

# FLEXIBLE OKTAEDER MIT FERNELEMENTEN

**Georg Nawratil**, Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, Technische Universität Wien  
Wiedner Hauptstrasse 8-10/104, 1040 Wien, Email: nawratil@geometrie.tuwien.ac.at

---

**Kurzfassung:** Ein Oktaeder heißt flexibel, wenn dieser kontinuierlich verformt werden kann, sodass sich nur die Kantenwinkel ändern jedoch jede Seitenfläche stets zu sich selbst kongruent bleibt während der Bewegung (Flexion). Auf den folgenden Seiten werden alle flexiblen Achteckfläche im projektiv erweiterten Anschauungsraum präsentiert. Neben den Spezialfällen der drei Bricard Oktaeder existieren nur zwei weitere nicht-triviale flexible Achteckfläche. Flexible Oktaeder mit Fernelementen sind auch von schulpraktischem Interesse, da einige von ihnen keine Selbstschnitte haben und somit als Kartonmodelle realisiert werden können.

## 1 Bricard Oktaeder

Im Jahr 1897 hat Bricard [1] bewiesen, dass es nur die drei folgenden Typen von flexiblen Achteckflächen im Euklidischen 3-Raum  $E$  gibt, wenn man voraussetzt, dass keine zwei benachbarten Seitenflächen während der Bewegung stets zusammenfallen:

Typ (I) Alle drei Paare von gegenüberliegenden Ecken (= Gegeneckenpaar) liegen symmetrisch bezüglich einer Geraden (siehe Abb. 1).

Typ (II) Zwei Gegeneckenpaare liegen symmetrisch bezüglich einer Ebene, welche das verbleibende Gegeneckenpaar enthält (siehe Abb. 1).

Typ (III) Dieser Typ besitzt zwei Lagen, in denen alle Seitenflächen in eine Ebene zusammenfallen. In einer solchen flachen Konfiguration kann das Achteck gemäß Abb. 2 konstruiert werden.

Ohne diese Bricardsche Voraussetzung gibt es noch zwei weitere Fälle von flexiblen Oktaedern in  $E$ , welche aus Gründen der Vollständigkeit genannt werden sollten (vgl. [8]):

Typ (i) Zwei Gegenecken fallen zusammen, wodurch eine zweifach überdeckte vierseitige Pyramide entsteht. Eine derartige Pyramide hat stets eine einparametrische Bewegung, welche jener eines sphärischen Vierstabgetriebes entspricht.

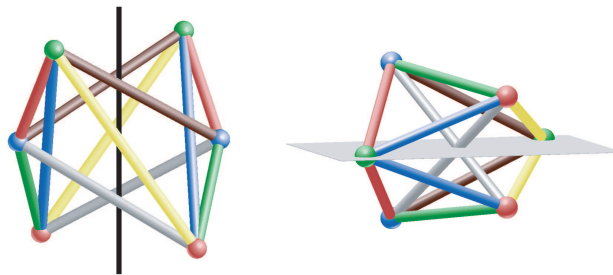


Abbildung 1: Gegenüberliegende Ecken sind stets durch gleichfärbige Kugeln dargestellt. Links bzw. rechts: Bricard Oktaeder vom Typ (I) bzw. (II), der auch als liniensymmetrischer bzw. ebensymmetrischer Bricard Oktaeder bekannt ist (vgl. auch [4]).

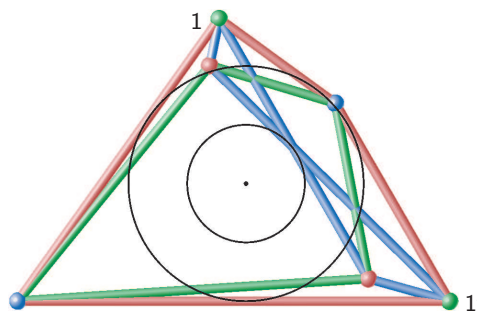


Abbildung 2: Man wähle zwei Punkte 1 und 1', welche außerhalb zweier konzentrischer Kreise liegen. Dann ergeben sich die restlichen beiden Gegeneckenpaare aus den Schnittpunkten der (blauen und roten) Tangenten aus 1 und 1' an die beiden Kreise (vgl. auch [9]).

Typ (ii) Zwei Paare von gegenüberliegenden Ecken liegen auf einer Geraden  $g$ , womit der Oktaeder aus zwei flachen vierseitigen Pyramiden zusammengesetzt ist, die eine gegenseitige einparametrische Beweglichkeit (Rotation um  $g$ ) erlauben.

Für den restlichen Teil der Arbeit soll jedoch Bricards Voraussetzung wieder Gültigkeit haben. Weiters sollte noch bemerkt werden, dass jeder der drei Bricard Oktaeder Selbstschnitte aufweist und somit nicht als Kartonmodell realisiert werden kann (vgl. [3]). Dies ist auch ein Mitgrund, warum in Abb. 1 und 2 Stabmodelle zur Illustration herangezogen wurden, wobei gleichfärbige Stäbe den Umstand symbolisieren, dass die Kantenwinkel entlang dieser Stäbe stets gleich groß sind während der Flexion.

Trotz einer Vielzahl von Studien der Bricard Oktaeder (z.B. Kokotsakis [2], Stachel [7], Wunderlich [10]) wurde bislang nicht der Frage nachgegangen, welche Typen von flexiblen Achteflächen im projektiv erweiterten Anschauungsraum  $E^*$  existieren. Eine Antwort darauf wurde vom Autor in den Publikationen [5,6] gegeben, deren Ergebnisse in den folgenden zwei Abschnitten kurz zusammengefasst sind.

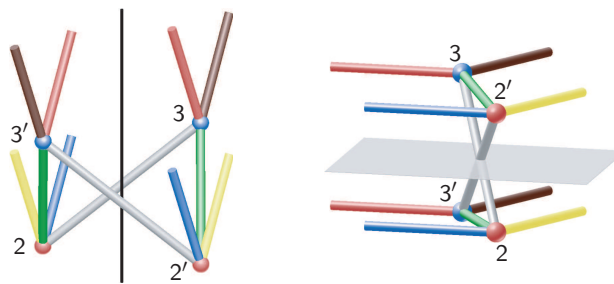


Abbildung 3: Links bzw. rechts: Flexibler Oktaeder vom Typ (A) bzw. (B), welcher ein Analogon zum liniensymmetrischen bzw. ebenensymmetrischen Bricard Oktaeder darstellt.

## 2 Flexible Oktaeder im $E^*$ ohne Gegeneckenpaar in der Fernebene

Wenn alle sechs Ecken des Oktaeders eigentliche Punkte sind, dann existieren laut obiger Einleitung die drei Bricard Oktaeder. Wenn man voraussetzt, dass genau ein Eckpunkt ein Fernpunkt ist, dann lässt sich zeigen, dass bloß die folgenden zwei Lösungen existieren:

Typ (a) Bricard Oktaeder vom Typ (II), wobei eine in der Symmetrieebene gelegene Ecke auf der Ferngeraden dieser Ebene zu liegen kommt.

Typ (b) Bricard Oktaeder vom Typ (III), wobei die Konstruktion analog zu jener in Abb. 2 ist, mit dem einzigen Unterschied, dass einer der beiden frei zu wählenden Punkte des ersten Gegeneckenpaars ein Fernpunkt ist (vgl. auch [9]).

Wenn, wie in der Überschrift vorausgesetzt, keines der drei Gegeneckenpaare aus zwei Fernpunkten besteht, dann ist leicht einzusehen, dass nur mehr folgende zwei Fälle verbleiben:

- Zwei benachbarte Ecken sind Fernpunkte, woraus folgt, dass eine Kante ins Unendliche rückt.
- Drei jeweils benachbarte Ecken sind Fernpunkte, womit eine Seitenfläche in die Fernebene fällt.

Jedoch kann bewiesen werden, dass keine flexiblen Achtfläche dieser beiden Typen existieren.

## 3 Flexible Oktaeder im $E^*$ mit Gegeneckenpaar in der Fernebene

Wenn man voraussetzt, dass der Oktaeder nur zwei Fernpunkte  $1$  und  $1'$  hat, welche ein Gegeneckenpaar  $(1, 1')$  bilden, dann kann gezeigt werden, dass folgende Lösungen existieren:

Typ (A) Die Gegeneckenpaare  $(2, 2')$  und  $(3, 3')$  liegen symmetrisch bezüglich einer Geraden. Weiters sind die Richtungen der Prismenkanten durch  $1$  und  $1'$  auch liniensymmetrisch (siehe Abb. 3).

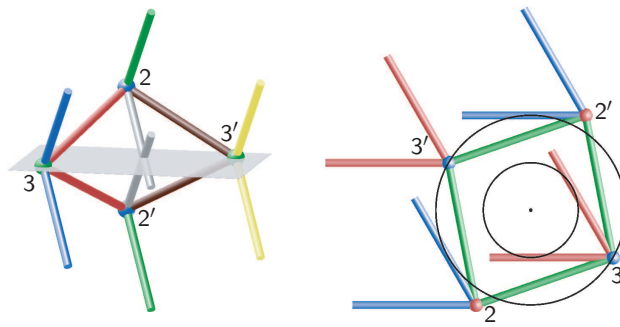


Abbildung 4: Links: Flexibler Oktaeder vom Typ (C), der ein weiteres Analogon zum ebenensymmetrischen Bricard Oktaeder ist. Rechts: Man lege aus zwei Fernpunkten 1 und 1' die (blauen und roten) Tangenten an zwei konzentrische Kreise. Deren Schnittpunkte ergeben die restlichen beiden Gegeneckenpaare des flexiblen Oktaeders vom Typ (D) in der ebenen Konfiguration. Dies ist das Analogon zum Bricard Oktaeder vom Typ (III).

Typ (B) Die verbleibenden Ecken  $2, 2', 3, 3'$  bilden ein ebenes Antiparallelogramm, dessen Symmetrieebene parallel zu den Prismenkanten durch 1 und 1' ist (siehe Abb. 3).

Typ (C) Ein Gegeneckenpaar  $(2, 2')$  ist symmetrisch bezüglich einer Ebene, welche das verbleibende Gegeneckenpaar  $(3, 3')$  enthält. Weiters sind die Richtungen der Prismenkanten durch 1 und 1' auch ebenensymmetrisch (siehe Abb. 4).

Typ (D) Dieser Typ besitzt wieder zwei flache Konfigurationen, in welchen der flexible Oktaeder gemäß Abb. 4 konstruiert werden kann.

Typ (E) Die verbleibenden Ecken  $2, 2', 3, 3'$  bilden ein ebenes Parallelogramm (siehe Abb. 5).

Typ (F) Die verbleibenden Ecken  $2, 2', 3, 3'$  bilden ein ebenes Deltoid, wobei die Richtungen der Prismenkanten durch 1 und 1' auf die Symmetrieachse des Deltoids normal stehen (siehe Abb. 5).

Neben diesen sechs Typen existieren noch die folgenden zwei Trivialfälle, welche vollständigshalber angegeben werden:

Typ ( $\alpha$ ) Wenn nun zusätzlich zum Gegeneckenpaar  $(1, 1')$  ein weiterer Eckpunkt 2 im Unendlichen liegt, dann ist der Oktaeder bereits aus den folgenden Gründen trivial flexibel: Die einparametrische Bewegung der vierseitigen Pyramide mit Spitze 3 wird auf jene mit Spitze 2' übertragen, welche wiederum eine einparametrische Flexion in der Pyramide mit Spitze 3' induziert.

Typ ( $\beta$ ) Wenn nebst 1, 1' und 2 noch ein weiterer Eckpunkt ein Fernpunkt ist, so kann dies nur die Gegenecke 2' sein, da dies sonst der Bricardschen Annahme widersprechen würde. Dieser Typ besteht somit aus zwei Pyramiden mit Spitzen 3 bzw. 3', die in jeder Lage ihrer Bewegung durch eine Schiebung auseinander hervorgehen ( $\Rightarrow$  triviale vierparametrische Flexion).

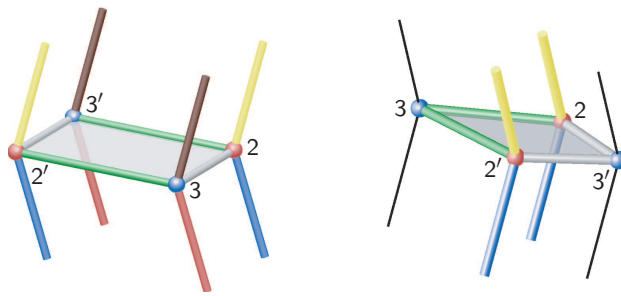


Abbildung 5: Links: Flexibler Oktaeder vom Typ (E). Rechts: Flexibler Oktaeder vom Typ (F), wobei entlang der dünn gezeichneten, schwarzen Stäbe keine besonderen Eigenschaften in Bezug auf die Kantenwinkel gelten.

#### 4 Anwendung in der Schule

Wie bereits aus Abb. 5 zu erkennen ist, können die Oktaeder vom Typ (E) und (F) auch ohne Selbstschnitte realisiert werden. Dies hat zur Folge, dass wir von diesen – im Gegensatz zu den drei Bricard Oktaedern – auch Kartonmodelle herstellen können. Zwei exemplarische Netze sind in Abb. 6 illustriert.<sup>1</sup>

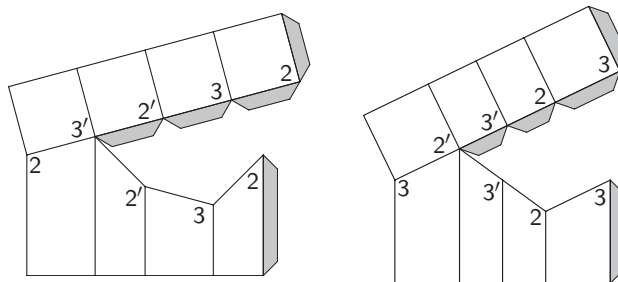


Abbildung 6: Links bzw. rechts: Netz für ein Kartonmodell eines Oktaeders vom Typ (E) bzw. (F).

In Folge betrachten wir die Oktaeder vom Typ (A) und (C), welche in Abb. 3 und 4 gegeben sind. Anhand der Abbildungen ist zu sehen (speziell bei Abb. 4), dass Selbstschnitte auftreten. Diese lassen sich jedoch bei diesen beiden Achtflächen leicht umgehen, indem man von einem der beiden Prismen jeweils den komplementären Teil (= nicht illustrierter Teil) materialisiert. Zwei exemplarische Netze zu diesen Fällen sind in Abb. 7 gegeben.<sup>2</sup>

Die Typen (a), (b), (B) und (D) von flexiblen Oktaedern eignen sich nicht für die Realisierung als Kartonmodell, da die Orthogonalschnitte aller involvierten Prismen Antiparallelogramme sind. Somit haben alle beteiligten Prismen bereits Selbstschnitte.

<sup>1</sup> Alle Netze können auch ohne Beschriftung als pdf von der Seite [www.geometrie.tuwien.ac.at/nawratil/talks.html](http://www.geometrie.tuwien.ac.at/nawratil/talks.html) heruntergeladen werden.

<sup>2</sup> Natürlich kann man mittels desselben Tricks aus den Oktaedern in Abb. 5 auch welche mit Selbstschnitte erzeugen.

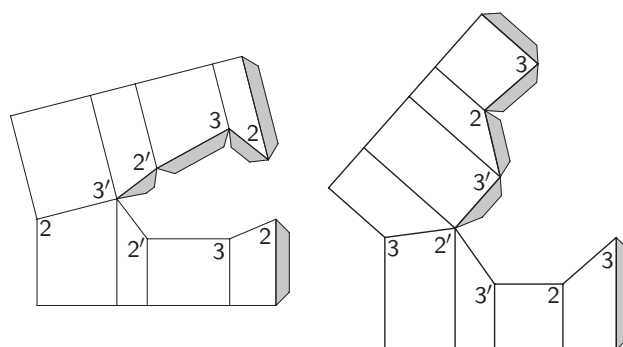


Abbildung 7: Links bzw. rechts: Netz für ein Kartonmodell eines Oktaeders vom Typ (A) bzw. (C).

Im Rahmen des Unterrichtsfachs *Darstellende Geometrie*, könnte, nach einer kurzen Einführung der vier Typen (A), (C), (E) und (F) durch den Lehrer, die Anfertigung von Netzen dieser vier flexiblen Oktaeder mittels geeigneter Grund- und Aufrisse, den Schülern als Hausaufgabe gegeben werden. Diese Aufgabe ist auch von selbstkorrigierender Natur, da sich die Richtigkeit des Netzes sofort überprüfen läßt, indem man dieses (nach beidseitigem Ritzen der Kanten) zum Achteck zusammenfügt. Nur bei korrekter (und genauer) Ausführung läßt sich das Modell ohne Verbiegung der Prismenflächen bewegen.

Schlußendlich sei noch bemerkt, dass natürlich auch die Typen (i) und (ii) sowie ( $\alpha$ ) und ( $\beta$ ) als Kartonmodell realisiert werden können. Diese Trivialfälle sind jedoch nicht von großem Interesse, abgesehen vielleicht vom Typ ( $\alpha$ ). Die Anfertigung eines entsprechenden Kartonmodells obliegt dem Leser.

## 5 Literatur

- [1] Bricard, R.: Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé. J. de Mathématiques pures et appliquées, Liouville **3**:113–148 (1897)
- [2] Kokotsakis, A.: Über bewegliche Polyeder, Math. Ann. **107**:627–647 (1932)
- [3] Müller, T.: Bau von Polyedermodellen aus Trinkhalmen, IBDG (1):52 (1991)
- [4] Müller, T., Vanek, U.: Bewegliche Oktaeder, In Erinnerung an unserern Lehrer Walter Wunderlich - gewidmet zum 100. Geburtstag, IBDG **29**(2):31–33 (2010)
- [5] Nawratil, G.: Flexible octahedra in the projective extension of the Euclidean 3-space. J. Geom. Graphics **14**(2):147–169 (2010)
- [6] Nawratil, G.: Self-motion of TSSM manipulators with two parallel rotary axes. ASME J. Mech. Robot. **3**(3):031007 (2011)
- [7] Stachel, H.: Zur Einzigkeit der Bricardschen Oktaeder, J. of Geometry **28** 41–56 (1987)
- [8] Stachel, H.: Higher order flexibility of octahedra. Period. Math. Hungar. **39**:225–240 (1999)
- [9] Stachel, H.: Remarks on Bricard's flexible octahedra of type 3, Proc. 10th International Conference on Geometry and Graphics, 8–12 (2002)
- [10] Wunderlich, W.: Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achteckfläche. Elemente Math. **20**:25–32 (1965)