

# Jenseits der pentazyklischen Koordinaten



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

VIENNA  
UNIVERSITY OF  
TECHNOLOGY

DIFFERENTIALGEOMETRIE UND  
GEOMETRISCHE STRUKTUREN

HANS HAVLICEK

FORSCHUNGSGRUPPE

DIFFERENTIALGEOMETRIE UND  
GEOMETRISCHE STRUKTUREN

INSTITUT FÜR DISKRETE MATHEMATIK UND GEOMETRIE

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

[havlicek@geometrie.tuwien.ac.at](mailto:havlicek@geometrie.tuwien.ac.at)

# Pentazyklische Koordinaten



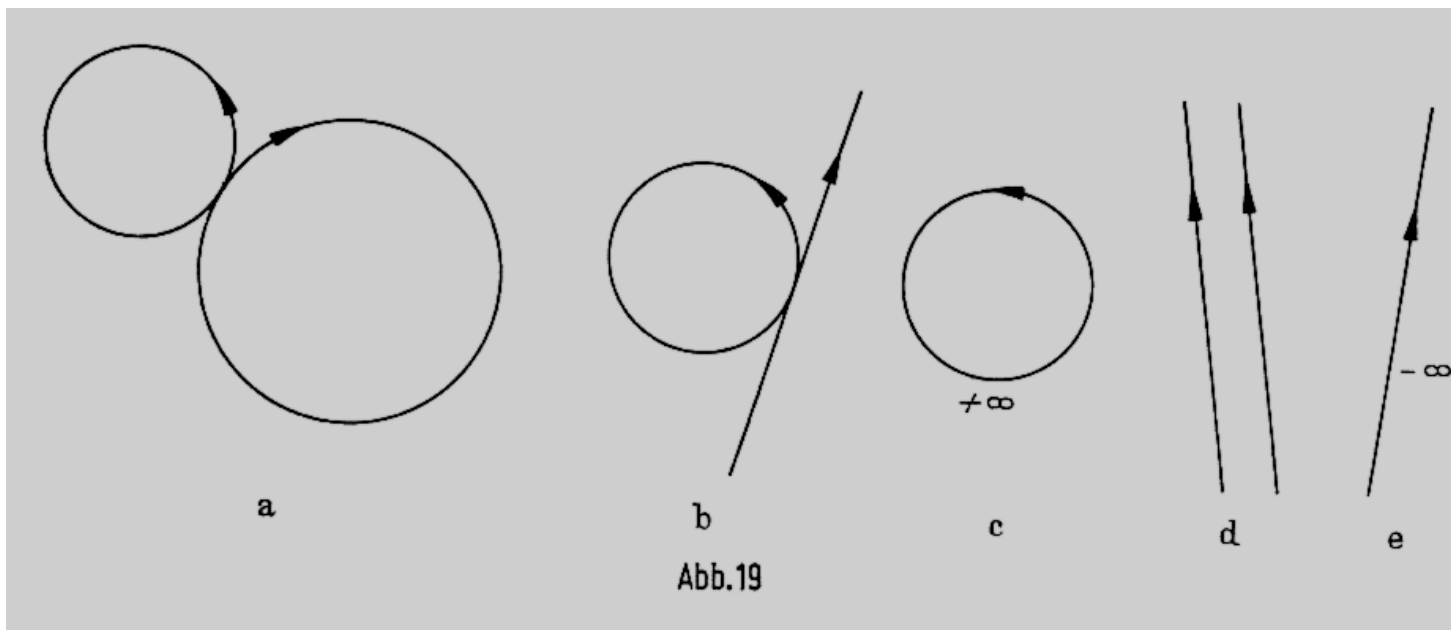
Mit Hilfe der *pentazyklischen Koordinaten* kann die nach **Sophus Lie** (1842–1899) benannte Kreisgeometrie in einfacher und einheitlicher Weise beschrieben werden.

# Kreise + Punkte + Geraden

In der Lie-Geometrie treten uns die Geraden, Punkte und Kreise der euklidischen Ebene gleichberechtigt als *Lie-Zykel* entgegen:

- *Zykel* sind orientierte Kreise mit Radius  $r \neq 0$ .
- *Nullzykel* sind Punkte (Kreise mit Radius  $r = 0$ ).
- *Speere* sind orientierte Geraden (Kreise mit Radius  $r = \infty$ ).
- $\infty$  ist ein *unendlich ferner Punkt / Speer*.

Die Menge  $\mathcal{N}$  aller Lie-Zykel ist mit einer *Berührrelation*  $\sim$  versehen.



# Die Lie-Quadrik

Die Menge  $\mathcal{N}$  der Lie-Zykel kann bijektiv auf die Menge der Punkte einer Quadrik  $\Lambda : -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$  im projektiven Raum  $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$  abgebildet werden:

- Das Bild eines Zyklus mit Mitte  $(m_1, m_2)$  und Radius  $r$  ist

$$\mathbb{R} \left( \frac{1+N}{2}, \frac{1-N}{2}, m_1, m_2, -r \right),$$

wobei  $N := m_1^2 + m_2^2 - r^2$  und  $r \in \mathbb{R}$ .

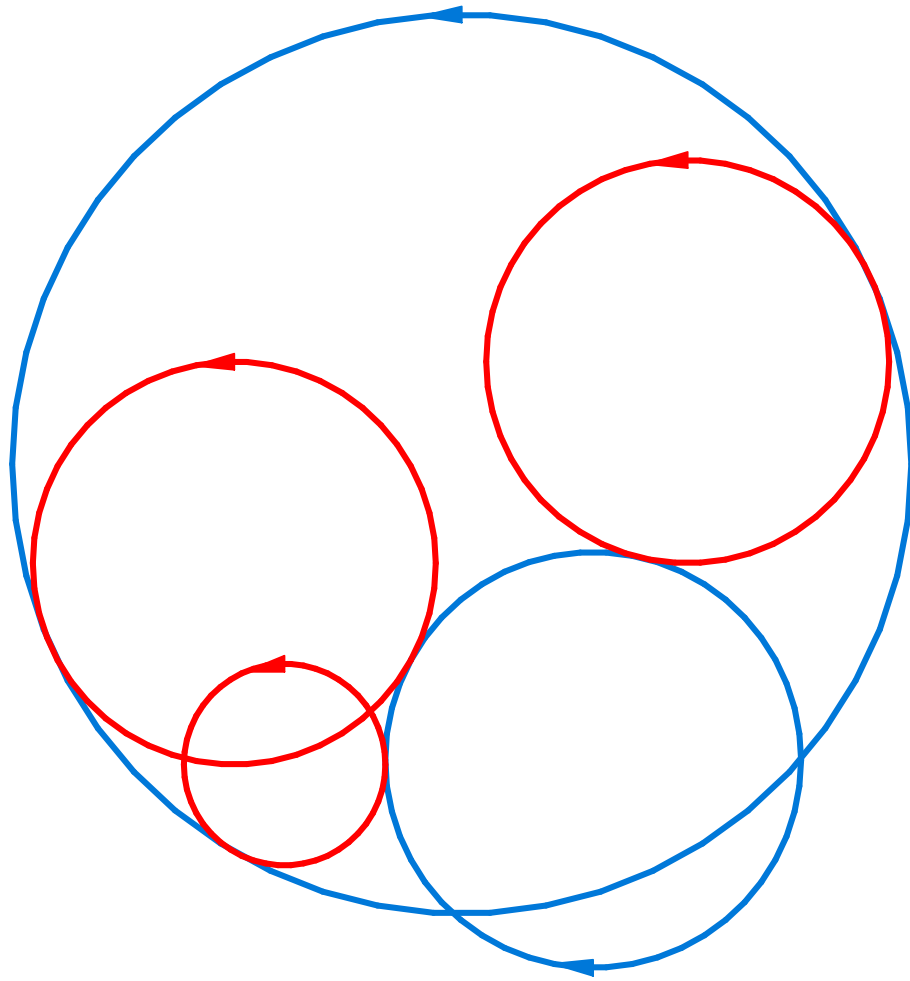
- Das Bild eines Speers mit der Geradengleichung  $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$  ist

$$\mathbb{R} \left( -a_0, a_0, a_1, a_2, \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \right),$$

wobei  $(a_1, a_2)$  mit einem Richtungsvektor des Speers ein Rechtssystem bildet.

- Das Bild von  $\infty$  ist  $\mathbb{R}(-1, 1, 0, 0, 0)$ .

# Das Problem von Apollonius



**Apollonius von Perge** (etwa 262–190 v. Chr.):  
Zu drei gegebenen Kreisen sind sämtliche berührenden Kreise gesucht.

---

Nach Orientierung der Kreise läuft die Aufgabe in pentazyklischen Koordinaten darauf hinaus, eine Gerade mit der Lie-Quadrik  $\Lambda$  zu schneiden.

---

Die verschiedenen Möglichkeiten der Orientierung ergeben bis zu acht Lösungskreise.

# Untergeometrien

Sei  $\mathcal{M}$  die Menge der Punkte. Für jeden Lie-Zykel  $Y \notin \mathcal{M}$  ist

$$\{X \in \mathcal{M} \mid X \sim Y\}$$

ein Kreis oder eine Gerade (ohne Orientierung). Wir erhalten so die euklidische *Möbiusgeometrie*.



August F. Möbius (1790–1868)

Sei  $\mathcal{L}$  die Menge der Speere. Für jeden Lie-Zykel  $Y \notin \mathcal{L} \cup \{\infty\}$  wird

$$\{X \in \mathcal{L} \mid X \sim Y\}$$

eine *Speerkette* genannt. Wir erhalten so die euklidische *Laguerregeometrie*.



Edmond N. Laguerre (1834–1886)

# Algebraische Beschreibung

## Komplexe Zahlen

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid (x, y) \in \mathbb{R}\}, \quad i^2 = -1.$$

Die Punkte der euklidischen Möbiusgeometrie werden durch die komplexe projektive Gerade

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \text{ mit } \infty := \frac{1}{0}$$

beschrieben.

Die Kreise / Ketten sind die Bilder der reellen projektiven Geraden  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  unter der Gruppe der gebrochen-linearen Transformationen

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \text{ mit } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ invertierbar.}$$

## Duale Zahlen

$$\mathbb{D} = \{x + \varepsilon y \mid (x, y) \in \mathbb{R}\}, \quad \varepsilon^2 = 0.$$

Die Punkte der euklidischen Laguerregeometrie werden durch die duale projektive Gerade

$$\mathbb{P}(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \cup \left\{ \frac{1}{x\varepsilon} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

beschrieben.

# Die projektive Gerade über einem Ring

Die Grundlehren der  
mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen  
Band 197

Walter Benz

Vorlesungen über  
Geometrie der Algebren

In seinem 1973 erschienenen Buch untersucht Benz systematisch die **projektive Gerade** über einem **kommutativen Ring mit Einselement** und verallgemeinerte so die klassischen Ergebnisse.

---

Das Buch enthält aber darüber hinaus eine Fülle von Resultaten zur Geometrie der Kreise und Zykeln (***Benz-Ebenen***, ...), auf die wir heute nicht eingehen können.



# Ringe

Wenn wir im Folgenden von einem **Ring**  $(R, +, \cdot)$  sprechen, so setzen wir voraus:

- Die Multiplikation ist assoziativ und besitzt ein Einselement  $1 \neq 0$ .
- Auf jedem  $R$ -Modul  $M$  möge  $1 \in R$  unitär operieren.
- Bei einem **Unterring**  $S \subset R$  sei stets  $1 \in S$ .

Besitzt  $R$  einen Unterkörper  $K$ , dessen Elemente mit allen Ringelementen vertauschbar sind, so liegt eine  **$K$ -Algebra** vor.

# Welche Definition?

Welche zyklischen Untermoduln  $R(a, b)$  von  $R^2$  sollen als *Punkte* der projektiven Geraden über  $R$  bezeichnet werden?

- Ist  $R$  ein Körper, so ist  $R(a, b)$  genau dann ein Punkt, falls  $(a, b) \neq (0, 0)$ .
- Ist  $R$  ein lokaler Ring, so ist  $R(a, b)$  genau dann ein Punkt, falls  $a$  oder  $b$  invertierbar ist.
- Über einem kommutativen Ring  $R$  ist  $R(a, b)$  genau dann ein Punkt, wenn  $(a, b)$  *unimodular* ist, d. h. es gibt Elemente  $x, y \in R$  mit  $ax + by = 1$ .

---

Alle diese Definitionen sind über jedem Ring sinnvoll (vgl. z. B. A. Lashkhi).

# Definition

**Definition.** (A. Herzer) Die *projektive Gerade* über einem Ring  $R$  ist die Menge  $\mathbb{P}(R)$  aller zyklischen Untermoduln  $R(a, b)$  von  $R^2$ , wobei  $(a, b)$  die erste Zeile einer invertierbaren  $2 \times 2$  Matrix über  $R$  ist. Ein solches Paar heißt *zulässig*.

Das heißt: Wenn

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R),$$

so ist  $R(a, b)$  ein Punkt.

Herzer gibt auch eine elegante koordinatenfreie Definition.

---

A. Blunck, A. Herzer: *Kettengeometrien – Eine Einführung* (2005).

# Bemerkungen

- Ist  $ls = 1 \neq sl$ , so gilt  $R(s, 0) = R(1, 0)$ , aber  $(s, 0)$  ist **nicht zulässig**.
- Ist  $sr = 1 \neq rs$ , so gilt  $R(s, 0) \subsetneq R(1, 0)$ , aber  $(s, 0)$  ist zulässig: Für

$$\gamma := \begin{pmatrix} s & 0 \\ 1 - rs & r \end{pmatrix} \text{ existiert } \gamma^{-1} = \begin{pmatrix} r & 1 - rs \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Es kann also **verschachtelte Punkte** geben.

- Ist  $(a, b)$  unimodular, so muss  $R(a, b)$  kein Punkt sein.

Z. B.:  $R = K[X, Y]$ , wobei  $K$  ein echter Schiefkörper ist, und  $X, Y$  unabhängige zentrale Unbestimmte über  $K$  sind. Für  $a, b \in K$  mit  $ab \neq ba$  ist

$$(X + a, Y + b)$$

unimodular, aber nicht zulässig (vgl. M. Ojanguren und R. Sridharan).

# Der Distanzgraph

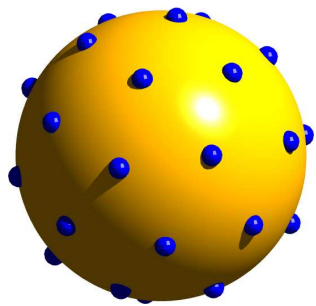
Zwei Punkte  $p$  und  $q$  von  $\mathbb{P}(R)$  heißen *distant*, in Zeichen  $p \Delta q$ , wenn es eine Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R)$$

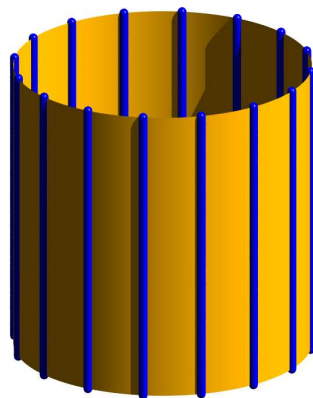
so gibt, dass  $p = R(a, b)$  und  $q = R(c, d)$ . ( $p \not\Delta q \dots$  *benachbart, parallel.*)

Das Paar  $(\mathbb{P}(R), \Delta)$  wird als *Distanzgraph* bezeichnet.

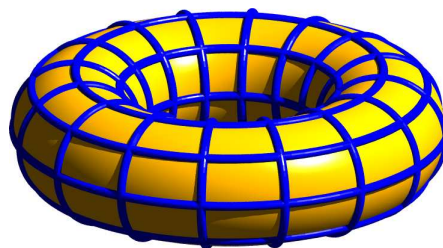
Beispiele:



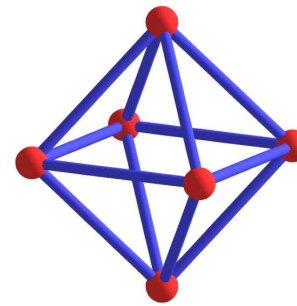
$\mathbb{C}$



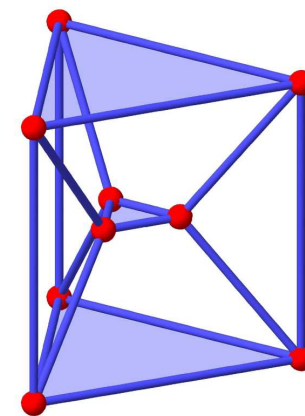
$\mathbb{D}$



$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



$\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2(\varepsilon)$



$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

# Einige Ergebnisse

- $GL_2(R)$  operiert **dreifach  $\Delta$ -transitiv** auf  $\mathbb{P}(R)$  und erhält die Distanzrelation.
- Der Durchmesser des Distanzgraphen ist 1 genau dann, wenn  $R$  ein Körper ist.
- Der Durchmesser des Distanzgraphen ist  $\leq 2$ , wenn  $R$  ein Ring vom **stabilen Rang 2** ist (F. D. Veldkamp, A. Herzer).
- Der Distanzgraph ist genau dann zusammenhängend, falls  $R$  ein  **$GE_2$ -Ring** ist. Es gibt nicht zusammenhängende Distanzgraphen (vgl. P. M. Cohn; A. Blunck, H. H.).
- $(\mathbb{P}(R), \Delta)$  ist (fast) ein Beispiel eines **Plückerraumes**.  
Siehe W. Benz: *Geometrische Transformationen* (1992).

# Endomorphismenringe

**Satz.** Ist  $R = K^{n \times n}$  der Ring der  $n \times n$  Matrizen über einem kommutativen Körper  $K$ , so kann die projektive Gerade über  $R$  mit dem Grassmann-Raum aller  $n$ -dimensionalen Unterräume von  $K^{2n}$  identifiziert werden, wobei distanzte Punkte komplementären Unterräumen entsprechen.

X. Hubaut, C. Vanhelleputte, J. A. Thas, M. Werner, A. Herzer.

- Der Satz gilt auch für Schiefkörper.

Die projektive Gerade über einem **Produkt von Matrizenringen über Körpern** kann als **Produkt von Grassmann-Räumen** interpretiert werden (vgl. Wedderburn-Artin Theorie).

- Anwendung: Bestimmung der **Punkteanzahl** von  $\mathbb{P}(R)$  im endlichen Fall, auch für nicht halbeinfache Ringe  $R$  (F. D. Veldkamp).
- Der obige Satz gilt, mutatis mutandis, auch für **Endomorphismenringe unendlich-dimensionaler Vektorräume** (A. Blunck).

# Endomorphismenringe

- Ist  $R$  direktes Produkt von Matrizenringen über Körpern, so gelingt mit Hilfe dieser Ergebnisse die Beschreibung aller Automorphismen des Distanzgraphen von  $\mathbb{P}(R)$  (A. Blunck, H. H.).
- Dabei ergeben sich viele Querverbindungen zu Arbeiten über [Graßmann-Räume](#) und zur [Geometrie der Matrizen](#).

W. Benz, H. Brauner, W.-I. Huang, A. Kreuzer, A. Naumowicz, K. Prażmowski, P. Šemrl, M. Pankov, Z. X. Wan, ...



# Kettengeometrien

Sei  $R$  eine Algebra über dem (kommutativen) Körper  $K$ .

Wegen  $K \subset R$  kann  $\mathbb{P}(K)$  in  $\mathbb{P}(R)$  eingebettet werden. Das ergibt in  $\mathbb{P}(R)$  eine ausgezeichnete Teilmenge, die **Standardkette**  $C$ .

**Definition.** Jedes Bild der Standardkette  $C$  unter  $GL_2(R)$  wird als **Kette** bezeichnet. Ist  $\mathcal{C}$  die Menge aller Ketten, so heißt die Inzidenzstruktur

$$\Sigma(K, R) := (\mathbb{P}(R), \mathcal{C})$$

die **Kettengeometrie** zur  $K$ -Algebra  $R$ .

- Zwei verschiedene Punkte sind genau dann distant, wenn sie durch eine Kette verbunden sind.
- Zu je drei paarweise distanten Punkten gibt es genau eine verbindende Kette.

# Geometrische Modelle

- Klassische Beispiele:

$(K, R) = (\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ... **Sphäre** und die Menge ihrer **Kreise**.

$(K, R) = (\mathbb{R}, \mathbb{D})$  ... **Zylinder** und die Menge seiner **Kegelschnitte**.

$(K, R) = (\mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  ... **hyperb. Quadrik** und die Menge ihrer **Kegelschnitte**.

- Quadratische Algebren ... **Quadrik** (ohne ihren Spitzenraum) und die Menge ihrer **Kegelschnitte**.

- $(K, R) = (K, K^n)$  ... **Segre-Varietät** und gewisse **rationale Normkurven**.

- Kettengeometrien  $\Sigma(K, R)$  über endlichdimensionalen  $K$ -Algebren  $R$  lassen sich als **quasiprojektive Varietäten** in  $\mathbb{P}_m(K)$  einbetten. Die Ketten gehen in **rationale Kurven** über.

Wichtig ist dabei wieder der Sonderfall  $(K, R) = (K, K^{n \times n})$ .

W. Benz, A. Herzer, H. Hotje, X. Hubaut, H.-J. Samaga, H. Schaeffer, M. Werner;  
(vgl. H. Karzel: **quadratische (kinematische) Algebren**, R. Metz: **Reguli**).

# Isomorphismen

- Ist  $\alpha : R \rightarrow R'$  ein **Isomorphismus** der  $K$ -Algebra  $R$  auf die  $K'$ -Algebra  $R'$ , so liegt mit

$$R(a, b) \mapsto R'(a^\alpha, b^\alpha) \quad (1)$$

ein Isomorphismus von  $\Sigma(K, R)$  auf  $\Sigma(K', R')$  vor.

- $\alpha$  sei **Antiisomorphismus**. Dann ist (1) im Allgemeinen nicht wohldefiniert.
- $\alpha$  sei semilinearer **Jordan-Isomorphismus**, d. h.  $\alpha$  ist bijektiv,  $1^\alpha = 1'$  und

$$(aba)^\alpha = a^\alpha b^\alpha a^\alpha \quad \text{für alle } a, b \in R.$$

**Definition.** (C. Bartolone)  $R(xy - 1, x) \mapsto R'(x^\alpha y^\alpha - 1', x^\alpha)$  mit  $x, y \in R$ .

Diese Abbildung ist aber im Allgemeinen nur auf einer **Teilmenge** von  $\mathbb{P}(R)$  definiert.

A. Blunck, C. Bartolone, F. Bartolozzi, A. Herzer, B. V. Limaye, N. B. Limaye, H.H.

# Unterräume

Jede Unteralgebra  $S$  einer  $K$ -Algebra  $R$  bestimmt einen *Unterraum* der Kettengeometrie  $\Sigma(K, R)$ , falls gilt:

$$a \in S \text{ invertierbar in } R \Rightarrow a^{-1} \in S. \quad (2)$$

**Satz.** Für jedes *starke Jordan-System*  $S$  von  $(K, R)$ , das ist ein hinreichend reichhaltiger  $(1 \in S, \dots)$   $K$ -Untervektorraum von  $R$  mit der Eigenschaft (2), liegt mit

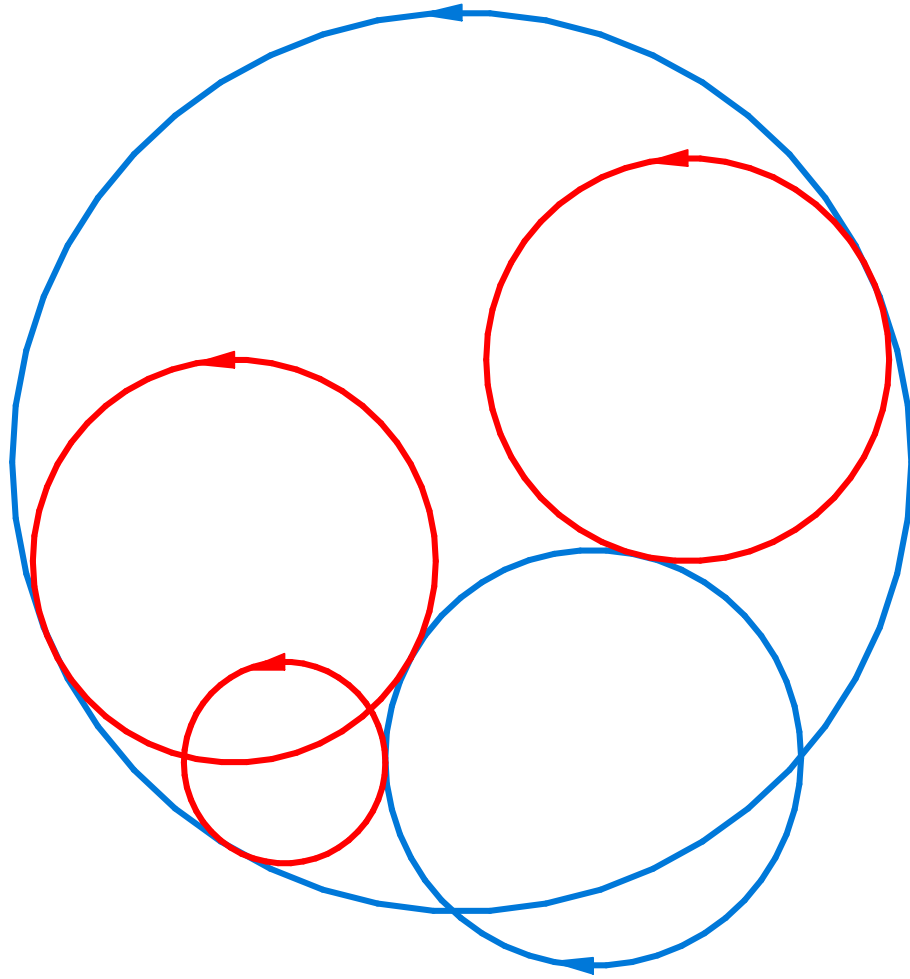
$$\mathbb{P}(S) := \{R(xy - 1, x) \mid x, y \in S\}$$

ein *Unterraum* von  $\Sigma(K, R)$  vor.

Jedes starke Jordan-System  $S$  hat die Eigenschaften

$$aba \in S, \quad \frac{1}{2}(ab + ba) \in S \quad (\text{bei Char } K \neq 2) \quad \text{für alle } a, b \in S.$$

# Beispiel



Die Menge der **symmetrischen  $2 \times 2$  Matrizen** ist ein starkes Jordan-System der  $\mathbb{R}$ -Algebra  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Der zugehörige Unterraum der Kettengeometrie  $\Sigma(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2 \times 2})$  besitzt die **Lie-Quadrik** samt der Menge ihrer **Kegelschnitte** als Punktmodell.

Daher kann auch innerhalb der euklidischen Lie-Geometrie ein Modell dieses Unterraumes gefunden werden.

# Zum Schluss

---

Was in diesem Vortrag unerwähnt bleiben musste:

- Kettengeometrien über Jordan-Systemen
- Verallgemeinerte Kettengeometrien  $\Sigma(K, R)$
- Andere Geometrien über Ringen
- Axiomatische Beschreibungen, Kettenräume
- Schließungssätze
- Endliche Kettengeometrien
- Topologische Kreisebenen