

Formelsammlung zur Vorlesung

Kartenentwürfe

Hans Havlicek

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie der TU Wien

Forschungsgruppe Differentialgeometrie und Geometrische Strukturen

Internet: www.geometrie.tuwien.ac.at/havlicek/ Email: havlicek@geometrie.tuwien.ac.at

Sommersemester 2006

Einheitssphäre als Flächenstück (geographische Koordinaten)

$U := (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist das Parameterrechteck, $u_1 =$ geographische Länge und $u_2 =$ geographische Breite. x_1, x_2 und x_3 sind kartesische Koordinaten. $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}x_1(u_1, u_2) &= f_1(u_1, u_2) = \cos u_1 \cos u_2 \\x_2(u_1, u_2) &= f_2(u_1, u_2) = \sin u_1 \cos u_2 \\x_3(u_1, u_2) &= f_3(u_1, u_2) = \sin u_2\end{aligned}\tag{1}$$

$f(U) =: \Sigma$ ist die längs einem Halbmeridian aufgeschnittene Einheitssphäre.

Die partiellen Ableitungen von (1) sind:

$$\begin{aligned}f_{1,1}(u_1, u_2) &= -\sin u_1 \cos u_2 & f_{1,2}(u_1, u_2) &= -\cos u_1 \sin u_2 \\f_{2,1}(u_1, u_2) &= \cos u_1 \cos u_2 & f_{2,2}(u_1, u_2) &= -\sin u_1 \sin u_2 \\f_{3,1}(u_1, u_2) &= 0 & f_{3,2}(u_1, u_2) &= \cos u_2\end{aligned}\tag{2}$$

Polarkoordinaten in der Ebene

$\bar{U} := (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}^+$ ist der Parameterbereich der Polarkoordinaten, $\bar{u}_1 =$ Polarwinkel, $\bar{u}_2 =$ Abstand vom Ursprung. \bar{x}_1 und \bar{x}_2 sind kartesische Koordinaten. Die Funktion $\bar{f} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) &= \bar{f}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \bar{u}_2 \cos \bar{u}_1 \\ \bar{x}_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2) &= \bar{f}_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \bar{u}_2 \sin \bar{u}_1\end{aligned}\tag{3}$$

Allgemeiner Ansatz für einen Kegelentwurf

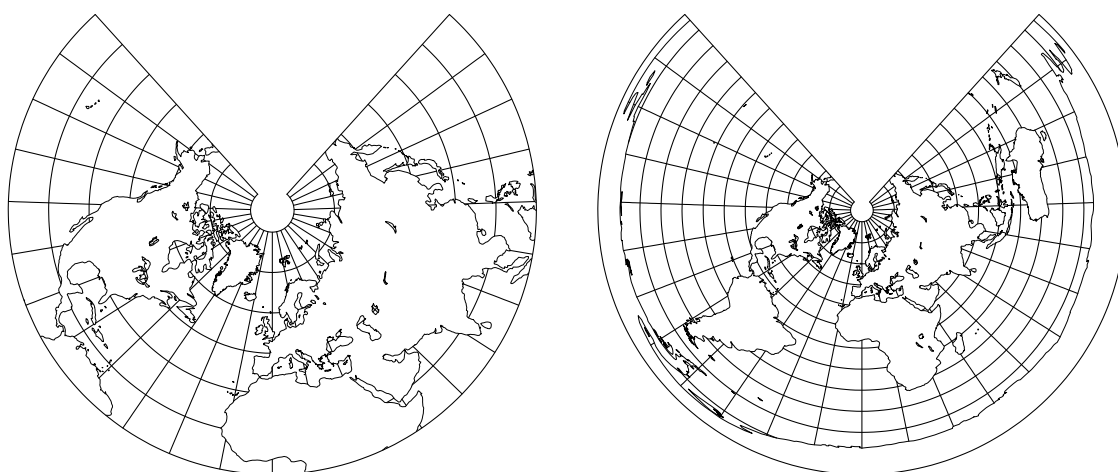
Der Winkelstauchfaktor n ist eine Konstante mit $0 < n < 1$. Das offene Intervall $I \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gibt die Zone an, welche abgebildet wird, und $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ beschreibt, wie ein (und dann jeder) Meridiankreisbogen in der Karte erscheint.

$$\begin{aligned}\bar{u}_1(u_1) &= nu_1 \\ \bar{u}_2(u_2) &= \rho(u_2)\end{aligned}\quad (4)$$

Abstandstreuer Kegellentwurf mit Berührparallelkreis

Sonderfall von (4). Der Berührparallelkreis hat die Breite a_2 mit $0 < a_2 < \frac{\pi}{2}$, $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$\begin{aligned}n &= \sin a_2 \\ \rho(u_2) &= (\cot a_2) + a_2 - u_2\end{aligned}\quad (5)$$



Allgemeiner Ansatz für einen azimutalen Entwurf

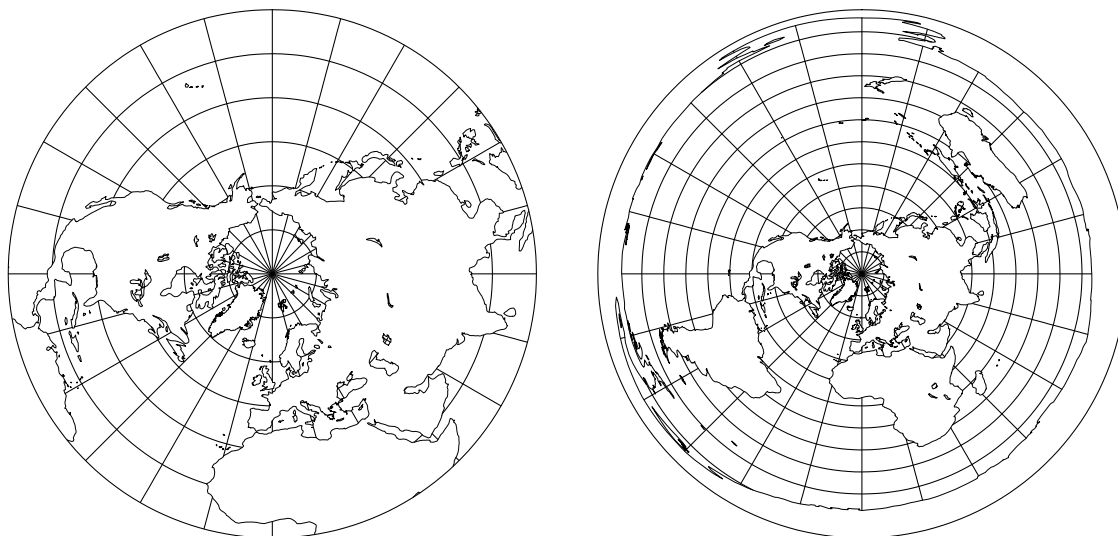
Grenzfall von (4) für $n = 1$. Das Intervall $I \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ hat $\frac{\pi}{2}$ als Randpunkt und $\lim_{u_2 \rightarrow \pi/2} = 0$:

$$\begin{aligned}\bar{u}_1(u_1) &= u_1 \\ \bar{u}_2(u_2) &= \rho(u_2)\end{aligned}\quad (6)$$

Abstandstreuer azimutaler Entwurf

Sonderfall von (6):

$$\rho(u_2) = \frac{\pi}{2} - u_2\quad (7)$$



Allgemeiner Ansatz für einen Zylinderentwurf

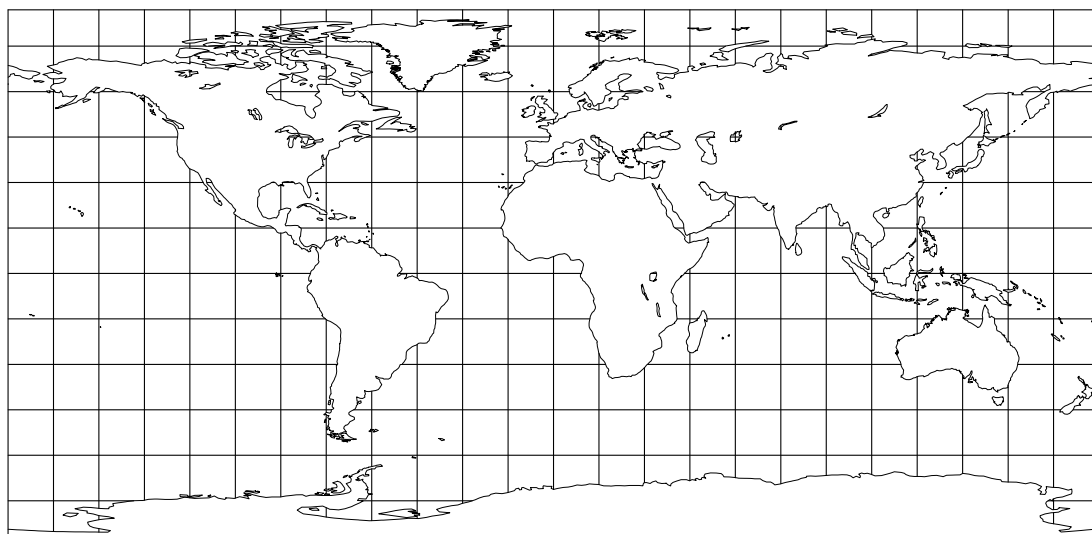
$n \in \mathbb{R}^+$ ist eine Konstante, das Intervall $I \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gibt die Zone an, welche abgebildet wird, und $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschreibt, wie ein (und dann jeder) Meridiankreisbogen in der Karte erscheint:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(u_1) &= nu_1 \\ \bar{x}_2(u_2) &= \rho(u_2) \end{aligned} \tag{8}$$

Abstandstreuer Zylinderentwurf (Äquator ist Berührparallelkreis)

Sonderfall von (8), wobei $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} n &= 1 \\ \rho(u_2) &= u_2 \end{aligned} \tag{9}$$



Beschreibung durch gleiche Koordinaten

α ist ein Kartenentwurf mit der Definitionsmenge $f(U')$, wobei $U' \subset U$ ein Gebiet ist. Dann gibt es genau eine Abbildung

$$\bar{f}' : U' \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit } \bar{f}'(u_1, u_2) = \alpha(f(u_1, u_2)) \text{ für alle } (u_1, u_2) \in U'. \quad (10)$$

Kurz: Jeder Kugelpunkt und sein Bildpunkt in der Karte werden durch gleiche Koordinaten $(u_1, u_2) \in U'$ beschrieben.

Angabe der Affinität α_p

α ist ein Kartenentwurf und $a = (a_1, a_2) \in U'$ fest gewählt. Die Affinität α_p bildet die Tangentialebene der Sphäre in $p = f(a_1, a_2)$ auf die Kartenebenen ab und leistet:

$$\begin{aligned} f(a) = p &\mapsto \alpha(p) = \bar{f}'(a), \\ p + f_{,i}(a) &\mapsto \alpha(p) + \bar{f}'_{,i}(a) \text{ für } i = 1, 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Erste Grundform für geographische Koordinaten

Vgl. dazu (1) und (2):

$$g_{11}(u_1, u_2) = \cos^2 u_2, \quad g_{12}(u_1, u_2) = 0, \quad g_{22}(u_1, u_2) = 1. \quad (12)$$

Hauptverzerrungstangenten und Hauptverzerrungen in $p = f(a)$

Für $a \in U'$ sind $G(a) = (g_{jk}(a))$ und $\bar{G}'(a) = (\bar{g}'_{jk}(a))$ invertierbare symmetrische Matrizen.

$$\begin{aligned} y_1 f_{,1}(a) + y_2 f_{,2}(a) &\text{ ist Richtungsvektor einer Hauptverzerrungstangente in } p \\ \Leftrightarrow (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 &\text{ ist Eigenvektor der Matrix } \bar{G}'(a)G^{-1}(a). \end{aligned} \quad (13)$$

Die zugehörige Hauptverzerrung ist:

$$\frac{\|y_1 \bar{f}'_{,1}(a) + y_2 \bar{f}'_{,2}(a)\|}{\|y_1 f_{,1}(a) + y_2 f_{,2}(a)\|} = \sqrt{\frac{y_1^2 \bar{g}'_{11}(a) + 2y_1 y_2 \bar{g}'_{12}(a) + y_2^2 \bar{g}'_{22}(a)}{y_1^2 g_{11}(a) + 2y_1 y_2 g_{12}(a) + y_2^2 g_{22}(a)}} \quad (14)$$

Kennzeichnung der Winkeltreue in $p = f(a)$

$$\alpha \text{ ist konform in } p \Leftrightarrow \alpha_p \text{ ist Ähnlichkeit} \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 : \lambda^2 g_{jk}(a) = \bar{g}'_{jk}(a) \text{ für } j, k = 1, 2. \quad (15)$$

Genau für $\lambda = 1$ ist der Kartenentwurf im Punkt p sogar isometrisch.

Hauptverzerrungen

Diese Formeln gelten nur dann, wenn die Längen- und die Breitenkreistangenten in allen Punkten von $f(U')$ Hauptverzerrungstangenten sind.

$$\lambda_1(u_1, u_2) = \frac{\|\bar{f}'_{,1}(u_1, u_2)\|}{\|f'_{,1}(u_1, u_2)\|} = \sqrt{\frac{\bar{g}'_{11}(u_1, u_2)}{g_{11}(u_1, u_2)}}, \quad (16)$$

$$\lambda_2(u_1, u_2) = \frac{\|\bar{f}'_{,2}(u_1, u_2)\|}{\|f'_{,2}(u_1, u_2)\|} = \sqrt{\frac{\bar{g}'_{22}(u_1, u_2)}{g_{22}(u_1, u_2)}}. \quad (17)$$

Erste Grundform für Kegellentwurf und azimutalen Entwurf (allgemein)

Vgl. (4) und (6). Bei einem azimutalen Entwurf ist $n = 1$ zu setzen.

$$\bar{g}'_{11}(u_1, u_2) = n^2 \rho^2(u_2), \quad \bar{g}'_{12}(u_1, u_2) = 0, \quad \bar{g}'_{22}(a) = \left(\frac{d\rho(u_2)}{du_2} \right)^2. \quad (18)$$

Hauptverzerrungen für Kegellentwurf und azimutalen Entwurf (allgemein)

Vgl. (4) und (6). Bei einem azimutalen Entwurf ist $n = 1$ zu setzen.

$$\lambda_1(u_1, u_2) = \frac{n\rho(u_2)}{\cos u_2}, \quad \lambda_2(u_1, u_2) = \left| \frac{d\rho(u_2)}{du_2} \right|. \quad (19)$$

Erste Grundform für Zylinderentwurf (allgemein)

Vgl. (8).

$$\bar{g}'_{11}(u_1, u_2) = n^2, \quad \bar{g}'_{12}(u_1, u_2) = 0, \quad \bar{g}'_{22}(a) = \left(\frac{d\rho(u_2)}{du_2} \right)^2. \quad (20)$$

Hauptverzerrungen für Zylinderentwurf

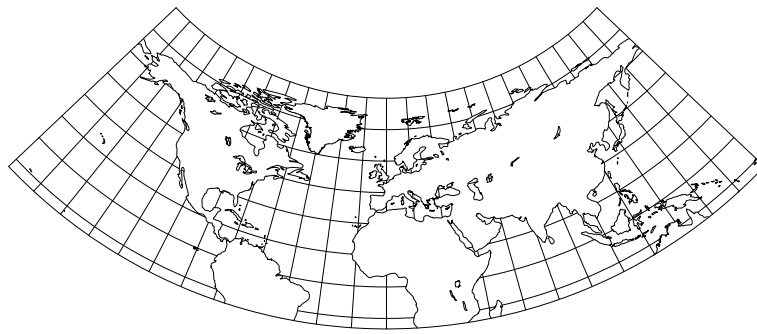
Vgl. (8).

$$\lambda_1(u_1, u_2) = \frac{n}{\cos u_2}, \quad \lambda_2(u_1, u_2) = \left| \frac{d\rho(u_2)}{du_2} \right|. \quad (21)$$

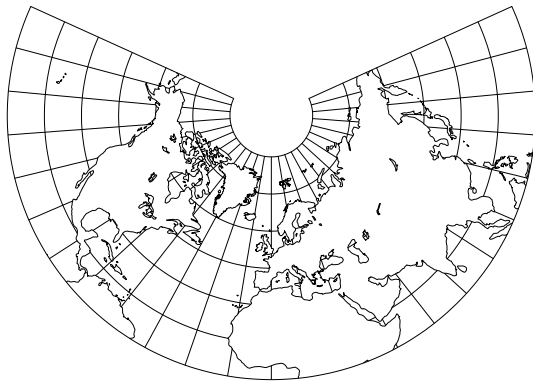
Abstandstreuer Kegellentwurf mit zwei längentreuen Breitenkreisen

Sonderfall von (4) mit $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Die beiden Breitenkreise sind gegeben durch $-\frac{\pi}{2} < a_2 < b_2 \leq \frac{\pi}{2}$, wobei aber $\cos a_2 > \cos b_2$:

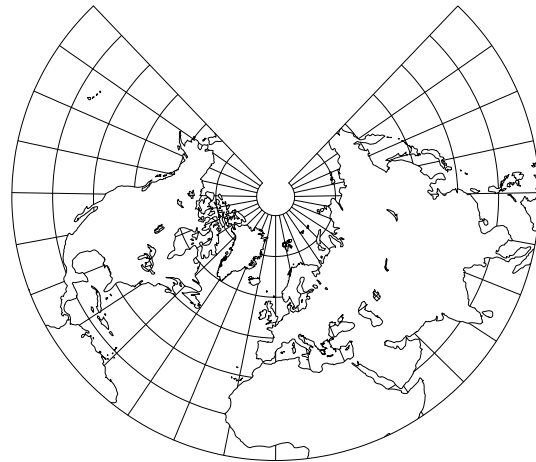
$$n = \frac{\cos a_2 - \cos b_2}{b_2 - a_2}, \quad \rho(u_2) = b_2 + \frac{(b_2 - a_2) \cos b_2}{\cos a_2 - \cos b_2} - u_2. \quad (22)$$



$$a_2 = 10^\circ\text{N}, b_2 = 20^\circ\text{N}.$$

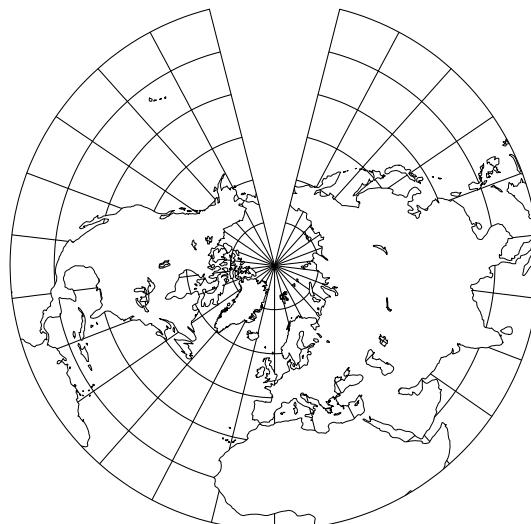


$$a_2 = 25^\circ\text{N}, b_2 = 55^\circ\text{N}.$$



$$a_2 = 35^\circ\text{N}, b_2 = 65^\circ\text{N}.$$

Grenzfall, wobei ein Breitenkreis zum Nordpol degeneriert.

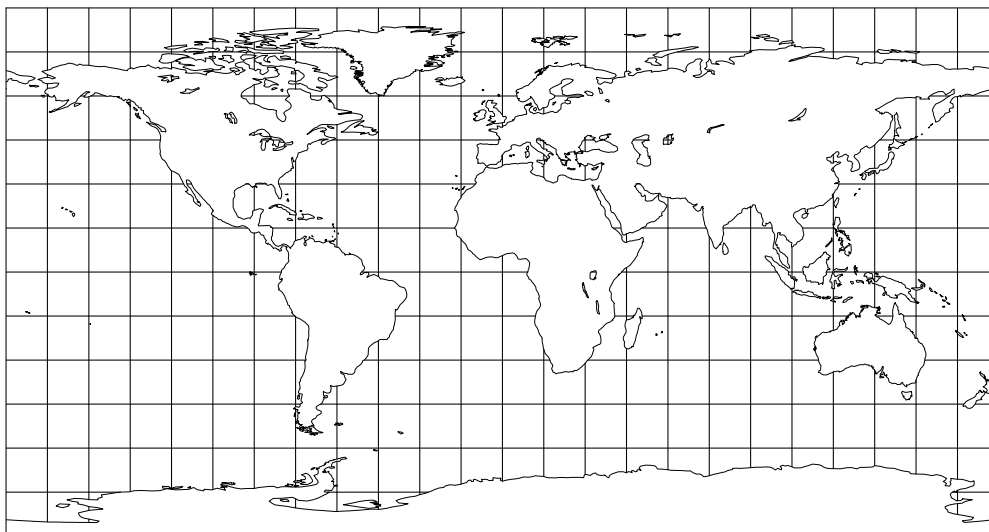


$$a_2 = 50^\circ\text{N}, b_2 = 90^\circ\text{N}.$$

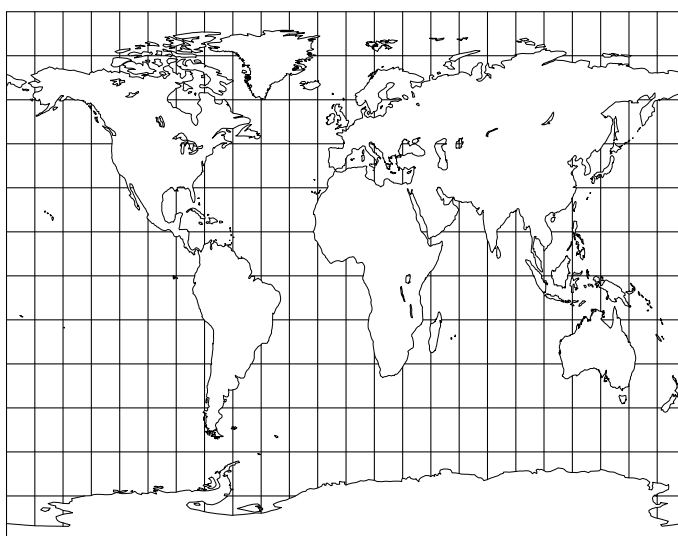
Abstandstreuer Zylinderentwurf mit zwei längentreuen Breitenkreisen

Sonderfall von (8), wobei $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Die beiden Breitenkreise sind gegeben durch $\pm a_2$ mit $0 < a_2 < \frac{\pi}{2}$:

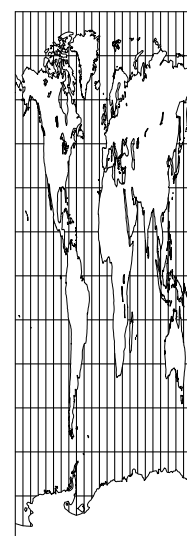
$$n = \cos a_2, \quad \rho(u_2) = u_2. \tag{23}$$



$a_2 = 20^\circ\text{N}$



$a_2 = 50^\circ\text{N}$



$a_2 = 80^\circ\text{N}$

Konformer Kegelentwurf

Sonderfall von (4), wobei $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

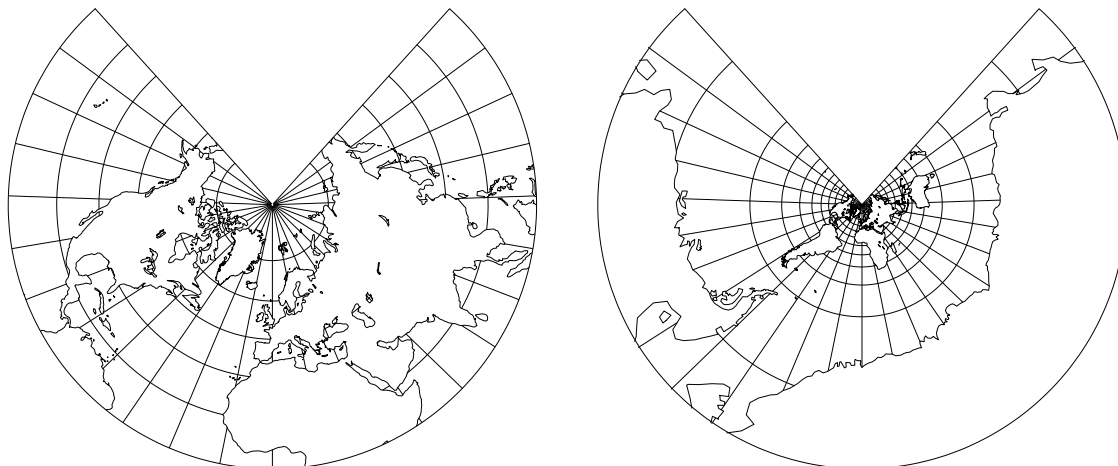
$$\rho(u_2) = C \cdot \tan^{\pm n} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u_2}{2} \right) \text{ mit } C > 0. \tag{24}$$

Für ein seitenrichtiges Bild ist bei $\pm n$ das negative Vorzeichen zu wählen.

Konformer Kegellentwurf mit einem Berührparallelkreis

Sonderfall von (24). Der Berührparallelkreis hat die Breite a_2 mit $0 < a_2 < \frac{\pi}{2}$:

$$n = \sin a_2, \quad C = \cot a_2 \cdot \tan^{\sin a_2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a_2}{2} \right) \quad (25)$$



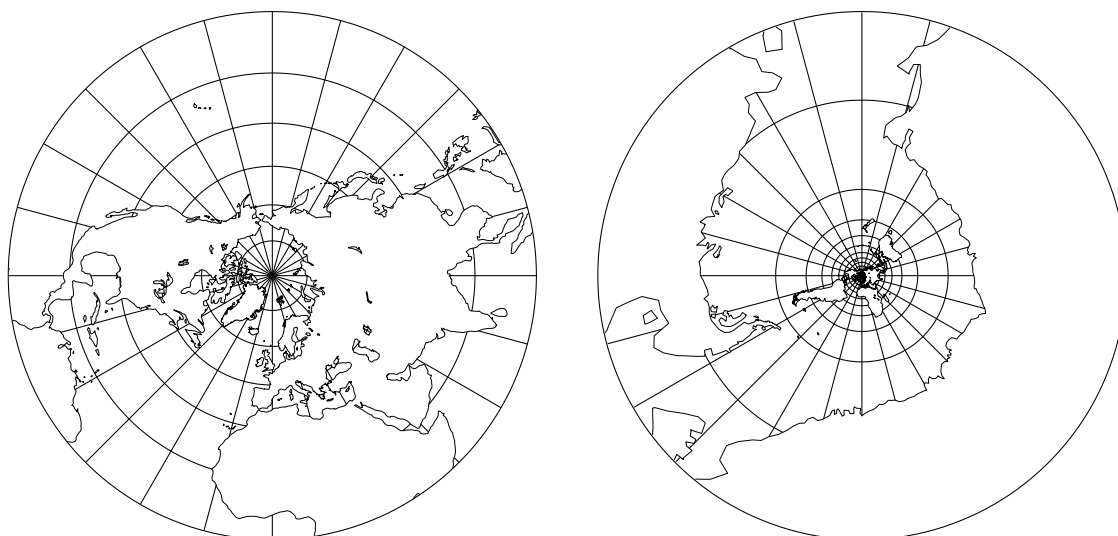
Konformer Azimutalentwurf

Sonderfall von (6), wobei $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\rho(u_2) = C \cdot \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u_2}{2} \right) \quad \text{mit } C > 0. \quad (26)$$

Stereographische Projektion

(26) beschreibt die stereographische Projektion aus dem Südpol auf die zur Äquatorebene parallele Ebene mit der Gleichung $x_3 = C - 1$: insbesondere für $C = 1$ die Projektion auf die Äquatorebene und für $C = 2$ die Projektion auf die Tangentialebene im Nordpol.



Konformer Zylinderentwurf

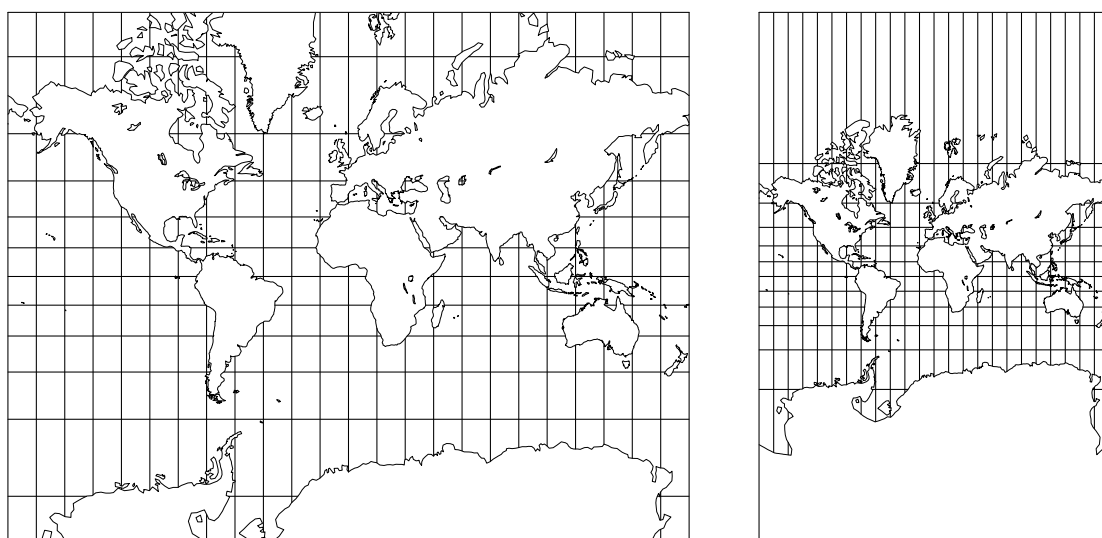
Sonderfall von (8), wobei $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\rho(u_2) = \pm n \log \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u_2}{2} \right) \right) + C \text{ mit } C \in \mathbb{R}. \quad (27)$$

Für ein seitenrichtiges Bild ist bei $\pm n$ das positive Vorzeichen zu wählen.

Konformer Zylinderentwurf von Mercator (Seekarte)

$$n = 1, \quad \rho(u_2) = \log \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u_2}{2} \right) \right) \quad (28)$$



Konformer Kegellentwurf mit zwei längentreuen Breitenkreisen

Sonderfall von (4) mit $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Die beiden Breitenkreise sind gegeben durch $-\frac{\pi}{2} < a_2 < b_2 < \frac{\pi}{2}$, wobei aber $\cos a_2 > \cos b_2$:

$$n = \frac{\log(\cos a_2) - \log(\cos b_2)}{\log \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b_2}{2} \right) \right) - \log \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a_2}{2} \right) \right)}, \quad C = \frac{\cos b_2}{n} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b_2}{2} \right) \quad (29)$$

Konformer Zylinderentwurf mit zwei längentreuen Breitenkreisen

Sonderfall von (8), wobei $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Die beiden Breitenkreise sind gegeben durch $\pm a_2$ mit $0 < a_2 < \frac{\pi}{2}$:

$$n = \cos a_2, \quad \rho(u_2) = \cos a_2 \log \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u_2}{2} \right) \right) \quad (30)$$

Maximale Winkelverzerrung von α_p

Im Punkt $p = f(a) \in \Sigma$ gilt:

$$\delta(a) = \left| 4 \arctan \sqrt{\frac{\lambda_1(a)}{\lambda_2(a)}} - \pi \right| = 2 \arcsin \left| \frac{\lambda_1(a) - \lambda_2(a)}{\lambda_1(a) + \lambda_2(a)} \right| \quad (31)$$

Die Bezeichnung der Hauptverzerrungen ist dabei beliebig.

Flächenverzerrung von α_p

Im Punkt $p = f(a) \in \Sigma$ gilt mit $g(a) := \det(g_{jk}) = \det G$ und $\bar{g}' := \det(\bar{g}'_{jk}(a)) = \det \bar{G}'$:

$$\omega(a) = \sqrt{\frac{\bar{g}'(a)}{g(a)}} \quad (32)$$

Kennzeichnung der Flächentreue in $p = f(a)$

$$\alpha \text{ ist flächentreu in } p \Leftrightarrow \alpha_p \text{ ist flächentreu} \Leftrightarrow g(a) = \bar{g}'(a). \quad (33)$$

Flächentreuer Kegelentwurf

Sonderfall von (8), wobei das Intervall I (der maximal mögliche Definitionsbereich für ρ) von der Wahl der Integrationskonstanten C und von n abhängt:

$$\rho(u_2) = \sqrt{C \pm \frac{2}{n} \sin u_2} \text{ mit } C \in \mathbb{R} \quad (34)$$

Für ein seitenrichtiges Bild ist bei $\pm \frac{2}{n}$ das negative Vorzeichen zu wählen.

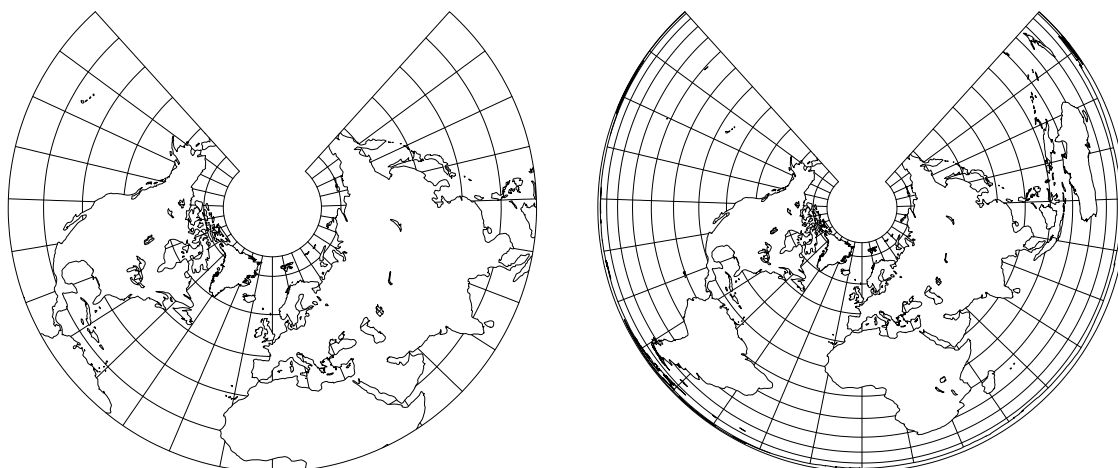
Flächentreuer Kegelentwurf mit einem Berührparallelkreis

Sonderfall von (37). Der Berührparallelkreis hat die Breite a_2 mit $0 < a_2 < \frac{\pi}{2}$. Das ergibt

$$n = \sin a_2, \quad C = 2 + \cot^2 a_2.$$

Nach einfacher Umformung folgt daraus :

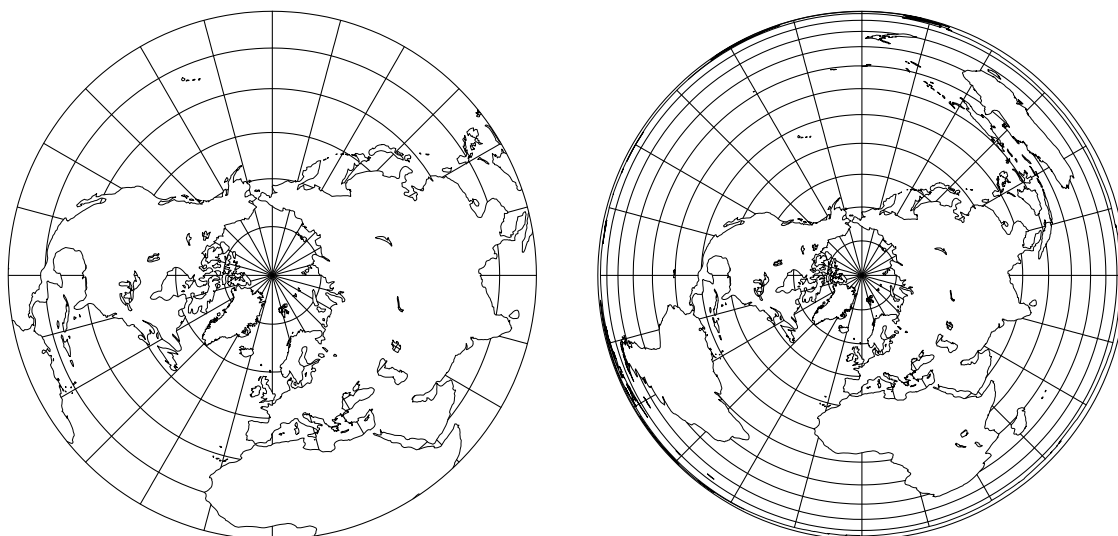
$$\rho(u_2) = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 a_2 - 2 \sin a_2 \sin u_2}}{\sin a_2} \quad (35)$$



Flächentreuer azimutaler Entwurf (Lambert)

Sonderfall von (6), wobei $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bzw. Grenzfall von (34) mit $n = 1$ und $C = 2$:

$$\rho(u_2) = \sqrt{2 - 2 \sin u_2} \tag{36}$$



Flächentreuer Zylinderentwurf

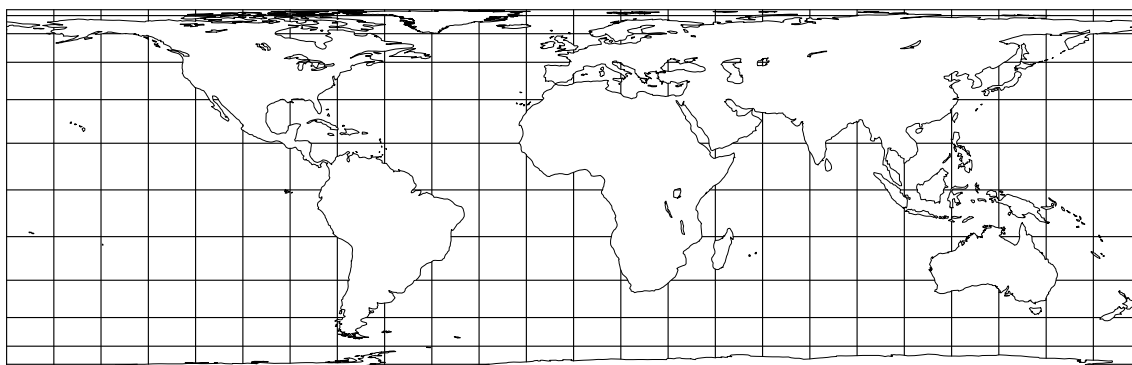
Sonderfall von (8), wobei $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\rho(u_2) = \pm \frac{\sin u_2}{n} + C \text{ mit } C \in \mathbb{R} \tag{37}$$

Flächentreuer Zylinderentwurf von Lambert

Sonderfall von (37) mit $n = 1$ und $C = 0$:

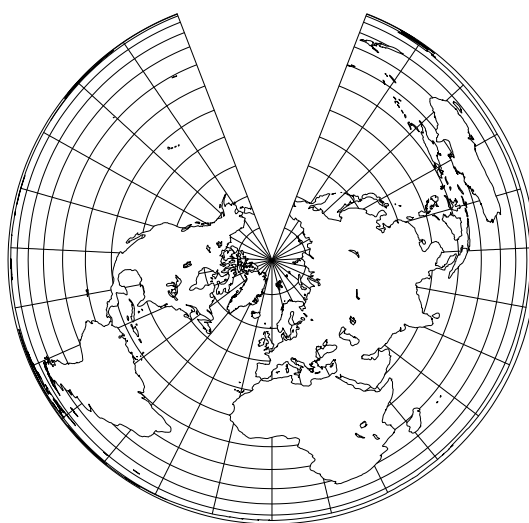
$$\rho(u_2) = \sin u_2 \tag{38}$$



Flächentreuer Kegelentwurf mit zwei längentreuen Breitenkreisen

Sonderfall von (34), wobei $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Die beiden Breitenkreise sind gegeben durch $-\frac{\pi}{2} < a_2 < b_2 \leq \frac{\pi}{2}$, wobei aber $\cos a_2 > \cos b_2$:

$$n = \frac{\sin a_2 + \sin b_2}{2}, \quad C = \left(\frac{\cos a_2}{n}\right)^2 + \frac{2 \sin a_2}{n} \quad (39)$$

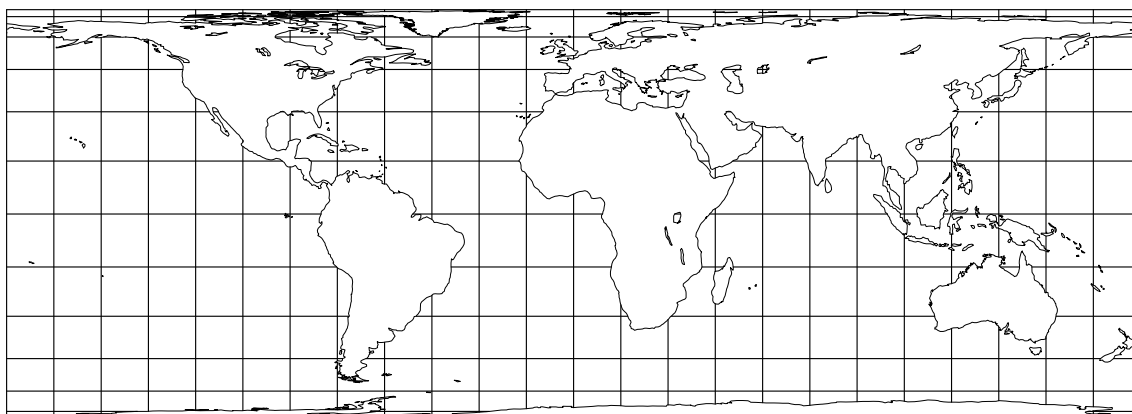


$$a_2 = 50^\circ\text{N}, b_2 = 90^\circ\text{N}$$

Flächentreuer Zylinderentwurf mit zwei längentreuen Breitenkreisen

Sonderfall von (37), wobei $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Die beiden Breitenkreise sind gegeben durch $\pm a_2$ mit $0 < a_2 < \frac{\pi}{2}$:

$$n = \cos a_2, \quad C = 0 \quad (40)$$



$$a_2 = 20^\circ\text{N}$$

Perspektiver Entwurf (azimutal)

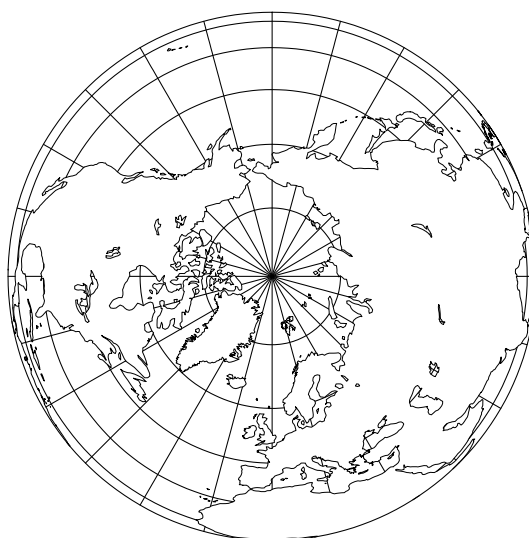
Sonderfall von (6). Projektionszentrum $(0, 0, z)$, Bildebene $x_3 = p$. Die Abbildung ist regulär für $u_2 \neq \arcsin(z^{-1})$ und definiert für $u_2 \neq \arcsin z$:

$$\rho(u_2) = \left| \frac{(z - p) \cos u_2}{z - \sin u_2} \right| \quad (41)$$

Orthographische Projektion (azimutal)

Sonderfall von (6) und Grenzfall von (41). Projektion in Richtung der x_3 -Achse, Bildebene $x_3 = p$. Die Abbildung ist regulär für $u_2 \neq 0$:

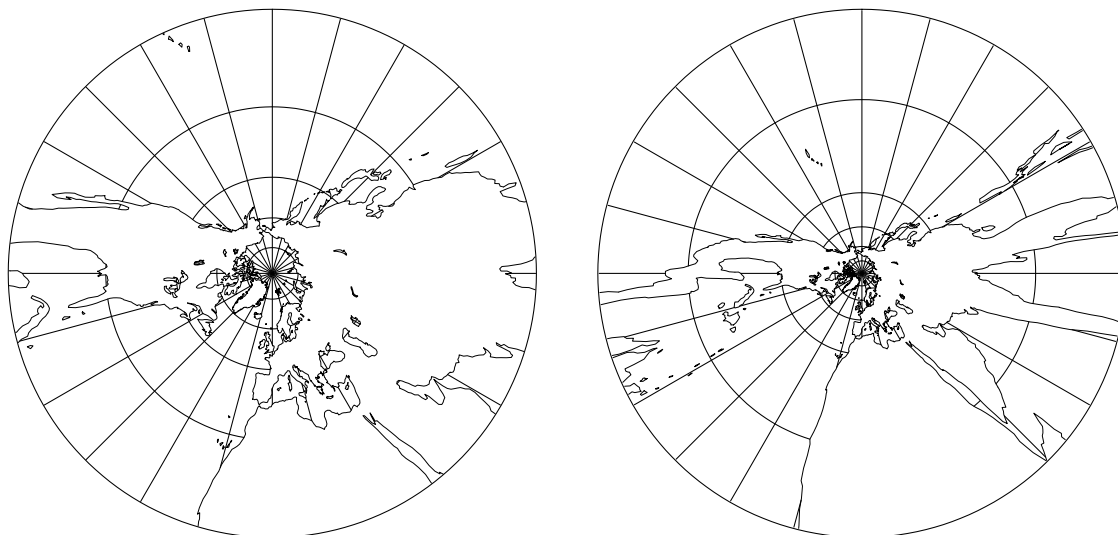
$$\rho(u_2) = \cos u_2 \quad (42)$$



Gnomonische Projektion auf die Tangentialebene im Nordpol (azimutal)

Sonderfall von (41), wobei $z = 0$ und $p = 1$. Die Abbildung ist nicht definiert für $u_2 = 0$:

$$\rho(u_2) = \cot u_2 \quad (43)$$



Entwurf von Bonne (allgemein)

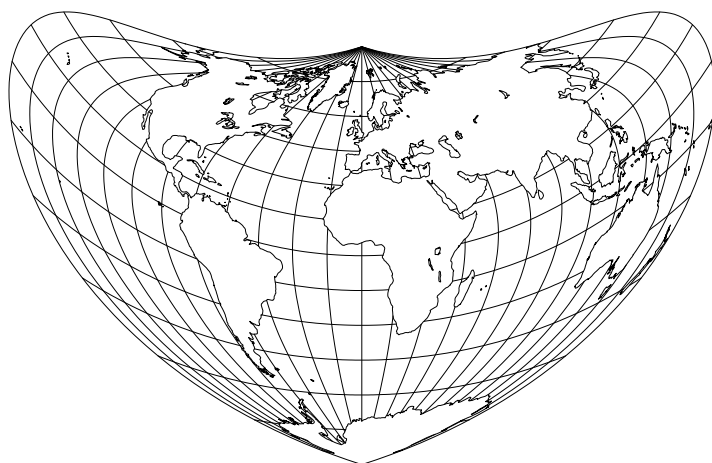
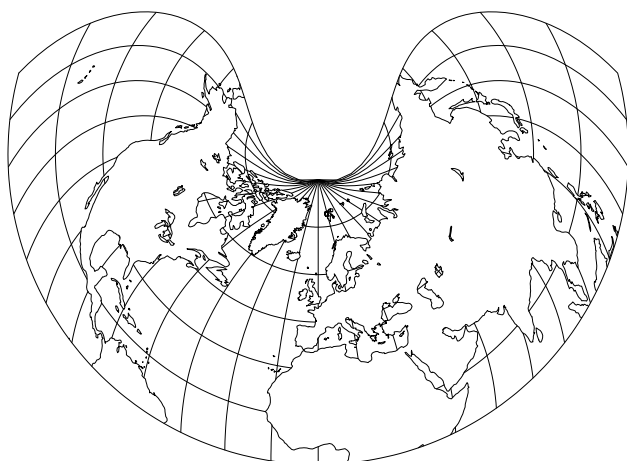
Es sei $C \geq \frac{\pi}{2}$ eine Konstante:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{\cos u_2}{C - u_2} u_1 \\ \bar{u}_2 &= C - u_2 \end{aligned} \quad (44)$$

Unechter Kegelentwurf von Bonne

Sonderfall von (44). Der isometrische Breitenkreis ist durch $0 < a_2 < \frac{\pi}{2}$ gegeben.

$$C = \cot a_2 + a_2 \quad (45)$$



$a_2 = 20^\circ\text{N}$

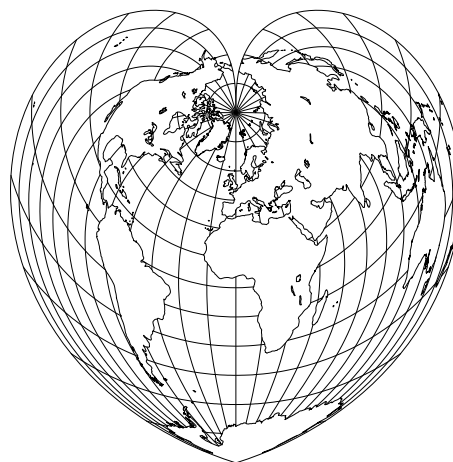
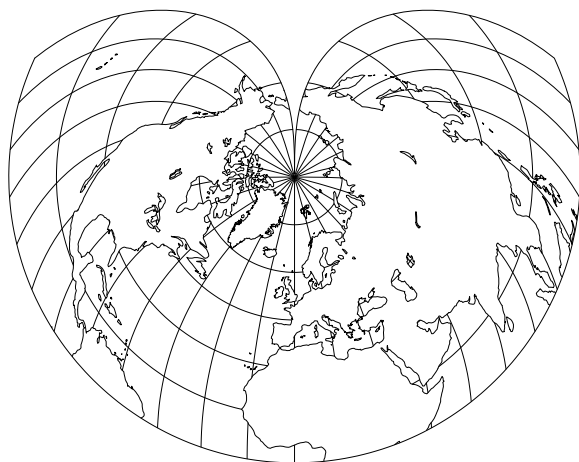


$a_2 = 70^\circ\text{N}$

Entwurf von Stab-Werner

Sonderfall von (44). Dieser unechte Azimutalenwurf entsteht aus (45) für $a_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$:

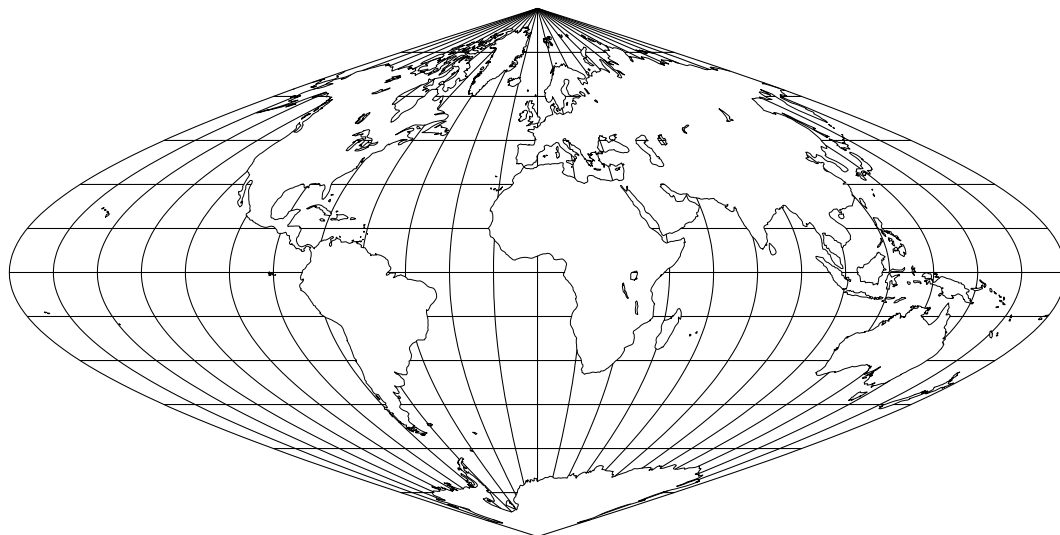
$$C = \frac{\pi}{2} \tag{46}$$



Unechter Zylinderentwurf von Sanson

Der Äquator ist isometrischer Breitenkreis:

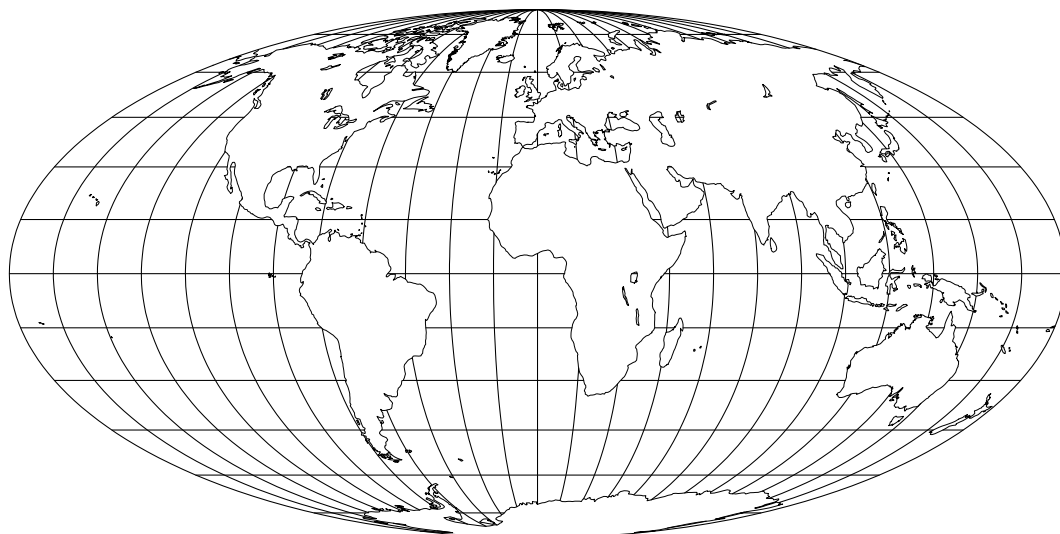
$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= u_1 \cos u_2 \\ \bar{x}_2 &= u_2\end{aligned}\tag{47}$$



Entwurf von Mollweide

Die Funktion $t : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) : u_2 \mapsto t(u_2)$ erfüllt die Keplersche Funktionalgleichung $\pi \sin u_2 = \sin(2t(u_2)) + 2t(u_2)$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} u_1 \cos t(u_2) \\ \bar{x}_2 &= \sqrt{2} \sin t(u_2)\end{aligned}\tag{48}$$



Entwurf V von Eckert

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi + 2}} u_1 (1 + \cos u_2) \\ \bar{x}_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi + 2}} u_2 \end{aligned} \tag{49}$$

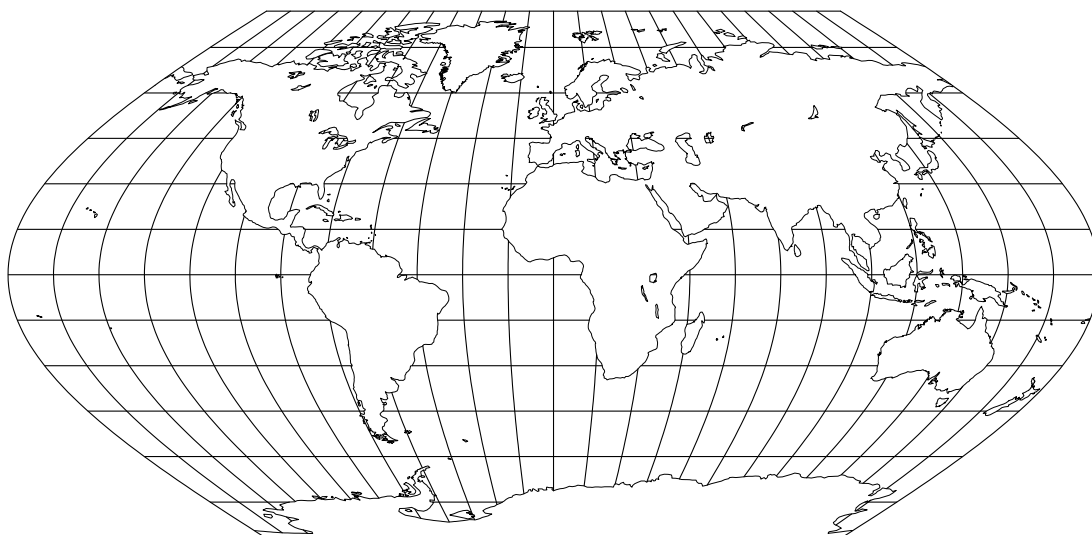
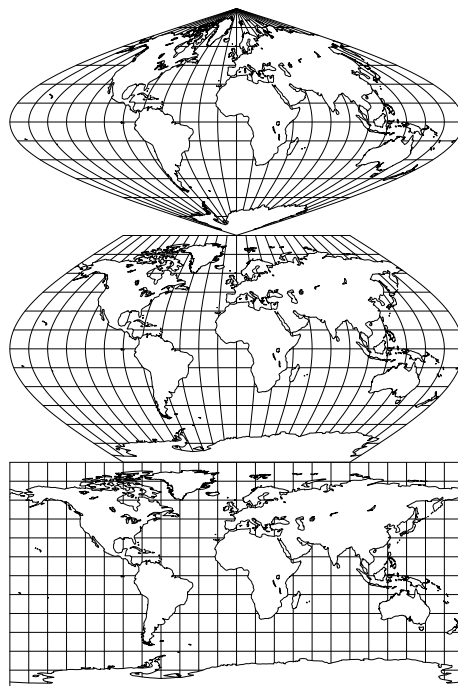


Illustration zur Mittelpunktseigenschaft: Sanson (oben) – Eckert V (mitte) – abstandstreuer Zylinderentwurf (unten). Dabei wird der Entwurf von Eckert nicht im richtigen Maßstab wiedergegeben.



Allgemeine Lage der Entwurfsachse – Neue Orthonormalbasis

Sei $n = (n_1, n_2, n_3)$ ein Punkt der Einheitskugel, aber weder der Nordpol noch der Südpol. Mit

$$\nu := \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \neq 0$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}\tilde{e}_{(1)} &= \left(\frac{-n_2}{\nu}, \frac{n_1}{\nu}, 0 \right) \\ \tilde{e}_{(2)} &= \left(\frac{-n_1 n_3}{\nu}, \frac{-n_2 n_3}{\nu}, \nu \right) \\ \tilde{e}_{(3)} &= (n_1, n_2, n_3)\end{aligned}\tag{50}$$

Berechnung der Netzlänge und Netzbreite

Hat ein Punkt der Einheitskugel bezüglich der Basis aus (50) die kartesischen Koordinaten $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$, so können mit Hilfe der Arcusfunktionen

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad \arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

seine Netzlänge und Netzbreite folgendermaßen berechnet werden:

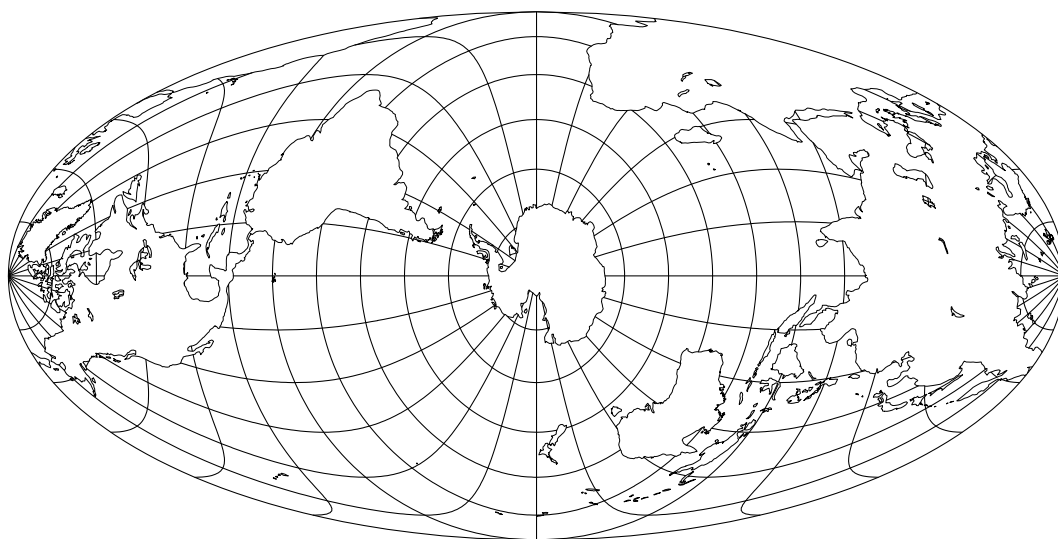
$$\begin{aligned}\tilde{p}_1 > 0 & : \tilde{u}_1 = \arctan \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_1} & \in & \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \tilde{p}_1 = 0, \tilde{p}_2 \neq 0 & : \tilde{u}_1 = (\operatorname{sgn} \tilde{p}_2) \frac{\pi}{2} & \in & \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\} \\ \tilde{p}_1 < 0, \tilde{p}_2 > 0 & : \tilde{u}_1 = \pi + \arctan \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_1} & \in & \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \tilde{p}_1 < 0, \tilde{p}_2 < 0 & : \tilde{u}_1 = -\pi + \arctan \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_1} & \in & \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \\ & \tilde{u}_2 = \arcsin \tilde{p}_3 & \in & \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}\tag{51}$$

Zur praktischen Berechnung von \tilde{u}_1 nahe der Ebene $\tilde{x}_2 = 0$ wird besser $\arctan \frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_2} = \operatorname{arccot} \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_1}$ herangezogen.

**Abstandstreuer Kegellentwurf mit einem Berührparallelkreis (transversal)
Stereographische Projektion (transversal)**

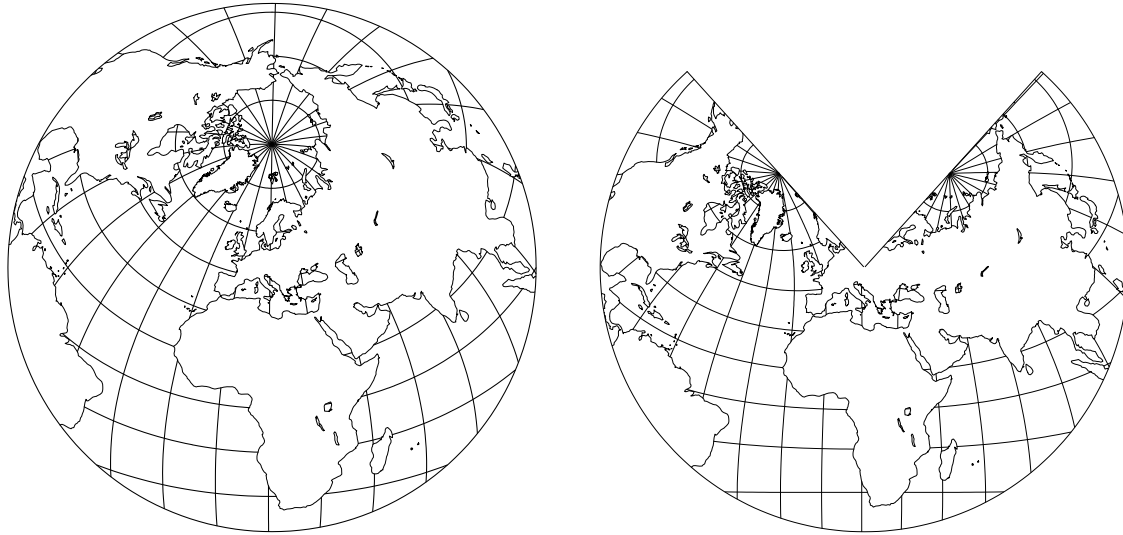


Entwurf von Mollweide (transversal)



Abstandstreuer Azimutalentwurf

Konformer Kegellentwurf mit Berührungskreis (Wien 16°E, 48°N)



Entwurf von Sanson (Wien 16°E, 48°N)

