HANS HAVLICEK

ERZEUGUNG QUADRATISCHER VARIETÄTEN BEI BELIEBIGER CHARAKTERISTIK

Eine quadratische Varietät[1] M eines n-dimensionalen projektiven PAPPOS-Raumes $\Pi(V)$ über einem Vektorraum V mit Skalarkörper K kann über die Nullstellenmenge einer quadratischen Form q erklärt werden. Vgl. etwa [8,43ff], [9,16ff], [10,32ff], [17]. Es gibt stets einen (nicht eindeutig bestimmten) Tensor $f: V \times V \to K$ aus dem 2-Tensorraum T_2V, der q beschreibt, d.h. $xq=(x,x)f$ $(x \in V)$ leistet. Daraus resultiert die korrelative Erzeugung einer quadratischen Varietät als Menge der selbstkonjugierten Punkte der durch f in $\Pi(V)$ induzierten projektiven korrelativen Abbildung. (In der älteren Literatur über reelle und komplexe quadratische Varietäten wird bei einer korrelativen Erzeugung verlangt, daß sie als Bündelkorrelation aufgefaßt werden kann, was genau dann der Fall ist, wenn f und der adjungierte Tensor f_{ad} mit $(x,y)f_{ad}=(y,x)f$ $(x,y \in V)$ verschiedene nichttriviale Radikale besitzen. Vgl.[16,377] für einen historischen Überblick, ferner [2,153], [7], [18], [20,37ff], [22,452ff], [23], [24], [25,204ff], [26]. In [6] wird der Begriff "korrelative Erzeugung" noch enger gefaßt).

In der vorliegenden Note werden quadratische Varietäten eines n-dimensionalen projektiven Pappos-Raumes Π bei beliebiger Charakteristik des Algebraisierungskörpers ohne Hilfsmittel der linearen Algebra "direkt" über ihre korrelativen Erzeugungen definiert. Die auf STAUDT zurückgehende Definition einer quadratischen Varietät als Menge der selbstkonjugierten Punkte einer projektiven polaren Abbildung beruht darauf, eine quadratische Form durch einen symmetrischen 2-Tensor zu beschreiben, was nur bei Charakteristik $\neq 2$ stets möglich ist. Bei Charakteristik 2 können nur die quasilinearen quadratischen Formen so erhalten werden [9,39].

Die geometrischen Eigenschaften einer quadratischen Varietät spiegeln sich in einer beliebigen korrelativen Erzeugung nur recht mangelhaft wider. Wir suchen daher zunächst notwendige Bedingungen dafür, daß zwei Erzeugungen dieselbe quadratische Varietät liefern. Damit kann die Existenz von Erzeugungen abgeleitet werden, deren Ausnahmemenge ein maximaler Erzeugendenraum der Varietät ist. Diese ausgezeichneten Erzeugungen sind von besonderem Interesse, da sie einfache Beweise der grundlegenden Sätze über Erzeugendenräume und

[1] Es ist auch die Bezeichnung (Hyper-)Quadrik üblich. Wir verwenden den Begriff Quadrik nur für quadratische Varietäten mit leerem Spitzenraum.

Tangentialhyperebenen quadratischer Varietäten gestatten. Fallunterscheidungen hinsichtlich der Charakteristik werden erst notwendig, wenn die gegenseitige Lage von Tangentialhyperebenen und das Polarsystem behandelt werden.

Da bei Charakteristik 2 ein Punkt, der allen Tangentialhyperebenen einer quadratischen Varietät M angehört, nicht in M liegen muß, können gewisse quadratische Varietäten mittels einer Projektion injektiv auf einen echten Unterraum von Π abgebildet werden. Bei nicht perfektem Algebraisierungskörper K_{al} ergeben sich Querverbindungen zu jener MÖBIUS-Geometrie in der projektiven Geraden über K_{al}, deren Ketten durch den Unterkörper der Quadrate von K_{al} festgelegt werden.

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich H.BRAUNER.

1.LINEARE, KORRELATIVE UND DUALE ABBILDUNGEN

1.1 Wir gehen von projektiven Räumen[2] $\Pi=(\mathcal{P},\mathcal{G})$, $\Pi'=(\mathcal{P}',\mathcal{G}')$ und einer nicht notwendig surjektiven linearen Abbildung $\psi:\mathcal{P}\to\mathcal{P}'$ mit Definitionsmenge $D(\psi)$ und Ausnahmemenge $A(\psi)=\mathcal{P}\setminus D(\psi)$ aus [11]. Für jede Hyperebene $\mathcal{H}'\subset\mathcal{P}'$ ist ihr erweitertes Urbild $\mathcal{H}'\psi_0^{-1}:=A(\psi)\cup\{X\in D(\psi)\,|\,X\psi\in\mathcal{H}'\}$ entweder eine Hyperebene $\mathcal{H}\subset\mathcal{P}$ oder $\mathcal{P}$, je nachdem die Bildmenge von ψ einen bzw. keinen Punkt enthält, der nicht in $\mathcal{H}'$ liegt. Damit kann für die zu Π' bzw. Π dualen projektiven Räume $\Pi'^*=(\mathcal{P}'^*,\mathcal{G}'^*)$ bzw. $\Pi^*=(\mathcal{P}^*,\mathcal{G}^*)$ die zu ψ transponierte Abbildung $\psi^T:\mathcal{P}'^*\to\mathcal{P}^*$ erklärt werden: Faßt man $\mathcal{H}'$ als Punkt $X'^*\in\mathcal{P}'^*$ auf, so wird X'^* unter ψ^T für $\mathcal{H}'\psi_0^{-1}=\mathcal{P}$ kein Bildpunkt und für $\mathcal{H}'\psi_0^{-1}=\mathcal{H}\neq\mathcal{P}$ der durch die Hyperebene $\mathcal{H}$ beschriebene Punkt $X\in\mathcal{P}$ zugewiesen. Diese Abbildung ψ^T ist linear; für eine bijektive Abbildung ψ, also eine Kollineation, ist ψ^T die zur dualen Kollineation inverse Abbildung.

Da die ψ-Bildmenge jedes Unterraumes $\mathcal{U}\subset\mathcal{P}$ ein Unterraum von Π' ist, wird durch ψ eine (unpräzise ebenfalls mit ψ bezeichnete) globale Abbildung des Verbandes $u\Pi$ aller Unterräume von Π in den Verband $u\Pi'$ aller Unterräume von Π' mitbestimmt, welche mit der Operation des Verbindens ($\vee$) verträglich ist.

Bei einem endlichdimensionalen Raum Π und $\Pi'=\Pi^*$ heißt ψ eine korrelative Abbildung. Da die Annulatorabbildung $\lambda:u\Pi\to u\Pi^*$ ein Verbandsantiisomorphismus ist, ergibt $\hat{\psi}:=\psi\lambda^{-1}$ einen Halbgruppenhomomorphismus von $(u\Pi,\vee)$ in $(u\Pi,\wedge)$. Wir nennen $\hat{\psi}$ eine duale Abbildung. Identifizieren wir Π mit seinem Bidualraum, so ist ψ^T eine Abbildung $\mathcal{P}\to\mathcal{P}^*$ und für $\psi=\psi^T$

[2] Bezeichnungen und Begriffe sind weitestgehend [4] und [5] entnommen.

heißt ψ eine polare Abbildung[3]. Im Falle einer korrelativen Bijektion ψ, verwenden wir die üblichen Bezeichnungen Korrelation bzw. Dualität bzw. Polarität.

1.2. Eine lineare Abbildung ψ heißt projektiv, falls entweder ihre Bildmenge leer oder einpunktig ist, oder falls die Einschränkung von ψ auf mindestens eine Gerade eine Projektivität ist. Die Einschränkung einer projektiven linearen Abbildung ψ auf eine Gerade g ist genau dann eine Projektivität, wenn $g\psi$ zwei verschiedene Elemente enthält.

Sei im folgenden Π ein n-dimensionaler projektiver Pappos-Raum ($1\leq n<\infty$). (Ein eindimensionaler projektiver Raum heißt ein Pappos-Raum, wenn er Unterraum eines höherdimensionalen projektiven Pappos-Raumes ist). Sind P_1, P_2 nichtleere windschiefe Unterräume von Π und $\psi_1:P_1\to P', \psi_2:P_2\to P'$ projektive lineare Abbildungen in einen Unterraum P' von Π oder Π^*, so existiert stets eine projektive lineare Abbildung $\psi:P_1\vee P_2\to P'$, die ψ_1 und ψ_2 fortsetzt: Die Festlegung der gesuchten Fortsetzung ψ ist im Beweis zu Satz 1.6 in [11] enthalten, wobei die dort ausgeschlossenen (und jetzt zulässigen) Angaben sich in gleicher Weise behandeln lassen; jede Projektivität kann nämlich zu einer projektiven linearen Abbildung mit nicht kollinearen Bildpunkten erweitert werden, und jede Projektivität ist durch Tripel zugeordneter Punkte festgelegt.

1.3. Der n-dimensionale projektive Pappos-Raum Π kann in einen (2n+1)-dimensionalen projektiven Raum $\Pi''=(P'',G'')$ eingebettet werden. Vgl. etwa [12]. Setzen wir $S_1:=P$ und ist S_2 ein zu S_1 in Π'' komplementärer, also auch n-dimensionaler Unterraum, ferner ψ_1 die Identität in S_1 und $\psi_2:S_2\to S_1$ eine projektive Kollineation, so folgt aus 1.2 die Existenz einer linearen Abbildung[4] $\psi:P''\to S_1$, die ψ_1 und ψ_2 fortsetzt. Als idempotente lineare Abbildung ist ψ eine Projektion. Die Punktmenge

$$(1.1)\quad S=\{X\,|\,X\in\{Y\}\vee\{Y\psi_2\},\quad Y\in S_2\}$$

ist eine (1,n)-SEGRE-Varietät, deren erste Schar S^{I} von Erzeugendenräumen die Geraden $\{Y\}\vee\{Y\psi_2\}$ in (1.1) sind. Die zweite Schar S^{II} enthält neben S_1 und S_2 noch jene Unterräume, die aus dem Zentrum $A(\psi)$ der Projektion ψ unter jenen projektiven Kollineationen von Π'' hervorgehen, die S_1 und S_2 punktweise festlassen. Für je zwei Erzeugendenräume $S_j, S_k\in S^{II}$ definieren die Schnittpunkte mit den Geraden aus S^{I} eine projektive Kollineation $\sigma_{jk}:S_j\to S_k$.

[3] In $\Pi=\Pi(V)$ werden ψ und ψ^{T} durch adjungierte 2-Tensoren f, f_{ad} induziert. Die Abbildung $f\mapsto f_{ad}$ ist eine Involution aus $GL(T_2V)$ und daher $\psi\mapsto\psi^{T}$ eine involutorische projektive Kollineation des in Fußnote 5 erwähnten projektiven Raumes.

[4] Solange transponierte Abbildungen nicht betrachtet werden, kann jeder Unterraum, der die Bildmenge einer linearen Abbildung umfaßt, als Zielmenge gewählt werden.

Vgl.[6,133], [13] und die in [19] betrachteten "Reguli".

Ist $\beta: P'' \to P$ eine projektive lineare Abbildung, deren Ausnahmemenge $A(\beta)$ nicht alle Geraden von S^{I} trifft ($A(\beta) \notin S^{II}$), so heißt die Menge

(1.2) $\Gamma = \{\sigma_{1i}(\beta | S_i) \mid S_i \in S^{II}\}$

ein Büschel projektiver linearer Abbildungen. Zwei verschiedene nichtleere projektive lineare Abbildungen $\gamma_1: P \to P$, $\gamma_2: P \to P$ gehören stets einem Büschel an, da die Abbildungen γ_1 und $\sigma_{21}\gamma_2$ nach 1.2 eine projektive lineare Fortsetzung $\beta: P'' \to P$ besitzen, deren Ausnahmemenge wegen $\gamma_1 \neq \gamma_2$ nicht alle Geraden von S^{I} trifft. Für jeden Punkt $P \in P$ und jedes Büschel Γ ist $\{Q \in P \mid Q = P\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ lineares Bild einer Geraden von Π''.

Ersetzt man in (1.2) die Abbildung β durch eine projektive lineare Abbildung $\zeta: P'' \to P^*$ in den Dualraum von Π, so gelangt man zu Büschel projektiver korrelativer Abbildungen; die obigen Ergebnisse gelten analog[5]. Siehe auch [15,198ff], [21,10ff].

2. QUADRATISCHE VARIETÄTEN

2.1. Sei $\Pi = (P, G)$ ein n-dimensionaler projektiver Raum ($n = \dim \Pi < \infty$), $\Pi^* = (P^*, G^*)$ sein Dualraum und $\delta: P \to P^*$ eine korrelative Abbildung. Für jeden Punkt $X \in P$ gilt dann $\{X\}\hat{\delta} = P$ oder $\{X\}\hat{\delta} \subset P$ ist eine Hyperebene von Π. Ein Punkt $X \in P$ heißt zu einem Punkt $Y \in P$ konjugiert bezüglich δ, wenn[6] $X \in Y\hat{\delta}$ gilt. Die zu δ transponierte Abbildung δ^T leistet $X\hat{\delta}^T = \{Y \in P \mid X \in Y\hat{\delta}\}$, was $(\delta^T)^T = \delta$ und

(2.1) $X \in Y\hat{\delta} \Leftrightarrow Y \in X\hat{\delta}^T$

ergibt. In jedem Unterraum $U \subset P$ induziert δ eine korrelative Abbildung δ_U vermöge

(2.2) $X\hat{\delta}_U = X\hat{\delta} \cap U$ für alle $X \in U$.

Es gilt $A(\delta_U) = \{X \in U \mid X\hat{\delta} \supset U\}$ und ein Punkt $X \in U$ ist genau dann selbstkonjugiert bezüglich δ, wenn er bezüglich δ_U selbstkonjugiert ist. Wir nennen δ_U bzw. $\hat{\delta}_U$ die Spurabbildung von δ in U bzw. von $\hat{\delta}$ in $u\Pi(U)$.

Sind alle Punkte von P bezüglich einer korrelativen Abbildung δ selbstkonjugiert, so heißt δ eine nullpolare Abbildung und es gilt $\delta = \delta^T$: Bei einer leeren Abbildung δ ist $A(\delta) = A(\delta^T) = P$, also $\delta = \delta^T$; andernfalls gibt es zu jedem Punkt $X \in D(\delta)$ und jedem Punkt $Y \in A(\delta)$ in ihrer Verbindungsgeraden XY einen weiteren Punkt $Z \in D(\delta)$ und $X\hat{\delta} = Z\hat{\delta}$ ergibt $Y \in X\hat{\delta}$ sowie $A(\delta) \subset X\hat{\delta}$. Die Einschränkung $\hat{\delta}_1$ von $\hat{\delta}$ auf den Quotientenverband $u\Pi / A(\delta) = \{U \in u\Pi \mid A(\delta) \subset U\}$ ist daher eine Dualität. Nach [4,181] folgt $\hat{\delta}_1 = \hat{\delta}_1{}^T$, was schließlich $\delta = \delta^T$ zur Folge hat. Jede nullpolare Abbildung ist projektiv.

[5] Der Menge der nichtleeren projektiven linearen bzw. korrelativen Abbildungen $P \to P$ bzw. $P \to P^*$ wird durch die Büschel die Struktur eines projektiven Raumes aufgeprägt. Insbesondere für $\Pi = \Pi(V)$ kann dieser projektive Raum mit dem projektiven Raum über dem Vektorraum $\mathrm{Hom}(V,V)$ bzw. T_2V identifiziert werden. Vgl. [6,39].

[6] Da keine Mißverständnisse zu erwarten sind, schreiben wir statt $\{X\}$ auch X und nennen sowohl X wie auch $\{X\}$ einen Punkt.

2.2. Wir setzen Π als projektiven Pappos-Raum und $1\leq n<\infty$ voraus. Ist die Menge M der selbstkonjugierten Punkte einer projektiven korrelativen Abbildung $\delta: P\to P^*$ weder leer noch P, so heißt M eine quadratische Varietät von Π und δ eine (korrelative) Erzeugung von M. Die durch δ erzeugte quadratische Varietät wird auch mit $M(\delta)$ bezeichnet.

Ein Unterraum $E\subset P$ ist genau dann in M enthalten, wenn δ_E eine nullpolare Abbildung ist, und $E\subset M$ heißt dann ein Erzeugendenraum von M; jeder Erzeugendenraum von M liegt in einem bezüglich der Inklusion maximalen Erzeugendenraum. Ein Punkt $S\in M$ wird singulär genannt, wenn für alle Punkte $X\in M\setminus\{S\}$ die Gerade SX in M liegt. Die Menge S aller singulären Punkte von M ist mit dem Durchschnitt aller maximalen Erzeugendenräume identisch. Damit ist S ein Unterraum und wird Spitzenraum von M genannt. Ist S eine Hyperebene von Π, so folgt $S=M$. Eine quadratische Varietät mit leerem Spitzenraum heißt eine Quadrik.

Hat eine quadratische Varietät $M(\delta)$ außerhalb ihres Spitzenraumes S einen Punkt P und ist P_1 ein zu S komplementärer Unterraum, so erzeugt δ_{P_1} eine quadratische Varietät $M_1=M\cap P_1$ von $\Pi(P_1)$ wegen $\dim\Pi(P_1)\geq 1$ und $(S\vee P)\cap P_1\in M_1$. Die maximalen Erzeugendenräume von M sind genau die Verbindungsräume der maximalen Erzeugendenräume von M_1 mit S, sodaß M_1 eine Quadrik ist.

2.3. Eine quadratische Varietät $M(\delta)$ gestattet mehrere Erzeugungen[7]:

SATZ 1. Sei ν eine nichtleere nullpolare Abbildung und Δ ein Büschel projektiver korrelativer Abbildungen, das δ und ν enthält. Jede Abbildung $\delta'\in\Delta\setminus\{\nu\}$ erzeugt ebenso wie ihre transponierte Abbildung δ'^T die quadratische Varietät $M(\delta)$.

Beweis. (1) Ist $X\in M(\delta)$, so folgt aus $X\in X\hat{\delta}$ und $X\in X\hat{\nu}$ dann $X\in(X\hat{\delta}\cap X\hat{\nu})\subset X\hat{\delta}'$ nach 1.3. Gehört X jedoch der Varietät $M(\delta)$ nicht an, erhalten wir $X\hat{\nu}\neq X\hat{\delta}\neq P$ und $X\hat{\delta}'\supset(X\hat{\nu}\cap X\hat{\delta})$ ist eine Hyperebene. Je nachdem $X\hat{\nu}=P$ erfüllt ist oder nicht, gilt $X\notin X\hat{\delta}'=X\hat{\delta}$ oder die drei verschiedenen Hyperebenen $X\hat{\nu}, X\hat{\delta}, X\hat{\delta}'$ gehören einem Hyperebenenbüschel an; mit $X\in(X\hat{\nu}\setminus X\hat{\delta})$ erkennen wir $X\notin X\hat{\delta}'$.

(2) Die Abbildung δ'^T ist projektiv; wegen (2.1) ist $M(\delta')=M(\delta'^T)$. □

SATZ 2. Zu jedem maximalen Erzeugendenraum E einer quadratischen Varietät $M(\delta)$ gibt es mindestens eine projektive korrelative Abbildung $\eta: P\to P^*$, die $M(\delta)$ erzeugt und die Ausnahmemenge E besitzt.

Beweis. Nur die Annahme $A(\delta)\neq E$ verdient Interesse. Da $A(\delta)\subset M$ und E maximal ist, existiert ein Punkt $X\in E\cap D(\delta)$. Wegen

$$Y\hat{\delta}\supset Y\hat{\delta}\cap E\supset A(\delta_E)\supset A(\delta\,|\,E) \text{ für alle } Y\in E$$

[7]Zwei Tensoren $f_1, f_2\in T_2V$ beschreiben genau dann dieselbe quadratische Form, wenn f_1-f_2 dem Unterraum $A_2V\subset T_2V$ der alternierenden 2-Tensoren angehört. Die Abbildung $f\mapsto f-f_{ad}$ ist ein Epimorphismus $T_2V\to A_2V$ mit dem Unterraum $S_2V\subset T_2V$ aller symmetrischen 2-Tensoren als Kern.

gilt $A(\delta|E)\subset X\hat{\delta}$. In der Hyperebene $X\hat{\delta}$ gibt es einen (n-2)-dimensionalen Unterraum $A\supset A(\delta|E)$ mit $X\notin A$. Eine nicht in $X\hat{\delta}$ liegende Gerade g durch X bestimmt genau eine nullpolare Abbildung $\nu: P\to P^*$, welche $A(\nu)=A$, $P\hat{\nu}=g$ und daher $X\hat{\nu}=A\vee X=X\hat{\delta}$ leistet.

In einem von δ und ν aufgespannten Büschel projektiver korrelativer Abbildungen liegt nach 1.3 und den Gesetzen einer linearen Abbildung genau eine Abbildung δ' mit $X\in A(\delta')$, sodaß $A(\delta'|E)$ echte Obermenge von $A(\delta|E)$ ist. Mit Satz 1 gilt $M(\delta)=M(\delta')$.

Mehrfache Anwendung dieser Konstruktion liefert eine Erzeugung η von M mit $A(\eta)\supset E$; die Maximalität von E zeigt $A(\eta)=E$. □

Eine Erzeugung einer quadratischen Varietät M wird ausgezeichnet genannt, wenn ihre Ausnahmemenge ein maximaler Erzeugendenraum von M ist. Die Sätze 1 und 2 reichen zur weiteren Diskussion der geometrischen Eigenschaften quadratischer Varietäten aus.

2.4. Die Bestimmung des Spitzenraumes S einer quadratischen Varietät $M(\delta)$ stützt sich auf

$$(2.3)\qquad S\cap A(\delta) = A(\delta)\cap P\hat{\delta} = A(\delta)\cap A(\delta^T).$$

Ist nämlich $S\in A(\delta)\cap P\hat{\delta}$ und $X\in M\setminus\{S\}$, so folgt $X\hat{\delta}\supset XS$ und $Y\hat{\delta}=X\hat{\delta}$ für alle Punkte $Y\in XS\setminus\{S\}$, also $Y\in Y\hat{\delta}$. Liegt umgekehrt ein Punkt S in $S\cap A(\delta)$ und ist $Y\in P\setminus A(\delta)$, dann gilt $(SY)\hat{\delta}=Y\hat{\delta}$, also entweder $SY\subset Y\hat{\delta}$ für $SY\subset M$ oder $SY\cap Y\hat{\delta}=S$ für $SY\not\subset M$. Damit folgt

$$A(\delta^T) = P\hat{\delta}=\bigcap(Y\hat{\delta}\mid Y\in P)\supset S.$$

Nach (2.3) und 2.2 ergibt sich nun

$$(2.4)\qquad S = A(\delta)\cap P\hat{\delta}= A(\delta)\cap A(\delta^T)\qquad (\delta \text{ ausgezeichnet}^{8}).$$

Hat eine quadratische Varietät M einen Erzeugendenraum der Dimension j, aber keinen Erzeugendenraum höherer Dimension, so heißt j der Index von M. Wenn wir in (2.4) eine j-dimensionale Ausnahmemenge $A(\delta)$ vorgeben und $s:=\dim\Pi(S)$ setzen, ergibt $\dim\Pi(P\hat{\delta})=j$ die Ungleichung

$$(2.5)\qquad j \leq \left[\frac{n+s}{2}\right]$$

SATZ 3. Je zwei maximale Erzeugendenräume einer quadratischen Varietät M haben dieselbe Dimension.

Beweis. Sei $j\geq 0$ der Index von M. Nach (2.5) ist j=0 für n=1. Nehmen wir n>1 und die Existenz zweier maximaler Erzeugendenräume E_j und E_k der Dimension j bzw. k<j an, so ist nach (2.5) dann $E_j\vee E_k$ in einer Hyperebene H ent-

[8] Für nicht ausgezeichnete Erzeugungen braucht (2.4) entgegen den Behauptungen in [26,192] und [18,68] nicht zu stimmen.

halten und die quadratische Varietät $M \cap H$ hat E_j und E_k als maximale Erzeugendenräume. Mit Induktion nach n gibt das einen Widerspruch. □

Wenn δ eine ausgezeichnete Erzeugung von M und $E=A(\delta)$ ist, so hat jeder (j+1)-dimensionale Unterraum $U \supset E$ unter $\hat{\delta}$ eine Bildhyperebene $U\hat{\delta}$ und $U \cap U\hat{\delta}$ ist maximaler Erzeugendenraum von M. Ferner folgt $M \cap U=(U \cap U\hat{\delta}) \cup E$, wobei $U \cap U\hat{\delta}=E$ genau bei $U\hat{\delta} \supset E$ auftritt, was bei $j=\frac{1}{2}(n+s)$ nicht möglich ist. (Die Abbildung $U \mapsto U\hat{\delta} \cap E$ ist eine Verallgemeinerung der Berührprojektivität [5,179].) Im Sonderfall n=1 hat M daher höchstens zwei Punkte.

Die Existenz von Quadriken mit Index $j=[\frac{1}{2}(n-1)]$ wird durch die folgenden Überlegungen gesichert: Es gibt in Π zwei windschiefe j-dimensionale Unterräume E_1, E_2 und eine projektive korrelative Abbildung $\delta : P \to P^*$ mit $A(\delta)=E_1$, $P\hat{\delta}=E_2$. Damit δ eine Quadrik erzeugt, ist notwendig und hinreichend, daß kein (j+1)-dimensionaler Unterraum durch E_1 in seiner $\hat{\delta}$-Bildhyperebene liegt, denn genau dann sind E_1 und E_2 maximale Erzeugendenräume von $M(\delta)$ und folglich $M(\delta)$ nach (2.4) eine Quadrik. Wenn n gerade ist, kann man δ so wählen, daß ein Punkt $X \in P \setminus (E_1 \vee E_2)$ unter $\hat{\delta}$ auf $E_1 \vee E_2$ abgebildet wird; dann ist $M(\delta)$ eine Quadrik. Wenn n ungerade ist, erzeugt δ stets eine Quadrik. Ordnet man ferner bei ungeradem n jedem Punkt $X \in E_2$ den Unterraum $X\hat{\delta} \cap E_1$ zu, so gelangt man zur in [6,233] beschriebenen korrelativen Erzeugung der Quadriken mit Index $\frac{1}{2}(n-1)$. Für n=3 sind die Quadriken vom Index 1 die in [5,176ff] betrachteten Reguluspunktmengen. Eine solche Quadrik besitzt in einem projektiven Raum der Ordnung 2 genau 9 Punkte und ist übrigens echte Obermenge einer aus 5 Punkten bestehenden Quadrik vom Index 0.

2.5. Ein Unterraum $T \subset P$ berührt eine quadratische Varietät M, wenn er Erzeugendenraum von M oder $M \cap T$ eine quadratische Varietät mit nichtleerem Spitzenraum ist. Die Punkte von $T \subset M$ bzw. die Punkte des Spitzenraumes von $M \cap T$ sind Berührungspunkte von T. Wir nennen T auch einen Tangentialraum von M und insbesondere eine Tangente bzw. eine Tangentialhyperebene, wenn T eine Gerade bzw. Hyperebene ist.

Hat ein Tangentialraum T den Berührungspunkt P, so berührt jeder Unterraum T_1 mit $P \in T_1 \subset T$ ebenfalls M im Punkt P. Eine Tangente von M ist entweder in M enthalten, oder sie hat nach (2.5) mit M genau einen Punkt gemeinsam.

SATZ 4. In jedem Punkt P einer quadratischen Varietät $M(\delta)$ berührt genau ein Unterraum T_PM derart, daß jeder Tangentialraum von M mit Berührungspunkt P in T_PM liegt. Es gilt (vgl.[20,38])

$$(2.6) \quad T_PM = P\hat{\delta}^T \text{ für } P \in A(\delta).$$

Beweis. Wegen Satz 2 können wir stets $P \in A(\delta)$ erreichen. Ist $t \subset T_PM := P\hat{\delta}^T$ eine Gerade durch P und $X \in (M \cap t) \setminus \{P\}$, so folgt $X \in X\hat{\delta}$ und $P \in X\hat{\delta}$. Da $t\hat{\delta}=X\hat{\delta}$ wegen $P \in A(\delta)$ erfüllt ist, liegt t in M und T_PM berührt M in P. Um umgekehrt zu zeigen, daß jeder Tangentialraum mit Berührungspunkt P in T_PM liegt, genügt es, eine Tangente t mit dieser Eigenschaft zu betrachten[9]. Gilt $t\not\subset M$, so ist $t\hat{\delta}$ eine Hyperebene wegen $P\in A(\delta)$. Weil jeder gemeinsame Punkt von t und $t\hat{\delta}$ in M liegt, muß $P\in t\cap t\hat{\delta}$, also auch $t\subset P\hat{\delta}^T$ gelten. Für $t\subset M$ liefert $t\subset t\hat{\delta}$ das gewünschte Ergebnis. □

Je nachdem P im Spitzenraum S enthalten ist oder nicht, hat T_PM die Dimension n bzw. n-1. Der Tangentialraum T_PM stimmt mit der mengentheoretischen Vereinigung aller Tangenten von M mit Berührungspunkt P überein[9], sodaß M eine quadratische Menge [3] abgibt.

SATZ 5. In jedem Punkt P einer quadratischen Varietät M mit Spitzenraum S ist die Menge der Berührungspunkte von T_PM der Unterraum $P\vee S$.

Beweis. Bei $P\in S$ oder $T_PM\subset M$ ist der Satz richtig. Sonst ist $T_PM\cap M$ eine quadratische Varietät, deren Spitzenraum S_1 zu bestimmen ist. Wir setzen δ als ausgezeichnete Erzeugung und $P\in A(\delta)$ voraus, womit $A(\delta)\subset T_PM$ erfüllt ist. Die Spurabbildung $\delta_1:=\delta_{T_PM}$ hat wegen der Maximaleigenschaft von $A(\delta)$ die Ausnahmemenge $A(\delta_1)=A(\delta)$. Nach Wahl eines Hilfspunktes $X\in\mathcal{P}\setminus T_PM$ liefert (2.4)

$$S=A(\delta)\cap\mathcal{P}\hat{\delta}=A(\delta_1)\cap(T_PM\vee X)\hat{\delta}=A(\delta_1)\cap(T_PM)\hat{\delta}\cap X\hat{\delta}=A(\delta_1)\cap(T_PM)\hat{\delta}_1\cap X\hat{\delta}=S_1\cap X\hat{\delta},$$

sodaß S der Schnitt von S_1 mit einer Hyperebene ist. Wegen $P\vee S\subset S_1$ und $P\notin S$ folgt $S_1=P\vee S$. □

Jede Gerade durch einen Punkt $P\in M$, die nicht in T_PM liegt, ist keine Tangente von M und hat daher mit M noch genau einen Punkt gemeinsam. Falls eine quadratische Varietät nicht mit ihrem Spitzenraum zusammenfällt, spannt sie daher den ganzen Raum auf.

2.6. In einer projektiven Pappos-Ebene ist eine quadratische Varietät M, die nicht mit ihrem Spitzenraum übereinstimmt, entweder ein Kegelschnitt oder die Vereinigungsmenge zweier verschiedener Geraden: Ist nämlich δ ausgezeichnete Erzeugung von M und $A(\delta)=P_1$ ein Punkt, so ergibt

$$\hat{\delta}|(u\Pi/P_1):u\Pi/P_1\rightarrow u\Pi/P_2 \text{ mit } P_2=\mathcal{P}\hat{\delta}$$

eine STEINER-Erzeugung eines Kegelschnitts, der mit der Quadrik M zusammenfällt. Wenn $A(\delta)=g$ eine Gerade ist, dann erhalten wir $M=g\cup h$ und $h=\mathcal{P}\hat{\delta}\neq g$.

3. POLARSYSTEM

3.1. Um die Menge der Tangenten durch einen Punkt, der einer quadratischen Varietät nicht angehört, beschreiben zu können, betrachten wir zunächst eine projektive korrelative Abbildung $\delta:\mathcal{P}\rightarrow\mathcal{P}^*$, einen Punkt $Q\notin Q\hat{\delta}$ und eine Gerade g durch Q. Die Spurabbildung $\hat{\delta}_g$ ist genau dann eine involutorische Projektivität, wenn ein Punkt $X\in g\cap Q\hat{\delta}\cap Q\hat{\delta}^T$ mit $X\notin X\hat{\delta}$ existiert. Eine Projektivität $\hat{\delta}_g$ ist genau dann parabolisch, falls die harmonische Lage

$$H(Q,P;Q\hat{\delta}_g,Q\hat{\delta}_g^{\,T})$$

[9] Nur eine aus zwei verschiedenen Punkten bestehende Quadrik M einer Geraden wird nicht erfaßt, da M keine Tangenten besitzt.

für einen bezüglich δ selbstkonjugierten Punkt $P\in g$ erfüllt ist. Einen Punkt $P\in g\cap Q\hat{\delta}\cap Q\hat{\delta}^T\cap P\hat{\delta}$ gibt es genau dann, wenn δ_g keine Bijektion ist und genau ein bezüglich δ_g selbstkonjugierter Punkt vorliegt. Bezeichnen wir mit $\mathrm{Char}\Pi$ die Charakteristik von Π, welche als Charakteristik eines Algebraisierungskörpers von Π erklärt ist, so folgt zusammenfassend

SATZ 6. Sei $M(\delta)$ eine quadratische Varietät und $Q\in P\setminus M$. Eine Gerade g durch Q, die mit M einen Punkt gemeinsam hat, ist genau dann Tangente von M, wenn gilt

$$(3.1) \quad g\subset Q\vee(Q\hat{\delta}\cap Q\hat{\delta}^T) \text{ für } \mathrm{Char}\Pi=2,$$

bzw. wenn eine Hyperebene $H_Q(\delta)$ existiert mit $P\in H_Q(\delta)$ und

$$(3.2) \quad \begin{array}{l} H_Q(\delta) = Q\hat{\delta}=Q\hat{\delta}^T \text{ oder} \\ H(Q\vee(Q\hat{\delta}\cap Q\hat{\delta}^T),\ H_Q(\delta);Q\hat{\delta},Q\hat{\delta}^T) \end{array} \quad \text{für } \mathrm{Char}\Pi \neq 2.$$

Nach Satz 6 ist die Menge der selbstkonjugierten Punkte einer projektiven polaren Abbildung für $\mathrm{Char}\Pi=2$ stets ein Unterraum.

3.2. Im folgenden ist M stets eine quadratische Varietät, die nicht mit ihrem Spitzenraum S übereinstimmt. Wir nennen

$$(3.3) \quad K := \bigcap(T_PM \mid P\in M\setminus S)$$

den Knoten der quadratischen Varietät M. Dann gilt

$$(3.4) \quad S= K\cap M,$$

denn zunächst ist $S\subset K$ und umgekehrt ergibt $S\in K\cap M$ für alle Punkte $P\in M\setminus\{S\}$, daß die Tangente PS ganz in M liegt, also $S\in S$ gilt.

SATZ 7. Der Knoten K und der Spitzenraum S einer quadratischen Varietät $M(\delta) \neq S$ stimmen für $\mathrm{Char}\Pi\neq 2$ stets überein. Bei $\mathrm{Char}\Pi=2$ gehört ein Punkt $K\notin M$ genau dann zum Knoten, wenn $K\notin K\hat{\delta}=K\hat{\delta}^T$ gilt.

Beweis. Sei $K\in P\setminus M$, $P\in M$ und $g:=PK$. Insbesondere für $K\in K\setminus S$ ist g Tangente von M und bei $\mathrm{Char}\Pi\neq 2$ folgt mit (3.2) der Widerspruch $M\subset H_K(\delta)$. Bei $\mathrm{Char}\Pi=2$ zeigt (3.1), daß stets $K\hat{\delta}_g=K\hat{\delta}_g{}^T$ gilt. Da M den ganzen Raum aufspannt, muß $K\hat{\delta}=K\hat{\delta}^T$ erfüllt sein. Wenn umgekehrt $\mathrm{Char}\Pi=2$ und $K\notin K\hat{\delta}=K\hat{\delta}^T$ vorausgesetzt wird, ist nach (3.1) die Gerade g stets Tangente, also liegt K im Knoten. □

Jedem Punkt $Q\in P$, der nicht im Knoten K einer quadratischen Varietät $M(\delta)\neq S$ liegt, ordnen wir eine durch δ festgelegte Hyperebene $H_Q(\delta)$ zu:

$$(3.5) \quad H_Q(\delta):=T_QM \text{ für } Q\in M\setminus S,$$
$$(3.6) \quad H_Q(\delta):=Q\vee(Q\hat{\delta}\cap Q\hat{\delta}^T) \text{ für } Q\notin M\cup K \text{ und } \mathrm{Char}\Pi=2,$$

während für $Q\notin M$ und $\mathrm{Char}\Pi\neq 2$ die Hyperebene $H_Q(\delta)$ durch (3.2) definiert wird. (Vgl. [22,496].) Die Unabhängigkeit der Abbildung $Q\mapsto H_Q(\delta)$ von der Auswahl einer Erzeugung von M wird aus Satz 9 folgen. Vorbereitend zeigen wir

SATZ 8. Der Knoten K einer quadratischen Varietät $M(\delta)\neq S$ stimmt überein mit dem Unterraum

$$\bigcap(H_Q(\delta) \mid Q\in P\setminus K).$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß für alle $Q\in P\setminus(M\cup K)$ gilt $K\subset H_Q(\delta)$. Liegt S im Spitzenraum S, so ist QS Tangente von M und $S\in H_Q(\delta)$ nach Satz 6. Gehört ein Punkt K der Menge $K\setminus S$ an, so gilt notwendig CharΠ=2, und $\hat{\delta}_{QK}$ ist wegen $K\hat{\delta}=K\hat{\delta}^T$ stets involutorisch; nach 3.1 und (3.6) liegt K in $H_Q(\delta)$. □

SATZ 9. Jeder Punkt $Q\in P$, der weder der quadratischen Varietät $M(\delta)\neq S$ noch ihrem Knoten K angehört, ist Zentrum genau einer nichttrivialen automorphen perspektiven Kollineation[10] von M. Die Achse dieser perspektiven Kollineation ist die Hyperebene $H_Q(\delta)$.

Beweis. Da M eine quadratische Menge ist, gibt es höchstens eine solche Kollineation und diese ist notwendig involutorisch [3].

(1) Sei CharΠ=2. Ist M quadratische Varietät einer Geraden, so folgt $M=\{P_1,P_2\}$, $K=\emptyset$ und $Q=H_Q(\delta)$ für alle $Q\in P$. Es existiert genau eine parabolische Projektivität mit Fixpunkt (also Zentrum und Achse) Q und $P_1\mapsto P_2, P_2\mapsto P_1$.

Bei $\dim\Pi\geq 2$ wird Q mit einem Punkt $P_1\in M\setminus H_Q(\delta)$ zu einer Geraden g verbunden. Wegen $g\cap Q\hat{\delta}\neq g\cap Q\hat{\delta}^T$ ist $\hat{\delta}_g$ bijektiv aber nicht involutorisch, also eine hyperblische Projektivität mit einem weiteren Fixpunkt $P_2\in M$. Es gibt genau eine (involutorische) Elation μ mit Zentrum Q, Achse $H_Q(\delta)$ und $P_1\mapsto P_2$. Wir legen durch g eine Ebene E. Dann ist $M_1:=M\cap E$ gemäß 2.6 entweder Vereinigungsmenge zweier verschiedener Geraden oder ein Kegelschnitt und hat einen Punkt K_1 als Knoten. Da g nicht Tangente von M_1 in P_1 ist, gilt $Q\neq K_1$ und nach Satz 8 daher $K_1\in H_Q(\delta)\cap E$. Im ersten Fall ist K_1 der Schnittpunkt der beiden Geraden von M_1, was $M_1\mu=M_1$ zeigt. Im zweiten Fall liefert der für den Kegelschnitt M_1 gültige Satz von PASCAL, daß die Punkte

$$Q=(X\mu\vee X)\cap(P_1\vee P_2),\ (P_1\vee X\mu)\cap(P_2\vee X),\ K_1$$

in $H_Q(\delta)\cap E=K_1\vee Q$ liegen, also kollinear sind; damit folgt $M_1\mu=M_1$.

(2) Sei Char$\Pi\neq$2. Ist M quadratische Varietät einer Geraden, so folgt $M=\{P_1,P_2\}$ und $K=\emptyset$. Wenn δ nicht bijektiv ist, dann gilt etwa $Q\hat{\delta}=P_1$ und $Q\hat{\delta}^T=P_2$, sodaß $H_Q(\delta)\neq Q$ ein Fixpunkt jener hyperbolischen Projektivität ist, die Q festläßt und P_1 mit P_2 vertauscht. Ist δ jedoch bijektiv, so sind P_1 und P_2 die Fixpunkte der hyperbolischen Projektivität $\hat{\delta}$. Es gibt genau eine involutorische Projektivität μ mit $P_1\mapsto P_2$, $Q\mapsto Q$. Die Produktabbildung $\hat{\delta}\mu$ ist involutorisch, da sie P_1 mit P_2 vertauscht. Das ergibt $(Q\hat{\delta})\mu=Q\mu^{-1}\hat{\delta}^{-1}=Q\hat{\delta}^T$, sodaß $H_Q(\delta)\neq Q$ ein Fixpunkt von μ ist.

[10] Unter einer perspektiven Kollineation einer Geraden ist dabei eine Projektivität mit wenigstens einem Fixpunkt zu verstehen.

Bei $\dim \Pi \geq 2$ sei μ die harmonische Homologie mit Zentrum Q und Achse $\mathcal{H}_Q(\delta)$. Schneidet eine Gerade g durch Q die Varietät M in zwei verschiedenen Punkten, so werden diese unter μ nach den bisherigen Überlegungen vertauscht. Der Berührungspunkt einer Tangente g durch Q liegt nach 3.1 in $\mathcal{H}_Q(\delta)$. □

Die Hyperebene $\mathcal{H}_Q(\delta)=:\mathcal{H}_Q M$ ist also durch die quadratische Varietät $M(\delta)\neq\mathcal{S}$ alleine bestimmt und heißt die Polarhyperebene von Q bezüglich M.

SATZ 10. Ist $M(\delta)\neq\mathcal{S}$ eine quadratische Varietät mit Knoten $\mathcal{K}$, so gibt es genau eine projektive polare Abbildung $\omega:\mathcal{P}\to\mathcal{P}^*$, die für alle $Q\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{K}$ leistet $Q\hat{\omega}=\mathcal{H}_Q M$.

Beweis. (1) Wir zeigen, daß zwei verschiedene Punkte Q,R dann dieselbe Polarhyperebene besitzen, wenn die Gerade g:=QR genau einen Punkt $K\in\mathcal{K}$ enthält. Es sind vier Fälle zu unterscheiden:

(a) $g\subset M$: Nach Satz 5 gilt $\mathcal{H}_Q M=\mathcal{H}_R M$.

(b) $K\in M$, $Q\notin M$: Es folgt $R\notin M$ und wir setzen eine ausgezeichnete Erzeugung voraus. Dann gilt $\mathcal{S}=A(\delta)\cap A(\delta^T)=P\hat{\delta}^T\cap P\hat{\delta}$, also $Q\hat{\delta}=R\hat{\delta}$, $Q\hat{\delta}^T=R\hat{\delta}^T$, $K\in Q\hat{\delta}\cap Q\hat{\delta}^T$, was $\mathcal{H}_Q M=\mathcal{H}_R M$ zeigt.

(c) $K\notin M$, $g\cap M\neq\emptyset$: Sei etwa $Q\in M$, $R\notin M$ und o.B.d.A. $Q\in A(\delta)$ vorausgesetzt. Mit $\delta_1:=\delta_{T_Q M}$ ist $M_1(\delta_1)$ eine quadratische Varietät mit Spitzenraum $\mathcal{S}_1$. Wegen $Q\in A(\delta_1)$ und $Q\in\mathcal{S}_1$ liefert (2.3) dann $Q\in A(\hat{\delta}_1{}^T)$. Das zeigt $R\hat{\delta}_1=K\hat{\delta}_1=K\hat{\delta}_1{}^T=R\hat{\delta}_1{}^T$, also $\mathcal{H}_R M=R\hat{\delta}_1\vee R=\mathcal{H}_Q M$.

(d) $K\notin M$, $g\cap M=\emptyset$: Nach 3.1 ist $\hat{\delta}_g$ eine involutorische Projektivität und $g\cap g\hat{\delta}=\emptyset$. Ferner gilt mit $\delta_1:=\delta_{\mathcal{H}_Q M}$ dann $K\hat{\delta}_1=K\hat{\delta}_1{}^T$ sowie $Q\hat{\delta}_1=Q\hat{\delta}_1{}^T$, also $g\hat{\delta}_1=g\hat{\delta}_1{}^T$ und weiter

$$R\hat{\delta}_1=g\hat{\delta}_1\vee R\hat{\delta}_g=g\hat{\delta}_1{}^T\vee R\hat{\delta}_g{}^T=R\hat{\delta}_1{}^T,$$

was schließlich $R\hat{\delta}_1\vee R=\mathcal{H}_Q M=\mathcal{H}_R M$ ergibt.

(2) Für zwei verschiedene Punkte $Q,R\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{K}$ folgt aus $R\in\mathcal{H}_Q M$ stets $Q\in\mathcal{H}_R M$: Liegt nämlich Q oder R in M, so ist QR eine Tangente von M, was $Q\in\mathcal{H}_R M$ ergibt. Für $Q,R\notin M$ existiert nach Satz 9 eine automorphe perspektive Kollineation μ von M mit Zentrum Q, und $R\mu=R$ zeigt $(\mathcal{H}_R M)\mu=\mathcal{H}_R M$. Bei $\mathrm{Char}\,\Pi=2$ ist μ eine Elation, was $Q\in\mathcal{H}_R M$ ergibt. Bei $\mathrm{Char}\,\Pi\neq 2$ gilt notwendig entweder $Q\in\mathcal{H}_R M$ oder $\mathcal{H}_R M=\mathcal{H}_Q M$. Letzteres führt auf $R\in\mathcal{H}_R M$ und widerspricht damit $R\notin M$.

(3) Nach (1) und (2) ist $\mathcal{K}$ die Ausnahmemenge einer polaren Abbildung ω, die $Q\hat{\omega}=\mathcal{H}_Q M$ für alle $Q\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{K}$ leistet. Für $\mathrm{Char}\,\Pi=2$ ist ω nullpolar und damit projektiv. Für $\mathrm{Char}\,\Pi\neq 2$ existiert eine Gerade h, die mit M genau zwei Punkte gemeinsam hat. In $\hat{\omega}_h$ zugeordnete Punkte liegen zu diesen Schnittpunkten mit M harmonisch, sodaß ω projektiv ist. □

Wir nennen $\hat{\omega}$ das Polarsystem der quadratischen Varietät M ($\neq\mathcal{S}$). Die Einschränkung von $\hat{\omega}$ auf einen maximalen Erzeugendenraum ist eine weitere Verallgemeinerung der Berührprojektivität (vgl.2.4). Bei $\mathrm{Char}\,\Pi\neq 2$ ist ω eine Erzeugung von M im Staudtschen Sinne; für $\mathrm{Char}\,\Pi=2$ erzeugt die nullpolare Abbildung ω keine quadratische Varietät und der Knoten $K=A(\omega)$ hat stets ungerade Kodimension. Die Abbildungen δ, δ^T und ω gehören übrigens einem Büschel an[11].

3.3. Jeder maximale Erzeugendenraum E der quadratischen Varietät $M \neq S$ und damit auch der Verbindungsraum $E \vee K$ ist bezüglich der polaren Abbildung ω vollisotrop, also in seinem $\hat{\omega}$-Bild enthalten, und E schneidet aus dem Knoten K den s-dimensionalen Spitzenraum S aus. Mit $k := \dim \Pi(K)$ ergibt sich damit für den Index

$$(3.7) \qquad j \leq \left[\frac{n+2s-k}{2}\right].$$

Für $\mathrm{Char}\Pi \neq 2$ sind (3.7) und (2.5) wegen $s=k$ äquivalent. Eine Abschätzung von $k-s$ für $\mathrm{Char}\Pi = 2$ liefert Formel (4.4).

4. KNOTEN BEI CHARAKTERISTIK 2

4.1. Vorgegeben sind ein projektiver Pappos-Raum Π mit $\mathrm{Char}\Pi = 2$, $2 \leq n = \dim \Pi < \infty$ und eine quadratische Varietät M von Π, die mit ihrem Spitzenraum S nicht übereinstimmt. Wir können dann im Knoten K von M einen zu S windschiefen Unterraum Z als Zentrum einer Projektion $\pi: P \to R$ auf einen zu Z komplementären Unterraum $R \subset P$ auswählen. Dann ist $\pi|M: M \to R$ eine injektive Abbildung; in der Sprechweise der Darstellenden Geometrie ist jeder Punkt von M ein Konturpunkt. Bezeichnen wir das Polarsystem von M mit $\hat{\omega}$, so gilt für zwei verschiedene Punkte $X, Y \in M$

$$X \vee Y \subset M \Leftrightarrow X \in Y\hat{\omega} \Leftrightarrow X\pi \in Y\pi\hat{\omega}_K \Rightarrow X\pi \vee Y\pi \subset M\pi.$$

Inwieweit eine Gerade von $M\pi$ das π-Bild einer Geraden von M ist, klärt die weitere Diskussion, bei welcher der Trivialfall ausgeschlossen wird, daß π die Identität in P, also $Z = \emptyset$ ist.

4.2. Wenn die Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte $O, E \in M$ nicht in M liegt, dann ist der Durchschnitt von M mit $P_0 := Z \vee O \vee E$ eine Quadrik M_0 vom Index 0 und mit Knoten $K_0 = Z$. Ein Punkt von M gehört genau dann zu M_0, wenn sein π-Bild in $O\pi \vee E\pi =: R_0$ liegt.

Es gibt wegen $Z \neq \emptyset$ in M_0 einen Punkt $U \neq O, E$; wir verwenden die Punkte $O\pi$, $E\pi$, $U\pi$ zur Konstruktion eines Algebraisierungskörpers K_{a1} von Π ($O\pi = 0 \in K_{a1}$, $E\pi = 1 \in K_{a1}$, $U\pi = \infty \notin K_{a1}$) und erklären das Doppelverhältnis (DV) von vier Punkten gemäß [5,42] als Element von $K_{a1} \cup \{\infty\}$. Für vier verschiedene Punkte A,B,C,D eines Kegelschnitts $M_1 \subset M_0$ und ihre Tangenten a,b,c,d ist (unabhängig von der Charakteristik) $\mathrm{DV}(A,B,C,D)^2 = \mathrm{DV}(a,b,(a \cap b) \vee C, (a \cap b) \vee D)$, sodaß wegen $\mathrm{Char}\Pi = 2$ folgt $\mathrm{DV}(A,B,C,D)^2 = \mathrm{DV}(a,b,c,d)$. Da die Geraden $A \vee A\pi, \ldots$ Tangenten

[11] Eine durch $f \in T_2V$ beschriebene quadratische Form hat die Polarform $f + f_{ad}$. Wird in $\Pi(V)$ die Abbildung δ durch f induziert, so wird ω durch diese Polarform induziert.

von M_1 sind, gilt (auch für A=B,C oder D mit $\infty^2=\infty$)

(4.1) $DV(A,B,C,D)^2=DV(A\pi,B\pi,C\pi,D\pi)$.

Wir bezeichnen mit $K_{al}^{(2)}$ den Unterkörper der Quadratzahlen von K_{al} und unterscheiden zwei Fälle:

(1) Der Körper K_{al} ist perfekt, also $K_{al}=K_{al}^{(2)}$. Hier ist das π-Bild von M_1 bereits die volle Gerade $\mathcal{R}_0$. Das zeigt $M_1=M_0$ und

(4.2) $0=\dim\Pi(Z)=[K_{al}:K_{al}^{(2)}]-1$.

(2) Bei $K_{al}\neq K_{al}^{(2)}$ ist $\mathcal{R}_0=K_{al}\cup\{\infty\}$ die Punktmenge der Möbius-Geometrie $\Sigma(K_{al}^{(2)}, K_{al})$ [1,144]. Nach (4.1) und [1,98] ist jedes π-Bild eines Kegelschnitts von M_0 eine Kette dieser Möbius-Geometrie.

Zwei Kegelschnitte $M_1,M_2\subset M_0$ berühren einander genau dann, wenn sie mindestens ein Linienelement (P,p) gemeinsam haben. Für $M_1\neq M_2$ ist die Verbindungsgerade zweier Punkte $P_1\in M_1\setminus\{P\}$, $P_2\in M_2\setminus\{P\}$ zum Knoten $\mathcal{K}_0$ windschief und schneidet die Tangentialhyperebene $\mathcal{T}_PM_0=P\vee\mathcal{K}_0$ in einem Punkt $Q\notin M\cup\mathcal{K}_0$. Die automorphe Elation μ von M_0 mit Zentrum Q führt M_1 in M_2 über, und $(\mu|\mathcal{R}_0)\pi:\mathcal{R}_0\to\mathcal{R}_0$ ist eine parabolische Projektivität mit Fixpunkt $P\pi$, welche $M_1\pi\to M_2\pi$ leistet. Daher berühren einander $M_1\pi$ und $M_2\pi$ in $P\pi$ im kettengeometrischen Sinn. Berühren einander umgekehrt die π-Bilder von Kegelschnitten $M_1,M_2\subset M_0$ in einem Punkt $P\pi$, so existiert genau ein Kegelschnitt von M_0, der M_1 in P berührt und mit M_2 einen von P verschiedenen Punkt gemeinsam hat, also wegen [1,107] mit M_2 übereinstimmt.

Die Menge $M_0\setminus\{U\}$ ist die Punktmenge eines affinen Raumes $A(M_0\setminus\{U\})$ (Umkehrung der stereographischen Projektion). Entfernen wir aus $\Sigma(K_{al}^{(2)},K_{al})$ den Punkt $U\pi$, so erhalten wir den affinen Raum $A(K_{al}^{(2)},K_{al})$ [1,104]. Die obigen Überlegungen zeigen dann, daß $\pi|(M_0\setminus\{U\})$ eine Affinität von $A(M_0\setminus\{U\})$ auf einen affinen Unterraum von $A(K_{al}^{(2)},K_{al})$ ist. Ein Dimensionsvergleich liefert

(4.3) $\dim\Pi(Z)\leq[K_{al}:K_{al}^{(2)}]-1$,

sodaß $M_0\pi=\mathcal{R}_0$ genau für $\dim\Pi(Z)=[K_{al}:K_{al}^{(2)}]-1$ erfüllt ist. Dann ist M_0 ein (zum HOTJE-Modell [14] projektiv-äquivalentes) Quadrikenmodell [27] der kinematischen Kettengeometrie $\Sigma(K_{al}^{(2)},K_{al})$. Die gesamte Konstruktion beruht natürlich wesentlich auf der Isomorphie der Körper K_{al} und $K_{al}^{(2)}$.

4.3. Da M den ganzen Raum aufspannt, stimmt die Verbindungshülle von $M\pi$ mit $\mathcal{R}$ überein. Die Abbildung $\pi|M:M\to\mathcal{R}$ ist nach 4.2 genau dann surjektiv, wenn ein Kegelschnitt von M auf eine Gerade abgebildet wird. Setzen wir $k:=\dim\Pi(\mathcal{K})$, $s:=\dim\Pi(\mathcal{S})$ und den Unterraum Z als in $\Pi(\mathcal{K})$ zu $\mathcal{S}$ komplementär voraus, so ergeben (4.2) und (4.3) die auch bei $Z=\emptyset$ gültige Formel [10,33]

(4.4) $k-s\leq[K_{al}:K_{al}^{(2)}]$.

Als liniengeometrische Anwendung der bisherigen Ergebnisse können wir in einem dreidimensionalen projektiven Pappos-Raum Π mit perfektem Algebraisierungskörper eine Bijektion eines Gewindes G (Menge der isotropen Geraden einer Nullpolarität ν) auf die Punktmenge P von Π angeben: Nach dem KLEINschen Übertragungsprinzip hat G eine Quadrik M eines vierdimensionalen Erweiterungsraumes $\tilde{\Pi}$ von Π als Punktmodell. (Die diesbezüglichen Aussagen in [6] gelten auch für CharΠ=2). Der Knoten K von M ist wegen der geraden Dimension von $\tilde{\Pi}$ nicht leer. Da M den Index 1 besitzt, erweist (3.7) den Knoten K als Punkt. Setzen wir o.B.d.A. $K \cap P = \emptyset$, so liefert die Projektion zum Zentrum K auf P die gewünschte Abbildung. Die Urbilder der Geraden aus P sind dabei einerseits die Geradenbüschel in G und andererseits jene Reguli in G, deren Trägerquadriken das Polarsystem $\hat{\nu}$ besitzen. Die Urbilder der Ebenen aus P sind die in G liegenden parabolischen Netze.

BIBLIOGRAPHIE

1. Benz,W.: Vorlesungen über Geometrie der Algebren, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
2. Bertini, E.: Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume, Seidel, Wien, 1924.
3. Buekenhout, F.: 'Ensembles quadratiques des espaces projectifs', Math.Z.110, 306-318 (1969).
4. Brauner, H.: Geometrie projektiver Räume I, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1976.
5. Brauner, H.: Geometrie projektiver Räume II, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1976.
6. Burau, W.: Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie, VEB Dt. Verlag d.Wissenschaften, Berlin, 1961.
7. Da Porto, A.: 'Sulla generazione, per stelle reciproche, delle quadriche ad un numero qualunque di dimensioni', Giornale di Mat.37 (6, 2 Ser.), 124-137 (1899).
8. Dembowski, P.: Finite Geometries, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.
9. Dieudonné, J.: Sur les groupes classiques, Hermann, Paris, 1948.
10. Dieudonné, J.: La géométrie des groupes classiques, 3ème ed., Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
11. Havlicek, H.: 'Zur Theorie linearer Abbildungen I', J.Geometry 16, 152-167 (1981).
12. Havlicek, H.: 'Einbettung projektiver Desargues-Räume', Abh.Math.Sem. Univ.Hamburg 52, 228-231 (1982).
13. Herzer, A.: 'Eine Verallgemeinerung des Satzes von Dandelin', Elem. Math.27, 52-56 (1972).
14. Hotje, H.: 'Einbettung gewisser Kettengeometrien in projektive Räume', J.Geometry 5, 85-94 (1974).
15. Juel, C.: Vorlesungen über projektive Geometrie, Springer, Berlin, 1934.
16. Kötter, E.: 'Die Entwicklung der synthetischen Geometrie', J.Ber.DMV 5, 2.Heft, 1-486 (1901).
17. Mäurer, H.: 'Symmetries of quadrics', (in: Plaumann, P.-Strambach, K.(Hrsg.): Geometry-von Staudt's Point of View, Proc.NATO Adv.Study Inst., Bad Windsheim 1980), Reidel, Dordrecht, 1981.
18. Mehmke, R.: 'Über die Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung durch korrelative Bündel, sowie die projektive Erzeugung quadratischer Oberflächen in Räumen beliebiger Dimension', J.Ber.DMV 24, 58-72 (1915).

19. Metz, R.: 'Der affine Raum der verallgemeinerten Reguli', Geom. Dedicata 10, 337-367 (1981).
20. Reye, Th.: Die Geometrie der Lage, Zweite Abt., 4.Aufl., Kröner, Stuttgart, 1907.
21. Reye, Th.: Die Geometrie der Lage, Dritte Abt., 4.Aufl., Kröner, Leipzig, 1910.
22. Schröter, H.: Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde, Teubner Leipzig, 1880.
23. Schur, F.: 'Über die Erzeugung der Flächen 2.Grades durch korrelative Bündel', (in: Festschrift für Heinrich Weber), Teubner, Leipzig-Berlin, 1912.
24. Schur, F.:'Über die Erzeugung der Flächen 2.Grades durch korrelative Bündel', Math.Z.22, 86-88 (1925).
25. Sturm, R.: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften II, Teubner Leipzig-Berlin, 1908.
26. Veronese, G.: 'Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und des Schneidens', Math.Ann.19, 161-234 (1881).
27. Werner, M.: 'Eine explizite Einbettung für Möbius-Geometrien endlicher Dimension', J.Geometry 20, 146-150 (1983).

Anschrift des Verfassers:
Hans Havlicek,
Institut für Geometrie,
Technische Universität,
Gußhausstraße 27-29,
A-1040 Wien,
Österreich.