

Über die Schmiegtangentenkongruenz der Cayley-Fläche

gemeinsam mit Rolf Riesinger (Wien)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

DIFFERENTIALGEOMETRIE UND
GEOMETRISCHE STRUKTUREN

HANS HAVLICEK

FORSCHUNGSGRUPPE

DIFFERENTIALGEOMETRIE UND
GEOMETRISCHE STRUKTUREN

INSTITUT FÜR DISKRETE MATHEMATIK UND GEOMETRIE

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

havlicek@geometrie.tuwien.ac.at

Faserungen

Sei $\mathbb{P}_3(K)$ der 3-dimensionale projektive Raum über einem Körper K . Es bezeichne \mathcal{L} seine Geradenmenge.

Definition. Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ eine Menge von Geraden, die einige der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Je zwei verschiedene Geraden von \mathcal{S} sind windschief.
2. Jeder Punkt inzidiert mit mindestens einer Geraden von \mathcal{S} .
3. Jede Ebene inzidiert mit mindestens einer Geraden von \mathcal{S} .

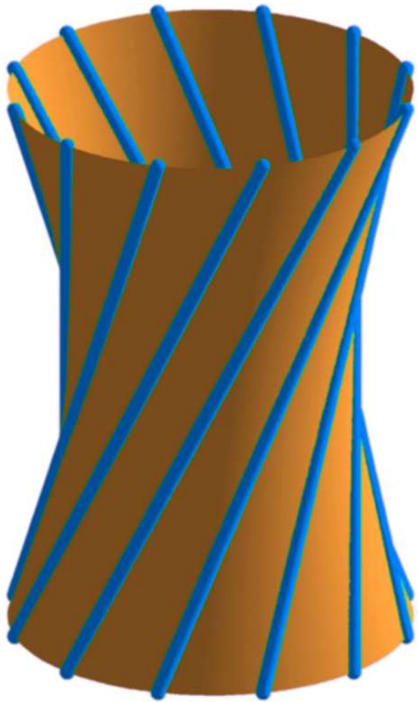
Eine *partielle Faserung* ist durch Bedingung 1 gekennzeichnet.

Eine *Faserung* ist durch die Bedingungen 1 und 2 gekennzeichnet.

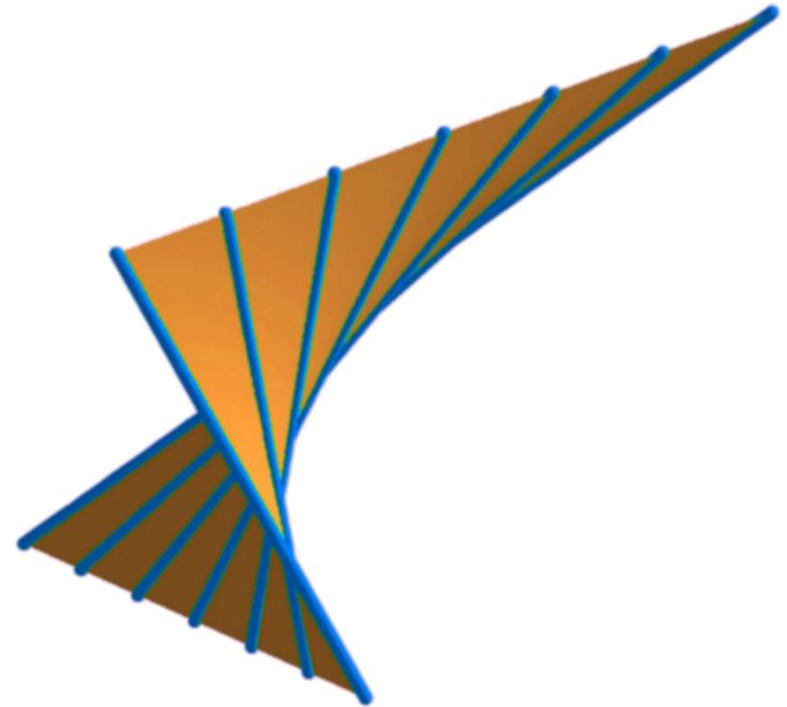
Eine *duale Faserung* ist durch die Bedingungen 1 und 3 gekennzeichnet.

Reguli

Auf jeder **hyperbolischen Quadrik** liegen zwei Familien von Erzeugenden. Jede bildet einen **Regulus**. Für einen Regulus \mathcal{R} gibt es, affin gesehen, folgende Möglichkeiten:



Hyperboloid:
 \mathcal{R} hat keine Ferngeraden.



Hyperbolisches Paraboloid:
 \mathcal{R} hat genau eine Ferngerade.

Zusätzliche Bedingungen

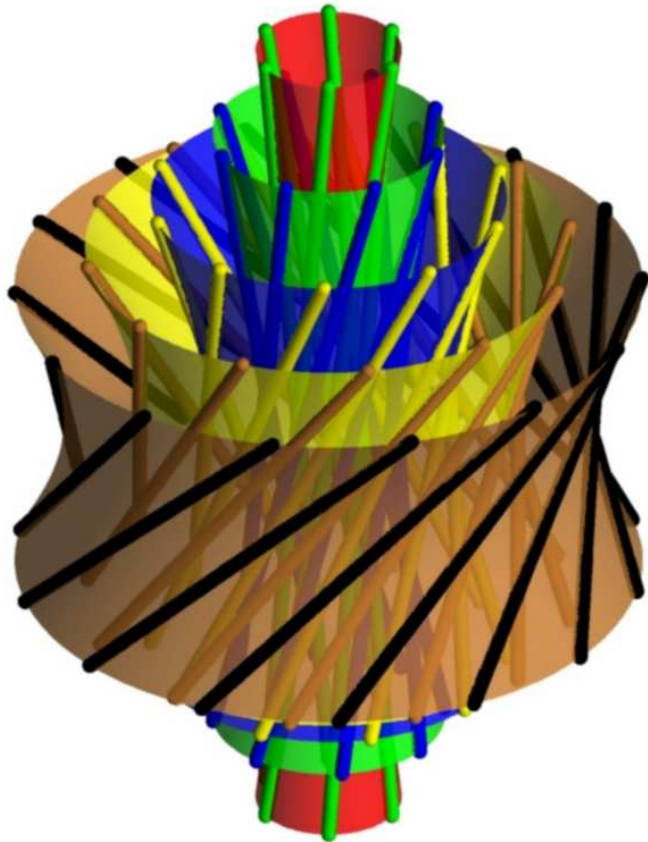
Wenn K unendlich ist, können mit **transfiniten Induktion** sehr bizarre Faserungen konstruiert werden. Daher lässt sich über Faserungen im Allgemeinen wenig sagen.

- Eine **reguläre Faserung** ist gegenüber **Reguli** abgeschlossen.
- Eine Faserung heißt **algebraisch**, falls ihr Bild auf der Klein-Quadrik eine **algebraische Varietät** ist.
- Eine Faserung von $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ oder $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ heißt **stetig**, falls die Abbildung

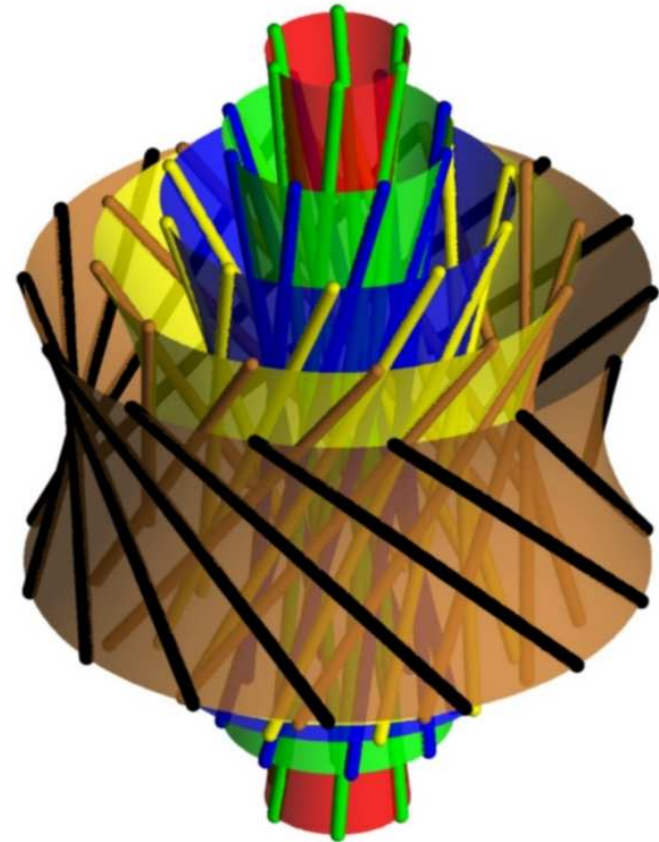
$$\mathbb{P}_3(K) \rightarrow \mathcal{L} : \text{Punkt} \mapsto \text{inzidente Gerade von } \mathcal{S}$$

stetig ist.

Beispiele

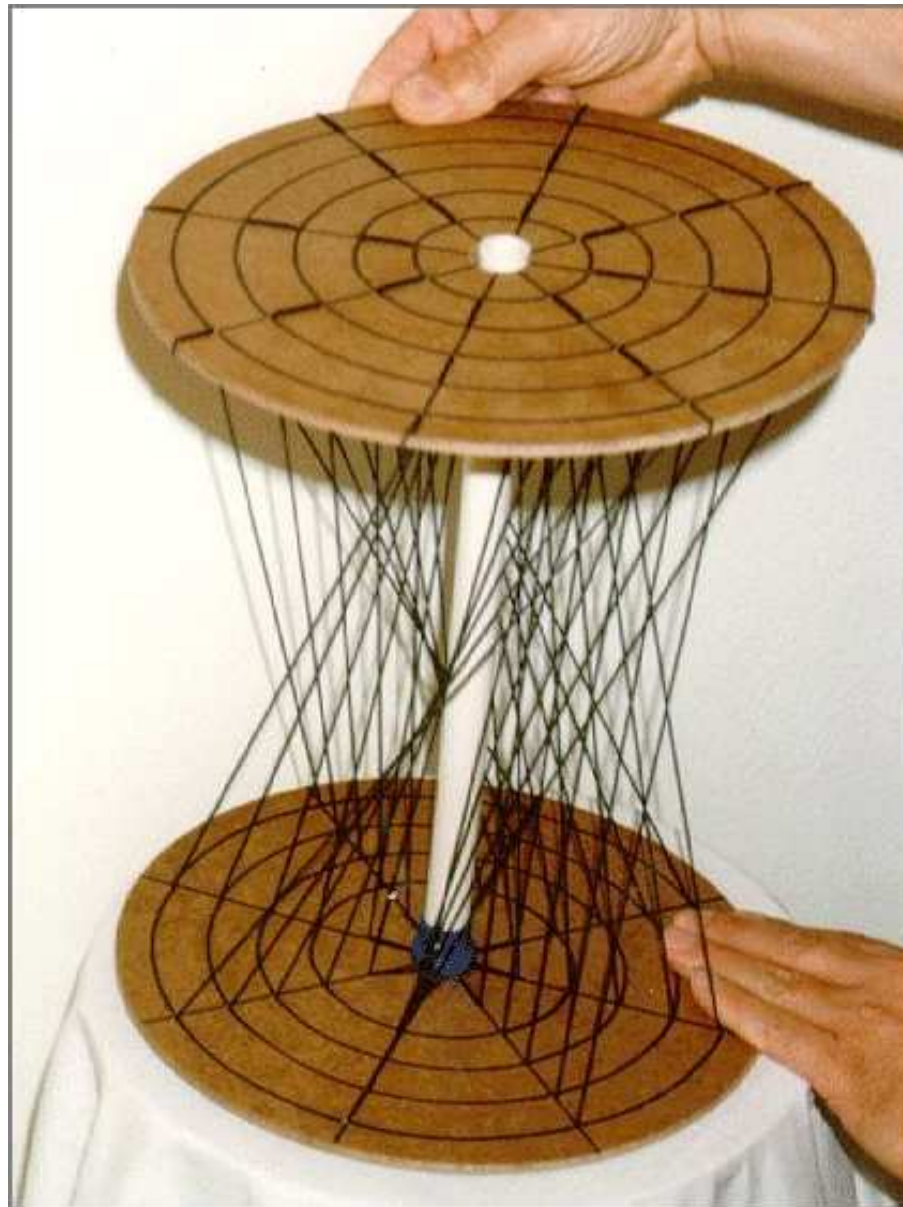


Eine reguläre Faserung
ist eine
elliptische lineare Geradenkongruenz.



Eine *subreguläre Faserung* entsteht,
indem „einige“ Reguli durch ihre
ergänzenden Reguli ersetzt werden.

Beispiele



Dieses Modell einer regulären Faserung wurde von R. Riesinger gebaut.

Reguläre Faserungen

- Im reellen projektiven Raum $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ gibt es reguläre Faserungen, weil es reelle Zahlen ohne Quadratwurzel in \mathbb{R} gibt.
- In $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ gibt es (bis auf Kollineationen) genau eine reguläre Faserung, weil \mathbb{C} die einzige quadratische Erweiterung von \mathbb{R} ist.
- Die reguläre Faserung von $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ ist algebraisch und daher auch stetig. Sie ist auch eine duale Faserung.
- In $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ gibt es keine regulären Faserungen, weil jede komplexe Zahl mindestens eine Quadratwurzel in \mathbb{C} besitzt. (Eine hyperbolische Quadrik in $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ hat keine Passanten.)

Anwendungen

Anwendungen von Faserungen:

- **Grundlagen der Geometrie.**

Konstruktion von Translationsebenen. Dabei wird eine Faserung in der Fernhyperebene eines 4-dimensionalen affinen Raumes verwendet ...

J. André (1956), R. H. Bruck und R. C. Bose (1963), ...

- **Parallelismen.**

Verallgemeinerungen des Clifford-Parallelismus.

W. K. Clifford (1873), ...

- **Darstellende Geometrie, Computer Vision.**

Nicht-lineare Abbildungen auf eine Ebene. Parallelprojektion im elliptischen 3-Raum. Non-central cameras, ...

L. Tuschel (1911), ...

Cayley-Fläche

Die *kubische Regelfläche von Cayley*, im Folgenden kurz *Cayley-Fläche* genannt, ist (bis auf Kollineationen) die Punktmenge

$$F := \mathcal{V}(f(\mathbf{X})) := \{K(p_0, p_1, p_2, p_3)^T \in \mathbb{P}_3(K) \mid f(p_0, p_1, p_2, p_3) = 0\},$$

wobei

$$f(\mathbf{X}) := X_0X_1X_2 - X_1^3 - X_0^2X_3 \in K[\mathbf{X}] = K[X_0, X_1, X_2, X_3].$$

Wir fassen im Folgenden $\omega := \mathcal{V}(X_0)$ als *Fernebene* auf. Der affine Teil der Cayley-Fläche hat daher die Parameterdarstellung

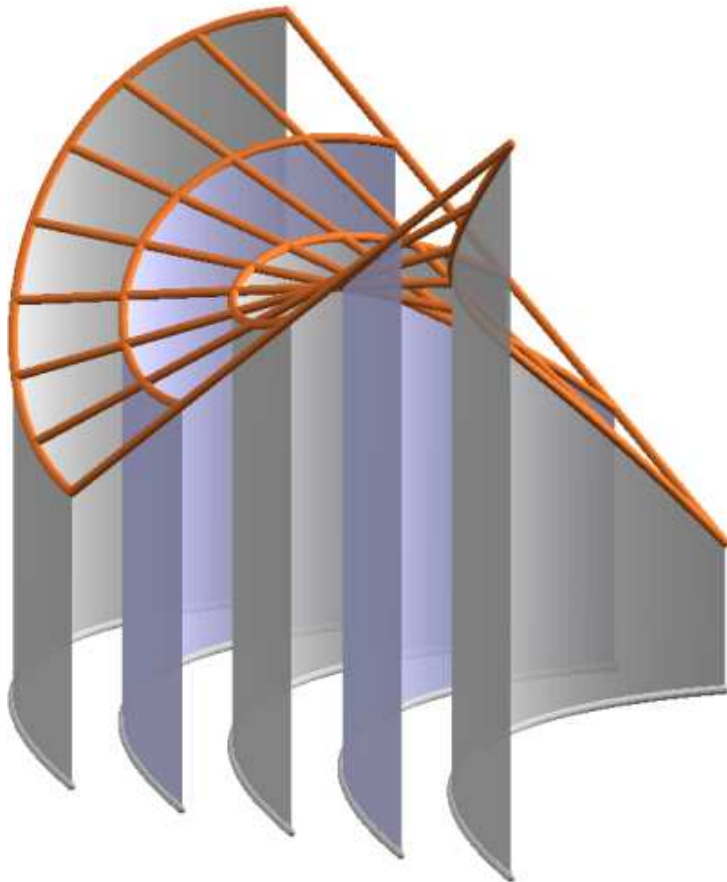
$$K^2 \rightarrow \mathbb{P}_3(K) : (u_1, u_2) \mapsto K(1, u_1, u_2, u_1u_2 - u_1^3)^T =: P(u_1, u_2).$$

Der Schnitt von F mit ω ist die Gerade

$$\mathcal{V}(X_0, X_1) =: g_\infty.$$

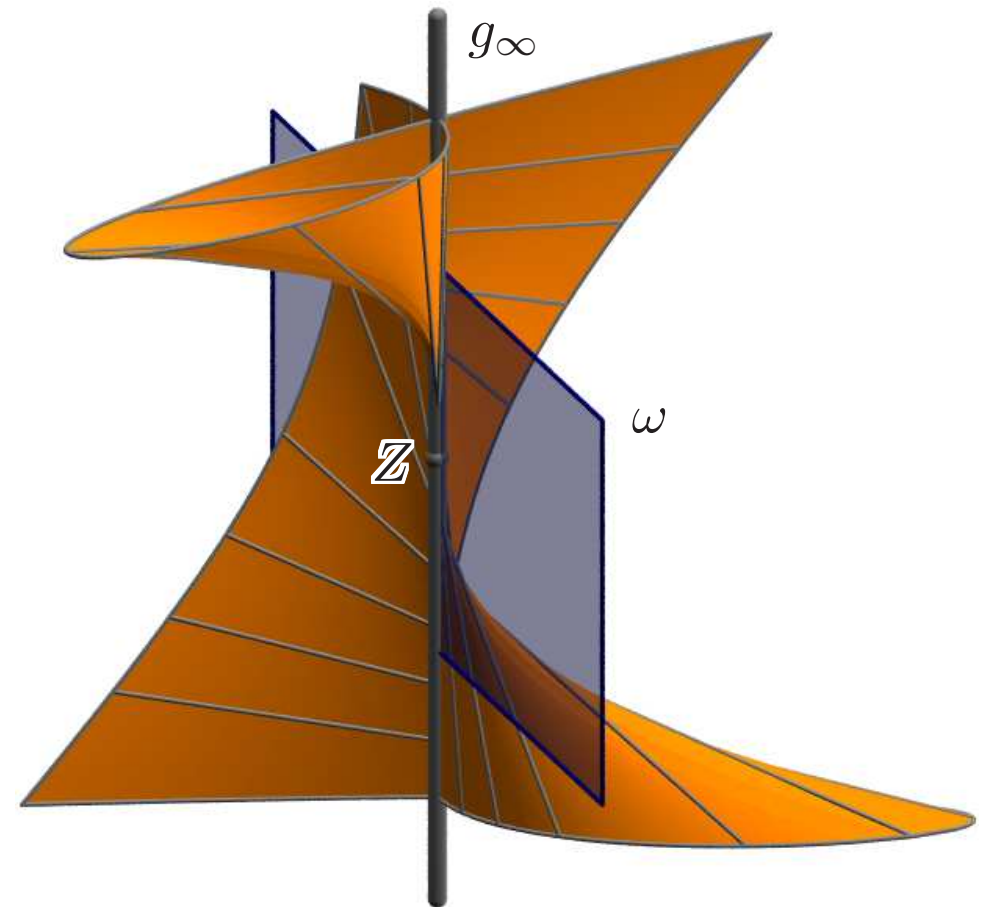
Bilder

Wir beschränken uns hier auf den Fall $K = \mathbb{R}$.



Affines Bild.

Alle Punkte von $F \setminus \omega$ sind **regulär**.



Schnitt mit der Fernebene.

g_∞ hat nur **Doppelpunkte**.

$Z := \mathbb{R}(0, 0, 0, 1)^T$ ist ein **Zwickpunkt**.

Die Kollineationsgruppe

- Die Menge aller Matrizen

$$M_{a,b,c} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 \\ b & 3ac & c^2 & 0 \\ ab - a^3 & bc & ac^2 & c^3 \end{pmatrix},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ist bezüglich der Multiplikation eine Gruppe G .

- Jede Matrix aus G läßt die kubische Form $f(\mathbf{X}) = X_0X_1X_2 - X_1^3 - X_0^2X_3$ bis auf den Faktor c^3 invariant.
- Die Gruppe G bestimmt alle automorphen Kollineationen von F .
- Die Punktmenge F zerfällt unter der Wirkung der Gruppe G in drei Bahnen: $F \setminus \omega, g_\infty \setminus \{Z\}$ und $\{Z\}$.

Literatur



M. Chasles



A. Cayley

Der Name **Cayley-Fläche** ist nicht vollständig zutreffend, da **M. Chasles** seine Entdeckung dieser Fläche im Jahr 1861 publizierte, also drei Jahre vor A. Cayley.

Es gibt eine breit gestreute Literatur zur Cayley-Fläche:

H. Brauner (1964, 1966, 1967, 1967),
J. Gmainer und H. H. (2005),
M. Husty (1984),
R. Koch (1968),
H. Neudorfer (1925),
M. Oehler (1969),
A. Wiman (1936),
H. Wresnik (1990),
W. Wunderlich (1935),
und andere.

Schmiegtangenten

Trifft eine Gerade t die Fläche F in einem einfachen Punkt P mit einer Vielfachheit ≥ 3 , so wird sie eine **Schmiegtangente** in P genannt. Jede solche Schmiegtangente ist entweder eine Erzeugende oder sie trifft F nur in P . Im zweiten Fall nennen wir sie eine **echte Schmiegtangente** von F .

Lemma. *In jedem Punkt $P(u_1, u_2) \in F \setminus g_\infty$ gibt es genau eine echte Schmiegtangente; diese verbindet $P(u_1, u_2)$ mit dem Punkt $\mathbb{R}(0, 1, 3u_1, u_2)^T$.*

Beweis. Die Tangentialebene von F in $P(0, 0)$ ist $\mathcal{V}(X_3)$; diese Ebene schneidet F entlang der Geraden $\mathcal{V}(X_1, X_3)$ und der Parabel

$$\mathcal{V}(X_1(X_0X_2 - X_1^2), X_3). \quad (1)$$

Die Tangente t dieser Parabel in $P(0, 0)$ ist die einzige echte Schmiegtangente in $P(0, 0)$. Der Fernpunkt von t ist $K(0, 1, 0, 0)^T$. Lassen wir die Matrix $M_{u_1, u_2, 1} \in G$ wirken, so folgt die Behauptung für jeden Punkt $P(u_1, u_2) \in F \setminus g_\infty$. \square

Hauptergebnis

Satz. Die Menge $\mathcal{O} := \{t \in \mathcal{L} \mid t \text{ ist echte Schmiegtangente von } F\} \cup \{g_\infty\}$ ist eine Faserung.

Beweis. (a) Alle echten Schmiegtangenten sind zu g_∞ windschief. Die Schmiegtangenten in $P(0,0) \neq P(u_1, u_2)$ sind genau dann windschief, falls

$$\Delta(u_1, u_2) := \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & u_1 & 1 \\ 0 & 0 & u_2 & 3u_1 \\ 0 & 0 & u_1u_2 - u_1^3 & u_2 \end{pmatrix} = u_2^2 - 3u_1^2u_2 + 3u_1^4 \neq 0.$$

Für $u_1 = 0$ gilt $u_2 \neq 0$, was $\Delta(u_1, u_2) \neq 0$ ergibt.

Für $u_1 \neq 0$ substituieren wir $u_2 = (2 + y)u_1^2$ mit $y \in \mathbb{R}$ und erhalten die äquivalente Bedingung $u_1^4(y^2 + y + 1) \neq 0$. Das Polynom

$$X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$$

hat aber keine reellen Nullstellen, sodass $\Delta(u_1, u_2) \neq 0$.

Hauptergebnis

Satz. Die Menge $\mathcal{O} := \{t \in \mathcal{L} \mid t \text{ ist echte Schmiegtangente von } F\} \cup \{g_\infty\}$ ist eine Faserung.

Beweis. (a) ... \mathcal{O} ist partielle Faserung!

(b) Jeder Fernpunkt inzidiert mit einer Geraden von \mathcal{O} .

Ein Punkt $K(1, p_1, p_2, p_3)$ liegt genau dann auf einer Geraden von \mathcal{O} , falls es ein Paar $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ und ein $s \in \mathbb{R}$ so gibt, dass

$$(1, p_1, p_2, p_3)^T = (1, u_1, u_2, u_1u_2 - u_1^3)^T + s(0, 1, 3u_1, u_2)^T.$$

Wir erhalten also folgendes Gleichungssystem in den Unbekannten u_1, u_2, s :

$$u_1 = p_1 - s, \quad u_2 = p_2 - 3s(p_1 - s), \quad s^3 = p_3 - (p_1p_2 - p_1^3).$$

Dieses System ist lösbar, weil $p_3 - (p_1p_2 - p_1^3)$ eine Kubikwurzel in \mathbb{R} besitzt. \square .

Bemerkungen

Die Geradenmenge \mathcal{O} hat folgende Eigenschaften.

- \mathcal{O} ist eine **partielle Faserung** von $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, da \mathbb{R} keine dritte Einheitswurzel ungleich 1 besitzt bzw. da jedes Element von \mathbb{R} höchstens eine Kubikwurzel in \mathbb{R} besitzt.
- \mathcal{O} ist eine **Überdeckung** von $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, weil jedes Element von \mathbb{R} mindestens eine Kubikwurzel in \mathbb{R} besitzt.
- \mathcal{O} ist auch eine **duale Faserung**, weil es eine Korrelation gibt, die \mathcal{O} (als Menge) invariant lässt.

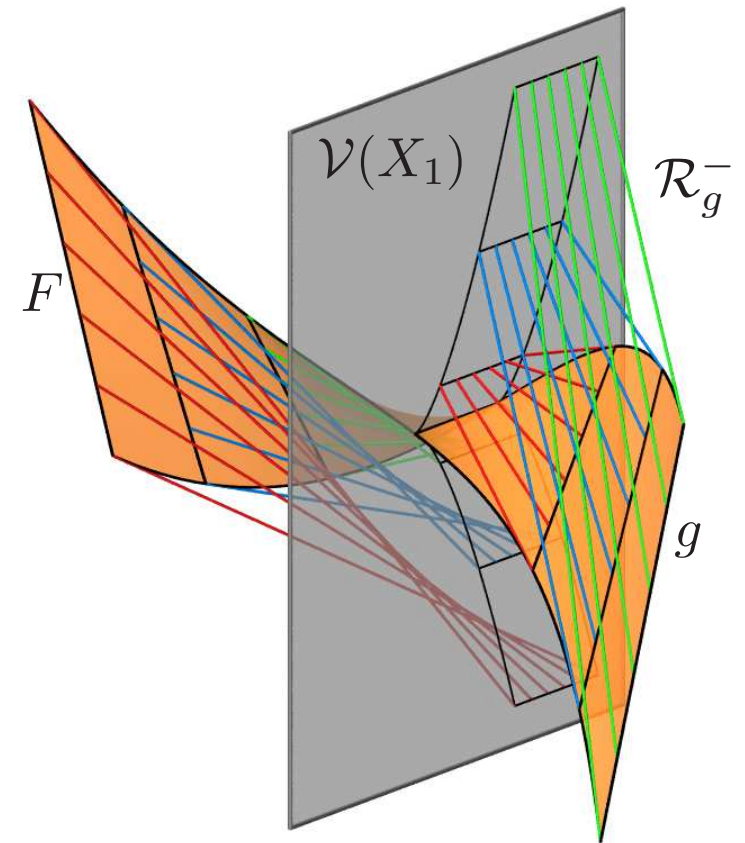
Diese Eigenschaften gelten, mutatis mutandis, über jedem Grundkörper K mit Charakteristik $\text{Char } K \neq 3$.

Daher sind etwa die Schmiegtangenten der Cayley-Fläche in $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ nicht paarweise windschief, sie bilden aber eine Überdeckung.

Überdeckung von \mathcal{O} mit Reguli

Die folgenden Behauptungen lassen sich allesamt leicht nachrechnen:

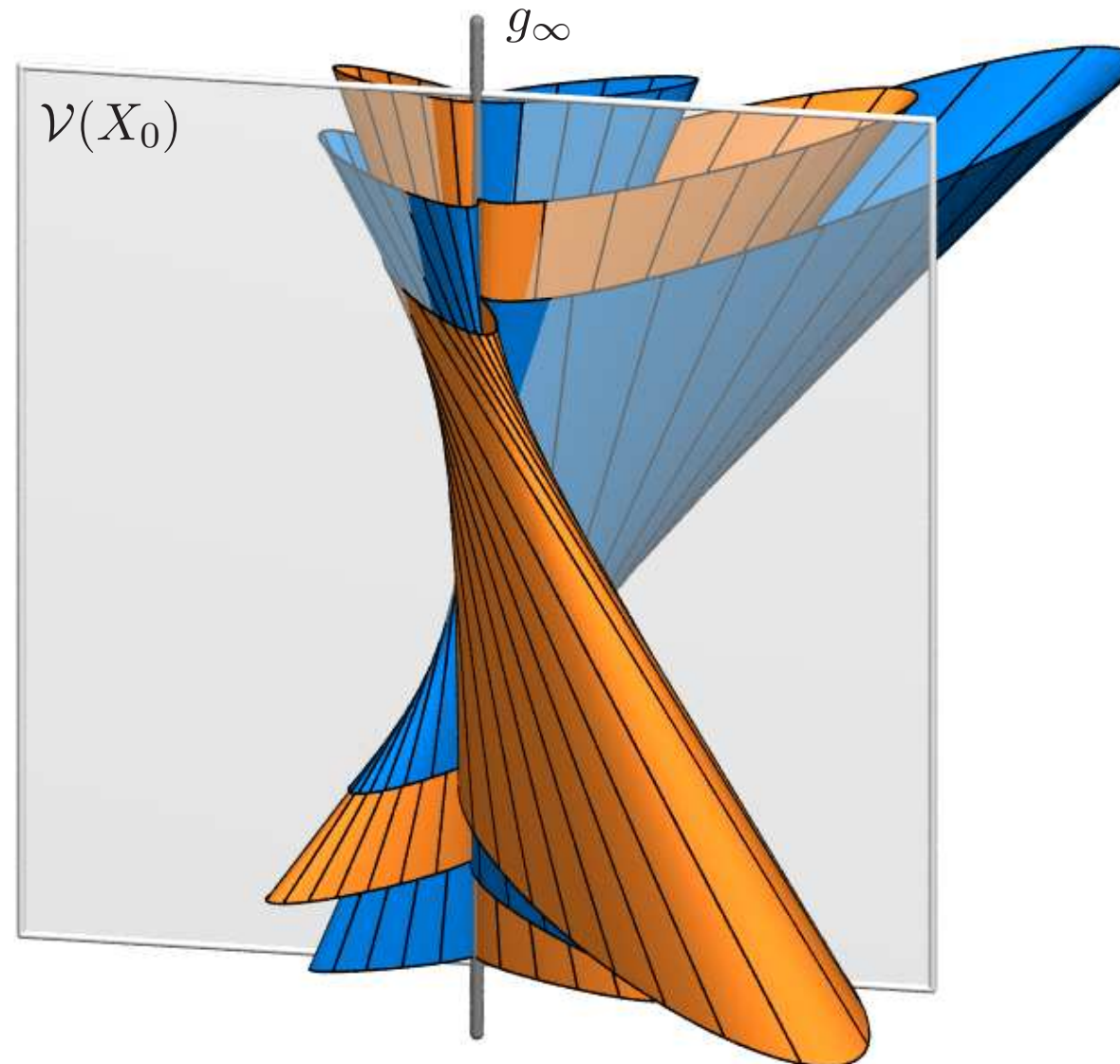
- Alle Schmiegtangente in den Punkten einer Erzeugenden $g \neq g_\infty$ bilden gemeinsam g_∞ einen **Regulus** \mathcal{R}_g^- . Affin gesehen liegt dieser auf einem hyperbolischen Paraboloid \mathcal{H}_g .
- Das hyperbolische Paraboloid \mathcal{H}_g ist die **Lie-Quadrik** von F entlang g .
- Die zu Erzeugenden $g, g' \neq g_\infty$ gehörigen Reguli \mathcal{R}_g^- und $\mathcal{R}_{g'}^-$ haben nur die Gerade g_∞ gemeinsam.
- Die zu Erzeugenden $g, g' \neq g_\infty$ gehörigen Lie-Quadriken \mathcal{H}_g und $\mathcal{H}_{g'}$ haben in allen Punkten von g_∞ übereinstimmende Tangentialebenen.



M. Walker (1976) verwendete die Reguli \mathcal{R}_g^- und ihre **ergänzenden Reguli** \mathcal{R}_g^+ um die Faserung \mathcal{O} über gewissen endlichen Körpern zu konstruieren.

Überdeckung von \mathcal{O} mit Reguli

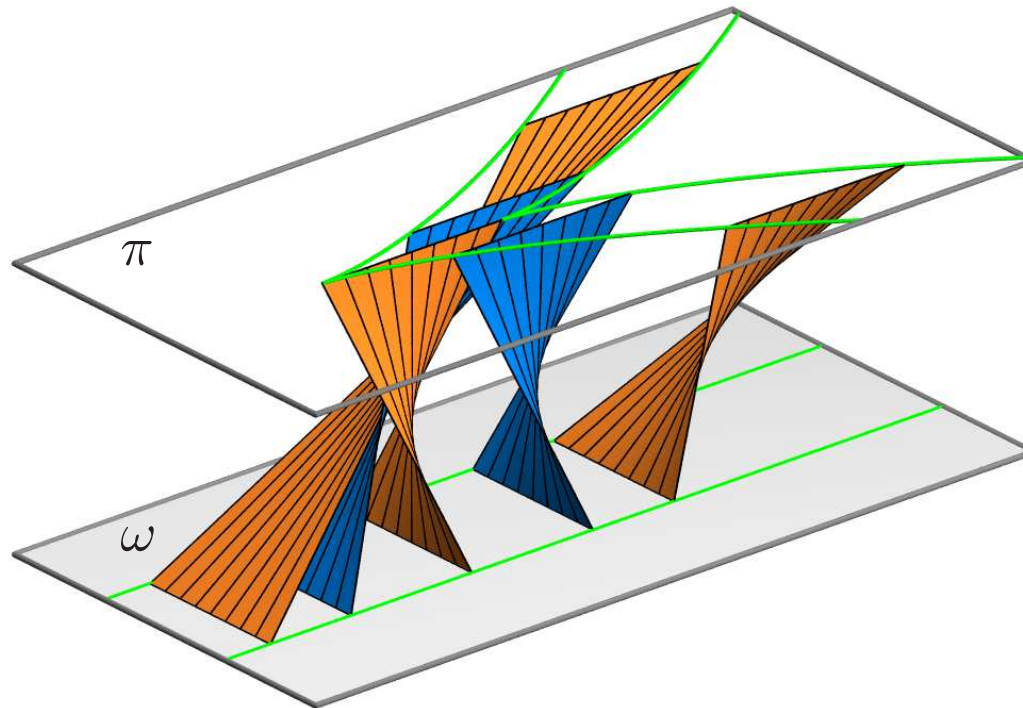
Hier sehen wir nochmals dieselbe Situation, aber mit $\mathcal{V}(X_3)$ im Unendlichen:



Die Konstruktion von Betten

Wir wählen die Ebene $\pi = \mathcal{V}(X_1)$ und die Fernebene $\omega = \mathcal{V}(X_0)$ aus. Die Geraden von \mathcal{O} ungleich g_∞ definieren (über ihre Schnittpunkte) eine Bijektion

$$\tau : \omega \setminus g_\infty \rightarrow \pi \setminus g_\infty.$$



Umgekehrt kann $\mathcal{O} \setminus g_\infty$ durch Verbinden von unter τ zugeordneten Punkten erzeugt werden.

D. Betten (1973) verwendete einen dazu dualen Ansatz zur Konstruktion von \mathcal{O} .

Schlussbemerkungen

- Die *Betten-Walker Faserung* \mathcal{O} erscheint in der Literatur unter verschiedenen Namen.
- Die Betten-Walker Faserung in $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ ist *stetig* (D. Betten).
- Die *Vereinigung von \mathcal{O} mit dem Geradenbüschel $\mathcal{L}(Z, \omega)$* ist die kleinste algebraische Menge, die \mathcal{O} enthält.

Daher ist die Betten-Walker Faserung in $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ **keine algebraische Faserung**, aber sie hat „fast“ diese Eigenschaft.

- Es sind nur wenige algebraische Faserungen von $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ bekannt. Nicht reguläre Beispiele stammen von R. Riesinger.
- H. H. und R. Riesinger, The Betten-Walker Spread and Cayley's ruled cubic surface, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, im Druck.