Die

Menge M bestehe aus den Geraden des euklidischen Raumes \mathbb{R}^n ($n > 3$)¹. Zwei Geraden stehen in Relation, wenn sie gleich sind, oder einander orthogonal schneiden. Für $n \geq 4$ werden die Plückertransformationen durch Ähnlichkeiten induziert. In einem dreidimensionalen euklidischen Raum können die Plückertransformationen auch durch Derivationen induziert werden. H. HAVLICEK hat dieselben Plückergruppen in anderen Geometrien untersucht. Aber auch in elliptischen [17] und symplektischen [18] Räumen stellt sich heraus, daß der dreidimensionale Fall eine Sonderstellung einnimmt.

In der vorliegenden Arbeit werden die orthogonalitätstreuen Plückertransformationen in hyperbolischen Räumen betrachtet. Wir stellen uns dazu den hyperbolischen Raum \mathcal{H} stets in einen projektiven Raum Π , mit dem euklidischen Algebraisierungskörper \mathbb{K} , eingebettet vor. Weiters muß unterschieden werden, ob \mathcal{H} zweidimensional (siehe Kapitel 3.2), dreidimensional (siehe Kapitel 3.3) oder vier- bzw. höherdimensional (siehe Kapitel 3.1) ist. Die einzelnen Fälle erfordern sehr unterschiedliche Beweismethoden.

Bei $\dim \mathcal{H} = 2$ und $\dim \mathcal{H} \geq 4$ können wir zeigen, daß alle Plückertransformationen durch Kollineationen von \mathcal{H} induziert werden, die eindeutig nach Π fortgesetzt werden können. Der Beweis im zweidimensionalen Fall stützt sich wesentlich auf die Konstruktion einer Desarguesfigur, mit deren Hilfe die Invarianz der kopunktalen Lage von Geraden gezeigt werden kann. Ist $\dim \mathcal{H} \geq 4$, so kann ähnlich wie in euklidischen Räumen [5] vorgegangen werden. Entscheidend geht dabei der Satz ein, daß für drei paarweise verschiedene hyperbolische Geraden a, b, c mit a, b schneidend und c orthogonal-schneidend zu a, b , die Gerade c den Schnittpunkt von a, b enthält. Sowohl im zweidimensionalen Fall, als auch im vier- bzw. höherdimensionalen Fall kann die durch die Plückertransformation induzierte Kollineation von \mathcal{H} eindeutig nach Π erweitert werden. Es sind dazu allerdings topologische Methoden und ein Satz von R. FRANK [13, Satz 2] notwendig.

Wie schon im euklidischen, elliptischen und symplektischen Räumen nimmt der 3-dimensionale hyperbolische Plückerraum eine Sonderstellung ein. Es gibt in solchen Räumen Plückertransformationen die nicht durch Kollineationen induziert werden. Es läßt sich die Absolutquadrik \mathcal{K} von \mathcal{H} als Möbiusebene auffassen und eine Bijektion zwischen \mathcal{K} und der projektiven Geraden über dem einzigen quadratischen Erweiterungskörper \mathbb{L} von \mathbb{K} definieren. So kann man zeigen, daß auch die Automorphismen von \mathbb{L} Plückertransformationen in \mathcal{H} induzieren, die nicht von Kollineationen stammen.

¹Im Falle $n = 2$ liegt hierbei kein Plückerraum vor.

In alle hyperbolischen Plückerräumen gelingt es uns zu zeigen, daß die Bedingungen Plückertransformation zu sein, reduziert werden können. Es reicht vorauszusetzen, daß es sich um eine Bijektion auf den Geraden von \mathcal{H} handelt, welche das Orthogonalschneiden erhält.

Ich danke Herrn Professor Dr. H. Havlicek für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie seine wertvollen Ideen und Hinweise.

Kapitel 1

Hilfsmittel aus Algebra, Topologie und Geometrie

In diesem ersten Kapitel sollen Ergebnisse aus verschiedenen Teilen der Geometrie bzw. Mathematik gesammelt werden, die in den folgenden Kapiteln Anwendungen finden. Wir beschäftigen uns insbesondere mit euklidischen Körpern, ihrer eindeutigen quadratischen Erweiterung, Körperautomorphismen und projektiven bzw. affinen Räumen über euklidischen Körpern. Alle in dieser Arbeit betrachteten projektiven Räume besitzen nämlich einen euklidischen Algebraisierungskörper. Die miquelschen Möbiusebenen spielen insbesondere im letzten Abschnitt über 3-dimensionale hyperbolische Plücker Räume eine Rolle. Die Absolutquadrik eines solchen Raumes ist ein Modell einer miquelschen Möbiusebene.

1.1 Euklidische Körper

Wir wollen davon ausgehen, daß dem Leser der Begriff eines Körpers bekannt ist, wobei wir unter einem Körper stets einen kommutativen Körper verstehen. Für nichtkommutative Körper werden wir im folgenden den Begriff *Schiefkörper* verwenden.

Definition 1.1 *Ein Körper¹ \mathbb{K} heißt angeordnet, falls in \mathbb{K} eine Teilmenge P so existiert, daß gilt:*

¹ \mathbb{K} könnte auch Schiefkörper sein.

1. Für jedes Element $x \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der drei Aussagen

$$x \in P, \quad -x \in P, \quad x = 0.$$

2. Aus $x, y \in P$ folgt stets $x + y \in P$ und $x \cdot y \in P$.

P heißt *Positivitätsbereich*, die Elemente aus P *positiv* und die Elemente aus $\mathbb{K} \setminus (P \cup \{0\})$ *negativ*.

Durch die Relation $<$ bzw. \leq auf $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ können die Elemente von \mathbb{K} "geordnet" werden:

$$x < y \iff y - x \in P \text{ bzw. } x \leq y \iff x = y \text{ oder } x < y.$$

Bezeichnen wir mit $\mathbb{K}^{(2)}$ die Menge der Quadrate in \mathbb{K} , so ist $\mathbb{K}^{(2)} \setminus \{0\}$ Teilmenge jedes Positivitätsbereiches, denn für jedes $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gilt

$$xx = (-x)(-x) = x^2 > 0.$$

Da $1 = 1 \cdot 1$ Quadrat ist, ergibt sich

$$1 + 1 + \dots + 1 > 0$$

und damit ist die Charakteristik² jedes angeordneten Körpers \mathbb{K} gleich 0.

Definition 1.2 Ein Körper \mathbb{K} heißt *euklidisch*, wenn $\mathbb{K}^{(2)} \setminus \{0\}$ Positivitätsbereich ist, also jedes positive Element Quadrat ist.

Ein euklidischer Körper besitzt sonst keinen Positivitätsbereich, da $\mathbb{K}^{(2)} \setminus \{0\}$ Teilmenge jedes Positivitätsbereiches ist. Jeder euklidische Körper gestattet somit genau eine Anordnung. Alle Eigenschaften angeordneter Körper gelten im speziellen für euklidische Körper.

Ein Beispiel eines euklidischen Körpers ist $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, die Menge der reellen Zahlen zusammen mit der Addition und Multiplikation als Verknüpfungen. Offenbar ist $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^{(2)} \setminus \{0\}$ ein, und damit der einzige Positivitätsbereich.

²Als *Charakteristik* eines Körpers bezeichnet man die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $n \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n = 0$. Gibt es kein solches n , so setzen wir $\text{Char}\mathbb{K} = 0$.

Ein weiteres Beispiel eines euklidischen Körpers ist der *Körper der konstruierbaren Zahlen*, der folgendermaßen erzeugen werden kann: Ist $c \in \mathbb{Q}^+$ keine Quadratzahl, so ist die quadratische Gleichung

$$x^2 - c = 0$$

über \mathbb{Q} nicht lösbar; d.h. das Polynom $x^2 - c$ ist über \mathbb{Q} *irreduzibel*. Dann erhalten wir durch *Adjunktion* von $\sqrt{c} \in \mathbb{R}$ den *quadratischen Erweiterungskörper* $\mathbb{Q}(\sqrt{c}) = \{a + b\sqrt{c} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Wird die Adjunktion aller $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$ durchgeführt, so erhalten wir einen Erweiterungskörper \mathbb{K}_1 von $\mathbb{K}_0 := \mathbb{Q}$. Im nächsten Schritt erhalten wir durch Adjunktion aller $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ mit $x \in \mathbb{K}_1 \cap \mathbb{R}^+$ den Erweiterungskörper \mathbb{K}_2 . Durch Iteration dieses Verfahrens erhalten wir die Folge von Körpern $\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots$. Die Vereinigung

$$\mathbb{K} = \bigcup \mathbb{K}_i$$

bezeichnen wir als den Körper der konstruierbaren Zahlen³. \mathbb{K} ist Teilmenge von \mathbb{R} und $\mathbb{K}^+ = \mathbb{K} \cap \mathbb{R}^+$ ist Positivitätsbereich. Für jedes $x \in \mathbb{K}^+$ gibt es ein $\sqrt{x} \in \mathbb{K}^+$ mit $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ und somit ist \mathbb{K} euklidisch. Als Vereinigung von abzählbar vielen Teilmengen, die jeweils aus abzählbar vielen Elementen bestehen, ist \mathbb{K} selbst abzählbar.

Ein weiteres Beispiel für einen euklidischen Körper ist der *Körper der algebraischen Zahlen*. Das sind alle Zahlen die Nullstellen von Gleichungen der Art

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q}, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

sind.

Weitere Beispiele für euklidischer Körper findet man in [1]. E. BECKER zeigt weiters, daß jeder formal-reelle Körper, das ist ein Körper in dem -1 nicht Summe von Quadraten ist, einen euklidischen Erweiterungskörper besitzt.

In Hinblick auf Kapitel 3.3 werden wir nun die quadratischen Erweiterungskörper eines beliebigen euklidischen Körpers \mathbb{K} untersuchen. Wegen $-1 < 0$, ist -1 kein Quadrat. Deshalb kann \mathbb{K} stets durch Adjunktion von i , mit

$$i^2 = -1,$$

quadratisch zu $\mathbb{K}(i)$ erweitert werden. Es stellt sich die Frage, ob noch andere⁴ quadratische Erweiterungen von \mathbb{K} existieren. Dazu nehmen wir an, die quadra-

³Es handelt sich dabei um alle Streckenlängen, die nach Vorgabe einer Einheitsstrecke, mit Zirkel und Lineal in der euklidischen Ebene konstruiert werden können.

⁴Dabei identifizieren wir \mathbb{K} -äquivalente Erweiterungskörper von \mathbb{K} , also Körper $\mathbb{L}, \mathbb{L}' \supset \mathbb{K}$ für die es einen Automorphismus $\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}'$ gibt, der \mathbb{K} elementweise fest läßt.

tische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{K}$$

sei in \mathbb{K} nicht lösbar, und ein Element α eines Erweiterungskörpers von \mathbb{K} sei Lösung. Dann erhalten wir durch Adjunktion von α einen weiteren quadratischen Erweiterungskörper von \mathbb{K} . Wegen $\alpha \notin \mathbb{K}$ kann $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ kein Quadrat in \mathbb{K} sein. Wir erhalten

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0, \text{ d.h. } q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0, \text{ d.h. } q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = t^2$$

für ein geeignetes $t \in \mathbb{K}$. Für

$$i := \frac{p}{2t} + \frac{1}{t}\alpha$$

gilt dann $i^2 = -1$. Durch das Adjungieren von α und i erhalten wir also den selben Erweiterungskörper von \mathbb{K} . Somit gilt:

Satz 1.1 *Zu einem euklidischen Körper existiert genau eine quadratische Körpererweiterung, nämlich $\mathbb{K}(i)$ mit $i^2 = -1$.*

$\mathbb{K}(i)$ ist damit auch quadratisch abgeschlossen. Der einzige quadratische Erweiterungskörper der reellen Zahlen ist somit jener der komplexen Zahlen \mathbb{C} .

Am Ende dieses Abschnitts sei noch darauf hingewiesen, daß es euklidische Schiefkörper gibt, wie ein Beispiel von GRÖGER [15] zeigt. Diese sind für uns jedoch nicht von Interesse, da die in dieser Arbeit verwendeten Körper stets kommutativ sind.

1.2 Automorphismen quadratischer Erweiterungen

Unter einem *Automorphismus* σ eines Körpers $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ verstehen wir eine bijektive Selbstabbildung mit

$$\begin{aligned} \sigma(a + a') &= \sigma(a) + \sigma(a') \\ \sigma(a \cdot a') &= \sigma(a) \cdot \sigma(a') \end{aligned}$$

für alle $a, a' \in \mathbb{K}$. Wegen $\sigma(a) = \sigma(a) + \sigma(0)$ und $\sigma(a) = \sigma(a) \cdot \sigma(1)$ gilt $\sigma(0) = 0$ und $\sigma(1) = 1$. Im folgenden soll stets $\text{char}\mathbb{K} \neq 2$ gelten⁵.

⁵Bei $\text{char}\mathbb{K} = 2$ kann zum Beispiel nicht jede quadratische Erweiterung von \mathbb{K} in der Form $\mathbb{K}(\sqrt{c})$ ($c \in \mathbb{K}$) geschrieben werden.

Für die Automorphismen eines quadratischen Erweiterungskörpers $\mathbb{K}(\sqrt{c})$ ($c \in \mathbb{K}$) von \mathbb{K} bedeutet dies:

$$\begin{aligned}\sigma((a + b\sqrt{c}) + (a' + b'\sqrt{c})) &= \sigma(a + b\sqrt{c}) + \sigma(a' + b'\sqrt{c}) \\ \sigma((a + b\sqrt{c}) \cdot (a' + b'\sqrt{c})) &= \sigma(a + b\sqrt{c}) \cdot \sigma(a' + b'\sqrt{c})\end{aligned}$$

für alle $a, a', b, b' \in \mathbb{K}$. Es sollen zunächst nur solche Automorphismen von $\mathbb{K}(\sqrt{c})$ betrachtet werden, die \mathbb{K} in sich abbilden, also $\sigma(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}$. Wegen

$$\sigma(a + b\sqrt{c}) = \sigma(a) + \sigma(b)\sigma(\sqrt{c})$$

gilt

$$\sigma(\sqrt{c}) \notin \mathbb{K},$$

sonst wäre $\sigma(x) \in \mathbb{K}$ für alle $x \in \mathbb{K}(\sqrt{c})$, und damit σ nicht surjektiv. Für ein $y \in \mathbb{K}$ mit $y = \sigma(a) + \sigma(b)\sigma(\sqrt{c})$ ist $\sigma(b) = 0$ und damit $b = 0$. Die Einschränkung von σ auf \mathbb{K} ist somit bijektiv und selbst ein Automorphismus von \mathbb{K} . Durch die Einschränkung auf \mathbb{K} und

$$\sigma(\sqrt{c}) = p + q\sqrt{c} \quad (p, q \in \mathbb{K}, q \neq 0)$$

ist σ bereits eindeutig bestimmt. Es gilt

$$\sigma(c) = \sigma((\sqrt{c})^2) = (\sigma(\sqrt{c}))^2 = p^2 + 2pq\sqrt{c} + q^2c \in \mathbb{K}.$$

Da die Charakteristik von \mathbb{K} verschieden von 2 ist, gilt wegen $\sqrt{c} \notin \mathbb{K}$

$$p = 0, \quad q^2 = \frac{\sigma(c)}{c} \text{ mit } q \in \mathbb{K}.$$

Ist umgekehrt σ ein Automorphismus von \mathbb{K} und $c \in \mathbb{K}$ kein Quadrat, so kann σ genau dann zu einem Automorphismus von $\mathbb{K}(\sqrt{c})$ erweitert werden, falls

$$\frac{\sigma(c)}{c} \in \mathbb{K}^{(2)}.$$

Da die Gleichung $q^2 = \frac{\sigma(c)}{c}$ keine oder zwei Lösungen besitzt gilt: In Abhängigkeit von c kann ein Automorphismus von \mathbb{K} nicht oder auf zwei verschiedene Arten zu einem Automorphismus von $\mathbb{K}(\sqrt{c})$ erweitert werden.

Betrachten wir im speziellen die Identität von \mathbb{K} . Dann ergibt sich aus $q^2 = \frac{\sigma(c)}{c} = 1$, daß $q = \pm 1$ und damit $\sigma(\sqrt{c}) = \pm\sqrt{c}$. Die beiden zur Identität von \mathbb{K} gehörigen Automorphismen von $\mathbb{K}(\sqrt{c})$ lauten somit

$$\sigma(a + \sqrt{c}b) = a \pm \sqrt{c}b.$$

Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, dann ist

$$\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{mit} \quad a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2} \quad (a, b \in \mathbb{Q})$$

ein Automorphismus von \mathbb{K} . Setzen wir $c := \sqrt{2}$ und bilden den quadratischen Erweiterungskörper $\mathbb{K}(\sqrt{c})$ von \mathbb{K} , so gilt:

$$\frac{\sigma(c)}{c} = \frac{\sigma(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1.$$

Da -1 kein Quadrat in \mathbb{K} ist, gibt es keine Erweiterung von $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ auf $\mathbb{K}(\sqrt{c})$.

Ist \mathbb{K} ein euklidischer Körper, so können wir nach Abschnitt 1.1 stets voraussetzen, daß $c = -1$ ist. Wegen

$$0 = \sigma(0) = \sigma(1 + (-1)) = \sigma(1) + \sigma(-1) = 1 + \sigma(-1)$$

gilt stets $q^2 = \frac{\sigma(-1)}{-1} = 1$ und somit $\sigma(i) = \pm i$. Die zu einem beliebigen Automorphismus σ von \mathbb{K} gehörigen Automorphismen von $\mathbb{K}(i)$ können wir damit schreiben als

$$(a + ib) \mapsto \sigma(a) \pm i\sigma(b).$$

Kennen wir die Automorphismen von \mathbb{K} , so können wir die Automorphismen von $\mathbb{K}(i)$ konstruieren, die $\sigma(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}$ leisten. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist diese Bedingung jedoch nicht für alle Automorphismen von $\mathbb{K}(i)$ erfüllt. Wir werden uns auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, und damit $\mathbb{K}(i) = \mathbb{C}$ beschränken.

1.3 Automorphismen von \mathbb{C}

Wir setzen als bekannt voraus, daß die Identität der einzige Körperautomorphismus von \mathbb{R} ist (siehe z.B. [3, S.88]). Nach Abschnitt 1.2 sind dann die einzigen Automorphismen von $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$, die \mathbb{R} auf sich selbst abbilden, die Identität und die Konjugation

$$\overline{} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad a + ib \mapsto \overline{a + ib} = a - ib.$$

Es stellt sich die Frage nach Automorphismen $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\sigma(\mathbb{R}) \not\subset \mathbb{R}$. Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir uns mit der Theorie der Körpererweiterungen auseinandersetzen. In Abschnitt 1.1 haben wir gesehen, wie ein Körper quadratisch erweitert werden kann. Eine quadratische Körpererweiterung ist ein Spezialfall einer algebraischen Körpererweiterung.

Definition 1.3 Ein Erweiterungskörper \mathbb{L} von \mathbb{K} heißt *algebraisch über \mathbb{K}* , wenn jedes Element von \mathbb{L} algebraisch über \mathbb{K} ist; d.h. jedes Element von \mathbb{L} ist Nullstelle eines vom Nullpolynom verschiedenen Polynoms mit Koeffizienten aus \mathbb{K} .

Nicht alle Elemente eines Erweiterungskörpers müssen algebraisch sein. Zum Beispiel ist \mathbb{R} Erweiterungskörper von \mathbb{Q} , die reellen Zahlen π und e sind jedoch bekanntlich nicht algebraisch über \mathbb{Q} . Solche Elemente werden *transzendent* genannt. Der Durchschnitt aller Körper, die einen beliebigen Körper \mathbb{K} und ein über \mathbb{K} transzendenten Element u enthalten, ist ein zum Quotientenkörper⁶ von $\mathbb{K}[x]$ \mathbb{K} -äquivalenter Körper $\mathbb{K}(u)$. Man spricht hier von einer *einfach transzendenten Körpererweiterung*.

Es muß nun noch der wichtige Begriff einer Transzendenzbasis hergeleitet werden (siehe auch [26] bzw. [24]):

Definition 1.4 Sei \mathbb{L} ein Erweiterungskörper von \mathbb{K} und S eine Teilmenge von \mathbb{L} . Dann heißt S *algebraisch abhängig über \mathbb{K}* , wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ ein Nichtnullpolynom $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ so existiert, daß $f(s_1, \dots, s_n) = 0$ mit $s_1, \dots, s_n \in S$ und s_1, \dots, s_n verschieden. S heißt *algebraisch unabhängig über \mathbb{K}* , wenn S nicht algebraisch abhängig über \mathbb{K} ist.

Jedes Element einer algebraisch unabhängigen Menge über \mathbb{K} ist also transzendent über \mathbb{K} .

Wichtig für das Folgende sind die beiden Sätze 1.2, 1.3, die Spezialfälle zweier Sätze aus dem Buch von HUNGERFORD [24, S. 312, Corollary 1.3] bzw. [24, S. 317, Theorem 1.12] darstellen:

Satz 1.2 Jede Permutation einer algebraisch unabhängigen Menge S über einem Körper \mathbb{K} kann zu einem Automorphismus von $\mathbb{K}(S)$ erweitert⁷ werden.

Satz 1.3 Sei \mathbb{L} der algebraische Abschluß⁸ eines Körpers \mathbb{K} , dann kann jeder Automorphismus von \mathbb{K} zu einem Automorphismus von \mathbb{L} erweitert werden.

⁶Den Quotientenkörper von $\mathbb{K}[x]$ erhält man folgendermaßen: Alle Polynome $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ ($n \in \mathbb{N}$) ergeben den Polynomring $\mathbb{K}[x]$. Die rationalen Funktionen $\frac{p(x)}{q(x)}$, mit $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$ und $q(x)$ verschieden vom Nullpolynom, bilden den Quotientenkörper von $\mathbb{K}[x]$.

⁷Mit $\mathbb{K}(S)$ wird hier der Durchschnitt aller Körper bezeichnet, die \mathbb{K} und S enthalten. Es handelt sich dabei wiederum um einen Körper.

⁸Ist \mathbb{K} ein *algebraisch abgeschlossener Körper*, so besitzt jedes nichtkonstante Polynom $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ mindestens eine Nullstelle. Jeder Körper kann algebraisch abgeschlossen werden; d.h. Jeder Körper besitzt einen algebraischen Erweiterungskörper der algebraisch abgeschlossen ist. Der algebraische Abschluß eines Körpers \mathbb{K} ist bis auf \mathbb{K} -Äquivalenz eindeutig [26, S.468].

Definition 1.5 Sei \mathbb{L} ein Erweiterungskörper von \mathbb{K} , dann heißt $B \subset \mathbb{L}$ *Transzendenzbasis* von \mathbb{L} über \mathbb{K} , wenn

1. B algebraisch unabhängig über \mathbb{K} ist und
2. \mathbb{L} algebraische Erweiterung von $\mathbb{K}(B)$ ist.

Wir können nun die Existenz von Automorphismen des komplexen Zahlkörpers zeigen, die von der Identität und der Konjugation verschieden sind.

Sei B eine Transzendenzbasis von \mathbb{C} über \mathbb{Q} und $\sigma : B \rightarrow B$ eine Bijektion auf B . Dann kann σ nach Satz 1.2 zu einem Automorphismus

$$\sigma_1 : \mathbb{Q}(B) \rightarrow \mathbb{Q}(B)$$

erweitert werden mit $\sigma_1|_B = \sigma$. Weiters können wir mit Satz 1.3 folgern, daß sich σ_1 zu einem Automorphismus

$$\sigma_2 : [\mathbb{Q}(B)] \rightarrow [\mathbb{Q}(B)]$$

fortsetzen läßt, wobei $[\mathbb{Q}(B)]$ den algebraischen Abschluß von $\mathbb{Q}(B)$ bezeichnet, und es gilt $[\mathbb{Q}(B)] = \mathbb{C}$. Jede Permutation der Transzendenzbasis B erzeugt damit einen Automorphismus auf \mathbb{C} . Es läßt sich zeigen (siehe z.B. [24, S. 317, Exercise 6]), daß jede Transzendenzbasis von \mathbb{C} über \mathbb{Q} überabzählbar ist, und somit gibt es auch überabzählbar viele Automorphismen von \mathbb{C} .

1.4 Die projektive Koordinatentopologie

Im Kapitel 3.1 spielen bei einigen wichtigen Überlegungen topologische Strukturen eine fundamentale Rolle. Diese Strukturen sollen in diesem Abschnitt kurz zusammengefaßt werden. Die Beweise der Aussagen dieses Abschnitts können in jedem Buch über Grundlagen der Topologie, wie zum Beispiel in [33], gefunden werden.

Definition 1.6 Ein topologischer Raum ist ein Paar (M, \mathcal{M}) , bestehend aus einer nicht leeren Menge M , und einem System \mathcal{M} von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

1. $\{\emptyset, M\} \subset \mathcal{M}$.

2. Aus $O_1, O_2 \in \mathcal{M}$ folgt $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{M}$.
3. Für eine beliebige Indexmenge I gilt: Aus $O_i \in \mathcal{M}, i \in I$ folgt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{M}$.

Die Elemente aus \mathcal{M} heißen offene Mengen. Komplemente offener Mengen heißen abgeschlossen.

Für eine beliebige nicht leere Menge M sind $(M, \mathfrak{P}(M))$ bzw.⁹ $(M, \{\emptyset, M\})$ die denkbar einfachsten topologischen Räume. Man spricht von der diskreten bzw. indiskreten Topologie auf M .

Sei (M, \mathcal{M}) ein topologischer Raum und $N \subset M$. Dann nennt man

$$\mathcal{N} = \{\overline{O} \mid \exists O \in \mathcal{M} \text{ mit } \overline{O} = O \cap N\}$$

die von \mathcal{M} induzierte Relativtopologie auf N . Wir werden nun einige Methoden zusammenstellen, wie man aus schon bekannten topologischen Räumen neue konstruieren kann. Dazu benötigen wir:

Definition 1.7 Sei (M, \mathcal{M}) ein topologischer Raum und $\mathfrak{B} \subset \mathcal{M}$. Dann heißt \mathfrak{B} eine Basis von \mathcal{M} , wenn für alle $O \in \mathcal{M}$ ein $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$ existiert, sodaß

$$O = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}^*} B.$$

Ausgehend von endlich vielen topologischen Räumen $(M_i, \mathcal{M}_i), (i = 1, \dots, n)$, läßt sich in der Produktmenge

$$M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \{x \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in M_i\}$$

eine Topologie \mathcal{M} einführen, indem man

$$\mathfrak{B} := \{O_1 \times O_2 \times \dots \times O_n \mid O_i \in \mathcal{M}_i\}$$

als Basis wählt. Es gilt dann $\mathcal{M} = \{\bigcup_{B \in \mathfrak{B}^*} B \mid \mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}\}$. Den so konstruierten topologischen Raum nennt man den *Produktraum* von (M_i, \mathcal{M}_i) .

Definition 1.8 Sind $(M, \mathcal{M}), (N, \mathcal{N})$ zwei topologische Räume, dann heißt eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge wieder offen ist. Sind $f : M \rightarrow N$ und $f^{-1} : N \rightarrow M$ stetige Bijektionen, so heißt f ein *Homöomorphismus*.

⁹ $\mathfrak{P}(M)$ nennt man die Potenzmenge von M und versteht darunter die Menge aller Teilmengen von M .

Schrittweise werden wir nun die projektive Koordinatentopologie entwickeln:

Definition 1.9 Ein Körper¹⁰ \mathbb{K} mit einer topologischen Struktur, die weder die diskrete noch die indiskrete Topologie ist, heißt *topologischer Körper*, wenn die Abbildungen

1. $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} : (x, y) \mapsto x - y$
2. $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K} : (x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$

stetig sind.

Viele Beispiele für topologische Körper findet man in [39]. Betrachten wir angeordnete Körper, im speziellen euklidische Körper, so bilden diese zusammen mit der sogenannten *Ordnungstopologie* stets einen topologischen Körper. Die Ordnungstopologie auf einem angeordneten Körper besitzt die offenen Intervalle $]a, b[$ mit $a, b \in \mathbb{K}$ als Basis.

Sei (M, \mathcal{M}) ein topologischer Raum und \sim eine Äquivalenzrelation auf M , so bezeichnet M/\sim die Menge der Äquivalenzklassen, $[x] \in M/\sim$ die Äquivalenzklasse von $x \in M$ und $p : M \rightarrow M/\sim$ mit $x \mapsto [x]$ die kanonische Projektion. Auf M/\sim läßt sich folgendermaßen eine Topologie \mathcal{M}_Q erklären:

$$O \in \mathcal{M}_Q \iff p^{-1}(O) \in \mathcal{M}.$$

Die so definierte Topologie heißt *Quotiententopologie*.

Sei \mathbb{K} ein topologischer Körper und \mathbb{K}^n der zugehörige n -dimensionale Vektorraum. Dann verstehen wir unter der *affinen Koordinatentopologie*¹¹ auf \mathbb{K}^n die Produkttopologie der in \mathbb{K} geltenden Topologie. Definieren wir auf \mathbb{K}^n die Äquivalenzrelation

$$\sim: x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{K} \text{ mit } k \cdot x = y, \quad x, y \in \mathbb{K}^n \setminus \{o\},$$

so bildet die Menge der Äquivalenzklassen \mathbb{K}^n/\sim die Punktmenge eines projektiven Raumes Π mit der Dimension $\dim \Pi = n - 1$. Bilden wir die Quotiententopologie der affinen Koordinatentopologie, so erhalten wir die *projektive*

¹⁰ \mathbb{K} könnte hier auch ein Schiefkörper sein.

¹¹ \mathbb{K}^n zusammen mit der affinen Koordinatentopologie ist ein wichtiges Beispiel für einen topologischen Vektorraum. Das ist ein Vektorraum \mathbb{V} mit topologischen Skalarkörper und in welchem die Abbildungen $(x, y) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V} \mapsto x - y$ und $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{V} \mapsto \lambda \cdot x$ stetig sind. Mehr über topologische Vektorräume findet man in [33].

Koordinatentopologie auf Π . Jeder solche projektive Raum mit seiner projektiven Koordinatentopologie ist ein topologischer projektiver Raum. Zur Definition eines topologischen projektiven Raumes siehe z.B. [31] oder [38]. Bei endlicher Dimension gilt jedoch nach [38]:

Satz 1.4 *Zu jedem desarguesschen topologischen projektiven Raum Π gibt es (bis auf Isomorphie) genau einen projektiven Raum mit Koordinatentopologie zu dem Π isomorph¹² ist.*

Im Kapitel 3.1 verwenden wir projektive Räume mit linearer Topologie:

Von einem projektiven Raum Π mit *linearer Topologie* spricht man, wenn auf jeder Geraden von Π eine Topologie gegeben ist, die weder diskret noch indiskret ist, und jede Perspektivität zwischen Geraden stetig ist. Der Begriff des projektiven Raumes mit linearer Topologie ist eine Abschwächung des Begriffs eines topologischen projektiven Raumes. Die Relativtopologien auf den Geraden eines topologisch projektiven Raumes bilden nämlich stets eine lineare Topologie [32]. Umgekehrt stammt nach [32] nicht jeder projektive Raum mit linearer Topologie von einem topologischen projektiven Raum. Eine Teilmenge $M \subset \Pi$ heißt *linear offen*, wenn $M \cap g$ für jede Gerade g offen ist.

1.5 Projektive und affine Räume über euklidischen Körpern

Sei $\Pi := \Pi(n, \mathbb{K}) = \Pi(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ ein n -dimensionaler projektiver Raum ($2 \leq n < \infty$) mit euklidischem Algebraisierungskörper \mathbb{K} , der Punktmenge \mathcal{P} , der Geradenmenge \mathcal{G} und dem Enthaltensein als Inzidenzrelation. Da die Charakteristik von \mathbb{K} gleich 0 und damit verschieden von 2 ist, ist Π fanosch. Weiters ist \mathbb{K} kommutativ und daher Π papposch. Insgesamt ist Π also ein klassischer projektiver Raum.

In einem beliebigen n -dimensionalen projektiven Raum, dessen Algebraisierungskörper eine von 2 verschiedene Charakteristik besitzt, kann zu jeder regulären Quadrik \mathcal{K} ein Koordinatensystem gefunden werden (siehe z.B. [35,

¹²Zwei desarguessche topologische projektive Räume Π, Π' heißen isomorph, wenn es eine Kollineation $\kappa : \Pi \rightarrow \Pi'$ gibt, die gleichzeitig Homöomorphismus für die Topologien von Π und Π' ist.

Satz 24.3]), sodaß die Gleichung von \mathcal{K}

$$a_0x_0^2 + a_1x_1^2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1}^2 + a_nx_n^2 = 0, \quad a_i \in \mathbb{K}$$

lautet. Da \mathcal{K} eine reguläre Quadrik ist, sind alle a_i verschieden von 0. Betrachten wir nun wiederum einen projektiven Raum Π mit euklidischen Algebraisierungskörper \mathbb{K} : Auf einer ovalen Quadrik in Π können definitionsgemäß keine Geraden oder höherdimensionale Unterräume liegen. Deshalb ist genau ein a_i ($i \in \{0 \dots n\}$) negativ. Alle positiven a_i sind Quadrate und für jedes negative a_i ist $-a_i$ Quadrat. Durch einen Basiswechsel können wir erreichen, daß sich \mathcal{K} vereinfacht als

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0$$

schreiben läßt. Der Beweis dieser Aussage kann genauso durchgeführt werden wie in reellen projektiven Räumen. Denn auch in Vektorräumen über euklidischen Körpern gilt der Trägheitssatz von Sylvester.

In jedem klassischen projektiven Raum gelten die folgenden zwei wichtigen Aussagen [8, S. 53ff]:

Satz 1.5 *Ist der Algebraisierungskörper eines klassischen projektiven Raumes Π euklidisch, so besitzen genau die ovalen Quadriken Innenpunkte.*

Satz 1.6 *Ist \mathcal{K} eine ovale Quadrik in Π , so ist jede Gerade durch einen Innenpunkt Sehne von \mathcal{K} (d.h. sie trägt genau zwei Punkte von \mathcal{K}).*

Die erste Aussage sichert die Existenz von hyperbolischen Punkte im Cayley-Klein-Modell eines hyperbolischen Raumes. Die zweite Aussage bestätigt, daß jede projektive Gerade durch einen hyperbolischen Punkt eine hyperbolische Gerade trägt. Damit ist die projektive Verbindungsgerade zweier hyperbolischer Punkte eine Sekante der Absolutquadrik und somit trägt sie eine hyperbolische Gerade.

Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{A}(\mathbb{K}^n), \cdot)$ ($n < \infty$) der n -dimensionale affine Raum über dem euklidischen Körper \mathbb{K} zusammen mit dem kanonischen Skalarprodukt

$$\cdot : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Dann bildet \mathcal{A} mit der Abstandsfunktion $\text{dist} : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

einen \mathbb{K} -metrischen Raum; d.h. für alle $x, y, z \in \mathbb{K}^n$ gilt

1. $\text{dist}(x, y) \geq 0$, $\text{dist}(x, y) \iff x = y$,
2. $\text{dist}(x, y) = \text{dist}(y, x)$,
3. $\text{dist}(x, z) \leq \text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, z)$.

Der Beweis dieser Aussage kann genauso geführt werden, wie der Beweis, daß der reelle affine Raum ein metrischer Raum ist (siehe z.B. [33]). In [16] zeigt S. GUDDER, daß es zu \mathbb{K}^n eine Kardinalzahl α gibt, sodaß man, wenn man über \mathbb{K}^n offene Menge erklärt wie in metrischen Räumen üblich¹³, einen α -topologischen Raum über \mathbb{K}^n erhält. In einem Raum M mit einer α -Topologie \mathcal{M} ist der Durchschnitt von offenen Mengen $O_i \in \mathcal{M}, i \in I$ wiederum offen, wenn $\text{card}(I) < \alpha$. Weiters gelten die Axiome 1 und 3 eines topologischen Raumes (siehe Abschnitt 1.4).

α -topologische Räume über \mathbb{K} -metrischen Räumen haben viele Gemeinsamkeiten mit topologischen Räumen über metrischen Räumen. So sind sie ebenfalls Hausdorff-Räume, sogar normal. Eine detaillierte Untersuchung von \mathbb{K} -metrischer Räumen findet man in [16].

1.6 Miquelsche Möbiusebenen

Sei \mathbb{K} ein beliebiger nicht quadratisch abgeschlossener Körper und \mathbb{L} eine seiner quadratischen Erweiterungen. Wir erweitern zusätzlich \mathbb{L} um ein beliebiges Element, das nicht in \mathbb{L} enthalten ist, und bezeichnen dieses im folgenden als ∞ . Die Rechenregeln für die Verknüpfung von Elementen aus \mathbb{L} und ∞ definieren wir folgendermaßen:

$$\frac{a}{0} := \infty, \quad a \cdot \infty := \infty =: \infty \cdot a, \quad \frac{a}{\infty} := 0 \quad \text{und} \quad b + \infty := \infty =: \infty + b$$

¹³Sei (M, ρ) ein metrischer Raum, $x \in M$, $r \in \mathbb{R}^+$. Die Punktmenge $K(x, r) := \{z \in M \mid \rho(x, z) < r\}$ heißt *offene Kugel*. Dann bildet $\mathcal{M} := \{O \subset M \mid \forall x \in O \exists r > 0 : K(x, r) \subset O\}$ eine Topologie auf M (siehe [33]).

für $a \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{L}$. Die Ausdrücke $\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$ und $\frac{0}{0}$ sind nicht erklärt. Wir bezeichnen $\mathbb{L}_\infty := \mathbb{L} \cup \{\infty\}$ als den *Möbiusabschluß* von \mathbb{L} und es gilt

$$\mathbb{L}_\infty = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{L} \text{ mit } (a, b) \neq (0, 0) \right\}.$$

Analoges gilt für \mathbb{K} bzw. \mathbb{K}_∞ .

Sind $A, B, C, D \in \mathbb{L}$ mit $AD \neq BC$, so ist durch

$$\varphi : \mathbb{L}_\infty \rightarrow \mathbb{L}_\infty : \frac{X}{Y} \mapsto \frac{AX + BY}{CX + DY}, \quad (X, Y) \in \mathbb{L}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

eine Bijektion auf \mathbb{L}_∞ wohldefiniert, die man *gebrochen-lineare Transformation*¹⁴ über \mathbb{L} nennt. Die Menge aller dieser Abbildungen bildet mit dem Hintereinanderausführen als Verknüpfung eine Gruppe, und wir bezeichnen diese mit $\Gamma(\mathbb{L})$. Die gebrochen-linearen Transformationen operieren scharf dreifach-transitiv auf \mathbb{L}_∞ ; d.h. zu zwei Tripeln $A, B, C \in \mathbb{L}_\infty$ bzw. $A_1, B_1, C_1 \in \mathbb{L}_\infty$, wobei A, B, C bzw. A_1, B_1, C_1 paarweise verschieden sind, existiert genau ein $\varphi \in \Gamma(\mathbb{L})$ mit $\varphi(A) = A_1$, $\varphi(B) = B_1$, $\varphi(C) = C_1$. Einen Beweis dazu und eine ausführlichere Behandlung von Möbiusebenen findet man in [36].

Ist nun \mathbb{L} ein quadratischer Erweiterungskörper von \mathbb{K} , so werden die Elemente von \mathbb{L}_∞ als *Punkte* und die Elemente von

$$\mathcal{K}(\mathbb{L}_\infty) := \{\varphi(\mathbb{K}_\infty) \mid \varphi \in \Gamma(\mathbb{L})\}$$

als *Möbiuskreise* bezeichnet. Das Paar $\mathcal{M}(\mathbb{L}, \mathbb{K}) := (\mathbb{L}_\infty, \mathcal{K}(\mathbb{L}_\infty))$ heißt die *miquelsche Möbiusebene über (\mathbb{L}, \mathbb{K})* .

Zu drei verschiedenen Punkten aus $\mathcal{M}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ existiert genau ein Möbiuskreis der alle drei Punkte enthält (siehe [36, (2.24)]). Definieren wir für

$$A := \frac{a_0}{a_1}, B := \frac{b_0}{b_1}, C := \frac{c_0}{c_1}, D := \frac{d_0}{d_1} \in \mathbb{L}_\infty$$

mit $|(A, B, C, D)| \geq 3$ und $a_0, a_1, b_0, \dots, d_1 \in \mathbb{L}$ das Doppelverhältnis von A, B, C, D durch

$$\text{DV}(A, B, C, D) := \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}$$

so erhalten wir:

¹⁴Man spricht auch von einer *Möbiustransformation erster Art*.

Satz 1.7 *Sind A, B, C drei verschiedene Punkte von \mathbb{L}_∞ , so kann der Möbiuskreis $k(A, B, C)$ durch A, B, C als*

$$k(A, B, C) = \{X \in \mathbb{L}_\infty \mid DV(A, B, C, X) \in \mathbb{K}_\infty\}$$

dargestellt werden.

Wir können jedoch $\mathcal{M}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ auch auf eine andere Weise interpretieren. Fassen wir nämlich den Zähler und Nenner eines Punktes $X = \frac{x_0}{x_1} \in \mathbb{L}_\infty$ als homogene Koordinaten der projektiven Geraden $\Pi_{\mathbb{L}}$ über \mathbb{L} auf, so können wir die Punktmenge von $\mathcal{M}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ auch also Punktmenge von $\Pi_{\mathbb{L}}$ interpretieren (siehe [4]). Die projektive Gerade $\Pi_{\mathbb{K}}$ über \mathbb{K} stellen wir uns dabei eingebettet in $\Pi_{\mathbb{L}}$ vor. Jeder Möbiuskreis in $\Pi_{\mathbb{L}}$ ist dann Bildmenge von $\Pi_{\mathbb{K}}$ unter einer Projektivität in $\Pi_{\mathbb{L}}$.

Eine weitere Interpretationsmöglichkeit von $\mathcal{M}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ ergibt sich dadurch, daß wir die Punkte von $\mathcal{M}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ auffassen als die Punkte einer affinen Ebene $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}^2$ über \mathbb{K} , ergänzt durch einen Punkt ∞ (siehe [4]). Die Möbiuskreise erscheinen in diesem Modell als affine Kegelschnitte, sowie als Geraden in $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}^2$ erweitert durch den Punkt ∞ . Ist der Körper \mathbb{K} insbesondere euklidisch, dann kann man die Möbiuskreise, die nicht durch ∞ gehen, durch die Punktmenge $(x_1, x_2) \in \mathcal{A}_{\mathbb{K}}^2$ mit

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2, \quad 0 < r \in \mathbb{K}, \quad (m_1, m_2) \in \mathcal{A}_{\mathbb{K}}^2$$

beschreiben (siehe [4, S.231]).

Kapitel 2

Plückerräume und Hyperbolische Geometrie

Es sollen nun die für diese Arbeit fundamentalen Begriffe “Plückerraum” und “Plückertransformation” eingeführt werden. Wir geben einige Beispiele für Plückerräume an. Weiters zeigen wir, daß in jedem hyperbolischen Raum \mathcal{H} die Geraden zusammen mit dem Orthogonalschneiden als Relation einen Plückerraum bilden. Schlußendlich wird die Problemstellung dieser Arbeit formuliert: Wir suchen alle Punktabbildungen des zu \mathcal{H} gehörigen projektiven Raumes, die Plückertransformationen induzieren.

2.1 Definition eines Plückerraumes

Auf einer beliebigen nichtleeren Menge G sei eine zweistellige Relation gegeben, die reflexiv und symmetrisch ist. Stehen zwei Elemente $a, b \in G$ in Relation, so schreiben wir $a \sim b$, sonst $a \not\sim b$. Wir bezeichnen die Struktur (G, \sim) gemäß [3] als *Plückerraum*, wenn zu je zwei $a, b \in G$ mit $a \not\sim b$ endlich viele Elemente c_1, c_2, \dots, c_n existieren, sodaß

$$a \sim c_1 \sim c_2 \sim \dots \sim c_n \sim b. \quad (2.1)$$

Ist $\varphi : G \rightarrow G$ eine Bijektion mit

$$a \sim b \iff a^\varphi \sim b^\varphi \text{ für alle } a, b \in G, \quad (2.2)$$

so nennen wir φ eine *Plückertransformation* von (G, \sim) . Alle Plückertransformationen eines Raumes (G, \sim) bilden die sogenannte *Plückergruppe*. Im allgemeinen

versucht man die Bedingung (2.2) abzuschwächen und für Bijektionen mit

$$a \sim b \implies a^\varphi \sim b^\varphi \text{ für alle } a, b \in G \quad (2.3)$$

zu zeigen, daß es sich dabei bereits um Plückertransformationen handelt. Die Sätze 3.6, 3.7 und einige Beispiele in Abschnitt 2.2 zeigen, daß eine solche Abschwächung in manchen Fällen möglich ist.

Zwei Plückerräume (G_1, \sim_1) und (G_2, \sim_2) heißen isomorph, wenn es eine Bijektion $\beta : G_1 \rightarrow G_2$ gibt mit

$$a \sim_1 b \iff a^\beta \sim_2 b^\beta \text{ für alle } a, b \in G_1.$$

Die Plückertransformationen eines Raumes (G, \sim) können wir somit auch als Automorphismen von (G, \sim) bezeichnen.

2.2 Beispiele von Plückerräume

In diesem Abschnitt sollen einige Beispiel für Plückerräume betrachtet werden, sowie die zugehörigen Transformationsgruppen. Auf Beweise soll dabei gänzlich verzichtet werden.

2.2.1 Satz von June Lester

Sei k eine beliebige reelle positive Zahl. Es sei G die Menge aller Geraden des dreidimensionalen euklidischen Raumes \mathbb{R}^3 . Wir nennen zwei solche Geraden in Relation stehend oder verwandt, wenn sie den Abstand k besitzen oder ident sind. Es bildet G mit dieser Relation einen Plückerraum, den wir mit (G_k, \sim) bezeichnen. Mit Hilfe der Dilatation $x \mapsto \frac{1}{k} \cdot x$ sieht man sofort, daß für ein beliebiges k (G_k, \sim) isomorph zu (G_1, \sim) ist. Der folgende Satz über die Plückergruppe von G_k wurde von JUNE LESTER ([29], [3]) bewiesen.

Satz 2.1 (Satz von June Lester) *Die Plückertransformationen von (G_k, \sim) sind genau die durch Kongruenzen von \mathbb{R}^3 induzierten Abbildung auf G .*

2.2.2 Satz von Chow

Sei Π ein n -dimensionaler projektiver Raum ($n < \infty$). Die d -dimensionalen, von Punkten und Hyperebenen verschiedenen Unterräume von Π bilden zusammen

mit der Menge der Büschel solcher Unterräume und dem Enthaltensein als Inzidenz eine Graßmannraum genannte Inzidenzstruktur Π_d . Zwei d -dimensionale Unterräume heißen verwandt, wenn sie ein und demselben Büschel angehören; d. h. ihr Durchschnitt ist $(d - 1)$ -dimensional, oder sie sind ident. Offenbar bildet Π_d mit dieser Relation einen Plückerraum, den wir mit (Π_d, \sim) bezeichnen. W.L. CHOW hat in [10] die Transformationsgruppen dieses Plückertraumes untersucht. (vgl. auch [19, S. 23 - 48] und [12, S. 80 - 82])

Satz 2.2 (Satz von Chow) *Jede Plückertransformationen von (Π_d, \sim) wird durch eine Kollineation oder, im Falle $n = 2d + 1$, durch eine Korrelation von Π induziert.*

W.-L. HUANG zeigt in [23], daß die Voraussetzungen im Satz von Chow reduziert werden können:

Satz 2.3 *Jede bijektive Abbildung $\varphi : \Pi_d \rightarrow \Pi_d$ mit*

$$U \sim V \implies U^\varphi \sim V^\varphi, \quad \forall U, V \in \Pi_d$$

wird durch eine Kollineation oder, im Falle $n = 2d + 1$, durch eine Korrelation von Π induziert.

2.2.3 Ein Beispiel aus der Liegeometrie

Historisch gesehen eines der ersten Beispiele für Sätze wie Satz 2.1 oder Satz 2.2, also Sätze in denen gewisse Abbildungen dadurch gekennzeichnet werden, daß eine binäre Relation unter den Abbildungen erhalten bleiben, stammt von W. BLASCHKE. Er untersucht in [6] unter anderem die Lietransformationen der ebenen Liegeometrie. Die Menge der Liezykel, zusammen mit der Berührrelation¹, bilden einen Plückerraum (L, \sim) . W. BLASCHKE definiert die Lietransformationen zuerst rein analytisch und beweist anschließend [6, S. 211], daß es sich dabei genau um die Plückertransformationen von (L, \sim) handelt:

Satz 2.4 (Blaschke) *Eine bijektive Abbildung der Liezykel der Ebene, die einander berührende Zyklen stets in ebensolche überführt, ist notwendigerweise eine Lietransformation.*

¹Zwei Zyklen sollen auch berührend sein, wenn sie ident sind.

In moderneren Abhandlungen über Liegeometrie (n -dimensional) (siehe z.B. [3]) werden die Lietransformationen bereits als Bijektionen definiert, die die Berührung von Zykeln in beiden Richtungen erhalten.

2.2.4 Orthogonalitätstreue Plückertransformationen des euklidischen Raumes \mathbb{R}^n

Es sei G^n die Geradenmenge des euklidischen Raumes \mathbb{R}^n . Zwei verschiedene Geraden $g, h \in G^n$ nennen wir verwandt, wenn sie einander schneiden und aufeinander orthogonal stehen ($g \sim h$). Zusätzlich gelte $g \sim g$ für alle $g \in G^n$. Ist die Dimension $n > 2$ liegt somit ein Plückerraum vor den wir als (G^n, \sim) bezeichnen. Die folgenden beiden Aussagen über die Plückergruppe von (G^n, \sim) haben W. BENZ und E.M. SCHRÖDER in [5] hergeleitet:

Satz 2.5 *Im Falle $n \geq 4$ wird die Plückergruppe von (G^n, \sim) durch die Ähnlichkeitsgruppe des \mathbb{R}^n induziert.*

Bei Dimension $n = 3$ ergibt sich:

Satz 2.6 *Eine Plückertransformation von (G^3, \sim) ist das Produkt einer durch eine Derivation² von \mathbb{R} und einer Ähnlichkeit von \mathbb{R}^3 induzierten Plückertransformation.*

Für $n = 2$ liegt im Unterschied zu hyperbolischen und elliptischen Räumen kein Plückerraum vor.

2.2.5 Orthogonalitätstreue Plückertransformationen elliptischer Räume

Sei Π ein projektiver Raum mit $2 \leq \dim \Pi \leq \infty$ und π eine elliptische Polarität. Π bildet einen elliptischen Raum Π_e mit der absoluten Polarität π . Durch

²Eine Derivation von \mathbb{R} ist eine Abbildung auf \mathbb{R} , die

$$\begin{aligned}d(x + y) &= d(x) + d(y), \\d(x \cdot y) &= d(x) \cdot y + x \cdot d(y)\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ leistet.

die absolute Polarität mitbestimmt ist das Orthogonalstehen zweier elliptischer Geraden:

$$a \sim b : \iff a^\pi \cap b \neq \emptyset.$$

Nennen wir zwei Geraden in Relation stehend, wenn sie einander schneiden und gleichzeitig orthogonal stehen, oder wenn sie ident sind, so bildet die Geradenmenge des elliptischen Raumes mit dieser Relation einen Plückerraum. In [17] untersucht H. HAVLICEK die Plückergruppe dieses Plückertraumes und erhält bei einer von 3 verschiedenen Dimension:

Satz 2.7 *Sei $\dim \Pi = 2$ oder $4 \leq \dim \Pi \leq \infty$. Dann wird jede Bijektion der Geradenmenge von Π_e die verwandte Geraden auf ebensolche abbildet, durch eine Kollineation μ des projektiven Raumes Π induziert, wobei $\pi\mu = \mu\pi$ gilt.*

Wie schon im euklidischen Fall ergibt sich bei $\dim \Pi_e = 3$ die Existenz von Plückertransformationen, die nicht durch Kollineationen induziert werden. Genaueres siehe [17].

In symplektischen Räumen ergibt sich ein analoges Ergebnis [18]. Ist die Dimension des Raumes größer als 3, so werden die orthogonalitätserhaltende Bijektionen ausschließlich durch Kollineationen des zugehörigen projektiven Raumes induziert. Nur im dreidimensionalen Fall gibt es Plückertransformationen die nicht durch eine Kollineation induziert werden.

Weitere Beispiele von Plückergruppen werden in [21, 22, 23] besprochen.

2.3 Hyperbolische Räume über euklidischen Körpern

2.3.1 Das Cayley-Klein Modell

Sei $\Pi := \Pi(n, \mathbb{K}) = \Pi(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \epsilon)$ ein n -dimensionaler projektiver Papposraum ($2 \leq n < \infty$) mit euklidischem Algebraisierungskörper \mathbb{K} , der Punktmenge \mathcal{P} und der Geradenmenge \mathcal{G} . Da die Charakteristik jedes euklidischen Körpers gleich 0 ist, folgt, daß Π fanosch und damit ein klassischer projektiver Raum ist. Weiters ist die Menge der Innenpunkte \mathcal{H} einer ovalen Quadrik \mathcal{K} in Π nie leer (siehe z.B. [8, S. 54]), da \mathbb{K} euklidisch ist. Der Spurraum $(\mathcal{H}, \overline{\mathcal{G}}, \epsilon)$ von $\Pi(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \epsilon)$ mit

$$\overline{\mathcal{G}} = \{\overline{g} \neq \emptyset \mid \overline{g} = g \cap \mathcal{H}, g \in \mathcal{G}\}$$

ist das *Cayley-Klein-* oder *Standardmodell* eines n -dimensionalen hyperbolischen Raumes [14]. \mathcal{K} wird auch als *Absolutquadrik* bezeichnet. Durch die Quadrik \mathcal{K} ist eine Polarität π mitbestimmt, die jedem Punkt $P \in \Pi$ eine Hyperebene P^π zuordnet. Mit π können wir eine Abbildung auf der Menge der Unterräume von Π definieren:

$$\mathcal{U} \mapsto \bigcap \{P^\pi \mid P \in \mathcal{U}\} \text{ für alle Unterräume } \mathcal{U} \neq \emptyset \text{ und } \emptyset \mapsto \Pi.$$

Diese Abbildung bezeichnen wir wiederum mit π .

Wir werden im folgenden zwischen der Sekanten g von \mathcal{K} , aufgefaßt als projektive Gerade, und der hyperbolischen Geraden $\bar{g} := g \cap \mathcal{H}$ unterscheiden. g und \bar{g} sind dabei umkehrbar eindeutig zugeordnet.

2.3.2 Der Plückerraum $(\bar{\mathcal{G}}, \sim)$

Mit der Hilfe von π lassen sich die zweistelligen Relationen \approx und \sim auf $\bar{\mathcal{G}}$ erklären: Für $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathcal{G}}$ gelte

$$\begin{aligned} \bar{a} \approx \bar{b} &: \iff a \cap b^\pi \neq \emptyset \text{ und } \bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset && \text{(orthogonal-schneidende Geraden)} \\ \bar{a} \sim \bar{b} &: \iff \bar{a} \approx \bar{b} \text{ oder } a = b && \text{(verwandte Geraden)} \end{aligned}$$

Beide Relationen sind symmetrisch, und \sim ist definitionsgemäß auch reflexiv. Für orthogonal-schneidende Geraden \bar{a}, \bar{b} (also $\bar{a} \approx \bar{b}$) gilt $\bar{a} \neq \bar{b}$. Wir können nun zeigen:

Lemma 2.1 *Die Struktur $(\bar{\mathcal{G}}, \sim)$ ist Plückerraum.*

Beweis: Es muß nur noch gezeigt werden, daß zu zwei Geraden \bar{a}, \bar{b} eine endlich Folge $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_k \in \bar{\mathcal{G}}$ existiert, sodaß

$$\bar{a} \sim \bar{n}_1 \sim \dots \sim \bar{n}_k \sim \bar{b}$$

erfüllt ist. Dazu unterscheiden wir folgende Fälle, die durch die unterschiedliche Lage von $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathcal{G}}$ zu Stande kommen.

Es sei ε die durch a, b aufgespannte projektive Ebene und \mathcal{K}_ε der Schnitt von ε mit \mathcal{K} . Da der Algebraisierungskörper von Π euklidisch ist, und somit eindeutig angeordnet werden kann, ist Π ein angeordneter Desarguesraum, d.h. in Π haben wir genau eine Trennfunktion mitbestimmt. Nach [8, S. 60] ist diese Trennfunktion so definiert, daß Punkte A, B, C, D mit $A, B \neq C, D$ genau dann trennend sind, wir schreiben dafür $(A, B|C, D) = -1$, wenn $DV(A, B, C, D) < 0$ ist. Ansonsten gilt $(A, B|C, D) = 1$.

1. Sind \bar{a}, \bar{b} zueinander überparallel (siehe Abbildung 2.1), so ist $a \cap b$ ein Außenpunkt und $n := (a \cap b)^\pi \cap \varepsilon$ eine Sekante von \mathcal{K}_ε , die a und b in Innenpunkten von \mathcal{K} schneidet (siehe [8, S. 62 - 63]). Wir erhalten $\bar{a} \sim \bar{n} \sim \bar{b}$.

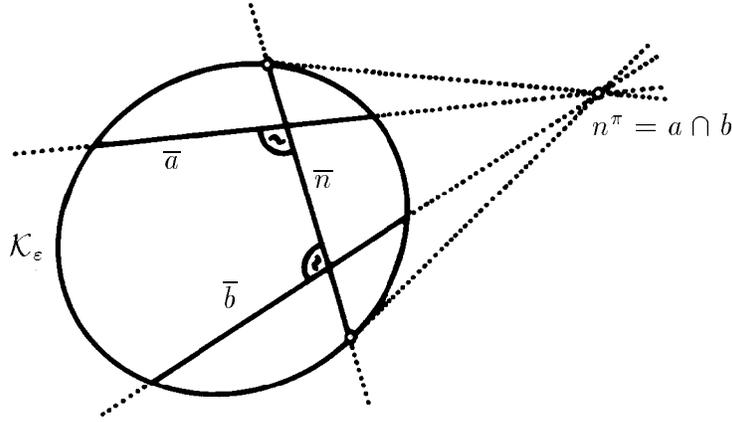


Abbildung 2.1: \bar{a}, \bar{b} überparallel

2. Bei grenzparalleler Lage von \bar{a} und \bar{b} (siehe Abbildung 2.2) sei $A \in a \cap \mathcal{K}_\varepsilon$, $B \in b \cap \mathcal{K}_\varepsilon$ und $C := a \cap b \in \mathcal{K}_\varepsilon$ mit $A \neq C \neq B$. Zusätzlich wählen wir zwei Punkte $D, E \in \mathcal{K}_\varepsilon$ so, daß (A, D) und (C, B) sowie (A, E) und (C, B) einander trennen. Aus $(C, B|D, A) = -1$ und $(C, B|A, E) = -1$ bzw. $(A, C|D, B) = 1$ und $(A, C|B, E) = 1$ folgt mit dem Multiplikationssatz für Trennfunktionen $(C, B|D, E) = 1$ bzw. $(A, C|D, E) = 1$. Daraus folgt weiters ([8], S. 62-63), daß die Gerade $\bar{n}_2 := DE \cap \mathcal{H}$ überparallel zu \bar{a} und \bar{b} ist. Zusammen mit Punkt 1 ergibt das die Existenz von Geraden \bar{n}_1, \bar{n}_3 mit $\bar{a} \sim \bar{n}_1 \sim \bar{n}_2 \sim \bar{n}_3 \sim \bar{b}$.
3. Schneiden \bar{a}, \bar{b} einander (siehe Abbildung 2.3) und ist B ein beliebiger Schnittpunkt von b mit \mathcal{K}_ε , so ist die Gerade $\bar{n}_1 := (a^\pi \cap \varepsilon)B$ grenzparallel zu \bar{b} und es gilt $\bar{a} \sim \bar{n}_1$. Damit haben wir das Problem auf Punkt 2 zurückgeführt³.
4. Sind \bar{a}, \bar{b} zueinander windschief, so wählen wir eine Gerade \bar{c} , die \bar{a} und \bar{b} schneidet. Mit Punkt 3 ist damit die Behauptung bewiesen.

³Sind \bar{a}, \bar{b} grenzparallel oder schneidend, so kann die Existenz von nur zwei Geraden \bar{n}_1, \bar{n}_2 gezeigt werden, sodaß $\bar{a} \sim \bar{n}_1 \sim \bar{n}_2 \sim \bar{b}$ gilt (siehe Lemma 3.2).

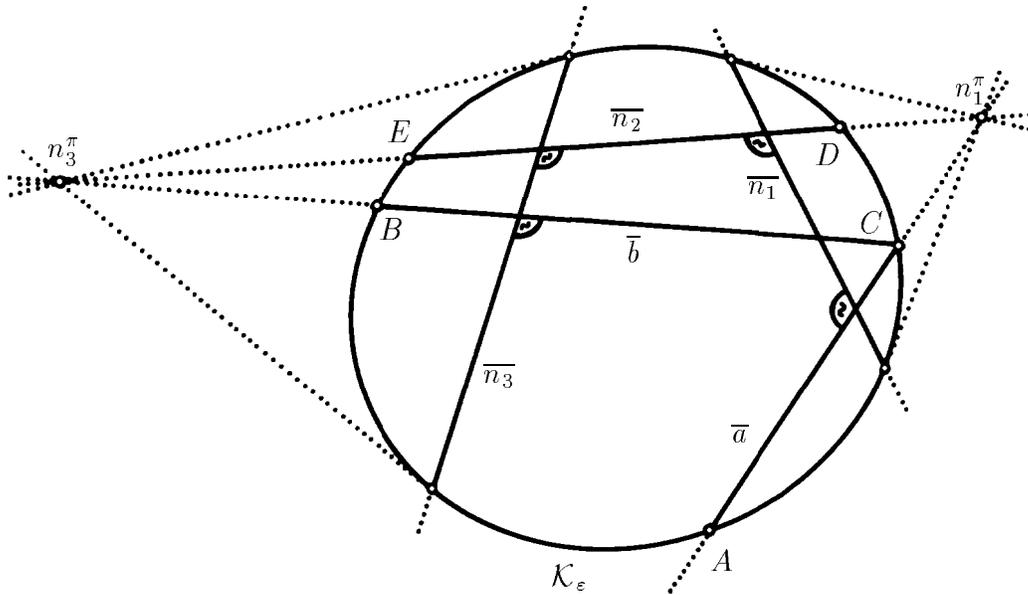


Abbildung 2.2: \bar{a}, \bar{b} grenzparallel

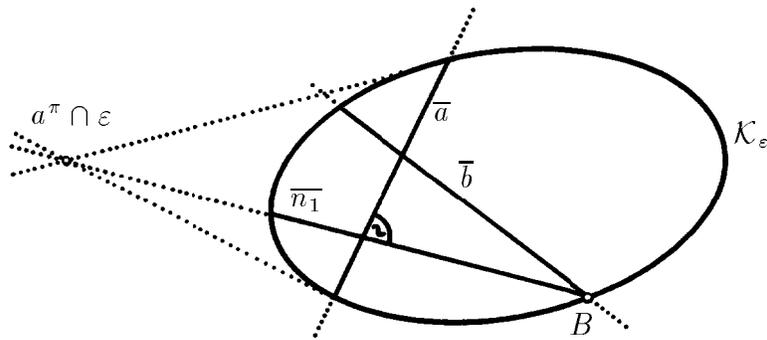


Abbildung 2.3: \bar{a}, \bar{b} schneidend

□

Im Punkt 4 des Beweises zu Satz 2.1 haben wir gezeigt, daß es zu zwei windschiefen Geraden \bar{a}, \bar{b} eine Kette $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_k \in \bar{\mathcal{G}}$ gibt mit

$$\bar{a} \sim \bar{n}_1 \sim \dots \sim \bar{n}_k \sim \bar{b}.$$

Diese Aussage soll nun weiter präzisiert werden und es soll gezeigt werden, daß eine solche Kette stets auf eine einzelne Gerade \bar{n} reduziert werden kann.

Lemma 2.2 *Zu zwei windschiefen Geraden \bar{a}, \bar{b} eines hyperbolischen Raumes \mathcal{H} existiert stets eine orthogonale Treffgerade⁴ \bar{n} an \bar{a} und \bar{b} .*

Beweis: Da zwei windschiefe Geraden stets einen 3-dimensionalen Raum aufspannen und jede Treffgerade in diesem liegt, können wir o.B.d.A. davon ausgehen, daß die $\dim \mathcal{H} = 3$ ist.

Seien A_1 und A_2 die beiden verschiedenen Schnittpunkte von a mit der Absolutquadrik \mathcal{K} . Die beiden Tangentialebenen τ_1, τ_2 in A_1, A_2 an \mathcal{K} bilden die singuläre Quadrik $\tau_1 \cup \tau_2$. \mathcal{K} und $\tau_1 \cup \tau_2$ spannen ein Quadrikenbüschel \mathfrak{B}_a auf. Erweitern wir den projektiven Raum Π entsprechend quadratisch (siehe z.B. [8, S.65ff.]), so ist der Schnitt von $\tau_1 \cup \tau_2$ mit \mathcal{K} im quadratisch erweiterten Raum von Π ein windschiefes Vierseit [11, S.228]. Alle Quadriken des Büschels \mathfrak{B}_a enthalten somit dieses windschiefe Vierseit. Das Paar der konjugiert komplexen Tangentialebenen $\iota_1 \cup \iota_2$ aus a an \mathcal{K} gehört ebenfalls dem Büschel \mathfrak{B}_a an.

Die durch die Polaritäten von \mathcal{K} und $\tau_1 \cup \tau_2$ induzierten Involutionen auf a stimmen überein, da beide die Fixpunkte A_1 und A_2 besitzen. Somit induzieren die Polaritäten aller Quadriken des Büschels \mathfrak{B}_a (bis auf $\iota_1 \cup \iota_2 \supset a$) dieselbe Spurinvoluition auf a . Analog stimmen die Spurinvoluitionen von \mathcal{K} und $\iota_1 \cup \iota_2$ auf $a^{\pi_{\mathcal{K}}}$ überein, da sie die gemeinsamen Fixpunkte $\iota_1 \cap a^{\pi_{\mathcal{K}}}, \iota_2 \cap a^{\pi_{\mathcal{K}}}$ besitzen. Damit induzieren auch die Polaritäten der Büschelquadriken von \mathfrak{B}_a (außer jene von $\tau_1 \cup \tau_2 \supset a^{\pi_{\mathcal{K}}}$) die gleiche Spurinvoluition auf $a^{\pi_{\mathcal{K}}}$.

\mathfrak{B}_a schneidet b in Paaren einer Involution. Diese ist hyperbolisch, denn die Schnittpunkte B_1, B_2 von b mit \mathcal{K} trennen die Schnittpunkte von b mit $\tau_1 \cup \tau_2$ nicht. Von den beiden Fixpunkten E, F liegt genau einer (z.B. F) innerhalb von \mathcal{K} , da E, F und B_1, B_2 einander trennen; d.h. aus dem Büschel \mathfrak{B}_a existiert genau eine Quadrik \mathcal{L} die b in einem Innenpunkt von \mathcal{K} , nämlich F , berührt.

Sei $\tau := F^{\pi_{\mathcal{L}}}$ die Tangentialebene an \mathcal{L} im Punkt F und n die Verbindungsgerade von F mit $T := \tau^{\pi_{\mathcal{K}}}$ (siehe Abbildung 2.4). Wegen $b \in \tau$ gilt $\bar{b} \sim \bar{n}$ und es verbleibt $\bar{a} \sim \bar{n}$ zu zeigen. Wir werden dazu beweisen, daß n sowohl a als auch $a^{\pi_{\mathcal{K}}}$ schneidet.

Es sei $Z := \tau \cap a$ und $\zeta := Z^{\pi_{\mathcal{K}}}$. Wir wissen bereits, daß die Einschränkungen von $\pi_{\mathcal{K}}$ und $\pi_{\mathcal{L}}$ auf a und $a^{\pi_{\mathcal{K}}}$ übereinstimmen. Weiters gilt $a^{\pi_{\mathcal{K}}} = a^{\pi_{\mathcal{L}}} \in \zeta$, womit wir insgesamt $\zeta = Z^{\pi_{\mathcal{K}}} = Z^{\pi_{\mathcal{L}}}$ erhalten. Es gilt

$$T \in \zeta \quad \text{wegen} \quad Z \in \tau = T^{\pi_{\mathcal{K}}}$$

⁴Ein Beweis von Lemma 2.2, der analytische Methoden verwendet, kann im Anhang A.2 gefunden werden.

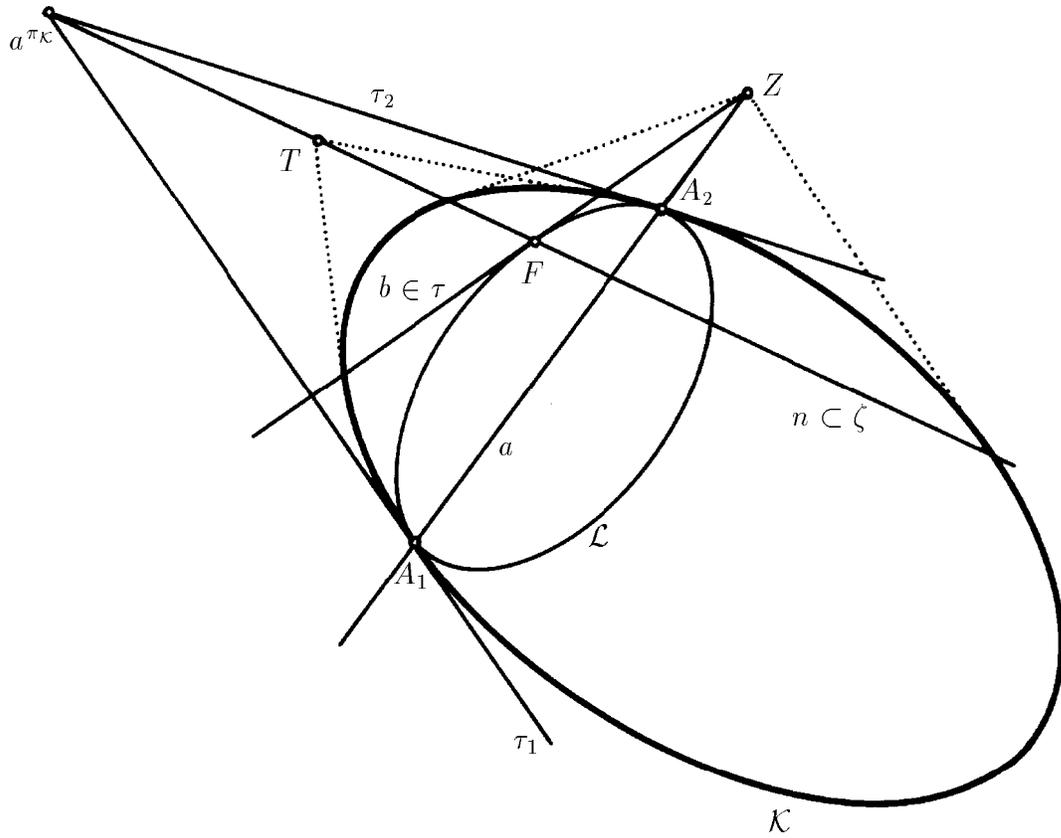


Abbildung 2.4: Skizze zum Beweis des Lemmas 2.2 mit “Projektionszentrum” in $a^{\pi\kappa} \cap \tau$.

$$F \in \zeta \quad \text{wegen} \quad Z \in \tau = F^{\pi\mathcal{L}}.$$

Die beiden Geraden $a^{\pi\mathcal{L}}$ und $n = TF$ sind damit beide in ζ enthalten und schneiden daher einander.

Vertauschen wir im obigen Beweis a und $a^{\pi\kappa}$ so erhalten wir analog, daß n und a einander schneiden. Die Schnittpunkte von n mit a , $a^{\pi\kappa}$ liegen harmonisch zu den Schnittpunkten von n mit \mathcal{K} . Da $a^{\pi\kappa}$ Passante ist, müssen n und a einander in einem Innenpunkt schneiden. Somit gilt $\bar{a} \sim \bar{n}$. \square

2.3.3 Problemstellung

In dieser Arbeit sollen die Plückertransformationen des Raumes $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ untersucht werden. Zuerst werden wir zeigen, daß automorphe Kollineation von \mathcal{K} Plückertransformationen in $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ induzieren:

Satz 2.8 *Sei $\psi : \Pi \rightarrow \Pi$ eine Kollineation, die mit der Polarität π von \mathcal{K} kommutiert. Dann ist die durch ψ bestimmte Abbildung $\varphi : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}, \overline{g} \mapsto \overline{g}^\varphi$ Plückertransformation von $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$.*

Beweis: Laut Voraussetzung gilt $\pi\psi = \psi\pi$. Solch eine Kollineation läßt die der Polarität zugeordnete Quadrik \mathcal{K} als Ganzes fest [7, S. 198]. Da \mathcal{K} nicht schneidende Hyperebenen unter ψ auf ebensolche abgebildet werden, ist das Bild jedes Innenpunktes, wiederum ein Innenpunkt. In weiterer Folge bleibt die orthogonal-schneidende Lage zweier Geraden unter φ als auch unter φ^{-1} erhalten. \square

Umgekehrt stellt sich nun die Frage, ob jede Plückertransformation durch eine Kollineation von Π mit $\pi\psi = \psi\pi$ induziert wird. Für $\dim\mathcal{H} = 2$ und $\dim\mathcal{H} \geq 4$ kann diese Frage bejaht werden. Bei $\dim\mathcal{H} = 3$ existieren Plückertransformationen die nicht durch Kollineationen von Π induziert werden. Es sind genau jene Plückertransformationen, die durch Automorphismen ζ des quadratischen Erweiterungskörpers \mathbb{L} von \mathbb{K} induziert werden mit $\zeta(\mathbb{K}) \not\subset \mathbb{K}$ (siehe Satz 3.18).

Wir werden im folgenden des öfteren benutzen, daß für jede Bijektion $\varphi : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$

$$(\overline{a} \sim \overline{b} \Rightarrow \overline{a}^\varphi \sim \overline{b}^\varphi \quad \forall \overline{a}, \overline{b} \in \overline{\mathcal{G}}) \iff (\overline{a} \approx \overline{b} \Rightarrow \overline{a}^\varphi \approx \overline{b}^\varphi \quad \forall \overline{a}, \overline{b} \in \overline{\mathcal{G}}).$$

Dies gilt wegen der Injektivität von φ .

Kapitel 3

Orthogonalitätstreue Plückertransformationen hyperbolischer Räume

Wir wollen nun die Fälle $\dim \mathcal{H} \geq 4$, $\dim \mathcal{H} = 2$ und $\dim \mathcal{H} = 3$ im Einzelnen betrachten. Sowohl in 2-dimensionalen als auch in 4- bzw. höherdimensionalen hyperbolischen Räumen wird sich zeigen, daß alle Plückertransformationen durch Kollineation von Π induziert werden. Nur in 3-dimensionalen hyperbolischen Räumen ist die Situation anders. In solchen Räumen gibt es Plückertransformationen die nicht durch Kollineationen erzeugt werden.

3.1 Der Fall $\dim \mathcal{H} \geq 4$

3.1.1 Induzierte Kollineation auf \mathcal{H}

Sei, wie in Abschnitt 2.3.1 beschrieben, ein hyperbolischer Raum \mathcal{H} mit der Geradenmenge $\overline{\mathcal{G}}$ und den Relationen \sim und \approx gegeben.

Lemma 3.1 *Sind $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \overline{\mathcal{G}}$ paarweise verschieden, $\overline{a}, \overline{b}$ schneidend und ist \overline{c} orthogonal-schneidend zu \overline{a} und \overline{b} ¹, so gilt $\overline{c} \supset \overline{a} \cap \overline{b}$.*

¹Für $\dim \mathcal{H} = 2$ ist diese Voraussetzung nie erfüllt, und daher ist der Satz auch im zweidimensionalen Fall gültig.

Beweis: Da $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ paarweise verschieden sind, ist $|\bar{a} \cap \bar{b}| = |\bar{b} \cap \bar{c}| = |\bar{a} \cap \bar{c}| = 1$. Da in \mathcal{H} kein Dreieck existiert, bei dem eine Seite auf die anderen beiden orthogonal steht, muß $\bar{c} \supset \bar{a} \cap \bar{b}$ gelten. \square

Im speziellen gilt dieses Lemma, wenn alle drei Geraden orthogonal-schneidend sind. Wir werden nun schrittweise zeigen, daß jede Plückertransformation φ von (\mathcal{G}, \sim) durch eine Kollineation von Π induziert wird. Es reicht jedoch schon aus, wenn wir voraussetzen, daß φ die Verwandtschaft von Geraden erhält:

Satz 3.1 Sei $\dim \mathcal{H} \geq 4$ und $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ eine Bijektion² mit

$$\bar{a} \sim \bar{b} \Rightarrow \bar{a}^\varphi \sim \bar{b}^\varphi \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{G}, \quad (3.1)$$

dann gilt: Zu jedem Punkt $A \in \mathcal{H}$ existiert ein $A' \in \mathcal{H}$, sodaß für jedes $\bar{g} \in \mathcal{G}$ mit $A \in \bar{g}$ die Bildgerade \bar{g}^φ den Punkt A' enthält.

Beweis: Es gibt Geraden $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{G}$ mit $\bar{a} \cap \bar{b} = A$ und $\bar{a} \approx \bar{b}$. Damit gilt $\bar{a}^\varphi \approx \bar{b}^\varphi$ und wir können $A' := \bar{a}^\varphi \cap \bar{b}^\varphi$ setzen. Es bleibt zu zeigen, daß das Bild \bar{g}^φ jeder Geraden \bar{g} mit $A \in \bar{g}$ den Punkt A' enthält.

1. Ist \bar{g} sowohl mit \bar{a} als auch mit \bar{b} verwandt, so trifft dies auch auf die Bildgeraden \bar{g}^φ und \bar{a}^φ bzw. \bar{b}^φ zu, womit die Voraussetzungen des Lemmas 3.1 erfüllt sind. Wir erhalten $A' \in \bar{g}^\varphi$.
2. Sei \bar{g} nicht mit \bar{a} und \bar{b} verwandt. Wegen $\dim \mathcal{H} \geq 4$ spannen alle Geraden durch A , die auf \bar{a} und \bar{b} orthogonal stehen einen $(\dim \mathcal{H} - 2)$ -dimensionalen Unterraum β von Π auf, der mindestens 2-dimensional ist. Die von a und b aufgespannte Ebene bezeichnen wir mit α und wir wählen $c, d \subset \beta$ so, daß $\bar{c} \approx \bar{d}$ und $A \in c, d$ (siehe Abbildung 3.1). Zusätzlich existieren Geraden $e, f \ni A$ mit $e \in \alpha, f \in \beta$ und $\bar{e} \approx \bar{g}, \bar{f} \approx \bar{g}$ (e und f müssen in der Hyperebene durch A liegen, die durch alle zu \bar{g} orthogonalen Geraden durch A aufgespannt wird.). Die Geraden $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ und $\bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$, sowie $\bar{a}, \bar{b}, \bar{f}$ und $\bar{c}, \bar{d}, \bar{e}$ stehen nun je paarweise orthogonal aufeinander. Selbiges gilt für ihre Bilder unter φ . Mit Lemma 3.1 erhalten wir schrittweise: $A' \in \bar{c}^\varphi, A' \in \bar{d}^\varphi \implies A' \in \bar{e}^\varphi, A' \in \bar{f}^\varphi$ und damit auch $A' \in \bar{g}^\varphi$. \square

Somit können wir mit Hilfe von φ eine Punktabbildung auf \mathcal{H} definieren und es gilt:

²Es wird im folgenden von Nutzen sein, φ auch auf Sekanten $s \in \mathcal{G}$ in Π anwenden zu können. s^φ soll jene projektive Gerade sein, deren Schnitt mit \mathcal{H} gleich \bar{s}^φ ergibt. Wir können daher statt \bar{s}^φ auch \bar{s}^φ schreiben.

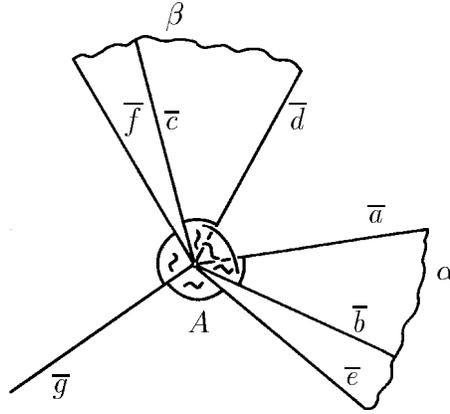


Abbildung 3.1: Schritt 2 von Satz 3.1

Satz 3.2 In einem hyperbolischen Raum \mathcal{H} wird jede Bijektion $\varphi : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$, die Bedingung (3.1) erfüllt, und bei der es zu jedem $A \in \mathcal{H}$ ein $A' \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$A \in \overline{g} \implies A' \in \overline{g}^\varphi \text{ für alle } \overline{g} \in \overline{\mathcal{G}},$$

durch eine Kollineation $\overline{\psi}$ von \mathcal{H} induziert.³

Beweis: Sei $\overline{\psi} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ so gewählt, daß $A \mapsto A^{\overline{\psi}} := A'$. Laut Voraussetzung ist diese Definition sinnvoll und die kollineare Lage von Punkten in \mathcal{H} bleibt erhalten.

- Wir nehmen indirekt an, es gebe zwei verschiedenen Punkte $A, B \in \mathcal{H}$ mit $A^{\overline{\psi}} = B^{\overline{\psi}}$. Sei $X \in \mathcal{H} \setminus AB$. Wegen der Injektivität von φ gilt dann $\overline{XB}^\varphi \neq \overline{XA}^\varphi$ und somit $X^{\overline{\psi}} = A^{\overline{\psi}} = B^{\overline{\psi}}$. Ist $\overline{g} \in \overline{\mathcal{G}}$, so muß damit $A^{\overline{\psi}} \in \overline{g}^\varphi$ gelten, was einen Widerspruch zur Surjektivität von φ darstellt. $\overline{\psi}$ ist also injektiv und wir erhalten

$$\overline{XY}^\varphi = \overline{X^{\overline{\psi}}Y^{\overline{\psi}}} \quad \forall X, Y \in \mathcal{H}, \quad X \neq Y.$$

- Es seien $A, B, C \in \mathcal{H}$ drei nicht kollineare Punkte, die unter $\overline{\psi}$ auf kollineare Punkte $A^{\overline{\psi}}, B^{\overline{\psi}}, C^{\overline{\psi}}$ abgebildet werden. Nach 1. sind diese Punkte paarweise verschieden. Dann ergibt sich jedoch wegen $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ und

$$\overline{AB}^\varphi = \overline{A^{\overline{\psi}}B^{\overline{\psi}}} = \overline{A^{\overline{\psi}}C^{\overline{\psi}}} = \overline{AC}^\varphi$$

³Ist die Dimension von \mathcal{H} gleich 2 oder größer gleich 4, so reicht laut Satz 3.1 bzw. Satz 3.8 die Bedingung (3.1) für die Gültigkeit des Satzes. Die zweite Bedingung wurde hinzugezogen, damit Satz 3.2 auch bei $\dim \mathcal{H} = 3$ gilt.

ein Widerspruch zur Injektivität von φ . Nichtkollineare Punkte werden daher unter $\overline{\psi}$ also auf ebensolche abgebildet.

3. Wir werden die Surjektivität von $\overline{\psi}$ in vier Schritten zeigen:

- (a) Zuerst zeigen wir, daß jede Einschränkung von φ auf ein Bündel $\overline{\mathcal{G}}_A$ ($A \in \mathcal{H}$) eine Bijektion auf $\overline{\mathcal{G}}_{A^{\overline{\psi}}}$ ist. Für je zwei Geraden $\overline{a} \neq \overline{b}$ durch A gilt $\overline{a}^\varphi \neq \overline{b}^\varphi$ (Injektivität von φ) und $A^{\overline{\psi}} = \overline{a}^\varphi \cap \overline{b}^\varphi$. Nehmen wir an $A^{\overline{\psi}} \in \overline{c}^\varphi$, aber $A \notin \overline{c}$, dann können wir o.B.d.A. davon ausgehen, daß \overline{c} sowohl \overline{a} als auch \overline{b} schneidet. Wir erhalten einen Widerspruch zur Injektivität von $\overline{\psi}$, da $\overline{c} \cap \overline{a} := B \neq A$, aber $\overline{c}^\varphi \cap \overline{a}^\varphi = B^{\overline{\psi}} = A^{\overline{\psi}}$. Somit gilt $A \in \overline{c}$.
- (b) Es soll nun gezeigt werden, daß die φ -Urbilder grenzparalleler Geraden wieder grenzparallel sind: Liegen zwei Geraden überparallel oder windschief, so besitzen sie eine gemeinsame Orthogonale, welche die beiden Geraden in zwei verschiedenen Punkten schneidet (siehe Lemma 2.1 und Lemma 2.2). Wegen der Injektivität von $\overline{\psi}$ bleibt diese Eigenschaft unter φ erhalten. Da zwei schneidende oder grenzparallele Geraden keine solche gemeinsame Orthogonale besitzen (Lemma 3.1), können ihre φ -Urbilder wieder nur grenzparallel oder schneidend sein. Da nach Voraussetzung die schneidende Lage unter φ erhalten bleibt, sind die φ -Urbilder grenzparalleler Geraden wieder grenzparallel.
- (c) Im nächsten Schritt wollen wir nun zeigen, daß

$$\overline{a}^{\overline{\psi}} = \{X^{\overline{\psi}} \mid X \in \overline{a}\} = \overline{a}^\varphi \quad \text{für alle } \overline{a} \in \overline{\mathcal{G}}.$$

Wir betrachten dazu das Bündel um einen beliebigen Punkt $A \notin \overline{a}$. Schneiden die φ -Urbilder jener Bündelgeraden durch $A^{\overline{\psi}} \notin \overline{a}^\varphi$, deren Durchschnitt mit \overline{a}^φ nicht leer ist, die Gerade \overline{a} , so hat jeder Punkt auf \overline{a}^φ ein $\overline{\psi}$ -Urbild auf \overline{a} .

Verbinden wir $A^{\overline{\psi}}$ mit den Schnittpunkten der Geraden a^φ mit der Absolutquadrik \mathcal{K} , so erhalten wir zwei zu \overline{a}^φ grenzparallele Geraden, die unter φ^{-1} auf die beiden einzigen zu \overline{a} grenzparallelen Bündelgeraden von $\overline{\mathcal{G}}_A$ abgebildet werden müssen. Nach (b) muß jede \overline{a}^φ schneidende Gerade aus $\overline{\mathcal{G}}_{A^{\overline{\psi}}}$ unter $\overline{\psi}^{-1}$ auf eine \overline{a} schneidende Gerade aus $\overline{\mathcal{G}}_A$ abgebildet werden, da das $\overline{\psi}$ -Urbild von \overline{a}^φ dem Bündel $\overline{\mathcal{G}}_A$ angehört, jedoch weder grenzparallel, windschief noch überparallel zu \overline{a} liegen kann. Die Surjektivität von $\overline{\psi}|_{\overline{a}} : \overline{a} \rightarrow \overline{a}^\varphi$ ist somit bewiesen.

- (d) Es verbleibt zu zeigen, daß $\overline{\psi}$ auf ganz \mathcal{H} surjektiv ist. Sei B ein beliebiger Punkt in \mathcal{H} , dann wählen wir eine Gerade $\overline{a}^\varphi \ni B$. Nach (c)

existiert ein $A \in \bar{\alpha}$ mit $A^{\bar{\psi}} = B$. Somit sind alle Punkt von \mathcal{H} Bildpunkte der Abbildung $\bar{\psi}$, und $\bar{\psi}$ ist surjektiv. \square

3.1.2 Fortsetzung in den projektiven Raum

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden wir nun noch zeigen, daß sich jede Kollineation von \mathcal{H} zu einer Kollineation des gesamten projektiven Raumes Π fortsetzen läßt. Dazu benötigen wir einen Satz von R. FRANK [13, Satz 2], der folgende Begriffe verwendet:

Es seien Π, Π' zwei projektive Räume, $M \subset \Pi$ und $\bar{\psi}$ eine Abbildung von M nach Π' . Dann können wir für $\bar{\psi}$ folgende Bedingungen⁴ definieren:

- (L1) Kollineare Punkte in M werden unter $\bar{\psi}$ auf kollineare Punkte abgebildet.
- (L2) Gilt $P^{\bar{\psi}} = Q^{\bar{\psi}}$ für zwei verschiedene Punkte $P, Q \in M$, so ist $(PQ)^{\bar{\psi}} = P^{\bar{\psi}}$; d.h. die Einschränkung von $\bar{\psi}$ auf $PQ \cap M$ ist konstant.

Mit $[M]$ bezeichnen wir im folgenden die projektive Hülle von M in Π . Sind D und Z disjunkte Unterräume von Π und $M \subset [D \vee Z] \setminus Z$. Dann heiße die Abbildung

$$p : M \rightarrow D \text{ mit } X \mapsto XZ \cap D$$

*Projektion*⁵ mit Zentrum Z . Offensichtlich erfüllt jede Projektion die Bedingungen (L1) und (L2). Der Satz 2 aus [13] lautet nun:

Satz 3.3 (R. Frank) *Seien Π und Π' projektive Räume mit $\dim \Pi, \dim \Pi' \geq 2$, für die der kleine Satz von Desargues gilt. Die Teilmenge $M \neq \emptyset$ von Π sei linear offen bezüglich einer linearen Topologie von Π . Weiters sei $\bar{\psi} : M \rightarrow \Pi'$ eine Abbildung die (L1), (L2) erfüllt und $[M^{\bar{\psi}}] = \Pi'$. In Π gäbe es eine Gerade g derart, daß $(M \cap g)^{\bar{\psi}}$ eine bezüglich einer linearen Topologie von Π' offenen Menge $u \neq \emptyset$ enthält. Dann gibt es Unterräume $Z \subset \Pi \setminus M$ und $D \subset \Pi \setminus Z$ mit $[D \vee Z] = \Pi$, sowie eine Kollineation $\psi : D \rightarrow \Pi'$ mit $\bar{\psi} = p\psi$ für die Projektion $p : M \rightarrow D$ mit dem Zentrum Z . Der Unterraum Z ist eindeutig.*

⁴Es ist üblich eine Abbildung $\bar{\psi} : M \rightarrow \Pi'$, welche die Bedingungen (L1), (L2) erfüllt, als Einschränkung einer linearen Abbildung auf M zu bezeichnen.

⁵R. FRANK verwendet in seiner Arbeit [13] etwas andere Bezeichnungen: Eine Abbildung mit den Eigenschaften (L1), (L2) heißt bei FRANK Projektion, und der in dieser Arbeit verwendete Begriff einer Projektion wird in [13] als Zentralprojektion bezeichnet.

Wir können nun zeigen:

Satz 3.4 *In einem hyperbolischen Raum \mathcal{H} wird jede Bijektion $\varphi : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$, die Bedingung (3.1) erfüllt, und bei der es zu jedem $A \in \mathcal{H}$ ein $A' \in \mathcal{H}$ gibt mit*

$$A \in \overline{g} \implies A' \in \overline{g}^\varphi \text{ für alle } \overline{g} \in \overline{\mathcal{G}},$$

durch eine Kollineation ψ von Π induziert.

Beweis: Wir wissen bereits (Satz 3.2), daß φ durch eine Kollineation $\overline{\psi}$ von \mathcal{H} induziert wird. Wir fassen $\overline{\psi}$ im folgenden als Abbildung $\overline{\psi} : \mathcal{H} \rightarrow \Pi$ auf. Jede Kollineation, und damit auch $\overline{\psi}$, erfüllt (L1) und (L2). Es verbleibt zu zeigen, daß sich $\overline{\psi} : \mathcal{H} \rightarrow \Pi$ zu einer Kollineation $\psi : \Pi \rightarrow \Pi$ erweitern läßt.

Der Algebraisierungskörper \mathbb{K} des projektiven Desarguesraumes Π , mit $\dim \Pi \geq 2$, ist euklidisch und besitzt daher eine eindeutige Anordnung (siehe Kapitel 1.1). Zusammen mit der Ordnungstopologie ist \mathbb{K} ein topologischer Körper [39] und Π wird durch die projektive Koordinatentopologie τ zum topologischen projektiven Raum (siehe Kapitel 1.4). Die Innenpunkte ovaler Quadriken⁶, also zum Beispiel die Punktmenge von \mathcal{H} , bilden eine offene Menge, die in keiner Hyperebene von Π enthalten ist. Es gilt daher $[\mathcal{H}^{\overline{\psi}}] = [\mathcal{H}] = \Pi$. Die Relativtopologien auf den Geraden von Π bildet eine lineare Topologie. Da \mathcal{H} offen ist, ist der Durchschnitt jeder Geraden g mit \mathcal{H} offen bezüglich der Relativtopologie auf g , und somit ist \mathcal{H} eine linear offene Menge. Ist g eine Gerade von Π mit nichtleerem Durchschnitt mit \mathcal{H} , so ist

$$\overline{g}^{\overline{\psi}} = (\mathcal{H} \cap g)^{\overline{\psi}} = \mathcal{H} \cap g^\varphi \neq \emptyset$$

wiederum offen bezüglich der linearen Topologie auf \mathcal{P} . Damit können wir Satz 3.3 anwenden:

Es existieren also Unterräume $Z \subset \Pi \setminus \mathcal{H}$ und $D \subset \Pi \setminus Z$ mit $[D \vee Z] = \Pi$, sowie eine Kollineation $\psi : D \rightarrow \Pi$ mit $\overline{\psi} = p\psi$ für die Projektion $p : \mathcal{H} \rightarrow D$ mit Zentrum Z . Der Unterraum Z muß in unserem Fall die leere Menge sein, da jede hyperbolische Gerade \overline{g} mit $g \cap Z \neq \emptyset$ unter $\overline{\psi}$ auf einen Punkt abgebildet wird. Da $\overline{\psi}$ injektiv ist, gibt es solche Geraden nicht. Wegen $Z = \emptyset$ und $[D \vee Z] = \Pi$ muß $D = \Pi$ und die Projektion $p : \mathcal{H} \rightarrow \Pi$ gleich der Identität sein; d.h. die so erhaltene Kollineation ψ von Π leistet auf \mathcal{H} dasselbe wie $\overline{\psi}$.

⁶Um zu zeigen, daß die Innenpunkte einer ovalen Quadrik \mathcal{K} eine offene Menge bilden, zeigt man, daß die quadratische Form $q : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{K}$, die \mathcal{K} festlegt, stetig ist. Die Menge der Innenpunkte werden unter q auf $[-\infty, 0[$ abgebildet und ist daher offen.

Da ψ Kollineation ist, werden unter ψ Hyperebenen auf Hyperebenen abgebildet. Durch einen Außenpunkt A von \mathcal{K} ist umkehrbar eindeutig eine Hyperebene $A^\pi = \varepsilon$ mitbestimmt, die Innenpunkte trägt. Sind $I_1, I_2 \in \varepsilon$ zwei solche Innenpunkte, so wird ε auch aufgespannt durch alle Geraden $a \in \mathcal{G}$ in ε mit $\bar{a} \approx \overline{AI_1}$ und $I_1 \in a$ oder $\bar{a} \approx \overline{AI_2}$ und $I_2 \in a$. Das Orthogonalstehen bleibt unter ψ erhalten; d.h. $A^\psi I_1^\psi$ bzw. $A^\psi I_2^\psi$ sind die eindeutigen Geraden durch I_1^ψ bzw. I_2^ψ , die auf alle Geraden des Geradenbündels um I_1^ψ bzw. I_2^ψ in ε^ψ orthogonal stehen. Es gilt also $A^\psi = \varepsilon^{\psi\pi}$. Damit ist A^ψ ein Außenpunkt von \mathcal{K} . Da mit ψ auch ψ^{-1} Kollineation ist, wird die Menge der Außenpunkte von \mathcal{K} unter ψ bijektiv auf sich selbst abgebildet. Somit läßt ψ auch die ovale Quadrik \mathcal{K} als Ganzes fest und kommutiert daher mit der durch \mathcal{K} bestimmten Polarität [7, S. 198]. \square

Damit haben wir unser Ziel erreicht. Denn fügen wir die Sätze 3.1 und 3.4 zusammen, erhalten wir:

Satz 3.5 *In einem hyperbolischen Raum \mathcal{H} mit $\dim \mathcal{H} \geq 4$, wird jede Bijektion*

$$\varphi : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathcal{G}} \text{ mit } \bar{a} \sim \bar{b} \Rightarrow \bar{a}^\varphi \sim \bar{b}^\varphi,$$

durch eine Kollineation ψ des zugehörigen projektiven Raumes induziert mit $\pi\psi = \psi\pi$.

Eine direkte Folgerung aus Satz 3.5 und Satz 2.8 ist:

Satz 3.6 *Erfüllt $\varphi : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$ die Voraussetzungen aus Satz 3.5, so ist φ bereits Plückertransformation von $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$.*

Wir wenden uns nun den hyperbolischen Ebenen zu.

3.2 Der zweidimensionale Fall

3.2.1 Eine Kennzeichnung der Plückertransformationen

Wenn nicht anders erwähnt, wollen wir in diesem Kapitel von folgenden Voraussetzungen ausgehen: Π ist eine klassische projektive Ebene mit euklidischem Algebraisierungskörper \mathbb{K} . Die Innenpunkte eines Kegelschnittes \mathcal{K} bilden die hyperbolische Ebene \mathcal{H} mit der Menge der Sekanten geschnitten mit \mathcal{H} als Geradenmenge $\overline{\mathcal{G}}$. Durch \mathcal{K} ist die Polarität π mitbestimmt.

Für eine beliebige Gerade $\bar{g} \in \bar{\mathcal{G}}$ gehen alle orthogonal-schneidenden Geraden zu \bar{g} durch den Punkt g^π . Damit sehen wir, daß es zu je zwei schneidenden bzw. grenzparallelen Geraden \bar{a}, \bar{b} ($\bar{a} \neq \bar{b}$) keine Gerade \bar{n} geben kann mit $\bar{a} \sim \bar{n} \sim \bar{b}$. Da $(\bar{\mathcal{G}}, \sim)$ nach Lemma 2.1 jedoch Plückerraum ist, gibt es eine endliche Folge $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_k \in \bar{\mathcal{G}}$ mit

$$\bar{a} \sim \bar{n}_1 \sim \bar{n}_2 \sim \dots \sim \bar{n}_k \sim \bar{b}.$$

Diese Aussage werden wir nun weiter verschärfen:

Lemma 3.2 *Sind die verschiedenen Geraden $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathcal{G}}$ zueinander grenzparallel oder schneidend, aber nicht verwandt, so existieren Geraden⁷ \bar{n}_1, \bar{n}_2 mit*

$$\bar{a} \approx \bar{n}_1 \approx \bar{n}_2 \approx \bar{b}.$$

Beweis: In beiden Fällen werden wir die Existenz einer Geraden \bar{n}_1 zeigen, die einerseits $\bar{a} \approx \bar{n}_1$ erfüllt und zusätzlich überparallel zu \bar{b} ist. Nach dem Beweis von Lemma 2.1 ist dies jedoch äquivalent zur Behauptung.

1. \bar{a}, \bar{b} sind grenzparallel (siehe Abbildung 3.2): Sei $A \in a \cap \mathcal{K}$, $B \in b \cap \mathcal{K}$ und $C := a \cap b \in \mathcal{K}$ mit $A \notin b$ und $B \notin a$. Wir wählen $D \in \mathcal{K}$ so, daß die Punktepaare (A, B) und (C, D) einander trennen, d.h. $(A, B|C, D) = -1$. Für den zweiten Schnittpunkt E von $a^\pi D$ mit \mathcal{K} gilt $(A, C|D, E) = -1$, da AC und DE einander in einem Innenpunkt von \mathcal{K} orthogonal schneiden (siehe [8, S.63]). Wir erhalten

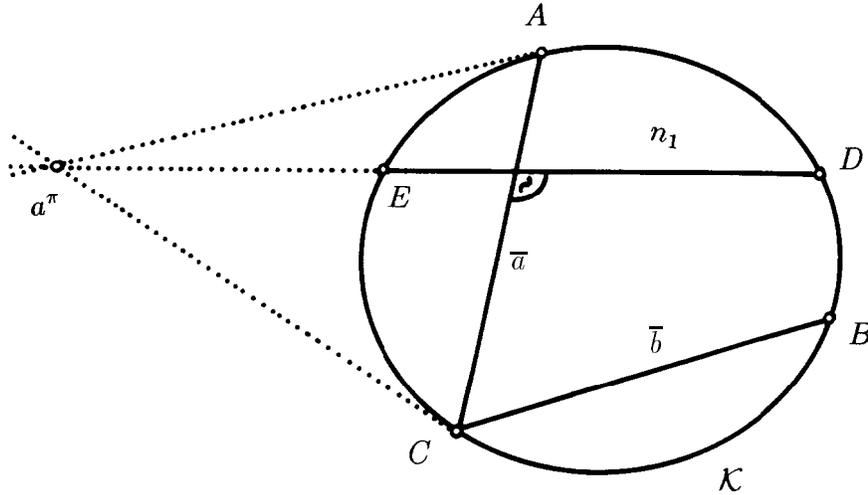
$$(C, D|B, E) = (C, D|B, A) \cdot (C, D|A, E) = (-1) \cdot 1 = -1$$

und damit $(B, C|D, E) = 1$, woraus folgt [8, S.63], daß \bar{b} und $\bar{n}_1 := \overline{DE}$ zueinander überparallel sind.

2. \bar{a}, \bar{b} schneiden einander (siehe Abbildung 3.3): A, B bzw. C, D seien die Schnittpunkte von a bzw. b mit \mathcal{K} . Wegen \bar{a}, \bar{b} schneidend, ist $(A, B|C, D) = -1$. Wählen wir $E \in a^\pi D \cap \mathcal{K}$ mit $D \neq E$, dann sind \overline{AB} und \overline{DE} schneidend und daher gilt $(A, B|D, E) = -1$. Wegen $a \not\sim b$ ergibt sich weiters $C \neq E$. Wir können nun o.B.d.A. voraussetzen, daß $(A, C|D, E) = -1$ ist: Denn für $(A, C|D, E) = 1$ ergibt sich mit dem Multiplikationssatz für Trennfunktionen

$$(B, C|D, E) = (B, A|D, E) \cdot (A, C|D, E) = (-1) \cdot 1 = -1.$$

⁷Da zwei verschiedene schneidende bzw. grenzparallele Geraden stets eine hyperbolische Ebene aufspannen, gilt Lemma 3.2 bei beliebiger Dimension.


 Abbildung 3.2: \bar{a}, \bar{b} grenzparallel

Weiters wählen wir den Punkt F so, daß $(A, D|C, F) = -1$. Für den Restschnittpunkt $a^\pi F \cap \mathcal{K} =: G$ erhalten wir $(E, D|F, G) = 1$, da sich ED und FG in dem Außenpunkt a^π schneiden. Schrittweise ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} (A, D|E, F) &= (A, D|C, F) \cdot (A, D|E, C) = (-1) \cdot 1 = -1, \\ (D, E|A, G) &= (D, E|F, G) \cdot (D, E|A, F) = 1 \cdot 1 = 1, \\ (D, E|C, G) &= (D, E|A, G) \cdot (D, E|C, A) = 1 \cdot (-1) = -1, \\ (D, E|C, F) &= (D, E|C, G) \cdot (D, E|G, F) = (-1) \cdot 1 = -1. \end{aligned}$$

Aus $(C, D|F, G) = (-1)(-1) = 1$ folgt, daß \bar{b} und \bar{n}_1 überparallel sind. \square

Satz 3.7 Für $\dim \mathcal{H} = 2$ ist jede Bijektion

$$\varphi : \bar{\mathcal{G}} \rightarrow \bar{\mathcal{G}} \text{ mit } \bar{g} \sim \bar{h} \implies \bar{g}^\varphi \sim \bar{h}^\varphi$$

bereits Plückertransformation von $(\bar{\mathcal{G}}, \sim)$.

Beweis: Für beliebige Geraden $\bar{g}, \bar{h} \in \bar{\mathcal{G}}$ mit $\bar{g} \not\sim \bar{h}$ ist

$$\bar{g} \not\sim \bar{h} \implies \bar{g}^\varphi \not\sim \bar{h}^\varphi$$

zu zeigen. Dazu unterscheiden wir folgende Fälle:

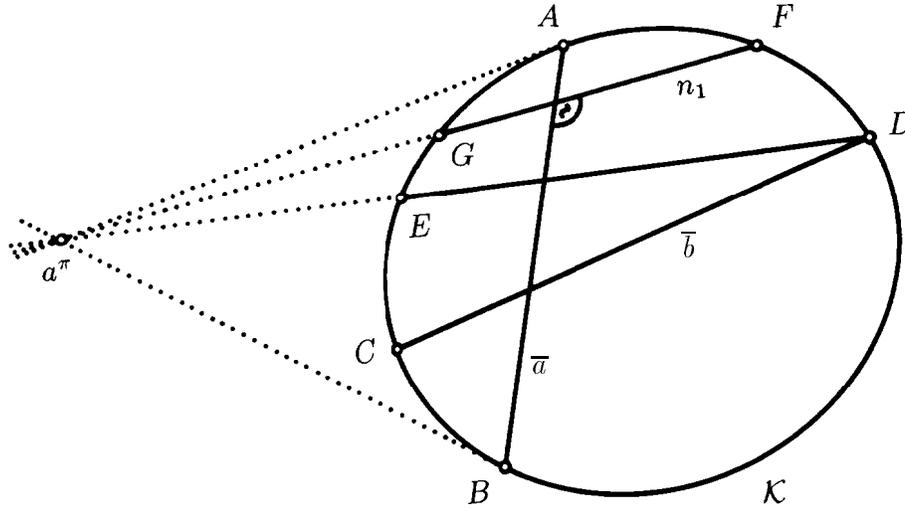


Abbildung 3.3: \bar{a}, \bar{b} schneidend

1. \bar{g}, \bar{h} sind überparallel: Nach dem Beweis von Lemma 2.1 existiert ein $\bar{n}_1 \in \bar{\mathcal{G}}$ mit $\bar{g} \approx \bar{n}_1 \approx \bar{h}$ und laut Voraussetzung damit $\bar{g}^\varphi \approx \bar{n}_1^\varphi \approx \bar{h}^\varphi$. Deshalb ist $n_1^{\varphi\pi} = g^\varphi \cap h^\varphi$ Außenpunkt von \mathcal{K} und $\bar{g}^\varphi, \bar{h}^\varphi$ sind ebenfalls überparallel, also $\bar{g}^\varphi \not\approx \bar{h}^\varphi$.
2. \bar{g}, \bar{h} sind schneidend oder grenzparallel: Nach Lemma 3.2 existieren Geraden $\bar{n}_1, \bar{n}_2 \in \bar{\mathcal{G}}$ mit $\bar{g} \approx \bar{n}_1 \approx \bar{n}_2 \approx \bar{h}$ und folglich $\bar{g}^\varphi \approx \bar{n}_1^\varphi \approx \bar{n}_2^\varphi \approx \bar{h}^\varphi$. Bekannterweise existieren keine Rechtecke in der hyperbolischen Ebene und daher gilt $\bar{g}^\varphi \not\approx \bar{h}^\varphi$. □

3.2.2 Induzierte Kollineationen auf \mathcal{H} und Π

Durch jede Plückertransformation φ von $(\bar{\mathcal{G}}, \sim)$ ist die Bijektion

$$(\pi|_{A_{\mathcal{K}}})\varphi\pi : A_{\mathcal{K}} \rightarrow A_{\mathcal{K}}$$

auf den Außenpunkten $A_{\mathcal{K}}$ mitbestimmt. Da es zu keinen Verwechslungen kommen kann, schreiben wir für diese Abbildung im folgenden ebenfalls φ . Damit liegt eine Abbildung

$$\varphi : \bar{\mathcal{G}} \cup A_{\mathcal{K}} \rightarrow \bar{\mathcal{G}} \cup A_{\mathcal{K}}$$

vor mit $\overline{\mathcal{G}}^\varphi = \overline{\mathcal{G}}$ und $A_{\mathcal{K}}^\varphi = A_{\mathcal{K}}$. Für jedes $A \in A_{\mathcal{K}}$ und jede Sekante g von \mathcal{K} gilt somit:

$$A \in g \iff g \approx A^\pi \iff g^\varphi \approx A^{\pi\varphi} \iff A^{\pi\varphi\pi} \in g^\varphi \iff A^\varphi \in g^\varphi. \quad (3.2)$$

Satz 3.8 *Sei φ wie in Satz 3.7 gegeben. Dann gilt: Zu jedem Punkt $A \in \mathcal{H}$ gibt es ein $A' \in \mathcal{H}$ mit folgender Eigenschaft:*

$$\forall \overline{g} \in \overline{\mathcal{G}} \text{ mit } A \in \overline{g} \implies A' \in \overline{g}^\varphi.$$

Mit Hilfe der Polarität π übersetzen wir den Satz in eine äquivalente Aussage über die Außenpunkte von \mathcal{K} . Statt Satz 3.8 werden wir die folgende Aussage zeigen:

Satz 3.9 *Seien G, H und I drei verschiedene Punkte auf einer Passanten von \mathcal{K} . Dann sind G^φ, H^φ und I^φ kollinear und liegen wieder auf einer Passanten⁸ von \mathcal{K} .*

Beweis: Wir konstruieren dazu in mehreren Schritten eine nichttriviale Desarguesfigur Z, P_j, Q_j ($j \in \{1, 2, 3\}$), sodaß einander entsprechende Seiten p_j, q_j ($j \in \{1, 2, 3\}$) in G, H bzw. I schneiden. Die Ecken der Desarguesdreiecke P_1, P_2, P_3 bzw. Q_1, Q_2, Q_3 sollen dabei Außenpunkte und die Seiten p_j, q_j ($j \in \{1, 2, 3\}$) Sekanten von \mathcal{K} sein (siehe Abbildung 3.4).

1. Wir legen aus jedem der Punkte G, H und I eine Tangente (t_G, t_H und t_I) an \mathcal{K} . Da GH Passante von \mathcal{K} ist, sind die Berührungspunkte T_G, T_H, T_I , sowie die Schnittpunkte $G_0 := t_H \cap t_I, H_0 := t_G \cap t_I, I_0 := t_H \cap t_G$ paarweise verschieden und bilden jeweils ein Dreieck⁹. (Abb. 3.5)

Wird $u := GH$ als Ferngerade ausgezeichnet, so bildet $\mathcal{A} := \mathcal{P} \setminus u$ eine affine Ebene, die im Sinne von S. GUDDER [16] einen metrischen Raum bildet. Es sei

$$\sigma : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$$

eine Metrik auf \mathcal{A} (siehe Kapitel 1.5).

⁸In [28] gibt H. LENZ eine Bedingung dafür an, daß drei Punkte aus $\mathcal{P} \setminus \mathcal{H}$ (Er betrachtet den hyperbolische Raum unabhängig vom Caley-Klein Modell und spricht deshalb von un-eigentlichen Idealpunkten, die jeweils durch ein Geradenbüschel festgelegt werden.) auf einer Passanten oder Tangenten von \mathcal{K} liegen. Er verwendet dazu ebenfalls eine Desarguesfigur bei der alle Dreiecksseiten Punkte von \mathcal{H} enthalten, stellt jedoch keine Bedingung für die Ecken der zugehörigen Dreiecke.

⁹Nur für eine Tangente GH könnten etwa T_G mit T_H zusammenfallen.

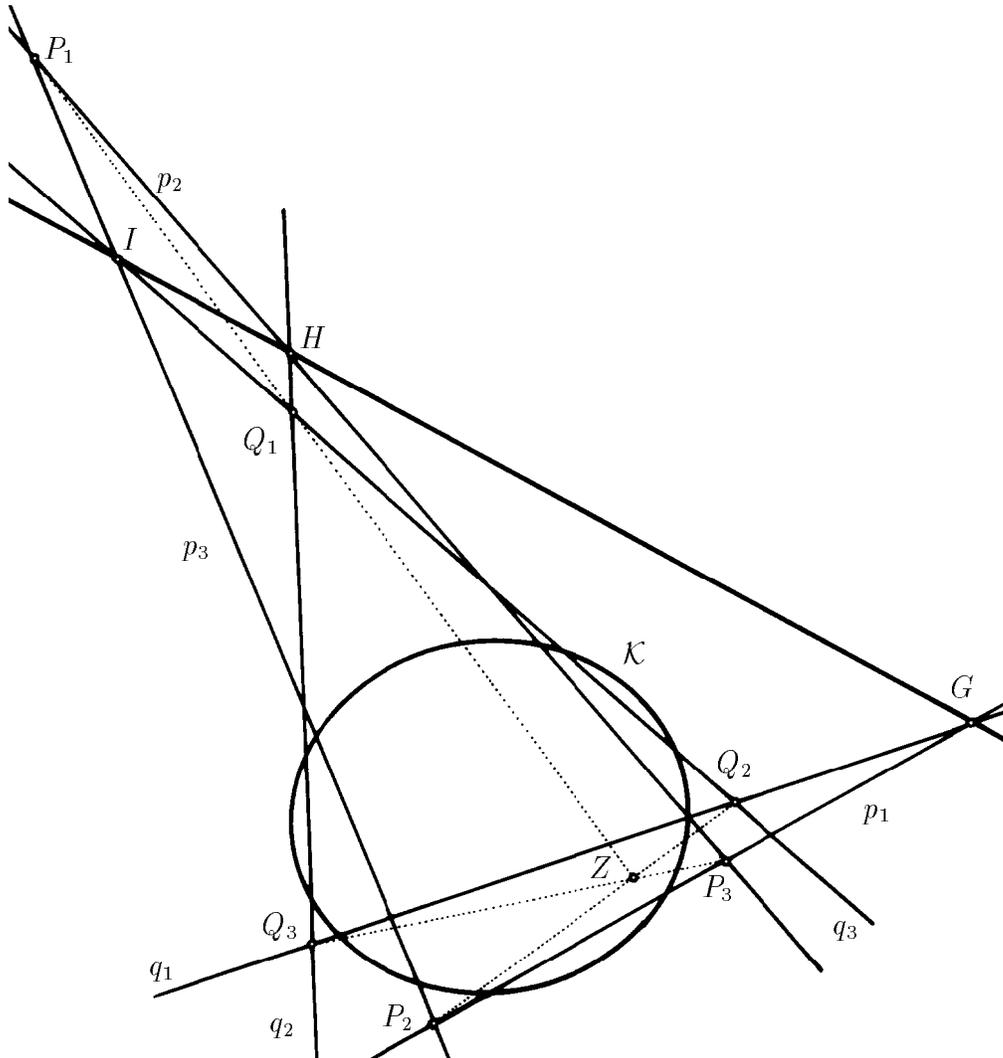


Abbildung 3.4: Desarguesfigur mit P_j, Q_j Außenpunkte und p_j, q_j Sekanten von \mathcal{K} ($j \in \{1, 2, 3\}$)

2. Da G_0, H_0, I_0 Außenpunkte von \mathcal{K} sind und $A_{\mathcal{K}} \setminus u$ offen ist, existiert ein $\rho \in \mathbb{K}^+$ so, daß die offenen Kreisscheiben $K(G_0, \rho), K(H_0, \rho)$ und $K(I_0, \rho)$ ganz in $A_{\mathcal{K}}$ enthalten sind. Exemplarisch konstruieren wir nun die Seite p_1 : Innerhalb der Kreisscheibe $K(T_G, \frac{\rho}{3})$ wählen wir Punkte G_H, G_I , die auf $T_G H$ bzw. $T_G I$ liegen und Innenpunkte bezüglich \mathcal{K} sind (siehe Abbildung 3.6).

Sei o.B.d.A. $G_H G =: p_1$ zwischen t_G und $G_I G$, dann liegt auch der Schnittpunkt $p_1 \cap T_G I$ zwischen T_G und G_I und damit innerhalb von $K(T_G, \frac{\rho}{3})$. Da

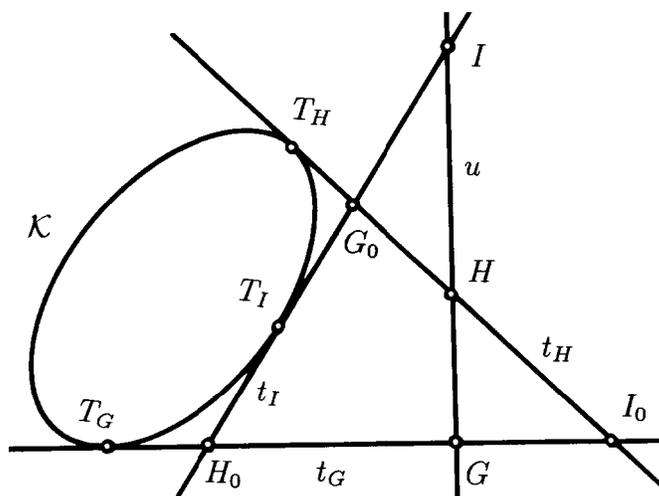


Abbildung 3.5: Beweisschritt 1 des Satzes 3.8

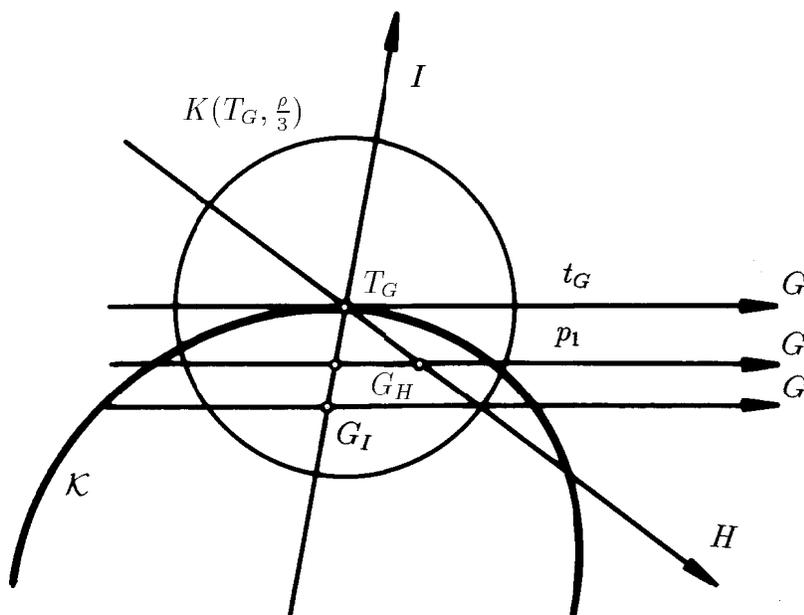


Abbildung 3.6: Beweisschritt 2 des Satzes 3.8

\mathbb{K} ein euklidischer Körper ist, und p_1 zumindest einen Innenpunkt enthält, ist p_1 Sekante von \mathcal{K} . Die analoge Konstruktion kann für p_2 und p_3 durchgeführt werden.

3. Im nächsten Schritt wollen wir anhand von P_1 zeigen, daß die Punkte $P_i := p_j \cap p_k$ ($i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ und paarweise verschieden) Außenpunkte von \mathcal{K} sind (Abbildung 3.7):

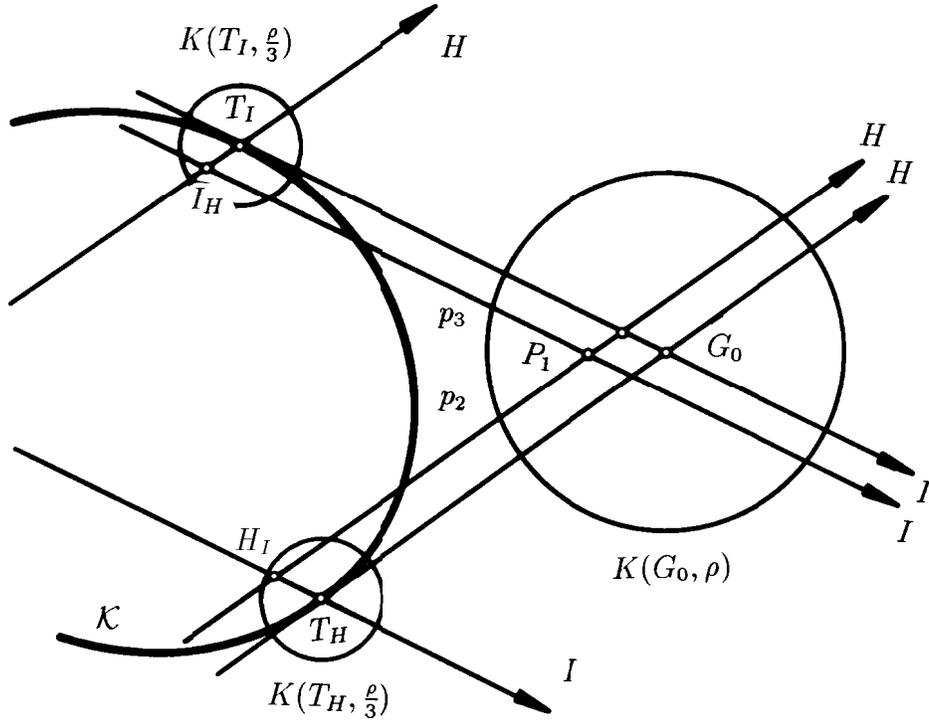


Abbildung 3.7: Beweisschritt 3 des Satzes 3.8

Mit

$$\sigma(G_0, p_2 \cap G_0 T_I) = \sigma(T_H, H_I) < \frac{\rho}{3}$$

und

$$\sigma(p_2 \cap G_0 T_I, P_1) = \sigma(T_I, I_H) < \frac{\rho}{3}$$

erhalten wir

$$\sigma(G_0, P_1) \leq \sigma(G_0, p_2 \cap G_0 T_I) + \sigma(p_2 \cap G_0 T_I, P_1) < \frac{\rho}{3} + \frac{\rho}{3} < \rho.$$

Damit ist $P_1 \in K(G_0, \rho)$ also Außenpunkt von \mathcal{K} und analog kann dies für P_2 und P_3 gezeigt werden.

4. Wir wählen $\hat{\rho} \in \mathbb{K}$ mit $0 < \hat{\rho} < \frac{\rho}{3}$ so, daß es Punkte $\widehat{M}_i \in p_i$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) gibt mit $K(\widehat{M}_i, \hat{\rho}) \subset \mathcal{H}$. Weiters sei $Q_1 \in K(P_1, \hat{\rho})$ auf keiner der Geraden

P_1H , P_1I und $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ die Translation die P_1 in Q_1 überführt. Q_1 ist dann wieder Außenpunkt, da

$$\sigma(G_0, Q_1) \leq \sigma(G_0, P_1) + \sigma(P_1, Q_1) < \frac{2\rho}{3} + \frac{\rho}{3} = \rho.$$

Analog können wir wieder zeigen, daß auch $Q_2 := P_2^\tau$ und $Q_3 := P_3^\tau$ Außenpunkte sind. Die Geraden $q_j := p_j^\tau$ ($j \in \{1, 2, 3\}$) sind Sekanten von \mathcal{K} , da sie Innenpunkte enthalten.

Damit haben wir eine nichttriviale Desarguesfigur mit den gewünschten Eigenschaften gefunden.

Die Eigenschaft Sekante bzw. Außenpunkt von \mathcal{K} zu sein bleibt unter φ erhalten. Weiters bildet φ jeden Außenpunkt $A \in \bar{\mathcal{G}}$ auf einen Außenpunkt $A^\varphi \in \bar{\mathcal{G}}^\varphi$ ab (siehe (3.2)). Deshalb bildet φ die konstruierte Desarguesfigur auf eine Desarguesfigur mit den selben Eigenschaften ab. In der Desarguesebene Π bedeutet das jedoch, daß die Außenpunkte G^φ , H^φ und I^φ kollinear liegen.

Es bleibt zu zeigen, daß $G^\varphi H^\varphi$ Passante ist: Je zwei orthogonal-schneidende Geraden \bar{a} , \bar{b} bestimmen eine Passante $a^\pi b^\pi$. Umgekehrt können auf jeder Passante Punktepaare A, B gefunden werden, sodaß A^π, B^π einander orthogonal schneiden. Da φ die orthogonal-schneidende Lage zweier Geraden erhält, sind die φ -Bilder von Passanten wieder Passanten. \square

Die Sätze 3.8, 3.2 und 3.4 zusammen ergeben folgende Erweiterung des Satzes 3.5:

Satz 3.10 *In einem hyperbolischen Raum \mathcal{H} mit $\dim\mathcal{H} = 2$ oder $\dim\mathcal{H} \geq 4$, wird jede Bijektion φ der Geradenmenge $\bar{\mathcal{G}}$ mit*

$$\bar{a} \sim \bar{b} \Rightarrow \bar{a}^\varphi \sim \bar{b}^\varphi \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathcal{G}},$$

durch eine Kollineation ψ des zugehörigen projektiven Raumes induziert mit $\pi\psi = \psi\pi$.

Es ist nun leicht zu zeigen:

Satz 3.11 *Ist \mathcal{H} ein hyperbolischer Raum mit $\dim\mathcal{H} = 2$ oder $\dim\mathcal{H} \geq 4$ und φ eine Bijektion auf $\bar{\mathcal{G}}$ mit*

$$\bar{a} \sim \bar{b} \Rightarrow \bar{a}^\varphi \sim \bar{b}^\varphi \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathcal{G}},$$

dann gilt: Liegen zwei Geraden \bar{a}, \bar{b} zueinander schneidend bzw. grenzparallel bzw. überparallel bzw. windschief, so ist dies äquivalent zur schneidenden bzw. grenzparallelen bzw. überparallelen bzw. windschiefen Lage von \bar{a}^φ und \bar{b}^φ .

Beweis: Nach Satz 3.10 wird $\bar{\psi}$ durch eine Kollineation $\psi : \Pi \rightarrow \Pi$ induziert. Nach der Konstruktion von ψ werden unter ψ Innenpunkte von \mathcal{K} auf ebensolche abgebildet. Das gleiche gilt für die Außenpunkte von \mathcal{K} und damit auch für die Punkte der Quadrik \mathcal{K} . Daraus folgt direkt die Behauptung. \square

Es verbleiben also nur noch die Plückertransformationen in 3-dimensionalen hyperbolischen Räumen. Im nächsten Kapitel werden wir jedoch sehen, daß sich diese nicht in den Satz 3.10 einordnen lassen.

3.3 Der dreidimensionale Fall

Zunächst werden wir versuchen, zu zeigen, daß auch in 3-dimensionalen hyperbolischen Räumen die Bijektionen $\varphi : \bar{\mathcal{G}} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$ mit

$$\bar{a} \sim \bar{b} \implies \bar{a}^\varphi \sim \bar{b}^\varphi, \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathcal{G}}$$

bereits Plückertransformationen von $(\bar{\mathcal{G}}, \sim)$ sind. Dazu betrachten wir zuerst $\bar{\mathcal{G}}$ zusammen mit der Relation

$$\| \subset \bar{\mathcal{G}} \times \bar{\mathcal{G}} : \bar{a} \| \bar{b} \iff \bar{a}, \bar{b} \text{ sind grenzparallel.}$$

Offensichtlich gilt:

1. $\bar{a} \| \bar{a} \quad \forall \bar{a} \in \bar{\mathcal{G}}$; d.h. $\|$ ist reflexiv.
2. $\bar{a} \| \bar{b} \iff \bar{b} \| \bar{a} \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathcal{G}}$; d.h. $\|$ ist symmetrisch.
3. $\forall \bar{a}, \bar{c} \in \bar{\mathcal{G}}$ existiert ein $\bar{b} \in \bar{\mathcal{G}}$ mit $\bar{a} \| \bar{b} \| \bar{c}$.

Insgesamt erhalten wir, daß $\bar{\mathcal{G}}$ mit $\|$ einen Plückerraum $(\bar{\mathcal{G}}, \|)$ bildet. Wir untersuchen nun die Plückertransformationen dieses Plückertraumes.

3.3.1 Die Plückergruppe des Raumes $(\bar{\mathcal{G}}, \|)$

Wiederum versuchen wir, die Bedingungen Plückertransformation zu sein zu reduzieren und verlangen lediglich, daß $\varphi : \bar{\mathcal{G}} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$ Bijektion ist mit

$$\bar{a} \| \bar{b} \implies \bar{a}^\varphi \| \bar{b}^\varphi, \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathcal{G}}. \quad (3.3)$$

Für solche Bijektionen ergibt sich:

Satz 3.12 Sei \mathcal{H} ein 3-dimensionaler hyperbolischer Raum¹⁰ und $\varphi : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$ eine Bijektion, die Bedingung (3.3) erfüllt. Dann gilt: Durch φ ist eine Punktabbildung auf der Absolutquadrik \mathcal{K} wie folgt mitbestimmt:

$$\varphi_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}, \quad a \cap b \mapsto a^{\varphi} \cap b^{\varphi} \quad (\overline{a}, \overline{b} \in \overline{\mathcal{G}}, a \cap b \in \mathcal{K}).$$

Beweis: Es bleibt zu zeigen, daß die obige Definition nicht von der Auswahl der Geraden a, b abhängt. Dazu seien $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ vier verschiedene Geraden die demselben Grenzparallelenbündel angehören¹¹. Dann sind deren Bilder laut Voraussetzung (Bedingung (3.3)) paarweise grenzparallel. Angenommen $a^{\varphi}, b^{\varphi}, c^{\varphi}$ gehören keinem gemeinsamen Grenzparallelenbündel an. Die Geraden bilden daher ein Dreieck dessen Ecken auf \mathcal{K} liegen. Die Gerade \overline{d}^{φ} ist grenzparallel zu \overline{a}^{φ} und \overline{b}^{φ} , und muß von \overline{c}^{φ} verschieden sein, da φ eine Bijektion ist. Deshalb gehört \overline{d}^{φ} dem durch \overline{a}^{φ} und \overline{b}^{φ} bestimmten Grenzparallelenbündel an. Genauso muß \overline{d}^{φ} den durch $\overline{b}^{\varphi}, \overline{c}^{\varphi}$ bzw. $\overline{a}^{\varphi}, \overline{c}^{\varphi}$ bestimmten Grenzparallelenbündeln angehören, womit wir einen Widerspruch erhalten. Somit haben die 4 Geraden $a^{\varphi}, b^{\varphi}, c^{\varphi}$ und d^{φ} wiederum einen gemeinsamen Schnittpunkt auf \mathcal{K} . \square

Satz 3.13 Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 3.12. Dann ist $\varphi_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ eine Bijektion.

Beweis:

1. Surjektivität: Angenommen $\varphi_{\mathcal{K}}$ ist nicht surjektiv; d.h. es existiert ein $B \in \mathcal{K}$, das kein $\varphi_{\mathcal{K}}$ -Urbild besitzt. Wir wählen eine beliebige Gerade durch B , die Punkte aus \mathcal{H} enthält. Da φ bijektiv ist, können wir diese als b^{φ} bezeichnen. Der zweite Schnittpunkt von b^{φ} mit \mathcal{K} soll A heißen. Auch b besitzt zwei Punkte mit \mathcal{K} gemeinsam, die wir mit C und D bezeichnen. Da B nicht zur Bildmenge von $\varphi_{\mathcal{K}}$ gehört, muß $C^{\varphi_{\mathcal{K}}} = D^{\varphi_{\mathcal{K}}} = A$ gelten. Ist nun E ein von C und D verschiedener Punkt auf \mathcal{K} , so sind die Geraden \overline{CE}^{φ} und \overline{DE}^{φ} ebenfalls verschieden; d.h. $\overline{CE}^{\varphi} \cap \overline{DE}^{\varphi} = E^{\varphi_{\mathcal{K}}} = A$. Also werden alle Geraden aus $\overline{\mathcal{G}}$ unter φ auf Geraden aus dem Grenzparallelenbündel um A abgebildet. Das ist ein Widerspruch zur Surjektivität von φ .
2. Injektivität: Im Rahmen eines indirekten Beweises nehmen wir an, es gäbe zwei verschiedene Punkte $A, B \in \mathcal{K}$ mit $A^{\varphi_{\mathcal{K}}} = B^{\varphi_{\mathcal{K}}}$. Die Gerade $(AB)^{\varphi}$

¹⁰Wir beweisen Satz 2.2 nur für 3-dimensionale hyperbolische Räume. Er gilt jedoch genauso in jedem n -dimensionalen hyperbolischen Raum mit $2 \leq n < \infty$.

¹¹Die Existenz von 4 verschiedenen Geraden durch jeden Punkt von \mathcal{K} ist wegen $\text{char}\mathbb{K} = 0$ gesichert.

enthält $A^{\varphi_{\mathcal{K}}}$ und besitzt einen weiteren Schnittpunkt mit \mathcal{K} , den wir mit D bezeichnen. Wegen Punkt 1, existiert ein $C \in \mathcal{K}$ mit $B \neq C \neq A$, der unter $\varphi_{\mathcal{K}}$ auf D abgebildet wird. Damit erhalten wir jedoch durch $\overline{CA}^{\varphi} = \overline{AB}^{\varphi}$ einen Widerspruch zur Injektivität von φ . \square

Durch eine Bijektion $\varphi : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$ mit (3.3) haben wir also eine Bijektion $\varphi_{\mathcal{K}}$ auf der Absolutquadrik \mathcal{K} von \mathcal{H} mitbestimmt.

Ist umgekehrt eine Bijektion $\varphi_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ gegeben, so ist die Abbildung

$$\varphi : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}, \quad AB \mapsto A^{\varphi_{\mathcal{K}}} B^{\varphi_{\mathcal{K}}} \quad (A, B \in \mathcal{K}, A \neq B)$$

bijektiv. Unter φ bleibt die grenzparallele Lage von Geraden aus $\overline{\mathcal{G}}$ erhalten. Da $\varphi_{\mathcal{K}}^{-1}$ ebenfalls Bijektion ist, werden auch unter φ^{-1} grenzparallele Geraden auf grenzparallele Geraden abgebildet. Die Abbildung φ ist also Plückertransformation von $(\overline{\mathcal{G}}, \parallel)$. Mit Satz 3.13 ergibt das insgesamt:

Satz 3.14 *Die Elemente der Plückergruppe des Raumes $(\overline{\mathcal{G}}, \parallel)$ sind genau jene Bijektionen $\varphi : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$ die (3.3) erfüllen.*

Mit der Hilfe dieser Kennzeichnung der Plückertransformationen von $(\overline{\mathcal{G}}, \parallel)$ wird es uns nun gelingen auch die Bedingungen für Plückertransformationen von $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ zu reduzieren.

3.3.2 Die Plückergruppe des Raumes $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$

Bevor wir uns mit den Plückertransformationen von $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ beschäftigen, wollen wir zwei Lemmata beweisen, die wir im folgenden des öfteren benützen werden:

Lemma 3.3 *In jedem hyperbolischen Raum gibt es zu einer beliebigen Geraden \bar{a} in jedem Grenzparallelenbündel¹² $A \in \mathcal{K}$ mit $A \notin \bar{a}$ genau eine \bar{a} orthogonalschneidende Gerade.*

Beweis: Es ist $\alpha = a^{\pi} \vee A$ Hyperebene, da $A \notin a^{\pi}$. Der Schnitt von α mit \mathcal{K} ist eine ovale Quadrik in α , und damit ist $\alpha^{\pi} \in a$ Außenpunkt von \mathcal{K} . Daraus ergibt sich $B := \alpha \cap a$ als Innenpunkt, denn B, α^{π} liegen harmonisch zu den Schnittpunkten von a mit \mathcal{K} und trennen daher einander. \overline{AB} schneidet \bar{a} orthogonal.

¹²Wir identifizieren hier das Grenzparallelenbündel mit dem Punkt auf \mathcal{K} , den alle Bündelgeraden enthalten.

Jede Senkrechte zu \bar{a} durch A muß in α liegen. Da a und a^π windschief zueinander liegen, ist der Schnittpunkt $\alpha \cap a$ eindeutig und damit auch die Orthogonale auf \bar{a} durch A . \square

Lemma 3.4 *In hyperbolischen Räumen \mathcal{H} mit $\dim\mathcal{H} \geq 3$ gilt¹³:*

$$\bar{a}, \bar{b} \text{ sind grenzparallel und verschieden} \iff \exists \text{ kein } \bar{n} \in \bar{\mathcal{G}} \text{ mit } \bar{a} \sim \bar{n} \sim \bar{b}.$$

Beweis: Durch den Beweis von Lemma 2.1 und Lemma 2.2 wissen wir bereits, daß windschiefe und überparallele Geraden eine gemeinsame Orthogonale besitzen. Sind \bar{a}, \bar{b} schneidend, so ist wegen $\dim\mathcal{H} \geq 3$ der Unterraum $(a \vee b)^\pi \neq \emptyset$. Verbindet man einen Punkt aus $(a \vee b)^\pi$ mit dem Schnittpunkt $\bar{a} \cap \bar{b}$, so erhält man eine \bar{a} und \bar{b} orthogonal-schneidende Gerade \bar{n} .

Nun seien \bar{a}, \bar{b} grenzparallel und verschieden. Wir nehmen indirekt die Existenz einer Geraden \bar{n} mit $\bar{a} \sim \bar{n} \sim \bar{b}$ an. Dann muß n in $a \vee b$ liegen, da $a \cap b \in \mathcal{K}$. Das ist ein Widerspruch dazu, daß zwei grenzparallele Geraden in einer hyperbolischen Ebene (nämlich in der Ebene $(a \vee b) \cap \mathcal{H}$) keine gemeinsame Orthogonale besitzen. \square

Genauso wie bei $\dim\mathcal{H} \geq 4$ und $\dim\mathcal{H} = 2$ können wir nun auch für 3-dimensionale hyperbolische Räume zeigen:

Satz 3.15 *Ist \mathcal{H} ein 3-dimensionaler hyperbolischer Raum mit der Geradenmenge $\bar{\mathcal{G}}$ und $\varphi: \bar{\mathcal{G}} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$ eine Bijektion mit*

$$\bar{a} \sim \bar{b} \implies \bar{a}^\varphi \sim \bar{b}^\varphi, \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathcal{G}},$$

dann ist φ bereits Plückertransformation.

Beweis: Sei φ eine Abbildung, die die Bedingungen aus Satz 3.15 erfüllt. Weiters seien $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathcal{G}}$ verschieden. Sind deren φ -Bilder \bar{a}^φ und \bar{b}^φ zueinander grenzparallel, so besitzen sie nach Lemma 3.4 keine gemeinsame Orthogonale. Da die Eigenschaft eine gemeinsame Orthogonale zu besitzen unter φ erhalten bleibt, können auch \bar{a} und \bar{b} keine gemeinsame Orthogonale besitzen und sind damit grenzparallel. Die Bijektion φ^{-1} erfüllt somit

$$\bar{a}^\varphi \parallel \bar{b}^\varphi \implies \bar{a} \parallel \bar{b}, \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathcal{G}}$$

¹³In zweidimensionalen Räumen gilt dieser Satz nur in einer Richtung. Denn bei $\dim\mathcal{H} = 2$ besitzen sowohl grenzparallele als auch schneidende Geraden \bar{a}, \bar{b} keine Treffgerade, die auf \bar{a} als auch auf \bar{b} orthogonal steht.

und ist nach Satz 3.14 Plückertransformation von $(\overline{\mathcal{G}}, \parallel)$. Damit gilt für φ

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \implies \overline{a}^\varphi \parallel \overline{b}^\varphi, \quad \forall \overline{a}, \overline{b} \in \overline{\mathcal{G}}.$$

Durch φ ist nun auch eine Bijektion $\varphi_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ mitbestimmt mit der es uns gelingt, für beliebige Geraden $\overline{a}, \overline{b}$ mit $\overline{a}^\varphi \sim \overline{b}^\varphi$ auch $\overline{a} \sim \overline{b}$ zu zeigen. Wir gehen dazu indirekt vor, und nehmen $\overline{a} \not\sim \overline{b}$ an: Sei $A \in \mathcal{K}$ mit $b \not\in A \in a$. Nach Lemma 3.3 existiert genau ein n mit $A \in n$ und $\overline{n} \approx \overline{b}$. Laut Voraussetzung enthalten a^φ und n^φ den Punkt $A^{\varphi_{\mathcal{K}}}$ und es gilt $\overline{a}^\varphi \approx \overline{b}^\varphi$, sowie $\overline{n}^\varphi \approx \overline{b}^\varphi$. Da die Orthogonale aus $A^{\varphi_{\mathcal{K}}}$ an \overline{b}^φ eindeutig ist (Lemma 3.3), ergibt sich $\overline{n}^\varphi = \overline{a}^\varphi$, was einen Widerspruch zur Injektivität von φ darstellt. \square

3.3.3 Algebraische Beschreibung der Plückergruppe von $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$

Wir werden nun weiter zeigen, daß die Plückertransformationen in 3-dimensionalen hyperbolischen Räumen einen wesentlichen Unterschied zu den Plückertransformationen 2-dimensionaler bzw. 4 und höherdimensionaler hyperbolischer Räume aufweisen. Innerhalb des Beweises werden wir den folgenden Satz der projektiven Geometrie (siehe z.B. [8]) verwenden:

Sei σ eine Bijektion einer projektiven Geraden (in einem fanoschen Papposraum mit Algebraisierungskörper \mathbb{K}) auf sich, die drei verschiedene Punkte P, Q, R festläßt, dann bestimmt $\beta : X \in PQ \setminus Q \mapsto DV(X, R, P, Q) \in \mathbb{K}$ die Bijektion $\beta^{-1}\sigma\beta : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ mit $0 \mapsto 0$ und $1 \mapsto 1$. Es gilt ([8, S. 40]):

Satz 3.16 (Hua) *Eine Bijektion σ einer Geraden eines projektiven fanoschen Papposraumes auf sich mit drei verschiedenen Fixpunkten führt genau dann stets harmonische Paare in harmonische Paare über, wenn die durch σ bestimmte Körperbijektion $\beta^{-1}\sigma\beta : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ein Automorphismus von \mathbb{K} ist.*

Beachtenswert ist, daß der Satz von HUA lediglich verlangt, daß die Bijektion σ die harmonische Lage erhält und nicht die Äquivalenz der harmonischen Lage im Bild und Urbild von σ . Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun zeigen:

Satz 3.17 *Jede Plückertransformation von $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ mit $\dim \mathcal{H} = 3$ ist das Produkt einer durch einen Automorphismus des quadratischen Erweiterungskörper $\mathbb{K}(i) =: \mathbb{L}$ von \mathbb{K} mit $i^2 = -1$ induzierten Plückertransformation und einer durch eine Projektivität des 1-dimensionalen projektiven Raumes mit Algebraisierungskörper \mathbb{L} induzierten Plückertransformation.*

Beweis: Wir haben bereits gezeigt, daß jede Plückertransformation von $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ eine Bijektion auf der absoluten Quadrik \mathcal{K} induziert. Schrittweise werden wir nun sehen, daß eine Bijektion zwischen der Punktmenge von \mathcal{K} und der miquelschen Möbiusebene $\mathcal{M}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ (siehe Abschnitt 1.6) bzw. der projektiven Geraden über \mathbb{L} existiert. \mathbb{L} sei der quadratische Erweiterungskörper von \mathbb{K} . Die projektive Gerade über \mathbb{L} bezeichnen wir innerhalb dieses Beweises mit $\Pi_{\mathbb{L}}$. Haben wir eine Bijektion zwischen \mathcal{K} und $\Pi_{\mathbb{L}}$ gefunden, so können wir jene Abbildungen untersuchen, die in $\Pi_{\mathbb{L}}$ durch die Plückertransformationen von $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ induziert werden.

1. Bijektion zwischen \mathcal{K} , $\mathcal{M}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ bzw. $\Pi_{\mathbb{L}}$: Sei Z ein Punkt auf \mathcal{K} und ω die Tangentialebene in Z an \mathcal{K} . In dem affinen Raum $\mathcal{P} \setminus \omega$, den wir mit $\mathcal{A}(\mathbb{K}^3)$ identifizieren, ist die affine Quadrik $\mathcal{K} \setminus \{Z\}$ parabolisch. Da $\mathcal{K} \setminus \{Z\}$ regulär ist und keine Geraden enthält, besitzt sie [34, S. 206ff.] in $\mathcal{A}(\mathbb{K}^3)$ die Gleichung¹⁴

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 - 2x_3 = 0 \quad \text{mit } a_1, a_2 > 0.$$

Der Körper \mathbb{K} ist euklidisch und daher existiert zu jedem a_i ein Element $\sqrt{a_i} \in \mathbb{K}$ mit $(\sqrt{a_i})^2 = a_i$. Durch Änderung der Basisvektoren erreichen wir, daß sich $\mathcal{K} \setminus \{Z\}$ vereinfacht als

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3$$

schreiben läßt. Damit können wir nun einige Sätze bzw. Beweise über miquelsche Möbiusebenen aus [4] und [36] anwenden. Wir fassen dazu den 2-dimensionalen affinen Raum $\mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$ als Teilmenge von $\mathcal{A}(\mathbb{K}^3)$ auf mit $x_3 = 0$ und $\mathcal{M}(\mathbb{L}, \mathbb{K}) = \mathcal{A}(\mathbb{K}^2) \cup \{\infty\}$.

Im Abschnitt III.2.5 von [4] beweist W. BENZ, daß eine Bijektion zwischen \mathcal{K} und $\mathcal{M}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ existiert. Dazu verwendet er (in Π betrachtet) die Projektion p aus Z der Punkte von \mathcal{K} auf $\mathcal{A}^2(\mathbb{K})$. Weiters definiert er, daß Z unter p auf $\infty \in \mathcal{M}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ abgebildet wird. Unter dieser Abbildung gehen die ebenen Schnitte von \mathcal{K} genau in die Kreise der Möbiusebene $\mathcal{M}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ über. Unter den Kreisen von $\mathcal{M}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ verstehen wir die Geraden von $\mathcal{A}^2(\mathbb{K}) \cup \{\infty\}$, sowie spezielle Kegelschnitte von $\mathcal{A}^2(\mathbb{K})$. Die Punktmenge von $\mathcal{M}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ kann auch aufgefaßt werden als die Punktmenge der projektiven Geraden $\Pi_{\mathbb{L}}$.

¹⁴Der Beweis dieser Darstellung wird in [34] für Vektorräume über dem reellen Zahlenkörper durchgeführt. Da jedoch nur die Eigenschaft von \mathbb{R} verwendet wird, daß \mathbb{R} euklidischer Körper ist, gilt diese Darstellung in jedem Vektorraum über einem beliebigen euklidischen Körper.

2. Wir wollen nun nach $\Pi_{\mathbb{L}}$ übersetzen, was es bedeutet, daß sich zwei hyperbolische Geraden $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathcal{G}}$ orthogonal schneiden. Sei ε die von a und b aufgespannte Ebene, $\mathcal{K}_\varepsilon := \mathcal{K} \cap \varepsilon$ und π_ε die zu \mathcal{K}_ε gehörige Polarität in ε . Die Geraden a und b bestimmen je zwei verschiedene Punkte auf der Quadrik \mathcal{K} : $A, B \in \mathcal{K} \cap a$ bzw. $C, D \in \mathcal{K} \cap b$. Diese werden wir jetzt p unterwerfen. Wir unterscheiden dazu $Z \in \varepsilon$ und $Z \notin \varepsilon$. In beiden Fällen gilt

$$(AB)^{\pi_\varepsilon} = a^{\pi_\varepsilon} \in b = CD. \tag{3.4}$$

Ist Z in ε enthalten, so gehen die Punkte A, B und C, D unter p wegen (3.4) (siehe Abbildung 3.8 und Abbildung 3.9) in harmonische Punktepaare in $\mathcal{M}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ über. Die zugehörigen Punkte in $\Pi_{\mathbb{L}}$ liegen ebenfalls harmonisch. Im Fall $Z \notin \varepsilon$ wird \mathcal{K}_ε unter p auf den Kreis k abgebildet.

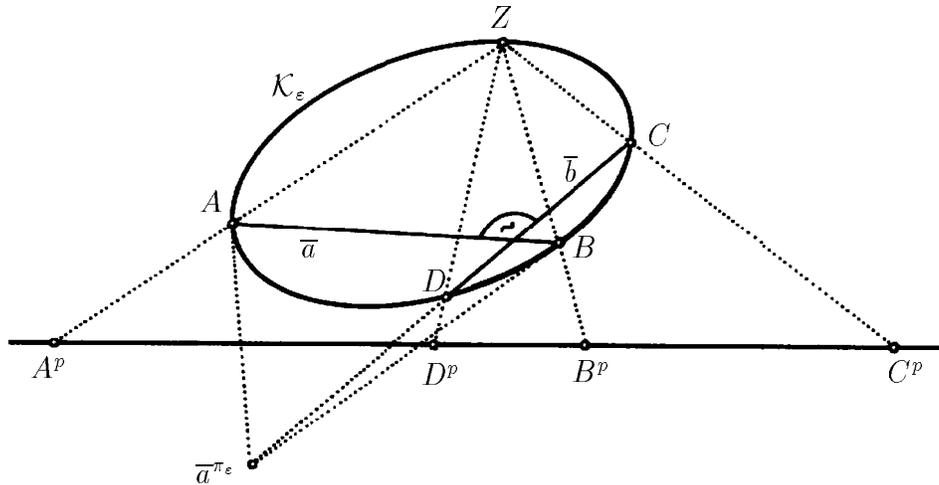


Abbildung 3.8: $\mathcal{K}_\varepsilon \ni Z \neq A, B, C, D$

Die Punkte A^p, B^p, C^p, D^p liegen auf k und die Bedingung (3.4) geht in $(A^p B^p)^{\pi_k} \in C^p D^p$ über. Das bedeutet jedoch nichts anderes (siehe [36, S. 74, 75]), als daß A^p, B^p, C^p, D^p harmonisch liegen. Gleiches gilt wiederum für die zugehörigen Punkte in $\Pi_{\mathbb{L}}$.

Wie wir bereits oben gesehen haben, wird durch eine Plückertransformation φ eine Bijektion $\varphi_{\mathcal{K}}$ auf \mathcal{K} mitbestimmt. Weiters induziert $\varphi_{\mathcal{K}}$ eine Bijektion auf $\mathcal{M}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ und die Bijektion $\varphi_{\Pi_{\mathbb{L}}}$ auf $\Pi_{\mathbb{L}}$. Unter φ werden orthogonal schneidende Geraden auf orthogonal schneidende Geraden abgebildet. In $\Pi_{\mathbb{L}}$ bedeutet dies, daß unter $\varphi_{\Pi_{\mathbb{L}}}$ die harmonische Lage erhalten bleibt. Im letzten Schritt des Beweises werden wir nun untersuchen, welche Bijektionen

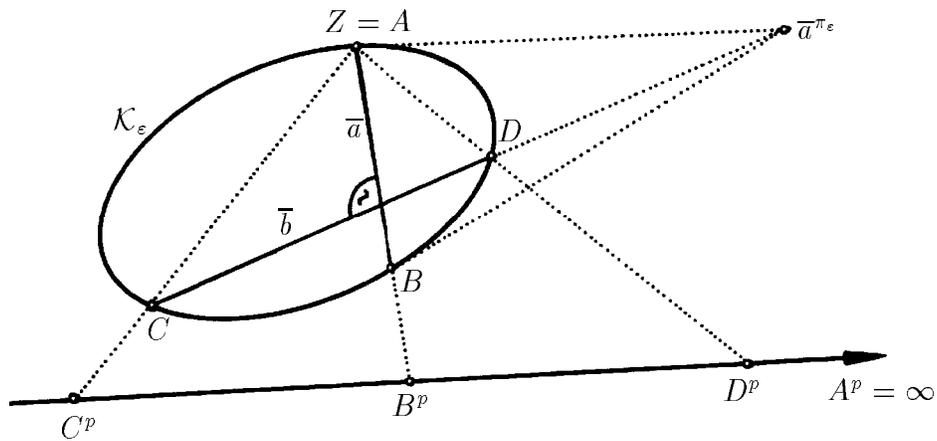


Abbildung 3.9: $\mathcal{K}_\varepsilon \ni Z = A$

von $\Pi_{\mathbb{L}}$ die harmonische Lage erhalten und so Plückertransformationen in $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ erzeugen.

3. Da jede Projektivität in einem projektiven Papposraum die harmonische Lage erhält und durch zwei Tripel verschiedener Punkte genau eine Projektivität festgelegt ist (siehe [7, S.142ff.]), können wir davon ausgehen, daß das Produkt $\varphi_{\Pi_{\mathbb{L}}}\alpha$ von $\varphi_{\Pi_{\mathbb{L}}}$ mit einer geeignet gewählten Projektivität α drei verschiedene Fixpunkte besitzt. Damit können wir Satz 3.16 anwenden und es folgt $\varphi_{\Pi_{\mathbb{L}}}\alpha = \beta\zeta\beta^{-1}$; d.h. $\varphi_{\Pi_{\mathbb{L}}}\alpha$ wird durch einen Automorphismus $\zeta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ induziert.

□

3.3.4 Kollineationen und Plückertransformationen

Es wurde in Satz 3.17 noch nicht geklärt, ob es in einem 3-dimensionalen hyperbolischen Raum tatsächlich orthogonalitätserhaltende Plückertransformationen φ gibt, die nicht durch eine Kollineation des zugehörigen projektiven Raumes Π induziert werden. Um die Existenz solcher Plückertransformationen zu zeigen, unterscheiden wir, ob φ durch

1. eine Projektivität von $\Pi_{\mathbb{L}}$
2. einen Automorphismus ζ von \mathbb{L} mit

- (a) $\zeta|_{\mathbb{K}} = \text{id}_{\mathbb{K}}$
- (b) $\zeta(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$ aber $\zeta|_{\mathbb{K}} \neq \text{id}_{\mathbb{K}}$
- (c) $\zeta(\mathbb{K}) \not\subset \mathbb{K}$

induziert wird. Wir benutzen dabei die Bezeichnungen aus dem Beweis zu Satz 3.17. Bevor wir die Fälle im einzelnen betrachten, wollen wir davon ausgehen, daß eine Kollineation $\psi : \Pi \rightarrow \Pi$ existiert, welche die Bijektion $\varphi_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ und deshalb auch $\varphi : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$ induziert. Dann ist ψ bereits eindeutig:

Seien $\psi_1 : \Pi \rightarrow \Pi$ und $\psi_2 : \Pi \rightarrow \Pi$ zwei Kollineationen deren Einschränkungen auf \mathcal{K} mit $\varphi_{\mathcal{K}}$ übereinstimmen; d.h. $\varphi_{\mathcal{K}}\psi_1|_{\mathcal{K}} = \psi_2|_{\mathcal{K}}$. Wählen wir eine Fundamentalmenge F von Π auf \mathcal{K} , so leisten ψ_1 und ψ_2 auf F dasselbe. Sei $\mathcal{K}_{\varepsilon}$ der Schnitt einer Ebene ε mit \mathcal{K} und $A \in \mathcal{K}_{\varepsilon}$. Ergänzen wir nun die Geradenmenge, die entsteht, wenn wir A mit allen Punkten von $\mathcal{K}_{\varepsilon} \setminus \{A\}$ verbinden, um jene Tangente an \mathcal{K} in A die in ε liegt, dann erhalten wir das Geradenbüschel um A in ε . Die Kollineationen ψ_1 und ψ_2 leisten auch auf diesem Geradenbüschel um A dasselbe. Damit stimmen ψ_1 und ψ_2 auf einer Fundamentalmenge und einem Geradenbüschel überein. Es muß $\psi_1 = \psi_2$ gelten (siehe [7, S. 155]). Zu einer durch eine Plückertransformation induzierten Bijektion $\varphi_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ kann es somit höchstens eine Kollineation ψ geben mit $\psi|_{\mathcal{K}} = \varphi_{\mathcal{K}}$.

Koordinatisieren wir die projektive Gerade $\Pi_{\mathbb{L}}$, so können wir die Punktmenge von $\Pi_{\mathbb{L}}$ beschreiben als

$$\left\{ \mathbb{L} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 + ix_2 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{K}, i^2 = -1 \right\} \cup \left\{ \mathbb{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nach der Koordinatisierung von Π läßt sich die Quadrik \mathcal{K} schreiben als

$$\left\{ \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{K} \right\} \cup \left\{ \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Den Isomorphismus ξ zwischen $\Pi_{\mathbb{L}}$ und \mathcal{K} kann man nun auch analytisch ausdrücken:

$$\xi : \Pi_{\mathbb{L}} \rightarrow \mathcal{K} : \mathbb{L} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 + ix_2 \end{pmatrix} \mapsto \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun die obigen Fälle im Detail:

1. Sei α eine Projektivität von $\Pi_{\mathbb{L}}$: Im Koordinatenkalkül von $\Pi_{\mathbb{L}}$ kann α beschrieben werden durch $\alpha : \Pi_{\mathbb{L}} \rightarrow \Pi_{\mathbb{L}}, \mathbb{L}\mathbf{x} \mapsto \mathbb{L}(A \cdot \mathbf{x})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ c_1 + ic_2 & d_1 + id_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det A \neq 0.$$

Es muß nun die Abbildung α nach \mathcal{K} übersetzt werden. Durch Rechnung¹⁵ kann überprüft werden, daß für die projektive Kollineation $\psi_\alpha : \Pi \rightarrow \Pi$ mit $\mathbb{K}\mathbf{x} \mapsto \mathbb{K}(A_\alpha \cdot \mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{K}^4$ und

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 & 2a_2b_2 + 2a_1b_1 & -2a_1b_2 + 2a_2b_1 & b_1^2 + b_2^2 \\ c_1a_1 + c_2a_2 & c_1b_1 + d_1a_1 + c_2b_2 + d_2a_2 & -c_1b_2 - d_2a_1 + c_2b_1 - d_1a_2 & d_1b_1 + d_2b_2 \\ c_2a_1 - c_1a_2 & c_2b_1 + d_2a_1 - c_1b_2 - d_1a_2 & -c_2b_2 + d_1a_1 - c_1b_1 + d_2a_2 & -d_1b_2 + d_2b_1 \\ c_1^2 + c_2^2 & 2c_2d_2 + 2c_1d_1 & -2c_1d_2 + 2c_2d_1 & d_1^2 + d_2^2 \end{pmatrix}$$

gilt, daß $\psi_\alpha|_{\mathcal{K}} = \xi\alpha\xi^{-1}$. Die Determinante¹⁶ $\det A_\alpha$ stimmt mit $(\det A \cdot \overline{\det A})^2$ überein und ist daher stets verschieden von 0. Damit bestimmt die von α induzierte Plückertransformation von $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ eine projektive Kollineation ψ_α in Π , die bereits eindeutig bestimmt ist.

2. Sei ζ ein Automorphismus von \mathbb{L} mit $\zeta(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$: Dann bestimmt ζ auf $\Pi_{\mathbb{L}}$ die Bijektion

$$\begin{aligned} \alpha_\zeta : \Pi_{\mathbb{L}} \rightarrow \Pi_{\mathbb{L}}, \quad \mathbb{L} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 + ix_2 \end{pmatrix} &\mapsto \mathbb{L} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta(x_1) + \zeta(i)\zeta(x_2) \end{pmatrix} \\ \text{bzw. } \mathbb{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\mapsto \mathbb{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Im Abschnitt 1.2 haben wir gesehen, daß für jeden Automorphismus ζ eines quadratischen Erweiterungskörpers $\mathbb{K}(i)$ mit $i^2 = -1$ entweder $\zeta(i) = i$ oder $\zeta(i) = -i$ ist. In weiterer Folge induziert α_ζ eine Bijektion auf \mathcal{K} , die, wie man aus den Darstellungen von ξ und α_ζ sieht, mit der Einschränkung der Kollineation $\psi_\zeta : \Pi \rightarrow \Pi, \mathbb{K}(\mathbf{x}) \mapsto \mathbb{K}(A_\zeta \cdot \mathbf{x}^\zeta)$ auf \mathcal{K} übereinstimmt. Dabei ist

$$\mathbf{x} \in \mathbb{K}^4, \quad A_\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi_\zeta|_{\mathcal{K}} = \xi\alpha_\zeta\xi^{-1}.$$

Für $\zeta|_{\mathbb{K}} = \text{id}_{\mathbb{K}}$ ist ψ_ζ eine projektive Kollineation, im Falle $\zeta|_{\mathbb{K}} \neq \text{id}_{\mathbb{K}}$ eine nicht-projektive Kollineation.

¹⁵Die zugehörige Rechnung kann im Anhang gefunden werden. Es wurde dabei das Computeralgebrasystem MAPLE V verwendet.

¹⁶Dabei bezeichnet $\overline{}$ jenen Automorphismus von \mathbb{L} der jedes $a + ib \in \mathbb{L}$ auf $a - ib$ abbildet.

3. Sei ζ ein Automorphismus von \mathbb{L} mit $\zeta(\mathbb{K}) \not\subset \mathbb{K}$; d.h. es existiert ein $x \in \mathbb{K}$ mit $\zeta(x) \notin \mathbb{K}$. Der Automorphismus ζ bestimmt auf $\Pi_{\mathbb{L}}$ eine Bijektion α_{ζ} der Form (3.5). Die Punkte $A = \mathbb{L}(1, 0)^T$, $B = \mathbb{L}(1, 1)^T$, $C = \mathbb{L}(0, 1)^T$ bleiben unter α_{ζ} fix, im Gegensatz zu $D = \mathbb{L}(1, x)^T$ mit $x \in \mathbb{K}$ und $\zeta(x) \notin \mathbb{K}$. Die ξ -Bilder von A, B, C, D liegen auf einem ebenen Schnitt von \mathcal{K} . Wegen $\zeta(x) \notin \mathbb{K}$ liegen die ξ -Bilder von $A^{\alpha_{\zeta}}, B^{\alpha_{\zeta}}, C^{\alpha_{\zeta}}, D^{\alpha_{\zeta}}$ nicht komplanar. Damit kann die auf \mathcal{K} durch α_{ζ} induzierte Bijektion nicht zu einer Kollineation erweitert werden. In weiterer Folge kann auch die durch ζ induzierte Plückertransformation von $(\overline{\mathcal{G}}, \sim)$ keine Kollineation auf Π bestimmen.

Da wir im Abschnitt 1.3 die Existenz von Automorphismen $\zeta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\zeta(\mathbb{R}) \not\subset \mathbb{R}$ gezeigt haben, ist die Existenz von orthogonalitätserhaltenden Plückertransformationen in 3-dimensionalen reellen hyperbolischen Räumen gesichert, die nicht durch eine Kollineation vom zugehörigen projektiven Raum induziert werden. Diese weisen damit einen wesentlichen Unterschied zu den orthogonalitätserhaltenden Plückertransformationen in 2 bzw. 4 und höherdimensionalen hyperbolischen Räumen auf.

Zusammenfassend gilt:

Satz 3.18 *Sei \mathcal{H} ein hyperbolischer Raum mit $\dim \mathcal{H} = 3$ und $\varphi : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$ eine Bijektion mit*

$$\overline{a} \sim \overline{b} \implies \overline{a}^{\varphi} \sim \overline{b}^{\varphi} \quad \forall \overline{a}, \overline{b} \in \overline{\mathcal{G}},$$

die nach Satz 3.17 durch eine Projektivität von $\Pi_{\mathbb{L}}$ und einen Automorphismus ζ von \mathbb{L} induziert wird. Dann kann φ

1. *durch eine projektive Kollineation ψ des zugehörigen projektiven Raumes mit $\pi\psi = \psi\pi$ erzeugt werden, falls $\zeta|_{\mathbb{K}} = \text{id}_{\mathbb{K}}$.*
2. *durch eine nicht-projektive Kollineation ψ des zugehörigen projektiven Raumes mit $\pi\psi = \psi\pi$ erzeugt werden, falls $\zeta(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$, aber $\zeta|_{\mathbb{K}} \neq \text{id}_{\mathbb{K}}$.*
3. *durch keine Kollineation des zugehörigen projektiven Raumes erzeugt werden, falls $\zeta|_{\mathbb{K}} \not\subset \mathbb{K}$.*

Da für jeden Automorphismus ζ von \mathbb{L} stets eine der Aussagen

1. $\zeta|_{\mathbb{K}} = \text{id}_{\mathbb{K}}$
2. $\zeta(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$, aber $\zeta|_{\mathbb{K}} \neq \text{id}_{\mathbb{K}}$

3. $\zeta|\mathbb{K} \not\subset \mathbb{K}$

zutritt, haben wir im Satz 3.18 alle Möglichkeiten für φ erfaßt.

Anhang

A.1 Rechnung zum Beweis von Satz 3.18

Die folgende Rechnung wurde mit dem Computeralgebrasystem MAPLE V durchgeführt. Die Eingaben beginnen mit dem Zeichen `>`. Die von MAPLE V gelieferten Ergebnisse wurden zentriert gesetzt.

```
> with(linalg):
```

Berechnung der Koordinatenmatrix der zur Projektivität α gehörigen Kollineation:

```
> X:=vector([1,x[1]+I*x[2]]);
```

$$X := [1, x_1 + I x_2]$$

```
> A:=matrix([[a[1]+I*a[2],b[1]+I*b[2]],[c[1]+I*c[2],d[1]+I*d[2]]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} a_1 + I a_2 & b_1 + I b_2 \\ c_1 + I c_2 & d_1 + I d_2 \end{bmatrix}$$

Das Bild von X unter der Abbildung α .

```
> alpha(X):=evalm(A&*X);
```

```
alpha(X) :=
```

$$[a_1 + I a_2 + (b_1 + I b_2)(x_1 + I x_2), c_1 + I c_2 + (d_1 + I d_2)(x_1 + I x_2)]$$

```
> alpha(X):=alpha(X)[2]/alpha(X)[1];
```

Der Sonderfall, daß die erste Koordinate von X^α gleich 0 ist und, daß X gleich dem Punkt $\mathbb{K}(0, 1)^T$ ist, wird später betrachtet.

$$\alpha(X) := \frac{c_1 + I c_2 + (d_1 + I d_2)(x_1 + I x_2)}{a_1 + I a_2 + (b_1 + I b_2)(x_1 + I x_2)}$$

Koordinaten des zu X gehörigen Punktes auf der Quadrik \mathcal{K} :

```
> xi:=collect(collect(simplify(evalc(Re(alpha(X
))))),x[1]),x[2]);
eta:=collect(collect(simplify(evalc(Im(alpha(X))))),x[1]),x[2]);
theta:=collect(collect(simplify(xi^2+eta^2),x[1]),x[2]);
```

$$\begin{aligned} \xi := & ((d_1 b_1 + d_2 b_2) x_2^2 + (-c_1 b_2 - d_2 a_1 + c_2 b_1 + d_1 a_2) x_2 \\ & + (d_1 b_1 + d_2 b_2) x_1^2 + (c_1 b_1 + d_1 a_1 + c_2 b_2 + d_2 a_2) x_1 + c_1 a_1 \\ & + c_2 a_2) / ((b_1^2 + b_2^2) x_2^2 + (-2 a_1 b_2 + 2 a_2 b_1) x_2 \\ & + (b_1^2 + b_2^2) x_1^2 + (2 a_2 b_2 + 2 a_1 b_1) x_1 + a_1^2 + a_2^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta := & ((-d_1 b_2 + d_2 b_1) x_2^2 + (-c_2 b_2 + d_1 a_1 - c_1 b_1 + d_2 a_2) x_2 \\ & + (-d_1 b_2 + d_2 b_1) x_1^2 + (c_2 b_1 + d_2 a_1 - c_1 b_2 - d_1 a_2) x_1 + c_2 a_1 \\ & - c_1 a_2) / ((b_1^2 + b_2^2) x_2^2 + (-2 a_1 b_2 + 2 a_2 b_1) x_2 \\ & + (b_1^2 + b_2^2) x_1^2 + (2 a_2 b_2 + 2 a_1 b_1) x_1 + a_1^2 + a_2^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta := & ((d_2^2 + d_1^2) x_2^2 + (2 c_2 d_1 - 2 c_1 d_2) x_2 + (d_2^2 + d_1^2) x_1^2 \\ & + (2 c_1 d_1 + 2 c_2 d_2) x_1 + c_2^2 + c_1^2) / ((b_1^2 + b_2^2) x_2^2 \\ & + (-2 a_1 b_2 + 2 a_2 b_1) x_2 + (b_1^2 + b_2^2) x_1^2 + (2 a_2 b_2 + 2 a_1 b_1) x_1 \\ & + a_1^2 + a_2^2) \end{aligned}$$

Daher ist die Matrix der zu α gehörigen Kollineation:

```
> A_alpha:=matrix([[a[1]^2+a[2]^2,2*a[1]*b[1]+2 *a[2]*b[2],
(-2)*a[1]*b[2]+2*a[2]*b[1], b[1]^2+b[2]^2],
[c[1]*a[1]+c[2]*a[2], c[1]*b[1]+d[1]*a[1]+c[2]*b[2]+d[2]*a[2],
-c[1]*b[2]-d[2]*a[1]+c[2]*b[1]+d[1]*a[2], d[1]*b[1]+d[2]*b[2]],
[c[2]*a[1]-c[1]*a[2], c[2]*b[1]+d[2]*a[1]-c[1]*b[2]-d[1]*a[2],
-c[2]*b[2]+d[1]*a[1]-c[1]*b[1]+d[2]*a[2],
-d[1]*b[2]+d[2]*b[1]], [c[1]^2+c[2]^2, 2*c[1]*d[1]+2*c[2]*d[2],
-2*c[1]*d[2]+2*c[2]*d[1], (d[1]^2+d[2]^2)]]);
```

$$\begin{aligned} A_alpha := & \begin{bmatrix} a_1^2 + a_2^2, & 2 a_1 b_1 + 2 a_2 b_2, & -2 a_1 b_2 + 2 a_2 b_1, & b_1^2 + b_2^2 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2, & c_1 b_1 + d_1 a_1 + c_2 b_2 + d_2 a_2, \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -b_2 c_1 - a_1 d_2 + b_1 c_2 + a_2 d_1, d_1 b_1 + d_2 b_2] \\
& [c_2 a_1 - c_1 a_2, b_1 c_2 + a_1 d_2 - b_2 c_1 - a_2 d_1, \\
& -c_2 b_2 + d_1 a_1 - c_1 b_1 + d_2 a_2, -d_1 b_2 + d_2 b_1] \\
& [c_1^2 + c_2^2, 2 c_1 d_1 + 2 c_2 d_2, -2 c_1 d_2 + 2 c_2 d_1, d_1^2 + d_2^2]
\end{aligned}$$

Berechnung der Determinante von A_{alpha} : Dabei gilt, daß $\det A$ stets verschieden von 0 ist.

> $\det(A_{\text{alpha}})$;

$$\begin{aligned}
& 2 c_1^2 b_1^4 c_2^2 + 2 c_2^4 b_2^2 b_1^2 + 2 c_1^2 c_2^2 b_2^4 + 2 a_1^4 d_1^2 d_2^2 \\
& + 2 a_1^2 a_2^2 d_1^4 + 2 a_2^4 d_2^2 d_1^2 + 2 a_1^2 d_2^4 a_2^2 + 2 c_1^4 b_1^2 b_2^2 \\
& + 4 c_2^3 a_1 b_2 b_1^2 d_1 - 8 c_2 a_1 c_1 b_1^2 a_2 d_2^2 - 4 c_2 a_1 c_1^2 b_1 b_2^2 d_2 \\
& - 4 c_2 a_1 c_1^2 b_1^3 d_2 - 8 c_2^2 a_1^2 b_1 d_2 b_2 d_1 - 8 c_2 a_1 a_2 b_2^2 c_1 d_1^2 \\
& - 4 c_1^3 a_2 d_1 b_2^3 - 4 c_1 a_2 c_2^2 b_2^3 d_1 + 4 c_1 a_2 c_2^2 d_2 b_1^3 \\
& + 4 c_1 a_2 c_2^2 d_2 b_2^2 b_1 - 4 c_1^3 a_2 d_1 b_1^2 b_2 - 4 c_1 a_2 c_2^2 b_2 b_1^2 d_1 \\
& + 4 c_1^3 a_2 b_1 b_2^2 d_2 + 4 c_1^3 a_2 b_1^3 d_2 - 8 c_1^2 a_2^2 b_2 d_1 b_1 d_2 \\
& + 4 c_1^2 c_2^2 b_2^2 b_1^2 + a_1^4 d_2^4 + a_1^4 d_1^4 + a_2^4 d_2^4 + 2 a_1^2 b_2^2 c_1^2 d_1^2 \\
& + 6 a_1^2 b_2^2 c_1^2 d_2^2 + 6 a_1^2 b_1^2 c_2^2 d_2^2 + 4 a_1^2 d_2^2 a_2^2 d_1^2 \\
& + 2 a_1^2 c_2^2 b_2^2 d_2^2 + 6 a_1^2 c_2^2 b_2^2 d_1^2 + 2 a_1^2 c_1^2 b_1^2 d_2^2 \\
& - 4 a_1^3 c_1 b_1 d_1^3 - 4 a_1^2 b_2 c_1 a_2 d_1^3 + 6 a_1^2 c_1^2 b_1^2 d_1^2 \\
& - 4 a_1^3 d_2^3 b_2 c_1 + 2 a_1^2 b_1^2 c_2^2 d_1^2 - 4 a_1^3 b_1 c_2 d_2^3 \\
& - 4 a_1^2 b_1 c_2 a_2 d_1^3 - 4 a_1^2 c_2 b_2 d_2^3 a_2 - 4 a_1^2 d_2^2 a_2 d_1 b_2 c_1 \\
& - 4 a_1^2 d_2^2 a_2 b_1 c_2 d_1 + 4 a_1^3 d_1 c_2 b_2 d_2^2 - 4 a_1^3 d_1^2 b_2 c_1 d_2 \\
& - 4 a_1^3 d_1^2 d_2 b_1 c_2 - 4 a_1^2 c_2 b_2 d_2 a_2 d_1^2 - 4 a_1^3 c_1 b_1 d_1 d_2^2 \\
& + 4 a_1^2 c_1 b_1 d_2 a_2 d_1^2 + 4 a_1^2 c_1 b_1 d_2^3 a_2 + 4 a_1^3 d_1^3 c_2 b_2 \\
& + 6 a_2^2 b_2^2 c_1^2 d_1^2 + 2 a_2^2 b_2^2 c_1^2 d_2^2 + 2 a_2^2 b_1^2 c_2^2 d_2^2 \\
& + 6 a_2^2 c_2^2 b_2^2 d_2^2 + 2 a_2^2 c_2^2 b_2^2 d_1^2 + 6 a_2^2 c_1^2 b_1^2 d_2^2 \\
& - 4 a_2^2 c_1 b_1 d_1^3 a_1 + 2 a_2^2 c_1^2 b_1^2 d_1^2 - 4 a_2^3 b_2 c_1 d_1^3 \\
& - 4 a_2^2 a_1 d_2^3 b_2 c_1 + 6 a_2^2 b_1^2 c_2^2 d_1^2 - 4 a_2^2 b_1 c_2 a_1 d_2^3 \\
& - 4 a_2^3 b_1 c_2 d_1^3 - 4 a_2^3 c_2 b_2 d_2^3 - 4 a_2^3 d_2^2 d_1 b_2 c_1 \\
& - 4 a_2^3 d_2^2 b_1 c_2 d_1 + 4 a_2^2 d_1 a_1 c_2 b_2 d_2^2 - 4 a_2^2 d_1^2 a_1 b_2 c_1 d_2 \\
& - 4 a_2^2 d_1^2 a_1 d_2 b_1 c_2 - 4 a_2^3 c_2 b_2 d_2 d_1^2 + a_2^4 d_1^4 + c_1^4 b_1^4 \\
& + c_1^4 b_2^4 + c_2^4 b_2^4 + c_2^4 b_1^4 - 4 a_2^2 c_1 b_1 d_1 a_1 d_2^2 \\
& + 4 a_2^3 c_1 b_1 d_2 d_1^2 + 4 a_2^3 c_1 b_1 d_2^3 + 4 a_2^2 d_1^3 a_1 c_2 b_2 \\
& - 4 c_1^3 a_1 d_1 b_1^3 - 4 c_1 a_1 b_1^3 c_2^2 d_1 - 4 c_1^3 a_1 b_2^3 d_2 \\
& - 4 c_1 a_1 c_2^2 d_2 b_2^3 - 4 c_1 a_1 c_2^2 d_2 b_1^2 b_2 - 4 c_1^3 a_1 d_1 b_2^2 b_1 \\
& - 8 c_1^2 a_1 a_2 d_1 b_1^2 d_2 - 8 c_1 a_1^2 d_2 b_2^2 c_2 d_1 - 4 c_1^3 a_1 b_2 b_1^2 d_2 \\
& + 8 c_1 a_1 b_1^2 c_2 a_2 d_1^2 - 4 c_1 a_1 b_1 c_2^2 b_2^2 d_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 8 c_1^2 a_1 a_2 b_2 b_1 d_1^2 - 8 c_1^2 a_1 a_2 b_2 b_1 d_2^2 \\
 &+ 8 c_1^2 a_1 a_2 b_2^2 d_1 d_2 + 32 c_1 a_1 a_2 b_2 d_2 b_1 c_2 d_1 \\
 &+ 8 c_1^2 a_1^2 b_1 d_1 b_2 d_2 + 8 c_1 a_1^2 b_1^2 d_2 c_2 d_1 \\
 &+ 8 c_1 a_1 a_2 b_2^2 c_2 d_2^2 + 8 c_1 a_1^2 b_1 c_2 b_2 d_2^2 - 8 c_1 a_1^2 b_1 c_2 b_2 d_1^2 \\
 &- 4 c_2 a_2 c_1^2 d_1 b_1^3 - 4 c_2^3 a_2 b_1^3 d_1 - 4 c_2 a_2 b_2^3 c_1^2 d_2 \\
 &- 4 c_2^3 a_2 d_2 b_2^3 - 4 c_2^3 a_2 d_2 b_1^2 b_2 - 4 c_2 a_2 c_1^2 d_1 b_2^2 b_1 \\
 &- 8 c_2 a_2^2 d_1 b_1^2 c_1 d_2 - 8 c_2^2 a_2 a_1 d_2 b_2^2 d_1 \\
 &- 4 c_2 a_2 b_2 c_1^2 b_1^2 d_2 - 4 c_2^3 a_2 b_1 b_2^2 d_1 + 8 c_2 a_2^2 b_2 c_1 b_1 d_1^2 \\
 &- 8 c_2 a_2^2 b_2 c_1 b_1 d_2^2 + 8 c_2 a_2^2 b_2^2 d_1 c_1 d_2 \\
 &+ 8 c_2^2 a_2^2 b_2 d_2 b_1 d_1 + 8 c_2^2 a_2 a_1 b_1^2 d_2 d_1 \\
 &+ 8 c_2^2 a_2 a_1 b_1 b_2 d_2^2 - 8 c_2^2 a_2 a_1 b_1 b_2 d_1^2 + 4 c_2 a_1 c_1^2 d_1 b_2^3 \\
 &+ 4 c_2^3 a_1 b_2^3 d_1 - 4 c_2^3 a_1 d_2 b_1^3 - 4 c_2^3 a_1 d_2 b_2^2 b_1 \\
 &+ 4 c_2 a_1 c_1^2 d_1 b_1^2 b_2
 \end{aligned}$$

Es gilt für $\det A_{\text{alpha}}$:

```
> simplify(det(A_alpha)/evalc(det(A)*conjugate(det(A))^2);
```

$$1$$

Damit ist $\det A_{\text{alpha}}$ stets gleich $\det(A)^2 \overline{\det(A)}$ und daher ebenfalls verschieden von 0.

Sonderfälle: 1) Der Punkt $F := \mathbb{K}(0, 1)^T$:

```
> F:=vector([0,1]);
```

$$F := [0, 1]$$

```
> F_bild:=evalm(A&*F);
```

$$F_bild := [b_1 + I b_2, d_1 + I d_2]$$

Der Punkt F entspricht dem Punkt $G := \mathbb{K}(0, 0, 0, 1)^T$ auf der Quadrik \mathcal{K} :

```
> G_bild:=simplify(evalc(F_bild[2]/F_bild[1]));
```

```
simplify(evalc(Re(G_bild)^2 + Im(G_bild)^2));
```

G_{bild} stimmt mit der letzten Spalte der Matrix A_{alpha} überein. Wenn sowohl b_1 als auch b_2 gleich 0 ist, dann ist F ein Fixpunkt.

$$G_bild := \frac{d_1 b_1 + d_2 b_2 - I d_1 b_2 + I d_2 b_1}{b_1^2 + b_2^2}$$

$$\frac{d_1^2 + d_2^2}{b_1^2 + b_2^2}$$

2) Jener Punkt V der auf $\mathbb{K}(0, 1)^T$ abgebildet wird:

```
> V:=vector([-b[1]-I*b[2], a[1]+I*a[2]]);
```

$$V := [-b_1 - I b_2, a_1 + I a_2]$$

```
> V_bild:=evalm(A&*V); simplify(V_bild[1]);
simplify(V_bild[2])-det(A);
```

$$V_bild := \left[(a_1 + I a_2)(-b_1 - I b_2) + (b_1 + I b_2)(a_1 + I a_2), \right. \\ \left. (c_1 + I c_2)(-b_1 - I b_2) + (a_1 + I a_2)(d_1 + I d_2) \right]$$

0

0

V wird also unter α tatsächlich auf $\mathbb{K}(0, 1)^T$ abgebildet, denn $\det(A)$ ist stets von 0 verschieden.

Der zu V gehörige Punkt auf der Quadrik \mathcal{K} sei W , der auf $(0, 0, 0, 1)^T$ abgebildet werden muß.

```
> W:=simplify(evalc(V[2]/V[1])); simplify(evalc(Re(W)^2 +
Im(W)^2));
```

$$V := \frac{-a_1 b_1 - a_2 b_2 - I a_2 b_1 + I a_1 b_2}{b_1^2 + b_2^2}$$

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{b_1^2 + b_2^2}$$

```
> W:=vector([b[1]^2+b[2]^2,-a[1]*b[1]-a[2]*b[2],
-a[2]*b[1]+a[1]*b[2],a[1]^2+a[2]^2]);
```

$$W := [b_1^2 + b_2^2, -a_1 b_1 - a_2 b_2, -a_2 b_1 + a_1 b_2, a_1^2 + a_2^2]$$

```
> W_bild:=evalm(A_alpha&*W); simplify(W_bild[1]);
```

0

Der Punkt W wird somit tatsächlich auf $\mathbb{K}(0, 0, 0, 1)^T$ abgebildet.

A.2 Beweis von Lemma 2.2

Wir wollen Satz 2.2 mit analytischen Methoden beweisen. Es sollen dabei die Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 3.17 verwendet werden.

Beweis: Es seien zwei windschiefe Geraden \bar{a}, \bar{b} in einem hyperbolischen Raum \mathcal{H} gegeben. Alle Treffgeraden von a, b müssen in dem von a und b aufgespannten 3-dimensionalen Raum liegen. Damit können wir o.B.d.A. voraussetzen, daß \mathcal{H} dreidimensional ist. Somit können wir die Methoden aus Satz 3.17 anwenden.

Zwischen den Geraden aus \mathcal{H} und den Punktepaaren in $\Pi_{\mathbb{L}}$ existiert eine Bijektion. Somit sind durch a bzw. b zwei Punkte A_1, A_2 bzw. B_1, B_2 in $\Pi_{\mathbb{L}}$ mitbestimmt. Wir wissen bereits, daß zwei orthogonal schneidende Geraden harmonische Punktepaare in $\Pi_{\mathbb{L}}$ bestimmen. Die Suche nach einer gemeinsamen orthogonalen Treffgerade \bar{n} an \bar{a}, \bar{b} in \mathcal{H} ist damit äquivalent zur Suche nach einem Punktepaar N_1, N_2 in $\Pi_{\mathbb{L}}$, welches harmonisch zu A_1, A_2 und B_1, B_2 liegt. Im Falle der Existenz von solchen Punkten, muß N_1, N_2 das Fixpunktepaar der hyperbolischen Involution

$$\alpha : \Pi_{\mathbb{L}} \rightarrow \Pi_{\mathbb{L}}, A_1 \mapsto A_2, B_1 \mapsto B_2$$

sein. Durch A_1, A_2, B_1, B_2 ist α bereits festgelegt und, da α Involution ist, kann α nicht parabolisch sein. $\Pi_{\mathbb{L}}$ ist ein projektiver Raum über dem quadratisch abgeschlossenen Körper \mathbb{L} . In solchen Räumen gibt es keine elliptischen Projektivitäten [8, S.38] und somit muß α hyperbolisch sein. Durch A_1, A_2, B_1, B_2 ist also eindeutig ein Punktepaar N_1, N_2 mitbestimmt, das zu A_1, A_2 als auch zu B_1, B_2 harmonisch liegt. In den hyperbolischen Raum \mathcal{H} übersetzt bedeutet dies, daß \bar{a} und \bar{b} eindeutig eine Gerade \bar{n} bestimmen, die \bar{a} und \bar{b} orthogonal schneidet. \square

Literaturverzeichnis

- [1] BECKER E.: *Euklidische Körper und euklidische Hüllen von Körpern*, J. f. d. reine angew. Math. **268/69**, 41 – 52, 1974.
- [2] BECKMAN F.S., QUARLES JR. D.A.: *On isometries of Euclidean Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 810 – 815, 1953.
- [3] BENZ W.: *Geometrische Transformationen*, B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim Leipzig Zürich, 1992.
- [4] BENZ W.: *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973.
- [5] BENZ W., SCHRÖDER E.M.: *Bestimmung der orthogonalitätstreuen Permutationen euklidischer Räume*, Geom. Dedicata **21**, 265 – 276, 1986.
- [6] BLASCHKE W.: *Vorlesungen über Differentialgeometrie III*, Springer Verlag, Berlin, 1929.
- [7] BRAUNER H.: *Geometrie projektiver Räume I*, B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim Wien Zürich, 1976.
- [8] BRAUNER H.: *Geometrie projektiver Räume II*, B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim Wien Zürich, 1976.
- [9] BRAUNER H.: *Über die von Kollineationen projektiver Räume induzierten Geradenabbildungen*, Sb. österr. Akad. Wiss., Abt. II, math. phys. techn. Wiss. **197**, 327 – 332, 1988.
- [10] CHOW W.L.: *On the geometry of algebraic homogeneous spaces*, Ann. of Math. **50**, 32 – 67, 1949.
- [11] CLEBSCH A.: *Vorlesungen über Geometrie*, Band II, Teil 1, *Die Flächen erster und zweiter Ordnung oder Klasse und der lineare Komplex*, Leipzig, Teubner-Verlag, 1891.

- [12] DIEUDONNÉ J.A.: *La Géométrie des Groupes Classiques*, 3rd ed., Berlin Heidelberg New York, 1971.
- [13] FRANK R.: *Ein lokaler Fundamentalsatz für Projektionen*, *Geometriae Dedicata* **44**, 53 – 66, 1992.
- [14] GIERING O.: *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1982.
- [15] GRÖGER D.: *Zur Existenz von nichtkommutativen euklidischen Körpern*, *Aeq. Math.* **27**, 157 – 162, 1984.
- [16] GUDDER S.: *Metric Spaces over ordered Fields*, *Dem. Math.* **19**, No. 1, 165 – 183, 1996.
- [17] HAVLICEK H.: *On Plücker Transformations of generalized elliptic spaces*, *Rend. Mat., Ser. VII* **14**, 39 – 56, 1994.
- [18] HAVLICEK H.: *Symplectic Plücker Transformations*, *Math. Pannonica* **6**, 145 – 153, 1995.
- [19] HAVLICEK H.: *Lineare Abbildungen aus Grassmannräumen*, Dissertation a. d. Technischen Universität Wien, 1980.
- [20] HAVLICEK H.: *On Isomorphisms of Grassmann Spaces*, *Mitt. Math. Ges. Hamburg* **14**, 117 – 120, 1995.
- [21] HAVLICEK H.: *Isomorphisms of Affine Plücker Spaces*, *Proceedings of the 4th Conference of Geometry Thessaloniki 1996*, Aristoteles Univ. of Thessaloniki, 171 – 178, 1997.
- [22] HAVLICEK H.: *A characteristic property of elliptic Plücker Transformations*, *J. Geom.* **58**, 106 – 116, 1997.
- [23] HUANG W.-L.: *Adjacency Preserving Transformations of Grassmann Spaces*, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* (im Druck).
- [24] HUNGERFORD T.W.: *Algebra*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974.
- [25] JACOBSON N.: *Basic Algebra I*, W.H. Freeman and Company, New York, 1985.
- [26] JACOBSON N.: *Basic Algebra II*, W.H. Freeman and Company, New York, 1989.

- [27] LENZ H.: *Vorlesungen über projektive Geometrie*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1965.
- [28] LENZ H.: *Nichteuklidische Geometrie*, B·I – Hochschultaschenbücher 123/123a, Mannheim, 1967.
- [29] LESTER J.: *On Distance Preserving Transformations of Lines in Euclidean Three-Space*, Aequat. Math. **18**, 69 – 72, 1985.
- [30] MISFELD J.: *Topologische projektive Räume*, Dissertation a. d. Math. Naturwiss. Fakultät d. Universität Hamburg, 1968.
- [31] MISFELD J.: *Topologische projektive Räume*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **32**, 232 – 263, 1968.
- [32] PICKERT G.: *Projektive Ebenen*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.
- [33] RINOW W.: *Lehrbuch der Topologie*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975.
- [34] SCHAAL H.: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Band 1*, Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1976.
- [35] SCHAAL H.: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Band 2*, Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1976.
- [36] SCHRÖDER E.M.: *Vorlesungen über Geometrien, Band 1: Möbiussche, Elliptische und Hyperbolische Ebenen*, B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1991.
- [37] SÖRENSEN K.: *Topologische Inzidenzgruppen*, Dissertation a. d. Math. Naturwiss. Fakultät d. Universität Hamburg **35**, 1969.
- [38] SÖRENSEN K.: *Zum Begriff des topologischen projektiven Raumes*, Math. Z. **109**, 239 – 245, 1969.
- [39] WIĘŚLAW W.: *Topological Fields*, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1988.

Lebenslauf

Ich wurde am 17. Oktober 1971 in Wien geboren. Im September 1978 trat ich in die Volksschule Wien 8, Lange Gasse 36 ein. Anschließend besuchte ich das Bundesrealgymnasium Wien 8, Albertgasse 18-22 und legte dort am 9. Juni 1990 die Reifeprüfung ab.

Im Oktober 1990 begann ich das Studium Lehramt für Mathematik und Darstellende Geometrie, welches ich im Juli 1995 abgeschlossen habe.

Seit September 1994 bin ich am Institut für Geometrie in der Abteilung für lineare Algebra und Geometrie als Assistent tätig. Zuerst als Studienassistent (bis August 1995) später als Vertragsassistent.

Vom September 1996 bis Juni 1996 unterrichtete ich im Rahmen des Schulpraktikums im Bundesrealgymnasium Schottenbastei Wien 1.

Meine Dissertation "Orthogonalitätstreue Plückertransformationen hyperbolischer Räume" habe ich am Institut für Geometrie in den Jahren 1995 - 1998 verfaßt.

Mag. Klaus List

Lange Gasse 44/2/3/27
1080 Wien