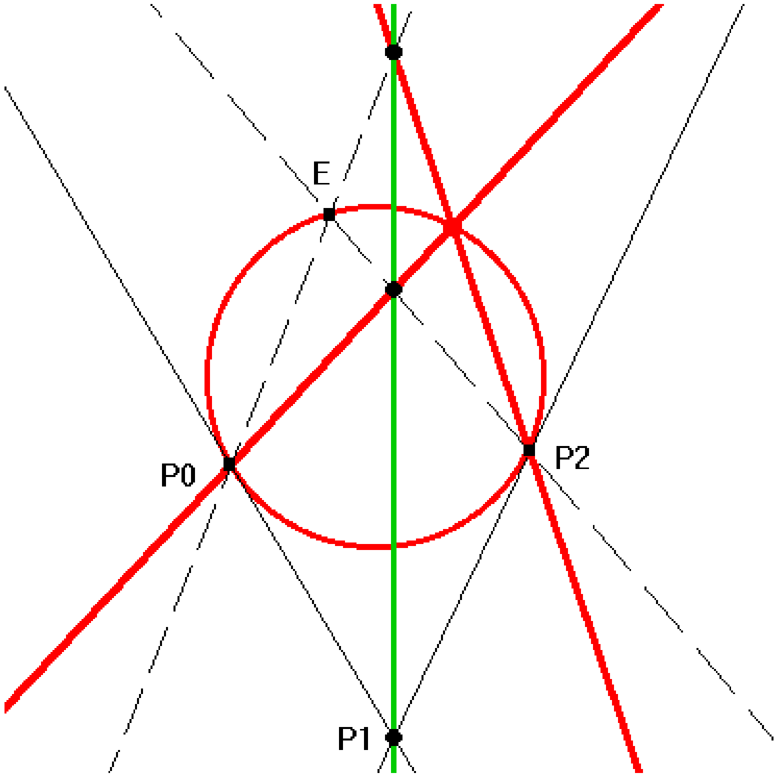
Im Anfang war der Kreis

Hans Havlicek

Institut für Geometrie, Technische Universität Wien

Ralph-Hardo Schulz zum 60. Geburtstag

Der Peripheriewinkelsatz



In einem Berliner Wartesaal

Man muss jederzeit an Stelle von

„Punkten, Geraden, Ebenen“,

„Tische, Stühle, Bierseidel“

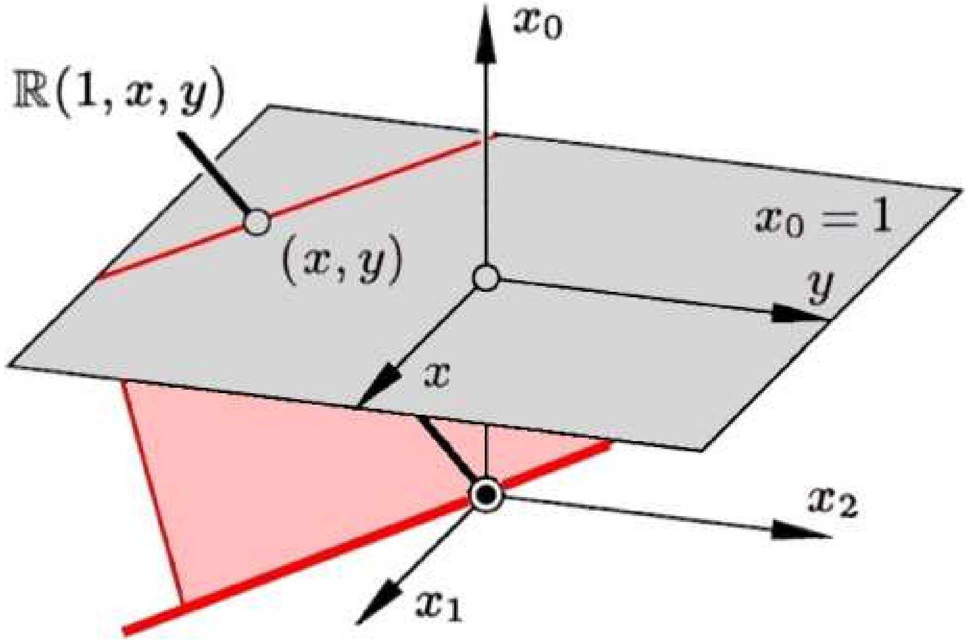
sagen können.

D. Hilbert (1862–1943)

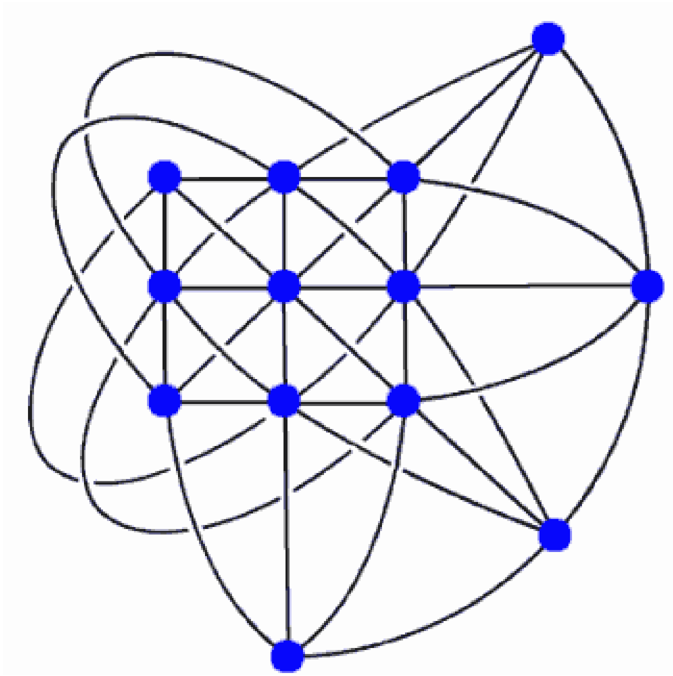
Beispiele projektiver Ebenen

Jeder 3-dimensionale Vektorraum V über einem (Schief-)körper F bestimmt eine projektive Ebene:

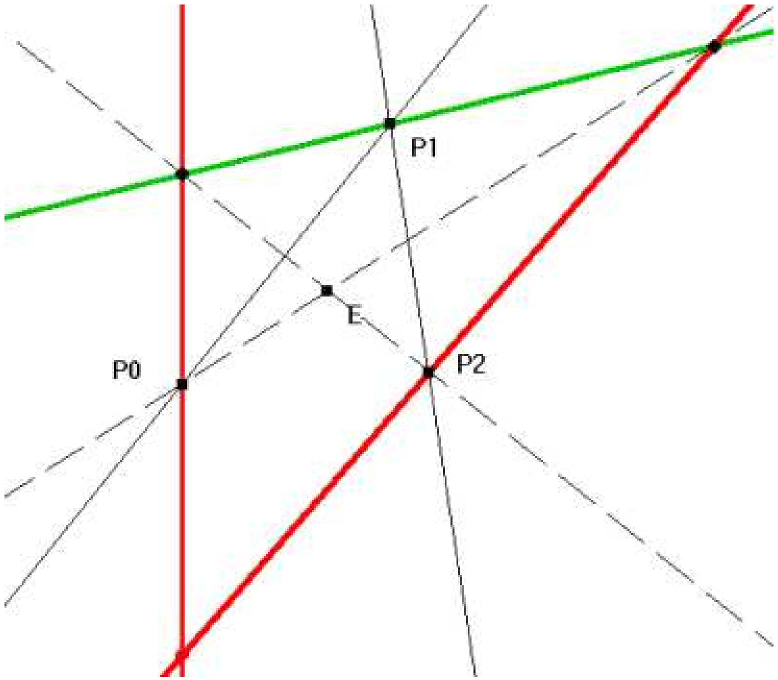
Die *Punkte* sind die eindimensionalen Unterräume von V.
Die *Geraden* sind die zweidimensionalen Unterräume von V.



Projektive Ebene über $\mathrm{GF}(3)$



Kegelschnittsdefinition nach Krüger



W. Krüger (1968), J. Steiner (1832).

Parametrisierung eines Kegelschnitts

Projektiv (alle Punkte werden erfaßt):

$$F(x_0, x_1, x_2) = F(1, t, t^2) \text{ mit } t \in F \cup \{\infty\}$$

Affin (mit Ferngerade $x_0 = 0$): *Parabel* (+ ein unendlichferner Punkt)

$$(x_1, x_2) = (t, t^2) \text{ mit } t \in F$$

Definition eines Ovals

Eine nichtleere Punktmenge $\mathcal{O}$ einer projektiven Ebene heißt ein *Oval*, falls gilt:

- Jede Gerade trifft $\mathcal{O}$ in höchstens zwei Punkten.
- In jedem Punkt $X \in \mathcal{O}$ existiert genau eine *Tangente*; das ist eine Gerade t_X mit $t_X \cap \mathcal{O} = \{X\}$.

Fragestellungen

1. Ist jeder Kegelschnitt ein Oval?

2. In welchen projektiven Ebenen ist jeder Kegelschnitt ein Oval?

Antworten

Satz. *In einer projektiven Ebene über einem echten Schiefkörper ist ein Kegelschnitt niemals ein Oval.*

B. Segre (1961), E. Berz (1962).

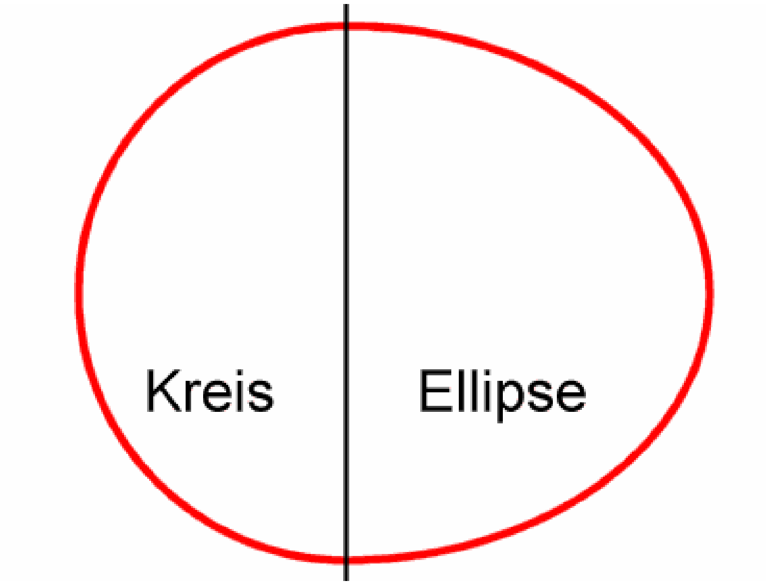
Satz. *In einer projektiven Ebene über einem kommutativen Körper ist jeder Kegelschnitt ein Oval.*

Fragestellungen

1. Ist jeder Kegelschnitt ein Oval?
2. In welchen projektiven Ebenen ist jeder Kegelschnitt ein Oval?
3. Ist jedes Oval ein Kegelschnitt?

Beispiel

In der reellen projektiven Ebene gibt es Ovale, die keine Kegelschnitte sind, z.B.:



Fragestellungen

1. Ist jeder Kegelschnitt ein Oval?
2. In welchen projektiven Ebenen ist jeder Kegelschnitt ein Oval?
3. Ist jedes Oval ein Kegelschnitt?
4. In welchen projektiven Ebenen ist jedes Oval ein Kegelschnitt?

Vermutung

Satz. *In einer projektiven Ebene über* $\mathrm{GF}(q)$*,* q *ungerade, ist jedes Oval ein Kegelschnitt.*

1949 vermutet von G. Järnefelt und P. Kustaanheimo.

14,1008d 48.0X

Järnefelt, G.; Kustaanheimo, Paul

An observation on finite geometries.

The reviewer finds this conjecture implausible.

Marshall Hall, Jr.

Satz von B. Segre

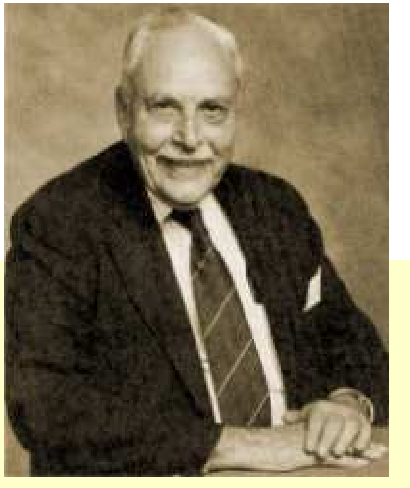
Satz. *In einer projektiven Ebene über* $\mathrm{GF}(q)$, *q ungerade, ist jedes Oval ein Kegelschnitt.*

B. Segre (1955).

Beweisidee: Geometrisch-kombinatorische Überlegungen sowie die Eigenschaft

$$\prod_{\substack{x \in \mathrm{GF}(q), \\ x \neq 0}} x = -1.$$

Noch ein Blick in „Mathematical Reviews“



17,72g 48.0X

Segre, Beniamino

Ovals in a finite projective plane.

[The fact that this conjecture seemed implausible to the reviewer seems to have been at least a partial incentive to the author to undertake this work. It would be very gratifying if further expressions of doubt were as fruitful.]

Marshall Hall, Jr.

Fragestellungen

1. Ist jeder Kegelschnitt ein Oval?

2. In welchen projektiven Ebenen ist jeder Kegelschnitt ein Oval?

3. Ist jedes Oval ein Kegelschnitt?

4. In welchen projektiven Ebenen ist jedes Oval ein Kegelschnitt?

Ovale in unendlichen Ebenen

Satz. *In jeder projektiven Ebene über einem unendlichen (Schief-)körper gibt es (massenhaft) Ovale, die keine Kegelschnitte sind.*

S. Mazurkiewicz (1914), A. Barlotti (1967), K. Strambach (1995).

Beweisidee: Transfinite Induktion.

Satz von Buchanan

Satz. *In der komplexen projektiven Ebene ist jedes topologisch abgeschlossene Oval $\mathcal{O}$ ein Kegelschnitt.*

T. Buchanan (1979).

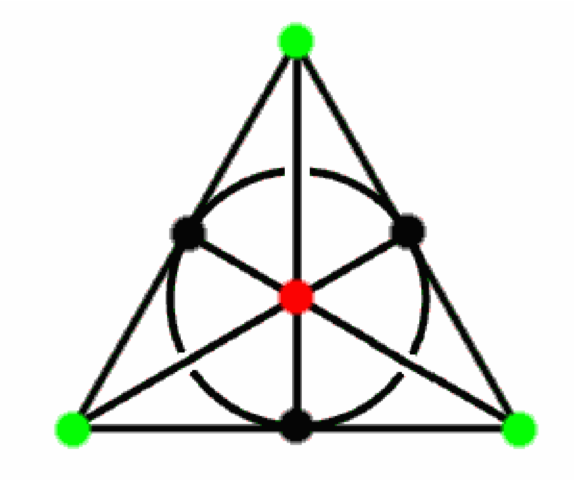
Beweisidee: $\mathcal{O}$ läßt sich (bis auf einen Punkt) als Graph schreiben, etwa

$$\mathcal{O} = \{\mathbb{C}(1, t, f(t)) \mid t \in \mathbb{C}\} \cup \{\mathbb{C}(0, 0, 1)\}.$$

Mit funktionentheoretischen Methoden folgt $f(t) = t^2$.

Beispiel

Ein Kegelschnitt in der projektiven Ebene über $\mathrm{GF}(2)$ (FANO-Ebene):



Grün: Punkte des Kegelschnitts. Rot: Knoten.
$\longrightarrow$ *Theorie der Ovale und Hyperovale*.

Lineare MDS-Codes

Jedes Oval bzw. jedes Hyperoval in einer projektiven Ebene über $\mathrm{GF}(q)$ liefert einen *linearen MDS-Code* über $\mathrm{GF}(q)$.

Allgemeiner läßt sich jeder Klasse äquivalenter linearer MDS-Codes über $\mathrm{GF}(q)$ – bis auf projektive Äquivalenz – genau ein *k-Bogen* in einem projektiven Raum über $\mathrm{GF}(q)$ zuordnen.

Beispiel für einen Bogen: *rationale Normkurve*

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_m) = F(1, t, t^2, \ldots, t^m) \text{ mit } t \in F \cup \{\infty\}.$$