

D I S S E R T A T I O N

"Lineare Abbildungen aus Graßmann-Räumen"

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der technischen Wissenschaften

eingereicht an der Technischen Universität Wien

von

Hans Havlicek

Wien, im Jänner 1980

.....

KURZFASSUNG

Ist Π ein n -dimensionaler projektiver Raum, so heißen zwei d -dimensionale Unterräume benachbart, wenn ihr Schnittraum mindestens $(d-1)$ -dimensional ist. Die Menge $\mathcal{U}(\Pi)$ aller d -dimensionalen Unterräume von Π ($1 \leq d \leq n-2$) versehen mit dieser Relation ergibt die Geometrie der d -dimensionalen Unterräume von Π , jede dazu isomorphe Struktur heißt ein Graßmann-Raum.

H. BRAUNER hat lineare Abbildungen aus einem projektiven Raum in einen projektiven Raum definiert. Durch geringfügige Modifikation dieser Definition erhalten wir eine einheitliche Kennzeichnung linearer Abbildungen aus einem projektiven oder graßmannschen Raum in einen projektiven Raum und diskutieren lineare Abbildungen aus einem Graßmann-Raum unter Benützung der Geometrie der d -dimensionalen Unterräume von Π . Die Existenz gewisser linearer Abbildung ist äquivalent dazu, daß Π ein Pappos-Raum ist. Setzen wir Π als pappossch voraus, so existieren insbesondere reguläre lineare Abbildungen γ , die dadurch gekennzeichnet sind, daß ihre Bildmenge $\text{Im}(\gamma)$ einen $\binom{n+1}{d+1}-1$ -dimensionalen Unterraum eines projektiven Raumes aufspannt. Die Bildmenge jeder regulären linearen Abbildung ist eine Graßmann-Varietät.

Jede lineare Abbildung aus der Geometrie der d -dimensionalen Unterräume eines n -dimensionalen projektiven Pappos-Raumes ist Produkt einer regulären linearen Abbildung γ in einen $\binom{n+1}{d+1}-1$ -dimensionalen projektiven Raum $\bar{\Pi}$ und der Einschränkung einer linearen Abbildung aus $\bar{\Pi}$ auf die Bildmenge $\text{Im}(\gamma)$. Jede lineare Abbildung aus einer Graßmann-Varietät kann daher zu einer linearen Abbildung des Gesamtraumes fortgesetzt werden. Zum Beweis benötigen wir eine Reihe von Hilfssätzen über lineare Abbildungen aus projektiven Räumen.

Im Sonderfall der Geometrie der Geraden eines dreidimensionalen reellen projektiven Raumes existieren 21 wesentlich verschiedene Typen linearer Abbildungen.

VORWORT

Jede Kollineation bildet einen projektiven Raum isomorph auf einen projektiven Raum ab.

Eine Definition homomorpher Abbildungen eines projektiven Raumes auf einen projektiven Raum wurde von W. KLINGENBERG angegeben und von F. RADÓ verallgemeinert. Falls Ur- und Bildraum desarguessch sind, wird jeder Homomorphismus durch eine "verallgemeinerte semilineare Abbildung" der zugehörigen Vektorräume beschrieben (vgl. [14],[15],[16]). Diese Homomorphismen sind globale Abbildungen; mindestens eine Basis des Ur-raumes wird bijektiv auf eine Basis des Bildraumes abgebildet. Vgl. dazu auch [13,S.155].

Eine andere Verallgemeinerung des Kollineationsbegriffes sind die sogenannten linearen Abbildungen aus einem projektiven Raum in einen projektiven Raum. Sie wurden zunächst als Produkt einer Projektion und einer Kollineation erklärt oder durch die Linearität der Abbildungsgleichungen gekennzeichnet (vgl.[8],[9]).

L. ECKHART und F. REHBOCK fanden unabhängig voneinander Beispiele "linearer Abbildungen" aus der Menge der Geraden eines dreidimensionalen reellen projektiven Raumes auf eine reelle projektive Ebene (vgl.[8],[9],[17],[18]). Eine lineare Abbildung aus der Geradenmenge eines dreidimensionalen reellen oder komplexen projektiven Raumes in die Punktmenge dieses Raumes gibt F. HOHENBERG in [12] an.

Allgemein können lineare Abbildungen aus der Menge der d -dimensionalen Unterräume eines projektiven Pappos-Raumes mit Hilfe der zugehörigen Graßmann-Varietät konstruiert werden, wie H. BRAUNER in [3] bemerkte.

Auf F. REHBOCK geht eine geometrische Beschreibung linearer Abbildungen zurück, die jedoch auf den dreidimensionalen

reellen projektiven Raum zugeschnitten ist (vgl. [17]).
Eine Kennzeichnung der Projektionen eines endlichdimensionalen projektiven Raumes durch innere Eigenschaften gibt H. TIMMERMANN in [22] an. Von H. BRAUNER stammt eine geometrische Definition linearer Abbildungen aus einem projektiven Raum in einen projektiven Raum (vgl. Abschnitt 1).

In dieser Arbeit soll eine geometrische Kennzeichnung linearer Abbildungen aus der Menge der d -dimensionalen Unterräume eines endlichdimensionalen projektiven Raumes angegeben werden, sodaß alle bekannten Beispiele linearer Abbildungen erfaßt werden.

Lineare Abbildungen sind nicht notwendig global. Die verwendeten Begriffsbildungen für nicht notwendig globale Abbildungen sind im Anhang (S.98) zusammengefaßt. Alle benötigten Hilfssätze über lineare Abbildungen aus projektiven Räumen sind in Abschnitt 1 gesammelt.

Ich möchte an dieser Stelle meinem Lehrer, Herrn o.Prof. DDr. H. BRAUNER für die wertvolle Unterstützung bei der Abfassung und Ausarbeitung dieser Dissertation aufrichtigst danken.

Ferner gilt mein Dank dem derzeitigen Rektor der Technischen Universität Wien, Magnifizenz o.Prof. Dr. W. NÖBAUER für die Übernahme des Korreferates.

INHALT

1	LINEARE ABBILDUNGEN AUS PROJEKTIVEN RÄUMEN	
1.1	Definition linearer Abbildungen	1
1.2	Fortsetzung von Kollineationen	5
1.3	Fortsetzung linearer Abbildungen	8
2	GRASSMANN - RÄUME	
2.1	Vorbemerkungen	23
2.2	Geometrie der d-dimensionalen Unterräume	25
2.3	Nachbarfolgen	30
2.4	Projektive Höchst Räume	34
2.5	Isomorphismen	36
2.6	Graßmann-Räume	42
2.7	Teilräume	44
2.8	Projektivitäten	47
3	LINEARE ABBILDUNGEN AUS GRASSMANN - RÄUMEN	
3.1	Definition linearer Abbildungen	49
3.2	Projektionen	53
3.3	Lineare Abbildungen mit höchstens einem Bildpunkt	54
3.4	Lineare Abbildungen aus der 1-Geometrie eines dreidimensionalen projektiven Raumes	56
3.5	Lineare Abbildungen mit mindestens zwei Bildpunkten	64
4	REGULÄRE LINEARE ABBILDUNGEN	
4.1	Die Bildmenge einer regulären linearen Abbildung	73
4.2	Graßmannsche Koordinaten	75
4.3	Der erste Fortsetzungssatz	78

5	DER ZWEITE FORTSETZUNGSSATZ	
5.1	Problemstellung	83
5.2	Konstruktion einer möglichen Lösung	85
5.3	Beweis für $n \leq 2d-1$	89
5.4	Beweis für $n = 2d$	90
5.5	Beweis für $n = 2d+1$	93
5.6	Anwendungen	95
	ANHANG	98
	LITERATUR	99

1 LINEARE ABBILDUNGEN AUS PROJEKTIVEN RÄUMEN

1.1 Definition linearer Abbildungen

1.1.1 Es seien $\Pi = (\mathcal{P}, \varphi)$ und $\Pi' = (\mathcal{P}', \varphi')$ zwei projektive Räume, und $\psi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ sei eine nicht notwendig globale Abbildung. Dann ist für jeden Punkt $X \in \mathcal{P}$ die Menge $\{X\}\psi$ definiert; gehört X der Ausnahmemenge $A(\psi)$ an, so ist $\{X\}\psi = \emptyset$, wohingegen für jeden Punkt X der Definitionsmenge $D(\psi)$ gilt $\{X\}\psi = \{X\psi\}$.

Sind \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 Teilmengen von \mathcal{P} , so können wir die Verbindungsmenge $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ bilden (vgl. [1, S.93]). Speziell für zwei verschiedene Punkte X, Y ist $\{X\} \vee \{Y\}$ die eindeutig bestimmte Gerade, welche X und Y enthält; außerdem gilt $\mathcal{M} \vee \emptyset = \emptyset \vee \mathcal{M} = \mathcal{M}$ für alle Mengen $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$.

1.1.2 Definition: Sind $\Pi = (\mathcal{P}, \varphi)$ und $\Pi' = (\mathcal{P}', \varphi')$ zwei projektive Räume, dann heißt eine Abbildung $\psi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ **l i n e a r**, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

- (L1) $(\{X\} \vee \{Y\})\psi = \{X\}\psi \vee \{Y\}\psi$ für alle Punkte $X \neq Y$ und $X, Y \in \mathcal{P}$.
- (L2) Ist $\{X\}\psi = \{Y\}\psi$ für zwei verschiedene Punkte X, Y , so existiert stets ein Punkt $A \in \{X\} \vee \{Y\}$ mit $\{A\}\psi = \emptyset$.¹⁾

Diese Definition linearer Abbildungen stimmt mit der auf H. BRAUNER zurückgehenden Definition nicht völlig überein. Von formalen Unterschieden abgesehen nennt BRAUNER eine Abbildung linear, wenn sie (L1) erfüllt und mindestens zwei verschiedene Bildpunkte besitzt.²⁾ Jede solche "lineare" Abbildung erfüllt dann (L2) (vgl. dazu [1, S.150]³⁾, [3], [4]).

1.1.3 Für jeden Unterraum $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$ ist die Einschränkung $\psi|_{\mathcal{P}_1}$ ebenfalls eine lineare Abbildung, da \mathcal{P}_1 mit je zwei verschiedenen Punkten auch deren Verbindungsgerade enthält.⁴⁾ Ist g eine Gerade mit zwei verschiedenen Ausnahmepunkten A_1, A_2 , so folgt $g\psi = (\{A_1\} \vee \{A_2\})\psi = \{A_1\}\psi \vee \{A_2\}\psi = \emptyset \vee \emptyset = \emptyset$; die Gerade g besitzt deshalb nur Ausnahmepunkte, und die Ausnahmemenge $A(\psi)$ ist daher ein Unterraum von Π .

¹⁾ Für $\{X\}\psi = \{Y\}\psi = \emptyset$ ist (L2) trivial.

²⁾ Bilden wir alle Punkte eines mindestens eindimensionalen projektiven Raumes auf einen Punkt dieses Raumes ab, so erfüllt diese globale Abbildung zwar (L1) aber nicht (L2).

³⁾ In [1] werden die linearen Abbildungen als "singuläre Kollineationen" bezeichnet.

⁴⁾ Diese für das folgende wichtige Aussage ist ein Grund der geänderten Definition einer linearen Abbildung.

Trägt eine Gerade g genau einen Ausnahmepunkt A , so besitzt sie mindestens einen Punkt $P \in D(\psi)$. Mit (L1) gilt $g\psi = (\{A\} \vee \{P\})\psi = \{A\}\psi \vee \{P\}\psi = \emptyset \vee \{P\}\psi$. Für jeden von A und P verschiedenen Punkt $X \in g$ ist dann $X\psi$ definiert, und aus $g\psi = (\{P\} \vee \{X\})\psi = \{P\}\psi \vee \{X\}\psi = \{P\}\psi \vee \{X\}\psi = \{P\}\psi$ folgt $P\psi = X\psi$; ψ ist dann nicht injektiv. Gehört eine Gerade g ganz der Definitionsmenge $D(\psi)$ an, so ist $\psi|_g$ nach (L2) injektiv.

1.1.4 Besitzt eine injektive lineare Abbildung einen Ausnahmepunkt, so ist sie nach 1.1.3 eine leere Abbildung, und umgekehrt ist jede leere lineare Abbildung injektiv.

Eine nichtleere lineare Abbildung $\varrho: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ ist daher stets global; wir nennen ϱ kurz eine lineare Injektion. Für $|\text{Im}(\varrho)| = 1$ ist der Urraum Π notwendig einpunktig; gilt jedoch $|\text{Im}(\varrho)| \geq 2$, so ist ϱ auch "linear" im Sinne der Definition von BRAUNER und gleich einer Kollineation.¹⁾ Die Bildmenge $\text{Im}(\varrho)$ jeder linearen Injektion ϱ ist daher ein Unterraum von Π' (vgl. [1, S.151]).

1.1.5 Definition: Sind \mathcal{P}_1 und $\bar{\mathcal{P}}_1$ komplementäre Unterräume eines projektiven Raumes $\Pi = (\mathcal{P}, \varphi)$, so nennen wir die Abbildung $\pi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_1$ mit $\{X\pi\} := (\bar{\mathcal{P}}_1 \vee \{X\}) \cap \mathcal{P}_1$, für alle $X \in \mathcal{P} \setminus \bar{\mathcal{P}}_1$ die P r o j e k t i o n von Π aus dem Zentrum $\bar{\mathcal{P}}_1$ auf \mathcal{P}_1 .^{2) 3)}

Im Gegensatz zur üblichen Definition (vgl. [1, S.147]) setzen wir $\bar{\mathcal{P}}_1$ nicht als echten Unterraum voraus. Es kommt daher der Fall hinzu, daß $\bar{\mathcal{P}}_1 = \mathcal{P}$ und $\mathcal{P}_1 = \emptyset$ ist; dann ist die Projektion π eine leere Abbildung und daher linear.

Für $\mathcal{P}_1 \neq \emptyset$ ist ebenfalls $\bar{\mathcal{P}}_1$ die Ausnahmemenge der Projektion und diese erfüllt (L1) (vgl. [1, S.149]) und (L2): Sind nämlich X, Y zwei verschiedene Punkte mit $\{X\}\psi = \{Y\}\psi \neq \emptyset$, so schneidet die Gerade XY ⁴⁾ den Ausnahmeunterraum $\bar{\mathcal{P}}_1$, da dieser eine Hyperebene des projektiven Raumes $\Pi(\bar{\mathcal{P}}_1 \vee \{X\}) = (\bar{\mathcal{P}}_1 \vee \{Y\})$ ist (vgl. [1, S.99]).

- 1) Hier geht erstmalig die vereinbarte Gleichheit von Abbildungen ein (vgl. Anhang). Eine lineare Injektion ist nicht notwendig surjektiv; eine Kollineation ist stets surjektiv.
- 2) Vgl. dazu auch die von H. TIMMERMANN angegebene Kennzeichnung der Projektion durch innere Eigenschaften [22].
- 3) Die Surjektivität einer Projektion ist wegen $X = X\pi$ für alle $X \in \mathcal{P}_1$ erfüllt.
- 4) Für zwei verschiedene Punkte X, Y bezeichnen wir die Verbindungsgerade $\{X\} \vee \{Y\}$ auch mit XY .

1.1.6 Sind $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{U})$, $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{U}')$ und $\Pi'' = (\mathcal{P}'', \mathcal{U}'')$ projektive Räume und $\psi_1: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ sowie $\psi_2: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}''$ lineare Abbildungen, so gilt für je zwei Punkte $X, Y \in \mathcal{P}$

$$((\{X\} \vee \{Y\})\psi_1)\psi_2 = (\{X\}\psi_1 \vee \{Y\}\psi_1)\psi_2 = \{X\}\psi_1\psi_2 \vee \{Y\}\psi_1\psi_2.$$

Ist $\{X\}\psi_1\psi_2 = \{Y\}\psi_1\psi_2 \neq \emptyset$ für zwei verschiedene Punkte $X, Y \in \mathcal{P}$, so existiert nach (L2) für $\{X\}\psi_1 = \{Y\}\psi_1$ ein Punkt $A \in \{X\} \vee \{Y\}$ mit $\{A\}\psi_1 = \emptyset$, was $\{A\}\psi_1\psi_2 = \emptyset$ mit sich zieht; gilt jedoch $\{X\}\psi_1 \neq \{Y\}\psi_1$, so trägt die Verbindungsgerade dieser beiden verschiedenen Punkte einen Punkt A' mit $\{A'\}\psi_2 = \emptyset$.

Dann ist jedoch $\psi_1|_{XY}$ eine lineare Injektion, und für den Punkt $\tilde{A} := A'(\psi_1|_{XY})^{-1}$ gilt $\{\tilde{A}\}\psi_1\psi_2 = \emptyset$.

Die zusammengesetzte Abbildung $\psi_1\psi_2: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}''$ ist daher linear.

1.1.7 Es seien $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{U})$ und $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{U}')$ projektive Räume. Dann gilt folgender Hauptsatz über lineare Abbildungen:

Jede lineare Abbildung $\psi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ ist Produkt einer Projektion $\pi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_1$ von Π aus dem Zentrum $A(\psi)$ auf einen zu $A(\psi)$ komplementären Unterraum \mathcal{P}_1 und einer linearen Injektion $\varrho: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}'$.

Beweis: Jede lineare Abbildung, die mindestens zwei verschiedene Bildpunkte besitzt, ist "linear" im Sinne der Definition von BRAUNER und besitzt nach [3] die geforderten Eigenschaften. Es verbleiben daher nur zwei Typen von trivialen linearen Abbildungen:

(1) ψ ist eine leere Abbildung. Die Projektion $\pi: \mathcal{P} \rightarrow \emptyset$ aus dem Zentrum \mathcal{P} auf den leeren Unterraum von Π , zusammengesetzt mit der leeren linearen Abbildung $\varrho: \emptyset \rightarrow \mathcal{P}'$, stimmt mit ψ überein.

(2) Die lineare Abbildung $\psi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ besitzt genau einen Bildpunkt; dann existiert ein Punkt $P \in D(\psi) \subset \mathcal{P}$ mit $P\psi := P'$. Jede Gerade durch P besitzt nach 1.1.3 genau einen Schnittpunkt mit dem Ausnahmeunterraum $A(\psi)$, der also eine zum Unterraum $\{P\}$ komplementäre Hyperebene ist.

Nehmen wir die Projektion $\pi: \mathcal{P} \rightarrow \{P\}$ aus dem Zentrum $A(\psi)$ und

ferner die lineare Injektion $\varrho: \{P\} \rightarrow \mathcal{P}'$, welche $P\varrho = P'$ leistet, so gilt $\psi = \pi\varrho$. □

Wegen $\text{Im}(\psi) = \text{Im}(\varrho)$ ist nach 1.1.4 die Bildmenge $\text{Im}(\psi)$ stets ein Unterraum von Π' . Das ermöglicht

1.1.8 Definition: Die Dimension des Bildraumes $\text{Im}(\psi)$ einer linearen Abbildung heißt **R a n g** der linearen Abbildung ψ .

Wir bezeichnen den Rang einer linearen Abbildung ψ mit $\text{rg}\psi$. Dann ist $-1 \leq \text{rg}\psi \leq \dim\Pi$.

1.1.9 Sind \mathfrak{m}_1 und \mathfrak{m}_2 Teilmengen von \mathcal{P} , so gilt $\mathfrak{m}_1 \vee \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_1 \cup \mathfrak{m}_2 \cup (U(\{X_1\} \vee \{X_2\} \mid X_1 \in \mathfrak{m}_1 \wedge X_2 \in \mathfrak{m}_2))$ (vgl. [1, S.93]); ist ψ eine lineare Abbildung, so folgt $(\mathfrak{m}_1 \vee \mathfrak{m}_2)\psi = \mathfrak{m}_1\psi \cup \mathfrak{m}_2\psi \cup (U(\{X_1\} \vee \{X_2\} \mid X_1 \in \mathfrak{m}_1 \wedge X_2 \in \mathfrak{m}_2))\psi = \mathfrak{m}_1\psi \cup \mathfrak{m}_2\psi \cup (U(\{X_1\}\psi \vee \{X_2\}\psi \mid X_1 \in \mathfrak{m}_1 \wedge X_2 \in \mathfrak{m}_2)) = \mathfrak{m}_1\psi \cup \mathfrak{m}_2\psi \cup (U(\{X_1'\} \vee \{X_2'\} \mid X_1' \in \mathfrak{m}_1\psi \wedge X_2' \in \mathfrak{m}_2\psi)) = \mathfrak{m}_1\psi \vee \mathfrak{m}_2\psi$.

Die Menge $u\Pi$ aller Unterräume von Π bildet mit der binären Verknüpfung \vee bekanntlich eine kommutative Halbgruppe $(u\Pi; \vee)$ (vgl. [1, S.95]). Für jeden Unterraum $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$ ist $\psi|_{\mathcal{P}_1}$ linear und daher nach 1.1.7 $\mathcal{P}_1\psi = \text{Im}(\psi|_{\mathcal{P}_1})$ ein Unterraum von Π' . Die lineare Abbildung ψ induziert daher einen Homomorphismus $\hat{\psi}$ von $(u\Pi; \vee)$ in $(u\Pi'; \vee)$ mit $\mathcal{P}_1\hat{\psi} := \mathcal{P}_1\psi$.

Für jede Teilmenge $\mathfrak{m} \subset \mathcal{P}$ ist die Verbindungshülle $[\mathfrak{m}]$ definiert (vgl. [1, S.86]). Aus $\mathfrak{m} \subset [\mathfrak{m}]$ folgt $\mathfrak{m}\psi \subset [\mathfrak{m}]\psi$ und da $[\mathfrak{m}]\psi$ ein Unterraum von Π' ist, gilt auch $[\mathfrak{m}\psi] \subset [\mathfrak{m}]\psi$.

Ist $X' \in [\mathfrak{m}]\psi$, so existiert ein Ursprung $X \in [\mathfrak{m}]$ mit $X\psi = X'$. Der Punkt X ist bereits von endlich vielen Punkten $\{M_1, \dots, M_k\} \subset \mathfrak{m}$ abhängig (vgl. [1, S.87]), das heißt $X \in V(\{M_i\} \mid i=1, \dots, k)$ und daher $X\psi \in V(\{M_i\}\psi \mid i=1, \dots, k) \subset [\mathfrak{m}\psi]$.

Damit gilt insgesamt $[\mathfrak{m}]\psi = [\mathfrak{m}\psi]$.

Insbesondere für eine Basis \mathcal{L} erhalten wir aus $\text{Im}(\psi) = [\mathcal{L}]\psi = [\mathcal{L}\psi]$ die Formel $\text{rg}\psi = \dim \Pi([\mathcal{L}\psi])$.

1.2 Fortsetzung von Kollineationen

1.2.1 Wir betrachten in 1.2 endlichdimensionale projektive Räume $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{U})$ und $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{U}')$ mit $\dim \Pi = \dim \Pi' =: n$. Wir untersuchen, ob und in welcher Weise eine Kollineation eines echten Unterraumes von Π auf einen echten Unterraum von Π' zu einer Kollineation von Π auf Π' fortgesetzt werden kann.

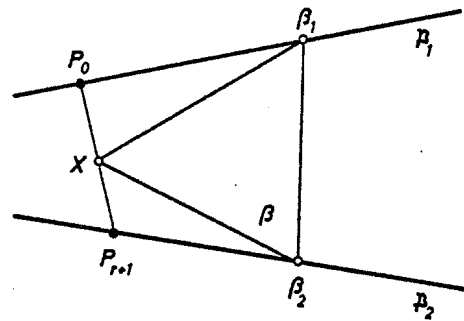
Vorbereitend zeigen wir folgenden Hilfssatz:

1.2.2 Sind \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 komplementäre, nichtleere Unterräume von Π und $(\mathcal{L}_1, \mathcal{B}_1)$ bzw. $(\mathcal{L}_2, \mathcal{B}_2)$ Fundamentalfiguren ¹⁾ von $\Pi(\mathcal{P}_1)$ bzw. $\Pi(\mathcal{P}_2)$, dann ist $(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2, \mathcal{B})$ für alle Hyper-ebenen \mathcal{B} mit $\mathcal{B} \supset \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$, welche von $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{B}_2$ und $\mathcal{P}_2 \vee \mathcal{B}_1$ verschieden sind, eine Fundamentalfigur von Π .

Beweis: Für $\mathcal{L}_1 = \{P_0, \dots, P_r\}$ und $\mathcal{L}_2 = \{P_{r+1}, \dots, P_n\}$ ist $\mathcal{L} := \{P_0, \dots, P_r, P_{r+1}, \dots, P_n\}$ eine Basis von Π . Weiters gilt $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 = (\{P_0\} \vee \mathcal{B}_1) \vee (\{P_{r+1}\} \vee \mathcal{B}_2) = (P_0 P_{r+1}) \vee (\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2)$; nach dem Dimensionssatz ist $\dim \Pi(P_0 P_{r+1}) = 1$ und $\dim \Pi(\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2) = n-2$, sodaß die Gerade $P_0 P_{r+1}$ komplementär zu $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$ ist. Das Hyperebenenbüschel mit dem

Träger $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$ ist also zur Punkt-reihe $P_0 P_{r+1}$ perspektiv. Wählen wir einen Punkt $X \in P_0 P_{r+1} \setminus \{P_0, P_{r+1}\}$, so ist $\mathcal{B} := \{X\} \vee (\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2)$ eine Hyper-ebene mit $\mathcal{B} \cap \mathcal{P}_1 = \mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B} \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{B}_2$. Nehmen wir nämlich indirekt an

$\mathcal{B} \cap \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1$, so folgt mit $\mathcal{B} = \mathcal{P}_1 \vee \{X\} \vee \mathcal{B}_2 = \mathcal{P}_1 \vee \{P_0\} \vee \{X\} \vee \mathcal{B}_2 = \mathcal{P}_1 \vee \{P_{r+1}\} \vee \mathcal{B}_2 = \mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$ ein Widerspruch. Ebenso kann $\mathcal{B} \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{B}_2$ bewiesen werden. Damit folgt insgesamt $\mathcal{L} \cap \mathcal{B} = (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) \cap \mathcal{B} = (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{B}) = (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{B}_1) \cup (\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{B}_2) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. □



1.2.3 Es seien nun \mathcal{P}_r und \mathcal{P}'_r r -dimensionale echte Unterräume von Π bzw. Π' und $\alpha_r: \mathcal{P}_r \rightarrow \mathcal{P}'_r$ sei eine Kollineation von $\Pi(\mathcal{P}_r)$

¹⁾ Vgl. [1, S. 152].

auf $\Pi(\mathcal{Q}_r')$.¹⁾ Für $r = 1$ ist jede Bijektion von \mathcal{Q}_r auf \mathcal{Q}_r' auch eine Kollineation von $\Pi(\mathcal{Q}_r)$ auf $\Pi(\mathcal{Q}_r')$ und daher nicht notwendig zu einer Kollineation des Gesamtraumes fortsetzbar. Ist jedoch $r \geq 2$ und daher $n \geq 3$, so gilt:

Sind $(\{P_0, \dots, P_r\}, \mathcal{B}_r)$ und $(\{P_0, \dots, P_r, P_{r+1}, \dots, P_n\}, \mathcal{B})$ geordnete Fundamentalfiguren von $\Pi(\mathcal{Q}_r)$ bzw. Π mit $\mathcal{B} \cap \mathcal{Q}_r = \mathcal{B}_r$ und ist $(\{P_0 \alpha_r, \dots, P_r \alpha_r, P'_{r+1}, \dots, P'_n\}, \mathcal{B}')$ eine geordnete Fundamentalfigur von Π' mit $\mathcal{B}' \cap \mathcal{Q}_r' = \mathcal{B}_r \alpha_r$, dann existiert genau eine Kollineation α von Π auf Π' , welche α_r fortsetzt und die geordnete Fundamentalfigur $(\{P_0, \dots, P_r, P_{r+1}, \dots, P_n\}, \mathcal{B})$ auf die geordnete Fundamentalfigur $(\{P_0 \alpha_r, \dots, P_r \alpha_r, P'_{r+1}, \dots, P'_n\}, \mathcal{B}')$ abbildet.

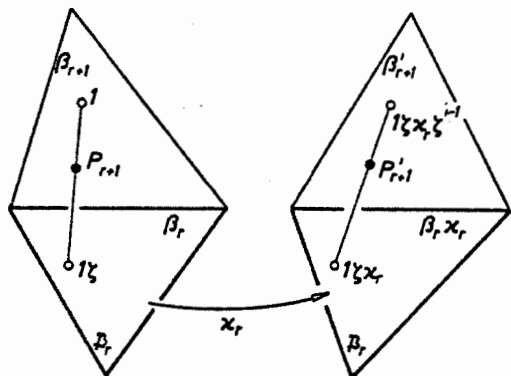
Beweis:

(1) Die Existenz der geforderten Fundamentalfiguren folgt aus 1.2.2.

(2) Wir zeigen, daß es höchstens eine Kollineation α mit den gewünschten Eigenschaften gibt. Sind nämlich α und $\tilde{\alpha}$ zwei solche Kollineationen, so ist $\alpha \tilde{\alpha}^{-1}$ eine Autokollineation von Π , welche die Punkte P_0, \dots, P_n als Fixpunkte besitzt und die Hyperebene \mathcal{B} als ganzes fest läßt. Darüberhinaus ist jedoch jeder Punkt der Geraden $P_0 P_1 \subset \mathcal{Q}_r$ wegen $\alpha|_{\mathcal{Q}_r} = \tilde{\alpha}|_{\mathcal{Q}_r}$ ein Fixpunkt, sodaß $\alpha \tilde{\alpha}^{-1} = \text{id}_{\mathcal{Q}}$ nachgewiesen ist (vgl. [1, S.155]).

(3) Die Konstruktion der Kollineation α erfolgt schrittweise. In den Unterräumen $\mathcal{Q}_{r+1} := \mathcal{Q}_r \vee \{P_{r+1}\}$ und $\mathcal{Q}'_{r+1} := \mathcal{Q}'_r \vee \{P'_{r+1}\}$ sind $(\{P_0, \dots, P_r, P_{r+1}\}, \mathcal{B}_{r+1})$ bzw. $(\{P_0 \alpha_r, \dots, P_r \alpha_r, P'_{r+1}\}, \mathcal{B}'_{r+1})$ geordnete Fundamentalfiguren, wenn wir $\mathcal{B}_{r+1} := \mathcal{Q}_{r+1} \cap \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'_{r+1} = \mathcal{Q}'_{r+1} \cap \mathcal{B}'$ setzen.

Jeder Punkt $X \in \mathcal{Q}_{r+1} \setminus (\mathcal{Q}_r \cup \mathcal{B}_{r+1})$ ist Zentrum einer Perspektivität $\zeta_X: \mathcal{B}_{r+1} \rightarrow \mathcal{Q}_r$, und ebenso ist jeder Punkt $X' \in \mathcal{Q}'_{r+1} \setminus (\mathcal{Q}'_r \cup \mathcal{B}'_{r+1})$ Zentrum einer Perspektivität $\zeta'_{X'}: \mathcal{B}'_{r+1} \rightarrow \mathcal{Q}'_r$. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $\zeta := \zeta_{P_{r+1}}$.



¹⁾ Da eine Kollineation von $\Pi(\mathcal{Q}_r)$ auf $\Pi(\mathcal{Q}_r')$ existiert, gilt notwendig $r \geq 1$.

und $\zeta' := \zeta_{P'_{r+1}}$.

Nun definieren wir eine Abbildung $\kappa_{r+1}: \mathcal{P}_{r+1} \rightarrow \mathcal{P}'_{r+1}$.

Es sei

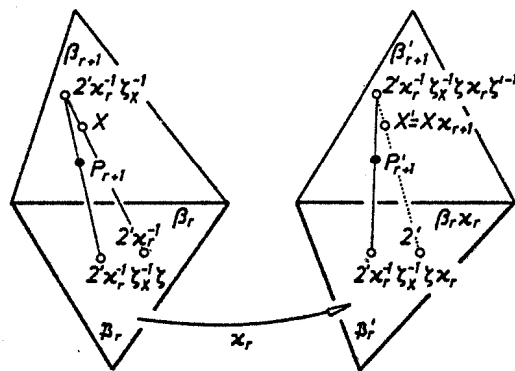
- (i) $X\kappa_{r+1} := X\kappa_r$ für alle $X \in \mathcal{P}_r$ und
- (ii) $X\kappa_{r+1} := X\zeta\kappa_r\zeta'^{-1}$ für alle $X \in \mathcal{B}_{r+1} \setminus \mathcal{P}_r$.

Für $X \in \mathcal{P}_{r+1} \setminus (\mathcal{P}_r \cup \mathcal{B}_{r+1})$ ist ζ_X eine Kollineation von $\Pi(\mathcal{B}_{r+1})$ auf $\Pi(\mathcal{P}_r)$ und daher ist die Abbildung

$\kappa_r^{-1}\zeta_X^{-1}\zeta_{X'}\kappa_r: \mathcal{P}'_r \rightarrow \mathcal{B}'_{r+1}$ eine Kollineation von $\Pi(\mathcal{P}'_r)$ auf $\Pi(\mathcal{B}'_{r+1})$. Jeder Punkt $Y' \in \mathcal{P}'_r \cap \mathcal{B}'_{r+1}$ ist Fixpunkt dieser Kollineation, sodaß nach [1, S.148] genau ein Punkt X' existiert mit $\zeta_{X'} = \kappa_r^{-1}\zeta_X^{-1}\zeta_{X'}\kappa_r$. Wir definieren

- (iii) $X\kappa_{r+1} := X'$ für alle $X \in \mathcal{P}_{r+1} \setminus (\mathcal{P}_r \cup \mathcal{B}_{r+1})$.

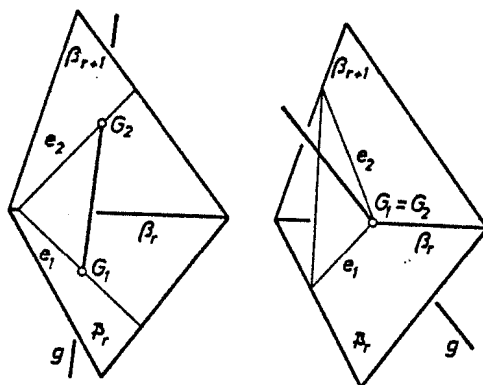
Durch (i), (ii) und (iii) erhalten wir eine globale Abbildung $\kappa_{r+1}: \mathcal{P}_{r+1} \rightarrow \mathcal{P}'_{r+1}$, insbesondere ist $P_{r+1}\kappa_{r+1} = P'_{r+1}$ und $\mathcal{B}_{r+1}\kappa_{r+1} = \mathcal{B}'_{r+1}$.



Für jeden Punkt von \mathcal{P}'_{r+1} ist durch Umkehrung obiger Konstruktion der Ursprung eindeutig rekonstruierbar, sodaß die Abbildung bijektiv ist. Es verbleibt zu zeigen, daß κ_{r+1} stets je drei kollineare Punkte in kollineare Punkte abbildet. Für Punktetripel aus \mathcal{P}_r ist das trivial; beachten wir ferner, daß für alle Punkte $X \in \mathcal{B}_{r+1}$ der Bildpunkt $X\kappa_{r+1} = X\zeta\kappa_r\zeta'^{-1}$ ist, so ist die Eigenschaft auch für kollineare Punktetripel aus \mathcal{B}_{r+1} nachgewiesen.

Ist schließlich g eine Gerade, welche weder in \mathcal{P}_r noch in \mathcal{B}_{r+1} enthalten ist, so existieren die (nicht notwendig verschiedenen) Spurpunkte $G_1 \in g \cap \mathcal{P}_r$ und $G_2 \in g \cap \mathcal{B}_{r+1}$. Wir legen durch g eine beliebige Ebene, deren

Spuren e_1 und e_2 in \mathcal{P}_r bzw. \mathcal{B}_{r+1} jedoch verschieden sind. Dann folgt für jeden Punkt $X \in g \setminus \{G_1, G_2\}$ aus $X \in e_1 \vee e_2$ nach der Definition von κ_{r+1} , daß $X\kappa_{r+1}$ in der Ebene $e_1\kappa_{r+1} \vee e_2\kappa_{r+1}$ liegen muß. Dabei ist $G_1\kappa_{r+1} \in e_1\kappa_{r+1}$ und $G_2\kappa_{r+1} \in e_2\kappa_{r+1}$.



Wählen wir durch g eine zweite, von $e_1 \vee e_2$ verschiedene Ebene mit verschiedenen Spuren f_1 und f_2 , so gilt analog, daß $X\kappa_{r+1}$, $G_1\kappa_{r+1}$ und $G_2\kappa_{r+1}$ Punkte der Ebene $f_1\kappa_{r+1} \vee f_2\kappa_{r+1}$ sind. Wir sammeln diese Zwischenergebnisse und erhalten

$g\kappa_{r+1} \subset (e_1\kappa_{r+1} \vee e_2\kappa_{r+1}) \cap (f_1\kappa_{r+1} \vee f_2\kappa_{r+1})$. Mit $e_1 \vee e_2 \neq f_1 \vee f_2$ ist notwendig $e_1 \neq f_1$ oder $e_2 \neq f_2$; da κ_{r+1} bijektiv ist, folgt $e_1\kappa_{r+1} \neq f_1\kappa_{r+1}$ oder $e_2\kappa_{r+1} \neq f_2\kappa_{r+1}$, sodaß auch die Verbindungsebenen $(e_1\kappa_{r+1} \vee e_2\kappa_{r+1})$ und $(f_1\kappa_{r+1} \vee f_2\kappa_{r+1})$ verschieden sind. Der Durchschnitt zweier verschiedener Ebenen ist stets Teilmenge einer Geraden (vgl. [1, S.92]), sodaß $g\kappa_{r+1}$ eine Menge kollinearere Punkte ist und jedes Tripel kollinearere Punkte von g wird auf ein Tripel kollinearere Punkte abgebildet.

(4) Auf Grund der endlichen Dimension von Π liefert wiederholte Anwendung der in (3) angegebenen Konstruktionsvorschrift nach endlich vielen Schritten eine Kollineation $\kappa: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ mit den gewünschten Eigenschaften. □

1.3 Fortsetzung linearer Abbildungen

1.3.1 Es seien $\Pi = (\mathcal{P}, \eta)$ und $\Pi' = (\mathcal{P}', \eta')$ zwei projektive Räume, \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 zwei verschiedene echte Unterräume von Π mit $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}$. Wir untersuchen, ob zwei gegebene lineare Abbildungen $\psi_1: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}'$ und $\psi_2: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}'$ mit $\psi_1|_{(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)} = \psi_2|_{(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)}$ zu einer linearen Abbildung $\psi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ fortgesetzt werden können.

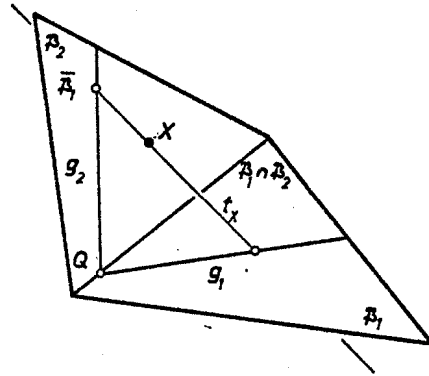
Jede lineare Abbildung, die gegebene Abbildungen fortsetzt, bezeichnen wir im folgenden kurz als lineare Fortsetzung dieser Abbildungen.

1.3.2 Sind die Unterräume \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 nicht komplementär und ist der Durchschnitt $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap D(\psi_1)$ nicht leer, so existiert höchstens eine lineare Fortsetzung $\psi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ der Abbildungen ψ_1 und ψ_2 .

Beweis: In $\Pi(\mathcal{P}_2)$ wählen wir einen zu $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ komplementären Unterraum $\bar{\mathcal{P}}_1$ aus. In Π ist $\bar{\mathcal{P}}_1$ zu \mathcal{P}_1 komplementär und deshalb nicht leer. Dann existiert aus jedem Punkt $X \in \mathcal{P} \setminus (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$ genau eine Treffgerade t_X an \mathcal{P}_1 und $\bar{\mathcal{P}}_1$.

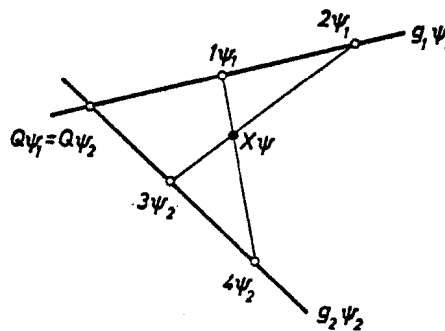
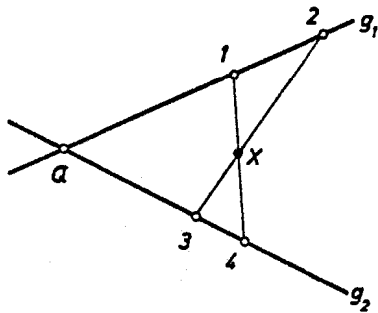
Ist $Q \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ der nach Voraussetzung existierende Nichtausnahmepunkt von ψ_1 (und ψ_2), so ist $\{Q\} \cup t_X$ eine Ebene, die \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 in je einer Geraden g_1 bzw. g_2 schneidet.

Die Einschränkung von ψ_i auf die Gerade g_i ($i=1,2$) ist nach 1.1.3 und 1.1.8 eine lineare Abbildung vom Rang 1 oder 0. Wir unterscheiden folgende Fälle:



(1) $\text{rg}(\psi_1|g_1) = \text{rg}(\psi_2|g_2) = 1$ und $g_1\psi_1 \neq g_2\psi_2$.

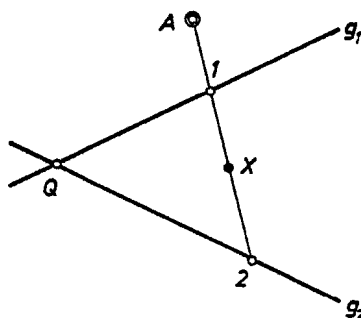
Wählen wir zwei verschiedene Punkte $1, 2 \in g_1 \setminus \{Q\}$, dann sind



3, 4 mit $\{3\} := 1X \cap g_2$ und $\{4\} := 2X \cap g_2$ zwei verschiedene Punkte von $g_2 \setminus \{Q\}$. Soll ψ eine lineare Fortsetzung von ψ_1 und ψ_2 sein, so ergibt sich der Punkt $X\psi$ notwendig als Schnittpunkt der Geraden $1\psi_1 3\psi_2$ und $2\psi_1 4\psi_2$.¹⁾

(2) $\text{rg}(\psi_1|g_1) = \text{rg}(\psi_2|g_2) = 0$ und $g_1\psi_1 = g_2\psi_2$.

Die Abbildung $(\psi_1|g_1)(\psi_2|g_2)^{-1}: g_1 \rightarrow g_2$ ist nach 1.1.4 global und bijektiv; für die Fortsetzbarkeit von ψ_1 und ψ_2 ergibt

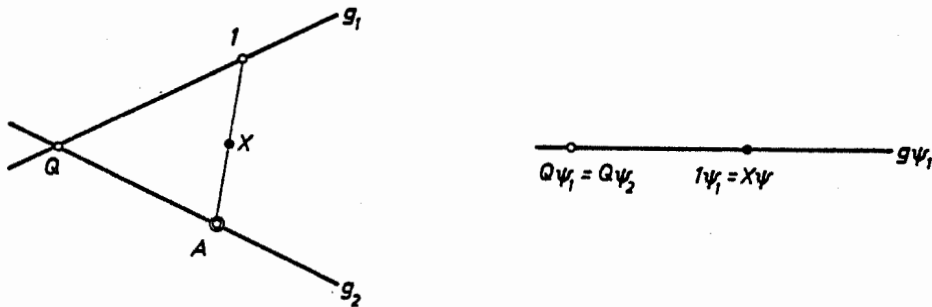


¹⁾ Die Abbildung $\psi|(g_1 \vee g_2)$ ist bereits durch $1 \mapsto 1\psi_1$, $2 \mapsto 2\psi_1$, $Q \mapsto Q\psi_1 = Q\psi_2$ und $\psi_2|g_2$ höchstens eindeutig festgelegt.

sich notwendig, daß diese Abbildung eine Perspektivität mit einem Zentrum A ist. Jede lineare Fortsetzung ψ von ψ_1 und ψ_2 leistet dann für $X = A$ notwendig $\{X\}\psi = \emptyset$, und für $X \neq A$ hat $X\psi = 1\psi_1$ mit $\{1\} := XA \cap g_1$ zu gelten.

(3) $\text{rg}(\psi_1|g_1) = 1, \text{rg}(\psi_2|g_2) = 0$.

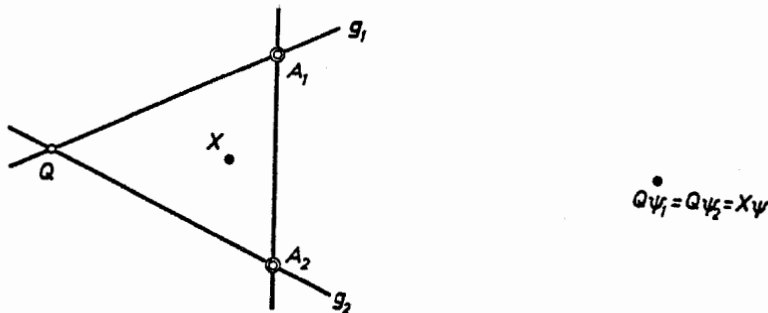
Die Gerade g_2 trägt dann genau einen Ausnahmepunkt $A \neq Q$ und $\{Q\}\psi_1$ stimmt notwendig mit $g_2\psi_2$ überein. Weiters ist



für den Punkt X der Bildpunkt $X\psi = 1\psi_1$ mit $\{1\} := AX \cap g_1$ zwingend bestimmt.

(4) $\text{rg}(\psi_1|g_1) = \text{rg}(\psi_2|g_2) = 0$.

Da Q kein Ausnahmepunkt von ψ_1 und ψ_2 ist, erhalten wir $g_1\psi_1 = g_2\psi_2 = \{Q\}\psi_1 = \{Q\}\psi_2$. Die Geraden g_1 und g_2 besitzen



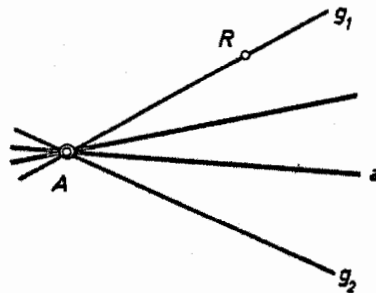
je einen von Q verschiedenen Ausnahmepunkt A_1 bzw. A_2 von ψ_1 bzw. ψ_2 ; eine lineare Fortsetzung ψ besitzt daher notwendig den Ausnahmeunterraum A_1A_2 und die einelementige Bildmenge $\text{Im}(\psi) = \{Q\}\psi_1$.

Aus (1) bis (4) folgt somit: Für jeden Punkt $X \in \mathbb{P} \setminus (\mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2)$ ist $\{X\}\psi$ notwendig durch ψ_1 und ψ_2 bestimmt. ◻

1.3.3 Sind die Unterräume \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 nicht komplementär und gilt $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \subset A(\psi_1)$, so können ψ_1 und ψ_2 verschiedene lineare Fortsetzungen besitzen, wie folgendes Beispiel zeigt:

Es seien $\Pi = \Pi'$ eine projektive Ebene der Ordnung $N \geq 3$ (vgl. [1, S.11]) und $\mathcal{P}_1 = \mathcal{G}_1$, $\mathcal{P}_2 = \mathcal{G}_2$ verschiedene Geraden von Π mit dem Schnittpunkt A . Wir

wählen einen Punkt $R \in \mathcal{G}_1 \setminus \{A\}$ und definieren lineare Abbildungen $\psi_i: \mathcal{G}_i \rightarrow \mathcal{P}$ durch $A(\psi_i) = \{A\}$ und $\text{Im}(\psi_i) = \{R\}$, ($i=1,2$). Wegen $N \geq 3$ gibt es mindestens zwei Geraden $a \in \mathcal{A}$ mit $a \neq \mathcal{G}_i$, und jede Projektion $\pi: \mathcal{P} \rightarrow \{R\}$ mit dem Zentrum a ist einer Fortsetzung von ψ_1 und ψ_2 gleich.



1.3.4 Für komplementäre Unterräume $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ ist mit jeder linearen Fortsetzung $\psi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ auch die Abbildung $\kappa\psi$ eine lineare Fortsetzung von ψ_1 und ψ_2 , falls $\kappa: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ eine Kollineation mit \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 als Fixpunktunterräumen ist. ¹⁾

Wir nennen einen Punkt $W \in \mathcal{P} \setminus (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$ bzw. die Menge $\{W\}$ bezüglich der linearen Abbildungen ψ_1 und ψ_2 wesentlich, falls die Fußpunkte W_1, W_2 der Treffgeraden aus W an \mathcal{P}_1 bzw. \mathcal{P}_2 keine Ausnahmepunkte von ψ_1 bzw. ψ_2 sind. Für $W_1\psi_1 \neq W_2\psi_2$ bezeichnen wir jede Menge $\{W'\}$ mit $W' \in (W_1\psi_1)(W_2\psi_2) \setminus \{W_1\psi_1, W_2\psi_2\}$ als zulässige Bildmenge von $\{W\}$; gilt jedoch $W_1\psi_1 = W_2\psi_2$, so sei nur die leere Menge eine zulässige Bildmenge von $\{W\}$.

Sind die Bildmengen $\text{Im}(\psi_1)$, $\text{Im}(\psi_2)$ verschieden und einpunktig, so besitzt jede lineare Fortsetzung ψ von ψ_1 und ψ_2 nach 1.1.9 die Bildmenge $\text{Im}(\psi) = \mathcal{P}\psi = (\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2)\psi = \mathcal{P}_1\psi_1 \vee \mathcal{P}_2\psi_2 = \text{Im}(\psi_1) \vee \text{Im}(\psi_2)$ und den Rang $\text{rg}\psi = 1$. Läßt eine globale und bijektive Abbildung $\kappa: \text{Im}(\psi) \rightarrow \text{Im}(\psi)$ die Menge $\text{Im}(\psi_1) \cup \text{Im}(\psi_2)$ elementweise fest, so ist mit ψ auch die Abbildung $\psi\kappa: \mathcal{P} \rightarrow \text{Im}(\psi)$ einer linearen Fortsetzung von ψ_1 und ψ_2 gleich. Die Abbildungen ψ und $\psi\kappa$ besitzen nach 1.1.7 den-

¹⁾ Wir bezeichnen die Gruppe der projektiven Kollineationen, die \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 als Fixpunktunterräume besitzen mit $\text{PGL}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$; in jedem fanoischen Desarguesraum existieren nichttriviale Kollineationen aus $\text{PGL}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$. Vgl. [7, S.5].

selben Ausnahmeraum und daher auch dieselben Fasern (vgl. [3]). Bezeichnen wir in diesem Fall, also $\text{Im}(\psi_1) \neq \text{Im}(\psi_2)$ und $\text{rg}\psi_1 = \text{rg}\psi_2 = 0$ zwei lineare Fortsetzungen ψ und $\tilde{\psi}$ von ψ_1 und ψ_2 bereits dann als gleich, falls die Abbildungen gleiche Fasern besitzen, so gilt folgender Satz:

1.3.5 Sind die Unterräume \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 komplementär und gibt es einen bezüglich ψ_1 und ψ_2 wesentlichen Punkt W , so existiert höchstens eine lineare Fortsetzung $\psi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ von ψ_1 und ψ_2 , welche $\{W\}$ auf eine gegebene zulässige Bildmenge von $\{W\}$ abbildet.

Falls keine bezüglich ψ_1 und ψ_2 wesentlichen Punkte vorhanden sind, existiert genau eine lineare Fortsetzung $\psi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ von ψ_1 und ψ_2 .

Beweis:

(1) Gibt es keine bezüglich ψ_1 und ψ_2 wesentlichen Punkte, so besteht \mathcal{R}_1 oder \mathcal{R}_2 nur aus Ausnahmepunkten von ψ_1 bzw. ψ_2 . Ist etwa ψ_1 eine leere Abbildung und bezeichnen wir mit $\pi_2: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_2$ die Projektion aus \mathcal{R}_1 auf \mathcal{R}_2 , so gilt für jede lineare Fortsetzung $\psi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ von ψ_1 und ψ_2 notwendig $\{X\}\psi = \{X\}\pi_2\psi_2$ für alle $X \in \mathcal{R}$. Die Abbildung $\pi_2\psi_2$ ist nach 1.1.6 linear und daher die einzige lineare Fortsetzung von ψ_1 und ψ_2 .

(2) Es sei W ein bezüglich ψ_1 und ψ_2 wesentlicher Punkt und $W_1\psi_1 = W_2\psi_2$. Wir definieren eine lineare Abbildung $\psi_3: W_1W_2 \rightarrow \mathcal{R}'$ durch $A(\psi_3) = \{W\}$ und $\text{Im}(\psi_3) = \{W_1\}$. Dann gilt für jede lineare Fortsetzung $\psi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ von ψ_1 und ψ_2 , die $W \in A(\psi)$ erfüllt, $\psi|_{W_1W_2} = \psi_3$. Für $\mathcal{R}_1 \not\subset W_1W_2$ folgt mit 1.3.2, daß ψ_1 und ψ_3 höchstens eine lineare Fortsetzung $\tilde{\psi}_1: (\mathcal{R}_1 \vee W_1W_2) \rightarrow \mathcal{R}'$ besitzen, da W_1 der Definitionsmenge von ψ_1 angehört und $W_1\psi_1 = W_1\psi_3$ gilt. Setzen wir andernfalls, also für $\mathcal{R}_1 \subset W_1W_2$, $\tilde{\psi}_1 = \psi_3$, so gilt notwendig $\psi|_{\mathcal{R}_1 \vee W_1W_2} = \tilde{\psi}_1$. Die Abbildungen $\tilde{\psi}_1$ und ψ_2 leisten auf $(\mathcal{R}_1 \vee W_1W_2) \cap \mathcal{R}_2 = \{W_2\}$ dasselbe und es gilt $W_2 \in D(\psi_2)$. Daher existiert analog zur letzten Überlegung höchstens eine lineare Fortsetzung

$\tilde{\psi}: (\mathbb{P}_1 \vee W_1 W_2 \vee \mathbb{P}_2) = \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ von $\tilde{\psi}_1$ und ψ_2 und es gilt notwendig $\psi = \tilde{\psi}$.

(3) Es sei W ein bezüglich ψ_1 und ψ_2 wesentlicher Punkt und $W_1\psi_1 \neq W_2\psi_2$. Ist $\{W'\}$ eine zulässige Bildmenge von $\{W\}$, so sind die Punkte $W', W_1\psi_1, W_2\psi_2$ paarweise verschieden und kollinear. Jede lineare Fortsetzung ψ von ψ_1 und ψ_2 , die W auf W' abbildet, besitzt mindestens den Rang 1 und $\psi|_{W_1W_2}$ ist injektiv. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(3.1) Ist $\text{rg}\psi_1 = \text{rg}\psi_2 = 0$, also $\text{Im}(\psi_1) = \{W_1\psi_1\}$ und $\text{Im}(\psi_2) = \{W_2\psi_2\}$, so besitzt für $i=1,2$ die Abbildung ψ_i einen Ausnahmeunterraum $A(\psi_i)$, der in $\Pi(\mathbb{P}_i)$ zu $\{W_i\}$ komplementär liegt. Dann ist $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \vee \mathbb{P}_2 = (A(\psi_1) \vee \{W_1\}) \vee (A(\psi_2) \vee \{W_2\}) = (A(\psi_1) \vee A(\psi_2)) \vee (W_1W_2)$, also $A(\psi_1) \vee A(\psi_2)$ zu W_1W_2 komplementär.

Jeder Punkt $X \in A(\psi_1) \vee A(\psi_2)$ ist notwendig ein Ausnahmepunkt jeder linearen Fortsetzung ψ , sodaß ψ nach 1.1.7 notwendig Produkt der Projektion aus $A(\psi_1) \vee A(\psi_2)$ auf W_1W_2 und einer linearen Injektion $\varrho: W_1W_2 \rightarrow \mathbb{P}'$ ist, welche $W_1 \mapsto W_1\psi_1, W_2 \mapsto W_2\psi_2$ und $W \mapsto W'$ leistet.

Im Sinne der in 1.3.4 getroffenen Vereinbarung gibt es daher höchstens eine lineare Fortsetzung von ψ_1 und ψ_2 .

(3.2) Ist etwa $\text{rg}\psi_1=1$, so existiert durch den Punkt W_1 eine ausnahmefreie Gerade g_1 . Nach 1.3.2,(1) gibt es daher in $\Pi(g_1 \vee W_1W_2)$ höchstens eine lineare Abbildung $\tilde{\psi}_1: (g_1 \vee W_1W_2) \rightarrow \mathbb{P}'$, welche ψ_1 fortsetzt und $W \mapsto W', W_2 \mapsto W_2\psi_2$ leistet. Nun folgt wie im Beweisschritt (2), daß es höchstens eine lineare Fortsetzung ψ von ψ_1 und ψ_2 gibt. □

1.3.6 Wir unterbrechen die in 1.3.1 begonnenen Untersuchungen über lineare Fortsetzungen und beweisen folgenden Hilfssatz:

Es sei $\Pi = (\mathbb{P}, \varphi)$ ein endlichdimensionaler projektiver Raum. Sind \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 zwei Unterräume mit $\dim \Pi(\mathcal{O}_1) \geq \dim \Pi(\mathcal{O}_2)$, dann existiert durch jeden Unterraum \mathcal{O}_3 , der zu \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 windschief ist, ein zu \mathcal{O}_1 komplementärer und zu \mathcal{O}_2 windschiefer Unterraum \mathcal{U} .

Beweis:

(1) \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 seien komplementäre Unterräume.

Setzen wir $s_i := \dim \Pi(\mathcal{T}_i)$ mit $i=1,2,3$, so gilt die Ungleichung $s_2 \geq s_3$. Ist $\{P_0, \dots, P_{s_3}\} =: \mathcal{L}$ eine Basis von $\Pi(\mathcal{T}_3)$ und bezeichnet $\pi_1: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}_1$ die Projektion von Π mit dem Zentrum \mathcal{T}_2 auf \mathcal{T}_1 , sowie $\pi_2: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}_2$ die Projektion von Π mit dem Zentrum \mathcal{T}_1 auf \mathcal{T}_2 , so ist $\mathcal{L}\pi_i$ ($i=1,2$) eine unabhängige Menge in $\Pi(\mathcal{T}_i)$, welche durch Hinzunahme von Punkten $P_{s_3+1}^{(1)}, \dots, P_{s_i}^{(1)}$ zu einer Basis von $\Pi(\mathcal{T}_i)$ ergänzt werden kann. Auf jeder Geraden $P_j^{(1)}P_j^{(2)}$ mit $j=s_3+1, \dots, s_2$ existiert ein von $P_j^{(1)}$ und $P_j^{(2)}$ verschiedener Punkt P_j .

Wir setzen $\mathcal{U} := [\{P_k | k=0, \dots, s_3, \dots, s_2\}]$.

Da \mathcal{U} von s_2+1 Punkten aufgespannt wird, gilt $\dim \Pi(\mathcal{U}) \leq s_2$.

Ferner erhalten wir mit Hilfe der Austauschregel (vgl.

$$[1, S.89]) \quad \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{U} = \mathcal{T}_1 \vee [\{P_k | k=0, \dots, s_2\}] = \mathcal{T}_1 \vee (\mathcal{L} \vee \vee [\{P_j | j=s_3+1, \dots, s_2\}]) = \mathcal{T}_1 \vee [\mathcal{L}\pi_2] \vee [\{P_j^{(2)} | j=s_3+1, \dots, s_2\}] = \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2 = \mathcal{P},$$

sodaß \mathcal{T}_1 und \mathcal{U} komplementär sind.

Analog folgt $\mathcal{T}_2 \vee \mathcal{U} = \mathcal{T}_2 \vee [\mathcal{L}\pi_1] \vee [\{P_j^{(1)} | j=s_3+1, \dots, s_2\}]$, was $\dim \Pi(\mathcal{T}_2 \vee \mathcal{U}) = 2s_2+1$ zur Folge hat. Der Dimensionssatz liefert dann $\dim \Pi(\mathcal{T}_2 \cap \mathcal{U}) = s_2 + s_2 - (2s_2+1) = -1$; die Unterräume \mathcal{T}_2 und \mathcal{U} haben also leeren Durchschnitt.

Ist insbesondere $s_1 = s_2$, so ist der Unterraum \mathcal{U} nach Konstruktion zu \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 komplementär.

(2) \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 seien nicht komplementär.

Wir legen durch \mathcal{T}_3 einen zu $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ komplementären Unterraum $\bar{\mathcal{T}}$; dann sind die Unterräume $\bar{\mathcal{T}}_i := \mathcal{T}_i \cap \bar{\mathcal{T}}$ ($i=1,2$) windschief und in $\Pi(\bar{\mathcal{T}}_1 \vee \bar{\mathcal{T}}_2)$ existiert durch $\mathcal{T}_3 \cap (\bar{\mathcal{T}}_1 \vee \bar{\mathcal{T}}_2)$ nach (1) ein zu $\bar{\mathcal{T}}_1$ komplementärer und zu $\bar{\mathcal{T}}_2$ windschiefer Unterraum $\bar{\mathcal{U}}_{12}$.

Für $\mathcal{U}_{12} := \bar{\mathcal{U}}_{12} \vee \mathcal{T}_3$ gilt dann nach der Dedekindschen Regel (vgl. [1, S.98]) $\mathcal{U}_{12} \cap (\bar{\mathcal{T}}_1 \vee \bar{\mathcal{T}}_2) = (\bar{\mathcal{U}}_{12} \vee \mathcal{T}_3) \cap (\bar{\mathcal{T}}_1 \vee \bar{\mathcal{T}}_2) = \bar{\mathcal{U}}_{12} \vee (\mathcal{T}_3 \cap (\bar{\mathcal{T}}_1 \vee \bar{\mathcal{T}}_2))$. Das liefert für $i=1,2$ wegen $\mathcal{U}_{12} \subset \bar{\mathcal{T}}$ $\mathcal{T}_i \cap \mathcal{U}_{12} = \mathcal{T}_i \cap \bar{\mathcal{T}} \cap \bar{\mathcal{T}} \cap \mathcal{U}_{12} = \bar{\mathcal{T}}_i \cap \bar{\mathcal{U}}_{12} = \emptyset$.

Ist der Unterraum \mathcal{U}_{123} zu $\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2 \vee \mathcal{T}_3$ in Π komplementär, so besitzt der Unterraum $\mathcal{U} := \mathcal{U}_{12} \vee \mathcal{U}_{123}$ wegen $\mathcal{T}_i \cap \mathcal{U} =$

$\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{U} = \mathcal{T}_1 \vee \bar{\mathcal{U}}_{12} \vee \mathcal{T}_3 \vee \mathcal{U}_{123} = \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2 \vee \mathcal{T}_3 \vee \mathcal{U}_{123} = \mathcal{P}$ die gewünschten Eigenschaften. □

Als Anwendung dieses Hilfssatzes zeigen wir:

1.3.7 Es sei $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{U})$ ein endlichdimensionaler projektiver Pappos-Raum. Sind \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 zwei verschiedene windschiefe s -dimensionale Unterräume ($s \geq 0$) von Π und ist $\varphi: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ eine lineare Injektion, die insbesondere für $s = 1$ eine Projektivität bzw. für $s \geq 2$ eine projektive Kollineation ist, dann existiert mindestens ein zu \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 komplementärer Unterraum \mathcal{U} , so daß die Projektion $\pi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}_2$ mit dem Zentrum \mathcal{U} , eingeschränkt auf \mathcal{T}_1 mit φ übereinstimmt.

Beweis: Nach 1.3.6 existiert ein zu \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 komplementärer Unterraum $\tilde{\mathcal{U}}$. ferner sei $\tilde{\pi}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}_2$ die Projektion mit dem Zentrum $\tilde{\mathcal{U}}$ auf \mathcal{T}_2 .

Für $s = 0$ leistet die Hyperebene $\mathcal{U} := \tilde{\mathcal{U}}$ das Gewünschte, da sie die einpunktigen Unterräume \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 nicht umfaßt.

Ist $s \geq 1$, so wird $\tilde{\pi}|_{\mathcal{T}_1} = \varphi$ nicht notwendig erfüllt sein. Wir wählen eine Fundamentalfigur $(\mathcal{L}_1, \mathcal{B}_1)$ von $\Pi(\mathcal{T}_1)$. Dann sind $(\mathcal{L}_1 \tilde{\pi}, \mathcal{B}_1 \tilde{\pi})$ und $(\mathcal{L}_1 \varphi, \mathcal{B}_1 \varphi)$ Fundamentalfiguren von $\Pi(\mathcal{T}_2)$. Nach 1.2.2 gibt es im Verbindungsraum $\Pi(\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2)$ Fundamentalfiguren $(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_1 \tilde{\pi}, \mathcal{B}_{\tilde{\pi}})$ und $(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_1 \varphi, \mathcal{B}_{\varphi})$ mit $\mathcal{B}_{\tilde{\pi}} \cap \mathcal{T}_1 = \mathcal{B}_{\varphi} \cap \mathcal{T}_1 = \mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_{\tilde{\pi}} \cap \mathcal{T}_2 = \mathcal{B}_1 \tilde{\pi}$ bzw. $\mathcal{B}_{\varphi} \cap \mathcal{T}_2 = \mathcal{B}_1 \varphi$. Gilt $\mathcal{L}_1 = \{P_j \mid j=0, \dots, s\}$, so existiert genau eine projektive Kollineation $\kappa_{12} \in \text{PGL}(\Pi(\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2))$ mit $P_j \mapsto P_j \kappa_{12} := P_j$, $P_j \tilde{\pi} \mapsto P_j \tilde{\pi} \kappa_{12} := P_j \varphi$ und $\mathcal{B}_{\tilde{\pi}} \mapsto \mathcal{B}_{\tilde{\pi}} \kappa_{12} := \mathcal{B}_{\varphi}$. Wegen $s \geq 1$ folgt $\dim \Pi(\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2) \geq 3$ und κ_{12} kann nach 1.2.3 zu einer Kollineation $\kappa \in \text{PGL}(\Pi)$ fortgesetzt werden. Diese Kollineation κ besitzt \mathcal{L}_1 als Fixpunktmenge, was $\mathcal{T}_1 \kappa = \mathcal{T}_1$ mit sich zieht; weiters ist jedoch auch $\mathcal{B}_1 \kappa = (\mathcal{B}_{\tilde{\pi}} \cap \mathcal{T}_1) \kappa = \mathcal{B}_{\tilde{\pi}} \kappa \cap \mathcal{T}_1 = \mathcal{B}_{\varphi} \cap \mathcal{T}_1 = \mathcal{B}_1$ ein Fixunterraum von κ , so daß κ die Fundamentalfigur $(\mathcal{L}_1, \mathcal{B}_1)$ von $\Pi(\mathcal{T}_1)$ elementweise fest läßt, was $\kappa|_{\mathcal{T}_1} = \text{id}_{\mathcal{T}_1}$ bewirkt (vgl. [1, S.42f] für $s=1$ und [1, S.157] für $s \geq 2$). Außerdem ist $\mathcal{T}_2 \kappa = [\mathcal{L}_1 \tilde{\pi}] \kappa = [\mathcal{L}_1 \tilde{\pi} \kappa] = [\mathcal{L}_1 \varphi] = \mathcal{T}_2$, womit \mathcal{T}_2 als Fixunterraum von κ nachgewiesen ist; daher gilt $\mathcal{B}_1 \tilde{\pi} \kappa = (\mathcal{T}_2 \cap \mathcal{B}_{\tilde{\pi}}) \kappa = \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{B}_{\tilde{\pi}} \kappa = \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{B}_{\varphi} = \mathcal{B}_1 \varphi$ und nach der Definition

von κ folgt $\tilde{\pi}(\kappa|\mathcal{T}_2) = \varphi$.

Setzen wir nun $\mathcal{U} := \tilde{\mathcal{U}}\kappa$ und bezeichnen wir mit $\pi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}_2$ die Projektion mit dem Zentrum \mathcal{U} auf \mathcal{T}_2 , dann trifft für jeden Punkt $X \in \mathcal{T}_1$ die Gerade $XX\tilde{\pi}$ das Projektionszentrum $\tilde{\mathcal{U}}$, sodaß $X\kappa X\tilde{\pi}\kappa = XX\varphi$ den Unterraum $\tilde{\mathcal{U}}\kappa = \mathcal{U}$ trifft, das heißt $X\varphi = X\pi$. □

1.3.8 Es seien $\Pi = (\mathcal{P}, \varphi)$ ein endlichdimensionaler Pappos-Raum, $\Pi' = (\mathcal{P}', \varphi')$ ein projektiver Raum und $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ zwei komplementäre echte Unterräume von Π ; ferner seien $\psi_1: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}'$ und $\psi_2: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}'$ lineare Abbildungen. (Vgl. 1.3.1).

Wir nennen die Abbildungen ψ_1 und ψ_2 verträglich, wenn sie - gegebenenfalls nach Wechsel der Indizes - eine der folgenden Bedingungen erfüllen:

- (V1) $\max\{\text{rg}\psi_1, \text{rg}\psi_2\} = 0$ und $\text{Im}(\psi_1) \subset \text{Im}(\psi_2)$.
- (V2) $\text{rg}\psi_1 \leq 0$ und $\text{rg}\psi_2 \geq 2$.
- (V3) $\text{rg}\psi_1 = 1$ und $\text{Im}(\psi_1) = \text{Im}(\psi_2)$. Weiters existieren Geraden $g_1 \subset D(\psi_1)$ und $g_2 \subset D(\psi_2)$ mit $\sigma := (\psi_1|g_1)(\psi_2|g_2)^{-1}$ ist eine Projektivität.
- (V4) $\text{rg}\psi_1 \neq 1$ und $\text{rg}\psi_2 \geq 2$. Weiters existieren Geraden $g_1 \subset D(\psi_1)$ und $g_2 \subset D(\psi_2)$ sowie eine Projektivität $\sigma': g_1\psi_1 \rightarrow g_2\psi_2$ so, daß die Abbildung $\sigma := (\psi_1|g_1)\sigma'(\psi_2|g_2)^{-1}: g_1 \rightarrow g_2$ projektiv ist.

Unser Ziel ist es, zu zeigen, daß zwei verträgliche lineare Abbildungen eine lineare Fortsetzung in den Gesamtraum besitzen.

1.3.9 Sind die linearen Abbildungen ψ_1 und ψ_2 gemäß (V3) oder (V4) verträglich, so ist ψ_i für $i=1,2$ das Produkt der Projektion π_i von $\Pi(\mathcal{P}_i)$ mit dem Zentrum $A(\psi_i)$ auf einen in $\Pi(\mathcal{P}_i)$ komplementären Unterraum \mathcal{R}_i , welchen wir o.B.d.A. durch g_i legen können, und einer linearen Injektion $\varphi_i: \mathcal{R}_i \rightarrow \mathcal{P}'$. Ferner seien $h_i \subset D(\psi_i)$ zwei weitere Geraden.

Ist (V3) erfüllt, dann ist die Abbildung $\Theta := (\psi_1|h_1)(\psi_2|h_2)^{-1} =$

$= (\pi_1|h_1)\varrho_1\varrho_2^{-1}(\pi_2|h_2)^{-1} = (\pi_1|h_1)\sigma(\pi_2|h_2)^{-1}$ ebenso wie σ projektiv.

Falls jedoch (V4) gilt, so ist für jede Projektivität $\Theta':h_1\psi_1 \rightarrow h_2\psi_2$ eine Abbildung $\Theta := (\psi_1|h_1)\Theta'(\psi_2|h_2)^{-1}:h_1 \rightarrow h_2$ erklärt. Wir können die Projektivität Θ' in der Form

$\Theta' = \tau_1'\sigma'\tau_2'^{-1}$ ansetzen, wobei für $i = 1,2$ die Abbildung $\tau_i':h_i\psi_i \rightarrow g_i\psi_i$ eine Projektivität ist; dann ist aber auch die Abbildung $\tau_i := (\varrho_i|h_i\pi_i)\tau_i'(\varrho_i|g_i)^{-1}:h_i\pi_i \rightarrow g_i$ eine Projektivität. Das ergibt

$$\begin{aligned} \Theta &= (\psi_1|h_1)\Theta'(\psi_2|h_2)^{-1} = \\ &= (\pi_1|h_1)(\varrho_1|h_1\pi_1)\tau_1'\sigma'\tau_2'^{-1}(\varrho_2|h_2\pi_2)^{-1}(\pi_2|h_2)^{-1} = \\ &= (\pi_1|h_1)(\varrho_1|h_1\pi_1)\tau_1'(\varrho_1|g_1)\sigma(\varrho_2|g_2)^{-1}\tau_2'^{-1}(\varrho_2|h_2\pi_2)^{-1}(\pi_2|h_2)^{-1} = \\ &= (\pi_1|h_1)\tau_1\sigma\tau_2^{-1}(\pi_2|h_2)^{-1}, \text{ womit } \Theta \text{ als Projektivität erwiesen ist.} \end{aligned}$$

1.3.10 Sind die linearen Abbildungen $\psi_1:\mathfrak{P}_1 \rightarrow \mathfrak{P}'$ und $\psi_2:\mathfrak{P}_2 \rightarrow \mathfrak{P}'$ aus den komplementären echten Unterräumen \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 verträglich, so existiert stets eine lineare Fortsetzung $\psi:\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}'$ der Abbildungen ψ_1 und ψ_2 .

Gibt es einen bezüglich ψ_1 und ψ_2 wesentlichen Punkt W , so existiert genau eine lineare Fortsetzung $\psi:\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}'$ von ψ_1 und ψ_2 , welche $\{W\}$ auf eine gegebene zulässige Bildmenge von $\{W\}$ abbildet.

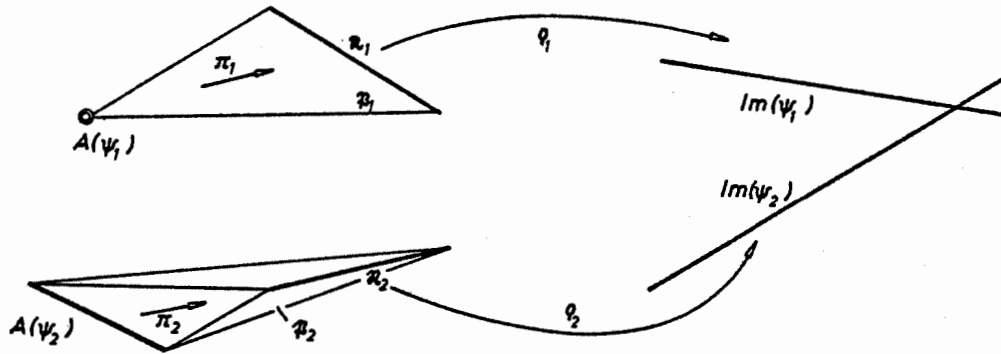
Beweis: Im projektiven Raum $\Pi(\mathfrak{P}_i)$ wählen wir für $i = 1,2$ einen zum Ausnahmeunterraum $A(\psi_i)$ komplementären Unterraum $\mathfrak{R}_i \subset \mathfrak{P}_i$ und weiters sei $\pi_i:\mathfrak{P}_i \rightarrow \mathfrak{R}_i$ die Projektion mit dem Zentrum $A(\psi_i)$ auf \mathfrak{R}_i , sodaß ψ_i die Darstellung $\psi_i = \pi_i\varrho_i$ gestattet, wobei $\varrho_i:\mathfrak{R}_i \rightarrow \mathfrak{P}'$ eine lineare Injektion ist.

(1) Wir zeigen zunächst, daß es eine lineare Fortsetzung $\psi:\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}'$ gibt.¹⁾

$\text{Im}(\psi_1)$ und $\text{Im}(\psi_2)$ sind endlichdimensionale Unterräume von \mathfrak{P}' , sodaß $(\text{Im}(\psi_1) \cap \text{Im}(\psi_2))\varrho_i^{-1} =: \mathfrak{T}_i \subset \mathfrak{P}_i$ ($i=1,2$) windschiefe Unterräume gleicher Dimension von Π sind. Die Abbildung $(\varrho_1|\mathfrak{T}_1)(\varrho_2|\mathfrak{T}_2)^{-1}:\mathfrak{T}_1 \rightarrow \mathfrak{T}_2$ ist nach 1.1.6 eine lineare Injektion, und zwar für $s := \dim(\mathfrak{T}_1) = 1$ eine Projektivität und für $s \geq 2$ eine projektive Kollineation; da ψ_1 und ψ_2 verträglich

¹⁾ Der bereits in 1.3.5 behandelte Fall, daß eine der beiden fortzusetzenden Abbildungen leer ist, ist auch in diesem Beweis enthalten.

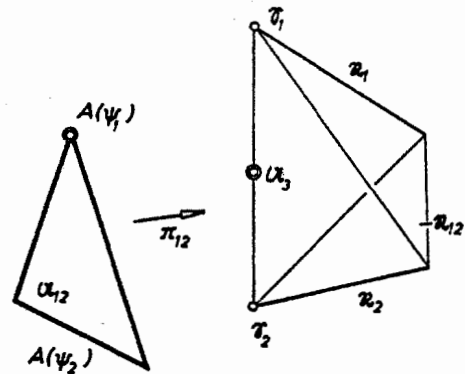
sind, folgt das aus 1.3.9. Dann existiert jedoch für $\mathcal{V}_1 \neq \emptyset$ ein Unterraum $\mathcal{U}_3 \subset \mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2$ so, daß in $\Pi(\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2)$ die Projektion



mit dem Zentrum \mathcal{U}_3 auf \mathcal{V}_2 , eingeschränkt auf \mathcal{V}_1 mit $(\varphi_1|_{\mathcal{V}_1})(\varphi_2|_{\mathcal{V}_2})^{-1}$ übereinstimmt (vgl. 1.3.7). Ist $\mathcal{V}_1 = \emptyset$, so setzen wir $\mathcal{U}_3 := \emptyset$.

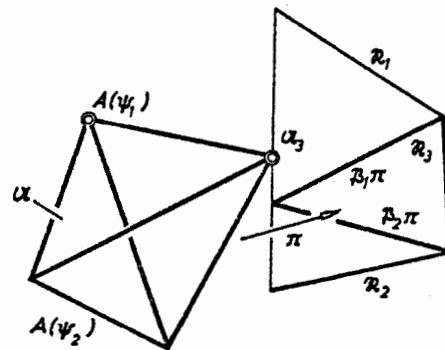
Wählen wir in $\Pi(A(\psi_i))$ eine Basis $\mathcal{L}_{A(\psi_i)}$ und in $\Pi(\mathcal{R}_i)$ eine Basis $\mathcal{L}_{\mathcal{R}_i}$ ($i=1,2$), so ist $\mathcal{L}_{A(\psi_i)} \cup \mathcal{L}_{\mathcal{R}_i}$ eine Basis von $\Pi(\mathcal{R}_i)$ und daher $\cup(\mathcal{L}_{A(\psi_i)} \cup \mathcal{L}_{\mathcal{R}_i} | i=1,2)$ eine Basis des Gesamtraumes. Daraus erkennen wir, daß die Unterräume $\mathcal{U}_{12} := A(\psi_1) \vee A(\psi_2) =$

$= [\mathcal{L}_{A(\psi_1)} \vee \mathcal{L}_{A(\psi_2)}]$ und $\mathcal{R}_{12} := \mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2 = [\mathcal{L}_{\mathcal{R}_1} \vee \mathcal{L}_{\mathcal{R}_2}]$ in Π komplementär sind. Die Projektion mit dem Zentrum \mathcal{U}_{12} auf \mathcal{R}_{12} bezeichnen wir mit $\pi_{12}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_{12}$. Weiters gibt es in $\Pi(\mathcal{R}_{12})$ einen zu \mathcal{U}_3 komplementären Unterraum \mathcal{R}_3 , und $\pi_3: \mathcal{R}_{12} \rightarrow \mathcal{R}_3$ sei in $\Pi(\mathcal{R}_{12})$ die Projektion aus dem Zentrum \mathcal{U}_3 auf \mathcal{R}_3 . Dann ist aber nach 1.1.6 die zusammengesetzte Abbildung $\pi := \pi_{12}\pi_3: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_3$



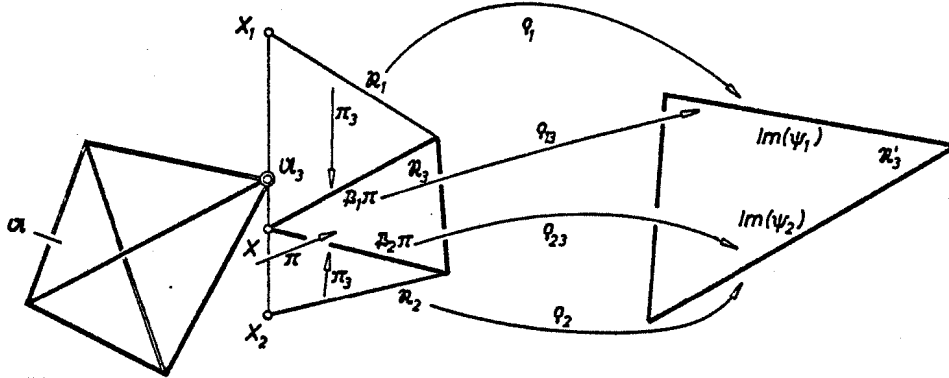
linear (und stimmt mit der Projektion aus $\mathcal{U}_{12} \vee \mathcal{U}_3$ auf \mathcal{R}_3 überein).

Für jeden Punkt $X_i \in \mathcal{R}_i$ ($i=1,2$) gilt $\{X_i\} \pi_i = \{X_i\} \pi_{12}$, da $\{X_i\} \vee \mathcal{U}_i \subset \{X_i\} \vee \mathcal{U}_{12}$ gilt. Das Projektionszentrum $\mathcal{U}_3 \subset \mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2$ ist zu $\mathcal{R}_i \supset \mathcal{V}_i$ ($i=1,2$) windschief, sodaß $\pi_3|_{\mathcal{R}_i}: \mathcal{R}_i \rightarrow \mathcal{R}_3$ injektiv ist. Das ergibt, daß π_i und $\pi|_{\mathcal{R}_i}$ faser- gleich sind und es gilt



$\psi_i = (\pi|_{\mathcal{P}_i})(\pi_3|_{\mathcal{R}_i})^{-1} \circ \rho_i$. Wir setzen $\rho_{i3} := (\pi_3|_{\mathcal{R}_i})^{-1} \circ \rho_i$; dann ist $\rho_{i3} : \mathcal{R}_3 \rightarrow \mathcal{P}'$ ($i=1,2$) eine lineare Injektion.

Die Abbildungen ρ_{13} und ρ_{23} müssen wir nun zu einer linearen Injektion $\rho : \mathcal{R}_3 \rightarrow \mathcal{P}'$ fortsetzen.



Für jeden Punkt $X \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ gibt es Punkte $X_i := X(\pi_3|_{\mathcal{R}_i})^{-1}$, deren Verbindungsgerade \mathcal{U}_3 trifft. Da in $\Pi(\mathcal{R}_{12})$ aus jedem Punkt von \mathcal{U}_3 genau eine Treffgerade an \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 gelegt werden kann, folgt $X_i \in \mathcal{P}_i$ ($i=1,2$) und nach Konstruktion daher $X_1 \rho_1 = X_2 \rho_2$ bzw. $X \rho_{13} = X \rho_{23}$. Sind andererseits $Y \in \mathcal{P}_1 \setminus \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ und $Z \in \mathcal{P}_2 \setminus \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3$ zwei Punkte, so ist auf Grund der Konstruktion von \mathcal{U}_3 sicherlich $Y \rho_{13} \neq Z \rho_{23}$.

Gilt etwa $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$, so ist $\rho := \rho_{23}$ die gewünschte lineare Fortsetzung. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn ψ_1 und ψ_2 eine der Verträglichkeitsbedingungen (V1) oder (V3) erfüllen, oder wenn ψ_1 eine leere Abbildung ist.

Für $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ und $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \cap \mathcal{P}_1$ gilt $\dim \Pi(\text{Im}(\psi_1) \vee \text{Im}(\psi_2)) = \text{rg} \psi_1 + \text{rg} \psi_2 - \dim \Pi(\text{Im}(\psi_1) \cap \text{Im}(\psi_2)) = \dim \Pi(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) + \dim \Pi(\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3) - \dim \Pi(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3) = \dim \Pi(\mathcal{R}_3)$. Setzen wir $\text{Im}(\psi_1) \vee \text{Im}(\psi_2) =: \mathcal{R}'_3 \subset \mathcal{P}'$, so gilt $\dim \Pi(\mathcal{R}_3) = \dim \Pi(\mathcal{R}'_3)$.

Es verbleiben nur noch die Fälle, daß ψ_1 und ψ_2 entweder (V2) oder (V4) erfüllen; jedenfalls gilt $\dim \Pi(\mathcal{R}_3) \geq \text{rg} \psi_2 \geq 2$. Da der Fall $\text{rg} \psi_1 = -1$ (leere lineare Abbildung) schon erledigt ist, gibt es in $\Pi(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)$ einen nichtleeren Komplementärraum $\bar{\mathcal{P}}$ zu $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$; es sei $(\mathcal{L}_1, \mathcal{B}_1)$ eine Fundamentalfigur dieses Komplementärraumes, sodaß $(\mathcal{L}_1 \rho_{13}, \mathcal{B}_1 \rho_{13})$ Fundamentalfigur eines Unterraumes von $\text{Im}(\psi_1)$ ist, welcher zu $\text{Im}(\psi_1) \cap \text{Im}(\psi_2)$ komple-

mentär ist. Wir wählen in $\Pi(\mathcal{P}_2\pi)$ eine Fundamentalfigur (\mathcal{L}_2, B_2) so, daß $(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) \cap \mathcal{P}_1\pi$ eine Basis von $\Pi(\mathcal{P}_1\pi)$ ist; dann ergibt $(\mathcal{L}_2 \varrho_{23}, B_2 \varrho_{23})$ eine Fundamentalfigur von $\Pi(\text{Im}(\psi_2))$. Nach 1.2.2 existiert dann eine Fundamentalfigur $(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2, B)$ von $\Pi(\mathcal{R}_3)$ so, daß $B \cap \mathcal{P}_i\pi = B_i$ ($i=1,2$) gilt und analog eine Fundamentalfigur $(\mathcal{L}_1 \varrho_{13} \cup \mathcal{L}_2 \varrho_{23}, B')$ von $\Pi(\mathcal{R}'_3)$ mit $B' \cap \text{Im}(\psi_i) = B_i \varrho_{i3}$ ($i=1,2$). Nach 1.2.3 gibt es genau eine lineare Injektion ϱ welche ϱ_{23} fortsetzt, $P_j \mapsto P_j \varrho_{13}$ für alle $P_j \in \mathcal{L}_1$ und $B \rightarrow B'$ leistet.¹⁾

Dann ist $\varrho_{13}(\varrho|_{\mathcal{P}_1\pi})^{-1}: \mathcal{P}_1\pi \rightarrow \mathcal{P}_1\pi$ eine Bijektion von $\mathcal{P}_1\pi$. Falls ψ_1 und ψ_2 die Bedingung (V2) erfüllen, ist wegen $\text{rg}\psi_1 \neq -1$ der Unterraum $\text{Im}(\psi_1)$ einpunktig und $\varrho_{13} = (\varrho|_{\mathcal{P}_1\pi})$. Sind jedoch ψ_1 und ψ_2 gemäß (V4) verträglich, dann ist in $\mathcal{P}_1\pi$ die Gerade $g_1 := P_0P_1$ mit $P_0, P_1 \in (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) \cap \mathcal{P}_1\pi$ ausnahmsfrei und für jede ausnahmsfreie Gerade $g_2 \subset \mathcal{P}_2\pi$ und jede Projektivität $\sigma': g_1 \varrho_{13} \rightarrow g_2 \varrho_{23}$ ist $\sigma := (\varrho_{13}|_{g_1})\sigma'(\varrho_{23}|_{g_2})^{-1} = (\pi_3|_{g_1 \varrho_{13} \varrho^{-1}})^{-1} \varrho_1 \sigma' \varrho_2^{-1} (\pi_3|_{g_2 \varrho_{23} \varrho^{-1}})$ projektiv, da die Abbildung $(\varrho_1|_{g_1 \varrho_{13} \varrho^{-1}})\sigma'(\varrho_2|_{g_2 \varrho_{23} \varrho^{-1}})^{-1}$ nach 1.3.9 eine Projektivität ist.

Mit der Projektivität σ' ist jedoch auch die Abbildung $\tilde{\sigma} := (\varrho|_{g_1})\sigma'(\varrho|_{g_2})^{-1}$ projektiv; nach der Konstruktion von ϱ gilt jedoch $P_0 \varrho_{13} = P_0 \varrho$, $P_1 \varrho_{13} = P_1 \varrho$ und $(P_0P_1 \cap B) \varrho_{13} = (P_0P_1 \cap B) \varrho$, sodaß $\sigma: g_1 \rightarrow g_2$ und $\tilde{\sigma}: g_1 \rightarrow g_2$ für drei Punkte der Geraden g_1 dasselbe leisten und daher nach dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie (vgl. [1, S.42]) übereinstimmen. Damit besitzt $\varrho_{13}(\varrho|_{\mathcal{P}_1\pi})^{-1}$ die Fixpunktgerade g_1 ; Für $\text{rg}\psi_1 = \dim \Pi(\mathcal{P}_1\pi) = 1$ gilt daher $\varrho|_{\mathcal{P}_1\pi} = \varrho_{13}$; ist jedoch $\text{rg}\psi_1 \geq 2$, so ist $\varrho_{13}(\varrho|_{\mathcal{P}_1\pi})^{-1}$ eine projektive Automarkollineation des Unterraumes $\mathcal{P}_1\pi$, welche die Fundamentalfigur $((\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) \cap \mathcal{P}_1\pi, B \cap \mathcal{P}_1\pi)$ elementweise fest läßt und daher notwendig die Identität ist (vgl. [1, S.157]).

Die Abbildung ϱ ist daher auch eine Fortsetzung von ϱ_{13} und $\psi := \pi\varrho: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ ist eine lineare Fortsetzung der Abbildungen ψ_1 und ψ_2 .

¹⁾ Alle Sätze über Kollineationen gelten sinngemäß auch für lineare Injektionen mit mindestens zwei verschiedenen Bildpunkten.

(2) Bezeichnen wir die in (1) konstruierte lineare Fortsetzung von ψ_1 und ψ_2 mit $\tilde{\psi}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$, so wird $\tilde{\psi}$ für einen bezüglich ψ_1 und ψ_2 wesentlichen Punkt W die Menge $\{W\}$ nicht notwendig auf eine zulässig gewählte Bildmenge abbilden.

Ist W als Ausnahmepunkt vorgeschrieben, so ist $W_1\psi_1 = W_2\psi_2$ (vgl. 1.3.4) und $W_1\pi_{12}\varrho_1 = W_2\pi_{12}\varrho_2$, also $W_i\pi_{12} \in \mathcal{O}_i$ ($i=1,2$). Es existiert eine Kollineation $\kappa \in \text{PGL}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ (vgl. 1.3.4, Fn.), welche $W\pi_{12} \mapsto W\pi_{12}\kappa$ mit $W\pi_{12}\kappa \in \mathcal{O}_3$ leistet. Für die lineare Abbildung $\kappa\tilde{\psi}$ ist W als Punkt von $\mathcal{U}_2 \vee \mathcal{U}_3 \kappa^{-1}$ ein Ausnahmepunkt und $\psi := \kappa\tilde{\psi}$ ist nach 1.3.4 eine lineare Fortsetzung von ψ_1 und ψ_2 .

Ist $W_1\psi_1 \neq W_2\psi_2$, so besitzt eine zulässig gewählte Bildmenge von $\{W\}$ einen Punkt $W' \in W_1\psi_1 W_2\psi_2 \setminus \{W_1\psi_1, W_2\psi_2\}$ als einziges Element. Da die Abbildung $\tilde{\psi}|_{W_1W_2}$ nach 1.1.3 injektiv ist, existiert ein Punkt $\tilde{W} \in W_1W_2 \setminus \{W_1, W_2\}$ mit $\tilde{W}\tilde{\psi} = W'$. Die Kollineation $\kappa \in \text{PGL}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$, welche $W \mapsto \tilde{W}$ leistet, liefert mit $\psi := \kappa\tilde{\psi}$ die gewünschte lineare Fortsetzung, denn es gilt $W\psi = W\kappa\tilde{\psi} = \tilde{W}\tilde{\psi} = W'$.

Nach 1.3.5 ist $\psi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ die einzige lineare Fortsetzung von ψ_1 und ψ_2 , die $\{W\}$ in der gewünschten Weise abbildet.

□

1.3.11 Die Verträglichkeitsbedingungen (V1), ..., (V4) sind zwar hinreichend aber nicht notwendig für die lineare Fortsetzbarkeit der Abbildungen ψ_1 und ψ_2 . Das zeigt folgendes Beispiel (Bezeichnungen wie in 1.3.8):

Es sei $\Pi = (\mathcal{P}, \varrho)$ ein endlichdimensionaler endlicher projektiver Raum der Ordnung $N = 2$ oder $N = 3$; weiters seien $\psi_1: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}'$ und $\psi_2: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}'$ zwei lineare Abbildungen mit $\text{rg}\psi_1 = \text{rg}\psi_2 = 1$, aber $\text{Im}(\psi_1) \neq \text{Im}(\psi_2)$.¹⁾

Die Abbildungen ψ_1 und ψ_2 sind nicht verträglich, wir können jedoch weitgehend analog zu 1.3.10, Beweisschritt (1) eine lineare Fortsetzung von ψ_1 und ψ_2 ermitteln:

Da für $N \leq 3$ jede Bijektion eine Punktreihe auf eine Punktreihe und daher jede Kollineation projektiv ist, kann die Abbildung $(\varrho_1|\mathcal{T}_1)(\varrho_2|\mathcal{T}_2)^{-1}$ durch die Einschränkung der Projektion aus einem Unterraum \mathcal{U}_3 auf \mathcal{T}_1 ersetzt werden und analog zu 1.3.10 werden die Projektion $\pi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{R}_3$ und die

¹⁾ Diese Annahme liegt auch den Figuren in 1.3.10 zugrunde.

linearen Injektionen $q_{i3}: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}'$ erklärt. Nur die Fortsetzbarkeit von q_{13} und q_{23} zu einer linearen Injektion ist anders zu beweisen:

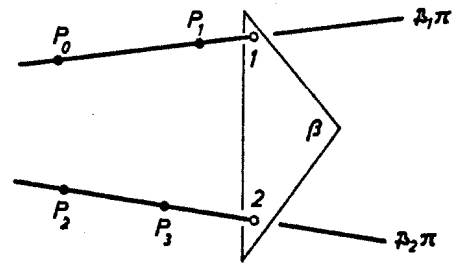
Die Unterräume $\Pi(\mathbb{R}_3)$ und $\Pi(\mathbb{R}'_3)$ besitzen gleichmächtige Geraden und gleiche Dimension, sind also isomorph. Zu einer geordneten Fundamentalfigur in $\Pi(\mathbb{R}_3)$ und einer geordneten Fundamentalfigur in $\Pi(\mathbb{R}'_3)$ gibt es genau eine Kollineation, welche die erste auf die zweite Fundamentalfigur abbildet. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1) $\dim \Pi(\mathbb{R}_3) = 3$. Wir wählen eine geordnete Fundamentalfigur $(\{P_0, P_1, P_2, P_3\}, \beta)$ mit $P_0P_1 = \mathbb{R}_1\pi$ und $P_2P_3 = \mathbb{R}_2\pi$ im Unterraum $\Pi(\mathbb{R}_3)$. Weiters sei $\{1\} := \beta \cap \mathbb{R}_1\pi$ bzw. $\{2\} := \beta \cap \mathbb{R}_2\pi$.

Dann gibt es nach 1.2.2 eine geordnete Fundamentalfigur

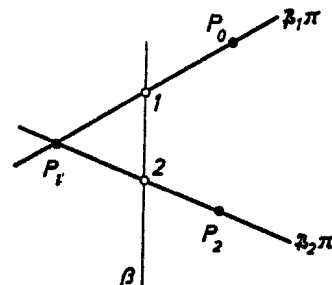
$(\{P_0q_{13}, P_1q_{13}, P_2q_{23}, P_3q_{23}\}, \beta')$ in $\Pi(\mathbb{R}'_3)$ mit $\beta' \cap (P_0P_1)q_{13} = \{1\}q_{13}$ und $\beta' \cap (P_2P_3)q_{23} = \{2\}q_{23}$. Durch diese Fundamentalfiguren ist

auch genau eine lineare Injektion $q: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}'$ bestimmt, da q einer Kollineation gleich ist. Weil jede Gerade höchstens vier Punkte besitzt, gilt $q|\mathbb{R}_1\pi = q_{13}$.



(2) $\dim \Pi(\mathbb{R}_3) = 2$. Wir wählen eine geordnete Fundamentalfigur $(\{P_0, P_1, P_2\}, \beta)$ mit $P_0P_1 = \mathbb{R}_1\pi$ und $P_1P_2 = \mathbb{R}_2\pi$. Analog zu (1) wird mittels Hilfspunkten

1,2 eine geordnete Fundamentalfigur in $\Pi(\mathbb{R}'_3)$ konstruiert, und die durch die beiden Fundamentalfiguren bestimmte lineare Injektion setzt q_{13} und q_{23} fort.



Ist zusätzlich für einen wesentlichen Punkt W die Bildmenge von $\{W\}$ in zulässiger Weise vorgeschrieben, so kann wie in 1.3.10, (2) vorgegangen werden, und die lineare Fortsetzung ist dann eindeutig bestimmt. Für $N=2$ gibt es nur eine lineare Fortsetzung.

2 GRASSMANN - RÄUME

2.1 Vorbemerkungen

2.1.1 Wir betrachten in Abschnitt 2 ausschließlich endlich-dimensionale projektive Räume.

Es sei $\Pi = (\mathfrak{p}, \sigma)$ ein n -dimensionaler projektiver Raum. Die Menge $u\Pi$ aller Unterräume von Π bildet bekanntlich bezüglich des Verbindens und des Schneidens einen vollständigen, modularen, atomaren und komplementierten Verband $(u\Pi, \vee, \wedge)$ (vgl. [1, S.97]).

Abweichend von Abschnitt 1 wollen wir Geometrie nicht in der Punktmenge \mathfrak{p} sondern im Unterraumverband $u\Pi$ betreiben, was auch dadurch zum Ausdruck kommen soll, daß wir die Elemente von $u\Pi$ mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnen; dabei wird links oben die Dimension des Unterraumes als Index angebracht. Nur der leere und der n -dimensionale Unterraum von Π sollen wie bisher mit \emptyset bzw. mit \mathfrak{p} bezeichnet werden. Statt "d-dimensionaler Unterraum" verwenden wir auch die Kurzbezeichnung "d-Raum".

Die Menge aller d -dimensionalen Unterräume von Π bezeichnen wir mit ${}^d\check{U}(\Pi)$ ¹⁾. Aus formalen Gründen erklären wir ${}^d\check{U}(\Pi)$ für alle Zahlen $d \in \mathbb{Z}$: Es sei ${}^d\check{U}(\Pi) = \emptyset$ für $d \leq -2$ oder $d \geq n+2$.

2.1.2 Ist Π^* der zu Π duale projektive Raum, so ist die Annulatorabbildung $\lambda: u\Pi \rightarrow u\Pi^*$ (vgl. [1, S.105]) ein Verbandsantiisomorphismus, der d -Räume von Π auf $(n-d-1)$ -Räume aus Π^* abbildet. Die Elemente von $u\Pi^*$ werden in gleicher Weise wie diejenigen von $u\Pi$ bezeichnet, tragen aber zur Unterscheidung einen Stern.

2.1.3 Wir zeichnen in der Menge ${}^d\check{U}(\Pi)$ gewisse Teilmengen aus:

Definition: Sind rT und sH zwei Unterräume von Π mit $r \leq d \leq s$, so nennen wir die Menge

¹⁾ Wir schreiben für ${}^d\check{U}(\Pi)$ auch kurz ${}^d\check{U}$.

$$d[rT, {}^sH] := \{ {}^dX \in {}^d\mathcal{U} \mid rT \subset {}^dX \subset {}^sH \}$$

die d -Klammer ¹⁾ der Unterräume rT und sH ;
 weiters wird $d[rT] := d[rT, \emptyset]$ als d -Klammer von rT und
 $d[{}^sH] := d[\emptyset, {}^sH]$ als d -Klammer von sH definiert.

rT heißt der Träger und sH die Hülle der
 d -Klammer.

Insbesondere heißt eine d -Klammer

$d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H]$ mit ${}^{d-1}T \subset {}^{d+1}H$ ein d -Büschel,

$d[{}^{d-1}T]$ ein d -Bündel,

$d[{}^{d+1}H]$ ein d -Feld,

$d[{}^0T]$ ein d -Hyperbündel und

$d[{}^{n-1}H]$ ein d -Hyperfeld.

d -Büschel werden auch mit lateinischen Kleinbuchstaben be-
 zeichnet, die links oben den Index d tragen; ${}^d\mathcal{B}(\pi)$ bzw. kurz
 ${}^d\mathcal{B}$ sei die Menge aller d -Büschel von ${}^d\mathcal{U}(\pi)$.

Eine d -Klammer $d[rT, {}^sH]$ ist genau für $rT \subset {}^sH$ nicht leer;
 insbesondere ist daher ein d -Büschel nicht leer. Die
 Annulatorabbildung $\lambda: u\pi \rightarrow u\pi^*$ bildet eine d -Klammer $d[rT, {}^sH] \subset$
 $cu\pi$ auf die $(n-d-1)$ -Klammer $(n-d-1)[{}^{n-s}H^*, {}^{n-r}T^*] \subset u\pi^*$ ab mit
 ${}^{n-s}H^* = {}^sH\lambda$ und ${}^{n-r}T^* = rT\lambda$.

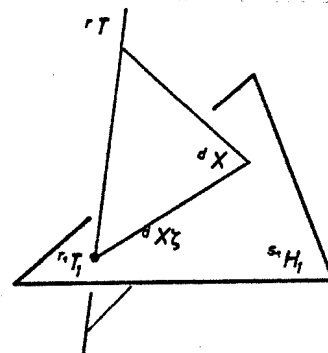
2.1.4 Es sei ${}^d\mathcal{Q} := d[rT, {}^sH]$ eine nichtleere d -Klammer mit
 $r, s \neq d$. Wir wählen einen Unterraum ${}^{s_1}H_1 \subset {}^sH$ so, daß
 $rT \vee {}^{s_1}H_1 = {}^sH$ gilt. Daher spannt auch jeder Unterraum

${}^dX \in {}^d\mathcal{Q}$ mit ${}^{s_1}H_1$ die Hülle sH auf
 und nach dem Dimensionssatz ist
 somit stets $\dim({}^{s_1}H_1 \vee {}^dX) =$
 $= s_1 + d - s =: d_1$ bzw.

① $d - s = d_1 - s_1$.

Die d_1 -dimensionalen Spurräume
 der d -Räume von ${}^d\mathcal{Q}$ in ${}^{s_1}H_1$ haben

den Unterraum $\bigcap ({}^dX \cap {}^{s_1}H_1 \mid {}^dX \in {}^d\mathcal{Q}) = \bigcap ({}^dX \mid {}^dX \in {}^d\mathcal{Q}) \cap {}^{s_1}H_1 = rT \cap {}^{s_1}H_1 =:$
 $=: {}^{r_1}T_1$ gemeinsam.



Wir definieren nun eine globale Abbildung

$$\zeta: d[rT, {}^sH] \rightarrow d_1[{}^{r_1}T_1, {}^{s_1}H_1] \text{ durch } {}^dX \mapsto {}^dX_\zeta := {}^dX \cap {}^{s_1}H_1; \text{ zu-}$$

¹⁾ Die Bezeichnung d -Klammer ist in der Literatur nicht üblich. Vgl. auch 2.7.

nächst zeigen wir, daß die Abbildung ζ injektiv ist. Wir nehmen indirekt an, daß ${}^dX, {}^dY \in {}^d\mathcal{Q}$ verschieden sind, aber es gelte ${}^dX_\zeta = {}^dY_\zeta$. Da ${}^rT \vee {}^{s_1}H_1 = {}^sH$ gilt, liefert der Dimensionssatz die Formel

$$\textcircled{2} \quad r - s = r_1 - s_1.$$

Daher ist $\dim({}^dX_\zeta \vee {}^rT) = d_1 + r - r_1 \stackrel{\textcircled{1}}{=} s_1 + d - s + r - r_1 \stackrel{\textcircled{2}}{=} = d$. Mit ${}^rT \vee {}^dX_\zeta \subset {}^dX$ folgt ${}^rT \vee {}^dX_\zeta = {}^dX$, und die gleichen Überlegungen für dY liefern dann ${}^dX = {}^dX_\zeta \vee {}^rT = {}^dY_\zeta \vee {}^rT = {}^dY$ im Widerspruch zur Annahme ${}^dX \neq {}^dY$. Nun ist aber auch die Surjektivität von ζ leicht nachweisbar, denn für jeden d_1 -Raum ${}^{d_1}X_1 \in d_1[{}^rT_1, {}^{s_1}H_1]$ gilt mit $\textcircled{1}$ und $\textcircled{2}$ $\dim({}^{d_1}X_1 \vee {}^rT) = d_1 + r - r_1 = d$.

In Anlehnung an die projektive Geometrie setzen wir fest:

Definition: Ist ${}^d\mathcal{Q} := d[{}^rT, {}^sH]$ eine nichtleere d -Klammer ($r, s \neq d$) und ${}^{s_1}H_1 \subset {}^sH$ ein Unterraum mit ${}^rT \vee {}^{s_1}H_1 = {}^sH$, so heißt die Abbildung $\zeta: {}^d\mathcal{Q} \rightarrow {}^{d_1}\mathcal{Q}_1 := (s_1 + d - s)[{}^rT \cap {}^{s_1}H_1, {}^{s_1}H_1]$ mit ${}^dX \mapsto {}^dX_\zeta := {}^dX \cap {}^{s_1}H_1$ ebenso wie ζ^{-1} eine Perspektivität.

Wir nennen ${}^d\mathcal{Q}$ und ${}^{d_1}\mathcal{Q}_1$ kurz, aber unpräzise, auch perspektive Klammern. Je zwei perspektive Klammern sind gleichmächtig und jedes d -Büschel ist gleichmächtig einem 0 -Büschel (Punktreihe ¹⁾), besitzt also mindestens drei Elemente.

2.2 Geometrie der d -dimensionalen Unterräume

2.2.1 Es sei $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{U})$ ein n -dimensionaler projektiver Raum; mittels der Mengen ${}^d\mathcal{U}$ und ${}^d\mathcal{P}$ konstruieren wir im Unterraumverband $u\Pi$ neue geometrische Strukturen:

Definition: Ist $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{U})$ ein n -dimensionaler projektiver Raum, so nennen wir die Inzidenzstruktur $({}^d\mathcal{U}, {}^d\mathcal{P}, \in) =: {}^d\Pi$ für $1 \leq d \leq n-2$ sowie für $d = 0$ und $d = n-1$ die Geometrie der d -dimensionalen Unterräume von Π .

Wir bezeichnen ${}^d\Pi$ auch als die d -Geometrie von Π .

¹⁾ Wir bezeichnen die 0 -Räume gelegentlich auch als Punkte. Aus dem Text ist jedoch stets ersichtlich, ob das Wort "Punkt" für ein Element oder eine einelementige Teilmenge von \mathcal{P} verwendet wird.

2.2.2 Sind $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{U})$ und $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{U}')$ (endlichdimensionale) projektive Räume, so ist ein Isomorphismus (vgl. [1, S.2]) $(\varphi_1, \varphi_2): ({}^d\mathcal{U}(\Pi), {}^d\mathcal{B}(\Pi)) \rightarrow ({}^d\mathcal{U}(\Pi'), {}^d\mathcal{B}(\Pi'))$ durch die Abbildung $\varphi_1: {}^d\mathcal{U}(\Pi) \rightarrow {}^d\mathcal{U}(\Pi')$ völlig bestimmt, da Büschel nach 2.1.4 nichtleere Teilmengen von ${}^d\mathcal{U}(\Pi)$ bzw. ${}^d\mathcal{U}(\Pi')$ sind. Wir können daher im folgenden stets an Stelle der Paarabbildung (φ_1, φ_2) die Abbildung $\varphi := \varphi_1$ betrachten und diese als Isomorphismus bezeichnen. Eine Bijektion $\varphi: {}^d\mathcal{U}(\Pi) \rightarrow {}^d\mathcal{U}(\Pi')$ ist offenbar genau dann ein Isomorphismus von ${}^d\Pi$ auf ${}^d\Pi'$, wenn φ bzw. φ^{-1} stets Büschel auf Büschel abbildet.

Da wir jeden projektiven Raum auch als Inzidenzstruktur auffassen können (vgl. [1, S.85]), ist es sinnvoll nach jenen d -Geometrien von Π zu fragen, die auch projektive Räume sind.¹⁾ Trivialerweise ist für $\dim \Pi = n$ die 0-Geometrie ${}^0\mathcal{U}$ zum projektiven Raum Π isomorph und ebenso sind die $(n-1)$ -Geometrie und der duale projektive Raum Π^* isomorph. Es gilt genauer:

2.2.3 Die d -Geometrie eines n -dimensionalen projektiven Raumes Π ist genau für $d = 0$ oder $d = n-1$ ein projektiver Raum.

Beweis:

(1) Nach 2.2.2 ist ${}^d\Pi$ für $d = 0$ bzw. $d = n-1$ zu Π bzw. Π^* isomorph.

(2) Ist ${}^d\Pi$ ein projektiver Raum, so sind je zwei verschiedene d -Räume ${}^dX, {}^dY$ Elemente eines d -Büschels $d[{}^{d-1}\mathcal{T}, {}^{d+1}\mathcal{H}]$; dann gilt notwendig ${}^dX \wedge {}^dY = {}^{d-1}\mathcal{T}$ und ${}^dX \vee {}^dY = {}^{d+1}\mathcal{H}$. Nehmen wir indirekt $1 \leq d \leq n-2$ an, so ist $n \geq d+2 \geq 3$ und zu jedem d -Raum dX existiert ein Komplementärraum, der eine zu dX windschiefe Gerade²⁾ 1G enthält. Wählen wir einen d -Raum ${}^dY \supset {}^1G$, so gilt $\dim({}^dX \vee {}^dY) \geq \dim({}^dX \vee {}^1G) = d+2$, sodaß dX und dY im Widerspruch zur Annahme, ${}^d\Pi$ sei ein projektiver Raum, keinem d -Büschel angehören. ◻

Wir legen auch den folgenden Überlegungen einen n -dimensionalen projektiven Raum $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{U})$ zugrunde.

¹⁾ Die Geraden eines solchen projektiven Raumes sind die d -Büschel.

²⁾ 1-Raum

2.2.4 Die Annulatorabbildung $\lambda: u\Pi \rightarrow u\Pi^*$ induziert eine Abbildung ${}^d\lambda: {}^d\mathcal{U}(\Pi) \rightarrow {}^{n-d-1}\mathcal{U}(\Pi^*)$ durch ${}^d\lambda = \lambda|{}^d\mathcal{U}(\Pi)$. Die Bijektion ${}^d\lambda$ und die Umkehrabbildung ${}^d\lambda^{-1}$ bilden nach 2.1.3 stets Büschel auf Büschel ab. Daher ist nach 2.2.2 die d -Geometrie ${}^d\Pi$ zur $(n-d-1)$ -Geometrie ${}^{n-d-1}\Pi^*$ des dualen projektiven Raumes isomorph.

Das Dualitätsprinzip endlichdimensionaler projektiver Räume (vgl. [1, S.111]) gestattet es, wahre Aussagen der d -Geometrie ${}^d\Pi$ in wahre Aussagen der $(n-d-1)$ -Geometrie ${}^{n-d-1}\Pi$ überzuführen. Beim Dualisieren sind insbesondere d -Büschel durch $(n-d-1)$ -Büschel, d -(Hyper-) Felder durch $(n-d-1)$ -(Hyper) Bündel und d -(Hyper-) Bündel durch $(n-d-1)$ -(Hyper) Felder zu ersetzen.

Ist eine Aussage sowohl für die d -Geometrie ${}^d\Pi$ als auch für die $(n-d-1)$ -Geometrie ${}^{n-d-1}\Pi$ richtig, so gilt in beiden Geometrien die zur ursprünglichen duale Aussage.

2.2.5 Definition: Zwei d -Räume heißen **benachbart** ¹⁾, wenn sie gleich sind, oder wenn es ein d -Büschel gibt, dem beide angehören.

Ist dX zu dY benachbart, so schreiben wir im folgenden ${}^dX \sim {}^dY$. Diese Relation ist nach Definition reflexiv und symmetrisch. Für $d = 0$ und $d = n-1$ sind je zwei d -Räume benachbart.

2.2.6 Wir verallgemeinern den Begriff der Verbindungsmenge (vgl. [1, S.93]):

Definition: Sind ${}^d\mathcal{M}_1$ und ${}^d\mathcal{M}_2$ zwei Teilmengen von ${}^d\mathcal{U}(\Pi)$, so heißt die Menge ${}^d\mathcal{M}_1 \overset{d}{\vee} {}^d\mathcal{M}_2$, welche definiert ist durch

- (i) $\{ {}^dX_1 \} \overset{d}{\vee} \{ {}^dX_2 \} := d[{}^dX_1 \wedge {}^dX_2, {}^dX_1 \vee {}^dX_2]$ für ${}^dX_1 \sim {}^dX_2$,
 - (ii) ${}^d\mathcal{M}_1 \overset{d}{\vee} {}^d\mathcal{M}_2 := (\cup (\{ {}^dX_1 \} \overset{d}{\vee} \{ {}^dX_2 \} \mid {}^dX_1 \in {}^d\mathcal{M}_1 \wedge {}^dX_2 \in {}^d\mathcal{M}_2)) \cup {}^d\mathcal{M}_1 \cup {}^d\mathcal{M}_2$,
- die **V e r b i n d u n g s m e n g e** ²⁾ von ${}^d\mathcal{M}_1$ und ${}^d\mathcal{M}_2$.

Insbesondere gilt $\{ {}^dX \} \overset{d}{\vee} \{ {}^dX \} = \{ {}^dX \}$ und für benachbarte,

¹⁾ Die Begriffsbildung "benachbart" stimmt mit der in [6] und [7] benützten Bezeichnung "adjacent" nicht völlig überein.

²⁾ Wir bezeichnen die Verbindungsmenge zweier Teilmengen von ${}^d\mathcal{U}$ auch als d -Verbindungsmenge um Verwechslungen mit der Verbindungsmenge zweier Unterräume zu vermeiden. In diesem Sinne ist auch die Verwendung des Zeichens $\overset{d}{\vee}$ zu verstehen.

verschiedene d -Räume ${}^dX_1, {}^dX_2$ ist $\{ {}^dX_1 \} \vee \{ {}^dX_2 \}$ das durch diese d -Räume eindeutig bestimmte d -Büschel, welches beide enthält, wir bezeichnen dieses d -Büschel auch mit ${}^dX_1 {}^dX_2$ (vgl. 1.1.5, Fußnote).

Für $d = 0$ ist die Definition der d -Verbindungs Menge zur Definition der Verbindungs Menge in projektiven Räumen gleichwertig.

2.2.7 Als Anwendung des Begriffes der d -Verbindungs Menge zeigen wir:

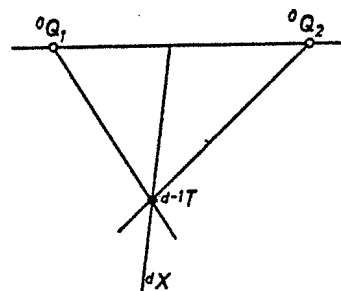
Sind $d[{}^oQ_1]$ und $d[{}^oQ_2]$ zwei verschiedene d -Hyperbündel, so gilt ${}^dX \in d[{}^oQ_1] \vee d[{}^oQ_2]$ genau dann, wenn ${}^dX \cap ({}^oQ_1 \vee {}^oQ_2) \neq \emptyset$ erfüllt ist.

Beweis:

(1) Hat dX mit der Geraden ${}^oQ_1 \vee {}^oQ_2$ leeren Durchschnitt, so gehört dX sicherlich keinem der beiden d -Hyperbündel an und es gilt $\dim({}^dX \vee {}^oQ_1 \vee {}^oQ_2) \geq d+2$. Wir können daher kein d -Büschel finden, dessen Hülle ${}^dX \vee {}^oQ_1 \vee {}^oQ_2$ umfaßt, sodaß dX kein Element der d -Verbindungs Menge sein kann.

(2) Trifft dX die Gerade ${}^oQ_1 \vee {}^oQ_2$, so erhalten wir $\dim({}^dX \vee {}^oQ_1 \vee {}^oQ_2) \leq d+1$ und wir können einen Unterraum ${}^{d+1}H \supset {}^dX \vee {}^oQ_1 \vee {}^oQ_2$ wählen. Greifen wir ferner einen Unterraum ${}^{d-1}T \subset {}^dX$ beliebig heraus, so besitzt das d -Büschel $d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H]$ mit beiden d -Hyperbündeln nichtleeren Durchschnitt, sodaß ${}^dX \in d[{}^oQ_1] \vee d[{}^oQ_2]$ nachgewiesen ist. \square

Speziell für $n = 3$ und $d = 1$ erhalten wir: Die 1-Verbindungs Menge zweier verschiedener Geradenbündel (1-Bündel) $1[{}^oQ_1]$ und $1[{}^oQ_2]$ ist das Gebüsch ¹⁾ der Achse ${}^oQ_1 \vee {}^oQ_2$ (vgl. nebenstehende Abbildung).



¹⁾ In einem dreidimensionalen projektiven Raum \mathbb{P}^3 heißt die Menge aller Geraden, die mit einer festen Geraden 1E benachbart sind, also 1E schneiden, ein Gebüsch mit der Achse 1E .

Dual gilt folgende Aussage: Sind $d[n^{-1}C_1]$ und $d[n^{-2}C_2]$ zwei verschiedene d -Hyperfelder, so gilt ${}^dX \in d[n^{-1}C_1] \cap d[n^{-2}C_2]$ genau dann, wenn ${}^dX \in ({}^{n-1}C_1 \cap {}^{n-1}C_2) \neq \emptyset$ erfüllt ist.

2.2.8 Ist ${}^dQ = d[rT, {}^sH]$ eine d -Klammer und setzen wir ${}^d\mathcal{B}_{{}^dQ} := \{ {}^d b \in {}^d\mathcal{B} \mid {}^d b \subset {}^dQ \}$, so ist das Tripel $({}^dQ, {}^d\mathcal{B}_{{}^dQ}, \in)$ eine Inzidenzstruktur, welche wir mit $\Delta({}^dQ)$ bezeichnen. Ist $\Delta({}^dQ)$ insbesondere ein projektiver Raum, so schreiben wir für $\Delta({}^dQ)$ auch $\Pi({}^dQ)$. Gilt ${}^dQ = \emptyset$ so ist $\Pi({}^dQ)$ der leere projektive Raum.

Wir werden diese Inzidenzstrukturen in 2.7 genauer untersuchen. Als einfache Anwendung von 2.1.4 erhalten wir:

2.2.9 Sind dQ und ${}^{d_1}Q_1$ zwei nichtleere Klammern und ist $\zeta: {}^dQ \rightarrow {}^{d_1}Q_1$ eine Perspektivität, so ist ζ ein Isomorphismus ¹⁾ von $\Delta({}^dQ)$ auf $\Delta({}^{d_1}Q_1)$.

Beweis: Wir wählen die Bezeichnungen wie in 2.1.4, also ${}^dQ = d[rT, {}^sH]$ und ${}^{d_1}Q_1 = (s_1+d-s)[rT \cap {}^{s_1}H_1, {}^{s_1}H_1]$. In $d[rT, {}^sH]$ gibt es d -Büschel genau dann, wenn sowohl $r \leq d-1$ als auch $s \geq d+1$ gilt. Sind diese Ungleichungen beide erfüllt, so können wir auch die Klammern $(d-1)[rT, {}^sH]$ bzw. $(d+1)[rT, {}^sH]$ perspektiv auf die Klammern $(s_1+d-1-s)[rT \cap {}^{s_1}H_1, {}^{s_1}H_1]$ bzw. $(s_1+d+1-s)[rT \cap {}^{s_1}H_1, {}^{s_1}H_1]$ abbilden und erhalten für jedes d -Büschel $d[{}^{d+1}\bar{T}, {}^{d+1}\bar{H}] \zeta = (s_1+d-s)[{}^{d-1}\bar{T} \cap {}^{s_1}H_1, {}^{d+1}\bar{H} \cap {}^{s_1}H_1]$. Da ζ eine Bijektion ist, zeigt man in gleicher Weise, daß ζ^{-1} stets Büschel auf Büschel abbildet. □

¹⁾ Die Abbildung der d -Büschel ist analog zu 2.2.2 durch die Abbildung der d -Räume mitbestimmt.

2.3 Nachbarfolgen

2.3.1 Es sei $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ ein n -dimensionaler projektiver Raum und ${}^d\Pi = ({}^d\mathcal{L}, {}^d\mathcal{P}, \epsilon)$ die d -Geometrie in Π .

Die folgenden Ergebnisse sind trivial, falls ${}^d\Pi$ ein projektiver Raum ist, also für $d = 0$ oder $d = n-1$.

2.3.2 Definition: Eine nichtleere Folge ${}^d\mathcal{N} = \{{}^dX_i \in {}^d\mathcal{U} \mid i=0, \dots, l\}$ heißt eine Nachbarfolge der Länge l , wenn für $i=0, \dots, l-1$ stets dX_i mit ${}^dX_{i+1}$ benachbart ist.

Wir nennen dX_0 das Anfangs- und dX_l das Endglied der Nachbarfolge; ${}^d\mathcal{N}$ bezeichnen wir auch als Nachbarfolge von dX_0 nach dX_l . (Vgl. [6, S.36] und [7, S.81])

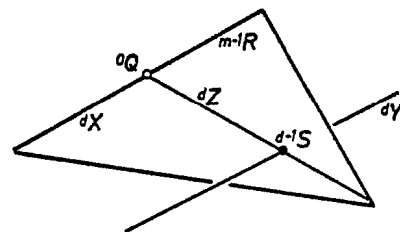
2.3.3. Sind dX und dY zwei d -Räume, so existiert stets eine Nachbarfolge von dX nach dY .

Beweis: Wir wenden Induktion nach $v := \dim({}^dX \vee {}^dY)$ an; es gilt $d \leq v \leq \bar{v} := \{\min 2d+1, n\}$.

Für $v = d$ ist ${}^dX = {}^dY$ und die Nachbarfolge $\{{}^dX_0\}$ mit ${}^dX_0 := {}^dX$ leistet das Gewünschte.

Es sei die Behauptung nach Induktionsvoraussetzung bereits für $d \leq v \leq m-1 < \bar{v}$ bewiesen. Gilt $\dim({}^dX \vee {}^dY) = m$, so wählen wir in $\Pi({}^dX \vee {}^dY)$ eine Hyperebene ${}^{m-1}R \supset {}^dX$; diese schneidet dY nach einem Unterraum ${}^{d-1}S$. Ver-

binden wir ${}^{d-1}S$ mit einem Punkt ${}^oQ \subset {}^dX \setminus {}^dY$, so erhalten wir ${}^{d-1}S \vee {}^oQ =: {}^dZ$; dann sind dZ und dY benachbart und es gilt ${}^dX \vee {}^dZ = {}^{m-1}R$. Somit existiert eine Nachbar-



folge $\{{}^dX_i \mid i=0, \dots, l\}$ mit ${}^dX_0 = {}^dX$ und ${}^dX_l = {}^dZ$. Setzen wir ${}^dX_{l+1} := {}^dY$, so ist $\{{}^dX_i \mid i=0, \dots, l, l+1\}$ eine Nachbarfolge von dX nach dY . □

2.3.4 Da jede Menge nichtnegativer ganzer Zahlen ein kleinstes Element besitzt, existieren unter allen Nachbarfolgen von dX

nach dY solche kleinster Länge, welche wir im folgenden als kürzeste Nachbarfolgen bezeichnen. Das gibt Anlaß für folgende Definition, die von W.L. CHOW (vgl. [6, S.36]) stammt:

Definition: Sind dX und dY zwei d -Räume, so nennen wir die Länge einer kürzesten Nachbarfolge von dX nach dY die **E n t f e r n u n g** (Distanz) der beiden d -Räume.

Wir verwenden für die Entfernung von dX und dY die Bezeichnung $\text{dist}({}^dX, {}^dY)$.

2.3.5 Die Abbildung $\text{dist}: {}^d\check{U} \times {}^d\check{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Metrik auf der Menge ${}^d\check{U}$. ¹⁾

Beweis: Nach Definition ist $\text{dist}({}^dX, {}^dY) \geq 0$ und zwei d -Räume haben genau dann die Entfernung Null, wenn sie übereinstimmen.

Trivialerweise gilt $\text{dist}({}^dX, {}^dY) = \text{dist}({}^dY, {}^dX)$.

Gilt $\text{dist}({}^dX, {}^dY) = l_1$ und $\text{dist}({}^dY, {}^dZ) = l_2$, so existiert eine Nachbarfolge von dX nach dZ der Länge $l_1 + l_2$; das ergibt $\text{dist}({}^dX, {}^dZ) \leq l_1 + l_2$, womit die Dreiecksungleichung nachgewiesen ist. □

Da jede Kugel ¹⁾ um einen d -Raum dX mit dem Radius $\frac{1}{2}$ nur das Element dX besitzt, ist die durch die Entfernung mitbestimmte Topologie die diskrete Topologie, sodaß jede Teilmenge von ${}^d\check{U}$ offen ist.

2.3.6 Zwei d -Räume ${}^dX, {}^dY$ haben genau dann die Entfernung 1, wenn gilt $\dim({}^dX \vee {}^dY) = d+1$.

Beweis:

(1) Es sei $\dim({}^dX \vee {}^dY) = v$; wir zeigen durch Induktion nach v ($d \leq v \leq \bar{v}$), daß dann $\text{dist}({}^dX, {}^dY) = v-d$ gilt.

Für $v = d$ ist ${}^dX = {}^dY$ und die Entfernung der beiden d -Räume ist Null.

Wir setzen voraus, daß für $d \leq v \leq m-1 < \bar{v}$ die Behauptung bereits bewiesen ist. Für $v = m$ konstruieren wir wie in 2.3.3 einen zu dY benachbarten d -Raum dZ mit $\dim({}^dX \vee {}^dZ) = m-1$.

¹⁾ Vgl. [10].

Daher ist nach Induktionsvoraussetzung $\text{dist}({}^dX, {}^dZ) \leq m-1-d$ und $\text{dist}({}^dX, {}^dY) \leq m-d$, da eine kürzeste Nachbarfolge von dX nach dZ durch Hinzunahme von dY eine Nachbarfolge der Länge $l \leq m-d$ von dX nach dY ergibt.

(2) Nun sei $\text{dist}({}^dX, {}^dY) = l$; durch Induktion nach l beweisen wir $\dim({}^dX \vee {}^dY) = l+d$.

Gilt $l = 0$, so erhalten wir ${}^dX = {}^dY$ und trivialerweise $\dim({}^dX \vee {}^dY) = d$.

Die Induktionsvoraussetzung lautet, daß die Aussage bereits für $0 \leq l \leq m-1$ bewiesen sei. Gilt $\text{dist}({}^dX, {}^dY) = m$, so existiert eine kürzeste Nachbarfolge $\{{}^dX_i \mid i=0, \dots, m\}$ von ${}^dX = {}^dX_0$ nach ${}^dY = {}^dX_m$. Dann ist $\text{dist}({}^dX_0, {}^dX_{m-1}) \leq m-1$, also $\dim({}^dX \vee {}^dX_{m-1}) \leq m-1+d$. Da dY und ${}^dX_{m-1}$ benachbart sind, folgt $\dim(({}^dX \vee {}^dX_{m-1}) \cap {}^dY) \geq d-1$ und mittels des Dimensionssatzes $\dim({}^dX \vee {}^dX_{m-1} \vee {}^dY) \leq (m-1+d) + d - (d-1) = m+d$ und insbesondere ist auch $\dim({}^dX \vee {}^dY) \leq m+d$.

(3) Sind dX und dY zwei d -Räume, so gilt nach (1) und (2) insgesamt $\dim({}^dX \vee {}^dY) = \text{dist}({}^dX, {}^dY) + d$. □

Wir können die Aussage des soeben bewiesenen Satzes auch in folgender Formel zusammenfassen:

$$\text{dist}({}^dX, {}^dY) = \dim({}^dX \vee {}^dY) - d = -\dim({}^dX \cap {}^dY) + d$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus dem Dimensionssatz; insbesondere gilt $0 \leq \text{dist}({}^dX, {}^dY) \leq \bar{v} - d = \min\{d+1, n-d\}$

2.3.7 Ist ${}^d\mathcal{N} = \{{}^dX_i \mid i=0, \dots, l\}$ eine kürzeste Nachbarfolge von dX nach dY so gilt:

(i) $\text{dist}({}^dX_j, {}^dX_k) = |j-k|$

(ii) ${}^dX \cap {}^dY \subset {}^dX_i \subset {}^dX \vee {}^dY$, für alle $i=0, \dots, l$

Beweis:

(1) Zu (i): Nehmen wir indirekt $\text{dist}({}^dX_j, {}^dX_k) < |j-k|$ an und gelte o.B.d.A. $j \leq k$, so folgt mittels mehrfacher Anwendung der Dreiecksungleichung (vgl. 2.3.5) $\text{dist}({}^dX, {}^dY) =$

$\leq \text{dist}({}^dX, {}^dX_j) + \text{dist}({}^dX_j, {}^dX_k) + \text{dist}({}^dX_k, {}^dY) <$
 $< j + (k-j) + (l-j) = l$ im Widerspruch zur Annahme. Da
 $\{{}^dX_i \mid i=j, \dots, k\}$ eine Nachbarfolge von dX_j nach dX_k abgibt
 und die Länge $|j-k|$ besitzt, folgt die Gültigkeit von (i).

(2) Zu (ii): Nach (i) ist jede Nachbarfolge ${}^d\mathcal{N}_t := \{X_i \mid i=0, \dots, t\}$
 eine kürzeste Nachbarfolge von dX nach X_t ($t \leq l$). Wir
 beweisen (ii) durch Induktion nach t .

Für $t = 0$ ist die Aussage (ii) trivialerweise erfüllt.

Es sei die Behauptung bereits für $0 \leq t \leq m-1 < l$ be-
 wiesen, das heißt ${}^dX \cap {}^dX_{m-1} \subset {}^dX_i \subset {}^dX \vee {}^dX_{m-1}$, für alle $i=0, \dots, m-1$.
 Der Unterraum ${}^dX_{m-1} \cap {}^dX_m$ ist eine Hyperebene des projektiven
 Raumes $\Pi({}^dX_{m-1})$, welche ${}^dX \cap {}^dX_{m-1}$ wegen $\text{dist}({}^dX, {}^dX_{m-1}) \neq$
 $\neq \text{dist}({}^dX, {}^dX_m)$ nicht umfaßt. Daher gilt nach 2.3.6
 $\dim({}^dX \cap {}^dX_{m-1} \cap {}^dX_m) = \dim({}^dX \cap {}^dX_{m-1}) - 1 = d - (m-1) - 1 = d-m$,
 also ${}^dX \cap {}^dX_m = {}^dX \cap {}^dX_{m-1} \cap {}^dX_m$. Wir haben somit ${}^dX \cap {}^dX_m \subset {}^dX \cap {}^dX_{m-1}$
 und ${}^dX \cap {}^dX_m \subset {}^dX_i$ für alle $i=0, \dots, m$.

Dual gilt ${}^dX_i \supset {}^dX \vee {}^dX_m$ für alle $i=0, \dots, m$. □

2.3.8 Ist $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{U})$ ein n -dimensionaler projektiver Raum,
 weiters $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{U}')$ ein n' -dimensionaler projektiver Raum
 und $\varphi: {}^d\mathcal{U}(\Pi) \rightarrow {}^d\mathcal{U}'(\Pi')$ ein Isomorphismus von ${}^d\Pi$ auf ${}^d\Pi'$,
 so bildet φ für alle ${}^dX, {}^dY \in {}^d\mathcal{U}$ eine (kürzeste) Nachbarfolge
 von dX nach dY auf eine (kürzeste) Nachbarfolge von ${}^dX\varphi$ nach
 ${}^dY\varphi$ ab.

Beweis: Da φ stets d -Büschel auf d' -Büschel abbildet, sind
 die Bilder zweier benachbarter d -Räume ebenfalls benachbart.
 Das ergibt, daß φ Nachbarfolgen von ${}^d\Pi$ auf Nachbarfolgen von
 ${}^d\Pi'$ abbildet, also folgt aus $\text{dist}({}^dX, {}^dY) = 1$ immer
 $\text{dist}({}^dX\varphi, {}^dY\varphi) =: 1' \leq 1$. Die gleichen Überlegungen für den
 Isomorphismus φ^{-1} liefern $1 \leq 1'$, also insgesamt $1 = 1'$.
 Der Isomorphismus φ bildet daher auch kürzeste Nachbarfolgen
 auf kürzeste Nachbarfolgen ab. □

2.4 Projektive Höchst Räume

2.4.1 Ist $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{Y})$ ein n -dimensionaler projektiver Raum, so ist die d -Geometrie ${}^d\Pi = ({}^d\mathcal{U}, {}^d\mathcal{B}, \epsilon)$ nach 2.2.3 genau für $d = 0$ oder $d = n-1$ ein projektiver Raum. Wir beschränken uns in diesem Kapitel auf solche d -Geometrien, die keine projektiven Räume sind. Dann gilt $1 \leq d \leq n-2$, also $n \geq 3$.

2.4.2 Wir untersuchen zunächst solche Teilmengen ${}^d\mathcal{M} \subset {}^d\mathcal{U}$, die folgende Bedingung (N) erfüllen:

(N) Je zwei Elemente von ${}^d\mathcal{M}$ sind benachbart.

Jede Teilmenge eines d -Bündels oder eines d -Feldes, also insbesondere jedes d -Büschel erfüllt sicherlich die Bedingung (N). Es gilt jedoch auch folgende Umkehrung:

Jede Teilmenge ${}^d\mathcal{M} \subset {}^d\mathcal{U}$, welche die Bedingung (N) erfüllt, ist Teilmenge eines d -Bündels oder eines d -Feldes.

Beweis:

(1) Ist ${}^d\mathcal{M}$ Teilmenge eines d -Büschels $d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H]$, so ist ${}^d\mathcal{M}$ sowohl im d -Bündel $d[{}^{d-1}T]$ als auch im d -Feld $d[{}^{d+1}H]$ enthalten; insbesondere jede Menge mit höchstens zwei Elementen, die (N) erfüllt, ist Teilmenge eines d -Büschels.

(2) Ist ${}^d\mathcal{M}$ nicht Teilmenge eines d -Büschels, so können wir drei paarweise verschiedene d -Räume ${}^dX, {}^dY, {}^dZ \in {}^d\mathcal{M}$ wählen, die keinem d -Büschel angehören.

Wir betrachten das d -Feld $d[{}^dX \vee {}^dY]$; liegt dZ nicht in diesem d -Feld, so gilt $\dim({}^dZ \cap ({}^dX \vee {}^dY)) \leq d-1$. Da aber dZ mit dX und dY benachbart ist, erhalten wir $\dim({}^dX \cap {}^dZ) = \dim({}^dY \cap {}^dZ) = d-1$, woraus sich nun ${}^dX \cap {}^dZ = {}^dY \cap {}^dZ = ({}^dX \vee {}^dY) \cap {}^dZ$ ergibt. Die drei d -Räume gehören daher dem d -Bündel $d[{}^dX \cap {}^dY]$ an, falls ${}^dZ \notin d[{}^dX \vee {}^dY]$ gilt.

Liegen ${}^dX, {}^dY, {}^dZ$ etwa in einem d -Bündel $d[{}^{d-1}T]$, so ist ${}^d\mathcal{M}$ eine Teilmenge dieses d -Bündels wie der folgende indirekte Beweis zeigt: Es sei ${}^dR \in {}^d\mathcal{M}$ im d -Bündel $d[{}^{d-1}T] = d[{}^dX \cap {}^dY]$ nicht enthalten; dann gehört dR insbesondere auch dem d -Büschel

$d[d^d X \cap d^d Y, d^d X \vee d^d Y]$ nicht an. Dual zur letzten Überlegung in diesem Beweisschritt müssen $d^d X, d^d Y, d^d R$ daher dem d -Feld $d[d^d X \vee d^d Y]$ angehören; analog folgt $\text{Red}[d^d Y \vee d^d Z]$, wegen $d[d^{d-1} T] = d[d^d Y \cap d^d Z]$. Das ergibt insgesamt mit $\text{Red}[d^d X \vee d^d Y] \cap d[d^d Y \vee d^d Z] = \{d^d Y\}$ bzw. $d^d R = d^d Y$ einen Widerspruch.

Liegen $d^d X, d^d Y, d^d Z$ hingegen in einem d -Feld, so gilt dual, daß $d^d M$ Teilmenge dieses d -Feldes ist. □

2.4.3 Definition: Eine Teilmenge $d^d \mathcal{U} \subset d^d \mathcal{U}(\Pi)$ ($1 \leq d \leq n-2$) heißt ein projektiver Höchstraum, wenn je zwei Elemente von $d^d \mathcal{U}$ benachbart sind und jede echte Obermenge $d^d M$ mit $d^d \mathcal{U} \subset d^d M \subset d^d \mathcal{U}(\Pi)$ mindestens zwei nicht benachbarte Elemente enthält.

Die Bezeichnung "projektiver Höchstraum" wird in 2.4.5 motiviert; zunächst bestimmen wir alle projektiven Höchst-räume von $d^d \mathcal{U}(\Pi)$.

2.4.4 Eine Teilmenge $d^d \mathcal{U} \subset d^d \mathcal{U}(\Pi)$ ist genau dann ein projektiver Höchstraum, wenn sie ein d -Bündel oder ein d -Feld ist.

Beweis:

(1) Es sei $d^d \mathcal{U}$ ein projektiver Höchstraum. Dann ist nach 2.4.2 die Menge $d^d \mathcal{U}$ Teilmenge eines d -Bündels oder eines d -Feldes. Da je zwei Bündel- (Feld-)elemente benachbart sind, kann das Bündel (Feld) keine echte Obermenge von $d^d \mathcal{U}$ sein und stimmt mit $d^d \mathcal{U}$ überein.

(2) Ist $d^d \mathcal{U}$ ein d -Bündel, so sind je zwei Bündelelemente benachbart. Da eine echte Obermenge $d^d M \subset d^d \mathcal{U}$ des d -Bündels $d^d \mathcal{U}$ sicherlich nicht Teilmenge eines d -Bündels und sicherlich nicht Teilmenge eines d -Feldes ist, ergibt $d^d \mathcal{U}$ einen projektiven Höchstraum.

(3) Dual zu (2) ist auch jedes d -Feld ein projektiver Höchst-raum. □

2.4.5 Für jeden projektiven Höchstraum ${}^d\mathcal{U}$ ist die Inzidenzstruktur $\Delta({}^d\mathcal{U})$ ein projektiver Raum.

Beweis:

(1) Es sei ${}^d\mathcal{U} = d[{}^{d-1}T]$ ein d -Bündel. Wir wählen einen zu ${}^{d-1}T$ komplementären Unterraum ${}^{n-d}H_1$, sodaß die Klammern $d[{}^{d-1}T]$ und $O[{}^{n-d}H_1]$ perspektiv sind. Dann sind nach 2.2.9 die Inzidenzstrukturen $\Delta(d[{}^{d-1}T])$ und $\Delta(O[{}^{n-d}H_1])$ isomorph, wobei letztere ein $(n-d)$ -dimensionaler Teilraum ¹⁾ von ${}^o\Pi$ ist. Damit ist $\Delta({}^d\mathcal{U}) = \Pi({}^d\mathcal{U})$ ein $(n-d)$ -dimensionaler projektiver Raum.

(2) Es sei ${}^d\mathcal{U} = d[{}^{d+1}H]$ ein d -Feld. Dual zu (1) wählen wir einen zu ${}^{d+1}H$ komplementären Unterraum ${}^{n-d-2}T_1$, und die Klammern $d[{}^{d+1}H]$, $(n-1)[{}^{n-d-2}T_1]$ sind perspektiv bzw. die zugehörigen Inzidenzstrukturen isomorph. Die $(n-1)$ -Klammer $(n-1)[{}^{n-d-2}T_1]$ ist ein $(d+1)$ -dimensionaler Teilraum von ${}^{n-1}\Pi$, sodaß $\Delta({}^d\mathcal{U}) = \Pi({}^d\mathcal{U})$ ein $(d+1)$ -dimensionaler projektiver Raum ist. □

2.5 Isomorphismen

2.5.1 Es seien $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{U})$ bzw. $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{U}')$ projektive Räume der Dimensionen n bzw. n' und ${}^d\Pi = ({}^d\mathcal{U}, {}^d\mathcal{L}, \epsilon)$ bzw. ${}^d\Pi' = ({}^d\mathcal{U}', {}^d\mathcal{L}', \epsilon)$ mit ${}^d\mathcal{L}' := {}^d\mathcal{L}(\Pi')$, ${}^d\mathcal{L} := {}^d\mathcal{L}(\Pi)$ die d - bzw. d' -Geometrie von Π bzw. Π' .

Die projektiven Räume Π und Π' sind genau dann isomorph, wenn es einen Isomorphismus $\kappa: u\Pi \rightarrow u\Pi'$ gibt; dann gilt $n = n'$ und κ induziert Abbildungen ${}^d\kappa: {}^d\mathcal{U} \rightarrow {}^d\mathcal{U}'$, die durch ${}^d\kappa := \kappa|{}^d\mathcal{U}$ festgelegt sind. Die Abbildungen ${}^d\kappa$ sind für $d = 0, n-1$ sowie für $1 \leq d \leq n-2$ Isomorphismen von ${}^d\Pi$ auf ${}^d\Pi'$.

Die Isomorphie von Π und Π' ist äquivalent zur Existenz eines Antiisomorphismus $\delta: u\Pi \rightarrow u\Pi'$; es gilt $n = n'$ und die Abbildungen ${}^d\delta: {}^d\mathcal{U} \rightarrow {}^{n-d-1}\mathcal{U}'$, welche durch ${}^d\delta := \delta|{}^d\mathcal{U}$ erklärt sind, bilden für $d = 0, n-1$ sowie für $1 \leq d \leq n-2$ die d -Geometrie ${}^d\Pi$ isomorph auf die $(n-d-1)$ -Geometrie ${}^{n-d-1}\Pi'$ ab.

¹⁾ Es ist zweckmäßig, die Unterräume von projektiven Räumen, deren Punkte Elemente von $u\Pi$, also Unterräume von Π sind, als Teilräume zu bezeichnen. Vgl. dazu auch 2.7.

Für $d = 0$ ist ${}^0\Pi$ ein n -dimensionaler projektiver Raum, und aus der Existenz eines Isomorphismus $\varphi: {}^0\check{U} \rightarrow {}^0\check{U}'$ von ${}^0\Pi$ auf ${}^0\Pi'$ folgt, daß ${}^0\Pi'$ ebenfalls ein n -dimensionaler projektiver Raum ist, also nach 2.2.3 $d' = 0$ oder $d' = n'-1 = n-1$ gilt. Die Abbildung φ ist geometrisch dadurch gekennzeichnet, daß sie eine Kollineation ist, und es gibt genau einen Verbandsisomorphismus $\eta: u\Pi \rightarrow u\Pi'$ ($d' = 0$) bzw. genau einen Verbandsantiisomorphismus $\delta: u\Pi \rightarrow u\Pi'$ ($d' = n-1$), der die Abbildung φ induziert (vgl. [1, S.116]).

Der Fall $d = n-1$ ist analog zu behandeln; jeder Isomorphismus von ${}^{n-1}\Pi$ auf ${}^{n-1}\Pi'$ bzw. ${}^0\Pi'$ wird durch einen Isomorphismus bzw. Antiisomorphismus der Unterraumverbände induziert.

Es sind daher nur noch die Isomorphismen von ${}^d\Pi$ auf ${}^d\Pi'$ für $1 \leq d \leq n-2$ bzw. $1 \leq d' \leq n'-2$ zu untersuchen; dann gilt $n, n' \geq 3$.

2.5.2 Jeder Isomorphismus $\varphi: {}^d\check{U} \rightarrow {}^d\check{U}'$ bildet projektive Höchststräume von ${}^d\Pi$ auf projektive Höchststräume von ${}^d\Pi'$ ab.

Beweis: Nach 2.3.8 bildet jeder Isomorphismus (nicht) benachbarte in (nicht) benachbarte Elemente ab. Auf Grund ihrer Definition werden daher projektive Höchststräume von ${}^d\Pi$ auf projektive Höchststräume von ${}^d\Pi'$ abgebildet. □

Das Bild eines d -Bündels ist also stets ein d' -Bündel oder ein d' -Feld. Es gilt genauer:

2.5.3 Bildet ein Isomorphismus $\varphi: {}^d\check{U} \rightarrow {}^d\check{U}'$ von ${}^d\Pi$ auf ${}^d\Pi'$ ein d -Bündel auf ein d' -Bündel ab, so bildet φ jedes d -Bündel auf ein d' -Bündel ab.

Beweis:

(1) Es sei $d[{}^{d-1}T]$ jenes d -Bündel, das bei φ auf ein d' -Bündel abgebildet wird. Ist $d[{}^{d-1}T_1]$ ein weiteres d -Bündel, und sind die $(d-1)$ -Räume ${}^{d-1}T$ sowie ${}^{d-1}T_1$ benachbart (im Sinne der $(d-1)$ -Geometrie) und verschieden, so ist das offenbar genau dann der Fall, wenn die beiden d -Bündel genau einen

d -Raum gemeinsam haben. Die beiden Bilder $d^{[d^{-1}T]}\varphi$ und $d^{[d^{-1}T_1]}\varphi$ haben daher ebenfalls genau einen d' -Raum gemeinsam.

Ein d' -Bündel und ein d' -Feld haben jedoch als Durchschnitt entweder ein d' -Büschel oder die leere Menge, je nachdem der Bündelträger in der Hülle des Feldes enthalten ist oder nicht. Daher ist $d^{[d^{-1}T_1]}\varphi$ ebenfalls ein d' -Bündel und die beiden d' -Bündelträger von $d^{[d^{-1}T]}\varphi$ und $d^{[d^{-1}T_1]}\varphi$ sind benachbart (im Sinne der $(d'-1)$ -Geometrie in Π') und verschieden.

(2) Ist $d^{[d^{-1}T_1]}$ ein d -Bündel, dessen Träger zu $d^{-1}T$ nicht notwendig benachbart ist, so existiert eine Nachbarfolge (im Sinne von $d^{-1}\Pi$) von $d^{-1}T$ nach $d^{-1}T_1$, welche eine endliche Folge von d -Bündeln mitbestimmt, wobei jedes d -Bündel der Folge mit seinem Nachfolger genau einen d -Raum gemeinsam hat.

Wenden wir die Abbildung φ an, so erhalten wir eine Folge von projektiven Höchststräumen von $d'\Pi'$, deren erstes Glied ein d' -Bündel ist; nach (1) ist dann aber jeder projektive Höchstraum der Folge ein d' -Bündel, da jeder projektive Höchstraum mit seinem Nachfolger genau einen d' -Raum gemeinsam hat. □

Dual gilt: Bildet ein Isomorphismus ein d -Feld auf ein d' -Feld ab, so bildet er jedes d -Feld auf ein d' -Feld ab.

Das ermöglicht folgende Einteilung der Isomorphismen :

2.5.4 Definition: Ein Isomorphismus $\varphi: d\check{Z} \rightarrow d'\check{Z}'$ von $d\Pi$ auf $d'\Pi'$ ($1 \leq d \leq n-2$), der ein d -Bündel auf ein d' -Bündel (d' -Feld) abbildet, heißt ein Isomorphismus 1.Art (2.Art).

Auf Grund der Voraussetzung $1 \leq d \leq n-2$ bzw. $1 \leq d' \leq n'-2$ ist ein d' -Bündel niemals ein d' -Feld, sodaß jeder Isomorphismus entweder von 1.Art oder von 2.Art ist. Mit φ ist φ^{-1} ein Isomorphismus der gleichen Art; ist $d'\lambda': d'\check{Z}' \rightarrow n-d'-1\check{Z}'(\Pi'^*)$ die in 2.2.4 erklärte Abbildung, welche durch die Annulatorabbildung $\lambda': u\Pi' \rightarrow u\Pi'^*$ induziert wird, so ergibt die zusammengesetzte Abbildung $\varphi^{d'}\lambda'$ einen Isomorphismus von $d\Pi$ auf $n-d'-1\Pi'^*$. Dabei sind φ und $\varphi^{d'}\lambda'$ Isomorphismen verschiedener Art. Es genügt daher im folgenden Isomorphismen 1.Art zu studieren.

2.5.5 Ist $\varphi: {}^d\check{X} \rightarrow {}^{d'}\check{X}'$ ein Isomorphismus 1. Art von ${}^d\Pi$ auf ${}^{d'}\Pi'$, so gilt $d = d'$ und die projektiven Räume Π bzw. Π' besitzen dieselbe Dimension $n = n'$.

Beweis: Durch den Isomorphismus φ wird jeder projektive Höchstraum ${}^d\varphi_c \subset {}^d\check{X}$ kollinear auf einen projektiven Höchstraum ${}^{d'}\varphi'_c \subset {}^{d'}\check{X}'$ abgebildet und zugeordnete projektive Höchststräume haben dieselbe Dimension. Da φ von 1. Art ist, gilt nach 2.4.5 $n-d = n'-d'$ und $d+1 = d'+1$, was zu $d = d'$ und $n = n'$ äquivalent ist. □

2.5.6 Ist eine Abbildung $\varphi: {}^d\check{X} \rightarrow {}^{d'}\check{X}'$ ein Isomorphismus 1. Art von ${}^d\Pi$ auf ${}^{d'}\Pi'$, so existiert genau ein Verbandsisomorphismus $\kappa: u\Pi \rightarrow u\Pi'$, der φ induziert, also ${}^d\kappa = \varphi$ leistet. ¹⁾

Beweis: Falls es einen Verbandsisomorphismus gibt, der φ induziert, so stimmt er notwendig mit der durch

$${}^m Y \mapsto {}^m Y \kappa := (\bigcap {}^d X \varphi | {}^d X \in d[{}^m Y]), \text{ für alle } {}^m Y \in {}^m \check{X} \text{ mit } -1 \leq m \leq d$$

bzw.

$${}^m Y \mapsto Y \kappa := (\bigvee {}^d X \varphi | {}^d X \in d[{}^m Y]), \text{ für alle } {}^m Y \in {}^m \check{X} \text{ mit } d \leq m \leq n$$

definierten globalen Abbildung $\kappa: u\Pi \rightarrow u\Pi'$ überein.

Setzen wir insbesondere $m = d$, so erhalten wir ${}^d Y \kappa = {}^d Y \varphi$, also $\kappa|{}^d\check{X} = \varphi$.

Jeder $(d-1)$ -Raum von $u\Pi$ ist Träger eines d -Bündels; da jeder Isomorphismus 1. Art stets d -Bündel auf d -Bündel abbildet, ist für alle ${}^{d-1} Y \in {}^{d-1} \check{X}$ das Bild ${}^{d-1} Y \kappa$ ein $(d-1)$ -Raum von $u\Pi'$ und umgekehrt ist für jeden Unterraum ${}^{d-1} Y' \in {}^{d-1} \check{X}'$ das Urbild als Träger des d -Bündels $d[{}^{d-1} Y'] \varphi^{-1}$ bestimmt. Weiters gilt nach Konstruktion ${}^{d-1} Y \subset {}^d X$ genau dann, wenn ${}^{d-1} Y \kappa \subset {}^d X \varphi$ erfüllt ist.

Für $d = 1$ gilt $d-2 = -1$ und es gilt $\emptyset \kappa = \emptyset$, sodaß κ $(d-2)$ -Räume von Π auf $(d-2)$ -Räume von Π' abbildet. Ist jedoch $d \geq 2$, so betrachten wir die $(d-1)$ -Geometrie in Π .

¹⁾ Die in 2.5.6 und 2.5.9 angegebene geometrische Kennzeichnung der Isomorphismen wurde 1947 von W.L.CHOW [6] bewiesen.

Jeder Unterraum $d^{-2}Y$ ist Träger eines $(d-1)$ -Bündels $(d-1)[d^{-2}Y]$, welches ein projektiver Höchstraum der $(d-1)$ -Geometrie ist. Jedes Element dieses $(d-1)$ -Bündels ist seinerseits Träger eines d -Bündels. Die d -Klammer $d[d^{-2}Y]$ ist daher die Vereinigungsmenge aller dieser d -Bündel, wobei je zwei d -Bündelträger benachbart (im Sinne von $d^{-1}\Pi$) sind. Das ist (vgl. 2.5.3, (1)) äquivalent dazu, daß je zwei verschiedene d -Bündel der Menge genau einen gemeinsamen d -Raum besitzen. Auf Grund der Definition des projektiven Höchsttraumes hat jedes d -Bündel, das der Menge nicht angehört, mit mindestens einem d -Bündel der Menge leeren Durchschnitt, da sein Träger nicht zu allen anderen Bündelträgern benachbart (im Sinne von $d^{-1}\Pi$) ist.

Der Isomorphismus φ bildet diese Menge von d -Bündel auf eine Menge von d -Bündeln mit denselben Eigenschaften ab, sodaß die Menge aller Träger der Bildbündel ein projektiver Höchstraum $d^{-1}\mathcal{Y}'$ von $d^{-1}\Pi'$ ist.

Nehmen wir an, $d^{-1}\mathcal{Y}'$ sei ein $(d-1)$ -Feld $(d-1)[d^{-1}H']$, so haben zwar je zwei verschiedene d -Bündel genau einen gemeinsamen d -Raum, aber dieser ist für alle solchen d -Bündelpaare stets der Unterraum $d^{-1}H'$, womit in $u\Pi$ alle diese $(d-1)$ -Räume dem $(d-1)$ -Büschel $(d-1)[d^{-2}Y, d^{-1}H'\varphi^{-1}]$ angehören müßten. Da dies wegen $d \neq n$ nicht der Fall sein kann, ergibt sich $d^{-1}\mathcal{Y}'$ als $(d-1)$ -Bündel, dessen $(d-2)$ -dimensionaler Träger mit $d^{-2}Y\varphi$ übereinstimmt.

Umgekehrt kann für jeden Unterraum $d^{-2}Y' \in d^{-2}\check{U}'$ das Urbild eindeutig rekonstruiert werden.

Auf Grund der Konstruktion der Abbildung κ gilt $d^{-2}Y' \subset d^{-1}X$ genau dann, wenn $d^{-2}Y' \kappa \subset d^{-1}X \kappa$ erfüllt ist.

Die Abbildung $d^{-1}\kappa: d^{-1}\check{U} \rightarrow d^{-1}\check{U}'$, welche durch $d^{-1}\kappa := \kappa|_{d^{-1}\check{U}}$ definiert wird, ist ein Isomorphismus von $d^{-1}\Pi$ auf $d^{-1}\Pi'$, da sowohl $d^{-1}\kappa$ als auch $d^{-1}\kappa^{-1}$ $(d-1)$ -Büschel auf $(d-1)$ -Büschel abbilden.

Durch Wiederholung dieses Konstruktionsvorganges gelangen wir schließlich zu einem Isomorphismus (einer Kollineation) von ${}^o\Pi$ auf ${}^o\Pi'$, der nach 2.5.1 von genau

einem Verbandsisomorphismus $\tilde{\kappa}: u\Pi \rightarrow u\Pi'$ induziert wird. Außerdem ist auf Grund der fortgesetzten Inklusions- bzw. Nichtinklusionstreue ${}^{\circ}Yc^dX$ zu ${}^{\circ}Y\tilde{\kappa}c^dX\varphi$ äquivalent. Das ergibt ${}^dX\tilde{\kappa} = V({}^{\circ}Y\tilde{\kappa}|{}^{\circ}Yc^dX)c^dX\varphi$, für alle ${}^dX \in {}^d\check{U}$. Da sowohl ${}^dX\tilde{\kappa}$ als auch ${}^dX\varphi$ d -dimensionale Unterräume von Π' sind, gilt ${}^dX\tilde{\kappa} = X\varphi$ für alle ${}^dX \in {}^d\check{U}$, bzw. $\tilde{\kappa} = \kappa$. □

2.5.7 Auf Grund der bisher gezeigten Eigenschaften von Isomorphismen 1.Art ergeben sich folgende Ergebnisse für Isomorphismen 2.Art:

Ist $\varphi: {}^d\check{U} \rightarrow {}^{d'}\check{U}'$ ein Isomorphismus 2.Art von ${}^d\Pi$ auf ${}^{d'}\Pi'$, so gilt $d' = n-d-1$ und die projektiven Räume Π bzw. Π' besitzen dieselbe Dimension $n = n'$.

Es existiert genau ein Verbandsantiisomorphismus $\delta: u\Pi \rightarrow u\Pi'$, der φ induziert, also $\varphi = {}^d\hat{\delta}$ leistet.

2.5.8 Setzen wir speziell $\Pi = \Pi'$, so kennen wir jetzt alle Automorphismen von ${}^d\Pi$ auf sich. Insbesondere gestattet ${}^d\Pi$ Automorphismen 2.Art genau dann, wenn $d = n-d-1$, also $d = \frac{n-1}{2}$ bzw. $n = 2d+1$ gilt und in $u\Pi$ Antiisomorphismen, also Dualitäten (vgl.[1,S.160]) existieren. Letzteres ist bekanntlich genau dann der Fall, wenn Π und sein Dualraum Π^* isomorph sind.

2.5.9 Wir können nun eine einfache geometrische Kennzeichnung der Isomorphismen jener d -Geometrien angeben, die keine projektiven Räume sind:

Eine Bijektion $\varphi: {}^d\check{U} \rightarrow {}^{d'}\check{U}'$ ist genau dann ein Isomorphismus von ${}^d\Pi$ auf ${}^{d'}\Pi'$ ($1 \leq d, d' \leq n-2$), wenn φ je zwei benachbarte bzw. nicht benachbarte d -Räume auf benachbarte bzw. nicht benachbarte d' -Räume abbildet.

Beweis:

(1) Ist φ ein Isomorphismus, so erfüllt er die gestellten Bedingungen (vgl. 2.3.8).

(2) Ist umgekehrt φ eine Bijektion, die (nicht) benachbarte d -Räume in (nicht) benachbarte d' -Räume abbildet, so ist das Bild eines projektiven Höchsttraumes stets wieder ein projektiver Höchstraum. Völlig analog zu 2.5.3 ergibt sich, daß φ je zwei projektive Höchststräume gleicher bzw. verschiedener Art auf projektive Höchststräume gleicher bzw. verschiedener Art abbildet.

Jedes d -Büschel $d[d^{d-1}T, d^{d+1}H]$ ist der Durchschnitt des d -Bündels $d[d^{d-1}T]$ mit dem d -Feld $d[d^{d+1}H]$, sodaß die nicht-leere Bildmenge $d[d^{d-1}T, d^{d+1}H]$ der Durchschnitt zweier projektiver Höchststräume verschiedener Art ist, also ein d' -Büschel. Ebenso zeigt man, daß φ^{-1} stets d' -Büschel auf d -Büschel abbildet. □

2.5.10 Aus 2.5.9 erkennen wir, daß die Relation "benachbart" ausreicht, um für $1 \leq d \leq n-2$ die d -Geometrie in Π zu beschreiben.

Wir bezeichnen daher auch das Paar $({}^d\check{U}(\Pi), \sim)$ als d -Geometrie in Π und jeden Relationsisomorphismus $\varphi: {}^d\check{U} \rightarrow {}^{d'}\check{U}'$ als Isomorphismus von $({}^d\check{U}, \sim)$ auf $({}^{d'}\check{U}', \sim)$.

Für $d = 0$ und $d = n-1$ ist die Nachbarrelation gleich der Allrelation; nur für $n \leq 1$ kann mit Hilfe der trivialen Nachbarrelation die gleichfalls triviale Struktur der projektiven Räume ${}^0\Pi$ bzw. ${}^{n-1}\Pi$ beschrieben werden.

2.6 GRASSMANN-Räume

2.6.1 Definition: Ist \check{U} eine Menge und \sim eine zweistellige Relation in \check{U} , so nennen wir das Paar $\Gamma = (\check{U}, \sim)$ einen **G R A S S M A N N - R a u m**, wenn es in einem n -dimensionalen projektiven Raum Π eine d -Geometrie $({}^d\check{U}(\Pi), \sim)$ mit $1 \leq d \leq n-2$ und einen Relationsisomorphismus von (\check{U}, \sim) auf $({}^d\check{U}(\Pi), \sim)$ gibt.

¹⁾ Ein Relationsisomorphismus wird gelegentlich auch eine Ähnlichkeit genannt, doch soll diese Bezeichnung nicht verwendet werden.

2.6.2 Ist $\Gamma = (\mathcal{U}, \sim)$ ein Graßmann-Raum und gibt es Isomorphismen $\varphi_1: \check{\mathcal{U}} \rightarrow {}^{d_1}\check{\mathcal{U}}(\Pi_1)$ bzw. $\varphi_2: \check{\mathcal{U}} \rightarrow {}^{d_2}\check{\mathcal{U}}(\Pi_2)$, so ist die Abbildung $\varphi_1\varphi_2^{-1}$ ein Isomorphismus von $({}^{d_1}\check{\mathcal{U}}(\Pi_1))$ auf $({}^{d_2}\check{\mathcal{U}}(\Pi_2))$. Wir können daher alle Begriffe, welche invariant gegenüber Isomorphismen sind, in den Graßmann-Raum übertragen, z.B. (kürzeste) Nachbarfolgen, Entfernung, Verbindungsmenge ¹⁾, projektive Höchsträume; insbesondere können wir auch Büschel als jene Teilmengen von $\check{\mathcal{U}}$ definieren, die bei φ_1 auf d_1 -Büschel abgebildet werden.

Die Menge der projektiven Höchsträume von Γ zerfällt in zwei Klassen, wovon eine willkürlich als Menge der projektiven Höchsträume 1. Art und die andere dann als Menge der projektiven Höchsträume 2. Art bezeichnet wird.

Die Dimensionen d_1 und d_2 müssen nicht übereinstimmen und stellen daher keine Invariante dar, wohl aber die Dimension n der projektiven Räume Π_1 und Π_2 . Die nicht geordneten Zahlenpaare $(n-d_1, d_1+1) = (n-d_2, d_2+1)$ geben nach 2.4.5 die Dimensionen der projektiven Höchsträume von Γ an. Wir setzen daher fest:

2.6.3 Ist $\Gamma = (\check{\mathcal{U}}, \sim)$ ein Graßmann-Raum, der isomorph zur d -Geometrie eines n -dimensionalen projektiven Raumes ist, so nennen wir das nicht geordnete Zahlenpaar $(n-d, d+1)$ das **D i m e n s i o n s p a a r** des Graßmann-Raumes Γ .

Die 1-Geometrie (Liniengeometrie) in einem dreidimensionalen projektiven Raum ist z.B. ein Graßmann-Raum mit dem Dimensionspaar $(2,2)$.

Übertragen wir sinngemäß die in Begriffe Automorphismus 1. bzw. 2. Art in den Graßmann-Raum Γ , so kann es Automorphismen 2. Art nur dann geben, wenn das Dimensionspaar von Γ zwei gleiche Komponenten besitzt.

¹⁾ Wir schreiben $m_1 \vee m_2$ für die Verbindungsmenge von $m_1, m_2 \subset \check{\mathcal{U}}$.

2.6.4 Nach 2.6.2 können wir in einen Graßmann-Raum Γ , der zu $({}^d\check{\lambda}(\Pi), \sim)$ isomorph ist, den Begriff Büschel übertragen. Bezeichnen wir mit \mathcal{B} die Menge aller Büschel von Γ , so ist $(\check{\lambda}, \mathcal{B}, \epsilon)$ eine Inzidenzstruktur, die zu $({}^d\check{\lambda}(\Pi), {}^d\mathcal{B}(\Pi), \epsilon)$ isomorph ist. Wir bezeichnen gelegentlich auch diese Inzidenzstruktur als Graßmann-Raum.

2.7 Teilräume

2.7.1 Es sei $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ ein n -dimensionaler projektiver Raum und ${}^d\Pi$ die d -Geometrie in Π .

Ist ${}^d\Pi$ ein Graßmann-Raum, so besitzt der nach 2.6.3 das Dimensionspaar $(n-d, d+1)$. Es ist zweckmäßig, dieses nicht geordnete Zahlenpaar $(n-d, d+1)$ auch für $d = 0$ und $d = n-1$ als Dimensionspaar von ${}^0\Pi$ bzw. ${}^{n-1}\Pi$ anzusprechen; genau dann, wenn ${}^d\Pi$ ein n -dimensionaler projektiver Raum ist, besitzt er das Dimensionspaar $(1, n)$. Wir ordnen daher jedem k -dimensionalen projektiven Raum das Dimensionspaar $(1, k)$ zu.

2.7.2 Ist ${}^d\mathcal{Q} = d[{}^rT, {}^sH]$ eine nichtleere d -Klammer, so ist die Inzidenzstruktur $\Delta({}^d\mathcal{Q})$ ein projektiver Raum oder ein Graßmann-Raum und besitzt das Dimensionspaar $(d-r, s-d)$, falls $r, s \neq d$ gilt.

Beweis:

(1) Gilt $r = d$ oder $s = d$, so ist die d -Klammer einelementig und $\Delta({}^d\mathcal{Q}) = \Pi({}^d\mathcal{Q})$ ist ein einpunktiger projektiver Raum.

(2) Für $r, s \neq d$ wählen wir einen zu rT in $\Pi({}^sH)$ komplementären Unterraum ${}^{s-r-1}H_1$ aus und bilden $d[{}^rT, {}^sH]$ nach 2.1.4 perspektiv auf $((s-r-1)+d-s)[{}^{s-r-1}H_1] = (d-r-1)[{}^{s-r-1}H_1]$ ab.

Daher ist $\Delta({}^d\mathcal{Q})$ isomorph zu $\Delta(d_1[{}^{n_1}H_1])$ mit $d_1 := d-r-1$ und $n_1 := s-r-1$. Fassen wir den Unterraum ${}^{n_1}H_1$ als projektiven

Aus dieser Tabelle kann das Dimensionspaar der d -Geometrie in einem n -dimensionalen projektiven Raum ($n \geq 2$) abgelesen werden. Da die d -Geometrie und die $(n-d-1)$ -Geometrie in Π dasselbe Dimensionspaar besitzen, ist jede Spalte symmetrisch und wir erhalten jedes mögliche Dimensionspaar sicherlich genau einmal, wenn wir uns auf Dimensionen d mit $d \geq \frac{n-1}{2}$ beschränken. (Nicht schraffierter Bereich der Tabelle).

Wir definieren nun folgende unendliche Folge $\{u_i | i=1, \dots, \infty\}$ von Dimensionspaaren zu d -Geometrien mit $d \geq \frac{n-1}{2}$:

$u_1 := (1,2)$; gilt $u_m = (n-d, d+1)$ und ist $d > \frac{n-1}{2}$, so sei

$u_{m+1} := (n-d+1, d+1)$. Für $d = \frac{n-1}{2}$, also $n-d = d+1$ sei

$u_{m+1} := (1, d+2)$.

Anschaulich formuliert durchlaufen wir den nicht schraffierten Teil des Schemas zeilenweise von links oben nach rechts unten.

Ein Induktionsbeweis geschieht nun folgendermaßen:

(1) Die Aussage wird für endlichdimensionale projektive Räume Π mit $\dim \Pi \geq 2$ bewiesen. Damit gilt die Aussage insbesondere für alle projektiven Räume mit dem Dimensionspaar $u_1 = (1,2)$.

(2) Wir nehmen an, daß die Aussage bereits für alle jene d -Geometrien bewiesen wurde, welche projektive oder graßmannsche Räume mit einem Dimensionspaar u_k , $1 \leq k \leq m-1$ sind.

Ist u_m das Dimensionspaar einer d -Geometrie, die ein projektiver Raum ist, so gilt die Aussage bereits nach (1).

Falls u_m das Dimensionspaar einer d -Geometrie ist, welche ein graßmannscher Raum ist, so müssen wir für $u_m = (n-d, d+1)$ zwei Fälle unterscheiden:

Für $d < \frac{n-1}{2}$ gilt die Aussage schon für die Dimensions-

paare $(n-d-1, d+1)$ und $(n-d, d)$,

$\rightarrow (n-d, d)$

da diese links bzw. oberhalb

$\rightarrow (n-d-1, d+1) \rightarrow (n-d, d+1)$

von u_m in der Tabelle auf-

scheinen. Das sind jedoch nach 2.7.3 die Dimensionspaare der d -Hyperbündel bzw. der d -Hyperfelder.

Für $d = \frac{n-1}{2}$ besitzen die d -Hyperbündel und die d -Hyperfelder das Dimensionspaar $u_{m-1} = (n-d-1, d+1)$.

Wir können daher als Induktionsannahme stets verwenden, daß die Aussage bereits für alle d -Hyperbündel und alle d -Hyperfelder Gültigkeit hat. Insbesondere gilt die Aussage dann auch für alle echten Teilräume, da jeder echte Teilraum in einem d -Hyperfeld oder in einem d -Hyperbündel enthalten ist. ¹⁾

2.8 Projektivitäten

2.8.1 Es sei ${}^d\Pi$ die d -Geometrie in einem n -dimensionalen projektiven Raum Π mit $1 \leq d \leq n-2$.

Wir haben in 2.1.4 Perspektivitäten zwischen Klammern definiert. Jede Perspektivität eines d -Büschels auf ein d -Büschel im Sinne dieser Definition ist jedoch die Identität. Wir verallgemeinern den Begriff der Perspektivität von d -Büscheln:

2.8.2 Definition: Sind ${}^d b_1$ und ${}^d b_2$ zwei d -Büschel, so heißt eine Abbildung $\zeta: {}^d b_1 \rightarrow {}^d b_2$ eine P e r s p e k t i v i t ä t, wenn ${}^d b_1$ und ${}^d b_2$ demselben projektiven Höchsttraum ${}^d \mathcal{H}$ angehören und aufgefaßt als Punktreihen des projektiven Raumes $\Pi({}^d \mathcal{H})$ perspektiv sind.

Jedes Produkt von endlich vielen Perspektivitäten heißt eine P r o j e k t i v i t ä t.

2.8.3 Sind ${}^d b_1 = d[{}^{d-1}T_1, {}^{d+1}H_1]$ und ${}^d b_2 = d[{}^{d-1}T_2, {}^{d+1}H_2]$ zwei d -Büschel, so existiert mindestens eine Projektivität die ${}^d b_1$ auf ${}^d b_2$ abbildet.

Beweis: Gehören beide d -Büschel demselben projektiven

¹⁾ Dualisieren wir das angegebene Induktionsverfahren, so erhalten wir ein Folge, für die stets $d \leq \frac{n-1}{2}$ gilt. Die Induktionsvoraussetzung, also die Gültigkeit der Aussage für alle echten Teilräume, bleibt gleich. Auf die Bedingung $d \geq \frac{n-1}{2}$ kann daher gelegentlich verzichtet werden.

Höchstraum an, so ist das aus der projektiven Geometrie bekannt.

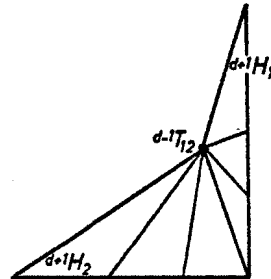
Sind die Hüllen ${}^{d+1}H_1$ und ${}^{d+1}H_2$ verschieden und benachbart, so wählen wir einen Unterraum ${}^{d-1}T_{12} \subset {}^{d-1}H_1 \cap {}^{d-1}H_2$, sodaß wir

das d -Büschel $d[{}^{d-1}T_1, {}^{d+1}H_1]$ projektiv auf das d -Büschel $d[{}^{d-1}T_{12}, {}^{d+1}H_1]$ abbilden können.

Analog kann $d[{}^{d-1}T_2, {}^{d+1}H_2]$ auf das d -Büschel $d[{}^{d-1}T_{12}, {}^{d+1}H_2]$ projektiv abgebildet werden.

Da die d -Büschel $d[{}^{d-1}T_{12}, {}^{d+1}H_1]$ und $d[{}^{d-1}T_{12}, {}^{d+1}H_2]$ beide dem

d -Bündel $d[{}^{d-1}T_{12}]$ angehören, existiert eine Projektivität dieser beiden d -Büschel, was insgesamt eine Projektivität von ${}^d b_1$ auf ${}^d b_2$ liefert.



Sind ${}^{d+1}H_1$ und ${}^{d+1}H_2$ nicht benachbart, so gibt es eine Nachbarfolge von $(d+1)$ -Räumen von ${}^{d+1}H_1$ nach ${}^{d+1}H_2$, welche die Konstruktion einer Projektivität von ${}^d b_1$ auf ${}^d b_2$ durch wiederholte Anwendung der vorher gezeigten Methode ermöglicht.



3 LINEARE ABBILDUNGEN AUS GRASSMANN-RÄUMEN

3.1 Definition linearer Abbildungen

3.1.1 In weitgehender Übereinstimmung zu Abschnitt 1 werden lineare Abbildungen aus einem Grassmann-Raum in einen projektiven Raum erklärt:

Definition: Ist $\Gamma = (\mathcal{U}, \sim)$ ein Grassmann-Raum und $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{V}')$ ein projektiver Raum, dann heißt eine Abbildung $\chi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}'$ **l i n e a r**, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

(L1) $(\{X\} \vee \{Y\})\chi = \{X\}\chi \vee \{Y\}\chi$ für alle $X \neq Y$ mit $X \sim Y$ und $X, Y \in \mathcal{U}$.

(L2) Ist $\{X\}\chi = \{Y\}\chi$ für zwei verschiedene benachbarte Elemente $X, Y \in \mathcal{U}$, so existiert stets ein Element $A \in \{X\} \vee \{Y\}$ mit $\{A\}\chi = \emptyset$.

3.1.2 Wir werden lineare Abbildungen aus Grassmann-Räumen im folgenden im Modell der d -Geometrie ${}^d\Pi = ({}^d\mathcal{U}, \sim)$ eines n -dimensionalen projektiven Raumes $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{V})$ untersuchen; dann gilt bekanntlich $1 \leq d \leq n-2$, also $n \geq 3$. Gelegentlich verwenden wir auch das in 2.7.3 entwickelte induktive Beweisverfahren; dabei wird stillschweigend mitbewiesen, daß die betreffende Aussage sinngemäß auch für k -dimensionale projektive Räume ($2 \leq k < \infty$) gilt.

Den folgenden Überlegungen legen wir eine lineare Abbildung $\chi: {}^d\mathcal{U}(\Pi) \rightarrow \mathcal{P}'$ zugrunde, wobei \mathcal{P}' die Punktmenge eines (nicht notwendig endlichdimensionalen) projektiven Raumes $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{V}')$ ist.

3.1.3 Für jeden Teilraum ${}^d\mathcal{Q} \subset {}^d\mathcal{U}$ ist die Einschränkung $\chi|{}^d\mathcal{Q}$ ebenfalls eine lineare Abbildung und zwar entweder im Sinne von 1.1.2 oder im Sinne von 3.1.1, je nachdem $\Delta({}^d\mathcal{Q})$ ein projektiver oder grassmannscher Teilraum ist. Das folgt wie in 1.1.3 aus der Tatsache, daß jeder Teilraum mit je

zwei verschiedenen benachbarten d -Räumen ${}^dX, {}^dY$ auch das d -Büschel ${}^dX {}^dY$ enthält.

Da jedes d -Büschel ein projektiver Teilraum ist, können die in 1.1.3 gezeigten Eigenschaften der Bildmenge einer Geraden (Punktreihe) sofort auf d -Büschel bzw. deren Bildmenge bei einer linearen Abbildung übertragen werden.

3.1.4 Ist $\Pi'' = (\mathcal{P}'', \mathcal{U}'')$ ein weiterer projektiver Raum und $\psi: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}''$ eine lineare Abbildung, so folgt analog zu 1.1.6, daß die zusammengesetzte Abbildung $\chi\psi: {}^d\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}''$ ebenfalls linear ist. Dabei gilt für die Ausnahmemengen $A(\chi)$ bzw. $A(\chi\psi)$ der linearen Abbildungen χ bzw. $\chi\psi$ die triviale Beziehung $A(\chi) \subset A(\chi\psi)$.

3.1.5 Sind dM_1 und dM_2 Teilmengen von ${}^d\mathcal{U}$, so gilt $({}^dM_1 \vee {}^dM_2)\chi \subset {}^dM_1\chi \vee {}^dM_2\chi$. Der Beweis ist wie in 1.1.9 zu führen, bloß sind alle Gleichheitszeichen durch die Inklusion (\subset) zu ersetzen, was wegen $(\{{}^dX_1\} \vee \{{}^dX_2\})\chi \subset \{{}^dX_1\}\chi \vee \{{}^dX_2\}\chi$ für alle ${}^dX_1, {}^dX_2 \in {}^d\mathcal{U}$ zulässig ist.

3.1.6 Die Bildmenge der linearen Abbildung χ muß nicht notwendig ein Unterraum von Π' sein. Wir setzen daher fest (vgl. 1.1.8):

Definition: Die Dimension der Verbindungshülle der Bildmenge $\text{Im}(\chi)$ einer linearen Abbildung (aus einem Graßmann-Raum) heißt der **R a n g** der linearen Abbildung .

Wir bezeichnen den Rang von χ analog zu 1.1.8 mit $\text{rg}\chi$, sodaß gilt $\text{rg}\chi = \dim \Pi[\text{Im}\chi]$. Eine wichtige Eigenschaft des Ranges einer linearen Abbildung χ ist die Ungleichung $\text{rg}\chi < \infty$, die es gestattet den Zielraum Π' ohne Beschränkung der Allgemeinheit als endlichdimensional vorauszusetzen.

Es gilt genauer:

3.1.7 Ist $\chi: {}^d\tilde{U} \rightarrow \mathbb{P}^1$ eine lineare Abbildung und $(n-d, d+1) =: (e_1, e_2)$ das Dimensionspaar von $({}^d\tilde{U}, \sim)$, so gilt

$$\text{rg}\chi \leq \frac{(e_1+e_2)!}{e_1!e_2!} - 1$$

Beweis:

(1) Es sei oP ein Punkt und ${}^{n-1}B$ eine Hyperebene von $u\mathbb{P}^n$ mit ${}^oP \notin {}^{n-1}B$. Dann zerlegen wir ${}^d\tilde{U}$ in drei disjunkte Klassen:

$${}^d\mathcal{Z}_1 := d[{}^oP],$$

$${}^d\mathcal{Z}_2 := d[{}^{n-1}B] \text{ und}$$

$${}^d\mathcal{Z}_3 := {}^d\tilde{U} \setminus ({}^d\mathcal{Z}_1 \cup {}^d\mathcal{Z}_2).$$

Weiters definieren wir zwei Abbildungen $\varepsilon_1: {}^d\tilde{U} \rightarrow {}^d\mathcal{Z}_1$ und $\varepsilon_2: {}^d\tilde{U} \rightarrow {}^d\mathcal{Z}_2$ durch folgende Festsetzungen:

$${}^dX \mapsto {}^dX\varepsilon_1 := ({}^dX \cap {}^{n-1}B) \vee {}^oP \text{ f\u00fcr alle}$$

$${}^dX \in {}^d\tilde{U} \setminus {}^d\mathcal{Z}_2;$$

$${}^dX \mapsto {}^dX\varepsilon_2 := ({}^dX \vee {}^oP) \cap {}^{n-1}B \text{ f\u00fcr alle } {}^dX \in {}^d\tilde{U} \setminus {}^d\mathcal{Z}_1. \text{ Die Abbildungen}$$

ε_1 und ε_2 besitzen die Ausnahmemengen $A(\varepsilon_1) = {}^d\mathcal{Z}_2$ bzw. $A(\varepsilon_2) = {}^d\mathcal{Z}_1$ und sind wegen $\varepsilon_i|_{{}^d\mathcal{Z}_i} = \text{id}_{{}^d\mathcal{Z}_i}$ ($i=1,2$) surjektiv.

Die drei d -R\u00e4ume ${}^dX, {}^dX\varepsilon_1, {}^dX\varepsilon_2$ geh\u00f6ren f\u00fcr alle ${}^dX \in {}^d\mathcal{Z}_3$ dem d -B\u00fcchel ${}^dX\varepsilon_1, {}^dX\varepsilon_2$ an, soda\u00df ${}^d\mathcal{Z}_3 \subset {}^d\mathcal{Z}_1 \vee {}^d\mathcal{Z}_2$ bzw.

$${}^d\tilde{U} = {}^d\mathcal{Z}_1 \cup {}^d\mathcal{Z}_2 \cup {}^d\mathcal{Z}_3 = {}^d\mathcal{Z}_1 \vee {}^d\mathcal{Z}_2 \text{ folgt.}$$

$$\text{Dann gilt } \text{Im}(\chi) = {}^d\tilde{U}\chi = ({}^d\mathcal{Z}_1 \vee {}^d\mathcal{Z}_2)\chi \subset {}^d\mathcal{Z}_1\chi \vee {}^d\mathcal{Z}_2\chi \text{ nach 3.1.5}$$

Die Bildmenge $\text{Im}(\chi)$ ist also in der Verbindungsmenge $\text{Im}(\chi|_{{}^d\mathcal{Z}_1}) \vee \text{Im}(\chi|_{{}^d\mathcal{Z}_2})$ enthalten.¹⁾

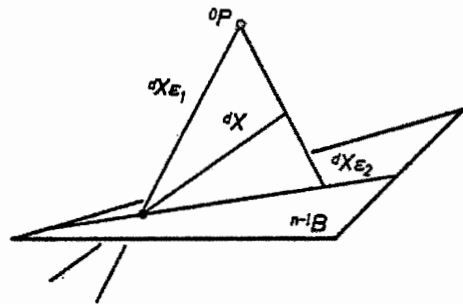
(2) Zum Beweis der Ungleichung verwenden wir vollst\u00e4ndige Induktion gem\u00e4\u00df 2.7.3.

F\u00fcr jeden endlichdimensionalen projektiven Raum mit dem Dimensionspaar $(n,1)$ gilt

$$\frac{(n+1)!}{n!1!} - 1 = n \text{ und nach 1.1.8 ist } \text{rg}\chi \leq n.$$

Da ${}^d\mathcal{Z}_1$ und ${}^d\mathcal{Z}_2$ echte Teilr\u00e4ume sind, lautet die Induktionsvoraussetzung daher

¹⁾ Als Sonderfall erhalten wir die bekannte "rekursive Erzeugung" von Gra\u00dfmann-Variet\u00e4ten (vgl. [5;S.296]), die in Abschnitt 4 besprochen wird.



$$\operatorname{rg}(\chi|^{d_1}\mathfrak{Z}_1) \leq \frac{(e_1+e_2-1)!}{e_1!(e_2-1)!} - 1, \quad \operatorname{rg}(\chi|^{d_2}\mathfrak{Z}_2) \leq \frac{(e_1-1+e_2)!}{(e_1-1)!e_2!} - 1,$$

denn $\Delta(^{d_1}\mathfrak{Z}_1)$ bzw. $\Delta(^{d_2}\mathfrak{Z}_2)$ besitzt das Dimensionspaar (e_1, e_2-1) bzw. (e_1-1, e_2) (vgl. 2.7.2).

Die beiden Unterräume $[^{d_1}\mathfrak{Z}_1\chi]$ und $[^{d_2}\mathfrak{Z}_2\chi]$ spannen daher nach dem Dimensionssatz einen höchstens k' -dimensionalen Unterraum von Π' auf, mit

$$\begin{aligned} k' &:= \frac{(e_1+e_2-1)!}{e_1!(e_2-1)!} - 1 + \frac{(e_1-1+e_2)!}{(e_1-1)!e_2!} - 1 + 1 = \\ &= \frac{(e_1+e_2-1)!(e_2+e_1)}{e_1!e_2!} - 1 = \frac{(e_1+e_2)!}{e_1!e_2!} - 1. \end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{Im}(\chi) \subset ^{d_1}\mathfrak{Z}_1 \vee ^{d_2}\mathfrak{Z}_2 \subset [^{d_1}\mathfrak{Z}_1\chi] \vee [^{d_2}\mathfrak{Z}_2\chi]$ gilt also $\operatorname{rg}\chi \leq \frac{(e_1+e_2)!}{e_1!e_2!} - 1$.

□

Die letzte Ungleichung können wir wegen

$$\frac{(e_1+e_2)!}{e_1!e_2!} = \frac{(n+1)!}{(n-d)!(d+1)!} = \binom{n+1}{d+1}$$

auch in der Form $\operatorname{rg}\chi \leq \binom{n+1}{d+1} - 1$ schreiben.

Wir werden in Abschnitt 4 zeigen, daß lineare Abbildungen mit $\operatorname{rg}\chi = \frac{(e_1+e_2)!}{e_1!e_2!} - 1$ unter gewissen Zusatzvoraussetzungen

existierten. Zunächst setzen wir ohne Rücksicht auf die Existenz fest:

3.1.8 Ist $\Gamma = (\mathfrak{L}, \sim)$ ein Grassmann-Raum mit dem Dimensionspaar (e_1, e_2) , $\Pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{U}')$ ein projektiver Raum und $\chi: \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{P}'$ eine lineare Abbildung mit

$$\operatorname{rg}\chi = \frac{(e_1+e_2)!}{e_1!e_2!} - 1, \text{ so heißt } \chi \text{ eine reguläre}$$

lineare Abbildung.

3.2 Projektionen

3.2.1 Wir wollen Beispiele für lineare Abbildungen aus $({}^d\mathcal{U}(\Pi), \sim)$ konstruieren:

Es sei $d[{}^{d-1}T]$ ein d -Bündel und ${}^{n-d}R$ ein zu ${}^{d-1}T$ komplementärer Unterraum in Π . Dann hat jeder d -Raum mit ${}^{n-d}R$ einen mindestens nulldimensionalen Durchschnitt, was die Definition folgender Abbildung

$\pi: {}^d\mathcal{U} \rightarrow d[{}^{d-1}T]$ ermöglicht:

Gehört $({}^dX \cap {}^{n-d}R) \vee {}^{d-1}T$ dem

d -Bündel $d[{}^{d-1}T]$ an so gilt

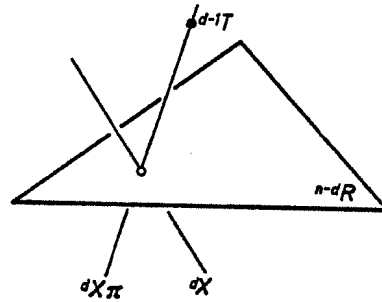
${}^dX \mapsto {}^dX\pi := ({}^dX \cap {}^{n-d}R) \vee {}^{d-1}T$; an-

sonsten ist dX nicht definiert.

Da jeder d -Raum von $d[{}^{d-1}T]$ ein

Fixelement von π ist, gilt die

Surjektivität der Abbildung π . Wir nennen π eine Projektion auf das d -Bündel $d[{}^{d-1}T]$ (vgl. [12]).



Dual können Projektionen auf d -Felder erklärt werden.

3.2.2 Eine Projektion $\pi: {}^d\mathcal{U} \rightarrow d[{}^{d-1}T]$ auf ein d -Bündel ist eine lineare Abbildung von $({}^d\mathcal{U}(\Pi), \sim)$ auf $\Pi(d[{}^{d-1}T])$.

Beweis: Da jedes d -Büschel von ${}^d\mathcal{U}$ Teilmenge eines d -Bündels ist, genügt es zu zeigen, daß die Einschränkung von π auf jedes d -Bündel eine lineare Abbildung ist.

Ist $d[{}^{d-1}T_1]$ ein d -Bündel, dessen Träger zu ${}^{n-d}R$ windschief liegt, so ist nach 2.1.4 das d -Bündel $d[{}^{d-1}T_1]$ perspektiv zur O -Klammer $O[{}^{n-d}R]$, welche ihrerseits zum d -Bündel $d[{}^{d-1}T]$ perspektiv ist. Dieses Produkt von Perspektivitäten stimmt mit $\pi|_{d[{}^{d-1}T_1]}$ überein, sodaß diese Einschränkung dann $\Pi(d[{}^{d-1}T_1])$ isomorph auf $\Pi(d[{}^{d-1}T])$ abbildet (vgl. 2.2.9).

Für ein d -Bündel $d[{}^{d-1}T_1]$, dessen Träger den Unterraum ${}^{n-d}R$ in genau einem Punkt o_Q trifft, ist der Teilraum $d[{}^{d-1}T_1, {}^{d-1}T_1 \cap {}^{n-d}R]$, also eine Hyperebene des projektiven Raumes $\Pi(d[{}^{d-1}T_1])$, die Ausnahmemenge von $\pi|_{d[{}^{d-1}T_1]}$, da jeder d -Raum

dieses Teilraumes mit $n-d$ einen mindestens zweidimensionalen Durchschnitt besitzt.

Jedes Nichtausnahmeelement des d -Bündels besitzt ${}^{\circ}Q \vee d^{-1}T$ als Bild und $\pi|d[d^{-1}T_1]$ ist eine lineare Abbildung vom Rang Null.

Besitzt der Träger eines d -Bündels $d[d^{-1}T_1]$ mit $n-d$ einen mindestens zweidimensionalen Durchschnitt, so ist $\pi|d[d^{-1}T_1]$ eine leere Abbildung, also linear. □

Wir erhalten gemäß 3.1.4 weitere Beispiele linearer Abbildungen aus ${}^d\check{Z}(\Pi)$, wenn wir die Projektion π mit einer linearen Abbildung aus $\Pi(d[d^{-1}T])$ in einen projektiven Raum Π'' zusammensetzen.

3.3 Lineare Abbildungen mit höchstens einem Bildpunkt

3.3.1 Wir diskutieren lineare Abbildungen $\chi: {}^d\check{Z}(\Pi) \rightarrow \mathcal{P}'$ mit $-1 \leq \text{rg}\chi \leq 0$; die Existenz solcher linearer Abbildungen ist mit 3.2.2 gesichert.

Ist χ eine leere lineare Abbildung, so ist die Einschränkung von χ auf jeden Teilraum von $({}^d\check{Z}, \sim)$ ebenfalls eine leere Abbildung. Ist ${}^{\circ}P$ ein Punkt und $n^{-1}B$ eine zu ${}^{\circ}P$ windschiefe Hyperebene, so ist jede lineare Abbildung $\chi: {}^d\check{Z} \rightarrow \mathcal{P}'$, für die die beiden Einschränkungen $\chi|d[{}^{\circ}P]$ und $\chi|d[n^{-1}B]$ leere Abbildungen sind, nach 3.1.7, Beweisschritt (1) eine leere Abbildung, da $\text{Im}(\chi) \subset (d[{}^{\circ}P]\chi) \vee (d[n^{-1}B]\chi) = \emptyset \vee \emptyset = \emptyset$ gilt.

3.3.2 Eine lineare Abbildung $\chi: {}^d\check{Z} \rightarrow \mathcal{P}'$ besitzt genau dann den Rang 0, wenn $\text{Im}(\chi)$ nicht leer und jede Einschränkung von χ auf einen projektiven Höchstraum vom Rang 0 oder vom Rang -1 ist.

Beweis:

(1) Es sei $\text{rg}\chi = 0$. Dann ist die Einschränkung von χ auf

einen projektiven Höchstraum nach 3.1.3 eine lineare Abbildung, deren Bildmenge ein Unterraum von $\text{Im}(\chi)$, also einpunktig oder leer ist.

(2) Es sei χ keine leere lineare Abbildung und jede Einschränkung auf einen projektiven Höchstraum vom Rang 0 oder vom Rang -1 . Da $\text{Im}(\chi)$ nicht leer ist, gibt es einen d -Raum dX_0 mit ${}^dX_0\chi = Q' \in \mathcal{Q}'$.

Ist dX_1 ein d -Raum mit $\text{dist}({}^dX_0, {}^dX_1) = 1$ und ist ${}^dX_1\chi$ definiert, so gilt ${}^dX_1\chi = Q'$, da das d -Büschel ${}^dX_0 {}^dX_1$ Teilmenge eines projektiven Höchstraumes ist, welcher nach Voraussetzung $\{Q'\}$ als Bild besitzt.

Gibt es ferner einen d -Raum dX_m mit $\text{dist}({}^dX_0, {}^dX_m) = m > 1$, der kein Ausnahmeelement von χ ist, so konstruieren wir eine Nachbarfolge von dX_0 nach dX_m , deren sämtliche Elemente der Definitionsmenge $D(\chi)$ angehören:

Durch ${}^dX_0 \cap {}^dX_m$ legen wir je einen $(d-1)$ -Raum ${}^{d-1}T_0 \subset X_0$ und ${}^{d-1}T_m \subset {}^dX_m$. Nach 1.3.6 existiert ein zu ${}^{d-1}T_0$ und ${}^{d-1}T_m$ komplementärer Unterraum ${}^{n-d}U$, sodaß es

Perspektivitäten (vgl. 2.1.4)

$$\zeta_0: d[{}^{d-1}T_0] \rightarrow O[{}^{n-d}U] \text{ bzw.}$$

$$\zeta_m: d[{}^{d-1}T_m] \rightarrow O[{}^{n-d}U] \text{ gibt. Die}$$

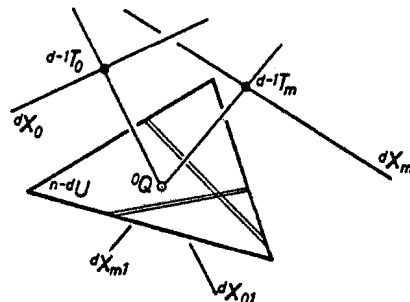
Abbildung χ induziert dann im projektiven Raum $\Pi(O[{}^{n-d}U])$ die linearen Abbildungen

$$\zeta_0^{-1}(\chi|d[{}^{d-1}T_0]) \text{ bzw. } \zeta_m^{-1}(\chi|d[{}^{d-1}T_m]),$$

welche beide vom Rang 0 sind, also je eine Hyperebene von $\Pi(O[{}^{n-d}U])$ als Ausnahmemenge besitzen. Da es nach 1.3.6 einen Punkt ${}^oQ \subset {}^{n-d}U$ gibt, der zu beiden Hyperebenen komplementär liegt, sind die d -Räume ${}^dX_{01} := {}^{d-1}T_0 \vee {}^oQ$ und ${}^dX_{m1} := {}^{d-1}T_m \vee {}^oQ$ im Definitionsbereich von χ enthalten und haben wegen $({}^{d-1}T_0 \vee {}^oQ) \cap ({}^{d-1}T_m \vee {}^oQ) = ({}^{d-1}T_0 \cap {}^{d-1}T_m) \vee {}^oQ = ({}^dX_0 \cap {}^dX_m) \vee {}^oQ$ nach 2.3.6 die Entfernung $m-1$.

Durch Anwendung dieses Verfahrens auf ${}^dX_{01}$ und ${}^dX_{m1}$ erhalten wir zwei d -Räume ${}^dX_{02}$ bzw. ${}^dX_{m2}$ der Entfernung $m-2$ u.s.w.

Insgesamt können wir auf diese Art eine Nachbarfolge



$\{{}^dX_0, {}^dX_{01}, \dots, {}^dX_{0(m-1)}, {}^dX_{m(m-1)}, \dots, {}^dX_{m1}, {}^dX_m\}$ konstruieren, die in der Definitionsmenge von χ enthalten ist. Daher gilt $Q' = {}^dX_0\chi = \dots = {}^dX_m\chi$, da nach Voraussetzung jedes d -Büschel nur eine höchstens einelementige Bildmenge besitzt. □

3.4 Lineare Abbildungen aus der 1-Geometrie eines dreidimensionalen projektiven Raumes

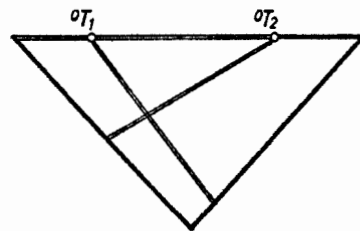
3.4.1 Wir setzen in 3.4 speziell $\dim \Pi = n = 3$ voraus, sodaß ${}^d\Pi$ nur für $d = 1$ ein Graßmann-Raum ist. Die 1-Geometrie $({}^1\mathcal{U}, \sim)$ eines dreidimensionalen projektiven Raumes heißt bekanntlich auch Liniengeometrie.

Für den weiteren Ausbau der Theorie sind die möglichen Ausnahmemengen $A(\chi)$ linearer Abbildungen $\chi: {}^1\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}'$ von besonderem Interesse. Bis jetzt wissen wir nur, daß der Durchschnitt von $A(\chi)$ mit jedem projektiven Höchstraum ein Teilraum dieses Höchsttraumes sein muß (vgl. 3.1.3 und 1.1.3).

3.4.2 Ist $\chi: {}^1\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}'$ eine lineare Abbildung mit $\text{rg } \chi = 0$, so ist die Ausnahmemenge $A(\chi)$ ein Gebüsch¹⁾ oder ein Gewinde²⁾.

Beweis: Nach 3.3.2 besitzt jeder projektive Höchstraum entweder genau ein Büschel von Ausnahmegereaden, oder nur Ausnahmegereaden. Wir unterscheiden drei Fälle:

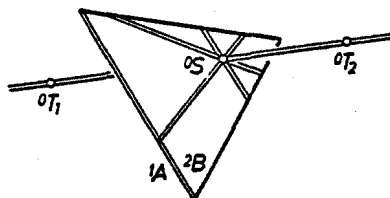
(1) Die Menge $A(\chi)$ enthält mindestens zwei Geradenbündel. oT_1 und oT_2 seien die Träger zweier solcher Geradenbündel. Dann existiert in jeder Ebene (2-Raum) durch ${}^oT_1 \vee {}^oT_2$ ein Dreieck von Ausnahmegereaden, so daß jede Treffgerade von ${}^oT_1 \vee {}^oT_2$, also jede Gerade des Gebüsches mit der Achse ${}^oT_1 \vee {}^oT_2$ der Ausnahmemenge $A(\chi)$ angehört. Weitere Ausnahmegereaden gibt es nicht, wie wir indirekt zeigen:



¹⁾ Vgl. 2.2.7, Fußnote.

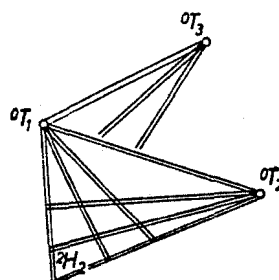
²⁾ Vgl. [1, S.185].

Angenommen 1A sei eine zu ${}^\circ T_1 \vee {}^\circ T_2$ windschiefe Ausnahmegerade der Abbildung χ . Wir legen durch die Gerade 1A eine Ebene 2B so, daß der Punkt ${}^\circ S := {}^2B \cap ({}^\circ T_1 \vee {}^\circ T_2)$ von ${}^\circ T_1$ und ${}^\circ T_2$ verschieden ist. Im Geradenfeld $1[{}^2B]$ gibt es dann neben der Ausnahmegerade 1A noch das Geradenbündel $1[{}^\circ S, {}^2B]$ von Ausnahmegerade, sodaß $1[{}^2B]$ eine Teilmenge von $A(\chi)$ ist. Mit 3.3.1 folgt, daß χ eine leere Abbildung ist, sodaß ein Widerspruch vorliegt.



(2) Die Menge $A(\chi)$ enthält genau ein Geradenbündel $1[{}^\circ T_1]$. Wir zeigen indirekt, daß dieser Fall nicht möglich ist: In jedem von $1[{}^\circ T_1]$ verschiedenen Geradenbündel muß es wegen $\text{rg} \chi = 0$ genau ein Geradenbündel geben, das in $A(\chi)$ liegt.

Ist ${}^\circ T_2 \neq {}^\circ T_1$, so enthält das Ausnahmegeradenbündel $1[{}^\circ T_2, {}^2H_2]$ der Geradenbündels $1[{}^\circ T_2]$ die Gerade ${}^\circ T_1 \vee {}^\circ T_2$, sodaß das Geradenfeld $1[{}^2H_2]$ eine Teilmenge von $A(\chi)$ ist, da die Geradenbündel $1[{}^\circ T_1, {}^2H_2]$ und $1[{}^\circ T_2, {}^2H_2]$ nur Ausnahmeelemente besitzen.



Wählen wir ferner einen Punkt ${}^\circ T_3 \notin {}^2H_2$ und ist das Geradenbündel $1[{}^\circ T_3, {}^2H_3]$ die Ausnahmemenge von $\chi \upharpoonright 1[{}^\circ T_3]$, so folgt wie vorhin $1[{}^2H_3] \subset A(\chi)$.

Dual zu (1) folgt aus der Existenz zweier verschiedener Geradenfelder, die Teilmengen von $A(\chi)$ sind, daß das Gebüsch mit der Achse ${}^2H_2 \wedge {}^2H_3$ die Ausnahmemenge von χ ist. Dann gibt es jedoch mindestens drei Geradenbündel in $A(\chi)$, was der indirekten Annahme widerspricht.

(3) Die Menge $A(\chi)$ enthält keine Geradenbündel. Jedes Geradenbündel enthält daher genau ein Geradenbündel

von Ausnahmegeraden und wir können eine globale Abbildung $\nu: {}^{\circ}\mathcal{L} \rightarrow {}^2\mathcal{L}$ durch folgende Festsetzung definieren:

${}^{\circ}X \mapsto {}^{\circ}X\nu$ mit ${}^{\circ}X\nu$ ist die Hülle des Ausnahmegeradenbüschels im Geradenbündel ${}^1[{}^{\circ}X]$ für alle ${}^{\circ}X \in {}^{\circ}\mathcal{L}$.

Sind ${}^{\circ}X$ und ${}^{\circ}Y$ zwei verschiedene Punkte mit ${}^{\circ}X \subset {}^{\circ}Y\nu$, so ist ${}^{\circ}X\nu \subset {}^{\circ}Y$ Ausnahmegerade sowohl des Geradenbündels um ${}^{\circ}Y$, als auch des Geradenbündels um ${}^{\circ}X$, also ${}^{\circ}Y \subset {}^{\circ}X\nu$. Da stets ${}^{\circ}X \subset {}^{\circ}X\nu$ gilt, ist die Abbildung ν eine Nullpolarität (vgl. [1, S.163, 166]), wenn wir ${}^2\Pi$ mit dem zu ${}^{\circ}\Pi$ dualen projektiven Raum identifizieren. Die Ausnahmemenge $A(\chi)$ stimmt mit dem durch ν erzeugten Gewinde von Nullgeraden überein. □

Nullpolaritäten existieren jedoch nur in endlichdimensionalen Pappos-Räumen ungerader Dimension (vgl. [2, S.46]), sodaß (3) in nichtpapposschen Desarguesräumen nicht auftreten kann.

3.4.3 Ist $\chi: {}^1\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{P}'$ eine lineare Abbildung mit $\text{rg}\chi = 1$, so ist die Ausnahmemenge $A(\chi)$ entweder die Vereinigungsmenge eines Geradenbündels und eines Geradenfeldes mit nicht-leerem Durchschnitt, oder $A(\chi)$ ist ein Netz ¹⁾.

Beweis: Die Abbildung χ besitzt wegen $\text{rg}\chi = 1$ mindestens zwei verschiedene Bildpunkte und mit 3.3.2 folgt, daß die Einschränkung von χ auf mindestens einen projektiven Höchst-raum vom Rang 1 ist, sodaß dieser projektive Höchst-raum ein Geradenbüschel 1b ohne Ausnahmegeraden enthält. Dann ist mit (L1) notwendig ${}^1b\chi = \text{Im}(\chi)$, und $\chi|{}^1b$ ist nach 1.1.3 und 3.1.3 eine lineare Injektion.

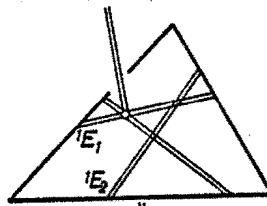
Die Gerade $\text{Im}(\chi) \subset \mathcal{P}'$ besitzt mindestens drei paarweise verschiedene Punkte Q_1', Q_2', Q_3' . Es sei $\pi_1': \text{Im}(\chi) \rightarrow \{Q_2'\}$ die Projektion aus $\{Q_1'\}$ auf $\{Q_2'\}$. Durch zyklisches Vertauschen der Indizes 1, 2, 3 werden analog die Abbildungen π_2' und π_3' definiert. Nach 3.1.4 ist die zusammengesetzte Abbildung $\chi\pi_i'$ ($i=1, 2, 3$) ebenfalls linear und es gilt $A(\chi) \subset A(\chi\pi_i')$. Die drei Ausnahmemengen der Abbildungen $\chi\pi_i'$ sind paarweise

¹⁾ Vgl. [1, S.185] und [2, S.183].

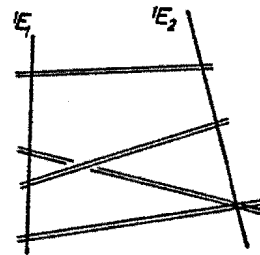
verschieden, da die Geraden $Q_i'(\chi|b)^{-1}$ ($i=1,2,3$) jeweils nur der Ausnahmemenge $A(\chi\pi_i')$ angehören. Wegen $\text{rg}\chi\pi_i' = 0$ ist die Menge ${}^1U_i := A(\chi\pi_i')$ entweder ein Gewinde oder ein Gebüsch.

Dann gilt nach 1.3.4 sicherlich $A(\chi) \subset {}^1U_1 \cap {}^1U_2$. Es sind vier Fälle zu unterscheiden:

(1) Sind 1U_1 und 1U_2 verschiedene Gebüsch mit schneidenden Gebüschachsen 1E_1 bzw. 1E_2 , so gilt ${}^1U_1 \cap {}^1U_2 = 1[{}^1E_1 \cap {}^1E_2] \cup \cup 1[{}^1E_1 \vee {}^1E_2]$; damit ist ${}^1U_1 \cap {}^1U_2$ die Vereinigungsmenge eines Geradenbündels und eines Geradenfeldes mit nichtleerem Durchschnitt.



(2) Falls 1U_1 und 1U_2 verschiedene Gebüsch mit windschiefen Gebüschachsen 1E_1 bzw. 1E_2 sind, so ist ${}^1U_1 \cap {}^1U_2$ ein hyperbolisches Netz mit den Netzachsen 1E_1 bzw. 1E_2 .



(3) Ist 1U_1 ein Gebüsch und 1U_2 ein Gewinde, so ist ${}^1U_1 \cap {}^1U_2$ ein parabolisches oder hyperbolisches Netz, je nachdem die Gebüschachse dem Gewinde 1U_2 angehört oder nicht (vgl. [1, S.186]).

(4) Sind schließlich 1U_1 und 1U_2 verschiedene Gewinde, so ist ${}^1U_1 \cap {}^1U_2$ ein Netz (vgl. [2, S.184]).

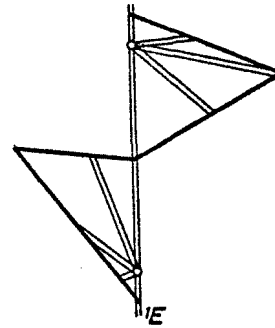
Es bleibt noch zu zeigen, daß $A(\chi)$ keine echte Teilmenge von ${}^1U_1 \cap {}^1U_2$ sein kann. Wegen $\text{rg}\chi = 1$ ist die Einschränkung von χ auf einen projektiven Höchstraum nicht vom Rang 2, sodaß jedes Geradenbündel und jedes Geradenfeld mindestens eine Ausnahmegerade enthält.

Im Fall (1) geht durch jeden Punkt ${}^0Q \in ({}^1E_1 \vee {}^1E_2)$ genau eine Gerade des Bündels $1[{}^1E_1 \cap {}^1E_2]$ und in jeder Ebene ${}^2C \not\subset ({}^1E_1 \cap {}^1E_2)$ liegt genau eine Gerade des Feldes $1[{}^1E_1 \vee {}^1E_2]$, sodaß alle Geraden von ${}^1U_1 \cap {}^1U_2$, mit Ausnahme von $1[{}^1E_1 \cap {}^1E_2, {}^1E_1 \vee {}^1E_2]$,

sicherlich der Ausnahmemenge $A(\chi)$ angehören. Dann gibt es jedoch im Geradenbündel $1[{}^1E_1 \cap {}^1E_2]$ bzw. im Geradenfeld $1[{}^1E_1 \vee {}^1E_2]$ wegen (L1) nur Ausnahmegeraden.

Ist ${}^1U_1 \cap {}^1U_2$ jedoch ein Netz, so geht durch jeden Punkt, der keiner Netzachse angehört, genau eine Netzgerade, was ergibt, daß alle Netzgeraden, welche keine Netzachsen sind, der Ausnahmemenge $A(\chi)$ angehören.

Nur die Achse 1E eines parabolischen Netzes gehört diesem an; die Achse liegt dann notwendig in $A(\chi)$, da sie Element mindestens eines Geradenbündels mit zwei verschiedenen Ausnahmegeraden ist.



Damit kennen wir alle möglichen Ausnahmemengen linearer Abbildungen vom Rang 1 aus der Geradenmenge 1Z eines dreidimensionalen projektiven Raumes Π .

Ist Π jedoch ein nichtpapposscher Desarguesraum, so sind ${}^1U_1, {}^1U_2, {}^1U_3$ drei verschiedene Gebüsche, womit (3) und (4) von vornherein ausscheiden. Aber auch (2) ist nicht möglich: Die Ausnahmemenge $A(\chi)$, also das hyperbolische Netz mit den Achsen 1E_1 und 1E_2 , müßte Teilmenge von 1U_3 , eines Gebüsches mit einer von 1E_1 und 1E_2 verschiedenen Achse sein, was sicherlich nicht der Fall ist.

3.4.4 Ist $\chi: {}^1Z \rightarrow \mathcal{P}$ eine lineare Abbildung mit $\text{rg}\chi = 1$, $1[{}^2C]$ ein Geradenfeld, welches ein ausnahmfreies Geradenbündel enthält und 1X eine Gerade dieses Feldes, so gibt es höchstens ein Geradenfeld bzw. höchstens zwei Geradenfelder, die 1X enthalten und kein ausnahmfreies Geradenbündel besitzen, je nachdem 1X der Definitionsmenge $D(\chi)$ von χ angehört oder nicht.

Beweis: Wir schließen hinsichtlich der Ausnahmemenge der Abbildung χ an die Fallunterscheidungen des letzten Be-

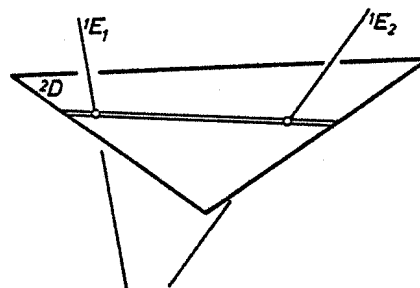
weises an.

In Fall (1) ist $A(\chi)$ die Vereinigungsmenge eines Geradenbündels $1[{}^1E_1 \cap {}^1E_2]$ und eines Geradenfeldes $1[{}^1E_1 \vee {}^1E_2]$. Dann besitzt ein Geradenfeld $1[{}^2D]$ genau für ${}^1E_1 \cap {}^1E_2 \subset {}^2D$ kein ausnahmefreies Geradenbündel; daher gilt ${}^1E_1 \cap {}^1E_2 \not\subset {}^2C$ und $1[({}^1E_1 \cap {}^1E_2) \vee {}^1X]$ ist das einzige Geradenfeld, das 1X enthält und kein ausnahmefreies Geradenbündel besitzt.

In den Fällen (2), (3), (4) ist $A(\chi)$ ein Netz; wir unterscheiden nach den drei Netztypen:

Bei einem elliptischen Netz existieren keine Bündel von Ausnahmegeraden und jedes Geradenfeld besitzt ein ausnahmefreies Geradenbündel.

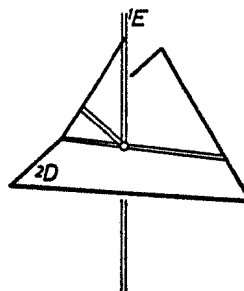
Ist $A(\chi)$ ein hyperbolisches Netz mit den Netzachsen 1E_1 bzw. 1E_2 , so besitzt ein Geradenfeld $1[{}^2D]$ genau dann kein ausnahmefreies Geradenbündel, wenn es eine der Netzachsen enthält. Deshalb gilt ${}^1E_i \not\subset {}^2C$ ($i=1,2$), und je nachdem ${}^1X \subset {}^2C$ keine bzw. eine bzw. beide Netzachsen trifft, gibt es kein Geradenfeld bzw.



genau ein Geradenfeld bzw. genau zwei Geradenfelder durch 1X , welche kein ausnahmefreies Geradenbündel besitzen. Genau dann, wenn 1X beide Netzachsen trifft, gehört 1X der Ausnahmemenge $A(\chi)$ an und nur in diesem Fall existieren zwei solche Geradenfelder.

Im Falle eines parabolischen Netzes besitzt ein Geradenfeld $1[{}^2D]$ genau dann kein ausnahmefreies Geradenbündel, wenn 2D die Netzachse 1E umfaßt.

Ist 1X zur Netzachse windschief, so besitzt jedes Geradenfeld durch 1X ein ausnahmefreies Geradenbündel; trifft 1X jedoch die Netzachse, so ist $1[{}^1X \vee {}^1E]$ das einzige Geradenfeld durch



1X , das kein ausnahmefreies Geradenbündel enthält.



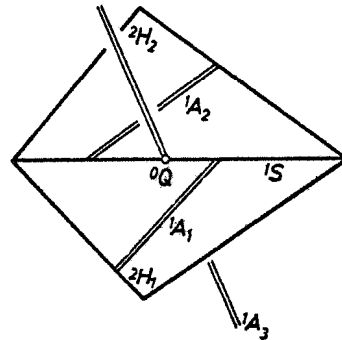
3.4.5 Eine lineare Abbildung $\chi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ besitzt genau dann den Rang 1, wenn jede Einschränkung von χ auf einen projektiven Höchstraum vom Rang -1, 0 oder 1 ist und $\text{Im}(\chi)$ mindestens zwei Punkte enthält.

Beweis:

(1) Für $\text{rg} \chi = 1$ ist die Behauptung trivial.

(2) Es sei χ eine lineare Abbildung mit mindestens zwei Bildpunkten und jede Einschränkung auf einen projektiven Höchstraum sei vom Rang -1, 0 oder 1. Nach 3.3.2 ist die Einschränkung von χ auf mindestens einen projektiven Höchstraum vom Rang 1, das heißt es gibt ein ausnahmefreies Geradenbündel ${}^1b_1 = 1[{}^0T_1, {}^2H_1]$. Ferner folgt $\text{Im}(\chi) = 1[{}^0T_1, {}^2H_1]\chi = 1[{}^0T_1]\chi = 1[{}^2H_1]\chi$.

Ist ${}^1b_2 = 1[{}^0T_2, {}^2H_2]$ ein weiteres ausnahmefreies Geradenbündel, welches nicht mit 1b_1 in einem projektiven Höchstraum enthalten ist, so existiert genau eine Gerade ${}^1S := {}^2H_1 \cap {}^2H_2$ und genau eine Gerade ${}^1V := {}^0T_1 \vee {}^0T_2$.



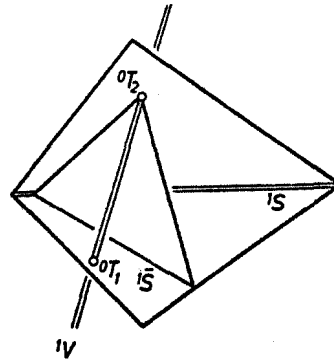
Nehmen wir ${}^1S \notin A(\chi)$ an, so liegt im Geradenfeld $1[{}^2H_1]$ bzw. $1[{}^2H_2]$ je genau eine Ausnahmegerade 1A_1 bzw. 1A_2 , die von 1S verschieden ist. Auf der Geraden 1S existiert ein Punkt ${}^0Q \notin {}^1A_1 \cup {}^1A_2$. Daher sind die Geradenbündel $1[{}^0Q, {}^2H_1]$ und $1[{}^0Q, {}^2H_2]$ ausnahmefrei, und das Geradenbündel $1[{}^0Q]$ besitzt genau eine Ausnahmegerade ${}^1A_3 \notin {}^2H_1 \cup {}^2H_2$. Wir können daher folgende Kette perspektiver Geradenbündel (im Sinne von 2.8.2) aufstellen

$1[{}^0T_1, {}^2H_1] \xrightarrow{{}^1A_1} 1[{}^0Q, {}^2H_1] \xrightarrow{{}^1A_3} 1[{}^0Q, {}^2H_2] \xrightarrow{{}^1A_2} 1[{}^0T_2, {}^2H_2]$, welche das Geradenbündel $1[{}^0T_1, {}^2H_1]$ projektiv auf das Geradenbündel $1[{}^0T_2, {}^2H_2]$ abbildet. Bei dieser Perspektivität haben zugeordnete Geraden denselben Bildpunkt unter χ , das heißt ${}^1b_1\chi = {}^1b_2\chi$.

Falls 1S Ausnahmegerade ist, aber ${}^1V \notin A(\chi)$ gilt, so kann dual vorgegangen werden.

Sind sowohl 1S als auch 1V Ausnahmegeraden der Abbildung χ , so liegen die Büschelträger ${}^{\circ}T_1$ und ${}^{\circ}T_2$ nicht auf 1S , und wir können eine Gerade ${}^1\bar{S} \subset {}^2H_1$ wählen mit ${}^1\bar{S} \neq {}^1S$ und ${}^{\circ}T_1 \not\subset {}^1\bar{S}$.

Da 1V die einzige Ausnahmegerade im Geradenbündel $1[{}^{\circ}T_2]$ ist, erhalten wir mit $1[{}^{\circ}T_2, {}^{\circ}T_2 \vee {}^1\bar{S}] := {}^1b_3$ ein ausnahmefreies Geradenbündel. Es gilt ${}^1b_1\chi = {}^1b_3\chi$, da ${}^1\bar{S}$ keine Ausnahmegerade ist, und ${}^1b_3\chi = {}^1b_2\chi = 1[{}^{\circ}T_2]\chi$, also ${}^1b_1\chi = {}^1b_2\chi$.



Es verbleibt zu zeigen, daß für jede Nichtausnahme Gerade 1X , welche keinem ausnahmefreien Bündel angehört, der Bildpunkt 1X auf der Geraden ${}^1b_1\chi$ liegt. Dann ist jedoch die Einschränkung von χ auf jeden projektiven Höchstraum, der 1X enthält, vom Rang 0, sodaß ${}^1X \not\subset {}^2H_1$ und ${}^1X \cap {}^2H_1 =: {}^{\circ}U \subset {}^1A_1$ gelten muß. Das Geradenbündel $1[{}^{\circ}U, {}^2H_1]$ besitzt nur die Ausnahme Gerade 1A_1 , hat also eine einpunktige Bildmenge $\{Q'\} \subset {}^1b_1\chi$. Wegen $\text{rg}(\chi|1[{}^{\circ}U]) = 0$ erhalten wir ${}^1X\chi \in 1[{}^{\circ}U]\chi = \{Q'\} \subset {}^1b_1\chi$, also $\text{Im}(\chi) = {}^1b_1\chi$. □

Aus diesem Beweis folgt weiters die Gültigkeit folgendes Satzes:

3.4.6 Ist $\chi: {}^1\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{P}$ eine lineare Abbildung mit $\text{rg} \chi = 1$, und sind 1b_1 sowie 1b_2 zwei ausnahmefreie Geradenbündel, so ist die Abbildung $\sigma: {}^1b_1 \rightarrow {}^1b_2$ mit $\sigma := (\chi|{}^1b_1)(\chi|{}^1b_2)^{-1}$ eine Projektivität. □

Falls die beiden ausnahmefreien Geradenbündel einem projektiven Höchstraum angehören, ist die Projektivität σ sogar eine Perspektivität.

3.5 Lineare Abbildungen mit mindestens zwei Bildpunkten

3.5.1 Wir kehren zu den in 3.1.2 getroffenen Voraussetzungen zurück und untersuchen lineare Abbildungen $\chi: {}^d\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}'$. Nach 3.1.7 können wir als Zielraum Π' einen endlichdimensionalen projektiven Raum wählen.

Nach 3.3.2 besitzt jede lineare Abbildung χ mit zwei verschiedenen Bildpunkten mindestens ein ausnahmefreies d -Büschel, sodaß für $\text{rg}\chi = 1$ die Bildmenge $\text{Im}(\chi)$ eine Punktreihe von Π' ist.

3.5.2 Wir verallgemeinern einen in 3.4.4 bewiesenen Satz unter der Zusatzvoraussetzung $n = d+2$ (≥ 3):

Ist $\chi: {}^d\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}'$ eine lineare Abbildung aus der d -Geometrie eines $(d+2)$ -dimensionalen projektiven Raumes mit $\text{rg}\chi \geq 1$, $d[{}^{d+1}H]$ ein d -Feld, welches ein ausnahmefreies d -Büschel enthält und dX ein d -Raum dieses Feldes, so gibt es höchstens ein d -Feld bzw. höchstens zwei d -Felder, die dX enthalten und kein ausnahmefreies d -Büschel besitzen, je nachdem dX der Definitionsmenge $D(\chi)$ angehört oder nicht.

Beweis: Wir können die Aussage o.B.d.A unter der Voraussetzung $\text{rg}\chi = 1$ beweisen, da für $\text{rg}\chi \geq 2$ stets eine Projektion $\pi': \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}'_1$ von Π' auf einen Unterraum $\mathcal{P}'_1 \subset \mathcal{P}'$ so gewählt werden kann, daß $\text{rg}\chi\pi' = 1$ gilt. Dann ist jedoch nach 3.1.4 $A(\chi) \subset A(\chi\pi')$.

Ist $d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H]$ ein ausnahmefreies d -Büschel, so gibt es stets einen Unterraum ${}^{d-2}U \subset {}^{d-1}T \cap {}^dX$, und für jedes d -Feld $d[{}^{d+1}H_i]$, das dX enthält, ist $d[{}^{d-2}U, {}^{d+1}H_i]$ ein zweidimensionaler projektiver Teilraum des d -Feldes.

Die d -Klammer $d[{}^{d-2}U]$ ist nach 2.1.4 perspektiv zur 1-Klammer $1[{}^3V]$ eines zu ${}^{d-2}U$ komplementären Unterraumes 3V . Wir können daher auf den graßmannschen Teilraum $\Gamma(d[{}^{d-2}U])$ das Ergebnis aus 3.4.4 anwenden, das heißt höchstens eine

bzw. höchstens zwei der d -Klammern $d[{}^{d-2}U, {}^{d+1}H_1]$ besitzen kein ausnahmefreies d -Büschel. Es gibt also auch nur höchstens ein bzw. höchstens zwei d -Felder, die dX enthalten und kein ausnahmefreies d -Büschel besitzen. □

Wir setzen im folgenden wieder $1 \leq d \leq n-2$ voraus.

3.5.3 Ist $\chi: {}^d\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}'$ eine lineare Abbildung und sind die Hüllen zweier ausnahmefreier d -Büschel ${}^d b_1 = d[{}^{d-1}T_1, {}^{d+1}H_1]$ und ${}^d b_2 = d[{}^{d-1}T_2, {}^{d+1}H_2]$ benachbart, so gilt ${}^d b_1 \chi = {}^d b_2 \chi$, falls jede Einschränkung von χ auf einen projektiven Höchst- raum vom Rang $-1, 0$ oder 1 ist.

Beweis: Die Einschränkung von χ auf $d[{}^{d+1}H_1]$ bzw. $d[{}^{d+1}H_2]$ ist vom Rang 1 , sodaß für zwei Geraden ${}^1G_1, {}^1G_2$ der Teilraum $d[{}^1G_1, {}^{d+1}H_1]$ bzw. $d[{}^1G_2, {}^{d+1}H_2]$ die Ausnahmemenge dieser Ein- schränkung ist. Setzen wir ${}^dS := {}^{d+1}H_1 \cap {}^{d+1}H_2$, so existiert im projektiven Raum $\Pi({}^dS)$ gemäß 1.3.6 ein zu ${}^dS \cap {}^1G_1$ und ${}^dS \cap {}^1G_2$ windschiefer Unterraum ${}^{d-2}U$. In beiden d -Feldern gibt es daher ausnahmefreie d -Büschel, deren Träger ${}^{d-2}U$ umfassen.

Wir beschränken uns auf den Teilraum $d[{}^{d-2}U, {}^{d+1}H_1 \vee {}^{d+1}H_2]$, welcher nach 2.7.2 das Dimensionspaar $(d-(d-2), (d+2)-d) = (2, 2)$ besitzt; dieser großmannsche Teilraum ist daher zur 1 -Geometrie eines dreidimensionalen projektiven Raumes isomorph. Mit 3.4.5 folgt dann $\text{rg}(\chi|d[{}^{d-2}U, {}^{d+1}H_1 \vee {}^{d+1}H_2]) = 1$ und ${}^d b_1 \chi = {}^d b_2 \chi$. □

Gilt speziell $d = n-2$, so sind je zwei $(d+1)$ -Räume (Hyper- ebenen) benachbart und die in 3.4.5 angegebene Charakterisie- rung der linearen Abbildungen vom Rang 1 kann sinngemäß verallgemeinert werden. Ebenso kann dual für $d = 1$ vor- gegangen werden.

3.5.4 Unter der Zusatzvoraussetzung, daß jedes d -Büschel mindestens fünf Elemente besitzt, die Ordnung N von Π also mindestens vier ist, gilt:

Eine lineare Abbildung $\chi: {}^d\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}'$ besitzt genau dann den Rang 1 , wenn jede Einschränkung von χ auf einen projek-

tiven Höchstraum vom Rang $-1, 0$ oder 1 ist und $\text{Im}(\chi)$ mindestens zwei Punkte enthält.

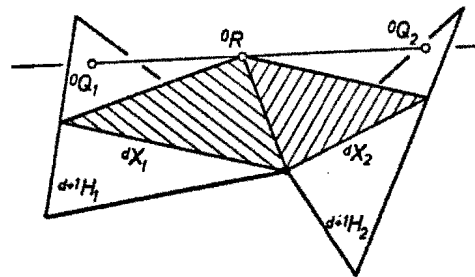
Beweis:

(1) Für $\text{rg}\chi = 1$ ist die Behauptung trivial, und zwar mit oder ohne Zusatzvoraussetzung.

(2) Es sei χ eine lineare Abbildung mit mindestens zwei Bildpunkten und jede Einschränkung auf einen projektiven Höchstraum sei vom Rang $-1, 0$ oder 1 . Nach 3.3.2 gibt es mindestens ein ausnahmefreies d -Büschel ${}^d b_1 = d[{}^{d-1}T_1, {}^{d+1}H_1]$

Ist ${}^d b_2 = d[{}^{d-1}T_2, {}^{d+1}H_2]$ ein weiteres ausnahmefreies d -Büschel, so gilt nach 3.5.3 ${}^d b_1 \chi = {}^d b_2 \chi$, falls ${}^{d+1}H_1$ und ${}^{d+1}H_2$ benachbart sind. Sind die Hüllen jedoch nicht benachbart, so konstruieren wir eine Nachbarfolge $\{{}^{d+1}Y_i \mid i=0, \dots, 1\}$ von ${}^{d+1}H_1 =: {}^{d+1}Y_0$ nach ${}^{d+1}H_2 =: {}^{d+1}Y_1$, wobei jedes d -Feld $d[{}^{d+1}Y_i]$ ($i=0, \dots, 1$) ein ausnahmefreies d -Büschel besitzt.

In ${}^{d+1}H_1$ wird ein d -Raum ${}^d X_1$ durch ${}^{d+1}H_1 \cap {}^{d+1}H_2$ und in gleicher Weise ein d -Raum ${}^d X_2 \subset {}^{d+1}H_2$ gewählt. Dann gibt es in ${}^{d+1}H_j$ ($j=1, 2$) Punkte ${}^o Q_j$, welche zu ${}^d X_j$ windschief liegen; ${}^o Q_1$ und ${}^o Q_2$ sind dann verschieden und mit ${}^d X_j \vee {}^o Q_1 \vee {}^o Q_2$ ($j=1, 2$) erhalten wir zwei verschiedene $(d+2)$ -Räume, die ${}^{d+1}H_j$ umfassen. Auf jeden dieser



$(d+2)$ -Räume wenden wir nun das Ergebnis aus 3.5.2 an: Es gibt also im graßmannschen Teilraum $\Gamma(d[{}^d X_j \vee {}^o Q_1 \vee {}^o Q_2])$ ($j=1, 2$) höchstens zwei d -Felder (im Sinne des Teilraumes) durch ${}^d X_j$, welche kein ausnahmefreies d -Büschel besitzen. Die $(d+1)$ -Klammern $(d+1)[{}^d X_j, {}^d X_j \vee {}^o Q_1 \vee {}^o Q_2]$ sind beide perspektiv zur O -Klammer (Punktreihe) $O[{}^o Q_1 \vee {}^o Q_2]$. Da diese nach der Zusatzvoraussetzung mindestens fünf Elemente besitzt, gibt es mindestens einen Punkt ${}^o R \in O[{}^o Q_1 \vee {}^o Q_2]$, sodaß $d[{}^d X_j \vee {}^o R]$ ($j=1, 2$) ausnahmefreie d -Büschel besitzt. Es existieren ja höchstens $2 \cdot 2 = 4$ Punkte, die nicht diese Eigenschaft besitzen.

Wegen ${}^o R \notin {}^{d+1}H_1 \cap {}^{d+1}H_2$ ist $\text{dist}({}^d X_1 \vee {}^o R, {}^d X_2 \vee {}^o R) = \text{dist}({}^{d+1}H_1, {}^{d+1}H_2) - 1$, und Iteration dieses Verfahrens liefert die gewünschte

Nachbarfolge. Wir erhalten daher mit 3.5.3

$${}^d b_1 \chi = d[{}^{d+1} Y_0] \chi = \dots = d[{}^{d+1} Y_1] \chi = {}^d b_2 \chi.$$

Es verbleibt zu zeigen, daß für jeden d -Raum ${}^d X_0$, der keinem ausnahmefreien d -Büschel angehört, notwendig ${}^d X_0 \chi \in {}^d b_1 \chi$ gilt, falls ${}^d X_0 \chi$ definiert ist.

Wir nehmen indirekt ${}^d X_0 \notin {}^d b_1 \chi$ an. Dann wählen wir einen d -Raum ${}^d Z \in {}^d b_1$ aus, sodaß ${}^d Z \chi$ und ${}^d X_0 \chi$ zwei verschiedene Punkte von Π' sind. Nach 1.3.6 gibt es eine zu $\{{}^d X_0 \chi\}$ und $\{{}^d Z \chi\}$ komplementäre Hyperebene $\bar{\mathcal{P}}_1$; mit $\pi': \mathcal{P}' \rightarrow \{{}^d X_0 \chi\}$ bezeichnen wir die Projektion von Π' mit dem Zentrum $\bar{\mathcal{P}}_1$ auf $\{{}^d X_0 \chi\}$. Die zusammengesetzte Abbildung $\chi \pi': {}^d \mathcal{Z} \rightarrow \{{}^d X_0 \chi\}$ ist vom Rang 0 und ihre Ausnahmemenge umfaßt nach 3.1.4 diejenige von χ . Laut 3.3.2, Beweisschritt (2) können wir eine Nachbarfolge $\{{}^d X_i \mid i=0, \dots, 1\}$ von ${}^d X_0$ nach ${}^d Z = {}^d X_1$ konstruieren, wobei jedes Element der Folge der Definitionsmenge $D(\chi \pi')$, also auch $D(\chi)$ angehört. Nehmen wir o.B.d.A. an, daß aufeinanderfolgende d -Räume der Folge verschieden sind, so legen diese genau ein d -Büschel fest und die Einschränkung von χ auf jedes dieser d -Büschel ist vom Rang 0 oder 1. Durchlaufen wir, vom ersten d -Büschel ${}^d X_0 {}^d X_1$ beginnend, die Folge dieser d -Büschel, so gelangen wir nach endlich vielen Schritten das erste Mal zu einem d -Büschel ${}^d X_k {}^d X_{k+1}$, welches mindestens einen d -Raum ${}^d M \in {}^d X_k {}^d X_{k+1}$ besitzt, der einem ausnahmefreien d -Büschel angehört. Das tritt nämlich spätestens im d -Büschel ${}^d X_{1-1} {}^d X_1$ ein, wo ${}^d Z$ diese Eigenschaft hat. Dann ist jedoch $({}^d X_j {}^d X_{j+1}) \chi = \{{}^d X_0 \chi\}$ für alle $j=0, \dots, k-1$, also insbesondere ${}^d X_k \chi = {}^d X_0 \chi$.

Ist das d -Büschel ${}^d X_k {}^d X_{k+1}$ ausnahmefrei, so gilt ${}^d X_0 \chi = {}^d X_k \chi \in ({}^d X_k {}^d X_{k+1}) \chi = {}^d b_1 \chi$ im Widerspruch zur Annahme.

Ist jedoch das d -Büschel ${}^d X_k {}^d X_{k+1}$ nicht ausnahmefrei, so gilt ${}^d X_0 \chi = {}^d X_k \chi = {}^d M \chi \in {}^d b_1 \chi$, da ${}^d M$ einem ausnahmefreien d -Büschel angehört. Damit liegt erneut ein Widerspruch vor.

□

3.5.5 In Verallgemeinerung von 3.4.6 gilt:

Ist $\chi: {}^d\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1$ eine lineare Abbildung mit $\text{rg}\chi = 1$ und sind ${}^d b_1$ sowie ${}^d b_2$ zwei ausnahmefreie d -Büschel, so ist die Abbildung $\sigma: {}^d b_1 \rightarrow {}^d b_2$ mit $\sigma := (\chi|_{{}^d b_1})(\chi|_{{}^d b_2})^{-1}$ eine Projektivität.

Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1) Der projektive Raum \mathbb{P}^1 besitzt eine Ordnung $N \leq 3$.

Die Abbildung σ ist nach 3.1.3 bzw. 1.1.3 eine Bijektion und wegen $N \leq 3$ eine Projektivität.

(2) Gilt $N \geq 4$, so folgt mit 3.5.3 und 3.4.6 die Richtigkeit der Aussage für d -Büschel mit benachbarten Hüllen; aus 3.5.4, Beweisteil (2) ergibt sich die Richtigkeit für alle d -Büschel. □

3.5.6 Ist $\chi: {}^d\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1$ eine lineare Abbildung mit drei nicht-kollinearen Bildpunkten, so ist für $N \geq 4$ nach 3.5.4 die Einschränkung von χ auf mindestens einen projektiven Teilraum vom Rang 2. Insbesondere kann für $N \geq 4$ zu zwei ausnahmefreien d -Büscheln ${}^d b_1$ und ${}^d b_2$ mit nicht benachbarten Hüllen die in 3.5.4, Beweisschritt (2) konstruierte Nachbarfolge auch für $\text{rg}\chi \geq 2$ konstruiert werden, da wir die im Beweis vorkommende Hilfsüberlegung 3.5.2 unter der Voraussetzung $\text{rg}\chi \geq 2$ zeigen konnten. Damit sind wir in der Lage, die zentrale Aussage über die "Urbilder" einer Projektivität σ' zweier Punktreihen von $\text{Im}(\chi)$ zu beweisen:

3.5.7 Ist $\chi: {}^d\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1$ eine lineare Abbildung mit $\text{rg}\chi \geq 2$ und sind ${}^d b_1$ sowie ${}^d b_2$ zwei ausnahmefreie d -Büschel, dann ist für jede Projektivität $\sigma': {}^d b_1 \rightarrow {}^d b_2$ auch die Abbildung $\sigma: {}^d b_1 \rightarrow {}^d b_2$ mit $\sigma := (\chi|_{{}^d b_1})\sigma'(\chi|_{{}^d b_2})^{-1}$ eine Projektivität.

Beweis:

(1) Für $N \leq 3$ ist das trivial (vgl. 3.5.5, (1)).

(2) Es sei $N \geq 4$. Es gibt daher einen projektiven Höchst-
raum ${}^d\mathcal{P}$, welcher einen zweidimensionalen projektiven Teil-

raum ${}^d\mathbb{C}^d$ besitzt mit $\text{rg}(\chi|{}^d\mathbb{C}^d) = 2$. Dann ist ${}^d\mathbb{C}\chi =: \mathbb{P}_1' \subset \text{Im}(\chi)$ eine Ebene des Zielraumes Π' . Wir wählen nun ein d -Büschel ${}^db_3 \subset {}^d\mathbb{C}$ und setzen ${}^db_j =: d[{}^{d-1}T_j, {}^{d+1}H_j]$ für $j=1,2,3$.

Nach 3.5.4, Beweisteil (2) existieren Nachbarfolgen $\{{}^{d+1}Y_{i_1} | i_1=0, \dots, l_1\}$ von ${}^{d+1}H_1$ nach ${}^{d+1}H_3$ und $\{{}^{d+1}Y_{i_2} | i_2=0, \dots, l_2\}$ von ${}^{d+1}H_2$ nach ${}^{d+1}H_3$, wobei alle d -Felder $d[{}^{d+1}Y_{i_1}]$ bzw. $d[{}^{d+1}Y_{i_2}]$ mindestens ein ausnahmefreies d -Büschel besitzen.

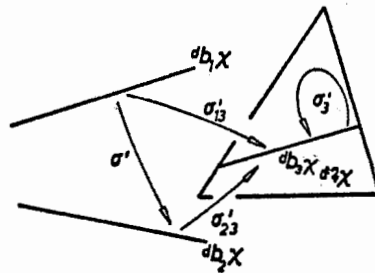
Völlig analog zu der in 3.4.5, Beweisschritt (2) und 3.5.3 entwickelten Methode können wir zu zwei ausnahmefreien d -Büscheln mit benachbarten Hüllen eine Kette von Perspektivitäten so angeben, daß alle beteiligten d -Büschel ausnahmefrei sind, da die Ausnahmemenge $A(\chi)$ stets Teilmenge der Ausnahmemenge einer linearen Abbildung vom Rang 1 ist. Dabei sind aufeinanderfolgende d -Büschel mit gleicher Bildpunktreihe wie in 3.4.5 perspektiv abzubilden, sodaß zugeordnete d -Räume denselben Bildpunkt unter der Abbildung χ besitzen; sind die Bildpunktreihen nicht identisch, so ist die Einschränkung von χ auf den betreffenden projektiven Höchstraum mindestens vom Rang 2. Die Bildpunktreihen sind dann ebenfalls perspektiv. Insgesamt erhalten wir eine Kette perspektiver Punktreihen als Bild der Kette perspektiver d -Büschel.

Es gibt also Projektivitäten $\sigma_{13}: {}^db_1 \rightarrow {}^db_3$ und $\sigma_{23}: {}^db_2 \rightarrow {}^db_3$, für welche auch $\sigma'_{13}: {}^db_1\chi \rightarrow {}^db_3\chi$ bzw. $\sigma'_{23}: {}^db_2\chi \rightarrow {}^db_3\chi$ mit $\sigma'_{13} := (\chi|{}^db_1)^{-1}\sigma_{13}(\chi|{}^db_3)$ bzw.

$$\sigma'_{23} := (\chi|{}^db_2)^{-1}\sigma_{23}(\chi|{}^db_3)$$

Projektivitäten sind. Setzen wir $\sigma'_3 := \sigma'_{13}{}^{-1}\sigma'_{23}$, so ist σ'_3 eine projektive Selbstab-

bildung von ${}^db_3\chi$. Da $\chi|{}^d\mathbb{C}$ eine lineare Injektion der projektiven Ebene $\Pi({}^d\mathbb{C})$ ist, erhalten wir mit $\sigma_3 := (\chi|{}^d\mathbb{C})\sigma'_3(\chi|{}^d\mathbb{C})^{-1}$ eine projektive Selbstabbildung von ${}^d\mathbb{C}$.¹⁾ Nun folgt mittels



¹⁾ An dieser Stelle geht wesentlich der Verkürzungssatz (vgl. [1, S.143]) ein.

$$\begin{aligned}
 \sigma &= (\chi|^{d}b_1)\sigma'(\chi|^{d}b_2)^{-1} = \\
 &= (\chi|^{d}b_1)\sigma'_{13}\sigma'_{23}\sigma'_{23}^{-1}(\chi|^{d}b_2)^{-1} = \\
 &= (\chi|^{d}b_1)(\chi|^{d}b_1)^{-1}\sigma'_{13}(\chi|^{d}b_3)(\chi|^{d}b_3)^{-1}\sigma'_{23}(\chi|^{d}b_3)(\chi|^{d}b_3)^{-1}\sigma'_{23}^{-1} \\
 &\quad (\chi|^{d}b_2)(\chi|^{d}b_2)^{-1} = \\
 &= \sigma'_{13}\sigma'_{23}\sigma'_{23}^{-1},
 \end{aligned}$$

daß die Abbildung σ projektiv ist. □

Damit sind wir nun in der Lage zu zeigen, daß es gewisse lineare Abbildungen nur aus der d -Geometrie eines Pappos-Raumes geben kann (vgl. 3.4.2 und 3.4.3).

3.5.8 Ist $\chi: {}^d\mathbb{A}(\Pi) \rightarrow \mathbb{A}'$ eine lineare Abbildung und existiert sowohl ein d -Bündel $d[{}^{d-1}T]$ als auch ein d -Feld $d[{}^{d+1}H]$, so daß die beiden Einschränkungen $\chi|d[{}^{d-1}T]$ und $\chi|d[{}^{d+1}H]$ beide mindestens vom Rang 2 sind, so ist Π notwendig ein Pappos-Raum.

Beweis: Wir können sowohl im d -Bündel als auch im d -Feld zweidimensionale projektive Teilräume ${}^d\mathbb{A}_1$ bzw. ${}^d\mathbb{A}_2$ wählen, die der Definitionsmenge $D(\chi)$ angehören. Dann erhalten wir mit ${}^d\mathbb{A}_1\chi$ bzw. ${}^d\mathbb{A}_2\chi$ je eine projektive Ebene von Π' und es gibt eine projektive Kollineation $\mu': {}^d\mathbb{A}_1\chi \rightarrow {}^d\mathbb{A}_2\chi$, durch die eine Kollineation $\mu := (\chi|{}^d\mathbb{A}_1)\mu'(\chi|{}^d\mathbb{A}_2)^{-1}$ mitbestimmt wird. Nach 3.5.7 ist die Einschränkung von μ auf jedes d -Büschel von ${}^d\mathbb{A}_1$ gleich einer Projektivität. Mit Hilfe der in 2.1.4 definierten Perspektivitäten von Klammern, können wir Perspektivitäten $\zeta_1: {}^d\mathbb{A}_1 \rightarrow O[{}^2U]$ bzw. $\zeta_2: {}^d\mathbb{A}_2 \rightarrow (n-1)[{}^{n-3}V]$ auf zweidimensionale projektive Teilräume von ${}^o\Pi$ bzw. ${}^{n-1}\Pi$ angeben. Die Kollineation $\kappa_0 := \zeta_1^{-1}\mu\zeta_2$ kann gemäß 1.2.3 zu einer Kollineation $\kappa: {}^o\mathbb{A} \rightarrow {}^{n-1}\mathbb{A}$ fortgesetzt werden. Identifizieren wir $({}^o\Pi)^*$ mit ${}^{n-1}\Pi$, so können wir κ als Korrelation von ${}^o\Pi$ ansprechen. Da ${}^o\Pi$ zu Π isomorph ist und die Korrelation κ nach Konstruktion projektiv ist, ergibt sich Π notwendig als projektiver Pappos-Raum (vgl. [2, S.48]). □

Mit Π ist dann auch Π' ein projektiver Pappos-Raum, da Π und Π' isomorphe projektive Ebenen besitzen.

Da es keine endlichen nichtpapposschen Desarguesräume gibt, gilt nach 3.5.4 und 3.5.8:

3.5.9 Ist $\Pi = (\mathcal{P}, \varphi)$ ein nichtpapposscher Desargues-Raum und $\chi: {}^d\check{\mathcal{L}}(\Pi) \rightarrow \mathcal{P}'$ eine lineare Abbildung, welche drei nicht-kollineare Bildpunkte besitzt, so ist die Einschränkung von χ auf mindestens ein d -Bündel (d -Feld) vom Rang 2 und alle Einschränkungen von χ auf d -Felder (d -Bündel) sind höchstens vom Rang 1.

□

3.5.10 In einem Sonderfall können wir jetzt alle linearen Abbildungen angeben:

Ist $\Pi = (\mathcal{P}, \varphi)$ ein dreidimensionaler nichtpapposscher Desarguesraum, so gilt für jede lineare Abbildung $\chi: {}^1\check{\mathcal{L}}(\Pi) \rightarrow \mathcal{P}'$ $\text{rg } \chi \leq 2$.

Jede lineare Abbildung $\chi: {}^1\check{\mathcal{L}}(\Pi) \rightarrow \mathcal{P}'$ ist Produkt einer Projektion auf einen projektiven Höchstraum ${}^1\mathcal{H}$ und einer linearen Abbildung $\psi: {}^1\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}'$ aus dem projektiven Raum $\Pi({}^1\mathcal{H})$ in den projektiven Raum Π' .

Beweis:

(1) Nach 3.4.3 und 3.1.4 ist die Ausnahmemenge $A(\chi)$ einer linearen Abbildung χ mit $\text{rg } \chi \geq 1$ eine Teilmenge der Vereinigungsmenge eines Geradenbündels $1[{}^{\circ}S]$ und eines Geradenfeldes $1[{}^2R]$ mit nichtleerem Durchschnitt, wobei $A(\chi) \cap 1[{}^{\circ}S]$ und $A(\chi) \cap 1[{}^2R]$ projektive Teilräume sein müssen.

Nach 3.5.9 gibt es einen ausnahmefreien projektiven Höchst-
raum; ist dieser etwa ein Geradenbündel, so besitzt jedes Geradenfeld $1[{}^2C]$ mindestens eine Ausnahmegerade und diese ist für ${}^{\circ}S \not\subset {}^2C$ notwendig die Gerade ${}^2C \cap {}^2R$, sodaß $1[{}^2R] \subset A(\chi)$ folgt. Da es ein ausnahmefreies Geradenbündel $1[{}^{\circ}T]$ gibt, ist die Gerade ${}^{\circ}S \cap {}^{\circ}T \in A(\chi)$, sodaß das Geradenbündel $1[{}^{\circ}S]$

mit der Ausnahmemenge $A(\chi)$ genau das Geradenbündel $1[{}^{\circ}S, {}^2R]$ gemeinsam hat. Das ergibt insgesamt $A(\chi) = 1[{}^2R]$ und nach 3.1.7 Beweisschritt (1) folgt $\text{Im}(\chi) = 1[{}^2R] \vee 1[{}^{\circ}T] = \emptyset \vee 1[{}^2T]$, also $\text{rg}\chi \leq 2$.

Dual besitzt jede lineare Abbildung mit einem ausnahme-freien Geradenfeld ein Geradenbündel als Ausnahmemenge.

(2) Ist $\chi: {}^1\check{Z}(\pi) \rightarrow \mathcal{P}$ eine lineare Abbildung, so enthält die Ausnahmemenge $A(\chi)$ für $\text{rg}\chi = -1, 0, 1$ bzw. 2 nach 3.3.1, 3.4.2, 3.4.3 bzw. (1) mindestens einen projektiven Höchst-raum, etwa ein Geradenfeld $1[{}^2R]$. Ist ${}^{\circ}T$ ein zu 2R komplementärer Punkt und ist $\pi: {}^1\check{Z} \rightarrow 1[{}^{\circ}T]$ eine Projektion mit der Ausnahmemenge $1[{}^2R]$ (vgl. 3.2.2), so ist stets $\{{}^1X\}\chi = \{{}^1X\}\pi\chi$, für alle ${}^1X \in {}^1\check{Z}$, also $\chi = \pi\psi$ für $\psi: 1[{}^{\circ}T] \rightarrow \mathcal{P}$ und $\psi := \chi|1[{}^{\circ}T]$.

□

Falls $A(\chi)$ ein Geradenbündel enthält, kann dual vor-gegangen werden.

Der Grassmann-Raum $({}^1\check{Z}(\pi), \sim)$ besitzt das Dimensionspaar $(2, 2)$, und wegen $\frac{(2+2)!}{2!2!} - 1 = 5$ (vgl. 3.1.8) und Beweisschritt (1) gibt es keine regulären linearen Abbildungen aus $({}^1\check{Z}(\pi), \sim)$.

4 REGULÄRE LINEARE ABBILDUNGEN

4.1 Die Bildmenge einer regulären linearen Abbildung

4.1.1 Wir setzen unsere Untersuchungen mit den in 3.1.2 getroffenen Voraussetzungen fort; dabei kann π' o.B.d.A. als endlichdimensional angenommen werden (vgl. 1.3.6). Ferner liegt keine Beschränkung der Allgemeinheit vor, wenn wir die projektiven Räume $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{U})$ und $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{U}')$ als Pappos-Räume voraussetzen. Es gilt nämlich:

4.1.2 Jede reguläre lineare Abbildung $\gamma: {}^d\mathcal{U}(\Pi) \rightarrow \mathcal{P}'$ ist global und injektiv.

Aus der Existenz einer regulären Abbildung $\gamma: {}^d\mathcal{U}(\Pi) \rightarrow \mathcal{P}'$ folgt notwendig, daß Π und Π' projektive Pappos-Räume sind.

Beweis:

(1) Wir zeigen die Injektivität von γ ; nehmen wir indirekt ${}^dX \neq {}^dY$ mit ${}^dX\gamma = {}^dY\gamma$ an. Dann gibt es einen Punkt ${}^oP \in {}^dX \setminus {}^dY$ und eine zu oP windschiefe Hyperebene ${}^{n-1}B \supset {}^dY$. Wie in 3.1.7, Beweisschritt (1) bilden wir die Klassen ${}^d\mathcal{Z}_1, {}^d\mathcal{Z}_2, {}^d\mathcal{Z}_3$ und erhalten ${}^dX\gamma = {}^dY\gamma \in {}^d\mathcal{Z}_1\gamma \cap {}^d\mathcal{Z}_2\gamma$. Bezeichnen wir mit (e_1, e_2) das Dimensionspaar von ${}^d\Pi$, so ist nach dem Dimensionssatz und 3.1.7

$$\begin{aligned} \text{dann } \text{rg}\gamma &= \dim\Pi([{}^d\mathcal{Z}_1\gamma] \vee [{}^d\mathcal{Z}_2\gamma]) = \\ &= \frac{(e_1+e_2-1)!}{e_1!(e_2-1)!} - 1 + \frac{(e_1-1+e_2)!}{(e_1-1)!e_2!} - 1 - \dim\Pi([{}^d\mathcal{Z}_1\gamma] \wedge [{}^d\mathcal{Z}_2\gamma]) < \\ &< \frac{(e_1+e_2)!}{e_1!e_2!}, \text{ da } \dim\Pi([{}^d\mathcal{Z}_1\gamma] \wedge [{}^d\mathcal{Z}_2\gamma]) \geq 0 \text{ gilt. Das widerspricht} \end{aligned}$$

der Regularität von γ .

(2) Gibt es ein Ausnahmeelement dA der Abbildung γ , so muß nach Beweisschritt (1) jeder zu dA benachbarte d -Raum ${}^dX \neq {}^dA$ eben-

falls Ausnahmeelement von γ sein, weil sonst $\gamma|{}^dA^dX$ nicht injektiv ist. Da es von dA zu jedem Element von ${}^d\check{U}$ eine kürzeste Nachbarfolge gibt, erhalten wir $A(\gamma) = {}^d\check{U}$, also $\text{rg}\gamma = -1$, im Widerspruch zur Annahme, γ sei regulär.

(3) Mit $1 \leq d \leq n-2$ gilt $e_1 \geq 2$ und $e_2 \geq 2$. Für jedes d -Bündel bzw. für jedes d -Feld erhalten wir mit (1), 1.1.4 und 3.1.3 $\text{rg}(\gamma|d[{}^{d-1}T]) = n-d \geq 2$ bzw. $\text{rg}(\gamma|d[{}^{d+1}H]) = d+1 \geq 2$. Nach 3.5.8 ist daher sowohl Π als auch Π' ein projektiver Pappos-Raum. □

4.1.3 Eine Gerade $g' \subset \wp'$, welche mit der Bildmenge $\text{Im}(\gamma)$ einer regulären linearen Abbildung $\gamma: {}^d\check{U} \rightarrow \wp'$ drei Punkte gemeinsam hat, ist ganz in $\text{Im}(\gamma)$ enthalten.

Ein Unterraum \wp'_1 ist genau dann Teilmenge von $\text{Im}(\gamma)$, wenn ${}^d\mathfrak{m} := \wp'_1\gamma^{-1}$ ein projektiver Teilraum von ${}^d\Pi$ ist.

Beweis:

(1) Es seien X', Y', Z' drei paarweise verschiedene Punkte von $g' \cap \text{Im}(\gamma)$. Ist etwa $X'\gamma^{-1}$ und $Y'\gamma^{-1}$ benachbart, so wird das d -Büschel $(X'\gamma^{-1})(Y'\gamma^{-1})$ nach (L1) auf die Gerade g' abgebildet und es gilt $g' \subset \text{Im}(\gamma)$.

(2) Nehmen wir an, daß die Urbilder $X'\gamma^{-1}$, $Y'\gamma^{-1}$, $Z'\gamma^{-1}$ paarweise nicht benachbart sind, so gibt es nach 1.3.6 einen Punkt ${}^oP \subset X'\gamma^{-1}$, der zu $Y'\gamma^{-1}$ und $Z'\gamma^{-1}$ windschief ist und dual eine Hyperebene ${}^{n-1}B \supset Y'\gamma^{-1}$, welche $X'\gamma^{-1}$ und $Z'\gamma^{-1}$ nicht umfaßt. Vermöge oP und ${}^{n-1}B$ erklären wir wie in 3.1.7, Beweisschritt (1) die Klassen ${}^d\mathfrak{z}_1, {}^d\mathfrak{z}_2, {}^d\mathfrak{z}_3$ und die Abbildungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Dann gilt $Z'\gamma^{-1} \in {}^d\mathfrak{z}_3$, und die d -Räume $Z'\gamma^{-1}\varepsilon_1$ bzw. $Z'\gamma^{-1}\varepsilon_2$ sind von $X'\gamma^{-1}$ und $Y'\gamma^{-1}$ paarweise verschieden, da die drei d -Räume $Z'\gamma^{-1}$, $Z'\gamma^{-1}\varepsilon_1$ und $Z'\gamma^{-1}\varepsilon_2$ paarweise benachbart sind.

Die Unterräume $[{}^d\mathfrak{z}_1\gamma]$ und $[{}^d\mathfrak{z}_2\gamma]$ von Π' sind windschief, da γ eine reguläre lineare Abbildung ist, sodaß aus Z' höchstens eine Treffgerade an diese Unterräume existiert. Wegen $X' \in [{}^d\mathfrak{z}_1\gamma]$ und $Y' \in [{}^d\mathfrak{z}_2\gamma]$ sind X' und Y' die Fußpunkte einer Treffgeraden. Das ergibt jedoch $X'\gamma^{-1} = Z'\gamma^{-1}\varepsilon_1$ und $Y'\gamma^{-1} =$

$= Z'\gamma^{-1} \in \mathbb{P}^2$, sodaß $X'\gamma^{-1}$, $Y'\gamma^{-1}$, $Z'\gamma^{-1}$ im Widerspruch zur Annahme sogar paarweise benachbart sind.

(3) Ist ${}^d\mathcal{M}$ ein projektiver Teilraum von ${}^d\Pi$, so ist ${}^d\mathcal{M}\gamma$ eine Teilmenge von $\text{Im}(\gamma)$; für je zwei verschiedene Punkte X', Y' aus ${}^d\mathcal{M}\gamma$ sind die Urbilder $X'\gamma^{-1}$ und $Y'\gamma^{-1}$ benachbart und verschieden, womit die ganze Verbindungsgerade $X'Y' = ((X'\gamma^{-1})(Y'\gamma^{-1}))\gamma$ in ${}^d\mathcal{M}\gamma$ liegt.

(4) Nun sei $\mathcal{P}'_1 \subset \text{Im}(\gamma)$ ein Unterraum von Π' . Falls \mathcal{P}'_1 leer oder einpunktig ist, ist $\mathcal{P}'_1\gamma^{-1}$ ein projektiver Teilraum von ${}^d\Pi$. Besitzt \mathcal{P}'_1 jedoch eine Gerade, so trägt diese mindestens drei Punkte und ist nach (1), (2) Bild eines d -Büschels.

Da für irgendzwei verschiedene Punkte $X', Y' \in \mathcal{P}'_1$ die Verbindungsgerade $X'Y' \subset \mathcal{P}'_1$ ist, sind je zwei Elemente von $\mathcal{P}'_1\gamma^{-1}$ benachbart; nach 2.4.2 ist dann $\mathcal{P}'_1\gamma^{-1}$ Teilmenge eines projektiven Höchsttraumes ${}^d\mathcal{P}$. Die Einschränkung $\gamma|_{{}^d\mathcal{P}}$ ist eine lineare Injektion im Sinne von 1.1.4, sodaß $\mathcal{P}'_1\gamma^{-1}$ ein projektiver Teilraum von ${}^d\Pi$ ist. □

4.1.4 Eine reguläre lineare Abbildung $\gamma: {}^d\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}'$ ist nicht surjektiv.

Beweis: In ${}^d\Pi$ gibt es nach 2.2.3, Beweisschritt (2) zwei nicht benachbarte d -Räume dX und dY . Dann sind die Bildpunkte ${}^dX\gamma$ und ${}^dY\gamma$ verschieden und die Verbindungsgerade $({}^dX\gamma)({}^dY\gamma)$ schneidet $\text{Im}(\gamma)$ in nur zwei Punkten. Hätte nämlich diese Gerade mit $\text{Im}(\gamma)$ drei Punkte gemeinsam, so wären dX und dY im Gegensatz zur Annahme benachbart. □

4.2 Graßmannsche Koordinaten

4.2.1 Es bleibt im Anschluß an 4.1.2 zu zeigen, daß es für jeden n -dimensionalen projektiven Pappos-Raum $\Pi = (\mathcal{P}, \gamma)$ reguläre lineare Abbildungen $\gamma: {}^d\mathcal{U}(\Pi) \rightarrow \mathcal{P}'$ gibt. Mit Π ist dann auch Π' ein Pappos-Raum.

Jeder projektive Pappos-Raum Π ist isomorph zu einem arithmetischen projektiven Raum $\Pi(\mathbb{K}^{n+1}, \mathbb{K})$, wobei \mathbb{K} ein kommutativer Körper und $(\mathbb{K}^{n+1}, \mathbb{K})$ der $(n+1)$ -dimensionale arithmetische Vektorraum über \mathbb{K} ist. (Vgl. [2, S.10, 16]) Es genügt daher eine reguläre lineare Abbildung von ${}^4\check{\mathcal{L}}(\Pi(\mathbb{K}^{n+1}, \mathbb{K}))$ anzugeben.

4.2.2 Jeder d -Raum 4X von ${}^4\check{\mathcal{L}}(\Pi(\mathbb{K}^{n+1}, \mathbb{K}))$ kann durch $d+1$ unabhängige Punkte $(x_{j0}, \dots, x_{jn})_{\mathbb{K}}$ ($j=0, \dots, d$) aufgespannt werden. Wir bilden die Matrix

$$\begin{pmatrix} x_{00} & \dots & \dots & x_{0n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{d0} & \dots & \dots & x_{dn} \end{pmatrix}$$

und berechnen deren $(d+1)$ -spaltigen Unterdeterminanten

$$p_{j_0 \dots j_d} := \begin{vmatrix} x_{0j_0} & \dots & x_{0j_d} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{dj_0} & \dots & x_{dj_d} \end{vmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq j_0 < j_1 < \dots < j_d \leq n.$$

Ordnen wir diese $\binom{n+1}{d+1}$ Zahlen lexikographisch an, so können wir sie als Vektor des arithmetischen Vektorraumes

$(\mathbb{K}^{\binom{n+1}{d+1}}, \mathbb{K})$ bzw. als Koordinaten eines Punktes des $(\binom{n+1}{d+1} - 1)$ -dimensionalen arithmetischen projektiven Raumes $\Pi(\mathbb{K}^{\binom{n+1}{d+1}}, \mathbb{K})$

auffassen, da mindestens eine Koordinate von Null verschieden ist. Wir haben damit eine globale Abbildung γ von ${}^4\check{\mathcal{L}}(\Pi(\mathbb{K}^{n+1}, \mathbb{K}))$ in die Punktmenge von $\Pi(\mathbb{K}^{\binom{n+1}{d+1}}, \mathbb{K})$. Die Koordinaten des Bildpunktes ${}^4X_\gamma$ sind die bekannten grassmannschen Koordinaten (1. Art) des Unterraumes 4X . ¹⁾

Die grassmannschen Koordinaten sind von der Auswahl der den Unterraum 4X aufspannenden Punkte unabhängig und jede Umnormung eines Vektors (x_{j0}, \dots, x_{jn}) bringt nur eine Umnormung der grassmannschen Koordinaten mit sich. Die Abbildung

¹⁾ Die grassmannschen Koordinaten werden, insbesondere für $n = 3$ und $d = 1$, auch PLÜCKERSche Koordinaten genannt.

γ ist injektiv aber nicht surjektiv; vielmehr gehört ein Punkt von $\Pi(\mathbb{K}^{\binom{n+1}{d}}, \mathbb{K})$ genau dann zur Bildmenge $\text{Im}(\gamma)$, wenn seine Koordinaten die graßmannschen Relationen erfüllen. Die Menge $\text{Im}(\gamma)$ und jede dazu kollineare Punktmenge eines projektiven Raumes heißt eine Graßmann-Varietät. Vgl. dazu [21, S.176ff], [19, S.255ff] und [5, S.287ff].

Wir nennen diese Abbildung γ die graßmannsche Koordinatisierung von ${}^d\check{\mathcal{L}}(\Pi(\mathbb{K}^{\binom{n+1}{d}}, \mathbb{K}))$.

4.2.3 Die graßmannsche Koordinatisierung γ von ${}^d\check{\mathcal{L}}(\Pi(\mathbb{K}^{\binom{n+1}{d}}, \mathbb{K}))$ ist eine reguläre lineare Abbildung.

Beweis:

(1) Wir berechnen das Bild eines d -Büschels: Dazu wählen wir eine Basis $(x_{j0}, \dots, x_{jn})\mathbb{K}$ ($j=0, \dots, d+1$) der Hülle des d -Büschels so, daß für $j=0, \dots, d-1$ eine Basis des Büschelträgers vorliegt. Die unabhängigen Punktmen-

$$\{(x_{00}, \dots, x_{0n})\mathbb{K}, \dots, (x_{(d-1)0}, \dots, x_{(d-1)n})\mathbb{K},$$

$$((x_{d0}, \dots, x_{dn})u + (x_{(d+1)0}, \dots, x_{(d+1)n})v)\mathbb{K} \mid u, v \in \mathbb{K}, (u, v) \neq (0, 0)\}$$

spannen dann die d -Räume ${}^dX(u, v)$ des d -Büschels auf. Dabei sind (u, v) (homogene) Büschelparameter.

Auf Grund der Multilinearität der Determinate erhalten wir für die graßmannschen Koordinaten von ${}^dX(u, v)$

$$p_{j_0 \dots j_d}(u, v) = p_{j_0 \dots j_d}(1, 0)u + p_{j_0 \dots j_d}(0, 1)v,$$

sodaß das Bild des d -Büschels eine Gerade durch die Punkte ${}^dX(1, 0)$ und ${}^dX(0, 1)$ ist. Wir erkennen außerdem die Doppelverhältnistreue der Abbildung γ .

Damit erfüllt γ die Forderung (L1); wegen der Injektivität von γ ist (L2) trivialerweise erfüllt.

(2) Die Punkte $(\delta_{k0}, \dots, \delta_{kn})\mathbb{K}$, ($k=0, \dots, n$) bilden die kanonische Basis von $\Pi(\mathbb{K}^{\binom{n+1}{d}}, \mathbb{K})$, aus denen wir die d -Räume

$${}^dE^{k_0 \dots k_d} := \bigvee \{(\delta_{k0}, \dots, \delta_{kn})\mathbb{K} \mid k \in \{k_0, \dots, k_d\} \text{ mit } 0 \leq k_0 < \dots < k_d \leq n\}$$

erhalten. Das ergibt $\binom{n+1}{d+1}$ solche Unterräume, deren graßmannsche

Koordinaten wir berechnen. Für ${}^d E^{k_0 \dots k_d}$ ermitteln wir zunächst die Matrix

$$\begin{pmatrix} \delta_{k_0 0} & \cdots & \cdots & \delta_{k_0 n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \delta_{k_d 0} & \cdots & \cdots & \delta_{k_d n} \end{pmatrix}$$

und erhalten die graßmannschen Koordinaten

$$p_{j_0 \dots j_d}^{k_0 \dots k_d} = \begin{vmatrix} \delta_{k_0 j_0} & \cdots & \delta_{k_0 j_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{k_d j_0} & \cdots & \delta_{k_d j_d} \end{vmatrix} = \delta_{j_0 \dots j_d}^{k_0 \dots k_d};$$

diese Determinante besitzt nämlich nur dann in jeder Zeile ein von Null verschiedenes Element, wenn (k_0, \dots, k_d) eine Permutation von (j_0, \dots, j_d) ist, und da beide $(d+1)$ -Tupel streng monoton wachsend geordnet sind, liegt die identische Permutation vor.

Die Punkte ${}^d E^{k_0 \dots k_d}$ bilden daher die kanonische Basis von $\Pi(\mathbb{K}^{\binom{d+1}{d}}, \mathbb{K})$, sodaß γ regulär ist. ◻

4.3 Der erste Fortsetzungssatz

4.3.1 Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir im folgenden den Zielraum Π' als $\binom{n+1}{d+1} - 1$ -dimensionalen projektiven Raum annehmen. Ist $\gamma: {}^d \check{\mathcal{U}}(\Pi) \rightarrow \mathcal{P}'$ eine reguläre lineare Abbildung, $\Pi'' = (\mathcal{P}'', \mathcal{U}'')$ ein weiterer $\binom{n+1}{d+1} - 1$ -dimensionaler projektiver Raum und $\alpha: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}''$ eine Kollineation, so erhalten wir mit $\gamma\alpha: {}^d \check{\mathcal{U}}(\Pi) \rightarrow \mathcal{P}''$ nach 3.1.4 wieder eine reguläre lineare Abbildung.

Sind jedoch $\gamma_1: {}^d \check{\mathcal{U}}(\Pi) \rightarrow \mathcal{P}'$ und $\gamma_2: {}^d \check{\mathcal{U}}(\Pi) \rightarrow \mathcal{P}''$ zwei reguläre

lineare Abbildungen, so ist $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ einer Bijektion von $\text{Im}(\gamma_1)$ auf $\text{Im}(\gamma_2)$ gleich, die stets je drei kollineare Punkte in drei kollineare Punkte überführt. Wir zeigen in 4.3, daß die Abbildung $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ zu einer Kollineation $\kappa: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ fortgesetzt werden kann.

4.3.2 Zunächst geben wir eine Bedingung dafür an, daß zwei reguläre lineare Abbildungen übereinstimmen. Dabei zerlegen wir ${}^d\mathbb{U}$, wie in 3.1.7, Beweisschritt (1) beschrieben, in die drei Klassen ${}^d\mathcal{Z}_1, {}^d\mathcal{Z}_2, {}^d\mathcal{Z}_3$.

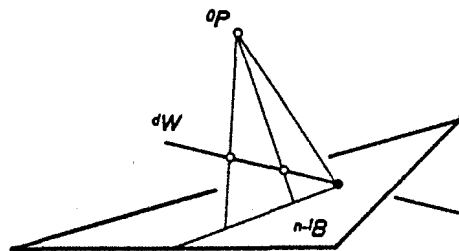
Sind $\gamma_1: {}^d\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{P}^1$ und $\gamma_2: {}^d\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{P}^1$ zwei reguläre lineare Abbildungen, ist $\gamma_1|{}^d\mathcal{Z}_i = \gamma_2|{}^d\mathcal{Z}_i$ ($i=1,2$), und gilt für einen d -Raum ${}^dW \in {}^d\mathcal{Z}_3$ die Bedingung ${}^dW\gamma_1 = {}^dW\gamma_2$, so stimmen γ_1 und γ_2 überein.

Beweis: Für jeden d -Raum ${}^dX \in {}^d\mathcal{Z}_3$ sind die drei d -Räume ${}^dX\epsilon_1, {}^dX\epsilon_2, {}^dX$ paarweise verschieden und liegen in einem d -Büschel, sodaß in π die Bildpunkte ${}^dX\epsilon_1\gamma_1 = {}^dX\epsilon_1\gamma_2, {}^dX\epsilon_2\gamma_1 = {}^dX\epsilon_2\gamma_2, {}^dX\gamma_1, {}^dX\gamma_2$ stets kollinear sind. Die Gerade $({}^dX\epsilon_1\gamma_1)({}^dX\epsilon_2\gamma_1) = ({}^dX\epsilon_1\gamma_2)({}^dX\epsilon_2\gamma_2)$ gehört also sowohl $\text{Im}(\gamma_1)$ also auch $\text{Im}(\gamma_2)$ an, was $\text{Im}(\gamma_1) = \text{Im}(\gamma_2)$ bedeutet.¹⁾ Wir erhalten somit eine globale bijektive Selbstabbildung $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ von ${}^d\mathbb{U}$.

Zwei verschiedene benachbarte d -Räume sind nach 4.1.3 dadurch gekennzeichnet, daß die Verbindungsgerade ihrer Bildpunkte ganz in $\text{Im}(\gamma_1)$ bzw. $\text{Im}(\gamma_2)$ enthalten ist. Die Abbildung $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ ist also ein Automorphismus von ${}^d\pi$, welcher nach 2.5.6 und 2.5.7 einen Verbandsisomorphismus $\kappa: u\pi \rightarrow u\pi$ oder einen Verbandsantiisomorphismus $\delta: u\pi \rightarrow u\pi$ induziert.

Da $\gamma_1\gamma_2^{-1}|{}^d\mathcal{Z}_i$ ($i=1,2$) die Identität ist, ergibt sich $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ als Isomorphismus 1. Art und die Abbildung ${}^o\kappa: {}^o\mathbb{U} \rightarrow {}^o\mathbb{U}$ (vgl. 2.5.1) ist eine perspektive Kollineation mit dem Zentrum oP und der Achse $O[{}^{n-1}B]$, die

ferner den Fixteilraum $O[{}^dW]$ besitzt, der weder das Zentrum enthält, noch in der Achse liegt. Da jeder Kollineationsstrahl aus $O[{}^dW]$ genau einen Punkt ausschneidet, ist $O[{}^dW]$ ein Fixpunkttraum



¹⁾ Wir werden in 4.3.3 sehen, daß $\text{Im}(\gamma_1) = \text{Im}(\gamma_2)$ eine Graßmann-Varietät ist; es liegt also die "rekursive Erzeugung" einer Graßmann-Varietät vor (vgl. [5, S.296]).

und π ebenso wie π ist die Identität. Das liefert $\gamma_1 = \gamma_2$. □

4.3.3 Sind $\gamma_1: \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ und $\gamma_2: \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ zwei reguläre lineare Abbildungen, so gibt es genau eine Kollineation

$$\kappa: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \text{ von } \mathbb{P}^1 \text{ auf } \mathbb{P}^1 \text{ mit } \gamma_1 \kappa = \gamma_2.$$

Beweis: Wir benützen die in 2.7.3 entwickelte induktive Beweismethode; dabei ist unter einer regulären linearen Abbildung aus einem k -dimensionalen projektiven Raum, der nach 2.7.1 das Dimensionspaar $(1, k)$ besitzt, wegen

$$\frac{(1+k)!}{1!k!} - 1 = k \text{ eine lineare Injektion zu verstehen. Ur-}$$

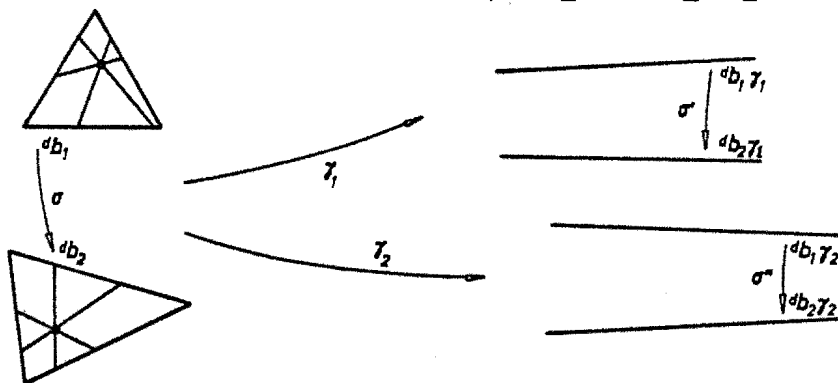
und Zielraum besitzen also dieselbe endliche Dimension.

(1) Für lineare Injektionen (Kollineationen) γ_1, γ_2 ist $\gamma_1 \gamma_2^{-1}: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ eine Kollineation. Setzen wir $\kappa := \gamma_1 \gamma_2^{-1}$, so ist κ die einzige Kollineation, die das Gewünschte leistet.

(2) Zerlegen wir \mathbb{A}^1 wieder gemäß 3.1.7, Beweisschritt (1) in die drei Klassen $\mathbb{A}^1_1, \mathbb{A}^1_2, \mathbb{A}^1_3$, so lautet die Induktionsvoraussetzung, daß es Kollineationen

$$\kappa_i: [\mathbb{A}^1_i \gamma_1] \rightarrow [\mathbb{A}^1_i \gamma_2] \text{ mit } (\gamma_1 | \mathbb{A}^1_i) \kappa_i = (\gamma_2 | \mathbb{A}^1_i) \text{ (} i=1,2 \text{) gibt.}$$

Die Kollineationen κ_i sind dabei die eindeutig bestimmten Fortsetzungen der Abbildungen $(\gamma_1 | \mathbb{A}^1_i)^{-1} (\gamma_2 | \mathbb{A}^1_i)$. Wählen



wir zwei d -Büschel ${}^d b_i \subset \mathbb{A}^1_i$ ($i=1,2$) und eine Projektivität $\sigma'': {}^d b_1 \gamma_2 \rightarrow {}^d b_2 \gamma_2$, so ist nach 3.5.7 auch die Abbildung $\sigma := (\gamma_2 | {}^d b_1) \sigma'' (\gamma_2 | {}^d b_2)^{-1}$ eine Projektivität, welche eine

Projektivität $\sigma' := (\gamma_1 | {}^d b_1)^{-1} \sigma (\gamma_1 | {}^d b_2)$ induziert. Insgesamt ist also $\sigma' = (\gamma_1^{-1} \gamma_2 | {}^d b_1 \gamma_1) \sigma (\gamma_1^{-1} \gamma_2 | {}^d b_2 \gamma_1)^{-1}$ projektiv, so daß die Kollineationen κ_1 und κ_2 verträglich gemäß (V4) (vgl. 1.3.8) sind und laut 1.3.10 zu einer Kollineation $\kappa: \mathbb{P}' \rightarrow \mathbb{P}''$ fortgesetzt werden können. Die Kollineation κ ist eindeutig bestimmt, wenn wir für einen d -Raum ${}^d W \in {}^d \mathcal{G}_3$ ${}^d W_{\gamma_1} \mapsto {}^d W_{\gamma_2}$ fordern, da ${}^d W_{\gamma_1}$ ein wesentlicher Punkt und ${}^d \{W_{\gamma_2}\}$ eine zulässige Bildmenge von $\{{}^d W_{\gamma_1}\}$ ist.

Wir erhalten eine reguläre lineare Abbildung $\gamma_1 \kappa: {}^d \check{U} \rightarrow \mathbb{P}''$, die nach 4.3.2 mit γ_2 übereinstimmt. □

Es gibt also, von kollinearen Umformungen abgesehen, genau eine lineare Abbildung aus der d -Geometrie eines endlichdimensionalen projektiven Pappos-Raumes, und die Bildmenge jeder regulären linearen Abbildung ist eine Graßmann-Varietät (vgl. 4.2.2). Andererseits kann jede Graßmann-Varietät als Bildmenge $\text{Im}(\gamma)$ einer regulären linearen Abbildung γ aufgefaßt werden.

4.3.4 Ist $\gamma: {}^d \check{U} \rightarrow \mathbb{P}'$ eine reguläre lineare Abbildung, so liefert die Graßmann-Varietät $\text{Im}(\gamma)$ einen Graßmann-Raum $(\text{Im}(\gamma), \sim)$, wenn wir zwei Punkte genau dann benachbart (\sim) nennen, falls ihre Urbilder benachbart sind. Dann sind nach 4.1.3 zwei Punkte von $\text{Im}(\gamma)$ genau dann benachbart, wenn ihre Verbindungsgerade ganz in $\text{Im}(\gamma)$ enthalten ist, oder wenn sie gleich sind. Die Abbildung $\gamma^{-1}: \text{Im}(\gamma) \rightarrow {}^d \check{U}$ bildet $(\text{Im}(\gamma), \sim)$ isomorph auf $({}^d \check{U}, \sim)$ ab. Eine Graßmann-Varietät ist ein "Punktmodell" eines Graßmann-Raumes.

Von besonderem Interesse sind die Automorphismen von $(\text{Im}(\gamma), \sim)$.

4.3.5 (Erster Fortsetzungssatz) Ist $\gamma: {}^d \check{U} \rightarrow \mathbb{P}'$ eine reguläre lineare Abbildung und $\varphi: \text{Im}(\gamma) \rightarrow \text{Im}(\gamma)$ ein Automorphismus des Graßmann-Raumes $(\text{Im}(\gamma), \sim)$, so existiert genau eine

automorphe Kollineation $\kappa: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}'$ der Graßmann-Varietät $\text{Im}(\gamma)$, die φ fortsetzt.

Beweis: Definieren wir eine Abbildung $\gamma_1: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{P}'$ durch ${}^d X \gamma_1 := {}^d X \gamma \varphi$, so ist γ_1 eine reguläre lineare Abbildung, und $\gamma^{-1} \gamma_1$ kann nach 4.3.3 zu genau einer Kollineation $\kappa \in \text{P}\Gamma\text{L}(\mathbb{P}')$ fortgesetzt werden, welche auch die gesuchte Fortsetzung von φ ist. □

Die Kollineation κ gehört der Gruppe $\text{P}\Gamma\text{L}(\text{Im}(\gamma))$ aller automorphen Kollineationen von $\text{Im}(\gamma)$ an und umgekehrt induziert jede Kollineation aus $\text{P}\Gamma\text{L}(\text{Im}(\gamma))$ einen Automorphismus des Graßmann-Raumes $(\text{Im}(\gamma), \sim)$.

5 DER ZWEITE FORTSETZUNGSSATZ

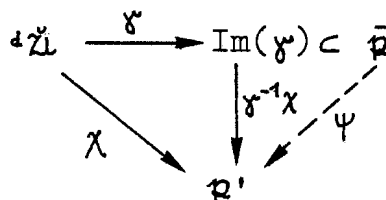
5.1 Problemstellung

5.1.1 Im folgenden sei $\Pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{U})$ ein n -dimensionaler projektiver Pappos-Raum, ${}^d\Pi = ({}^d\mathfrak{U}, \sim)$ ($1 \leq d \leq n-2$) die d -Geometrie in Π , sowie $\gamma: {}^d\mathfrak{U} \rightarrow \bar{\mathfrak{P}}$ eine reguläre lineare Abbildung in die Punktmenge eines $\binom{n+1}{d+1}$ -dimensionalen projektiven Raumes $\bar{\Pi} = (\bar{\mathfrak{P}}, \bar{\mathfrak{U}})$. Ferner sei $\Pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{U}')$ ein weiterer endlich-dimensionaler projektiver Raum.

Unser Ziel ist es, alle linearen Abbildungen aus $({}^d\mathfrak{U}, \sim)$ in Π' anzugeben.

5.1.2 Falls es eine lineare Abbildung $\psi: \bar{\mathfrak{P}} \rightarrow \mathfrak{P}'$ aus $\bar{\Pi}$ in Π' gibt, erhalten wir mit $\gamma\psi: {}^d\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{P}'$ nach 3.1.4 wieder eine lineare Abbildung. Damit haben wir neue Beispiele für lineare Abbildungen aus der d -Geometrie eines n -dimensionalen projektiven Pappos-Raumes gefunden (vgl. [2], [12]).

Ist andererseits $\chi: {}^d\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{P}'$ eine lineare Abbildung, so liefert $\gamma^{-1}\chi$ eine Abbildung aus $\text{Im}(\gamma) \subset \bar{\mathfrak{P}}$ in \mathfrak{P}' , die eine lineare Abbildung aus dem Grassmann-Raum $(\text{Im}(\gamma), \sim)$ in den projektiven Raum Π' ist. Wenn wir zeigen können, daß $\gamma^{-1}\chi$ zu einer linearen Abbildung ψ aus $\bar{\Pi}$ in Π' fortgesetzt werden kann, so kennen wir alle linearen Abbildungen aus ${}^d\Pi$ in Π' , da wir nach 1.1.7 alle linearen Abbildungen aus $\bar{\Pi}$ in Π' angeben können.



5.1.3 Nehmen wir an, daß $\psi: \bar{\mathfrak{P}} \rightarrow \mathfrak{P}'$ eine lineare Fortsetzung der Abbildung $\gamma^{-1}\chi$ ist, so folgt aus $\text{Im}(\gamma) \subset \bar{\mathfrak{P}}$ einerseits $\text{Im}(\chi) = {}^d\mathfrak{U}\chi = (\text{Im}(\gamma))\gamma^{-1}\chi = (\text{Im}(\gamma))\psi \subset \text{Im}(\psi)$, also $\text{rg}\chi \leq \text{rg}\psi$. Da andererseits die Verbindungshülle von $\text{Im}(\gamma)$ mit $\bar{\mathfrak{P}}$ übereinstimmt, gibt es eine Basis $\bar{\mathfrak{B}} \subset \text{Im}(\gamma)$ von $\bar{\Pi}$. Nach 1.1.9 erhalten wir $\text{rg}\psi = \dim[\bar{\mathfrak{B}}\psi] = \dim[\bar{\mathfrak{B}}\gamma^{-1}\chi] \leq \text{rg}\chi$; zusammenfassend gilt also $\text{rg}\chi = \text{rg}\psi$.

5.1.4 (Zweiter Fortsetzungssatz) Ist $\chi: \mathcal{U}(\Pi) \rightarrow \mathcal{P}'$ eine lineare Abbildung und $\gamma: \mathcal{U}(\Pi) \rightarrow \bar{\mathcal{P}}$ eine reguläre lineare Abbildung, so gibt es genau eine lineare Fortsetzung $\psi: \bar{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{P}'$ der Abbildung $\gamma^{-1}\chi$.

Zum Beweis verwenden wir die in 2.7.3 entwickelte Methode der vollständigen Induktion. Dabei gilt stets $d \geq \frac{n-1}{2}$ bzw. $n \leq 2d+1$.

(1) Für endlichdimensionale projektive Räume ist das Fortsetzungsproblem analog zu 4.3.3 trivial, wenn wir unter einer regulären linearen Abbildung aus einem endlichdimensionalen projektiven Raum sinngemäß eine lineare Injektion bzw. eine Kollineation verstehen.

(2) Die Induktionsvoraussetzung ist daher, daß es für jeden echten Teilraum \mathcal{Q} genau eine lineare Fortsetzung aus $[\mathcal{Q}\gamma]$ in \mathcal{P}' gibt, insbesondere genau eine lineare Fortsetzung $\psi_C: [d[{}^{n-1}C]\gamma] \rightarrow \mathcal{P}'$ für jedes Hyperfeld $d[{}^{n-1}C]$. Ebenso existiere für jedes d -Hyperbündel $d[{}^{\circ}Q]$ genau eine lineare Fortsetzung $\psi_Q: [d[{}^{\circ}Q]] \rightarrow \mathcal{P}'$ der Abbildung $\gamma^{-1}(\chi|_{d[{}^{\circ}Q]})$.

Der eigentliche Beweis sei wegen seiner Länge kurz skizziert:

In 5.2 wählen wir einen Punkt ${}^{\circ}P$ und eine Hyperebene ${}^{n-1}B \not\supseteq {}^{\circ}P$ so aus, daß wir die linearen Abbildungen $\psi_P: [d[{}^{\circ}P]\gamma] \rightarrow \mathcal{P}'$ und $\psi_B: [d[{}^{n-1}B]\gamma] \rightarrow \mathcal{P}'$ zu einer linearen Abbildung $\psi: \bar{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{P}'$ fortsetzen können. Da ψ_P und ψ_B aus komplementären Unterräumen von $\bar{\mathcal{P}}$ abbilden, müssen wir gegebenenfalls noch für einen wesentlichen Punkt die Bildmenge zulässig festlegen, um gemäß 1.3.5 ψ eindeutig festzulegen.

Es folgt in 5.3 bis 5.5 der Nachweis, daß ψ eine Fortsetzung von $\gamma^{-1}\chi$ ist. Dabei verwenden wir vor allem die in 1.3.2 bewiesene Aussage, wonach zwei lineare Abbildungen höchstens eine lineare Fortsetzung im Verbindungsraum der Uräume besitzen, falls die beiden Definitionsmengen nichtleeren Durchschnitt besitzen.

Die Fälle $n \leq 2d-1$, $n = 2d$ und $n = 2d+1$ werden getrennt

untersucht, der triviale Sonderfall einer leeren linearen Abbildung χ wird in 5.2.2 behandelt.

5.2 Konstruktion einer möglichen Lösung

5.2.1 Die Einschränkung von χ auf jeden projektiven Höchst-
raum ist linear im Sinne von 1.1.2. Weiters gibt es einen
projektiven Höchstraum ${}^d\mathcal{H}_0$ derart, daß $r := \text{rg}(\chi|{}^d\mathcal{H}_0) \geq$
 $\geq \text{rg}(\chi|{}^d\mathcal{H})$ gilt, wobei ${}^d\mathcal{H} \subset {}^d\mathcal{A}$ ein projektiver Höchstraum
ist.

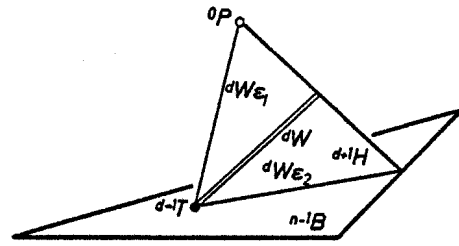
In Abhängigkeit vom Wert der ganzen Zahl r wählen wir einen
Punkt oP , eine komplementäre Hyperebene ${}^{n-1}B$ und gegebenen-
falls einen d -Raum ${}^dW \in d[{}^oP] \cup d[{}^{n-1}B]$ so aus, daß die linearen
Abbildungen $\psi_P: [d[{}^oP]]_\gamma \rightarrow \mathcal{P}'$ und $\psi_B: [d[{}^{n-1}B]]_\gamma \rightarrow \mathcal{P}'$ genau eine
lineare Fortsetzung besitzen, gegebenenfalls mit der Zusatz-
voraussetzung $\{{}^dW\}_\chi = \{{}^dW\}_\psi$.

5.2.2 Es sei $r = -1$: Da jeder projektive Höchstraum nur
Ausnahmeelemente besitzt, ist χ eine leere Abbildung. In
diesem Fall ist der Induktionsbeweis gar nicht nötig: Für
 $\gamma^{-1}\chi$ ist $\text{Im}(\gamma)$ die Ausnahmemenge, sodaß jede lineare Fort-
setzung dann $[\text{Im}(\gamma)] = \bar{\mathcal{P}}$ als Ausnahmemenge besitzen muß. Daher
ist die leere lineare Abbildung aus $\bar{\mathcal{P}}$ in \mathcal{P}' die einzige
lineare Fortsetzung von $\gamma^{-1}\chi$ in den projektiven Raum $\bar{\mathcal{P}}$.

Der Fall $r = -1$ kann daher im folgenden ausgeschlossen
werden.

5.2.3 Es sei $r = 0$: In diesem Fall gibt es keine aus-
nahmefreien d -Büschel, aber mindestens ein d -Büschel
 $d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H]$, welches genau ein Ausnahmeelement dW besitzt.
Wir wählen eine Hyperebene ${}^{n-1}B$ so, daß ${}^dW \cap {}^{n-1}B = {}^{d-1}T$ gilt.

Dann sind dW und ${}^{d+1}H \cap {}^{n-1}B$ zwei verschiedene Hyperebenen des projektiven Raumes $\Pi({}^{d+1}H)$, welche nach 1.3.6 einen gemeinsamen Komplementärraum oP besitzen.



Mittels der Abbildungen ϵ_1, ϵ_2 (vgl. 3.1.7, (1)) gilt dann ${}^oP \vee {}^{d-1}T = {}^dW\epsilon_1$ und ${}^{n-1}B \cap {}^{d+1}H = {}^dW\epsilon_2$.

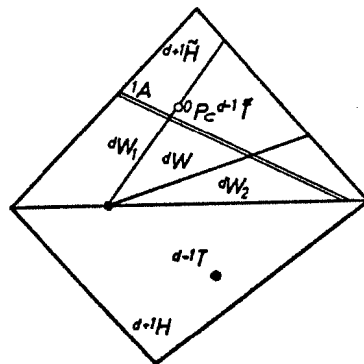
Aus $r = 0$ folgt mit 3.3.2 $\text{rg}\chi = 0$; ebenso ist $\text{rg}(\chi|d[{}^oP]) = \text{rg}(\chi|d[{}^{n-1}B]) = 0$, da ${}^dW\epsilon_1$ und ${}^dW\epsilon_2$ der Definitionsmenge $D(\chi)$ angehören. Ferner gilt nach 5.1.3 $\text{rg}\psi_P = \text{rg}\psi_B = 0$.

Die linearen Abbildungen ψ_P und ψ_B sind gemäß 1.3.8, (V1) verträglich, und nach 1.3.10 gibt es genau eine lineare Fortsetzung $\psi: \bar{P} \rightarrow P'$ von ψ_P und ψ_B , die den bezüglich ψ_P und ψ_B wesentlichen Punkt ${}^dW\chi$ als Ausnahmeelement besitzt.

5.2.4 Es sei $r = 1$. Da die Einschränkung von χ auf mindestens einen projektiven Höchstraum vom Rang 1 ist, gibt es ein ausnahmefreies d -Büschel $d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H]$.

Wir wählen nun einen Unterraum ${}^{d+2}U \supset {}^{d+1}H$, was wegen $d \leq n-2$ stets möglich ist. Nach 3.5.2 gibt es für ein Nichtausnahmeelement ${}^dW_2 \subset {}^{d+1}H$ höchstens ein d -Feld, dessen Hülle in ${}^{d+2}U$ liegt, das dW_2 aber kein ausnahmefreies d -Büschel enthält.

Wir können also in der $(d+1)$ -Klammer $(d+1)[{}^dW_2, {}^{d+2}U]$ noch mindestens einen Unterraum ${}^{d+1}\tilde{H} \neq {}^{d+1}H$ finden, sodaß das d -Feld $d[{}^{d+1}\tilde{H}]$ ein ausnahmefreies d -Büschel besitzt. Dann gilt $\text{rg}(\chi|d[{}^{d+1}\tilde{H}]) = 1$, und die Ausnahmemenge von $\chi|d[{}^{d+1}\tilde{H}]$ ist der Teilraum $d[{}^1A, {}^{d+1}\tilde{H}]$ für eine gewisse Gerade ${}^1A \subset {}^{d+1}\tilde{H}$.



Gemäß 1.3.6 kann nun der Punkt ${}^oP \subset {}^{d+1}\tilde{H}$ so gewählt werden,

daß er weder in dW_2 noch in 1A enthalten ist. Die Hyperebene ${}^{n-1}B$ wählen wir komplementär zu oP durch ${}^{d+1}H$. Auf Grund dieser Auswahl besitzt das d -Hyperbündel $d[{}^oP]$ ein ausnahmefreies d -Büschel, z.B. $d[{}^{d-1}\tilde{T}, {}^{d+1}\tilde{H}]$ mit ${}^oP \subset {}^{d-1}\tilde{T} \subset {}^{d+1}\tilde{H}$ beliebig; im d -Hyperfeld $d[{}^{n-1}B]$ ist das d -Büschel $d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H]$ ausnahmefrei.

Ferner können wir aus dem d -Büschel $d[{}^{d-1}\tilde{T}, {}^{d+1}\tilde{H}]$ einen Unterraum dW_1 mit ${}^dW_1\chi \neq {}^dW_2\chi$ wählen und im d -Büschel ${}^dW_1, {}^dW_2$ einen von dW_1 und dW_2 verschiedenen d -Raum dW finden. Dann gilt ${}^dW\epsilon_i = {}^dW_i$ ($i=1,2$).

Aus $r = 1$ können wir im allgemeinen nur $\text{rg}\chi \geq 1$ schließen. Desgleichen besitzen die Einschränkungen $\chi|d[{}^oP]$ und $\chi|{}^{n-1}B$ mindestens den Rang 1; mit 5.1.3 gelten diese Rangabschätzungen auch für ψ_P und ψ_B .

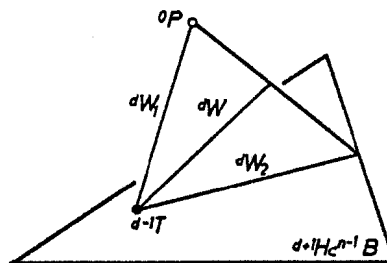
Ist χ eine lineare Abbildung vom Rang 1, dann gilt auch $\text{rg}(\chi|d[{}^oP]) = \text{rg}\psi_P = \text{rg}(\chi|d[{}^{n-1}B]) = \text{rg}\psi_B = 1$. Nach 3.5.4 ist das für eine Ordnung $N \geq 4$ stets der Fall. Zur Konstruktion einer linearen Fortsetzung ψ von ψ_P und ψ_B müssen drei Fälle unterschieden werden:

(1) Für $\text{rg}\chi = 1$ sind die Abbildungen ψ_P und ψ_B nach 1.3.8, (V3) verträglich, denn für die Geraden $\bar{g}_1 := d[{}^{d-1}\tilde{T}, {}^{d+1}\tilde{H}]\chi$ und $\bar{g}_2 := d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H]\chi$ ist die Abbildung $\bar{\sigma} := (\psi_P|_{\bar{g}_1})(\psi_B|_{\bar{g}_2})^{-1} = (\chi^{-1}\chi|_{\bar{g}_1})(\chi^{-1}\chi|_{\bar{g}_2})^{-1}$ nach 3.5.5 und 3.5.7 eine Projektivität. Der Punkt ${}^dW_\chi$ ist wesentlich bezüglich ψ_P und ψ_B , und es gibt nach 1.3.10 genau eine lineare Fortsetzung $\psi: \bar{p} \rightarrow p'$ von ψ_P und ψ_B , welche ${}^dW_\chi\psi = {}^dW_\chi$ leistet, da $\{{}^dW_\chi\}$ eine zulässige Bildmenge von $\{{}^dW_\chi\}$ ist.

(2) Ist $\text{rg}\chi \geq 2$ und $\text{rg}\psi_P = \text{rg}\psi_B = 1$, so müssen die Geraden $\text{Im}(\psi_P)$ und $\text{Im}(\psi_B)$ verschieden sein, da $\text{Im}(\chi) \subset \text{Im}(\psi_P) \vee \text{Im}(\psi_B)$ gilt. Die Abbildungen ψ_P und ψ_B sind dann im Sinne von 1.3.8 nicht verträglich. Da diese Annahme jedoch nur für $N \leq 3$ denkbar ist, können die Abbildungen dennoch linear fortgesetzt werden, wie in 1.3.11 gezeigt wurde. Analog zu (1) existiert genau eine lineare Fortsetzung $\psi: \bar{p} \rightarrow p'$, welche ${}^dW_\chi\psi = {}^dW_\chi$ leistet.

(3) Gilt etwa $\text{rg}\psi_P \geq 2$ und $\text{rg}\psi_B = 1$, so sind die Abbildungen ψ_P und ψ_B laut 1.3.8, (V4) verträglich, wobei wie in (1) für Geraden \bar{g}_1 und \bar{g}_2 mit 3.5.7 folgt, daß die Abbildung $\bar{\sigma} := (\psi_P|_{\bar{g}_1})\sigma'(\psi_B|_{\bar{g}_2})^{-1}$ für jede Projektivität $\sigma':g_1\psi_P \rightarrow g_2\psi_B$ projektiv ist. Ebenfalls wie in (1) erkennen wir, daß genau eine lineare Fortsetzung $\psi:\bar{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{P}'$ von ψ_P und ψ_B existiert, welche ${}^dW\chi\psi = {}^dW\chi$ leistet.

5.2.5 Es sei $r \geq 2$. Nach Voraussetzung existiert also ein zweidimensionaler projektiver Teilraum, welcher in der Definitionsmenge $D(\chi)$ enthalten ist. Wir nehmen o.B.d.A. an, daß dieser Teilraum Teilmenge eines d -Feldes ist, sonst wird dual vorgegangen. Das ist möglich, da wir die Voraussetzung $d \geq \frac{n-1}{2}$ in 5.2.5 nicht benötigen, und d -Hyperbündel bzw. d -Hyperfelder einander dual gegenüberstehen. Insbesondere besitzt dieses d -Feld ein ausnahmefreies d -Büschel $d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H]$, sodaß gilt $\text{rg}(\chi|_{d[{}^{d-1}T]}) \geq 1$, und es gibt sicherlich einen Unterraum ${}^dW_1 \in d[{}^{d-1}T] \setminus d[{}^{d+1}H]$, für den ${}^dW_1\chi$ definiert ist. Aus dem ausnahmefreien d -Büschel $d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H]$ wählen wir einen d -Raum dW_2 mit ${}^dW_1\chi \neq {}^dW_2\chi$, sodaß das d -Büschel ${}^dW_1, {}^dW_2$ keine Ausnahmeelemente besitzt.



Nun gelte ${}^oP \subset {}^dW_1 \setminus {}^{d-1}T$ und ${}^{n-1}B \supset {}^{d+1}H$ sei zu oP komplementär.

Schließlich greifen wir aus dem d -Büschel ${}^dW_1, {}^dW_2$ einen von dW_1 und dW_2 verschiedenen d -Raum dW heraus, sodaß wir ${}^dW\varepsilon_i = {}^dW_i$ ($i=1,2$) erhalten.

Die Abbildung ψ_B besitzt nach Konstruktion mindestens den Rang 2. Ferner sind ψ_P und ψ_B gemäß 1.3.8, (V2) oder (V4) verträglich, je nachdem $\text{rg}\psi_P = 0$ oder $\text{rg}\psi_P = 2$ gilt; die Projektivitätsbedingung ist wieder mittels 3.5.7 nachzuweisen. Wie in allen anderen Fällen existiert genau eine lineare Fortsetzung $\psi:\bar{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{P}'$ von ψ_P und ψ_B mit ${}^dW\chi\psi = {}^dW\chi$.

5.2.6 Falls es also für $r \geq 0$ überhaupt eine lineare Fortsetzung von $\gamma^{-1}\chi$ gibt, so ist es die Abbildung ψ , wobei $\gamma\psi$ nach Konstruktion auf der Menge $d[{}^{\circ}P] \cup [{}^{n-1}B] \cup \{{}^dW\}$ mit χ übereinstimmt. Dabei könnten nach 1.3.4 für $\text{rg}\psi = 1$ nur die Fasern von ψ eindeutig bestimmt sein. Das ist nicht der Fall, da χ und $\gamma\psi$ nach 5.2.4, 5.2.5 für $\text{rg}\psi = \text{rg}\chi \geq 1$ auf mindestens einem d -Büschel db dasselbe leisten.

Die Abbildungen χ und $\gamma\psi$ stimmen auch auf dem d -Büschel ${}^dW_{\varepsilon_1} {}^dW_{\varepsilon_2}$ überein. Für ${}^dW \in A(\chi)$ ist das trivial. Gilt ${}^dW \in D(\chi)$, so ist ${}^dW_{\varepsilon_1} {}^dW_{\varepsilon_2}$ ausnahmefrei bei χ und $\gamma\psi$. Mit 3.5.5 bzw. 3.5.7 folgt aus $\chi|{}^db = \gamma\psi|{}^db$, daß $\sigma := (\chi|{}^dW_{\varepsilon_1} {}^dW_{\varepsilon_2})(\gamma\psi|{}^dW_{\varepsilon_1} {}^dW_{\varepsilon_2})^{-1}$ eine Projektivität ist. Da ${}^dW, {}^dW_{\varepsilon_1}, {}^dW_{\varepsilon_2}$ Fixelemente von σ sind, gilt $\sigma = \text{id}_{{}^dW_{\varepsilon_1} {}^dW_{\varepsilon_2}}$.

5.3 Beweis für $n \leq 2d-1$

5.3.1 Wir setzen in 5.3.1 nicht notwendig $n \leq 2d-1$ voraus.

Es sei ${}^{\circ}Q \subset {}^dW \cap {}^{n-1}B$ ein Punkt. Dann existiert nach Induktionsvoraussetzung genau eine lineare Fortsetzung $\psi_Q: [d[{}^{\circ}Q]_{\chi}] \rightarrow \mathcal{P}'$ von $\gamma^{-1}(\chi|d[{}^{\circ}Q])$. Da für jeden echten Teilraum ${}^d\mathcal{Q}$ genau eine lineare Fortsetzung von $\gamma^{-1}(\chi|{}^d\mathcal{Q})$ existiert, stimmen ψ und ψ_Q auf den windschiefen Unterräumen $\bar{\mathcal{P}}_1 := [d[{}^{\circ}P \vee {}^{\circ}Q]_{\chi}] \subset [d[{}^{\circ}P]_{\chi}]$ und $\bar{\mathcal{P}}_2 := [d[{}^{\circ}Q, {}^{n-1}B]_{\chi}] \subset [d[{}^{n-1}B]_{\chi}]$ überein, deren Verbindungsraum $[d[{}^{\circ}Q]_{\chi}]$ ist (vgl. 3.1.7, (1)). Jede lineare Fortsetzung von $\psi|_{\bar{\mathcal{P}}_1}$ und $\psi|_{\bar{\mathcal{P}}_2}$ in den Unterraum $\bar{\mathcal{P}}_1 \vee \bar{\mathcal{P}}_2$, die $\{{}^dW_{\chi}\}$ auf $\{{}^dW_{\chi}\}\psi$ abbildet, ist nach 1.3.5 mit $\psi|_{\bar{\mathcal{P}}_1 \vee \bar{\mathcal{P}}_2}$ fasergleich. Mit $\gamma\psi|{}^dW_{\varepsilon_1} {}^dW_{\varepsilon_2} = \chi|{}^dW_{\varepsilon_1} {}^dW_{\varepsilon_2} = \gamma\psi_Q|{}^dW_{\varepsilon_1} {}^dW_{\varepsilon_2}$ folgt $\psi_Q = \psi| [d[{}^{\circ}Q]_{\chi}]$, bzw. $\{{}^dX\}\gamma\psi = \{{}^dX\}\chi$, für alle ${}^dX \in d[{}^{\circ}Q]$ mit ${}^{\circ}Q \subset {}^dW \cap {}^{n-1}B$.

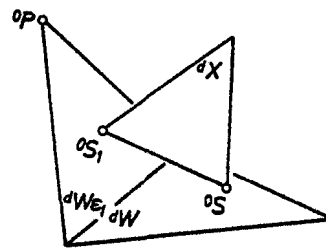
5.3.2 Ist nun speziell $n \leq 2d-1$, so besitzt jeder d -Raum ${}^dX \in {}^d\mathcal{U}$ einen Schnittpunkt mit ${}^dW \cap {}^{n-1}B$, sodaß nach 5.3.1 die Abbildung ψ eine Fortsetzung von $\gamma^{-1}\chi$ ist.

$n=2d-1$

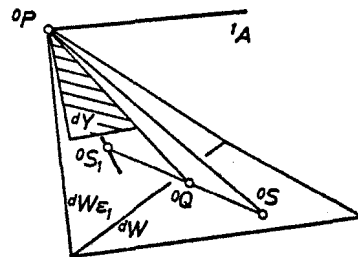
5.4 Beweis für $n = 2d$

5.4.1 Im Anschluß an das Ergebnis in 5.3.1 und auf Grund der Konstruktion von ψ brauchen wir die Beziehung $\{^dX\}_\psi = \{^dX\}_\chi$ nur noch für solche d -Räume $^dX \in \mathcal{X}$ nachzuweisen, welche zu ${}^dW \cap {}^{2d-1}B$ und oP windschief sind, denn jeder d -Raum aus $d[{}^{2d-1}B]$ schneidet ${}^dW \cap {}^{2d-1}B$. Es sei dX im folgenden so ein d -Raum. (Die Skizzen in 5.4 sind für $d=2$, also $n=4$ erstellt.)

Wegen $n = 2d$ haben je zwei d -Räume nichtleeren Durchschnitt. Da dX zu ${}^dW \cap {}^{2d-1}B = {}^dW \cap {}^dW \varepsilon_1$ und oP windschief ist, erhalten wir Schnittpunkte ${}^oS := {}^dX \cap {}^dW$ und ${}^oS_1 := {}^dX \cap {}^dW \varepsilon_1$ mit ${}^oS, {}^oS_1, {}^oP$ paarweise verschieden und nicht kollinear.



Wir betrachten den projektiven Teilraum $\Pi(d[{}^oP, {}^dW \vee {}^oP])$. Die Einschränkung von χ auf diesen Teilraum ist wegen ${}^dW \varepsilon_1 \notin A(\chi)$ keine leere Abbildung, sodaß ihre Ausnahmemenge in einer gewissen Hyperebene $d[{}^1A, {}^dW \vee {}^oP]$ mit ${}^oP \in {}^1A$ des Teilraumes enthalten ist. Eine weitere Hyperebene dieses projektiven Teilraumes ist $d[{}^oP \vee {}^oS_1, {}^dW \vee {}^oP]$, da der Träger dieser d -Klammer eine Gerade ist. Nach 1.3.6 gibt es daher einen d -Raum ${}^dY \in d[{}^oP, {}^dW \vee {}^oP]$, der beiden Hyperebenen des Teilraumes nicht angehört. Die beiden Trägergeraden 1A und ${}^oP \vee {}^oS_1$ haben also mit dY nur oP gemeinsam, sodaß insbesondere die Ebene ${}^oP \vee {}^oS \vee {}^oS_1$ nicht in dY enthalten ist und es genau einen Punkt ${}^oQ := {}^dY \cap ({}^oS \vee {}^oS_1) = {}^dY \cap {}^dX$ gibt. Nach Konstruktion gilt ferner ${}^dY \notin A(\chi)$.



Da dX und damit auch oQ zu ${}^dW \cap {}^{2d-1}B$ windschief ist, können wir ${}^dZ := ({}^dW \cap {}^{2d-1}B) \vee {}^oQ$ bilden. Es ist dann ${}^dZ \neq {}^dW \varepsilon_1$; nehmen

wir nämlich indirekt ${}^dZ = {}^dW \varepsilon_1$ an, so folgt ${}^oQ \subset {}^dX \cap {}^dW \varepsilon_1 = {}^oS_1$ und wegen ${}^oQ \subset {}^dY$ ergibt ${}^oQ = {}^oS_1 \subset {}^dY$ einen Widerspruch zur Auswahl von dY .

Es ist ${}^dZ \in [{}^dW \cap {}^{2d-1}B, {}^dW \vee {}^oP]$, sodaß dZ auf Grund der gewählten Angabe nur für $r = 0$ und ${}^dZ = {}^dW$ bzw. ${}^oQ = {}^oS$ ein Ausnahmeelement von χ ist. Wir unterscheiden daher zwei Fälle:

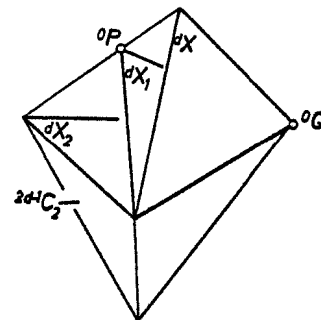
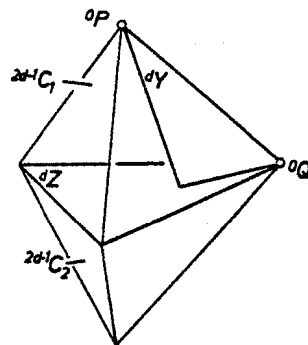
5.4.2 dZ gehört der Ausnahmemenge $A(\chi)$ nicht an: Für das d -Hyperbündel $d[{}^oQ]$ ist $\chi^{-1}(\chi d[{}^oQ])$ nach Induktionsvoraussetzung zu genau einer linearen Abbildung $\psi_Q: [d[{}^oQ]\gamma] \rightarrow \mathbb{P}^1$ fortsetzbar. Ist ${}^{2d-1}C$ eine Hyperebene durch dZ , so leisten die Abbildungen ψ und ψ_Q auf $[d[{}^oQ, {}^{2d-1}C]\gamma]$ dasselbe, da auf Grund des Dimensionssatzes kein in ${}^{2d-1}C$ enthaltener d -Raum zu ${}^dW \cap {}^{2d-1}B$ windschief sein kann.

Wir wählen nun zwei verschiedene Hyperebenen ${}^{2d-1}C_i \supset {}^dZ$ ($i=1,2$) mit ${}^{2d-1}C_1 \supset {}^oP$ und ${}^{2d-1}C_2 \not\supset {}^oP$. Die d -Klammern $d[{}^oQ, {}^{2d-1}C_i]$ haben ${}^dZ \in D(\chi)$ gemeinsam, sodaß ψ und ψ_Q nach 1.3.2 auch im Verbindungsraum $[d[{}^oQ, {}^{2d-1}C_1]\gamma] \vee [d[{}^oQ, {}^{2d-1}C_2]\gamma] =: \bar{\mathbb{P}}_1 \vee \bar{\mathbb{P}}_2$ übereinstimmen müssen. Die Abbildungen ψ und ψ_Q leisten ferner auf $d[{}^oP \vee {}^oQ]\gamma =: \bar{\mathbb{P}}_2$ dasselbe, denn beide sind lineare Fortsetzungen von $\chi^{-1}(\chi | d[{}^oP \vee {}^oQ])$.

Mit ${}^{2d-1}C_1 \supset {}^dZ \vee {}^oP = {}^dW \vee {}^oP \supset {}^dY$ erkennen wir ${}^dY \in d[{}^oQ, {}^{2d-1}C_1] \cap d[{}^oP \vee {}^oQ]$ und ${}^dY \in D(\chi)$. Für ${}^dY \in \bar{\mathbb{P}}_1 \vee \bar{\mathbb{P}}_2$ ist also ${}^dY \chi \psi = {}^dY \chi \psi_Q$ definiert und nach 1.3.2 muß $\psi | \bar{\mathbb{P}}_1 \vee \bar{\mathbb{P}}_2 = \psi_Q | \bar{\mathbb{P}}_1 \vee \bar{\mathbb{P}}_2$ gelten.

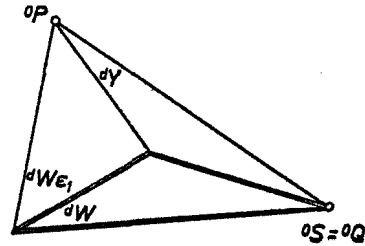
Setzen wir ${}^dX_1 := ({}^dX \cap {}^{2d-1}C_2) \vee {}^oP$ und ${}^dX_2 := ({}^dX \vee {}^oP) \cap {}^{2d-1}C_2$, so gilt ${}^dX \in {}^dX_1 \vee {}^dX_2$ sowie ${}^dX \chi \in ({}^dX_1 \chi) \vee ({}^dX_2 \chi) \subset \bar{\mathbb{P}}_1 \vee \bar{\mathbb{P}}_2$.

Damit ist $\{^dX\} \chi \psi = \{^dX\} \chi$ nachgewiesen.



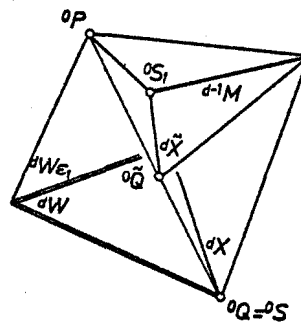
5.4.3 Es sei ${}^dZ \in A(\chi)$: Wie schon in 5.4.1 bemerkt, gilt ${}^dZ = {}^dW$, ${}^oQ = {}^oS$ und $r = 0$.

Die Gerade ${}^oPv{}^oQ$ ist zu ${}^dW \cap {}^{2d-1}B = {}^dW \cap {}^dW \varepsilon_1$ windschief und das O-Büschel (Punktreihe) $O[{}^oPv{}^oQ]$ ist perspektiv zum d-Büschel $d[{}^dW \cap {}^{2d-1}B, {}^dWv{}^oP]$, welches genau ${}^dW = {}^dZ$ als Ausnahmeelement besitzt. Wir wählen einen zu dY



komplementären Unterraum ${}^{d-1}M$ mit ${}^oS_1 \subset {}^{d-1}M \subset {}^dX$, sodaß das d-Büschel $d[{}^{d-1}M, {}^dXv{}^oP] =: {}^db$ perspektiv zum Geradenbüschel $\Gamma[{}^oS_1, {}^oS_1v{}^oPv{}^oQ]$ bzw. zum O-Büschel $O[{}^oPv{}^oQ]$ liegt.

Für den d-Raum ${}^{d-1}Mv{}^oP \in d[{}^oP]$ stimmen die Bildpunkte unter χ und $\gamma\psi$ trivialerweise überein. Für alle ${}^d\tilde{X} \in {}^d\tilde{b} := {}^db \setminus \{{}^dX\}$, die von ${}^{d-1}Mv{}^oP$ verschieden sind, gilt ${}^oS_1 := {}^d\tilde{X} \cap {}^dW \varepsilon_1 = {}^oS_1$, sodaß ${}^dY \cap {}^d\tilde{X} =: {}^o\tilde{Q}$ folgt. Mit Hilfe



des festen d-Raumes dY kann dann wie in 5.4.2 definiert werden ${}^d\tilde{Z} := ({}^dW \cap {}^{2d-1}B)v{}^o\tilde{Q}$, wobei ${}^d\tilde{Z} \neq {}^dZ$ kein Ausnahmeelement von χ ist. Damit gilt aber $\{{}^d\tilde{X}\}\gamma\psi = \{{}^d\tilde{X}\}\chi$ für alle ${}^d\tilde{X} \in {}^d\tilde{b}$ nach 5.4.2.

Die Abbildungen $\gamma\psi$ und χ stimmen daher auf ${}^d\tilde{b}$ überein; wegen $r = 0$ besitzt db mindestens ein Ausnahmeelement von χ . Gibt es in ${}^d\tilde{b}$ keine Ausnahmeelemente von χ bzw. $\gamma\psi$, so ist ${}^db\chi$ einpunktig und (L2) liefert ${}^dX \in A(\chi)$ bzw. ${}^dX \in A(\gamma\psi)$. Besitzt ${}^d\tilde{b}$ genau ein Ausnahmeelement und daher auch mindestens einen d-Raum ${}^d\tilde{X}_0 \in D(\chi)$, so gilt ${}^dX\chi = {}^d\tilde{X}_0\chi = {}^d\tilde{X}_0\psi = {}^dX\psi$. Falls in ${}^d\tilde{b}$ zwei Ausnahmeelemente existieren, so ist nach (L1) weder ${}^dX\gamma\psi$ noch ${}^dX\chi$ definiert.

Zusammenfassend gilt daher $\{{}^dX\}\gamma\psi = \{{}^dX\}\chi$.

$n=2d$

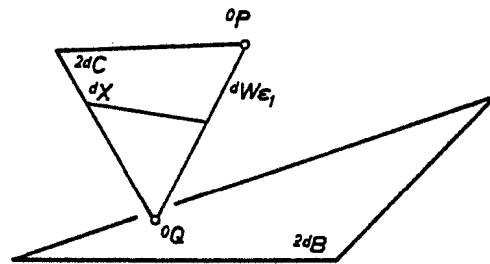
5.5 Beweis für $n = 2d+1$

5.5.1 Wegen $n = 2d+1$ erhalten wir beim Dualisieren von Aussagen der d -Geometrie wieder Aussagen der d -Geometrie.

Insbesondere gilt also dual zu 5.3.1:

$$\{^dX\}\gamma\psi = \{^dX\}\chi \quad \text{für alle } ^dX \in d[2^d C] \text{ mit } 2^d C \supset ^dW \vee ^oP.$$

Wir brauchen daher die Beziehung $\{^dX\}\gamma\psi = \{^dX\}\chi$ nur noch für solche Unterräume $^dX \in ^d\mathcal{U}$ nachzuweisen, die sowohl zu oP als auch $^dW \cap 2^d B$ windschief sind und (dual) sowohl mit $2^d B$ als auch mit $^dW \vee ^oP$ den ganzen Raum aufspannen.



5.5.2 Wir wählen eine Hyperebene $2^d C \supset ^dW_{\epsilon_1}$ beliebig aus. Die eindeutig bestimmte lineare Fortsetzung von $\chi^{-1}(\chi|_{d[2^d C]})$ sei $\psi_C: [d[2^d C]\chi] \rightarrow \mathcal{P}'$, sodaß ψ und ψ_C auf den Unterräumen $[d[^oP, 2^d C]\chi]$ und $[d[^oQ, 2^d C]\chi]$ übereinstimmen, wobei $^oQ \in ^dW \cap 2^d B$ beliebig gewählt werden darf. Nach Konstruktion ist $^dW_{\epsilon_1} \in \mathcal{D}(\chi)$; nach 1.3.2 stimmen also ψ und ψ_C auch im Verbindungsraum $[d[^oP, 2^d C]\chi] \vee [d[^oQ, 2^d C]\chi]$ überein. Für alle $^dX \in d[2^d C]$ ist $^dX \cap ^dW_{\epsilon_1}$ nicht leer. Wir können einen Punkt $^oQ \in ^dW \cap 2^d B$ stets so wählen, daß $^dX \cap (^oP \vee ^oQ) \neq \emptyset$ erfüllt ist. Dann gilt nach 2.2.7 $^dX \in (d[^oP, 2^d C] \vee d[^oQ, 2^d C])\chi \subset (d[^oP, 2^d C]\chi) \vee (d[^oQ, 2^d C]\chi) \subset [d[^oP, 2^d C]\chi] \vee [d[^oQ, 2^d C]\chi]$, womit $\{^dX\}\gamma\psi = \{^dX\}\chi$ für alle $^dX \in d[2^d C]$ nachgewiesen ist.

Ist andererseits für einen d -Raum dX der Durchschnitt $^dX \cap ^dW_{\epsilon_1} \neq \emptyset$, so existiert eine Hyperebene $2^d C \supset ^dX \vee ^dW_{\epsilon_1}$, sodaß $\{^dX\}\gamma\psi = \{^dX\}\chi$ erfüllt ist.

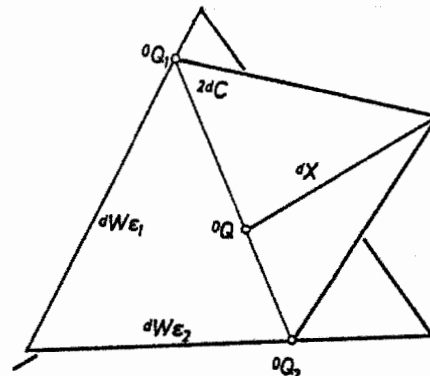
5.5.3 Dual zu 5.5.2 erhalten wir $\{^dX\}\gamma\psi = \{^dX\}\chi$ für alle dX mit $^dX \vee ^dW_{\epsilon_2} \neq \emptyset$, was jedoch wegen $n = 2d+1$ zu $^dX \cap ^dW_{\epsilon_2} \neq \emptyset$ äquivalent ist.

5.5.4 Der Durchschnitt ${}^dX \cap ({}^dW \vee {}^oP)$ ist für alle ${}^dX \in \tilde{U}$ nicht leer. Ist $\dim({}^dX \cap ({}^dW \vee {}^oP)) = 1$, so ist dX zu ${}^dW \varepsilon_1$ und ${}^dW \varepsilon_2$ nicht windschief, sodaß nach 5.5.2 und 5.5.3 gilt $\{{}^dX\} \chi \psi = \{{}^dX\} \chi$. Es verbleibt daher diese Eigenschaft nur noch für solche d -Räume dX mit ${}^dX \cap ({}^dW \vee {}^oP) =: {}^oQ$ und ${}^oQ \notin {}^dW \varepsilon_1 \cup {}^dW \varepsilon_2$ nachzuweisen.

Die Abbildung $\chi|_{d[{}^dW \vee {}^oP]}$ besitzt einen projektiven Teilraum von $\Pi(d[{}^dW \vee {}^oP])$ aus Ausnahmемenge; setzen wir ${}^oA := \cap ({}^dR | {}^dR \in A(\chi|_{d[{}^dW \vee {}^oP]}))$, so folgt aus ${}^dW \varepsilon_1 \notin A(\chi)$ die Ungleichung $q \geq 0$.

Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

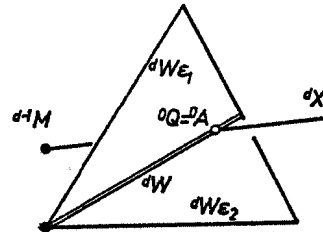
5.5.5 Es sei ${}^oQ \notin {}^oA$. Wir wählen dann einen Punkt ${}^oS_1 \in {}^dW \cap {}^{2d}B$ und einen Punkt ${}^oS_2 \in {}^oA$, mit ${}^oS_2 \neq {}^oQ$. Gemäß 1.3.6 existiert ein zu beiden Punkten windschiefer d -Raum dZ mit ${}^oQ \in {}^dZ \subset {}^dW \vee {}^oP$. Daher gilt ${}^dZ \notin A(\chi)$ und $\dim({}^dZ \cap {}^dW \cap {}^{2d}B) = d-2$, sodaß ${}^dW \varepsilon_1 \cap {}^dZ$ und ${}^dW \varepsilon_2 \cap {}^dZ$ zwei verschiedene $(d-1)$ -Räume sind. Wir können daher einen Punkt ${}^oQ_1 \in {}^dW \varepsilon_1 \cap {}^dZ$ wählen, der nicht in ${}^dW \varepsilon_2 \cap {}^dZ$ liegt. Dann schneidet die Gerade ${}^oQ \vee {}^oQ_1$ aus ${}^dW \varepsilon_2 \cap {}^dZ$ genau einen Punkt ${}^oQ_2 \neq {}^oQ_1$ aus.



Die Abbildungen $\gamma^{-1}(\chi|_{d[{}^oQ_i]})$ ($i=1,2$) besitzen nach Induktionsvoraussetzung lineare Fortsetzungen $\psi_{Q_i} : [d[{}^oQ_i]] \chi \rightarrow \mathbb{P}'$, und nach 5.5.2 sowie 5.5.3 gilt $\psi_{Q_i} = \psi|_{[d[{}^oQ_i]] \chi}$. Ferner ist ${}^{2d}C := {}^dX \vee {}^dZ$ eine Hyperebene; mit $\psi_C : [d[{}^{2d}C]] \chi \rightarrow \mathbb{P}'$ bezeichnen wir die eindeutig existierende Fortsetzung von $\gamma^{-1}(\psi|_{d[{}^{2d}C]})$. Die Abbildungen ψ_C und ψ leisten daher für die Punkte der Unterräume $[d[{}^oQ_i, {}^{2d}C]] \chi$ ($i=1,2$) dasselbe; da ferner ${}^dZ \in D(\chi)$ gilt, folgt wie in 5.5.2, daß ψ und ψ_C auch im Verbindungsraum $[d[{}^oQ_1, {}^{2d}C]] \chi \vee [d[{}^oQ_2, {}^{2d}C]] \chi$ übereinstimmen. Da ${}^dX \chi$ nach 2.2.7 diesem Verbindungsraum angehört, folgt $\{{}^dX\} \chi \psi = \{{}^dX\} \chi$.

5.5.6 Es sei ${}^0Q = {}^qA$, also $q = 0$. Dieser Fall tritt nur für $r = 0$ auf, denn für $r \geq 1$ ist das d -Büschel $({}^dW_{E_1})({}^dW_{E_2})$ nach Konstruktion ausnahmefrei. Es gilt dann ${}^dW \in A(\chi)$, also ${}^0A \subset {}^dW$.

Wir wählen einen zu ${}^dW \vee {}^0P$ komplementären Unterraum ${}^{d-1}M \subset {}^dX$ aus und legen durch 0Q eine beliebige Gerade ${}^1G \subset {}^dW \vee {}^0P$. Das ergibt ein d -Büschel $d[{}^{d-1}M, {}^{d-1}M \vee {}^1G] := {}^d\mathfrak{b}$, wobei nach 5.5.2, 5.5.3 und 5.5.5 die Abbildungen $\gamma\psi$ und χ auf ${}^d\mathfrak{b} := {}^d\mathfrak{b} \setminus \{{}^dX\}$ übereinstimmen. Wie in 5.4.3 folgt dann $\{{}^dX\}\gamma\psi = \{{}^dX\}\chi$.



$$\boxed{n=2d+1}$$

Damit haben wir den zweiten Fortsetzungssatz bewiesen. ◻

5.6 Anwendungen

5.6.1 Mit Hilfe des zweiten Fortsetzungssatzes können wir die Ausnahmemenge $A(\chi)$ einer linearen Abbildung $\chi: {}^d\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{p}'$ beschreiben: Es existiert ein $\left(\binom{n+1}{d+1} - \text{rg}\chi - 2\right)$ -dimensionaler Unterraum $\bar{\mathfrak{p}}_1$ von $\bar{\pi}$ mit $A(\chi) = (\bar{\mathfrak{p}}_1 \cap \text{Im}(\chi))\chi^{-1}$. Dabei ist $\bar{\mathfrak{p}}_1$ der Ausnahmeunterraum der linearen Fortsetzung $\psi: \bar{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathfrak{p}'$ der Abbildung $\chi^{-1}\chi$. Die χ -Faser eines d -Raumes ${}^dX \in D(\chi)$ erhalten wir analog als χ^{-1} -Bild des Schnittes der ψ -Faser von ${}^dX\chi$ mit $\text{Im}(\chi)$.

Gilt insbesondere $\text{rg}\chi = 0$, so ist $A(\chi)$ ein linearer Komplex von d -Räumen (vgl. [5, S.322]); wir sprechen kurz von einem linearen d -Komplex. Vermöge des zweiten Fortsetzungssatz können wir für lineare d -Komplexe eine einfache geometrische Kennzeichnung geben: Eine echte Teilmenge ${}^d\mathfrak{m}$ ist genau dann ein linearer d -Komplex, wenn ${}^d\mathfrak{m}$ mit keinem

d-Büschel leeren Durchschnitt besitzt und mit je zwei verschiedenen benachbarten d-Räumen ${}^dX, {}^dY$ auch das d-Büschel ${}^dX{}^dY$ enthält.

Wählen wir nämlich eine Menge ${}^d\mathfrak{m}$ mit den angegebenen Eigenschaften und einen d-Raum ${}^dX_0 \in {}^d\mathfrak{X}$, so wird durch $A(\chi) := {}^d\mathfrak{m}$ und ${}^dX \mapsto {}^dX\chi := {}^dX_0$ für alle ${}^dX \in A(\chi)$ eine lineare Abbildung $\chi: {}^d\mathfrak{X} \rightarrow \{{}^dX_0\}$ aus ${}^d\Pi$ auf den projektiven Teilraum $\Pi(\{{}^dX_0\})$ erklärt. Wegen $\text{rg}\chi = 0$ ergibt sich ${}^d\mathfrak{m}$ als linearer d-Komplex.

5.6.2 Im wichtigen Sonderfall $n = 3, d = 1$ gilt $\dim\bar{\Pi} = 5$.

Wählen wir $\bar{\Pi}$ insbesondere als arithmetischen projektiven Raum $\bar{\Pi}(\mathbb{K}^6, \mathbb{K})$, so ist $\text{Im}(\gamma)$ die durch die reguläre quadratische Form (vgl. [11, S.100]) $\Omega: (\mathbb{K}^6, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ mit

$$(p_{01}, \dots, p_{23})\Omega := p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12}$$

beschriebene reguläre quadratische Varietät. Durch Ω ist dann die nicht ausgeartete assoziierte Bilinearform

$$\Sigma: (\mathbb{K}^6, \mathbb{K})^2 \rightarrow \mathbb{K} \text{ mit}$$

$$(\eta, \eta')\Sigma := (\eta + \eta')\Omega - \eta\Omega - \eta'\Omega, \quad \eta, \eta' \in (\mathbb{K}^6, \mathbb{K})$$

mitbestimmt. Es gilt $(\eta, \eta)\Sigma = 2(\eta\Omega)$. Für $\text{Char}\mathbb{K} \neq 2$ wird auch $\frac{1}{2}\Sigma$ als assoziierte Bilinearform bezeichnet. Die Bilinearform Σ ist symmetrisch und für $\text{Char}\mathbb{K} = 2$ auch alternierend; Σ beschreibt daher eine projektive Nichtnullpolarität (Polar-system einer Quadrik) bzw. eine Nullpolarität, je nachdem $\text{Char}\mathbb{K} \neq 2$ oder $\text{Char}\mathbb{K} = 2$ gilt (vgl. [2, S.46]).

Zwei Punkte $\eta\mathbb{K}, \eta'\mathbb{K}$ des Grassmann-Raumes $(\text{Im}(\gamma), \sim)$ sind genau dann benachbart, wenn $(\eta u + \eta' v)\Omega = (\eta u + \eta' v)\Sigma = 0$ für alle $u, v \in \mathbb{K}$ gilt, also wenn $\eta\mathbb{K}$ und $\eta'\mathbb{K}$ konjugierte Punkte (vgl. [1, S.158]) sind.

Ist $\bar{\Pi}$ ein reeller dreidimensionaler projektiver Raum, so ist $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}(\mathbb{R}^6, \mathbb{R})$ und γ ist die KLEINSche Abbildung. Die Bildmenge $\text{Im}(\gamma)$ heißt bekanntlich auch PLÜCKERSche Quadrik (vgl. [20]). Untersuchen wir mit 5.6.1 die γ^{-1} -Bilder der Schnittvarietäten $\bar{p}_1 \cap \text{Im}(\gamma)$ für alle Unterräume \bar{p}_1 von $\bar{\Pi}$, so treten

nach [20] folgende Geradenmengen auf:

$\dim \bar{\varphi}_1$	$(\bar{\varphi}_1 \cap \text{Im}(\delta)) \delta^{-1} \subset {}^1\mathcal{U}(\pi)$
5	${}^1\mathcal{U}$
4	Gewinde Gebüsch
3	hyperbolisches Netz parabolisches Netz elliptisches Netz Vereinigungsmenge eines Geradenbündels und eines Geradenfeldes mit nichtleerem Durchschnitt
2	Regulus zwei verschränkte Geradenbüschel ein Geradenbüschel eine Gerade Geradenbündel Geradenfeld \emptyset
1	zwei Geraden eine Gerade Geradenbüschel \emptyset
0	eine Gerade \emptyset
-1	\emptyset

Es gibt also 21 wesentlich verschiedene lineare Abbildungen aus ${}^1\mathcal{U}(\pi)$. Dabei ist eine lineare Abbildung durch ihre Ausnahmemenge allein noch nicht festgelegt.

In der Literatur wurden bisher Beispiele linearer Abbildungen vom Rang 2 (vgl. [3],[4],[8],[9],[17],[18],[23]) und vom Rang 3 (vgl.[12]) untersucht. Die sieben verschiedenen Typen linearer Abbildungen vom Rang 2 werden insbesondere in [3] ausführlich besprochen.

ANHANG

Wir legen dieser Arbeit folgenden Abbildungsbegriff zugrunde:

Sind \mathfrak{M} und \mathfrak{N} Mengen und $\psi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ eine Abbildung aus der Urmenge \mathfrak{M} in die Zielmenge \mathfrak{N} , so bezeichnen wir die Definitionsmenge von ψ mit $D(\psi)$ und $A(\psi) := \mathfrak{M} \setminus D(\psi)$ sei die Ausnahmemenge von ψ .

Gilt $D(\psi) = \mathfrak{M}$, so heißt ψ global; eine globale, injektive Abbildung heißt Injektion, eine globale, bijektive Abbildung wird Bijektion genannt. Wir schreiben $\psi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ bzw. $\psi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ je nachdem ψ global ist oder nicht.

Für $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M}_1\psi := \{Y \in \mathfrak{N} \mid Y = X\psi \wedge X \in \mathfrak{M}_1\}$. Insbesondere $\mathfrak{M}_\psi := \text{Im}(\psi)$ ist die Bildmenge von ψ .

Ist $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}_1$ eine weitere Abbildung mit $A(\varphi) = A(\psi)$ und $X\varphi = X\psi$ für alle $X \in D(\varphi)$, so wollen wir φ und ψ im folgenden als gleich bezeichnen, also $\varphi = \psi$ schreiben. Es gilt dann $\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(\psi) \subset \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_1$. Gleiche Abbildungen können also verschiedene Zielmengen besitzen.

Ferner ist $\psi|_{\mathfrak{M}_1}: \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{N}$ die Einschränkung von ψ auf \mathfrak{M}_1 . Wir nennen eine Abbildung $\varrho: \mathfrak{M}_2 \rightarrow \mathfrak{N}_2$ eine Fortsetzung von ψ , falls $\varrho|_{\mathfrak{M}} = \psi$ gilt.

Die Abbildung ψ besitzt eine Umkehrabbildung $\psi^{-1}: \text{Im}(\psi) \rightarrow \mathfrak{M}$, wenn ψ injektiv ist. Im Sinne dieser Festsetzung ist ψ^{-1} stets eine globale Abbildung.

LITERATUR

- [1] BRAUNER, H.: Geometrie projektiver Räume I, Mannheim-Wien-Zürich, BI-Wissenschaftsverlag 1976.
- [2] BRAUNER, H.: Geometrie projektiver Räume II, Mannheim-Wien-Zürich, BI-Wissenschaftsverlag 1976.
- [3] BRAUNER, H.: Eine geometrische Kennzeichnung linearer Abbildungen, Mh.Math. 77 (1973), S.10-20.
- [4] BRAUNER, H.: Abbildungsmethoden der konstruktiven Geometrie, Ber.d.Math.-stat.Sektion im Forschungszentrum Graz, Nr.38 (1975).
- [5] BURAU, W.: Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie, Berlin, VEB Deutscher Verlag d. Wissenschaften, 1961.
- [6] CHOW, W.L.: On the geometry of algebraic homogenous spaces, Ann.of.Math 50 (1949), S.32-67.
- [7] DIEUDONNÉ J.A.: La Géométrie des Groupes Classiques, 3.Auflage, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd.5, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1971.
- [8] ECKHART, L.: Über die Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie, Sb.Akad.Wiss.Wien 132 (1923), S.177-192.
- [9] ECKHART, L.: Konstruktive Abbildungsverfahren, Wien, Springer 1926.
- [10] GROTEMEYER, K.P.: Topologie, Hochschultaschenbücher 836, Mannheim-Wien-Zürich, Bibliographisches Institut, 1969.
- [11] GRUENBERG, K.W. - WEIR, A.J.: Linear Geometry, Graduate Texts in Mathematics 49, 2nd Edition, New York-Heidelberg-Berlin, Springer 1977.
- [12] HOHENBERG, F.: Projektionen projektiver Räume, Mh. Math. 61 (1957), S.54-66

- [13] HUGHES, D.R. - PIPER, F.C.: Projective Planes, Graduate Texts in Mathematics 6, New York-Heidelberg-Berlin, Springer 1973.
- [14] KLINGENBERG, W.: Projektive Geometrien mit Homomorphismus, Math. Ann. 132 (1956), S.180-200.
- [15] KLINGENBERG, W.: Projektive Geometrie und lineare Algebra über verallgemeinerten Bewertungsringen. Proc. Coll. Utrecht, 1959: Algebraical and topological foundations of geometry, S.99-107, Oxford, 1962.
- [16] RADÓ, F.: Darstellung nicht-injektiver Kollineationen eines projektiven Raumes durch verallgemeinerte semilineare Abbildungen, Math. Z. 100 (1969), S. 153-170.
- [17] REHBOCK, F.: Die linearen Punkt-, Ebenen- und Strahlabbildungen der darstellenden Geometrie, Z. angew. Math. u. Mech. 6 (1926), S.379-400.
- [18] REHBOCK, F.: Projektive Aufgaben einer darstellenden Geometrie des Strahlenraumes, Z. angew. Math. u. Mech. 6 (1926), S.449-468.
- [19] REICHARDT, H.: Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung, Hochschulbücher für Mathematik Band 34, Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1957.
- [20] SAUER, R.: Projektive Liniengeometrie, Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Band 23, Berlin-Leipzig, W. de Gruyter u. Co., 1937.
- [21] SEGRE, B.: Lectures on Modern Geometry, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Monografie Matematiche 7, Roma, Edizione Cremonese, 1961.
- [22] TIMMERMANN, H.: Koordinatenfreie Kennzeichnung von Projektionen in projektiven Räumen, Mitt. Math. Ges. Hamburg, Band 10 (1973), S.88-102.
- [23] WUNDERLICH, W.: Eckhart-Rehbocksche Abbildung und Studysches Übertragungsprinzip, Publ. Math. Debrecen 7 (1960), S.94-107.