Hans Havlicek: Altes und Neues aus der Liniengeometrie

Die Menge der Geraden eines dreidimensionalen projektiven Raumes (über einem beliebigen nicht notwendig kommutativen Körper) trägt die Struktur eines Graßmann-Raumes; wir sprechen hier kurz vom Linienraum. Es wird eine Reihe von älteren und neueren Ergebnissen überblicksartig vorgestellt, wobei auch auf allgemeinere Graßmann-Räume sowie auf Fragestellungen im Rahmen der affinen und euklidischen Geometrie eingegangen wird. Es sind folgende Themengruppen vorgesehen: Das Übertragungsprinzip der (reellen) Liniengeometrie von Felix Klein, Grundlagen der Liniengeometrie, strukturerhaltende Abbildungen des Linienraumes, Existenz von (partiellen) Einbettungen des Linienraumes in einen projektiven oder affinen Raum, lineare Geradenmannigfaltigkeiten.

Das KLEINsche Übertragungsprinzip

Alle Geraden	(+++---)	(KLEIN-Quadrik)
Schnitte mit Unterräumen:		
Gewinde	(+++--)	(LIE-Quadrik)
Gebüsch	(++--0)	
hyperbololisches Netz	(++--)	(MINKOWSKI-Geometrie)
elliptisches Netz	(+++-)	(RIEMANN-Sphäre, MÖBIUS-G.)
parabolisches Netz	(++-0)	(BLASCHKE-Kegel, LAGUERRE-G.)
Bündel $\cup$ Feld	(+-00)	
Regulus	(++-)	
ø	(+++)	
verschränkte Büschel	(+-0)	
eine Gerade	(++0)	
Geradenbüschel	(+00)	
Geradenbündel	(000)	
Geradenfeld	(000)	
Zwei windschiefe Geraden	(+-)	
ø	(++)	
Eine Gerade	(+0)	
Geradenbüschel	(00)	
Eine Gerade	(0)	
ø	(+)	

Gilt "weitgehend analog" bei beliebigem kommutativem Grundkörper.

Linienraum

$\mathcal{L}$ ... Menge der Geraden eines projektiven Raumes $\mathcal{P}$, $\dim\mathcal{P} = 3$.

$\mathcal{B}$ ... Menge aller Geradenbüschel.

$\sim$ ... Treffrelation: $a \sim b \;:\Leftrightarrow\; a \cap b \neq \emptyset$.

Verallgemeinerung: GRASSMANN-Raum.

- Standpunkt 1:
  $(\mathcal{L},\sim)$ ist Beispiel eines PLÜCKER-Raumes (W. BENZ 1992).

- Standpunkt 2:
  $(\mathcal{L},\mathcal{B})$ ist ein partieller Inzidenzraum.
  Axiomatischer Zugang.
  (A. BICHARA, P. BIONDI, F. MAZZOCCA, P.M. LO RE, N. MELONE, D. OLANDA, G. TALLINI, C. ZANELLA; 1981-1990).

Punktmodelle

$\mathcal{P}'$ ... projektiver Raum.

- Einbettung:

  Abbildung $\iota : \mathcal{L} \to \mathcal{P}'$ mit $\begin{cases} \iota \text{ ist injektiv,} \\ \\ \text{Büschel} \xrightarrow{\iota} \text{auf (!) Geraden.} \end{cases}$

- Falls eine Einbettung existiert, so gilt in $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$ je der Satz des PAPPOS (H.H. 1981).
  Verallgemeinerung gilt.

- Je zwei Einbettungen sind kollinear-äquivalent.
  Verallgemeinerung gilt nicht (H. G. WELLS jr. 1983, C. ZANELLA 1993, H.H. 1981).

Transformationen des projektiven Linienraumes

- Automorphismus:

  Abbildung $\beta : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ mit $\begin{cases} \beta \text{ ist bijektiv}, \\ \sim \text{ ist invariant unter } \beta, \\ \sim \text{ ist invariant unter } \beta^{-1}. \end{cases}$

- Kollineationen und (falls existent) Dualitäten von $\mathcal{P}$ induzieren genau die Automorphismen des Linienraumes (W.-L. CHOW 1949).
  Verallgemeinerung gilt.

- Erfüllt β nur die ersten beiden Bedingungen, so liegt ein Automorphismus vor (H. BRAUNER 1988).
  Verallgemeinerung nur teilweise bekannt.
- Korrollar: Ist $\beta : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ eine Bijektion, die windschiefe Geraden stets in windschiefe Geraden überführt, so ist β ein Automorphismus.

- Ist $\beta : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ surjektiv und "dreikanttreu", so ist β ein Automorphismus (H. BRAUNER 1988).
  Verallgemeinerung nur teilweise bekannt.

Querverbindung: Kennzeichnung der automorphen Kollineationen von Quadriken (Kugelverwandtschaften).

Affine Liniengeometrie

- 1. Standpunkt: Affiner Linienraum.
  $\mathcal{P}$ längs einer Ebene aufschneiden; affine Geradenmenge $\mathcal{L}_{\mathrm{aff}}$.

  - Axiomatik (vgl. oben).

  - Automorphismen sind genau die durch Affinitäten induzierten Abbildungen auf $\mathcal{L}_{\mathrm{aff}}$. ($\mathbb{R}^n$: W. BENZ).
    Verallgemeinerung nur teilweise bekannt.

- 2. Standpunkt: Affiner Raum der (verallgemeinerten) Reguli.
  Alle zu einer festen Geraden $c \in \mathcal{L}$ windschiefen Geraden bilden einen 4-dimensionalen affinen Raum (R. METZ 1981, A. HERZER 1984, H.H. 1987).

  - Die affine Struktur ist genau dann eindeutig durch c alleine bestimmt, falls in $\mathcal{P}$ der Satz von Pappos gilt (H.H. 1987).

  - Übertragung: Kleinsche Quadrik längs einer Tangentialhyperebene aufschneiden und dann stereographisch projizieren.

  Verallgemeinerung gilt für alle obigen Ergebnisse.

Querverbindungen: Projektive Matrizengeometrie, Geometrie der Algebren, Geometrie der Körpererweiterungen.

Lineare Linienmannigfaltigkeiten

- Solche Geradenmengen, die in e i n e r affinen Karte (4-Raum) als Unterräume erscheinen.

- Analoge Liste zum KLEINschen Übertragungsprinzip, lineare Komplexe, lineare Kongruenzen, ... (H.H. 1988, 1991).
  Im Schiefkörperfall treten viel mehr "Typen" auf als bei kommutativem Grundkörper.

Querverbindungen: Geometrie der Körpererweiterungen, Faserungen und Translationsebenen.

Euklidische Liniengeometrie

$\mathcal{P}$ sei ein projektiv abgeschlossener euklidischer Raum (über $\mathbb{R}$).

- Übertragung der euklidischen Struktur in den 5-dimensionalen Trägerraum der KLEINschen Quadrik (W.-D. KLIX 1970, G. WEISS 1978-1982).
  - Ähnlichkeiten entsprechen genau den Kollineationen, welche die KLEINsche Quadrik und einen nullteiligen Kegel (mit 2-dimensionaler Spitze) als Ganzes fixieren (G. WEISS 1978).
  - gleichsinnige Kongruenzen sind dadurch gekennzeichnet, daß die transformierte Abbildung das aufgespannte Quadrikenbüschel e l e m e n t w e i s e fest bleibt (G. WEISS 1978).

  Verallgemeinerung ?

- Transformationen:
  Gegeben sei eine Bijektion $\beta : \mathcal{L}_{aff} \to \mathcal{L}_{aff}$.
  - Führt β orthogonal-treffende Geraden in ebensolche Geraden über, so braucht β n i c h t durch eine Ähnlichkeit induziert zu werden. (W. BENZ, E. M. SCHRÖDER 1986).
    Verallgemeinerung: Bei höherer Dimension treten nur durch Ähnlichkeiten induzierte Geradenabbildungen auf.
  - Kennzeichnung der durch Ähnlichkeiten induzierten Geradenabbildungen (H. BRAUNER 1989).
  - Führen β und β^{-1} Geraden mit Abstand 1 in ebensolche Geraden über, so ist β von einer Kongruenzabbildung induziert (J. A. LESTER 1985).
    Verallgemeinerung ?

Querverbindungen: Sätze vom "BECKMAN-QUARELS-Typ".

Literaturübersicht:

Benz W.: Geometrische Transformationen, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim Leipzig Wien Zürich, 1992.

Benz W., Schröder E. M.: Bestimmung der orthogonalitätstreuen Permutationen euklidischer Räume, Geom. Dedicata **21** (1986), 265-276.

Bichara A., Mazzocca F.: On the independence of the axioms defining the affine and projective Grassmann spaces, Ann. Discr. Math. **14** (1982), 123-128.

Bichara A., Mazzocca F.: On a characterization of Grassmann space representing the lines in an affine space, Simon Stevin **56** (1982), 129-141.

Bichara A., Mazzocca F.: On a Characterization of the Grassmann spaces associated with an affine space, Ann. Discr. Math. **18** (1983), 95-112.

Bichara A., Misfeld J., Tallini G., Zanella C.: On the order structure in the line geometry of a projective space, J. Geom. **41** (1991), 16-32.

Bichara A., Tallini G.: On a characterization of the Grassmann manifold representing the planes in a projective space, Ann. Discr. Math. **14** (1982), 129-150.

Bichara A., Tallini G.: On a characterization of Grassmann space representing the h-dimensional subspaces in a projective space, Ann. Discr. Math. **18** (1983), 113-132.

Biondi P.: A characterization of the Grassmann space representing the 2-dimensional subspaces of a projective space, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **1** (1987), 713-727.

Biondi P.: On finite Grassmann spaces, Ann. Discr. Math. **37** (1988), 69-74.

Brauner H.: Eine geometrische Kennzeichnung linearer Abbildungen, Monatsh. Math. **77** (1973), 10-20.

Brauner H.: Über die von Kollineationen projektiver Räume induzierten Geradenabbildungen, Sb. österr. Akad. d. Wiss., Abt. II, **197** (1988), 327-332.

Brauner H.: Eine Kennzeichnung der Ähnlichkeiten affiner Räume mit definiter Orthogonalitätsstruktur, Geom. Dedicata **29** (1989), 45-51.

Buekenhout F. (ed.): Handbook of Incidence Geometry, to appear.

Chow W.-L.: On the geometry of algebraic homogeneous spaces, Ann. of Math. **50** (1949), 32-67.

Dieudonné J. A.: La Géométrie des Groupes Classiques, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1971.

Havlicek H.: Zur Theorie linearer Abbildungen I, II, J. Geom. **16** (1981), 152-167; ibid. **16** (1981), 168-180.

Havlicek H.: Die linearen Geradenabbildungen aus dreidimensionalen projektiven Pappos-Räumen, Sb. Österr. Akad. Wiss., Abt. II, **192** (1983), 99-111.

Havlicek H.: Liniengeometrische Modelle affiner 4-Räume, Proceedings Congress of Geometry Thessaloniki 1987, 47-53.

Havlicek H.: Lineare Geradenkomplexe über Schiefkörpern, Arch. Math. **51** (1988), 181-187.

Havlicek H.: On Sets of Lines Corresponding to Affine Spaces, in: A. Barlotti et al. (eds.): Combinatorics ’88, Proceedings of the International Conference on Incidence Geometries and Combinatorial Structures (Ravello, May 1988), vol.**1**, Research and Lecture Notes in Math., Mediterranean Press, 1991, 449-457.

Havlicek H.: Dual Spreads Generated by Collineations, Simon Stevin **64** (1990), 339-349.

Herzer A.: Hom(U,W) und affine Graßmann Geometrie, Mitt. Math. Sem. Giessen **164** (1984), 199-215.

Herzer A.: Geometrie e varietà relative ad Hom(U,W), Preprint N. **104** (1984) Dip. di mat. e appl. "R. Caccioppoli" Univ. di Napoli, 1-42.

Klix W.-D.: Ein Beitrag zur Übertragung der euklidischen Liniengeometrie auf die Kleinsche Hyperquadrik des P_5, Wiss. Zeitschr. Techn. Univ. Dresden **19** (1970), 1387-1395.

Lester J. A.: On Distance Preserving Transformations of Lines in Euclidian Three-Space, Aequat. Math. **28** (1985), 69-72.

Lo Re P. M., Olanda D.: Grassmann spaces, J. Geometry **17** (1981), 50-60.

Mazzocca F., Olanda D.: A graphic characterization of the lines of an affine space, Ann. Discr. Math. **18** (1983), 625-634.

Melone N., Olanda D.: A characteristic property of Grassmann manifold representing the lines of a projective space, Euro. J. Comb. **5** (1984), 323-330.

Metz R.: Der affine Raum verallgemeinerter Reguli, Geom.Dedicata **10** (1981), 337-367.

Misfeld J., Tallini G., Zanella C.: Topological Grassmann spaces, Rend. Mat. Appl. (7) **8** (1988), 223-240.

Tallini G.: On a characterization of the Grassmann manifold representing the lines in a projective space, in: P.J. Cameron et al. (eds.), Finite Geometries and designs, Proceedings of the second Isle of Thorns Conference, London Math. Soc. Lecture Notes Ser. **49**, Cambridge U.P., Cambridge 1981, 354-358.

Tallini G.: Partial Line Spaces and Algebraic Varieties, Symposia Math. **28** (1986), 203-217.

Weiß G.: Zur euklidischen Liniengeometrie I, II, III, IV, Sb. österr. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Kl., Abt. II, **187** (1978), 417-436; ibid. **188** (1979), 343-359; ibid. **189** (1980), 19-39; ibid. **191** (1982), 331-368.

Wells A. L. jr.: Universal projective embeddings of the Grassmannian, half spinor and dual orthogonal geometries, Quart. J. Math. Oxford (2) **34** (1983), 375-386.

Zanella C.: Spazi di Grassmann affini topologici, Rend. Mat. Appl. (7) **8** (1988), 315-328.

Zanella C.: On topological projective spaces and their Grassmannians, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **59** (1989), 125-142.

Zanella C.: A characterization of the Grassmann space representing the h-flats in a topological projective space, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **4** (1990), 697-709.

Zanella C.: Defining topological projective spaces and topological Grassmann spaces, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **60** (1990), 87-94.

Zanella C.: Proprietà grafiche, topologiche e d'ordine di alcune varietà notevoli, Tesi di Dottorato Univ. di Studi di Roma "La sapienza", 1991.

Zanella C.: Embeddings of Grassmann spaces, Preprint 1993.

Hans Havlicek
Abteilung für Lineare Algebra und Geometrie
Technische Universität
Wiedner Hauptstraße 8-10/1133
A-1040 Wien
Österreich

EMAIL: havlicek@egmvs2.una.ac.at