Einbettung projektiver Desargues-Räume

Von HANS HAVLICEK in Wien

1. Einleitung

Zu jedem projektiven Desargues-Raum $\Pi = (\mathfrak{P},\mathfrak{G})$ gibt es bekanntlich einen projektiven Raum $\tilde{\Pi} = (\tilde{\mathfrak{P}},\tilde{\mathfrak{G}})$ so, daß Π zu einer Hyperebene von $\tilde{\Pi}$ isomorph ist. (Wir verwenden hier die Bezeichnungen aus [3].)

Geometrische, von Hilfsmitteln der linearen Algebra unabhängige Beweise dieses Einbettungssatzes oder des gleichwertigen Satzes über affine Desargues-Räume finden wir bei HESSENBERG-DILLER [10; S.141], BAER [1;S.268] , FRITSCH [5,6,7], HERZER [9]. Allen angegebenen Beweisen liegen Ideen aus der Theorie der linearen Abbildungen [2], [8], [11] zugrunde: Einerseits kann man durch Kopplung mehrerer linearer Abbildungen $\tilde{\psi}_i$ $(i=1,\ldots,s)$ eine Teilmenge der Punktmenge $\tilde{\mathfrak{P}}$ eines projektiven Raumes $\tilde{\Pi} = (\tilde{\mathfrak{P}},\tilde{\mathfrak{G}})$ injektiv in die Menge der geordneten s-Tupel von Punkten einer Hyperebene $\mathfrak{P}\subset\tilde{\mathfrak{P}}$ abbilden, andererseits wird dann durch je zwei dieser Abbildungen $\tilde{\psi}_k$, $\tilde{\psi}_l$ und jeden Unterraum $\tilde{\mathfrak{P}}_1\subset\tilde{\mathfrak{P}}$, für den $\tilde{\psi}_k|\tilde{\mathfrak{P}}_1$ injektiv ist, die lineare Abbildung $(\tilde{\psi}_k|\tilde{\mathfrak{P}}_1)^{-1}\tilde{\psi}_l$ in $\mathfrak{P}$ definiert. Sie vermittelt für jeden Punkt $\tilde{X}\in\tilde{\mathfrak{P}}_1$ die Zuordnung $\tilde{X}\tilde{\psi}_k \mapsto \tilde{X}\tilde{\psi}_l$. Durch diese linearen Abbildungen können jene s-Tupel in $\mathfrak{P}$ gekennzeichnet werden, die von Punkten aus $\tilde{\mathfrak{P}}_1$ stammen.

Wir werden im folgenden einen Beweis des Einbettungssatzes angeben, der diesen Zusammenhang von Unterräumen und linearen Abbildungen verwendet, was dem Bestreben entgegenkommt, in der synthetischen projektiven Geometrie nicht Punktkonfigurationen zu betrachten, sondern mit Abbildungen zu rechnen.

2. Bezeichnungen und Motivation

Ist $\Pi = (\mathfrak{P},\mathfrak{G})$ ein projektiver Desargues-Raum, Z ein Punkt und ω eine Hyperebene von Π, so ist die Gruppe PGL(Z,ω) aller perspektiven Kollineationen mit Zentrum Z und Achse ω linear transitiv; zu Punkten P_i $(i=1,2)$ mit $P_i\notin \{Z\}\cup\omega$ und P_1, P_2, Z kollinear gibt es genau eine Kollineation $\varkappa\in$ PGL(Z,ω), welche $P_1\varkappa = P_2$ leistet. Ferner werden durch das Paar (Z,ω) lineare Abbildungen (im Sinne von [8]) festgelegt: Gilt $Z\notin\omega$, so existiert genau eine Projektion π_1 mit der Ausnahmemenge $\{Z\}$ und der Bildmenge ω bzw. genau eine Projektion π_2 mit der Ausnahmemenge ω und der Bildmenge $\{Z\}$. Für $Z\in\omega$ gibt es genau eine lineare Abbildung π mit der Ausnahmemenge ω und der Bildmenge $\{Z\}$, es gilt also $X\pi = Z$ für alle $X\in\mathfrak{P}\setminus\omega$. Wir setzen $PL(Z,\omega) := PGL(Z,\omega)\cup\{\pi_1,\pi_2\}$ für $Z\notin\omega$ und $PL(Z,\omega) := PGL(Z,\omega)\cup\{\pi\}$ für $Z\in\omega$. Dann ist $PL(Z,\omega)$ eine Menge, deren Elemente wir als perspektive Abbildungen mit Zentrum Z und Achse ω bezeichnen.

Sind Z, P_1, P_2 drei kollineare Punkte mit $P_1\notin\{Z\}\cup\omega$, so gibt es genau eine perspektive Abbildung $\sigma\in PL(Z,\omega)$ mit $P_1\sigma = P_2$.

Zeichnen wir in einem mindestens dreidimensionalen projektiven Raum $\tilde\Pi = (\tilde{\mathfrak{P}},\tilde{\mathfrak{G}})$ eine Hyperebene $\tilde\xi_1\subset\tilde{\mathfrak{P}}$ aus, so wird durch jeden Punkt $\tilde X\notin\tilde\xi_1$ genau eine Projektion $\tilde\pi_{\tilde X}:\tilde{\mathfrak{P}}\to\tilde\xi_1$ mit der Ausnahmemenge $\{\tilde X\}$ festgelegt; jedem Punkt $\tilde X\in\tilde\xi_1$ ordnen wir die perspektive Abbildung $\tilde\pi_{\tilde X}:\tilde{\mathfrak{P}}\to\tilde\xi_1$ mit der Ausnahmemenge $\tilde\xi_1$ und der Bildmenge $\{\tilde X\}$ zu. Ferner sei $\tilde\xi_2\neq\tilde\xi_1$ eine weitere Hyperebene von $\tilde\Pi$ und $\tilde O$ ein Punkt, der beiden Hyperebenen nicht angehört. Wir bezeichnen den durch $\tilde\xi_2 =: \mathfrak{P}$ festgelegten projektiven Raum mit Π. Für alle Punkte $\tilde X\in\tilde{\mathfrak{P}}$ ist die Abbildung

$$\sigma_{\tilde X} := (\tilde\pi_{\tilde X}\,|\,\tilde\xi_2)(\tilde\pi_{\tilde O}\,|\,\tilde\xi_2)^{-1} : \mathfrak{P}\to\mathfrak{P}$$

eine perspektive Abbildung[1] in Π mit der Achse $\tilde\xi_1\cap\tilde\xi_2 =: \omega$. Die Zuordnung $\tilde X\mapsto\sigma_{\tilde X}$ ist übrigens eine Bijektion von $\tilde{\mathfrak{P}}$ auf die Menge $PL(\omega)$ aller perspektiven Abbildungen[2] in Π mit Achse ω. Die Umkehrung dieser Bijektion motiviert die Überlegungen von Abschnitt 3.

3. Beweis des Einbettungssatzes

Gegeben sei ein projektiver Desargues-Raum $\Pi = (\mathfrak{P},\mathfrak{G})$. Wir wählen eine Hyperebene $\omega\subset\mathfrak{P}$ fest aus und bezeichnen mit $PL(\omega)$ die Menge aller perspektiven Abbildungen mit Achse ω. Ist $z\subset\mathfrak{P}$ eine Gerade, so definieren wir $PL(z,\omega)$ als Menge aller perspektiven Abbildungen mit Achse ω, deren Zentrum Z auf z liegt. Eine Teilmenge $\Sigma\subset PL(z,\omega)$ heißt ein Büschel perspektiver Abbildungen, falls ein Punkt $P\notin z\cup\omega$ so existiert, daß $P\Sigma := \{X\in\mathfrak{P}\,|\,X=P\sigma,\ \sigma\in\Sigma\}$ eine

---

[1] Durch $\tilde\xi_i$ (i=1,2) und $\tilde\pi_{\tilde O}$ sind zwei lineare Abbildungen aus dem zu $\tilde\Pi$ dualen projektiven Raum auf den zu Π dualen projektiven Raum festgelegt [2]; eine Hyperebene $\tilde\xi$ durch einen Punkt $\tilde X\notin\tilde\xi_2$ ist dadurch gekennzeichnet, daß die oben erklärte Abbildung $\sigma_{\tilde X}$ die Hyperebene $(\tilde\xi\cap\tilde\xi_2)$ von Π auf die Hyperebene $(\tilde\xi\cap\tilde\xi_1)(\tilde\pi_{\tilde O}\,|\,\tilde\xi_2)^{-1}$ von Π abbildet. Damit ordnet sich die besprochene Konstruktion den in 1 genannten Ideen unter.

[2] Im projektiv abgeschlossenen Anschauungsraum $\tilde\Pi$ erhalten wir mit $\tilde\xi_1$ als Fernebene die in [11,S.7] beschriebene Abbildung der Punktmenge $\tilde{\mathfrak{P}}$ auf die Menge der zentrischen Ähnlichkeiten und Translationen in Π sowie deren Ausartungen.

Gerade ist. Insbesondere ist $PL(Z,\omega)$ für jeden Punkt Z ein Büschel perspektiver Abbildungen, da $PGL(Z,\omega)$ in einem projektiven Desargues-Raum linear transitiv ist.

Setzen wir $\tilde{\mathfrak{P}} := PL(\omega)$, und ist $\tilde{\mathfrak{G}}$ die Menge aller Büschel von $PL(\omega)$, so gilt

Satz 1. Das Paar $\tilde{\Pi}_\omega := (\tilde{\mathfrak{P}},\tilde{\mathfrak{G}})$ ist ein projektiver Raum.[3]

Beweis. Wir zeigen die Gültigkeit der in [3] angegebenen Axiome eines projektiven Raumes.

(1) Das Reichhaltigkeitsaxiom (PR3) ist erfüllt, da jedes Büschel perspektiver Abbildungen aus $PL(\omega)$ gleichmächtig einer Geraden von Π ist.

(2) Sind $\sigma_1 \in PL(Z_1,\omega)$ und $\sigma_2 \in PL(Z_2,\omega)$ verschiedene perspektive Abbildungen, so fordert das Axiom (PR1) die Existenz genau eines Büschels Σ mit $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$.

Für $Z_1 = Z_2$ enthält das Büschel $PL(Z_1,\omega)$ sowohl σ_1 als auch σ_2. Ist $\Sigma' \subset PL(z',\omega)$ ein weiteres Büschel mit $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma'$, gilt also $P'\Sigma' \in \mathfrak{G}$ für einen Punkt $P' \notin z' \cup \omega$, so folgt $P'\Sigma' = P'\sigma_1\, P'\sigma_2 = P'Z_1$ und daher $\Sigma' = PL(Z_1,\omega) = \Sigma$. Da jeder Punkt als Zentrum der Identität $id_{\mathfrak{P}}$ aufgefaßt werden kann, folgt ferner mit (1), daß genau die Büschel der Bauart $PL(Z,\omega)$ die Identität enthalten.

Für $Z_1 \neq Z_2$ und $\sigma_i \neq id_{\mathfrak{P}}$ setzen wir $z := Z_1 Z_2$. Es gibt einen Punkt $P \notin z \cup \omega$ und in der Ebene $\{P\} \vee z$ die Gerade $p := P\sigma_1\, P\sigma_2$. Wir definieren das Büschel $\Sigma := \{\sigma \in PL(z,\omega) \mid P\sigma \in p\}$ perspektiver Abbildungen; es gilt $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$. Ist $\Sigma' \subset PL(z',\omega)$ mit $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma'$ ein weiteres Büschel, gilt also $P'\Sigma' =: p' \in \mathfrak{G}$ für einen Punkt $P' \notin z' \cup \omega$, so folgt $Z_1, Z_2 \in z'$, also $z' = z$.

Enthält Σ' keine Kollineationen, so gilt $p' = z$ oder $p' \subset \omega$, und für alle Punkte $X \notin z \cup \omega$ ist daher $X\Sigma' = z$ oder $X\Sigma' \subset \omega$ eine Gerade. Damit gilt $P\Sigma' = P\sigma_1 P\sigma_2 = P\Sigma$, also $\Sigma' = \Sigma$.

Existiert eine Kollineation $\sigma' \in PGL(Z',\omega) \cap \Sigma'$, so ist $\Sigma'\sigma'^{-1} \subset PL(\omega)$ ein die Identität enthaltendes Büschel perspektiver Abbildungen, also $\Sigma'\sigma'^{-1} = PL(Z,\omega)$. Wegen $Z\Sigma'\sigma'^{-1} = \{Z\}$ und $P\sigma_1\sigma'^{-1} \neq P\sigma_2\sigma'^{-1}$, gilt $P \neq Z$. Wir erhalten $P\Sigma' = P\Sigma'\sigma'^{-1}\sigma' = (PZ)\sigma' \in \mathfrak{G}$. Wie oben ergibt das $\Sigma' = \Sigma$.

(3) Zum Beweis des Planaritätsaxioms (PR2) betrachten wir drei Abbildungen $\sigma_i \in PL(Z_i,\omega)$ $(i=1,2,3)$, die keinem Büschel angehören. Entweder ist $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ ein Dreieck, oder es gibt genau eine Gerade z mit $Z_i \in z$ und einen Punkt $P \notin z \cup \omega$ so, daß $\{P\sigma_1, P\sigma_2, P\sigma_3\}$

---

[3] $\tilde{\Pi}_\omega$ ist mit der Abbildungsmuliplikation ein kinematischer Streck-Translationsraum [4].

ein Dreieck bilden. Bezeichnen wir das durch σ_j und σ_k $(j\neq k)$ aufgespannte Büschel mit Σ_{jk}, gilt $\alpha\in\Sigma_{12}$, $\beta\in\Sigma_{23}$ und $\alpha, \beta \neq \sigma_i$ $(i=1,2,3)$, so können wir α bzw. β durch das Zentrum Z_α bzw. Z_β von α bzw. β oder durch den Punkt $P\alpha$ bzw. $P\beta$ eindeutig festlegen, je nachdem $\{Z_i \mid i=1,2,3\}$ oder $\{P\sigma_i \mid i=1,2,3\}$ ein Dreieck bilden. Nach dem Planaritätsaxiom projektiver Räume , angewendet auf das Dreieck $\{Z_i \mid i=1,2,3\}$ und die Gerade $Z_\alpha Z_\beta$ bzw. das Dreieck $\{P\sigma_i \mid i=1,2,3\}$ und die Gerade $P\alpha P\beta$ erhalten wir den Schnittpunkt $Z_1 Z_3 \cap Z_\alpha Z_\beta$ bzw. $P\sigma_1 P\sigma_3 \cap P\alpha P\beta$, der als Zentrum bzw. Bildpunkt von P genau eine perspektive Abbildung $\gamma\in\Sigma_{13}$ festlegt. Der Punkt $P\gamma$ bzw. das Zentrum Z_γ von γ gehört dann auch der Geraden $P\alpha P\beta$ bzw. $Z_\alpha Z_\beta$ an; das ist nur dann nicht trivial, wenn sowohl $\{Z_i \mid i=1,2,3\}$ als auch $\{P\sigma_i \mid i=1,2,3\}$ Dreiecke sind. Diese Dreiecke sind P-perspektiv, es gibt also eine perspektive Kollineation mit Zentrum P, die $Z_i \mapsto P\sigma_i$, $Z_\alpha \mapsto P\alpha$, $Z_\beta \mapsto P\beta$, also auch $Z_\gamma \mapsto P\gamma$ leistet. Daher gehört γ auch dem von α und β aufgespannten Büschel an.□

Die gewünschte Einbettung von Π in $\tilde{\Pi}_\omega$ liefert

Satz 2. Die Menge $\Omega\subset\tilde{\mathfrak{P}}$ aller perspektiven Abbildungen mit Achse ω und einelementiger Bildmenge ist eine Hyperebene von $\tilde{\Pi}_\omega$, und der durch Ω festgelegte projektive Raum $\tilde{\Pi}_\omega(\Omega)$ ist isomorph zu Π.

Beweis. Jedes Büschel $\Sigma\subset PL(z,\omega)$ leistet für einen Punkt $P\notin z\vee\omega$ daß $P\Sigma = p$ eine Gerade der Ebene $\{P\}\vee z$ ist; daher gibt jeder Punkt von $p\cap z \neq \emptyset$ das Zentrum einer Abbildung aus Ω ab, und genau für $p = z$ gilt $\Sigma\subset\Omega$. Die Menge Ω enthält also mit je zwei verschiedenen perspektiven Abbildungen auch das von diesen aufgespannte Büschel und hat mit jedem Büschel nichtleeren Durchschnitt. Ein zu Ω komplementärer Unterraum ist daher notwendig einpunktig, also Ω eine Hyperebene.

Die Bijektion $\iota : \mathfrak{P}\to\Omega$ mit $Z\mapsto\sigma$ und $\{\sigma\} := PL(Z,\omega)\cap\Omega$ ist eine Kollineation von Π auf $\tilde{\Pi}_\omega(\Omega)$, da die Geraden von Π genau auf die Büschel von $\tilde{\Pi}_\omega(\Omega)$ abgebildet werden.□

Literatur

[1] BAER, R., Linear Algebra and Projective Geometry, Academic Press, New York, 1952.

[2] BRAUNER, H., Eine geometrische Kennzeichnung linearer Abbildungen, Mh. Math. 77 (1973), 10 - 20.

[3] BRAUNER, H., Geometrie projektiver Räume I, II, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1976.

[4] BRÖCKER, L., Kinematische Räume, Geom.Dedicata 1 (1973), 241-278.

[5] FRITSCH, R., Synthetische Einbettung Desarguesscher Ebenen in Räume, Math.Phys.Sem.Ber. 21 (1974), 237 - 249.

[6] FRITSCH, R., Einbettung affiner Räume, Math.Phys.Sem.Ber. 22 (1975), 146 - 157.

[7] FRITSCH, R., Mehrtafelprojektionen in der Inzidenzgeometrie, Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg 45 (1976), 61 - 67.

[8] HAVLICEK, H., Zur Theorie linearer Abbildungen I, Journal of Geometry (im Druck).

[9] HERZER, A., Neue Konstruktion einer Erweiterung von projektiven Geometrien, Geom.Dedicata 4 (1975), 199 - 213.

[10] HESSENBERG, G., DILLER, J., Grundlagen der Geometrie, 2.Auflage, W.de Gruyter, Berlin, 1967.

[11] MÜLLER, E., KRUPPA, E., Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd.1, Die linearen Abbildungen, F.Deuticke, Leipzig-Wien, 1923.