```
> restart;with(LinearAlgebra):
```

Vorwärtskinematik eines ebenen 3dof RPR Manipulators

```
> # Benutzen die Darstellung nach Blaschke und Grünwald. Schreiben diese in eine erweiterte Transformationsmatrix A, wobei wir die Normierungsbedingung vorerst außer Acht lassen.
>
> A := Matrix([[q0^2+q1^2, 0, 0], [2*q0*q2-2*q3*q1, q0^2-q1^2, -2*q0*q1], [2*q1*q2+2*q0*q3, 2*q0*q1, q0^2-q1^2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} q0^2+q1^2 & 0 & 0 \\ 2\,q0\,q2-2\,q3\,q1 & q0^2-q1^2 & -2\,q0\,q1 \\ 2\,q1\,q2+2\,q0\,q3 & 2\,q0\,q1 & q0^2-q1^2 \end{bmatrix}$$

```
> XG:=<1,x,y>; # erweiterte Gangkoordinaten
```

$$XG := \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

```
> MatrixVectorMultiply(A,XG);
```

$$\begin{bmatrix} q0^2+q1^2 \\ 2\,q0\,q2-2\,q3\,q1+(q0^2-q1^2)\,x-2\,q0\,q1\,y \\ 2\,q1\,q2+2\,q0\,q3+2\,q0\,q1\,x+(q0^2-q1^2)\,y \end{bmatrix}$$

```
> # damit dies die erweiterten Rastkoordinaten des Punktes X darstellt, muss der erste Eintrag eine 1 sein.
> # Da q0^2+q1^2 sowieso später gleich 1 gesetzt wird kann man o.B.d.A. durch q0^2+q1^2 dividieren und erhält:
>
> XR:=VectorScalarMultiply(MatrixVectorMultiply(A,XG),1/(q0^2+q1^2)); # erweiterte Rastkoordinaten
```

$$XR := \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{2\,q0\,q2-2\,q3\,q1+(q0^2-q1^2)\,x-2\,q0\,q1\,y}{q0^2+q1^2} \\ \dfrac{2\,q1\,q2+2\,q0\,q3+2\,q0\,q1\,x+(q0^2-q1^2)\,y}{q0^2+q1^2} \end{bmatrix}$$

```
>
> # Rastkoordinaten des Basisankerpunkts B lauten (b1,b2)
> # Gangkoordinaten des Plattformankerpunkts P lauten (p1,p2)
> # Rastkoordinaten des Plattformankerpunkts P lauten (p1_,p2_)
>
> # Bedingung lautet nun dass der Abstand zwischen B und P
```

```
konstant r ist, also P auf einem Kreis um B mit Radius r liegt
>
> kreis:=(p1_-b1)^2+(p2_-b2)^2-r^2;
```

$$kreis := (p1\_ - b1)^2 + (p2\_ - b2)^2 - r^2$$

```
> # Substitutiere pi_ durch entsprechende Ausdrücke
>
> Rast:=VectorScalarMultiply(MatrixVectorMultiply(A,<1,p1,p2>),1/(
  q0^2+q1^2));
```

$$Rast := \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{2\,q0\,q2 - 2\,q3\,q1 + (q0^2 - q1^2)\,p1 - 2\,q0\,q1\,p2}{q0^2 + q1^2} \\ \dfrac{2\,q1\,q2 + 2\,q0\,q3 + 2\,q0\,q1\,p1 + (q0^2 - q1^2)\,p2}{q0^2 + q1^2} \end{bmatrix}$$

```
> kreis_sub:=(subs(p1_=Rast[2],p2_=Rast[3],kreis));
```

$$kreis\_sub := \left(\frac{2\,q0\,q2 - 2\,q3\,q1 + (q0^2 - q1^2)\,p1 - 2\,q0\,q1\,p2}{q0^2 + q1^2} - b1\right)^2 + \left(\frac{2\,q1\,q2 + 2\,q0\,q3 + 2\,q0\,q1\,p1 + (q0^2 - q1^2)\,p2}{q0^2 + q1^2} - b2\right)^2 - r^2$$

```
> # da der Nenner ungleich 0 ist kann o.B.d.A. der Zähler gleich 0
  gesetzt werden
> (numer(kreis_sub));
```

$$\begin{aligned} &4\,q0^3\,q2\,p1 + 4\,q0\,q2\,p1\,q1^2 - 4\,q0^2\,q2\,q1\,p2 - 4\,q0\,q2\,b1\,q1^2 + 4\,q3\,q1\,p1\,q0^2 \\ &\quad + 4\,q3\,q1^2\,q0\,p2 + 4\,q3\,q1\,b1\,q0^2 + 4\,q0^3\,q1\,p2\,b1 + 4\,q0\,q1^3\,p2\,b1 - 4\,q1\,q2\,b2\,q0^2 \\ &\quad - 4\,q0\,q3\,b2\,q1^2 - 4\,q0^3\,q1\,p1\,b2 - 4\,q0^3\,q2\,b1 + 4\,q3\,q1^3\,p1 + 4\,q3\,q1^3\,b1 \\ &\quad + 2\,p1^2\,q0^2\,q1^2 - 2\,p1\,q0^4\,b1 + 2\,p1\,q1^4\,b1 + 2\,q0^2\,q1^2\,p2^2 + 2\,b1^2\,q0^2\,q1^2 - 4\,q1^3\,q2\,p2 \\ &\quad - 4\,q1^3\,q2\,b2 + 4\,q0^3\,q3\,p2 - 4\,q0^3\,q3\,b2 - 2\,p2\,q0^4\,b2 + 4\,q0^2\,q2^2 + 4\,q3^2\,q1^2 + p1^2\,q0^4 \\ &\quad + p1^2\,q1^4 + b1^2\,q0^4 + b1^2\,q1^4 + 4\,q1^2\,q2^2 + 4\,q0^2\,q3^2 + p2^2\,q1^4 + b2^2\,q0^4 + b2^2\,q1^4 \\ &\quad - r^2\,q0^4 - r^2\,q1^4 - 4\,q0\,q1^3\,p1\,b2 + p2^2\,q0^4 + 2\,p2\,q1^4\,b2 + 2\,b2^2\,q0^2\,q1^2 - 2\,r^2\,q0^2\,q1^2 \end{aligned}$$

```
> # dies ist eine homogene Gleichung vom Grad 4 in q0,q1,q2,q3
  aber
> factor(numer(kreis_sub));
```

$$\begin{aligned} &-(q0^2 + q1^2)\,(-4\,q0\,p2\,q3 + 4\,q0\,b1\,q2 + 4\,q0\,b2\,q3 - 4\,q0\,q1\,p2\,b1 - 4\,q2^2 - 4\,q3^2 \\ &\quad - p1^2\,q1^2 + 4\,q2\,q1\,p2 - 4\,q3\,q1\,p1 - 4\,q3\,q1\,b1 + 4\,q1\,q2\,b2 - 2\,q1^2\,b1\,p1 - 2\,q1^2\,b2\,p2 \\ &\quad + 2\,q0^2\,b1\,p1 + 2\,q0^2\,b2\,p2 - 4\,q0\,p1\,q2 - q1^2\,p2^2 - b1^2\,q1^2 - b2^2\,q1^2 + r^2\,q1^2 + q0^2\,r^2 \\ &\quad - q0^2\,b2^2 - q0^2\,p2^2 - q0^2\,p1^2 - q0^2\,b1^2 + 4\,q0\,q1\,p1\,b2) \end{aligned}$$

```
> # q0^2+q1^2 spaltet sich ab womit man nur mehr eine homogene
  quadratische Gleichung bekommt.
>
> Bedgl:=-4*q2*q1*p2-r^2*q1^2+b2^2*q1^2+q0^2*b1^2+q0^2*p1^2+q0^2*p2^2+q0^2*b2^2-q0^2*r^2+q1^2*p2^2+b1^2*q1^2+p1^2*q1^2-4*q0*q1*p1*b2+4*q2^2+4*q3^2+4*q3*q1*p1+4*q3*q1*b1-4*q1*q2*b2+2*q1^2*p2*b2+2*q1^2*p1*b1-2*q0^2*p2*b2-2*q0^2*p1*b1-4*q0*q2*b1+4*q0*q2*p1-4*q0*q3*b2+4*q0*q3*p2+4*q0*q1*p2*b1;
```

$$\mathrm{Bedgl} := 4\,q0\,p2\,q3 - 4\,q0\,b1\,q2 - 4\,q0\,b2\,q3 + 4\,q0\,q1\,p2\,b1 + 4\,q2^2 + 4\,q3^2 + p1^2\,q1^2 - 4\,q2\,q1\,p2 + 4\,q3\,q1\,p1 + 4\,q3\,q1\,b1 - 4\,q1\,q2\,b2 + 2\,q1^2\,b1\,p1 + 2\,q1^2\,b2\,p2 - 2\,q0^2\,b1\,p1 - 2\,q0^2\,b2\,p2 + 4\,q0\,p1\,q2 + q1^2\,p2^2 + b1^2\,q1^2 + b2^2\,q1^2 - r^2\,q1^2 - q0^2\,r^2 + q0^2\,b2^2 + q0^2\,p2^2 + q0^2\,p1^2 + q0^2\,b1^2 - 4\,q0\,q1\,p1\,b2$$

```
>
> # Nun setzten wir konkrete Zahlenwerte für unsere 3 Beine ein.
> h1:=subs(b1=0,b2=0,p1=0,p2=0,r=1,Bedgl);
> h2:=subs(b1=3,b2=0,p1=1,p2=0,r=2,Bedgl);
> h3:=subs(b1=1,b2=3,p1=2,p2=1,r=2,Bedgl);
```

$$h1 := 4\,q2^2 + 4\,q3^2 - q1^2 - q0^2$$

$$h2 := -8\,q0\,q2 + 16\,q3\,q1 + 12\,q1^2 + 4\,q2^2 + 4\,q3^2$$

$$h3 := -8\,q0\,q3 + 4\,q0\,q2 + 12\,q3\,q1 - 16\,q1\,q2 + q0^2 + 21\,q1^2 - 20\,q0\,q1 + 4\,q2^2 + 4\,q3^2$$

```
>
> # Bilde folgende Differenzen, welche nur linear in q2 und q3
  sind.
> h12:=h1-h2;h13:=h1-h3;
```

$$h12 := -13\,q1^2 - q0^2 + 8\,q0\,q2 - 16\,q3\,q1$$

$$h13 := -22\,q1^2 - 2\,q0^2 + 8\,q0\,q3 - 4\,q0\,q2 - 12\,q3\,q1 + 16\,q1\,q2 + 20\,q0\,q1$$

```
>
> L:=solve({h12,h13},{q2,q3});
```

$$L := \left\{ q3 = \frac{57\,q0\,q1^2 + 5\,q0^3 - 44\,q0^2\,q1 - 52\,q1^3}{8\,(2\,q0^2 - 5\,q0\,q1 + 8\,q1^2)},\ q2 = \frac{-54\,q0\,q1^2 + 49\,q1^3 + 2\,q0^3 + 5\,q0^2\,q1}{8\,(2\,q0^2 - 5\,q0\,q1 + 8\,q1^2)} \right\}$$

```
> assign(L);
> factor(h1);
```

$$-\left(-9295\, q0^2\, q1^4 + 9940\, q0\, q1^5 - 1339\, q0^4\, q1^2 + 4280\, q0^3\, q1^3 - 4081\, q1^6 + 35\, q0^6 + 100\, q0^5\, q1\right) \Big/ \left(16\left(2\, q0^2 - 5\, q0\, q1 + 8\, q1^2\right)^2\right)$$

```
> # Da dies im Zähler eine Gleichung vom Grad 6 ist, hat das
  Vorwärtskinematik Problem von ebenen 3 dof RPR Manipulatoren
  maximal 6 Lösungen (dies gilt auch allgemein).
>
> # Da q0=0 sofort q1=0 nach sich zieht und dies eine Normierung
  unmöglich macht, können wir o.B.d.A.
> q0:=1:
> L:=evalf(solve(h1,q1));
```

$$L := 0.3273233202, 0.9674087046 + 0.3532082425\, I, 0.1422379026 + 0.4499385364\, I, -0.1109390045, 0.1422379026 - 0.4499385364\, I, 0.9674087046 - 0.3532082425\, I$$

```
>
> q1:=.327323320180980:
> q2;
```

$$-0.04409669481$$

```
> q3;
```

$$-0.5242524400$$

```
> nb:=sqrt(q0^2+q1^2); # Nebenbedingung
```

$$nb := 1.052207468$$

```
> q0:=q0/nb:
> q1:=q1/nb:
> simplify(q2);
```

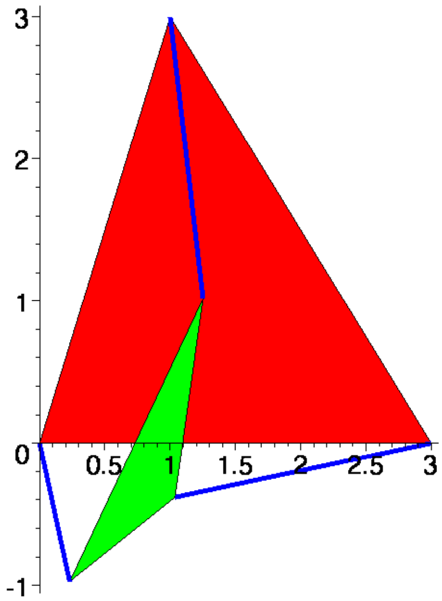
$$-0.04190874541$$

```
> simplify(q3);
```

$$-0.4982405616$$

```
>
>
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined

> basis:=polygonplot([[0,0],[3,0],[1,3]],color=red,thickness=1):
> P1:=MatrixVectorMultiply(A,<1,0,0>):
  P2:=MatrixVectorMultiply(A,<1,1,0>):
  P3:=MatrixVectorMultiply(A,<1,2,1>):
> plattform:=polygonplot([[P1[2],P1[3]],[P2[2],P2[3]],[P3[2],P3[3]
  ]],color=green,thickness=1):
> bein1:=plot([[P1[2],P1[3]],[0,0]],color=blue,thickness=5):
> bein2:=plot([[P2[2],P2[3]],[3,0]],color=blue,thickness=5):
> bein3:=plot([[P3[2],P3[3]],[1,3]],color=blue,thickness=5):
>
> display(bein1,bein2,bein3,plattform,basis);
```




```
> restart:with(LinearAlgebra):
```

Vorwärtskinematik von Stewart Gough Plattformen

```
> # Wir benutzen die Study Parameter für die Darstellung der
  Bewegungen des R3. Schreiben diese wieder in eine erweiterte
  Transformationsmatrix A, wobei wir die Normierungsbedingung
  vorerst außer Acht lassen.
>
> A:=<<a00,a10,a20,a30>|<0,a11,a21,a31>|<0,a12,a22,a32>|<0,a13,a23
  ,a33>>:
> a11:=a^2+b^2-c^2-d^2:
> a21:=2*(b*c+a*d):
> a31:=2*(b*d-a*c):
> a12:=2*(b*c-a*d):
> a22:=a^2-b^2+c^2-d^2:
> a32:=2*(c*d+a*b):
> a13:=2*(b*d+a*c):
> a23:=2*(c*d-a*b):
> a33:=a^2-b^2-c^2+d^2:
> a00:=a^2+b^2+c^2+d^2:
> a10:=2*(b_*a-a_*b+d_*c-c_*d):
> a20:=2*(c_*a-a_*c+b_*d-d_*b):
> a30:=2*(d_*a-a_*d+c_*b-b_*c):
>
> A;
```

$$\begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2, & 0, & 0, & 0 \\ 2\,b\_a-2\,a\_b+2\,d\_c-2\,c\_d, & a^2+b^2-c^2-d^2, & 2\,b\,c-2\,a\,d, & 2\,b\,d+2\,a\,c \\ 2\,c\_a-2\,a\_c+2\,b\_d-2\,d\_b, & 2\,b\,c+2\,a\,d, & a^2-b^2+c^2-d^2, & 2\,c\,d-2\,a\,b \\ 2\,d\_a-2\,a\_d+2\,c\_b-2\,b\_c, & 2\,b\,d-2\,a\,c, & 2\,c\,d+2\,a\,b, & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

```
>
> XG:=<1,x,y,z>; # erweiterte Gangkoordinaten
```

$$XG := \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

```
> MatrixVectorMultiply(A,XG);
```

$$[a^2+b^2+c^2+d^2]$$

$$[2\,b\_a-2\,a\_b+2\,d\_c-2\,c\_d+(a^2+b^2-c^2-d^2)\,x+(2\,b\,c-2\,a\,d)\,y+(2\,b\,d+2\,a\,c)\,z]$$

$$[2\,c\_a-2\,a\_c+2\,b\_d-2\,d\_b+(2\,b\,c+2\,a\,d)\,x+(a^2-b^2+c^2-d^2)\,y+(2\,c\,d-2\,a\,b)\,z]$$

$$[2\,d\_a-2\,a\_d+2\,c\_b-2\,b\_c+(2\,b\,d-2\,a\,c)\,x+(2\,c\,d+2\,a\,b)\,y+(a^2-b^2-c^2+d^2)\,z]$$

```
> # damit dies die erweiterten Rastkoordinaten des Punktes X
  darstellt, muss der erste Eintrag eine 1 sein.
> # Da a^2+b^2+c^2+d^2 sowieso später gleich 1 gesetzt wird kann
  man o.B.d.A. durch a^2+b^2+c^2+d^2 dividieren und erhält:
>
> XR:=VectorScalarMultiply(MatrixVectorMultiply(A,XG),1/(a^2+b^2+c
  ^2+d^2));   # erweiterte Rastkoordinaten
```

$$XR :=$$

$$[1]$$

$$[(2\,b\_a-2\,a\_b+2\,d\_c-2\,c\_d+(a^2+b^2-c^2-d^2)\,x+(2\,b\,c-2\,a\,d)\,y+(2\,b\,d+2\,a\,c)\,z) \Big/ (a^2+b^2+c^2+d^2)]$$

$$[(2\,c\_a-2\,a\_c+2\,b\_d-2\,d\_b+(2\,b\,c+2\,a\,d)\,x+(a^2-b^2+c^2-d^2)\,y+(2\,c\,d-2\,a\,b)\,z) \Big/ (a^2+b^2+c^2+d^2)]$$

$$[(2\,d\_a-2\,a\_d+2\,c\_b-2\,b\_c+(2\,b\,d-2\,a\,c)\,x+(2\,c\,d+2\,a\,b)\,y+(a^2-b^2-c^2+d^2)\,z) \Big/ (a^2+b^2+c^2+d^2)]$$

```
>
```

```
> # Rastkoordinaten des Basisankerpunkts B lauten (b1,b2,b3)
> # Gangkoordinaten des Plattformankerpunkts P lauten (p1,p2,p3)
> # Rastkoordinaten des Plattformankerpunkts P lauten
  (p1_,p2_,p3_)
>
> # Bedingung lautet nun dass der Abstand zwischen B und P
  konstant r ist, also P auf einer Kugel um B mit Radius r liegt
>
> kugel:=(p1_-b1)^2+(p2_-b2)^2+(p3_-b3)^2-r^2;
```

$$kugel := (p1\_ - b1)^2 + (p2\_ - b2)^2 + (p3\_ - b3)^2 - r^2$$

```
> # Substitutiere pi_ durch entsprechende Ausdrücke
>
> Rast:=VectorScalarMultiply(MatrixVectorMultiply(A,<1,p1,p2,p3>),
  1/(a^2+b^2+c^2+d^2));
```

$$Rast := \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{2\,b\_\,a - 2\,a\_\,b + 2\,d\_\,c - 2\,c\_\,d + (a^2+b^2-c^2-d^2)\,p1 + (2\,b\,c - 2\,a\,d)\,p2 + (2\,b\,d + 2\,a\,c)\,p3}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ \dfrac{2\,c\_\,a - 2\,a\_\,c + 2\,b\_\,d - 2\,d\_\,b + (2\,b\,c + 2\,a\,d)\,p1 + (a^2-b^2+c^2-d^2)\,p2 + (2\,c\,d - 2\,a\,b)\,p3}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ \dfrac{2\,d\_\,a - 2\,a\_\,d + 2\,c\_\,b - 2\,b\_\,c + (2\,b\,d - 2\,a\,c)\,p1 + (2\,c\,d + 2\,a\,b)\,p2 + (a^2-b^2-c^2+d^2)\,p3}{a^2+b^2+c^2+d^2} \end{bmatrix}$$

```
> kugel_sub:=(subs(p1_=Rast[2],p2_=Rast[3],p3_=Rast[4],ku
  gel));
```

$$\begin{aligned} kugel\_sub := {} & \left(\frac{2\,b\_\,a - 2\,a\_\,b + 2\,d\_\,c - 2\,c\_\,d + (a^2+b^2-c^2-d^2)\,p1 + (2\,b\,c - 2\,a\,d)\,p2 + (2\,b\,d + 2\,a\,c)\,p3}{a^2+b^2+c^2+d^2} - b1\right)^2 \\ & + \left(\frac{2\,c\_\,a - 2\,a\_\,c + 2\,b\_\,d - 2\,d\_\,b + (2\,b\,c + 2\,a\,d)\,p1 + (a^2-b^2+c^2-d^2)\,p2 + (2\,c\,d - 2\,a\,b)\,p3}{a^2+b^2+c^2+d^2} - b2\right)^2 \\ & + \left(\frac{2\,d\_\,a - 2\,a\_\,d + 2\,c\_\,b - 2\,b\_\,c + (2\,b\,d - 2\,a\,c)\,p1 + (2\,c\,d + 2\,a\,b)\,p2 + (a^2-b^2-c^2+d^2)\,p3}{a^2+b^2+c^2+d^2} - b3\right)^2 - r^2 \end{aligned}$$

```
> # da der Nenner ungleich 0 ist kann o.B.d.A. der Zähler gleich 0
  gesetzt werden
> kugel_neu:=factor(numer(kugel_sub)):nops(%);
```

$$250$$

```
> # jedoch spaltet sich jetzt noch nichts ab wie im ebenen Fall.
>
> study:=a*a_+b*b_+c*c_+d*d_: # Study Bedingung
>
> # Erst durch folgende Addition
```

```
> factor(kugel_neu + 4*study^2);
```

$$
\begin{aligned}
&-(a^2+b^2+c^2+d^2)\,(-4\,b\_^2-4\,a\_^2-4\,d\_^2-4\,c\_^2+b^2\,r^2-b^2\,p1^2-b^2\,p2^2-b^2\,p3^2\\
&\quad-b^2\,b1^2+4\,p1\,b\,a\_-4\,b1\,b\,a\_-b^2\,b2^2-b^2\,b3^2+a^2\,r^2-a^2\,p1^2-a^2\,p2^2-a^2\,p3^2\\
&\quad-a^2\,b1^2-4\,b\,p2\,d\_+4\,b\,p3\,c\_+2\,b^2\,b1\,p1-4\,b2\,b\,d\_-2\,b2\,b^2\,p2+4\,b3\,b\,c\_\\
&\quad-2\,b3\,b^2\,p3-4\,p1\,a\,b\_+4\,b1\,a\,b\_-a^2\,b2^2-a^2\,b3^2+d^2\,r^2-d^2\,p1^2-d^2\,p2^2-d^2\,p3^2\\
&\quad-d^2\,b1^2-4\,a\,p3\,d\_-4\,a\,p2\,c\_+2\,b1\,a^2\,p1+4\,b2\,a\,c\_+4\,b3\,a\,d\_+2\,b2\,a^2\,p2\\
&\quad+2\,b3\,a^2\,p3+4\,d\,p2\,b\_+4\,d\,p3\,a\_-4\,p1\,d\,c\_-4\,b1\,d\,c\_-2\,d^2\,b1\,p1+4\,b2\,d\,b\_\\
&\quad-4\,b3\,d\,a\_-2\,d^2\,b2\,p2-d^2\,b2^2-d^2\,b3^2+c^2\,r^2-c^2\,p1^2-c^2\,p2^2-c^2\,p3^2-c^2\,b1^2\\
&\quad-c^2\,b2^2+2\,d^2\,b3\,p3-4\,c\,p3\,b\_+4\,c\,p2\,a\_+4\,p1\,c\,d\_+4\,b1\,c\,d\_-2\,b1\,c^2\,p1-4\,b2\,c\,a\_\\
&\quad+2\,c^2\,b2\,p2-c^2\,b3^2-4\,b3\,c\,b\_-2\,c^2\,b3\,p3-4\,p2\,a\,d\,b1+4\,p3\,b\,d\,b1+4\,p1\,a\,d\,b2\\
&\quad-4\,p3\,a\,b\,b2+4\,p1\,b\,d\,b3+4\,p2\,a\,b\,b3-4\,c\,b3\,a\,p1+4\,c\,b1\,a\,p3+4\,c\,b1\,b\,p2\\
&\quad+4\,c\,b2\,b\,p1+4\,c\,b2\,d\,p3+4\,c\,b3\,d\,p2)
\end{aligned}
$$

```
> # erhält man nach Abspaltung von a^2+b^2+c^2+d^2 die Sphären
  Bedingung von Husty [15,16] (homogen quadratisch in den Study
  Parametern) auf welcher die Lösung der Vorwärtskinematik für SGP
  basiert. Bei dieser wird zuerst die Lösung von den sechs Sphären
  Bedingungen zusammen mit der Study Bedingung ermittelt und am
  Schluß erst normiert (vgl. ebenen 3 dof RPR Manipulator).
>
> Bedgl:=b^2*p1^2+b^2*p2^2+b^2*p3^2+b^2*b1^2+a^2*p1^2+a^2*p2^2+a^2
  *p3^2+a^2*b1^2+a^2*b2^2+a^2*b3^2-a^2*r^2+4*b_^2+4*a_^2+4*d_^2+4*
  c_^2-2*b3*a^2*p3+4*p2*a*c_-4*b2*a*c_+4*a*p3*d_-2*b2*a^2*p2-4*b3*
  a*d_+4*p1*a*b_-4*b1*a*b_-2*b1*a^2*p1+4*b2*b*d_+2*b3*b^2*p3-4*p3*
  b*c_-4*b3*b*c_+4*p2*b*d_+b^2*b2^2+b^2*b3^2-b^2*r^2+c^2*p1^2+c^2*
  p2^2+c^2*p3^2+c^2*b1^2+c^2*b2^2+c^2*b3^2-c^2*r^2+d^2*p1^2+d^2*p2
  ^2+d^2*p3^2+d^2*b1^2+d^2*b2^2+d^2*b3^2-d^2*r^2+2*b2*b^2*p2-4*p1*
  b*a_+4*b1*b*a_-2*b^2*b1*p1+4*p3*c*b_+4*b3*c*b_+2*c^2*b3*p3-4*p2*
  c*a_+4*b2*c*a_-2*c^2*b2*p2-4*p1*c*d_-4*b1*c*d_+2*b1*c^2*p1-2*d^2
  *b3*p3+4*b3*d*a_-4*d*p3*a_-4*p2*d*b_-4*b2*d*b_+2*d^2*b2*p2+4*p1*
  d*c_+4*b1*d*c_+2*d^2*b1*p1+4*a*b*b2*p3-4*a*b*b3*p2-4*a*b1*c*p3+4
  *a*b1*d*p2-4*a*b2*d*p1+4*a*b3*c*p1-4*b*b1*c*p2-4*b*b1*d*p3-4*b*b
  2*c*p1-4*b*b3*d*p1-4*b2*c*d*p3-4*b3*c*d*p2:
>
> # Nun setzten wir konkrete Zahlenwerte für unsere 6 Beine ein
  (Beispiel von Dietmaier).
> h1:=subs(b1=0,b2=0,b3=0,p1=0,p2=0,p3=0,r=1000000,Bedgl)
  ;
```

$$
\begin{aligned}
h1 := {}&4\,b\_^2+4\,a\_^2+4\,d\_^2+4\,c\_^2-1000000000000\,b^2-1000000000000\,a^2\\
&-1000000000000\,d^2-1000000000000\,c^2
\end{aligned}
$$

```
> h2:=subs(b1=1107915,b2=0,b3=0,p1=542805,p2=0,p3=0,r=645
  275,Bedgl):
```

```
> h3:=subs(b1=549094,b2=756063,b3=0,p1=956919,p2=-528915,
  p3=0,r=1086284,Bedgl):
> h4:=subs(b1=735077,b2=-223935,b3=525991,p1=665885,p2=-3
  53482,p3=1402538,r=1503439,Bedgl):
> h5:=subs(b1=514188,b2=-526063,b3=-368418,p1=478359,p2=1
  158742,p3=107672,r=1281933,Bedgl):
> h6:=subs(b1=590473,b2=94733,b3=-205018,p1=-137087,p2=-2
  35121,p3=353913,r=771071,Bedgl):
>
> # Bilde folgende Differenzen, welche nur linear in a_,b_,c_,d_.
> h12:=h2-h1:h13:=h3-h1:h14:=h4-h1:h15:=h5-h1:h16:=h6-h1:
>
>
> # Teil 1)
> # Somit erhalten wir ein 6 lin. Gleichungen in a_,b_,c_,d_
> # Damit dieses System eine nichttriviale Loesung haben kann muss
  die Determinante der erweiterte Koeffizientenmatrix von jeweils
  5 Gleichungen verschwinden.
> # Somit ergeben sich z.B. folgenden Bedingung:
>
> c12:=<coeff(h12,a_,1),coeff(h12,b_,1),coeff(h12,c_,1),coeff(h12,
  d_,1),coeff(coeff(coeff(coeff(h12,a_,0),b_,0),c_,0),d_,0)>:
> c13:=<coeff(h13,a_,1),coeff(h13,b_,1),coeff(h13,c_,1),coeff(h13,
  d_,1),coeff(coeff(coeff(coeff(h13,a_,0),b_,0),c_,0),d_,0)>:
> c14:=<coeff(h14,a_,1),coeff(h14,b_,1),coeff(h14,c_,1),coeff(h14,
  d_,1),coeff(coeff(coeff(coeff(h14,a_,0),b_,0),c_,0),d_,0)>:
> c15:=<coeff(h15,a_,1),coeff(h15,b_,1),coeff(h15,c_,1),coeff(h15,
  d_,1),coeff(coeff(coeff(coeff(h15,a_,0),b_,0),c_,0),d_,0)>:
> c16:=<coeff(h16,a_,1),coeff(h16,b_,1),coeff(h16,c_,1),coeff(h16,
  d_,1),coeff(coeff(coeff(coeff(h16,a_,0),b_,0),c_,0),d_,0)>:
> cstudy:=<coeff(study,a_,1),coeff(study,b_,1),coeff(study,c_,1),c
  oeff(study,d_,1),coeff(coeff(coeff(coeff(study,a_,0),b_,0),c_,0)
  ,d_,0)>;
```

$$\mathrm{cstudy} := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> d6:=factor(Determinant(<cstudy|c12|c13|c14|c15>))/(a^2+b^2+c^2+d
  ^2)/960;
```

$$\begin{aligned} d6 := & \ 2464649936853399200138097278 33\, a^4 + 256043219727731644355608198 15\, b^4 \\ & - 658510262906621423949272975471\, c^4 + 698029113474274854585941428 15\, d^4 \\ & + 27856323951378790941737200 32\, a^2\, b^2 - 905615608044564126473858472262\, a^2\, c^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- 111062216572183640921666883616\, a^2 d^2 + 492120943949328282803226806512\, b^2 c^2 \\
&- 81245638917572892033135214378\, b^2 d^2 + 141335588017857436499001587696\, c^2 d^2 \\
&- 76265492592545112323916820182\, b\, c\, a^2 + 698788439886302764287033511146\, b\, c^3 \\
&- 387167864968522612096786379394\, a^3 d - 204134316970782348807118018702\, b^3 c \\
&+ 173056428846659114515625187558\, a\, d^3 + 92027292108390519113953241276\, b^3 d \\
&- 66284225830948697220686142388\, b\, d^3 - 479970530879383216638041548140\, a^3 c \\
&+ 262796200646195641485477041796\, a\, c^3 + 417341344312324453294510564242\, b\, c\, d^2 \\
&+ 160221558845127284347265295078\, a\, d\, b^2 + 965696184298263244183366897438\, a\, d\, c^2 \\
&- 121670124398380505835567696572\, b\, d\, a^2 + 881209019316111648741757508788\, b\, d\, c^2 \\
&+ 689283748326514971314005757500\, a\, c\, b^2 + 192973430741705652058957466764\, a\, c\, d^2 \\
&- 108425349664995758969995535218\, c^3 d + 434355409693739647638034973838\, c\, d^3 \\
&+ 54137711950818132399019035646\, a^3 b - 130955386378846638842563836002\, a\, b^3 \\
&- 113342393447000645003113718930\, c\, d\, a^2 - 37364991146289340432804596594\, c\, d\, b^2 \\
&- 298159082165573785397682346242\, a\, b\, c^2 + 89549755253224350139966804798\, a\, b\, d^2 \\
&- 477686987269598902437227102176\, d\, c\, a\, b
\end{aligned}
$$

```
> d5:=factor(Determinant(<cstudy|c12|c13|c14|c16>))/(a^2+b^2+c^2+d^2)/960;
```

$$
\begin{aligned}
d5 := {} & 5238969149465599696295530005\, a^4 + 1690711350728829496780422997\, b^4 \\
&+ 128725763038242072884795398315\, c^4 + 34089980365003921263036189275\, d^4 \\
&- 109301593326236191597674624758\, a^2 b^2 - 237280989360553886999840624824\, a^2 c^2 \\
&+ 154105876281071604200866387792\, a^2 d^2 - 316571500345950730055622084272\, b^2 c^2 \\
&- 35736023700654488922410144696\, b^2 d^2 - 48498182851160747543371454202\, c^2 d^2 \\
&+ 414671998621225577550609629988\, b\, c\, a^2 - 130433445151878082180150615524\, b\, c^3 \\
&- 223145343809697036743034026812\, a^3 d + 38170342693603452404162125412\, b^3 c \\
&+ 49168195622225279953860488508\, a\, d^3 + 12404484235075132799873259690\, b^3 d \\
&- 26255462089186689221434708166\, b\, d^3 + 80288418946033710388849801042\, a^3 c \\
&- 291056181014771824342131157198\, a\, c^3 - 76124566355633356258582110100\, b\, c\, d^2 \\
&+ 107506677589833704406594761220\, a\, d\, b^2 - 372953316484727450780593591124\, a\, d\, c^2 \\
&+ 22781968615476966816741438922\, b\, d\, a^2 + 162028285696473935529929698218\, b\, d\, c^2 \\
&- 426793769383686847411569657742\, a\, c\, b^2 + 365714171652973812813461714850\, a\, c\, d^2 \\
&+ 129750650157472051781564855184\, c^3 d + 8730321488799808201208299920\, c\, d^3 \\
&+ 96729599997063436635582391048\, a^3 b + 60646383726137291095648694248\, a\, b^3 \\
&- 376650014679723586946946821712\, c\, d\, a^2 - 64121934095033512860025850880\, c\, d\, b^2
\end{aligned}
$$

$$+ 4968743253621913930549431314 4\, a\, b\, c^2 - 1305759250077969795185872852 72\, a\, b\, d^2$$

$$+ 2105591246019224972248462827 36\, d\, c\, a\, b$$

```
> d4:=factor(Determinant(<cstudy|c12|c13|c15|c16>))/(a^2+b^2+c^2+d^2)/960;
```

$$\begin{aligned}
d4 := {} & -15431312247166626487094171345 9\, a^4 - 22054123852911725437368774 03\, b^4 \\
& + 33436965576515535614195139795\, c^4 - 25994170638145216401104086245\, d^4 \\
& - 16494711870732517445176925198\, a^2\, b^2 - 60708257053913672317029009576\, a^2\, c^2 \\
& + 15452038785092248863777831820 8\, a^2\, d^2 + 48069821505769601551735963 68\, b^2\, c^2 \\
& + 19847693117285909214186330552\, b^2\, d^2 - 11058973257071152412008811538\, c^2\, d^2 \\
& - 13589426774974156213232442285 4\, b\, c\, a^2 - 36315816701381958825805731854\, b\, c^3 \\
& + 12567820687351921788435513212 2\, a^3\, d + 10599692796622872679156071722\, b^3\, c \\
& - 8364425019754421839570435097 4\, a\, d^3 - 12250091845373487677646264630\, b^3\, d \\
& + 21712546165829154290759555514\, b\, d^3 - 50473770763360393604389533205 4\, a^3\, c \\
& - 16170706610919254101106748381 4\, a\, c^3 - 97106205736963703994198513806\, b\, c\, d^2 \\
& - 12834365069110351997532248086\, a\, d\, b^2 - 74638910787394492986874236158\, a\, d\, c^2 \\
& + 24180569451189554019569593 46\, b\, d\, a^2 - 55745504269828423041108606446\, b\, d\, c^2 \\
& + 20232844376555141980581560050\, a\, c\, b^2 + 30430733885420181601009800523 4\, a\, c\, d^2 \\
& + 61497205369260197006026052462\, c^3\, d - 78704862584097702010929302674\, c\, d^3 \\
& - 26236311350988380031521885278\, a^3\, b - 13743552670102442247282722206\, a\, b^3 \\
& + 24849627050912689924149213922 2\, c\, d\, a^2 + 10055477021742095615968859287 0\, c\, d\, b^2 \\
& + 81606527335121014655626061562\, a\, b\, c^2 + 48905074485005506443148020138\, a\, b\, d^2 \\
& + 21174732992697056107722639862 4\, d\, c\, a\, b
\end{aligned}$$

```
> # Da man aus 6 Gleichungen (study,h12,h13,h14,h15,h16) nur 5 Unbekannte (d,a_,b_,c_,d_) eliminieren kann, muessen
> d45:=factor(resultant(d4,d5,d)):
> d46:=factor(resultant(d4,d6,d)):
> # einen gemeinsamen Faktor haben
>
> F1:=gcd(d45,d46)/10240:degree(F1,{a,b,c});
```

$$10$$

```
> ##########################################################################################
>
> # Teil 2)
> # Nuatürlich kann man auch anders Vorgehen und z.B. das lineare Gleichungssystem study,h12,h13,h14 nach a_,b_,c_,d_ loesen
>
> L:=solve({study,h12,h13,h14},{a_,b_,c_,d_}):
```

```
> assign(L);
>
> H1:=numer(simplify(h1)):
> degree(H1,{a,b,c,d});
                                        8
> H15:=numer(simplify(h15)):
> degree(H15,{a,b,c,d});
                                        4
> H16:=numer(simplify(h16)):
> degree(H16,{a,b,c,d});
                                        4
> # Weitere Elimination mit Hilfe der Resultantenmethode d
  wiefolgt eliminieren:
>
> F2:=factor(simplify(resultant(H15,H1,d)))/256901120:nops(%);
                                        2
> F3:=factor(simplify(resultant(H16,H1,d)))/16056320:nops(%);
                                        2
> # Somit hat man nun die Gleichungen F1,F2,F3 die nur mehr von
  a,b,c abhängen. Eine Erneute Elimination mit Hilfe der
  Resultante liefert
>
> F12:=simplify(resultant(F1,F2,c)):nops(%);
                                        3
> F13:=simplify(resultant(F1,F3,c)):nops(%);
                                        3
> Finale1:=gcd(F12,F13):
> degree(Finale1,{a,b});
                                       160
> ffin1:=factor(Finale1):
> a_:='a_':b_:='b_':c_:='c_':d_:='d_':
> ###############################################################
  #############################
>
> # Teil 3)
> # Nuatürlich kann man auch anders Vorgehen und z.B. das lineare
  Gleichungssystem study,h12,h13,h15 nach a_,b_,c_,d_ loesen
>
> L:=solve({study,h12,h13,h15},{a_,b_,c_,d_}):
> assign(L);
>
> H1:=numer(simplify(h1)):
> degree(H1,{a,b,c,d});
                                        8
> H14:=numer(simplify(h14)):
> degree(H14,{a,b,c,d});
```

4

```
> H16:=numer(simplify(h16)):
> degree(H16,{a,b,c,d});
```

4

```
> # Weitere Elimination mit Hilfe der Resultantenmethode d
  wiefolgt eliminieren:
>
> F4:=factor(simplify(resultant(H14,H1,d)))/2097152000:nops(%);
```

2

```
> F5:=factor(simplify(resultant(H16,H1,d)))/524288000:nops(%);
```

2

```
> # Somit hat man nun die Gleichungen F1,F4,F5 die nur mehr von
  a,b,c abhängen. Eine Erneute Elimination mit Hilfe der
  Resultante liefert
>
> F14:=simplify(resultant(F1,F4,c)):nops(%);
```

3

```
> F15:=simplify(resultant(F1,F5,c)):nops(%);
```

3

```
> Finale2:=gcd(F14,F15):
> degree(Finale2,{a,b});
```

160

```
> ffin2:=factor(Finale2):
>
> # Der gemeinsame Faktor von ffin1 und ffin2 liefert die homgene
  Endgleichung vom Grad 40 in a,b
> Endgl:=gcd(ffin1,ffin2)/27487790694400:
> degree(Endgl,{a,b});
```

40

```
>
> a:=1.:Digits:=20:
> nEndgl:=evalf(Endgl):
> L:=solve(nEndgl,b);
```

L := 0.095203041886164056003, 0.41816868176473249442, 0.55608248296846143377, 0.71940992254984780390, 0.85466345292050884507, 1.0664136361954350487, 1.1788636478889327125, 1.2965896059643739509, 1.3580982402442637012, 1.3977476925761963926, 3.3863832333956560492, 4.2724979888853001315, 4.9352207852459765545, 16.356028582232290418, 23.223504542430865687, -0.25674876729365607394, -0.34333640924936298540, -0.38614052470769279573, -0.50327463625524591299, -0.50599326609552496822, -0.71084126429415878196, -0.84059230297592075455, -1.0071119615907586731, -1.1294479293107511454, -1.1613687204524599066, -1.3368530230914766130, -1.3706860226490491397, -1.4569173720083813785, -1.4698426131941878312, -1.6336499333784388039, -1.9189300561758960053, -1.9282927966998032985, -1.9371965276820936909, -2.6897929318932410055, -2.7629310610867105292, -3.6524184875231201096, -4.8098902152694881883, -8.0003999335753717296, -14.610011243772942382, -41.708735296943800070

```
>
> # Wähle zum Beispiel
> b:=.95203041886164056003e-1:
>
> #Nun müssen F1,F2,F3,F4,F5 eine gemeinsame Lösung haben (bis auf
  numerischen Fehler)
> solve(F1,c);
```

0.28226638428838305973, 1.4781626038094983019,
2.2742547818380169916 + 3.0625887966544913366 I,
-0.43502709932588534640 + 0.11640293866753077523 I, -0.24835550593720542741,
-0.75781796154242257271, -2.7058223455346163112, -19.792959499504471738,
-0.43502709932588534640 − 0.11640293866753077523 I,
2.2742547818380169916 − 3.0625887966544913366 I

```
> solve(F2,c);
```

0.30560298768712968089, -0.13369046025057326248 + 0.23425575978212101925 I,
-0.54170341310402442526, -0.85269244773060518221, -3.0405282107391604724,
-0.13369046025057326248 − 0.23425575978212101925 I, 0.30560298768712968089,
-0.13369046025057326248 + 0.23425575978212101925 I, -0.54170341310402442526,
-0.85269244773060518221, -3.0405282107391604724,
-0.13369046025057326248 − 0.23425575978212101925 I, 0.28226638428838305973,
1.1466011429288198230, 0.63927675557056754075 + 1.0184378592338223843 I,
2.2014201458909209577 + 3.5395702626227828556 I,
0.45093044609525169778 + 0.79706371481809341582 I,
0.13156197196204540769 + 1.1109174382674610636 I,
-0.057526732529765151984 + 0.12805276432240033922 I,
-0.59857518144210793599 + 0.20067308360878067334 I,
-0.27303471080659063307 + 0.0054116913552225758675 I, -0.62490458952501469368,
-1.2901498685355841352, -2.0377989532990778478, -4.9053912866266557791,
-0.27303471080659063307 − 0.0054116913552225758675 I,
-0.59857518144210793599 − 0.20067308360878067334 I,
-0.057526732529765151984 − 0.12805276432240033922 I,
0.13156197196204540769 − 1.1109174382674610636 I,
0.45093044609525169778 − 0.79706371481809341582 I,
2.2014201458909209577 − 3.5395702626227828556 I,
0.63927675557056754075 − 1.0184378592338223843 I

```
>
> # Diese gemeinsame Lösung ist
> c:=.28226638428838305973:
>
> #Nun müssen H1,H14,H15,H16 eine gemeinsame Lösung haben (bis auf
  numerischen Fehler)
> solve(H14,d);
```

0.11753108559192638589, 1.0072063347697112991, -1.4056105031939736348,
-3.8643680585960469103

```
> solve(H16,d);
```

1.0072063347697112991, 1.6885146902160427374, -1.3059298918864470838,
-5.3827204782148485132

```
> d:=1.007206334769711299l:
>
> a_:=evalf(a_);b_:=evalf(b_);c_:=evalf(c_);d_:=evalf(d_);
```

a_ := 107183.47861816264552

b_ := 495197.37189937837884

c_ := -518681.05952186283171

d_ := -7864.8705964750452318

```
> # Das somit erhaltene Lösungs-8-Tupel muss jetzt noch normiert
  werden:
> nb:=sqrt(a^2+b^2+c^2+d^2);
```

nb := 1.4502422320715431430

```
> a:=a/nb:
> b:=b/nb:
> c:=c/nb:
> d:=d/nb:
> a_:=a_/nb:
> b_:=b_/nb:
> c_:=c_/nb:
> d_:=d_/nb:
>
> # Somit ist eine Lösung der Vorwärtskinematik bestimmt durch
> A;
```

[1.0000000000000000001 , 0 , 0 , 0]
[955868.03823361852548 , -0.040450357030990156633 , -0.93222949439717555360 , 0.35959969186868313904]
[-46995.628998319990904 , 0.98333749374890406380 , 0.02669552307436192933 , 0.17981858200811803541]
[-290013.28303797717267 , -0.17723188766045879548 , 0.36088158559806379111 , 0.91561637117983963579]

```
>
>
> # Probe:
> Determinant(A);
```

1.0000000000000000003

```
> simplify(study);simplify(h1);simplify(h2);simplify(h3);simplify(
  h4);simplify(h5);simplify(h6);
```

$-0.58000000000000000000\ 10^{-14}$

$0.14000000000000000000\ 10^{-7}$

$0.31000000000000000000\ 10^{-6}$

$0.16000000000000000000\ 10^{-6}$

$0.49000000000000000000\ 10^{-6}$

$0.64000000000000000000\ 10^{-6}$

$-0.13000000000000000000\ 10^{-6}$

```
>
```

>
>
>
>