Hyperoskulierende Kegelschnitte
in Pappos - Ebenen der Charakteristik zwei

Von
Hans Havlicek (Wien)

1. Einleitung

Ausgangspunkt der vorliegenden Note sind die Begriffe der *Berührung*, *Oskulation* und *Hyperoskulation* von Kegelschnitten einer projektiven Pappos-Ebene[1]. Wesentliches Hilfsmittel ist dabei der Satz, daß es für zwei Kegelschnitte k und l mit einem gemeinsamen Linienelement (P,p) stets genau eine perspektive Kollineation μ mit Zentrum P und $k^{\mu} = l$ gibt [2,64]. Verallgemeinerungen für Quadriken und quadratische Kegel in klassischen projektiven Räumen wurden von H. P. Paukowitsch untersucht [6]. Vgl. auch dessen Note [7] für Querverbindungen zur projektiven Differentialgeometrie.

In einer *klassischen projektiven Ebene* bilden die Tangenten eines Kegelschnitts k einen Kegelschnitt k^{*} der dualen projektiven Ebene [2,76]. Ist (P,p) ein Linienelement von k, so gibt (p,P) ein Linienelement von k^{*} ab. Für zwei Kegelschnitte k und l mit einem gemeinsamen Linienelement (P,p) existiert daher auch genau eine perspektive Kollineation κ mit Achse p und $k^{\kappa} = l$. Die obengenannte Kollineation μ ist genau dann eine Elation, wenn Gleiches für κ gilt. Daraus folgt, daß Oskulation und Hyperoskulation von Kegelschnitten selbstduale Begriffsbildungen sind [2,77].

In einer *nichtfanoschen projektiven Pappos-Ebene* gehören alle Tangenten eines Kegelschnitts einem Geradenbüschel an [2,60]. Dessen Träger heißt der *Knoten* des Kegelschnitts. Haben hier zwei Kegelschnitte k und l ein Linienelement (P,p) gemeinsam, so gibt es - im Gegensatz zu klassischen projektiven Ebenen - nicht stets eine perspektive Kollineation κ mit Achse p und $k^{\kappa} = l$. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von κ liefert Satz 1.

---

[1]Begriffsbildungen und Notation folgen [2] und [3].

Die Sätze 3 und 5 zeigen, daß sich die *Hyperoskulation* zweier Kegelschnitte im nichtfanoschen Fall bereits unter recht schwachen Voraussetzungen herleiten läßt. Analoge Ergebnisse sind in klassischen projektiven Ebenen nicht möglich, da ein Kegelschnitt dort nur die Identität als automorphe Elation gestattet.

2. Berührende Kegelschnitte

Im folgenden sei durchwegs eine *nichtfanosche projektive Pappos-Ebene* $\Pi = (\mathcal{P},\mathcal{G})$ gegeben, also eine projektive Ebene mit einem *kommutativen Grundkörper* K der Charakteristik 2.

Satz 1. *Gegeben sind zwei Kegelschnitte k, l mit einem gemeinsamen Linienelement (P,p). Es existiert genau dann eine perspektive Kollineation κ mit Achse p und $k^\kappa = l$, falls k und l denselben Knoten besitzen.*

Beweis. Haben k und l denselben Knoten N, so genügt es den Fall $k \neq l$ zu untersuchen. Es gibt eine Gerade g durch P mit $g \cap k = \{1,P\} \neq \{1',P\} = g \cap l$. Weiters legen wir durch 1 eine Gerade h mit $h \neq 1P$, $h \neq 1N$, was $h \cap k = \{1,2\}$ und $1 \neq 2$ zur Folge hat. Aus $h' := (h \cap p) \vee 1'$ folgt $h' \cap l = \{1',2'\}$ und $1' \neq 2' \neq 2$. Wir setzen $Z := g \cap 22'$ und schreiben κ für jene perspektive Kollineation aus $\mathrm{PGL}(Z,p)$, die $1 \mapsto 1'$ leistet. Dann gilt $k^\kappa = l$, da k^κ und l die Punkte P, $1'$, $2'$ gemeinsam haben und in diesen Punkten dieselben Tangenten besitzen. Die Umkehrung ist trivial.□

Falls die in Satz 1 beschriebenen Kollineation κ existiert, so ist sie nicht eindeutig festgelegt. Das zeigt

Satz 2. *Sind k und l zwei Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Punkt P und demselben Knoten N, so enthält die Menge aller nichttrivialen perspektiven Kollineationen mit Achse $p := PN$ und $k \to l$ entweder nur Elationen oder nur Homologien*[2]*. Für alle Punkte $1 \in k\setminus\{P\}$ und $1' \in l\setminus\{P\}$ gibt es genau eine perspektive Kollineation κ_1 mit Achse p, $1^{\kappa_1} = 1'$ und $k^{\kappa_1} = l$.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathrm{PGL}(k;p)$ die Gruppe aller

---

[2]Die Identität in $\mathcal{P}$ ist bekanntlich sowohl Elation als auch Homologie.

automorphen perspektiven Kollineationen von k mit Achse p. Jede Kollineation aus $\mathrm{PGL}(k;p)$ ist eine Elation und $|\mathrm{PGL}(k;p)| \geq 2$. Vgl. etwa [4,51] oder [5,201]. Ist κ eine perspektive Kollineation mit Achse p und $k^{\kappa} = l$, so stimmt die Rechtsnebenklasse $\mathrm{PGL}(k;p)\kappa \subset \mathrm{PGL}(\Pi)$ überein mit der Menge aller perspektiven Kollineationen mit Achse p und $k \to l$. Liegt mit $\kappa \neq \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$ eine Elation bzw. Homologie vor, so ist jede nichttriviale Kollineation aus $\mathrm{PGL}(k;p)\kappa$ eine Elation bzw. Homologie.

Die Gruppe $\mathrm{PGL}(k;p)$ operiert regulär auf $k\backslash\{P\}$. Es gibt daher genau ein $\varphi \in \mathrm{PGL}(k;p)$ mit $1^{\varphi\kappa} = 1'$ und $\varphi\kappa =: \kappa_1 \in \mathrm{PGL}(k;p)\kappa$ leistet das Gewünschte.□

Satz 3. *Zwei Kegelschnitte k, l hyperoskulieren einander genau dann, wenn sie eine Tangente p gemeinsam haben und es eine Elation ε mit Achse p und $k^{\varepsilon} = l$ gibt.*

Beweis. Falls k und l einander hyperoskulieren, so haben sie ein Linienelement (P,p) gemeinsam, und es gibt eine Elation $\varepsilon \in \mathrm{PGL}(P,p)$ mit $k^{\varepsilon} = l$.

Ist umgekehrt p eine gemeinsame Tangente von k und l und $k^{\varepsilon} = l$, so folgt $k \cap p = l \cap p =: P$. Damit ist (P,p) gemeinsames Linienelement von k und l, und die Kegelschnitte haben denselben Knoten. Wir wählen zwei mit P kollineare Punkte $1 \in k\backslash\{P\}$ und $1' \in l\backslash\{P\}$. Nach Satz 2 existiert eine perspektive Kollineation κ_1 mit Achse p , $1^{\kappa 1} = 1'$ und $k^{\kappa 1} = l$. Da ε eine Elation ist, gilt Gleiches auch für κ_1. Daher ist P das Zentrum von κ_1, sodaß k und l einander in P hyperoskulieren.□

Sind die in Satz 2 betrachteten Kegelschnitte verschieden, und gibt es eine Homologie κ mit Achse p und $k^{\kappa} = l$, so können k und l nach Satz 3 nicht hyperoskulieren. Die eindeutig bestimmte perspektive Kollineation μ mit Zentrum P und $k^{\mu} = l$ ist nicht die Identität. Da der gemeinsame Knoten N von k und l unter μ fest bleibt, inzidiert er notwendig mit der Achse m von μ. Die perspektive Kollineation μ ist eine Homologie: Wäre μ nämlich Elation, so würden k und l einander in P oskulieren, und $m = PN = p$ ergäbe den Widerspruch, daß k und l einander in P hyperoskulieren.

Es gilt $(k \cap l)\backslash\{P\} = k \cap m = l \cap m$. Die Bestimmung von $k \cap m$ ist gleichwertig zur Bestimmung der Fixpunkte einer *involutorischen*

Projektivität von m auf sich[3] (vgl. [2,63]) bzw. - nach Einführung projektiver Koordinaten - zur Ermittlung der Nullstellen eines *reinquadratischen* Polynoms

$$p(x) = x^2 + a, \ a \in K$$

in einer Unbestimmten x. Wir schreiben $K^{(2)}$ für den Unterkörper der *Quadratzahlen* von K. Damit ist $k \cap l \neq \emptyset$ gleichwertig zu $a \in K^{(2)}$. Ist letzteres der Fall, so haben k und l genau zwei Linienelemente gemeinsam.

Wenn das Polynom $p(x)$ über K irreduzibel ist, so bezeichne $\bar{K} \supset K$ seinen Zerfällungskörper. Wegen $p'(x) = 2x = 0$ ist $p(x)$ inseparabel über K, hat also in $\bar{K}$ genau eine Nullstelle mit der Vielfachheit zwei [8,134ff]. Nach dem 1. Hauptsatz der projektiven Geometrie dürfen wir $\Pi = \Pi(\mathfrak{B},K)$ als projektive Ebene über einem Vektorraum $(\mathfrak{B},K)$ voraussetzen. Das Tensorprodukt $\bar{\mathfrak{B}} := \mathfrak{B} \otimes_K \bar{K}$ ist ein Vektorraum über $\bar{K}$ und bestimmt eine projektive Ebene $\bar{\Pi} = (\bar{\mathcal{P}},\bar{\mathcal{G}}) := \bar{\Pi}(\bar{\mathfrak{B}},\bar{K})$. Die projektive Ebene $\bar{\Pi}$ hat eine zu Π isomorphe Unterebene mit der Punktmenge $\{(\mathfrak{x}\otimes 1)\bar{K} \mid \mathfrak{x} \in \mathfrak{B}\setminus\{\mathfrak{o}\}\}$, die wir gemäß $(\mathfrak{x}\otimes 1)\bar{K} \equiv \mathfrak{x}K$ mit Π identifizieren. Die erweiterte Gerade $\bar{m} \supset m$ berührt die erweiterten Kegelschnitte $\bar{k}$ und $\bar{l}$ in einem Punkt $Q \in \bar{\mathcal{P}}\setminus\mathcal{P}$, sodaß $\bar{k}$ und $\bar{l}$ genau zwei Linienelemente gemeinsam haben.

3. Kegelschnitte mit demselben Knoten

Unter den in 2 betrachteten perspektiven Kollineationen mit $k \to l$ können auch Elationen vorkommen, deren Zentrum in den gemeinsamen Knoten der beiden Kegelschnitte fällt. Wir verzichten jedoch nun auf die Forderung, daß berührende Kegelschnitte vorliegen, und zeigen allgemeiner

Satz 4. *Für zwei Kegelschnitte k, l sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) Es gibt eine perspektive Kollineation σ mit dem Knoten N von k als Zentrum und $k^\sigma = l$.

b) Es gibt genau eine perspektive Kollineation σ mit dem Knoten N von k als Zentrum und $k^\sigma = l$.

c) Die Kegelschnitte k und l haben dieselbe Tangentenmenge.

---

[3]Eine involutorische Projektivität ist wegen Char$K = 2$ niemals hyperbolisch, was $|k \cap m| \leq 1$ ergibt.

d) Die Kegelschnitte k und l haben mindestens drei paarweise verschiedene Tangenten gemeinsam.

Beweis. a) ⇒ b). Sind σ_1, σ_2 zwei Kollineationen mit den in a) angegebenen Eigenschaften, so gibt $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ eine automorphe perspektive Kollineation von k mit Zentrum N ab. Da jede Gerade durch N höchstens einen Punkt von k trägt, folgt $\sigma_1\sigma_2^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$, also $\sigma_1 = \sigma_2$.

b) ⇒ c) ⇒ d) ist trivial.

d) ⇒ a). Es seien a, b, c drei paarweise verschiedene gemeinsame Tangenten von k und l. Wir setzen $A := a \cap k$, $A' := a \cap l$, ..., $C' := c \cap l$. Es gibt genau eine projektive Kollineation σ mit $N \mapsto N$, $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$. Nach Konstruktion ist σ perspektiv mit Zentrum N und leistet $k^\sigma = l$.□

Gemäß [4,54] ist ein Doppelverhältnis von je vier paarweise verschiedenen Tangenten eines Kegelschnitts bei Char$K = 2$ stets eine Quadratzahl. Genau für $K = K^{(2)}$ ist jede Gerade durch den Knoten eines Kegelschnitts eine Tangente dieses Kegelschnitts[4]. Unter dieser Voraussetzung ist die Existenz der in Satz 4 beschriebenen Kollineation σ gesichert, da nun die Bedingung c) stets erfüllt ist.

Gilt jedoch $K \neq K^{(2)}$, so kann nach [4,54] die Bestimmung der gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte aufgefaßt werden als die Festlegung der Schnittpunkte zweier Ketten der Möbiusgeometrie $\Sigma(K^{(2)},K)$; vgl. [1,93]. Es gibt hier Kegelschnitte mit genau zwei gemeinsamen Tangenten, sodaß in der Aussage d) von Satz 4 die Zahl "drei" nicht durch eine kleinere Zahl ersetzt werden kann.

Falls die in Satz 4 beschriebene perspektive Kollineation σ eine Elation und deren Achse p eine Tangente von k ist, so hyperoskulieren einander nach Satz 3 die Kegelschnitte k und l in $P = p \cap k = p \cap l$. Wenn jedoch die Elationsachse p den Kegelschnitt k nicht berührt, so kann analog 2 eine quadratische Erweiterung $\bar{\Pi}$ von Π konstruiert werden, in der $\bar{k}$ und $\bar{l}$ einander hyperoskulieren.

Umgekehrt ist jedoch für zwei einander hyperoskulierende Kegelschnitte k und l die Existenz von σ nicht gesichert, falls $K \neq K^{(2)}$ gilt: Den Tangentenmengen von k und l entsprechen dann

---

[4]Der Grundkörper K ist also ein *vollkommener Körper* [8,139] der Charakteristik 2, wie dies insbesondere für alle endlichen Körper GF(2^r) zutrifft.

nämlich berührenden Ketten der Möbiusgeometrie $\Sigma(K^{(2)},K)$, sodaß k und l entweder genau eine oder alle Tangenten gemeinsam haben[5]; beide Möglichkeiten treten tatsächlich auf, aber nur im zweiten Fall existiert die Elation σ.

Aus den obenstehenden Bemerkungen folgt

Satz 5. *Ist der Grundkörper K von Π ein vollkommener Körper der Charakteristik zwei, so hyperoskulieren zwei Kegelschnitte k, l einander genau dann, wenn es eine Elation η gibt, die den Knoten von k als Zentrum besitzt und $k^\eta = l$ leistet.*

Wir gehen noch kurz auf den Fall ein, daß in Satz 4 eine nichttriviale Homologie σ mit Achse n vorliegt. Allfällige Schnittpunkte von k und l liegen notwendig auf n und es gilt $k \cap l = k \cap n = l \cap n$. Die Menge $k \cap n$ stimmt überein mit der Menge der Fixpunkte einer *nichtinvolutorischen* und *nichtidentischen* Projektivität der Geraden n auf sich; die Ermittlung dieser Fixpunkte ist gleichwertig zur Bestimmung der Nullstellen eines *gemischtquadratischen* Polynoms

$q(x) = x^2 + ax + b$ $(a,\ b \in K,\ a \neq 0)$

in einer Unbestimmten x. Das Polynom $q(x)$ hat in seinem Zerfällungskörper wegen $q'(x) = 2x + a = a \neq 0$ zwei verschiedene Nullstellen [8,134ff]; $q(x)$ ist also separabel über K. Die Kegelschnitte k und l haben daher in Π oder nach einer geeigneten quadratischen Erweiterung genau zwei Linienelemente gemeinsam.

Literatur:

[1] BENZ, W.: Vorlesungen über Geometrie der Algebren, Grundlehren Bd. **197**, Berlin - Heidelberg - New York, Springer, 1973.

[2] BRAUNER, H.: Geometrie projektiver Räume I, Mannheim - Wien - Zürich, BI - Wissenschaftsverlag, 1976.

[3] BRAUNER, H.: Geometrie projektiver Räume II, Mannheim - Wien - Zürich, BI - Wissenschaftsverlag, 1976.

[4] HAVLICEK, H.: Erzeugung quadratischer Varietäten bei beliebiger Charakteristik, Geom. Dedicata **18**, 41 - 57 (1985).

[5] MÄURER, H.: Symmetries of Quadrics. In: P. PLAUMANN, K. STRAMBACH (Hrsg.), Geometry - von Staudt's Point of View, Dordrecht, D. Reidel, 1981.

[6] PAUKOWITSCH, H.P.: Über oskulierende Quadriken und oskulierende quadratische Kegel im reellen m-dimensionalen Raum, Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl. **188**, 429 - 450 (1979).

---

[5] Auf Grund der Hyperoskulation ließe sich nun die Aussage d) in Satz 4 von "drei" auf "zwei" abschwächen.

[7] PAUKOWITSCH, H.P.: Zum Berührungsbegriff in projektiven Papposräumen, Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math.- Naturwiss. Kl. **191**, 93 - 102 (1982).
[8] VAN DER WAERDEN, B.L.: Algebra, Erster Teil, 7.Aufl., Berlin - Heidelberg - New York, Springer, 1966.

Hans Havlicek
Institut für Geometrie
Technische Universität
Wiedner Hauptstraße 8-10
A-1040 Wien