

DISSERTATION

NEUE KINEMATISCHE PERFORMANCE INDIZES FÜR
6R ROBOTER UND STEWART GOUGH PLATTFORMEN

ausgeführt zum Zweck der Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der technischen Wissenschaften unter der Leitung
von

O.Univ.Prof. Dr. Hellmuth Stachel
Institutsnummer E104
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Mathematik und Geoinformation
von

Mag. Georg Nawratil
MNR.: 9925596
Stauwerkstraße 9
3370 Ybbs/Donau

Wien, am 31. Jänner 2007

Kurzfassung

Der Inhalt der vorliegenden Arbeit sind *kinematische Performance Indizes* für 6R Roboter und Stewart Gough Plattformen. Solche Indizes spielen eine wichtige Rolle beim Entwurf von Robotern (*Robot Design*) sowie in der Anwendung zur Kontrolle (*Robot Control*).

Grundsätzlich kann man zwei Arten von *Performance Indizes* unterscheiden, je nachdem, ob sie vom Endeffektor EE abhängen (*EE dependent Performance Indizes*) oder nicht (*EE independent Performance Indizes*). Jede dieser beiden Gruppen spaltet sich wiederum auf in *Performance Indizes*, welche von der momentanen Konfiguration des Roboters abhängen (*pose dependent Performance Indizes*) und in jene, die davon unabhängig sind (*pose independent Performance Indizes*).

Das Hauptaugenmerk der vorliegenden Arbeit liegt auf der Einführung von neuen *kinematischen Performance Indizes* für *Robot Control*. Solche Indizes müssen von der momentanen Konfiguration des Manipulators abhängen und somit den *pose dependent Performance Indizes* angehören. Wir werden vier neue *kinematische Performance Indizes* für *Robot Control* von 6R Robotern einführen, wobei zwei *EE dependent* sind (siehe Kapitel 3) und die anderen beiden *EE independent* (siehe Kapitel 4). Für Stewart Gough Plattformen wird in Kapitel 5 bzw. Kapitel 6 jeweils ein neuer *EE dependent* bzw. *EE independent Performance Index* definiert.

Analog zu bekannten Methoden lassen sich manche der neu eingeführten *Performance Indizes* für *Robot Control* auch für *Robot Design* verwenden. Dies ist für einen Index aus Kapitel 3 für 6R Roboter sowie für die beiden neu eingeführten Indizes für Stewart Gough Plattformen der Fall. Für letztere wird in Kapitel 5 bzw. Kapitel 7 auch eine Berechnung von optimalen Konfigurationen von Stewart Gough Plattformen im Sinn dieser Indizes durchgeführt.

Jeder der in dieser Arbeit neu eingeführten *kinematischen Performance Indizes* $PI(\mathcal{K})$ für 6R Roboter bzw. Stewart Gough Plattformen ordnet jedem Element \mathcal{K} des Konfigurationsraumes des Manipulators einen Skalar zu, wobei die folgenden sechs Eigenschaften erfüllt sind:

1. $PI(\mathcal{K}) \geq 0$ für alle \mathcal{K} des Konfigurationsraumes.
2. $PI(\mathcal{K}) = 0$ dann und nur dann, wenn \mathcal{K} singulär ist.
3. $PI(\mathcal{K})$ ist invariant gegenüber Euklidischen Bewegungen.
4. $PI(\mathcal{K})$ ist invariant gegenüber Ähnlichkeiten.
5. $PI(\mathcal{K})$ hat eine geometrisch-kinematische Deutung.
6. $PI(\mathcal{K})$ ist in *Echtzeit* berechenbar.

Die fünfte Eigenschaft, der zufolge der Index eine geometrisch-kinematische Deutung besitzen soll, war die eigentliche Motivation für die Suche nach neuen *Performance Indizes*, da diese Forderung von den bisher existierenden Indizes wenn überhaupt nur sehr beschränkt erfüllt worden ist.

Bei den *EE dependent Performance Indizes* muss sich auf Grund der Abhängigkeit vom Endeffektor die geometrisch-kinematische Deutung auf den Endeffektor beziehen. Dies gelingt bei den in dieser Arbeit neu definierten *EE dependent Performance Indizes* durch die Einführung des sogenannten *Operation Ellipsoids* und der Verwendung einer objektbezogenen Metrik im Raum der Euklidischen Bewegungen.

Da *EE independent Performance Indizes* vom Endeffektor unabhängig sind, kann sich die geometrisch-kinematische Deutung nur auf den Manipulator als ganzen beziehen. Bei den neu definierten *EE independent Performance Indizes* für 6R Roboter wird dies dadurch gewährleistet, dass sich diese Indizes auf eine lineare Approximation der Vorwärtskinematik stützen, womit die Indizes auch die Reihenfolge der Drehachsen berücksichtigen. Im Gegensatz dazu basiert der neue *EE independent Performance Index* für Stewart Gough Plattformen auf den Winkelgeschwindigkeiten in den passiven Gelenken des Manipulators. Dieser Index hängt deshalb nicht nur von den Trägergeraden der prismatischen Beine ab, sondern auch von der Wahl der Plattform- und Basisankerpunkte auf diesen. Somit besitzen die neuen *EE independent Performance Indizes* eine weitere gemeinsame Eigenschaft, nämlich:

7. $PI(\mathcal{K})$ hängt von der Geometrie des Manipulators ab.

Als Nebenprodukt der Überlegungen dieser Arbeit wird außerdem für jeden der vier neuen *Performance Indizes* für 6R Roboter noch eine gewichtete Version vorgeschlagen, wobei die Gewichtung bezüglich der benötigten Rotationsenergie vorgenommen wird. Diese Indizes sind aber keine *kinematischen Performance Indizes* mehr, da sie von der Masseverteilung des Roboters abhängen.

Danksagung

Mein Dank gebührt meinem Doktorvater O.Univ.Prof. Dr. Hellmuth Stachel, der während der Entstehungszeit dieser Arbeit stets Zeit für meine Fragen und Anliegen hatte. Besonders geschätzt habe ich den mir anvertrauten Gestaltungsfreiraum für das Verfassen meiner Dissertation sowie sein umfangreiches kinematisches und geometrisches Wissen, an welchem er mich seit Beginn meiner Diplomarbeit in vielen Diskussionen teilhaben ließ und so meine Denkweise nachhaltig geprägt hat.

Weiters möchte ich mich noch recht herzlich bei meinem Zweitgutachter Univ.Prof. Dr. Manfred Husty bedanken, dessen inspirierenden Arbeiten über Stewart Gough Plattformen mein Interesse an der Kinematik bekräftigt haben.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich mich auch bei allen Kollegen der Abteilung für *Differentialgeometrie und Geometrische Strukturen* sowie bei jenen der Abteilung für *Geometrische Modellierung und Industrielle Geometrie* des Instituts für Diskrete Mathematik und Geometrie der TU Wien bedanken, dass sie mich so herzlich aufgenommen haben. Insbesondere gilt mein Dank O.Univ.Prof. Dr. Helmut Pottmann und Univ.Prof. Dr. Johannes Wallner.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinem ehemaligen DG-Lehrer Herrn Georg Schilling, der durch seinen leidenschaftlich gehaltenen Unterricht meine Begeisterung für die Geometrie entfachte und ohne den ich daher nie diese Studienrichtung eingeschlagen hätte.

Der größte Dank gebührt jedoch meinen Eltern, die mich während meiner ganzen Studienzzeit in allen Belangen tatkräftig unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Grundlagen | 1 |
| 1.1 | Liniengeometrie | 1 |
| 1.1.1 | Plückerkoordinaten und das Kleinsche Modell | 1 |
| 1.1.2 | Lineare Komplexe | 3 |
| 1.1.3 | Lineare Mannigfaltigkeiten von linearen Komplexen | 6 |
| 1.2 | Raumkinematik | 9 |
| 1.2.1 | Speerkoordinaten und Duale Vektoren | 9 |
| 1.2.2 | Momentanschraubung und Führungsgeschwindigkeiten | 11 |
| 1.2.3 | Geschwindigkeiten bei Relativbewegungen | 15 |
| 2 | Einleitung | 17 |
| 2.1 | 6R Roboter | 17 |
| 2.1.1 | Die Jakobimatrix und singuläre Lagen | 19 |
| 2.2 | Stewart Gough Plattformen | 20 |
| 2.2.1 | Die Jakobimatrix und singuläre Lagen | 21 |
| 2.3 | Performance Indizes | 23 |
| 2.3.1 | Vorüberlegungen | 24 |
| 3 | EE dependent Performance Indizes für 6R Roboter | 26 |
| 3.1 | Review: Condition Number $CDN(\mathcal{K})$ | 26 |
| 3.1.1 | Interpretation und Varianz der $CDN(\mathcal{K})$ | 26 |
| 3.1.2 | Lösungskonzepte für die Varianz der $CDN(\mathcal{K})$ | 27 |
| 3.2 | Vorüberlegungen für einen neuen Performance Index | 28 |
| 3.2.1 | Objektbezogene Metrik und das Operation Ellipsoid | 29 |
| 3.3 | Der Performance Index $PI_{OE}(\mathcal{K})$ | 30 |
| 3.3.1 | Definition von $PI_{OE}(\mathcal{K})$ | 31 |
| 3.3.2 | Gewichtete Version des $PI_{OE}(\mathcal{K})$ | 32 |
| 3.4 | Der Performance Index $CDN_{OE}(\mathcal{K})$ | 33 |
| 3.4.1 | Geometrische Interpretation der charakteristischen Länge | 34 |
| 3.4.2 | Gewichtete Version der $CDN_{OE}(\mathcal{K})$ | 36 |
| 3.5 | Beispiel: ABB IRB 2000 | 37 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4 | EE independent Performance Indizes für 6R Roboter | 40 |
| 4.1 | Review: Manipulability $MPB(\mathcal{K})$ | 40 |
| 4.1.1 | Interpretation und Varianz von $MPB(\mathcal{K})$ | 41 |
| 4.2 | Vorüberlegungen für ein Abstandsmaß | 41 |
| 4.2.1 | Grundidee | 42 |
| 4.2.2 | Linearisierte Näherung der Vorwärtskinematik | 42 |
| 4.3 | Definition neuer Abstandsmaße | 44 |
| 4.3.1 | Das Abstandsmaß $DM_\infty(\mathcal{K}) = \Delta_L$ | 44 |
| 4.3.2 | Das Abstandsmaß $DM_2(\mathcal{K}) = \Delta_Q$ | 45 |
| 4.4 | Nähere Analyse von $DM_\infty(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$ | 46 |
| 4.4.1 | Visualisierung von $DM_\infty(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$ | 46 |
| 4.4.2 | Sonderfälle und Wohldefiniertheit von $DM_\infty(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$ | 47 |
| 4.5 | Gewichtete Versionen von $DM_\infty(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$ | 49 |
| 4.6 | Beispiel: ABB IRB 2000 | 50 |
| 5 | EE dependent Performance Indizes für SGPen | 54 |
| 5.1 | Review: Condition Number $CDN(\mathcal{K})$ | 54 |
| 5.2 | Der Performance Index $CDN_{OE}(\mathcal{K})$ | 55 |
| 5.3 | Isotrope Konfigurationen bezüglich $CDN_{OE}(\mathcal{K})$ | 57 |
| 6 | EE independent Performance Indizes für SGPen | 63 |
| 6.1 | Review | 63 |
| 6.1.1 | Manipulability | 63 |
| 6.1.2 | Bestapproximierender linearer Komplex | 64 |
| 6.1.3 | Rigidity Rate | 64 |
| 6.2 | Vorüberlegungen für einen neuen Performance Index | 65 |
| 6.2.1 | Unkontrollierbare Lagen | 66 |
| 6.3 | Der Performance Index $CTN(\mathcal{K})$ | 66 |
| 6.3.1 | Idee und Definition von $CTN(\mathcal{K})$ | 66 |
| 6.3.2 | Berechnung und Wohldefiniertheit von $CTN(\mathcal{K})$ | 68 |
| 6.3.3 | Momentanbewegung nahe singulären Lagen | 70 |
| 6.4 | Vergleichendes Beispiel | 71 |
| 7 | Konfigurationen mit maximaler Control Number | 76 |
| 7.1 | Motivation und Vorüberlegungen | 76 |
| 7.2 | 3-dof RPR Manipulatoren | 79 |
| 7.2.1 | Optimale Konfigurationen von \mathcal{M}_K^3 | 81 |
| 7.3 | Stewart Gough Plattformen | 84 |
| 7.3.1 | Hauptfall | 87 |
| 7.3.2 | Sonderfall | 95 |
| 7.3.3 | Beispiel | 100 |
| 8 | Zusammenfassung | 104 |

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Liniengeometrie

Die zum Verständnis dieser Arbeit notwendigen liniengeometrischen Grundlagen werden in diesem Abschnitt wiederholt bzw. erarbeitet. Dem mit diesem Gebiet der Geometrie nicht vertraute Leser wird zusätzlich das Buch [44] von Pottmann und Wallner empfohlen.

1.1.1 Plückerkoordinaten und das Kleinsche Modell

Wir betrachten den projektiven dreidimensionalen Raum P^3 . Eine Gerade $l \in \mathcal{L}$ ist eindeutig durch zwei Punkte $\mathbf{x} = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ und $\mathbf{y} = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$ mit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in l$ und $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ festgelegt, wobei \mathcal{L} die Geradenmenge des P^3 bezeichnet. Wenn wir jetzt das Grassmannprodukt $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ bilden, so erhalten wir die sechs homogenen Geradenkoordinaten $(l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12})$ mit

$$l_{ij} := x_i y_j - x_j y_i, \quad (1.1)$$

wobei man dieses 6-Tupel auch als die Plückerkoordinaten der Geraden l bezeichnet. Aus den Eigenschaften des Grassmannproduktes (bilinear und antikommutativ) folgt nun, dass die Darstellung der Geraden unabhängig von der Wahl der Punkte auf dieser ist, denn:

$$\mathbf{x} \wedge (\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}).$$

Da die Geradenmenge \mathcal{L} eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit ist, kann nicht jedes homogene 6-Tupel eine Gerade beschreiben. Die einschränkende Bedingung ergibt sich nun aus der folgenden Überlegung. Dazu berechnen wir die Determinante der folgenden 4×4 Matrix, die den Rang zwei hat und daher eine verschwindende Determinante.

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \dots = 2(l_{01}l_{23} + l_{02}l_{31} + l_{03}l_{12}) = 0 \quad (1.2)$$

Satz 1.1. *Jedes homogene nichttriviale 6-Tupel $(l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12})$, das die sogenannte Plückerbedingung $l_{01}l_{23} + l_{02}l_{31} + l_{03}l_{12} = 0$ erfüllt, stellt genau eine Gerade $l \in P^3$ dar.*

Beweis: Zuerst wollen wir die Existenz einer solchen Geraden zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $l_{01} \neq 0$ voraus; im gegenteiligen Fall verläuft der Beweis analog, aber mit anderer Indizierung. Aus den vorgegebenen Koordinaten l_{ij} bilden wir die zwei Punkte $\mathbf{p}_0 = (0 : l_{01} : l_{02} : l_{03})$ und $\mathbf{p}_1 = (-l_{01} : 0 : l_{12} : -l_{31})$. Wegen $l_{01} \neq 0$ gilt $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{p}_1$, sodass die Verbindungsgerade l existiert. Berechnet man nun die Plückerkoordinaten von l als $\mathbf{p}_0 \wedge \mathbf{p}_1$, so erhält man

$$\mathbf{s}_0 \wedge \mathbf{s}_1 = l_{01}^2 : l_{01}l_{02} : l_{01}l_{03} : -l_{02}l_{31} - l_{12}l_{03} : l_{01}l_{31} : l_{01}l_{12},$$

woraus unter Berücksichtigung der Plückerbedingung und der Tatsache, dass es sich um homogene Geradenkoordinaten handelt, das gewünschte Ergebnis folgt. Um die Eindeutigkeit der Geraden l nachzuweisen, reicht es aus sich zu überlegen, dass die verwendeten Punkte \mathbf{p}_0 und \mathbf{p}_1 die Schnittpunkte von l mit den Koordinatenebenen $x_0 = 0$ und $x_1 = 0$ darstellen. Da diese ja eindeutig bestimmt und verschieden sind, ist auch l als dessen Verbindungsgerade eindeutig. \square

Wir können die Plückerkoordinaten einer Geraden als die homogenen Koordinaten eines Punktes des fünfdimensionalen projektiven Raumes P^5 auffassen, der konsequenterweise die Basis $\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ hat, wenn $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ und \mathbf{e}_3 die Basis von P^3 darstellt. Diese Überlegung führt uns direkt zu der folgenden Definition der Kleinschen Abbildung.

Definition 1.1. Die Kleinsche Abbildung $\gamma : \mathcal{L} \rightarrow P^5$ ordnet jeder Geraden $l \in P^5$ den Punkt $(l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12})$ in P^5 zu, wobei $(l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12})$ die Plückerkoordinaten von l sind.

Da alle Geraden $\in \mathcal{L}$ der Plückerbedingung genügen, existiert eine Bijektion zwischen den Geraden des projektiven Dreiraumes und den Punkten der Quadrik Ω , der Nullstellenmenge der Gleichung (1.2). Wir wollen diese Quadrik infolge als die Kleinsche Quadrik bezeichnen und mit M_4^2 bezeichnen. Die Koordinatenmatrix der Kleinschen Quadrik bezüglich der Basis von P^5 ist regulär, denn

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{O}_3 & \frac{1}{2}\mathbf{E}_3 \\ \frac{1}{2}\mathbf{E}_3 & \mathbf{O}_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{64} \neq 0.$$

Eindimensionale Unterräume von M_4^2

Sei l eine Gerade des P^3 und $\mathbf{a}\mathbb{R}$ ein nichtinzidenter Punkt, dann definieren l und $\mathbf{a}\mathbb{R}$ ein Geradenbüschel, welches aus allen Geraden besteht, die durch $\mathbf{a}\mathbb{R}$ hindurchgehen und l im projektiven Sinn schneiden. Seien nun $\mathbf{x}\mathbb{R}$ und $\mathbf{y}\mathbb{R}$ zwei verschiedene Punkte auf l , so lauten die Plückerkoordinaten des Geradenbüschels

$$(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) \wedge \mathbf{a} = \lambda(\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}) + \mu(\mathbf{y} \wedge \mathbf{a}) = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y},$$

wenn \mathbf{x} bzw. \mathbf{y} die Verbindungsgerade des Punktes $\mathbf{x}\mathbb{R}$ bzw. $\mathbf{y}\mathbb{R}$ mit dem Punkt $\mathbf{a}\mathbb{R}$ bezeichnet. Daraus folgt nun, dass das Kleinsche Bild eines Geradenbüschels eine Gerade ist,

welche in M_4^2 enthalten ist, und dass diese Abbildung projektiv ist. Es sei nur bemerkt, dass man umgekehrt auch zeigen kann, dass die zu zwei Punkten der Kleinschen Quadrik korrespondierenden Geraden nur dann einander schneiden, wenn deren Verbindungsgerade ein Unterraum von M_4^2 ist.

Zweidimensionale Unterräume von M_4^2

Es sei nun eine Ebene, die durch die drei Punkte $\mathbf{x}\mathbb{R}$, $\mathbf{y}\mathbb{R}$ und $\mathbf{z}\mathbb{R}$ aufgespannt wird, und ein mit dieser Ebene nichtinzidenter Punkt $\mathbf{a}\mathbb{R} \in P^3$ gegeben. Dann lässt sich das Geradenbündel, welches aus allen durch $\mathbf{a}\mathbb{R}$ gehenden Geraden besteht, in Plückerkoordinaten als

$$(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \nu\mathbf{z}) \wedge \mathbf{a} = \lambda(\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}) + \mu(\mathbf{y} \wedge \mathbf{a}) + \nu(\mathbf{z} \wedge \mathbf{a}) = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \nu\mathbf{z}$$

schreiben, wenn \mathbf{x} bzw. \mathbf{y} bzw. \mathbf{z} die Verbindungsgerade des Punktes $\mathbf{x}\mathbb{R}$ bzw. $\mathbf{y}\mathbb{R}$ bzw. $\mathbf{z}\mathbb{R}$ mit dem Punkt $\mathbf{a}\mathbb{R}$ bezeichnet. Somit bildet die Kleinsche Abbildung ein Geradenbündel projektiv auf eine Ebene $\subset M_4^2$ ab.

Dual zum Geradenbündel ist ein Geradenfeld, also die Menge aller Geraden, die in einer Ebene liegen. Durch Anwendung des Dualitätsprinzipes folgt daraus sofort, dass das Kleinsche Bild eines Geradenfeldes ebenfalls ein zweidimensionaler Unterraum von M_4^2 ist. Somit trägt die Kleinsche Quadrik zwei 3-parametrische Scharen von Ebenen, welche einerseits mit Geradenbündel und andererseits mit Geradenfeldern korrespondieren. Es folgt unmittelbar, dass sich zwei Ebenen derselben Schar genau in einem Punkt schneiden und dass der Durchschnitt zweier Ebenen verschiedener Scharen entweder leer oder eine Gerade ist. M_4^2 besitzt keine dreidimensionalen Unterräume.

1.1.2 Lineare Komplexe

Zuerst wollen wir uns eine Bedingung erarbeiten, die die Nullgeradenmenge einer Nullpolarität κ charakterisiert. Dazu seien zuvor nochmals kurz die Eigenschaften einer Nullpolarität wiederholt. Eine Nullpolarität ist eine selbstadjungierte projektive Korrelation, wobei jeder Punkt selbstkonjugiert ist. Außerdem sollte die Tatsache bekannt sein, dass die Abbildungsmatrix \mathbf{C} der Nullpolarität schiefsymmetrisch ist. Eine detaillierte Diskussion dieses Sachverhalts findet sich in [44] und [47].

Satz 1.2. *Seien P und Q zwei zueinander konjugierte Punkte bezüglich der Nullpolarität κ mit $P \neq Q$, dann gilt $P \vee Q = (P \vee Q)\kappa$, was bedeutet, dass $P \vee Q$ eine Nullgerade ist, und umgekehrt gilt, dass man eine Nullgerade dadurch charakterisieren kann, dass auf ihr lauter Paare konjugierter Punkte liegen.*

Beweis: Da es sich bei κ um eine Nullpolarität handelt gilt, $P \in P\kappa$ und $Q \in Q\kappa$. Außerdem sind P und Q zueinander konjugiert, woraus $P \in Q\kappa$ und $Q \in P\kappa$ folgt, und für jede Korrelation gilt, dass die Verbindungsgerade zweier Punkte P und Q in die Schnittgerade der Ebenen $P\kappa$ und $Q\kappa$ übergeht. Daraus folgt nun

$$(P \vee Q)\kappa = P\kappa \cap Q\kappa = P \vee Q.$$

Betrachten wir nun umgekehrt eine Nullgerade $l = l\kappa$ und darauf zwei beliebige, voneinander verschiedene Punkte P und Q . Dann folgt daraus $l \subset P\kappa$ und $l \subset Q\kappa$, womit schon gezeigt ist, dass P und Q konjugiert sind. \square

Nun wollen wir mit Hilfe dieses Satzes eine analytische Bedingung herleiten, dass die Gerade l , auf der die beiden Punkte $\mathbf{x}\mathbb{R}$ und $\mathbf{y}\mathbb{R}$ liegen, eine Nullgerade ist. Nach $\mathbf{y}\mathbb{R}$ in der Nullebene von $\mathbf{x}\mathbb{R}$ bezüglich κ liegen muss und umgekehrt, was analytisch folgendes bedeutet:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{y} = \sum_{i,j} c_{ij} x_i y_j = \sum_{i < j} (c_{ij} x_i y_j + c_{ji} x_j y_i) = \sum_{i < j} c_{ij} (x_i y_j - x_j y_i) = 0.$$

Bezeichnen wir jetzt analog zu (1.1) den Ausdruck $x_i y_j - x_j y_i$ mit l_{ij} , so folgt daraus:

$$\sum_{i < j} c_{ij} l_{ij} = c_{01} l_{01} + c_{02} l_{02} + c_{03} l_{03} + c_{23} l_{23} + c_{31} l_{31} + c_{12} l_{12} = 0.$$

Bevor wir jetzt dieses Ergebnis im Satz 1.3 formulieren, wollen wir noch die folgenden Vereinbarungen bezüglich der Notation treffen, mit deren Hilfe sich kommende Sachverhalte übersichtlicher anschreiben lassen:

$$(l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12}) = (\mathbf{l}, \hat{\mathbf{l}})\mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mathbf{l} = (l_{01}, l_{02}, l_{03}) \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{l}} = (l_{23}, l_{31}, l_{12}).$$

Satz 1.3. *Gegeben sei eine Nullpolarität κ durch deren Abbildungsmatrix \mathbf{C} mit $c_{ij} = -c_{ji}$ und sei $\mathbf{c} := (c_{23}, c_{31}, c_{12})$ und $\hat{\mathbf{c}} := (c_{01}, c_{02}, c_{03})$. Dann ist die Gerade l mit den Plückerkoordinaten $(\mathbf{l}, \hat{\mathbf{l}})\mathbb{R}$ genau dann eine Nullgerade von κ , wenn $\hat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{l}} = 0$ gilt.*

Wir haben nun gezeigt, dass die Nullgeraden, dargestellt in Plückerkoordinaten, durch eine lineare Gleichung charakterisiert sind. Wir wollen nun allgemein solche Geradenmengen, wie folgt, bezeichnen:

Definition 1.2. *Eine Menge \mathfrak{C} von Geraden, deren Plückerkoordinaten eine homogene lineare Gleichung erfüllen, heißt ein linearer Geradenkomplex oder kurz ein linearer Komplex, wobei die Gleichung immer in der Form $\hat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{l}} = 0$ geschrieben werden kann. Falls $(\mathbf{c}, \hat{\mathbf{c}})$ eine Gerade darstellt, also $\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{c}} = 0$ gilt, wollen wir den linearen Komplex als singular bezeichnen, ansonsten heißt er regulär.*

Bevor wir den nächsten Satz formulieren, wollen wir uns noch überlegen, wann sich die Gerade l , die durch die Punkte $\mathbf{x}\mathbb{R}$ und $\mathbf{y}\mathbb{R}$ aufgespannt wird, und die Gerade g , auf der die Punkte $\mathbf{u}\mathbb{R}$ und $\mathbf{v}\mathbb{R}$ liegen, einander schneiden. Die beiden Geraden schneiden einander genau dann, wenn die genannten vier Punkte in einer Ebene liegen, was nun analytisch bedeutet, dass

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = l_{01} g_{23} + l_{02} g_{31} + l_{03} g_{12} + l_{23} g_{01} + l_{31} g_{02} + l_{12} g_{03} = \mathbf{l} \cdot \hat{\mathbf{g}} + \hat{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{g} = 0$$

ist. Somit sind schneidende Geraden l und g durch $\mathbf{l} \cdot \hat{\mathbf{g}} + \hat{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{g} = 0$, die Schnittbedingung von Sommerville, gekennzeichnet.

Satz 1.4. *Ein singulärer linearer Komplex \mathfrak{C} besteht aus allen Geraden, die die fixe Gerade $(\mathbf{c}, \widehat{\mathbf{c}})$, die auch Achse des singulären Komplexes genannt wird, schneiden. Jeder reguläre lineare Komplex ist die Menge der Nullgeraden einer Nullpolarität κ .*

Beweis: Wenn nun $(\mathbf{c}, \widehat{\mathbf{c}})$ eine Gerade repräsentiert, dann folgt die erste Behauptung direkt aus der zuvor hergeleiteten Schnittbedingung von Sommerville.

Nun sei \mathfrak{C} ein regulärer linearer Komplex mit $\widehat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{c} \cdot \widehat{\mathbf{l}} = 0$, $\mathbf{c} \cdot \widehat{\mathbf{c}} \neq 0$, und mit $\widehat{\mathbf{c}} = (c_{01}, c_{02}, c_{03})$, $\mathbf{c} = (c_{23}, c_{31}, c_{12})$. Die c_{ij} bestimmen nun eine schiefsymmetrische Matrix $\mathbf{C} = (c_{ij})$, deren Determinante gleich $(c_{01}c_{23} + c_{02}c_{31} + c_{03}c_{12})^2 = (\mathbf{c} \cdot \widehat{\mathbf{c}})^2 \neq 0$ ist. Somit ist \mathbf{C} regulär und beschreibt eine Nullpolarität κ , deren Nullgeradenmenge nach Satz 1.3 die Gleichung $\widehat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{c} \cdot \widehat{\mathbf{l}} = 0$ erfüllt. \square

Satz 1.5. *Die Menge der Bahnnormalen einer Schraubung ist gleich der Menge der eigentlichen Geraden eines regulären linearen Komplexes und umgekehrt.*

Beweis: Dazu wollen wir zuerst die Schraubung σ um die z-Achse mit Schraubparameter p und reellen Parameter t anschreiben:

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \cdot t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Es sei bemerkt, dass $p \neq 0$ ist, da es sich ansonsten um keine Schraubung, sondern um eine reine Drehung um die z-Achse handelt. Wir wollen nun das Geschwindigkeitsvektorfeld der Schraubung berechnen, indem wir $\dot{\mathbf{x}}(t)$ bilden:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t & 0 \\ \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ p \end{pmatrix} = \mathbf{v}. \quad (1.4)$$

Es sei nur bemerkt, dass das so erhaltene Geschwindigkeitsvektorfeld zeitunabhängig ist. Nun wollen wir die Plückerkoordinaten $(\mathbf{l}, \widehat{\mathbf{l}})$ einer Bahnnormalen berechnen, die aufgespannt wird durch (\mathbf{l}, \mathbf{x}) und den Fernpunkt $(0, \mathbf{n})$, wobei \mathbf{n} auf \mathbf{v} normal steht. Somit erhalten wir für $(\mathbf{l}, \widehat{\mathbf{l}}) = (\mathbf{n}, \mathbf{x} \times \mathbf{n})$, und weiters muss gelten, dass die Bahnnormalen auf \mathbf{v} orthogonal stehen, woraus die Bedingung $\mathbf{l} \cdot \mathbf{v} = -yl_{01} + xl_{02} + pl_{03} = 0$ folgt, da \mathbf{l} den Richtungsvektor der Bahnnormalen darstellt. Wir wollen nun noch eine Bedingung formulieren, die angibt, wann der Punkt \mathbf{x} auf der Bahnnormalen $(\mathbf{l}, \widehat{\mathbf{l}})$ liegt. Dazu wollen wir zuerst eine Gerade durch \mathbf{x} bestimmen, die parallel zu der Bahnnormalen ist, also als $(\mathbf{l}, \mathbf{x}) \vee (0, \mathbf{l}) = (\mathbf{l}, \mathbf{x} \times \mathbf{l})$ berechnet werden kann. Daraus folgt nun die Inzidenzbedingung $\widehat{\mathbf{l}} = \mathbf{x} \times \mathbf{l}$, woraus man $l_{12} = -yl_{01} + xl_{02}$ erhlt. Somit erfüllen alle Bahnnormalen die Gleichung $pl_{03} + l_{12} = 0$ und liegen somit in einem linearen Komplex.

Nun wollen wir noch den Beweis in die umgekehrte Richtung führen. Sei nun κ die mit dem linearen Komplex assoziierte Nullpolarität in P^3 mit A_u als Nullpunkt der Fernebene ω . Diejenige Gerade l durch A_u , deren Nullpolare $l\kappa$ die absolute Polare von A_u ist, heißt die Gewindeachse des Nullgeradengewindes von κ . Nun wählen wir ein projektives Koordinatensystem so, dass der Ursprung auf der Geraden l liegt, die zugleich die z-Achse darstellen soll. Wenn wir das Koordinatensystem mit $\mathbf{b}_0\mathbb{R}, \mathbf{b}_3\mathbb{R} \in l$ und $\mathbf{b}_1\mathbb{R}, \mathbf{b}_2\mathbb{R} \in l\kappa$

wählen, folgt daraus sofort, dass der Geradenkomplex in diesem neuen Koordinatensystem die Gleichung $pl_{03} + l_{12} = 0$ erfüllt. Somit hat die Abbildungsmatrix \mathbf{C} der Nullpolarität die folgende Gestalt:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt für die Ebenenkoordinaten der Nullebene $P\kappa$ des eigentlichen Punktes $P = (1 : \xi : \eta : \zeta)$ folgendes: $P\kappa = (-\zeta p : -\eta : \xi : p)$. Die Nullebene $P\kappa$ genügt also der kartesischen Gleichung $-\zeta p - \eta x + \xi y + pz = 0$, womit $(-\eta, \xi, p)$, den Normalvektor auf diese Ebene darstellt. Das ist aber laut (1.4) ein Tangentenvektor von P an die durch P gehende Schraublinie mit dem Schraubparameter p . \square

Wir wollen nun noch die zwei in diesem Satz nicht berücksichtigten Grenzfälle der Schraubung betrachten, nämlich wenn einerseits $p = 0$ bzw. $p = \infty$ ist. Im ersten Fall handelt es sich, wie schon zuvor erwähnt, um eine reine Drehung um die z-Achse, woraus sofort folgt, dass alle Bahnnormalen diese schneiden und somit in einem singulären linearen Komplex mit eigentlicher Achse liegen. Im anderen Fall handelt es sich um eine reine Schiebung entlang der Schraubachse, wodurch alle Bahnnormalen die Ferngerade der xy-Ebene schneiden und somit auch einen singulären linearen Komplex bilden, jedoch jetzt mit uneigentlicher Komplexachse.

1.1.3 Lineare Mannigfaltigkeiten von linearen Komplexen

Bislang fehlt uns eine geometrische Interpretation jener Punkte des P^5 , die nicht auf M_4^2 liegen. Das Kleinsche Bild der Geraden eines linearen Komplexes \mathfrak{C} erfüllen ja die homogene lineare Gleichung $\widehat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{c} \cdot \widehat{\mathbf{1}} = 0$, was nun bedeutet, dass diese Geraden im Durchschnitt der durch diese Gleichung festgelegten vierdimensionalen Hyperebene mit der Kleinschen Quadrik liegen. Dieser Gleichung ist auch zu entnehmen, dass der Punkt $(\mathbf{c}, \widehat{\mathbf{c}})\mathbb{R}$ mit jedem Punkt der Hyperebene bezüglich der Polarität an M_4^2 konjugiert ist, also der Pol der Hyperebene ist. Somit haben wir eine geometrische Interpretation dieser Punkte geliefert und können nun eine erweiterte Kleinsche Abbildung $\widehat{\gamma}$ definieren.

Definition 1.3. *Die erweiterte Kleinsche Abbildung $\widehat{\gamma}$ bildet einen linearen Komplex, der durch die Gleichung $\widehat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{c} \cdot \widehat{\mathbf{1}} = 0$ bestimmt ist, auf den Punkt $(\mathbf{c}, \widehat{\mathbf{c}})\mathbb{R}$ des P^5 ab.*

Es sei nun bemerkt, dass diese erweiterte Kleinsche Abbildung eine Bijektion zwischen der Menge der linearen Komplexe des P^3 und den Punkten des P^5 darstellt, wobei genau den Punkten auf der Plückerquadrik singuläre Geradenkomplexe entsprechen.

Büschel linearer Komplexe

Eine einparametrische lineare Mannigfaltigkeit von linearen Komplexen heißt ein Büschel von linearen Komplexen. Das Bild eines solchen Büschels unter der erweiterten Kleinschen Abbildung ist eine Gerade \mathfrak{G} in P^5 . Infolge sind jetzt vier Fälle zu unterscheiden, je nachdem ob diese Gerade Teilmenge, Sekante, Tangente oder Passante von M_4^2 ist.

Teilmenge Nun besteht das Büschel aus lauter singulären linearen Komplexen. Die zugehörigen Achsen liegen in P^3 in einem Büschel um den Punkt B . Die Geradenmenge, die nun all diesen singulären Komplexen angehört, besteht aus allen Geraden der Ebene, die durch die Achsen der linearen Komplexe aufgespannt wird, und einem Geradenbündel durch den Punkt B . Das Kleinsche Bild dieser Geradenmenge, das nun im dreidimensionalen Polarraum von \mathfrak{G} bezüglich M_4^2 liegen muss, entspricht zwei Ebenen von M_4^2 , die unterschiedlichen Scharen angehören und sich entlang einer Geraden schneiden.

Sekante In diesem Fall beinhaltet die Gerade \mathfrak{G} genau zwei singuläre Komplexe, und man bezeichnet daher dieses Büschel auch als hyperbolisch. Die Geradenmenge, die nun allen linearen Komplexen des Büschels angehört, ist somit gleich der Treffgeradenmenge der beiden Achsen der singulären linearen Komplexe und heißt hyperbolisches Netz. Die Achsen sind stets windschief, da ja die Verbindungsgerade der den Achsen entsprechenden Punkte im Bildraum keine Teilmenge von M_4^2 ist. Es kann sich leicht überlegt werden, dass das Kleinsche Bild der Treffgeradenmenge der beiden Achsen, das nun wiederum im dreidimensionalen Polarraum von \mathfrak{G} bezüglich M_4^2 liegen muss, ein Hyperboloid ist.

Passante Die Gerade \mathfrak{G} trägt keine singulären Komplexe, und daher wird das Büschel auch als elliptisch bezeichnet. Jedoch existieren zwei konjugiert komplexe Schnittpunkte von \mathfrak{G} mit M_4^2 über dem Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} . Diese Punkte entsprechen zwei konjugiert komplexen Geraden k und \bar{k} in der komplexen Erweiterung von P^3 , die aus demselben Grund wie zuvor windschief zueinander liegen müssen, also hochimaginär sind. Somit besteht die Geradenmenge, die nun allen linearen Komplexen des elliptischen Büschels angehört und die wir als elliptisches Netz bezeichnen, aus den reellen Treffgeraden der konjugiert komplexen hochimaginären Geraden k und \bar{k} . Um diese abstrakte Aussage etwas anschaulicher zu gestalten, wollen wir uns nun überlegen, dass durch jeden reellen Punkt $X \in P^3$ genau eine Netzgerade geht: Die Treffgerade t läßt sich nun als $(X \vee k) \cap (X \vee \bar{k})$ anschreiben. Bilden wir nun das Konjugium, so erhalten wir:

$$\bar{t} = \overline{(X \vee k) \cap (X \vee \bar{k})} = (\bar{X} \vee \bar{k}) \cap (\bar{X} \vee k) = (X \vee \bar{k}) \cap (X \vee k) = t \implies t \text{ ist reell.}$$

Wenn wir nun das Kleinsche Bild der Treffgeradenmenge der zwei konjugiert komplexen hochimaginären Geraden bestimmen wollen, könnten wir genauso argumentieren wie im Fall des hyperbolischen Netzes, nur mit dem Unterschied, dass wir uns jetzt über dem Körper der komplexen Zahlen befinden. Wir erhalten somit einmal eine Schar von komplexen Geraden im Bildraum, die alle paarweise windschief sind. Die andere Schar besteht nun aus allen Geraden, die zu jenen der ersten Schar konjugiert sind, da die Netzachsen konjugiert komplex sind. Eine Gerade der ersten Schar und deren konjugierte aus der zweiten Schar haben nun genau einen reellen Schnittpunkt, der der gemeinsamen Geraden der den beiden konjugiert komplexen Geraden entsprechenden Geradenbüschel entspricht. Diese Gerade ist reell, da sie unter dem Konjugium in sich übergeht. Somit beinhalten die beiden Scharen lauter niederimaginäre Geraden, womit es sich um eine ovale Quadrik handelt.

Tangente Nun enthält \mathfrak{G} genau einen singulären linearen Komplex, und man nennt das Bündel parabolisch. Das Bündel wird nun aufgespannt durch eben diesen linearen Komplex sowie durch einen beliebigen regulären Komplex $\in \mathfrak{G}$. Die Achse des singulären Komplexes gehört nun jedem beliebigen regulären Komplex von \mathfrak{G} an, da das Kleinsche Bild der Achse, das mit dem Berührungspunkt von \mathfrak{G} mit M_4^2 übereinstimmt, stets in der Polarebene eines regulären Komplexes $\in \mathfrak{G}$ bezüglich M_4^2 liegt, weil ja \mathfrak{G} eine Tangente der Kleinschen Quadrik ist. Somit besteht die gemeinsame Geradenmenge aller linearen Komplexe des parabolischen Bündels, die nun konsequenterweise als parabolisches Netz bezeichnet wird, aus allen Nullgeraden der durch einer der regulären linearen Komplexe $\in \mathfrak{G}$ induzierten Nullpolarität κ , die die Achse des singulären Komplexes, die eine Nullgerade von κ ist, schneiden. Es kann sich leicht überlegt werden, dass durch jeden Punkt X des P^3 genau eine Netzgerade des parabolischen Netzes geht und dass das Kleinsche Bild der parabolischen Netzgeradenmenge ein quadratischer Kegel ist.

Bündel linearer Komplexe

Eine zweidimensionale lineare Mannigfaltigkeit von linearen Komplexen heißt ein Bündel von linearen Komplexen. Das Bild eines solchen Bündels unter der erweiterten Kleinschen Abbildung ist eine Ebene ε in P^5 . Nun sind wiederum einige Fallunterscheidungen notwendig je nachdem, wie die Ebene ε zu M_4^2 liegt. Neben den Trivialfällen, in denen ε ein Unterraum von M_4^2 ist, existieren noch die folgenden zwei interessanten Fälle. Der Schnitt aus ε mit M_4^2 besteht aus:

2 reellen Geraden \mathfrak{C} und \mathfrak{F} . Nun enthält $\varepsilon \cap M_4^2$ lauter singuläre Komplexe, deren Achsen auf zwei Geradenbündel verteilt sind, je nachdem, ob das $\hat{\gamma}$ -Bild des singulären Komplexes auf \mathfrak{C} oder \mathfrak{F} liegt. Diese zwei Geradenbündel haben genau eine Gerade gemein, nämlich jene, deren Kleinsches Bild gleich dem Schnittpunkt von \mathfrak{C} oder \mathfrak{F} ist. Außerdem sei noch bemerkt, dass die Geradenbündel auch stets in zwei voneinander verschiedenen Ebenen liegen müssen, da ansonsten ε eine Teilmenge von M_4^2 sein müsste, was einen Widerspruch zu unserer Voraussetzung darstellen würde. Die Geradenmenge, die nun all diesen singulären Komplexen angehört, verteilt sich wiederum auf zwei voneinander verschiedene Geradenbündel. Jedes dieser Bündel hat denselben Bündelscheitel wie ein Geradenbündel der Achsen, jedoch liegt es in der Ebene, die durch das andere Achsenbündel aufgespannt wird.

1 reellen Kegelschnitt. Je drei paarweise verschiedene Punkte dieses Kegelschnittes, die mit singulären Geradenkomplexen korrespondieren, spannen nun die Ebene ε auf. Die Achsen dieser singulären Komplexe liegen zueinander paarweise windschief, denn würden sich zwei der Achsen schneiden, so müsste die Verbindungsgerade der Kleinschen Bilder der Achsen eine Teilmenge von M_4^2 sein, woraus sofort folgen würde, dass der Kegelschnitt zerfallen müsste, was einen Widerspruch zu unserer Annahme darstellt. Die Geradenmenge, die nun allen singulären Komplexen von ε angehört, ist somit äquivalent mit der Treffgeradenmenge der zuvor genannten drei paarweise windschiefen Achsen der Komplexe. Dies ist bekanntlich ein Regulus.

1.2 Raumkinematik

In diesem Abschnitt werden die für das Verständnis dieser Arbeit notwendigen Sätze und Ergebnisse der Raumkinematik angeführt. Empfehlenswerte Literatur zu diesem Themenkomplex sind [1, 6, 22, 48].

1.2.1 Speerkoordinaten und Duale Vektoren

Wir betrachten die Geraden \mathbf{g} des Euklidischen Dreiraums E^3 , welcher mit einem Kartesischen Koordinatensystem versehen ist. Bevor wir die Speerkoordinaten einführen, müssen wir erklären was unter einem Speer verstanden wird:

Definition 1.4. *Eine orientierte Gerade (= Speer) $\vec{\mathbf{g}}$ ist eine Gerade $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^3$ welche mit einer Orientierung versehen ist. Somit trägt jede Gerade \mathbf{g} genau zwei entgegengesetzt orientierte Speere $\vec{\mathbf{g}}$ bzw. $\overleftarrow{\mathbf{g}}$.*

Jede Gerade $\mathbf{g} \in E^3$ kann durch die Plückerkoordinaten $(\mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}})\mathbb{R}$ mit $\|\mathbf{g}\| \neq 0$ dargestellt werden. Wir wollen nun die normierten Plückerkoordinaten von \mathbf{g} definieren als:

$$\pm \|\mathbf{g}\|^{-1}(\mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}}).$$

Somit existieren für jede Gerade $\mathbf{g} \in E^3$ zwei normierte Plückerkoordinaten, welche mit den zwei möglichen orientierten Geraden (=Speere) $\vec{\mathbf{g}}$ bzw. $\overleftarrow{\mathbf{g}}$ von \mathbf{g} korrespondieren. Die zu einer orientierten Geraden $\vec{\mathbf{g}}$ gehörigen normierten Plückerkoordinaten heißen Speerkoordinaten. Daraus folgt unmittelbar, dass man jeden Speer umkehrbar eindeutig durch Speerkoordinaten festlegen kann.

Die Speerkoordinaten der orientierten Geraden $\vec{\mathbf{g}} \in E^3$ können somit wie folgt berechnet werden: Sei \mathbf{g} der normierte Richtungsvektor der orientierten Geraden $\vec{\mathbf{g}}$ und \mathbf{x} der Ortsvektor eines Punktes X auf dieser, dann lauten die Speerkoordinaten dieser Geraden, wie folgt:

$$(\mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}}) \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{g}\| = 1 \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{g}} = \mathbf{x} \times \mathbf{g}. \quad (1.5)$$

Den Vektor $\hat{\mathbf{g}}$ nennt man auch Momentenvektor. Es kann leicht gezeigt werden, dass der Ortsvektor \mathbf{f} des Fußpunktes F der aus dem Koordinatenursprung U legbaren Normalen gegeben ist durch $\mathbf{f} = \mathbf{g} \times \hat{\mathbf{g}}$. Außerdem gibt die Länge des Momentvektors genau den Normalabstand des Koordinatenursprungs von der orientierten Geraden an, also $\|\hat{\mathbf{g}}\| = \overline{UF}$.

Duale Zahlen \mathbb{D}

$\mathbb{D} := \left\{ \underline{d} := d + \varepsilon \hat{d} \text{ mit } d, \hat{d} \in \mathbb{R} \text{ und } \varepsilon^2 = 0 \right\}$ bezeichnet die Menge der dualen Zahlen, wobei d Realteil und \hat{d} Dualteil heißt. Duale Zahlen mit verschwindendem Realteil bezeichnet man auch als reine duale Zahlen. Die Addition zweier dualer Zahlen \underline{d}_1 und \underline{d}_2 ist komponentenweise definiert:

$$\underline{d}_1 + \underline{d}_2 := (d_1 + \varepsilon \hat{d}_1) + (d_2 + \varepsilon \hat{d}_2) = (d_1 + d_2) + \varepsilon(\hat{d}_1 + \hat{d}_2). \quad (1.6)$$

Die Verknüpfung $+$ führt aus der Menge \mathbb{D} nicht heraus und ist auch kommutativ. \mathbb{D} stellt bezüglich der Addition sogar eine abelsche Gruppe dar, denn einerseits ist die Addition assoziativ und andererseits existiert ein neutrales Element $\underline{n} = 0$ und zu jedem $\underline{d} \in \mathbb{D}$ ein inverses Element $-\underline{d} \in \mathbb{D}$. Das Produkt zweier dualer Zahlen wird distributiv unter Beachtung von $\varepsilon^2 = 0$ gebildet:

$$\underline{d}_1 \underline{d}_2 := (d_1 + \varepsilon \widehat{d}_1) + (d_2 + \varepsilon \widehat{d}_2) = d_1 d_2 + \varepsilon(d_1 \widehat{d}_2 + \widehat{d}_1 d_2). \quad (1.7)$$

Die Multiplikation führt nicht aus \mathbb{D} heraus und ist kommutativ sowie assoziativ. Außerdem gelten, wie durch Nachrechnen bestätigt werden kann, die Distributivgesetze, woraus folgt, dass $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist. Dieser enthält jedoch die Menge der reinen dualen Zahlen als Nullteiler, denn $(\varepsilon \widehat{d}_1)(\varepsilon \widehat{d}_2) = \varepsilon^2 \widehat{d}_1 \widehat{d}_2 = 0$. Die duale Zahl $\underline{d}_\kappa = d - \varepsilon \widehat{d}$ heißt dual konjugiert bezüglich $\underline{d} = d + \varepsilon \widehat{d}$.

Für analytische Funktionen $f(d)$ definiert man eine Fortsetzung $\underline{f}(\underline{d})$ ins Duale gemäß:

$$\underline{f}(\underline{d}) = \underline{f}(d + \varepsilon \widehat{d}) := f(d) + \varepsilon \widehat{d} f'(d). \quad (1.8)$$

Dies kann als Anfang einer Taylorentwicklung gesehen werden; wegen $\varepsilon^2 = \varepsilon^3 = \dots = 0$ verschwinden alle Glieder höherer Ordnung. Somit müssen alle Formeln, die für Taylorreihen gültig sind erhalten bleiben, wie zum Beispiel:

$$\underline{\sin}^2(d + \varepsilon \widehat{d}) + \underline{\cos}^2(d + \varepsilon \widehat{d}) = 1 \quad \text{mit} \quad (1.9)$$

$$\underline{\sin}(d + \varepsilon \widehat{d}) = \sin(d) + \varepsilon \widehat{d} \cos(d) \quad \text{und} \quad \underline{\cos}(d + \varepsilon \widehat{d}) = \cos(d) - \varepsilon \widehat{d} \sin(d). \quad (1.10)$$

Duale Vektoren und Study Sphäre

Analog zu den reellen Zahlen lassen sich auch beliebige Paare von Vektoren $\mathbf{v}, \widehat{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ zu einem dualen Vektor $\underline{\mathbf{v}} := \mathbf{v} + \varepsilon \widehat{\mathbf{v}}$ zusammenfassen. Der duale Vektor ist Element von $\mathbb{D}^3 := \mathbb{R}^3 + \varepsilon \mathbb{R}^3$. Neben der Addition und der skalaren Multiplikation (mit Dualzahlen) lassen sich aber auch das Skalar-, Vektor- und Spatprodukt auf duale Vektoren fortsetzen gemäß:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{w}} &:= \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \varepsilon(\widehat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \widehat{\mathbf{w}}), \\ \underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}} &:= \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \varepsilon[(\widehat{\mathbf{v}} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \widehat{\mathbf{w}})], \\ \det(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}}) &:= \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varepsilon[\det(\widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \det(\mathbf{u}, \widehat{\mathbf{v}}, \mathbf{w}) + \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \widehat{\mathbf{w}})]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Alle diese Produkte sind linear in jedem Faktor. Es gelten also Distributivgesetze, und die Produkte sind mit der skalaren Multiplikation mit Dualzahlen vertauschbar.

Fassen wir nun die Speerkoordinaten $(\mathbf{g}, \widehat{\mathbf{g}})$ einer orientierten Geraden $\vec{\mathbf{g}}$ zu einem dualen Vektor zusammen so erhalten wir $\underline{\mathbf{g}} := \mathbf{g} + \varepsilon \widehat{\mathbf{g}}$. Auf Grund von (1.5) gilt $\underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{g}} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} + 2\varepsilon \mathbf{g} \cdot \widehat{\mathbf{g}} = 1$. Derartige Vektoren heißen duale Einheitsvektoren. Wir wollen die Ergebnisse in der folgenden Definition zusammenfassen:

Definition 1.5. Die bijektive Abbildung welcher jeder orientierten Geraden $\vec{\mathbf{g}}$ des Euklidischen Raumes den dualen Einheitsvektor $\underline{\mathbf{g}} = \mathbf{g} + \varepsilon \widehat{\mathbf{g}}$ zuordnet, wobei $(\mathbf{g}, \widehat{\mathbf{g}})$ die normierten Plückerkoordinaten von $\vec{\mathbf{g}}$ sind, heißt Study Abbildung. Das Bild dieser Abbildung heißt das Study Modell oder die Study Sphäre der orientierten Geraden des Euklidischen Raumes E^3 .

Als Vorbereitung für den nächsten Abschnitt wollen wir noch den folgenden Satz zeigen:

Satz 1.6. Jeder duale Vektor $\underline{\mathbf{v}}$ lässt sich als Vielfaches $\underline{\mathbf{v}} = \lambda \underline{\mathbf{g}}$ eines dualen Einheitsvektors $\underline{\mathbf{g}}$ darstellen. Die Trägergerade von $\underline{\mathbf{g}}$ ist allerdings nur dann eindeutig bestimmt, wenn der Realteil von $\underline{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \varepsilon \widehat{\mathbf{v}}$ nicht verschwindet.

Beweis: Da
$$\underline{\mathbf{v}} = \lambda \underline{\mathbf{g}} \iff \mathbf{v} + \varepsilon \widehat{\mathbf{v}} = \lambda \mathbf{g} + \varepsilon (\widehat{\lambda \mathbf{g}} + \lambda \widehat{\mathbf{g}}).$$

offensichtlich gilt, erhalten wir durch Quadrieren Folgendes:

$$\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^2 + 2\varepsilon(\mathbf{v} \cdot \widehat{\mathbf{v}}) = \lambda^2(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) + 2\varepsilon[\lambda \widehat{\lambda}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) + \lambda^2(\mathbf{g} \cdot \widehat{\mathbf{g}})] = \lambda^2 + 2\varepsilon \lambda \widehat{\lambda}.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert: $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{g}$, $\widehat{\mathbf{v}} = \widehat{\lambda \mathbf{g}} + \lambda \widehat{\mathbf{g}}$ und $\mathbf{v} \cdot \widehat{\mathbf{v}} = \lambda \widehat{\lambda}$.

Fall a) $\lambda \neq 0$: Wir erhalten

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{v} \text{ und } \widehat{\mathbf{g}} = \frac{1}{\lambda} [\widehat{\mathbf{v}} - \widehat{\lambda \mathbf{g}}] = \frac{1}{\lambda} \left[\widehat{\mathbf{v}} - \frac{\lambda \widehat{\lambda}}{\lambda^2} \mathbf{v} \right] \implies \underline{\mathbf{g}} := \frac{\pm 1}{\|\mathbf{v}\|} \left[\mathbf{v} + \varepsilon \left(\widehat{\mathbf{v}} - \frac{\mathbf{v} \cdot \widehat{\mathbf{v}}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) \right]. \quad (1.12)$$

Der Vektor in der runden Klammer ergibt genau die zu \mathbf{v} orthogonale Komponente von $\widehat{\mathbf{v}}$ (vgl. das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren).

Fall b) $\lambda = 0$: Gilt neben $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ überdies $\widehat{\mathbf{v}} = \mathbf{o}$, so setzen wir auch $\widehat{\lambda} = 0$ und wählen den Einheitsvektor $\underline{\mathbf{g}}$ beliebig. Ist jedoch $\widehat{\mathbf{v}} \neq \mathbf{o}$ so wird $\widehat{\lambda} = \|\widehat{\mathbf{v}}\|$ und $\mathbf{g} = \frac{1}{\widehat{\lambda}} \widehat{\mathbf{v}}$ gewählt.

Dann ist für beliebiges $\widehat{\mathbf{g}}$ mit $\widehat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{g} = 0$ die Gleichung $\underline{\mathbf{v}} = \widehat{\lambda} \underline{\mathbf{g}}$ erfüllt. \square

1.2.2 Momentanschraubung und Führungsgeschwindigkeiten

Wir nehmen an, der *Gangraum* Σ_G mit dem Gangkoordinatensystem $(G, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3)$ führt gegenüber dem *Rastraum* Σ_0 mit dem Rastkoordinatensystem $(U, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ einen von der Zeit t abhängigen räumlichen Zwanglauf Σ_G/Σ_0 durch. Damit sind die Rastkoordinaten \mathbf{m} von G und jene der Basisvektoren $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$ Funktionen der Zeit t . Letztere bilden die Spaltenvektoren in jener orthogonalen Matrix \mathbf{A} , welche zu jedem Zeitpunkt t bei der Umrechnung der Gangkoordinaten \mathbf{x}_G eines Punktes X aus Σ_G auf die Rastkoordinaten \mathbf{x} des augenblicklich deckungsgleichen Punktes aus Σ_0 gemäß $\mathbf{x} = \mathbf{m} + \mathbf{A} \mathbf{x}_G$ auftritt. Diese Umrechnungsgleichungen dienen nun zur Darstellung des Zwanglaufes

$$\Sigma_G/\Sigma_0: \mathbf{x} = \mathbf{m}(t) + \mathbf{A}(t) \mathbf{x}_G \text{ mit } \mathbf{A}(t) \mathbf{A}(t)^T = \mathbf{E} \text{ und } \det \mathbf{A}(t) = 1 \quad (1.13)$$

für $t \in I$. Dabei seien die verwendeten Funktionen innerhalb des gegebenen Zeitintervalles I als hinreichend oft differenzierbar vorausgesetzt.

Nach Differentiation von (1.13) erhalten wir die Führungsgeschwindigkeit

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}) := \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{m}} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{x}_G$$

des Punktes \mathbf{X} , welche durch den Zwangslauf Σ_G/Σ_0 erteilt wurde. Wir formen den Ausdruck für die Rastkoordinaten des Führungsgeschwindigkeitsvektors noch weiter um, indem wir \mathbf{x}_G durch die augenblicklichen Rastkoordinaten von \mathbf{X} ersetzen gemäß $\mathbf{x}_G = \mathbf{A}^T(\mathbf{x} - \mathbf{m})$. Dies führt auf

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{m}} - \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T\mathbf{m} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T\mathbf{x}.$$

Nun fassen wir die von \mathbf{x} unabhängigen Summanden zusammen in

$$\hat{\mathbf{q}} := \dot{\mathbf{m}} - \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T\mathbf{m} \quad (1.14)$$

und beachten weiters, dass für orthogonales \mathbf{A} die Matrix $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T$ *schiefsymmetrisch* ist, denn aus $\mathbf{A}(t)\mathbf{A}(t)^T = \mathbf{E} = \text{konst.}$ folgt durch Differentiation

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}^T = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T + (\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T)^T = \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad \text{also} \quad (\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T)^T = -\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T.$$

Setzen wir nun

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T := \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{q} := (q_1, q_2, q_3)^T \quad (1.15)$$

so erhalten wir auf Grund von $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T\mathbf{x} = (\mathbf{q} \times \mathbf{x})$ den Führungsgeschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(\mathbf{X})$ im Rastkoordinatensystem als:

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}) = \hat{\mathbf{q}} + (\mathbf{q} \times \mathbf{x}). \quad (1.16)$$

Es liegt wiederum nahe, die Notation der dualen Vektoren zu verwenden. Wir setzen

$$\underline{\mathbf{q}} := \mathbf{q} + \varepsilon \hat{\mathbf{q}} \quad \text{mit } \mathbf{q} \text{ laut (1.15) und } \hat{\mathbf{q}} \text{ laut (1.14)}. \quad (1.17)$$

Nach Satz 1.6 gibt es eine duale Zahl $\underline{\omega}$ und einen dualen Einheitsvektor $\underline{\mathbf{p}}$ mit $\underline{\mathbf{q}} = \underline{\omega} \underline{\mathbf{p}}$. In Übereinstimmung mit (1.12) folgt

$$\underline{\mathbf{p}} = \frac{1}{\underline{\omega}} \underline{\mathbf{q}} \quad \text{und} \quad \hat{\underline{\mathbf{p}}} = \frac{1}{\underline{\omega}} \left(\hat{\underline{\mathbf{q}}} - \frac{\hat{\underline{\omega}}}{\underline{\omega}} \underline{\mathbf{q}} \right). \quad (1.18)$$

Andererseits gilt $\underline{\mathbf{q}} \cdot \underline{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + 2\varepsilon \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{q}} = \underline{\omega} \underline{\omega} = \omega^2 + 2\varepsilon \omega \hat{\omega}$ und daher

$$\omega = \|\mathbf{q}\| \quad \text{und} \quad \omega \hat{\omega} = \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{q}}. \quad (1.19)$$

Wir wollen die gesammelten Ergebnisse in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 1.7.

1. Für den Vektor der Führungsgeschwindigkeit des Punktes $X \in \Sigma_G$ beim räumlichen Zwangslauf Σ_G/Σ_0 gilt im Rastkoordinatensystem

$$\mathbf{v}(X) = \hat{\mathbf{q}} + (\mathbf{q} \times \mathbf{x})$$

mit \mathbf{q} und $\hat{\mathbf{q}}$ gemäß (1.14) und (1.15). $\underline{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \varepsilon \hat{\mathbf{q}}$ heißt Schraube.

2. Bei $\|\mathbf{q}\| \neq 0$ existiert ein eindeutiger Speer $\underline{\mathbf{p}}$ mit $\underline{\mathbf{p}} \cdot \underline{\mathbf{p}} = 1$ so, dass $\underline{\mathbf{q}} = \omega \underline{\mathbf{p}}$ ist, also

$$\mathbf{q} = \omega \mathbf{p} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{q}} = \hat{\omega} \mathbf{p} + \omega \hat{\mathbf{p}},$$

oder umgekehrt $\omega = \|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ sowie

$$\omega \hat{\omega} = \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{p} = \frac{1}{\omega} \mathbf{q} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{\omega} \left(\hat{\mathbf{q}} - \frac{\omega \hat{\omega}}{\omega^2} \mathbf{q} \right).$$

3. Hinsichtlich der Führungsgeschwindigkeitsvektoren verhält sich der räumliche Zwangslauf Σ_G/Σ_0 zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ wie eine Schraubung um den durch $\underline{\mathbf{p}}$ bestimmten Speer $\vec{\mathbf{p}}$ mit der Winkelschwindigkeit ω und der Schiebgeschwindigkeit $\hat{\omega}$. Die mit dem Speer $\vec{\mathbf{p}}$ verbundene Gerade \mathbf{p} heißt Momentanschraubachse oder Polachse.

Diese Momentanschraubung ist bei $\hat{\omega} = 0$ eine Drehung, bei $\omega = 0$ eine Schiebung. Dabei ist im letztgenannten Fall die Polachse \mathbf{p} unbestimmt. Andernfalls ist $\hat{\omega}/\omega$ der Parameter der Momentanschraubung.

Beweis: Sei \mathbf{f} der Fußpunkt des Lotes vom Ursprung auf die Polachse $\underline{\mathbf{p}}$ mit $\mathbf{f} = \mathbf{p} \times \hat{\mathbf{p}}$. Dann ist $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{f} \times \mathbf{p}$, und wir können den in 1. angegebenen Ausdruck $\hat{\mathbf{q}} + (\mathbf{q} \times \mathbf{x})$ für den Vektor der Führungsgeschwindigkeit weiter umformen zu

$$\mathbf{v}(X) = \hat{\omega} \mathbf{p} + \omega \hat{\mathbf{p}} + \omega (\mathbf{p} \times \mathbf{x}) = \hat{\omega} \mathbf{p} + \omega (\mathbf{f} \times \mathbf{p}) + \omega (\mathbf{p} \times \mathbf{x}) = \hat{\omega} \mathbf{p} + \omega [\mathbf{p} \times (\mathbf{x} - \mathbf{f})].$$

Der erste Summand drückt die Verschiebung längs $\vec{\mathbf{p}}$ mit der Schiebgeschwindigkeit $\hat{\omega}$ aus. Der zweite ist der Geschwindigkeitsvektor des Punktes X bei der Drehung um $\vec{\mathbf{p}}$ mit der Winkelgeschwindigkeit ω , denn bei $X \notin \mathbf{p}$ steht der Vektor $\mathbf{p} \times (\mathbf{x} - \mathbf{f})$ auf der Verbindungsebene $[X\mathbf{p}]$ normal, und sein Betrag ist gleich dem Abstand $\overline{X\mathbf{p}}$. \square

Gemäß (1.16) legt die Schraube $\underline{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \varepsilon \hat{\mathbf{q}}$ die momentane Verteilung der Führungsgeschwindigkeiten fest. Wie diese Geschwindigkeitsvektoren in verschiedenen Punkten des Gangraumes zusammenhängen, ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 1.8. *Hinsichtlich der Verteilung der Führungsgeschwindigkeiten zu jedem Zeitpunkt des Zwanglaufes Σ_G/Σ_0 gilt: Je zwei Punkte $A, B \in \Sigma_G$ erfüllen*

1. die EULER-Gleichung:

$$\mathbf{v}(B) = \mathbf{v}(A) + \mathbf{v}^{AB} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}^{AB} = \mathbf{q} \times \overrightarrow{AB} \quad \text{orthogonal zu} \quad [AB] \quad \text{und} \quad \mathbf{q}$$

2. sowie dem Projektionssatz: Die Komponenten der Führungsgeschwindigkeiten $\mathbf{v}(A)$ und $\mathbf{v}(B)$ in Richtung der Verbindungsgeraden $[AB]$ sind gleich.

Beweis: Es seien $\mathbf{a}(t)$ bzw. $\mathbf{b}(t)$ die von der Zeit t abhängigen Ortsvektoren der Bahnpunkte von A bzw. B im Rastraum Σ_0 . Da die Entfernung zwischen A und B konstant bleibt, gilt

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \overline{AB}^2 = \text{konst.}$$

Durch Differenzieren erhalten wir

$$(\dot{\mathbf{b}} - \dot{\mathbf{a}}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (\mathbf{v}(B) - \mathbf{v}(A)) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{v}^{AB} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0,$$

wobei $\mathbf{v}^{AB} := \dot{\mathbf{b}} - \dot{\mathbf{a}}$ gesetzt wurde. Damit ist bei $A \neq B$ der Vektor \mathbf{v}^{AB} entweder orthogonal zu $[AB]$ oder gleich dem Nullvektor. Der Projektionssatz ergibt sich unmittelbar aus der Gleichung

$$\mathbf{v}(A) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{v}(B) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Aus

$$\mathbf{v}(A) = \hat{\mathbf{q}} + (\mathbf{q} \times \mathbf{a}) \quad \text{und} \quad \mathbf{v}(B) = \hat{\mathbf{q}} + (\mathbf{q} \times \mathbf{b})$$

folgt schließlich

$$\mathbf{v}^{AB} = \mathbf{v}(B) - \mathbf{v}(A) = \mathbf{q} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad \text{also} \quad \mathbf{v}(B) = \mathbf{v}(A) + (\mathbf{q} \times \overrightarrow{AB}). \quad \square$$

Bemerkung: Die letzte Gleichung ist in gewissem Sinn koordinateninvariant. Sie umfasst als Sonderfall die Formel $\mathbf{v}(B) = \hat{\mathbf{q}} + (\mathbf{q} \times \mathbf{b})$, sofern A augenblicklich deckungsgeich mit dem Rastkoordinatenursprung U gewählt wird, da dann $\mathbf{v}(U) = \hat{\mathbf{q}}$ und $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ ist.

Normalenkomplex

Anstelle der Führungsgeschwindigkeiten untersuchen wir nun die Verteilung der Bahnnormalen bei einem räumlichen Zwangslauf Σ_G/Σ_0 : Wir wissen bereits auf Grund von Satz 1.5, dass die Bahnnormalen einer Schraubung in einem linearen Komplex, dem sogenannten Normalenkomplex liegen. Somit erfüllen die Speerkoordinaten $\underline{\mathbf{n}} = \mathbf{n} + \varepsilon \hat{\mathbf{n}}$ aller Bahnnormalen der momentanen Schraube $\underline{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \varepsilon \hat{\mathbf{q}} \neq \underline{\mathbf{o}}$ die Gleichung

$$\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (1.20)$$

Satz 1.9. *Zu jedem Zeitpunkt eines Zwanglaufes Σ_G/Σ_0 gilt: Ist \mathbf{n} eine Bahnnormale im Punkt A, so steht \mathbf{n} in jedem ihrer Punkte X auf der Bahntangente von X normal.*

Beweis: Die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}(A)$ und $\mathbf{v}(X)$ der Punkte A und X von \mathbf{n} genügen dem Projektionssatz. Nachdem die Komponente von $\mathbf{v}(A)$ in Richtung der Geraden \mathbf{n} verschwindet, muss dies auch auf $\mathbf{v}(X)$ zutreffen, d.h., $\mathbf{v}(X) \perp \mathbf{n}$. \square

Führungsbewegung einer Geraden

Es seien $(\mathbf{g}, \underline{\mathbf{g}})$ die Speerkoordinaten einer orientierten Geraden $\vec{\mathbf{g}}$. Während des Zwangslaufs Σ_G/Σ_0 überstreicht die Gerade eine Regelfläche im Rastraum.

Satz 1.10. *Die Ableitungsvektoren der momentanen Rastkoordinaten $(\mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}})$ der orientierten Geraden $\vec{\mathbf{g}}$ beim Zwangslauf Σ_G/Σ_0 lauten:*

$$\dot{\underline{\mathbf{g}}} = \underline{\mathbf{q}} \times \underline{\mathbf{g}} \quad \text{mit } \underline{\mathbf{q}} \text{ gemäß (1.17)}. \quad (1.21)$$

Beweis: Aus $\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{g}_G$ folgt durch Differentiation

$$\dot{\mathbf{g}} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{g}_G = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T \mathbf{g} = \mathbf{q} \times \mathbf{g}.$$

Zur Bestimmung von $\hat{\mathbf{g}}$ wird der Punkt $\mathbf{X} \in \mathbf{g}$ mit den augenblicklichen Rastkoordinaten \mathbf{x} mitbewegt. Dann gilt nach $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{x} \times \mathbf{g}$ und (1.16)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{g}}} &= (\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{g}) + (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{g}}) = [\hat{\mathbf{q}} + (\mathbf{q} \times \mathbf{x})] \times \mathbf{g} + \mathbf{x} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{g}) = \\ &= (\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{g}) + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{g})\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{g})\mathbf{q} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{q})\mathbf{g} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{g})\mathbf{q} = \\ &= (\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{g}) + [\mathbf{q} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{g})] = (\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{g}) + (\mathbf{q} \times \hat{\mathbf{g}}). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Der Vergleich der Ergebnisse mit der zweiten Formel aus (1.11) zeigt die Gültigkeit des Satzes. \square

1.2.3 Geschwindigkeiten bei Relativbewegungen

Zu Beginn dieses Abschnittes müssen wir eine Vereinbarung bezüglich der Notation treffen: Infolge trägt jeder Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_{i|j}$ die Indizes der zugehörigen Bewegung Σ_i/Σ_j . Außerdem wird auch die Schraube der momentanen Bewegung Σ_i/Σ_j als $\underline{\mathbf{q}}_{i|j}$ angeschrieben.

Betrachten wir nochmals den Zwangslauf Σ_1/Σ_0 aus (1.13). Diesmal ist \mathbf{X} ein Element eines Systems Σ_2 welches einen Zwangslauf Σ_2/Σ_1 beschreibt. Somit hat \mathbf{X} eine Relativbewegung $\mathbf{x}_G = \mathbf{x}_G(t)$ gegenüber Σ_1 . Nach Differentiation von (1.13) folgt nun:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{m}} + \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}_G + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}_G.$$

Wir erhalten nun einen zusätzlichen Summanden, welcher die Rastkoordinaten $\mathbf{v}_{2|1}(\mathbf{X})$ des Relativgeschwindigkeitsvektors angibt. Auf der linken Seite der Gleichung steht der Vektor $\mathbf{v}_{2|0}(\mathbf{X})$ der Absolutgeschwindigkeit. Somit gilt wie in der Ebene, dass die Absolutgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{2|0}(\mathbf{X})$, die Summe aus Führungsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{1|0}(\mathbf{X})$ und Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{2|1}(\mathbf{X})$ ist; also

$$\mathbf{v}_{2|0}(\mathbf{X}) = \mathbf{v}_{1|0}(\mathbf{X}) + \mathbf{v}_{2|1}(\mathbf{X}). \quad (1.23)$$

Wir betrachten die zwei gleichzeitig ablaufenden Zwangsläufe Σ_1/Σ_0 und Σ_2/Σ_0 . Die Aussagen über die Relativbewegung Σ_2/Σ_1 sind der Inhalt des nächsten Satzes:

Satz 1.11. (*Räumlicher Dreipolsatz*)

1. Sind $\underline{\mathbf{q}}_{1|0}$ und $\underline{\mathbf{q}}_{2|0}$ die momentanen Schrauben der Zwangläufe Σ_1/Σ_0 bzw. Σ_2/Σ_0 , so ist

$$\underline{\mathbf{q}}_{2|1} := \underline{\mathbf{q}}_{2|0} - \underline{\mathbf{q}}_{1|0}$$

die Schraube der Relativbewegung Σ_2/Σ_1 .

2. Zu jedem Zeitpunkt ist eine gemeinsame Bahnnormale der Bewegungen Σ_1/Σ_0 und Σ_2/Σ_0 auch Bahnnormale der Relativbewegung Σ_2/Σ_1 .

Beweis: Für die Vektoren der Führungsgeschwindigkeiten $\mathbf{v}_{1|0}(\mathbf{X})$ und $\mathbf{v}_{2|0}(\mathbf{X})$ des Punktes \mathbf{X} bei den gegebenen Zwangläufen Σ_1/Σ_0 bzw. Σ_2/Σ_0 gilt nach Satz 1.7

$$\mathbf{v}_{1|0}(\mathbf{X}) = \widehat{\mathbf{q}}_{1|0} + (\mathbf{q}_{1|0} \times \mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v}_{2|0}(\mathbf{X}) = \widehat{\mathbf{q}}_{2|0} + (\mathbf{q}_{2|0} \times \mathbf{x}).$$

Wir fassen Σ_1/Σ_0 als Führungsbewegung und Σ_2/Σ_0 als Absolutbewegung auf. Dann lautet nach (1.23) der Vektor der Relativgeschwindigkeit von \mathbf{X}

$$\mathbf{v}_{2|1}(\mathbf{X}) = \mathbf{v}_{2|0}(\mathbf{X}) - \mathbf{v}_{1|0}(\mathbf{X}) = (\widehat{\mathbf{q}}_{2|0} - \widehat{\mathbf{q}}_{1|0}) + [(\mathbf{q}_{2|0} - \mathbf{q}_{1|0}) \times \mathbf{x}] = \widehat{\mathbf{q}}_{2|1} + (\mathbf{q}_{2|1} \times \mathbf{x}).$$

Ist die Gerade \mathbf{n} durch \mathbf{X} zu den beiden Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_{1|0}(\mathbf{X})$ und $\mathbf{v}_{2|0}(\mathbf{X})$ normal, so auch zu deren Differenz $\mathbf{v}_{2|1}(\mathbf{X})$. Der Durchschnitt der Normalenkomplexe von Σ_1/Σ_0 und Σ_2/Σ_1 gehört also auch dem Normalenkomplex von Σ_2/Σ_0 an. Das zeigt aber natürlich auch die Gleichung dieses linearen Komplexes gemäß (1.20):

$$\widehat{\mathbf{q}}_{2|1} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{q}_{2|1} \cdot \widehat{\mathbf{n}} = (\widehat{\mathbf{q}}_{2|0} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{q}_{2|0} \cdot \widehat{\mathbf{n}}) - (\widehat{\mathbf{q}}_{1|0} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{q}_{1|0} \cdot \widehat{\mathbf{n}}) = 0.$$

Der Dreipolsatz besagt somit, dass die Normalenkomplexe der Bewegungen Σ_1/Σ_0 , Σ_2/Σ_0 und Σ_2/Σ_1 zu jedem Zeitpunkt einem Büschel von linearen Komplexen angehören. \square

Bemerkung: Statt zu sagen, Σ_2/Σ_1 ist die Relativbewegung, während die Zwangläufe Σ_2/Σ_0 und Σ_1/Σ_0 ablaufen, können wir auch Σ_2/Σ_0 als Absolutbewegung und Zusammensetzung des Führungszwanglaufes Σ_1/Σ_0 und des Relativzwanglaufes Σ_2/Σ_1 sehen. Äquivalent zum Dreipolsatz ist also die Aussage, dass sich bei der Zusammensetzung zweier Zwangläufe in jedem Augenblick die Schrauben der Momentanbewegungen addieren, d.h.

$$\underline{\mathbf{q}}_{2|0} = \underline{\mathbf{q}}_{1|0} + \underline{\mathbf{q}}_{2|1}.$$

Satz 1.12. Ist $\underline{\mathbf{q}}_{1|0}$ die momentane Schraube des Zwanglaufes Σ_1/Σ_0 , so ist die Schraube $\underline{\mathbf{q}}_{0|1}$ der Umkehrbewegung Σ_0/Σ_1 von Σ_1/Σ_0 gegeben durch:

$$\underline{\mathbf{q}}_{0|1} = -\underline{\mathbf{q}}_{1|0}$$

Beweis: Dies folgt direkt aus dem Satz 1.11 wenn man $\Sigma_2 = \Sigma_0$ setzt, was $\underline{\mathbf{q}}_{2|0} = \mathbf{0}$ nach sich zieht. \square

Kapitel 2

Einleitung

2.1 6R Roboter

Ein 6R Roboter besteht aus einer Folge von 7 Gliedern (= Starrkörper) $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_6$, wobei je zwei aufeinanderfolgende Glieder Σ_{i-1}, Σ_i für $i = 1, \dots, 6$ durch ein Drehgelenk mit der Achse \vec{a}_i miteinander verbunden sind. Das erste Glied Σ_0 heißt Basis und das letzte Σ_6 nennt man Endeffektor EE (siehe *Abbildung 2.1*). Da jedes Drehgelenk den Freiheitsgrad 1 hat, ist also eine 7-gliedrige offene kinematische Kette mit dem Grüblerwert 6. Roboter, bei welchen der Freiheitsgrad des EE kleiner ist als die Anzahl der Achsen, heißen redundant.

Die Abmessungen eines Roboters werden üblicherweise, wie folgt, angegeben:

In Σ_i liegen für $i = 1, \dots, 5$ die zwei (stets als verschieden vorausgesetzten) Drehachsen \vec{a}_i und \vec{a}_{i+1} . Deren relative Lage ist durch den längs einer orientierten gemeinsamen Normalen \vec{n}_i gemessenen orientierten Abstand a_i und den orientierten Winkel α_i (= Schräkwinkel) festgelegt. Wenn \vec{a}_i und \vec{a}_{i+1} zueinander parallel sind, so legen wir eine gemeinsame Normale \vec{n}_i willkürlich fest. Die Achse \vec{a}_i wird für $i = 2, \dots, 5$ von zwei Normalen geschnitten, von \vec{n}_{i-1} und \vec{n}_i . Der im Sinn der Orientierung von \vec{a}_i gemessene Abstand d_i zwischen \vec{n}_{i-1} und \vec{n}_i heißt Absatz. Die insgesamt 14 Größen

$$a_1, \dots, a_5, \alpha_1, \dots, \alpha_5 \text{ und } d_2, \dots, d_5$$

heißen die Denavit-Hartenberg-Parameter.

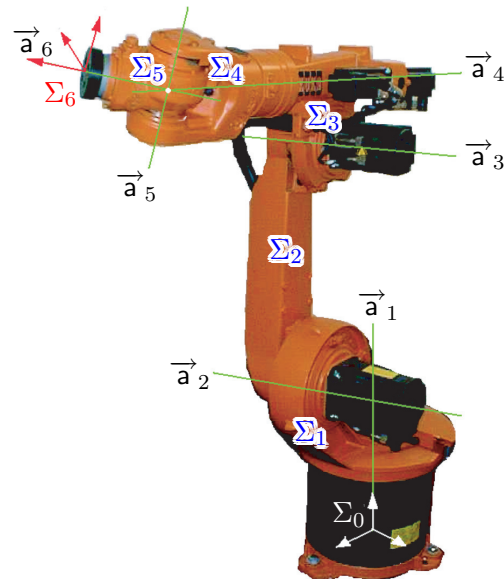


Abbildung 2.1: 6R Roboter¹

¹Diese Abbildung wurde der Arbeit [15] von Hayes, Husty und Zsombor-Murray entnommen.

Diese sind hinreichend für die Geometrie der Bewegung Σ_6/Σ_0 . Wenn \vec{a}_4 , \vec{a}_5 und \vec{a}_6 durch einen gemeinsamen Punkt gehen (d.h. $a_{r-2} = a_{r-1} = d_{r-1} = 0$), so spricht man von einem Roboter mit Handgelenk. Die Relativbewegung Σ_6/Σ_3 ist dann nur sphärisch.

Vorwärtskinematik

Darunter versteht man die Bestimmung der Lage des Endeffektors als Funktion der Drehwinkel $\theta_1, \dots, \theta_6$ um die jeweiligen Achsen $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_6$. Dies setzt eine Ausgangslage voraus, von der aus die einzelnen Drehwinkel gemessen werden.

Falls in Σ_6 ein Gangkoordinatensystem und in Σ_0 ein Rastkoordinatensystem definiert ist, so kann die Lösung in Form der Umrechnungsgleichungen zwischen Gang- und Rastkoordinaten analog zu (1.13) angegeben werden. Es ist hier allerdings sinnvoll, ausschließlich erweiterte Punkt- und Vektorkoordinaten, also

$$\mathbf{x}_6 = (1, x_6, y_6, z_6)^T \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v}_6 = (0, x_6, y_6, z_6)^T$$

zu verwenden. Dies führt auf

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_{0|6}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{x}_6 \quad \text{mit} \quad \mathbf{T}_{0|6} := \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{o}^T \\ \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} \mathbf{x}_6 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\theta} := \theta_1, \dots, \theta_6.$$

Dabei stehen bekanntlich in den Spalten der Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{0|6}$ die erweiterten Rastkoordinaten des Ursprunges G des Gangkoordinatensystems von Σ_6 und dessen Basisvektoren $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$. Die Matrix $\mathbf{T}_{0|6}(\boldsymbol{\theta})$ kann mit Hilfe des Denavit-Hartenberg-Verfahren berechnet werden, bei welchem auch in allen Zwischengliedern Σ_i für $i = 1, \dots, 5$ zwei zusätzliche Koordinatensysteme eingeführt werden (siehe [1, 22, 48]). Man erhält schließlich $\mathbf{T}_{0|6}(\boldsymbol{\theta})$ als das Produkt der sogenannten Denavit-Hartenberg-Matrizen $\mathbf{T}_{i|i-1}(\theta_i)$, mit

$$\mathbf{T}_{0|1}(\theta_1) \cdot \mathbf{T}_{1|2}(\theta_2) \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_{5|6}(\theta_6) = \mathbf{T}_{0|6}(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.1)$$

Die durch $\mathbf{T}_{0|6}(\boldsymbol{\theta})$ beschreibbare Menge aller erreichbaren Endeffektorstellungen heißt Arbeitsraum des Roboters.

Rückwärtskinematik

Die Aufgabenstellung der Rückwärtskinematik kann, wie folgt, formuliert werden: Es ist eine Position Σ_6 des Endeffektors innerhalb des Arbeitsraumes gegeben. Es werden die zugehörigen Gelenksvariablen $\theta_1, \dots, \theta_6$ gesucht. Da die gegebene Position durch die zugehörige Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{0|6}$ festlegbar ist, geht es um die Auflösung der Matrixgleichung aus (2.1) bzw. um die Lösung des sich für die einzelnen Matrizenelemente ergebenden Gleichungssystems. Dies bedeutet, man formt das System durch schrittweise Elimination um in eines in gestaffelter Form (Dreiecksform), bei welchem die folgende Gleichung immer um eine Unbekannte weniger aufweist als die vorhergehende. Die vollständige Lösung läßt sich dann schrittweise durch Rückwärtseinsetzen bestimmen.

Beim generischen Fall eines 6R Roboters gelang die Bestimmung der allgemeinen Lösung erstmalig im Jahr 1988 von Lee und Liang in [28]. Die Lösung der Gleichung (2.1) konnte dabei auf die Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms 16. Grades zurückgeführt

werden. In diesem generischen Fall gibt es daher zu derselben Endeffektorstellung 16 verschiedene Roboterkonfigurationen. In Sonderfällen, etwa bei Robotern mit zum Teil orthogonalen, parallelen oder schneidenden Drehachsen geht die Berechnung einfacher, und der Grad des Problems ist 8 oder 4. Insbesondere bei Robotern mit Handgelenk kann man die Auflösung in zwei Schritten vornehmen: Die ersten drei Drehwinkel ergeben sich aus der Position des Gangursprunges, die letzten drei aus der gegebenen Stellung der Achsen des Gangkoordinatensystems gegenüber dem Rastkoordinatensystem.

2.1.1 Die Jakobimatrix und singuläre Lagen

Wählt man alle Gelenksvariablen $\theta_1, \dots, \theta_6$ als Funktionen der Zeit t , so wird damit ein Zwangslauf Σ_6/Σ_0 des Roboters festgelegt. Auf Grund von Satz 1.11 kann die Bewegung Σ_6/Σ_0 durch die Relativbewegungen $\Sigma_1/\Sigma_0, \dots, \Sigma_6/\Sigma_5$ zusammengesetzt werden. Somit kann die Momentanschraube $\underline{\mathbf{q}}_{6|0}$ berechnet werden als:

$$\underline{\mathbf{q}}_{6|0} = \sum_{i=1}^6 \mathbf{a}_i \omega_{i|i-1} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\omega} = (\omega_{1|0}, \dots, \omega_{6|5})^T \quad \text{und} \quad \mathbf{J} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_6), \quad (2.2)$$

wobei \mathbf{a}_i die momentanen Rastkoordinaten der Speeres längs der Drehachse $\vec{\mathbf{a}}_i$ und ω_i die momentane Winkelgeschwindigkeit der Relativedrehung Σ_i/Σ_{i-1} um $\vec{\mathbf{a}}_i$ notiert. Dabei ergibt sich das Vorzeichen von ω_i aus der gewählten Orientierung der Drehachse $\vec{\mathbf{a}}_i$. Die Matrix \mathbf{J} heißt momentane Jakobimatrix des Roboters und deren Rang heißt lokaler Freiheitsgrad des Roboters. Dieser gibt die Dimension des von den momentanen Relativbewegungen $\Sigma_1/\Sigma_0, \dots, \Sigma_6/\Sigma_5$ aufgespannten Vektorraumes an, welcher der Tangentialraum an den Arbeitsraum ist.

Ist nun der Rang von \mathbf{J} kleiner als sechs so existiert mindestens ein Winkelgeschwindigkeitsverhältnis $\mathbb{R} \boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{o}$, sodass der EE einen momentanen Stillstand hat obwohl alle Gelenke in Bewegung sind; also der Roboter bei festgehaltenem Endeffektor wackelig ist. Dies korrespondiert mit dem Verlust eines momentanen Freiheitsgrades, wodurch eine singuläre Konfiguration gekennzeichnet ist. Daraus folgt unmittelbar der nächste Satz.

Satz 2.1. *Eine Konfiguration eines 6R Roboters ist dann und nur dann singulär, wenn die Determinante der Jakobimatrix \mathbf{J} aus (2.2) verschwindet, also die sechs Drehachsen einem linearen Komplex angehören.*

Befindet sich der Manipulator nun in der Nähe einer Singularität, so können große Winkelgeschwindigkeiten in den Drehgelenken nur geringfügige Auswirkungen auf die momentane Lageänderung des EE haben, insofern das Winkelgeschwindigkeitsverhältnis $\mathbb{R} \boldsymbol{\omega}$ ungünstig gewählt wurde. Wenn nun aber der EE mit einer konstanten Geschwindigkeit eine Bahn verfolgen soll, so kann dies in der Nähe von Singularitäten auf extrem große Winkelgeschwindigkeiten in den Gelenken führen, was große Beschleunigungen und damit eine starke Belastung der Gelenkmotoren verursacht. Wegen der auftretenden Trägheitskräfte wird eine exakte Verfolgung der Bahn meist unmöglich.

2.2 Stewart Gough Plattformen

Vom geometrisch-kinematischen Standpunkt aus betrachtet, besteht eine Stewart Gough Plattform, welche im Verlauf der Arbeit öfters mit *SGP* abgekürzt ist, aus dem bewegten System Σ (= Endeffektor), der sogenannten Plattform, und sechs Teleskopbeinen, die über Kugel-Schub-Kugel Gelenke die Plattform mit der Basis Σ_0 verbinden. Dabei erfolgt die Steuerung nur über den Antrieb der Schubgelenke.

Die Berechnung des Freiheitsgrades dieser kinematischen Kette über die Formel von Grübler liefert den redundanten Grad 12. Dieser kommt dadurch zu Stande, dass jedes der Teleskopbeine eine Rotation um die Verbindungsgerade der Kugelgelenksmiten gestattet, ohne die relative Lage von Σ gegenüber Σ_0 zu ändern. Man kann nun die Plattform so modifizieren, dass man den redundanten Freiheitsgrad zum Verschwinden bringt, indem man alle Kugelgelenke in Σ_0 oder Σ durch Kardangelenke vom Freiheitsgrad 2 ersetzt. Für die folgenden theoretischen Überlegungen spielt der Freiheitsgrad keine weitere Rolle und wir können daher zur Vereinfachung die ursprüngliche Definition verwenden. Es sei noch bemerkt, dass Stewart Gough Plattformen mit mehr als sechs Teleskopbeinen als redundant bezeichnet werden.

Die Geometrie der Plattform und Basis ist durch die Lage der sechs Montagepunkte der Beine im Gangkoordinatensystem und die Lage der sechs entsprechenden Ankerpunkte im Rastkoordinatensystem bestimmt. Infolge werden die Plattformankerpunkte mit P_i und die Basisankerpunkte mit B_i notiert. Die Trägergerade des i -ten Beines wird mit l_i angedeutet (vgl. *Abbildung 2.2*).

Der an der geschichtlichen Entwicklung sowie an einem Überblick der wichtigsten Veröffentlichungen in diesem Bereich interessierte Leser sei auf den Artikel von Dasgupta und Mruthyunjaya [7] sowie auf das Buch [35] von Merlet verwiesen.

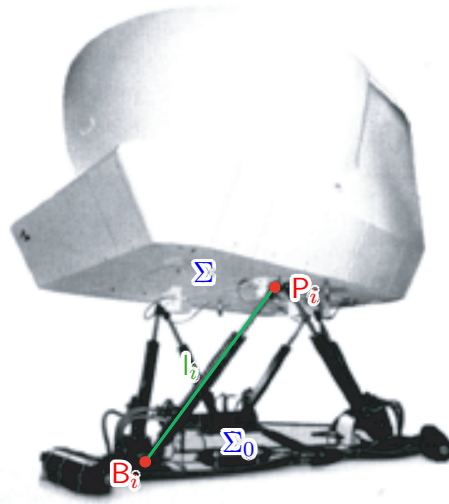


Abbildung 2.2: Flugsimulator

Vorwärtskinematik

Das Problem der Vorwärtskinematik kann folgendermaßen formuliert werden: Gegeben seien die Geometrie der Plattform und der Basis sowie alle sechs Beinlängen. Gesucht sind alle möglichen Lagen der Plattform zur Basis mit diesen Angabestücken. Eine mögliche Lösung für die Angabestücke aus *Abbildung 2.3* wurde in *Abbildung 2.4* dargestellt.

Die Lösung der Vorwärtskinematik stellt eine komplexe Aufgabe dar, die erstmals Hus-ty [19, 20] im Jahre 1994 für allgemeine Stewart Gough Plattformen zu lösen vermochte. Sein auf der Studydarstellung der Raumkongruenzen basierender Lösungsalgorithmus führt über Polynome mit Maximalgrad 320 auf ein algebraischen Polynom vom Grad 40.

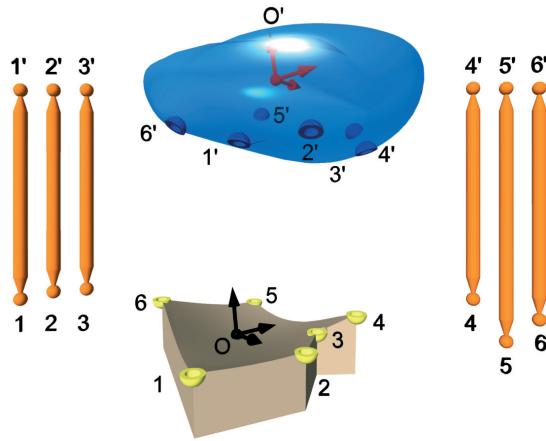


Abbildung 2.3: Angabestücke²



Abbildung 2.4: Eine Lösung²

Somit ist es theoretisch möglich, dass die Vorwärtskinematik 40 reelle Lösungen besitzt, was von Dietmaier in [8] durch ein Beispiel bewiesen wurde. Es sei noch bemerkt, dass der Maximalgrad von auftretenden Polynomen im Algorithmus von Husty durch Modifikationen auf 200 reduziert werden kann (siehe [37]).

Rückwärtskinematik

Bei *SGPen* ist die Rückwärtskinematik sehr simpel, denn ist die Position von Σ gegenüber Σ_0 sowie die Geometrie der Plattform und der Basis bekannt, so können die zugehörigen Stablängen einfach als Längen von Strecken mit bekannten Endpunkten berechnet werden.

2.2.1 Die Jakobimatrix und singuläre Lagen

Singuläre Lagen von n -beinigen *SGPen* mit $n > 5$ sind dadurch gekennzeichnet, dass der parallele Manipulator in diesen Positionen infinitesimal beweglich ist. Wenn nun ein Plattformpunkt bei fixen Beinlängen eine Bewegung ausführen kann, dann muss er den Abstand zu seinem Basisankerpunkt beibehalten. Somit steht jede mögliche Bahntangente auf das dazugehörige Bein normal, woraus folgt, dass alle n Beine dem Bahnnormalenkomplex der Momentanschraubung angehören müssen und somit in einem linearen Komplex liegen. In solchen singulären Lagen existieren somit unkontrollierbare Freiheitsgrade. Nun können wir ohne weiteren Beweis den folgenden Satz formulieren.

Satz 2.2. *Eine n -beinige Stewart Gough Plattform mit $n > 5$ befindet sich dann und nur dann in einer singulären Lage, wenn die Trägergeraden der Beine einem linearen Geradenkomplex angehören.*

²Diese beiden Graphiken wurden der Dissertation [42] von Pernkopf entnommen.

Infolge wollen wir die Jakobimatrix \mathbf{J} von Stewart Gough Plattformen definieren, und deren kinematische Bedeutung erläutern. In Vorbereitung auf Kapitel 6 dieser Arbeit wollen wir \mathbf{J} , wie folgt, einführen: Sei $\underline{\mathbf{q}}$ jene Momentanschraube die die momentane Bewegung der Plattform Σ gegenüber der Basis Σ_0 beschreibt. Wir betrachten nun die Führungsgeschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{P}_i)$ des i -ten Plattformankerpunktes \mathbf{P}_i , welche sich gemäß (1.16) berechnen läßt. Nun wollen wir $\mathbf{v}(\mathbf{P}_i)$ in eine Komponente $\mathbf{v}_1(\mathbf{P}_i)$ entlang des i -ten Beines und in eine Komponente $\mathbf{v}_\perp(\mathbf{P}_i)$ orthogonal zu dieser zerlegen (siehe *Abbildung 2.5*), also

$$\mathbf{v}(\mathbf{P}_i) = \widehat{\mathbf{q}} + (\mathbf{q} \times \mathbf{P}_i) = \mathbf{v}_1(\mathbf{P}_i) + \mathbf{v}_\perp(\mathbf{P}_i). \quad (2.3)$$

Die Plückerkoordinaten $(\mathbf{l}_i, \widehat{\mathbf{l}}_i)$ der Trägergeraden l_i des i -ten Beines sind gegeben durch:

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i \quad \text{und} \quad \widehat{\mathbf{l}}_i = \mathbf{b}_i \times \mathbf{l}_i = \mathbf{p}_i \times \mathbf{l}_i. \quad (2.4)$$

Die Länge des Vektors $\mathbf{v}_1(\mathbf{P}_i)$, welche nun gemäß

$$\|\mathbf{v}_1(\mathbf{P}_i)\| = \frac{\mathbf{l}_i}{\|\mathbf{l}_i\|} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{P}_i) = \frac{\widehat{\mathbf{l}}_i}{\|\mathbf{l}_i\|} \cdot \mathbf{q} + \frac{\mathbf{l}_i}{\|\mathbf{l}_i\|} \cdot \widehat{\mathbf{q}} \quad (2.5)$$

berechnet werden kann, entspricht der momentanen Längenänderung d_i des i -ten Beines.

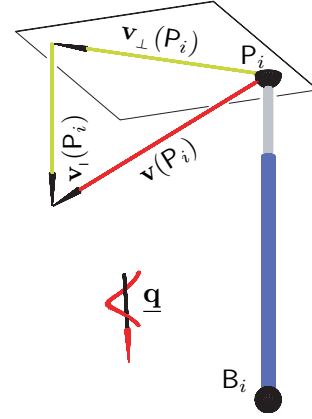


Abbildung 2.5: $\mathbf{v}_1(\mathbf{P}_i)$, $\mathbf{v}_\perp(\mathbf{P}_i)$

Es sei noch bemerkt, dass auf Grund von Satz 1.8 die Gültigkeit der Gleichung (2.5) nicht auf den Plattformankerpunkt \mathbf{P}_i beschränkt ist, sondern für alle Punkte \mathbf{X} der i -ten Trägergeraden l_i gilt. Die gesammelten Ergebnisse wollen wir nun in einem Satz formulieren:

Satz 2.3. Die Jakobimatrix \mathbf{J} einer n -beinigen SGP ($n > 5$) ist die $(n \times 6)$ Abbildungsmatrix der linearen Abbildung ι , welche die Schraube $\underline{\mathbf{q}}$, die die momentane Bewegung der Plattform gegenüber der Basis beschreibt, auf den Vektor $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)^T$ gemäß

$$\iota : \underline{\mathbf{q}} \mapsto \mathbf{d} = \mathbf{J} \underline{\mathbf{q}} \quad (2.6)$$

abbildet, wobei d_i der momentane Längenänderung des i -ten Beines entspricht. Seien die Plückerkoordinaten $(\mathbf{l}_i, \widehat{\mathbf{l}}_i)$ der Trägergeraden l_i der Beine gemäß (2.4) gegeben dann läßt sich die Jakobimatrix anschreiben als:

$$\mathbf{J}^T = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{l}}_1 \|\mathbf{l}_1\|^{-1} & \vdots & \vdots & \vdots & \widehat{\mathbf{l}}_n \|\mathbf{l}_n\|^{-1} \\ \mathbf{l}_1 \|\mathbf{l}_1\|^{-1} & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{l}_n \|\mathbf{l}_n\|^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Da in der i -ten Zeile von \mathbf{J} bis auf die Reihenfolge die Speerkoordinaten der i -ten Trägergeraden stehen, können die singulären Lagen auch, wie folgt, charakterisieren:

Satz 2.4. Eine n -beinige Stewart Gough Plattform mit $n > 5$ befindet sich dann und nur dann in einer singulären Lage, wenn $\text{rank}(\mathbf{J}) < 6$ mit \mathbf{J} laut (2.7) gilt.

2.3 Performance Indizes

Der Inhalt der vorliegenden Arbeit sind *kinematische Performance Indizes* für 6R Roboter und Stewart Gough Plattformen. Solche Indizes spielen eine wichtige Rolle beim Entwurf von Robotern (*Robot Design*) sowie in der Anwendung zur Kontrolle (*Robot Control*). Wir wollen einen *kinematischen Performance Index*, wie folgt, definieren:

Definition 2.1. *Ein kinematischer Performance Index eines mechanischen robotischen Systems konvertiert das Leistungsvermögen des Systems Bewegungen zu übertragen in einen Skalar, wobei der Index auf rein kinematischen Eigenschaften des Systems basiert. Die Bewegungsübertragung ist im differentialgeometrischen Sinn zu verstehen, also auf der Ebene von Geschwindigkeiten.*

Um eine einheitliche Notation der Arbeit zu ermöglichen, wird der Begriff des Endeffektors, wie folgt, konkretisiert: Unter dem Endeffektor soll in Zukunft nur jener Teil des Roboters verstanden werden, zu dessen Manipulation der Roboter dient; also zum Beispiel ein Greifer oder ein Schweißgerät, oder die Kapsel eines Flugsimulators (siehe *Abbildung 2.2*).

Außerdem wird infolge nur mehr vom *Performance Index* die Rede sein, wobei stets ein kinematischer gemeint ist. Wenn dem nicht so ist, dann wird dies jeweils explizit erwähnt. Bevor wir genauer darauf eingehen, was die Definition 2.1 auf 6R Roboter bzw. *SGPen* umgelegt bedeutet, wollen wir noch einige allgemeine Bemerkungen verlieren:

Grundsätzlich kann man zwischen zwei Arten von *Performance Indizes* unterscheiden, je nachdem, ob sie vom Endeffektor EE abhängen (*EE dependent Performance Indizes*) oder nicht (*EE independent Performance Indizes*). Jede dieser beiden Gruppen spaltet sich wiederum auf in *Performance Indizes*, welche von der momentanen Konfiguration des Roboters abhängen (*pose dependent Performance Indizes*) und in jene, die davon unabhängig sind (*pose independent Performance Indizes*).

Organisation der Arbeit

Das Hauptaugenmerk der vorliegenden Arbeit liegt auf der Einführung von neuen *Performance Indizes* für *Robot Control*. Solche Indizes müssen von der momentanen Konfiguration des Manipulators abhängen und somit den *pose dependent Performance Indizes* angehören. Wir werden vier neue *Performance Indizes* für *Robot Control* von 6R Robotern einführen, wobei zwei *EE dependent* sind (siehe Kapitel 3) und die anderen beiden *EE independent* (siehe Kapitel 4). Für *SGPen* wird in Kapitel 5 bzw. Kapitel 6 jeweils ein neuer *EE dependent* bzw. *EE independent Performance Index* definiert.

Analog zu bekannten Methoden lassen sich manche der neu eingeführten *Performance Indizes* für *Robot Control* auch für *Robot Design* verwenden. Dies ist für einen Index aus Kapitel 3 für 6R Roboter sowie für die beiden neu eingeführten Indizes für *SGPen* der Fall. Für letztere wird in Kapitel 5 bzw. Kapitel 7 auch eine Berechnung von optimalen *SGP* Konfigurationen im Sinn dieser Indizes durchgeführt.

Als Nebenprodukt unserer Überlegungen wird außerdem für jeden der vier neuen *Performance Indizes* für 6R Roboter noch eine gewichtete Version vorgeschlagen, wobei die

Gewichtung bezüglich der benötigten Rotationsenergie vorgenommen wird. Diese Indizes sind aber keine *kinematischen Performance Indizes* aus Def. 2.1 mehr, da sie von der Masseverteilung des Roboters abhängen.

2.3.1 Vorüberlegungen

Wir wollen nun die Bedeutung von Def. 2.1 für 6R Roboter bzw. *SGPen* klären:

Satz 2.5. *Das Leistungsvermögen eines 6R Roboters bzw. einer Stewart Gough Plattform Bewegungen zu übertragen ist dann und genau dann nicht gegeben, wenn sich der 6R Roboter bzw. die Stewart Gough Plattform in einer singulären Lage befindet.*

Beweis: Für 6R Roboter folgt die Gültigkeit dieses Satzes direkt aus dem Umstand, dass nur in singulären Lagen mindestens ein Winkelgeschwindigkeitsverhältnis $\lambda\omega$ mit beliebig großem $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert, für welches momentan keine Geschwindigkeitsübertragung auf das Glied Σ_6 stattfindet.

SGPen zeigen ein dazu duales Verhalten, denn nur in singulären Lagen kann ein Bewegungsstillstand der prismatischen Gelenke nicht auf die Plattform übertragen werden, da jeder Punkt der Plattform eine beliebig große Führungsgeschwindigkeit haben kann. \square

Auf Grund dieses Satzes werden *Performance Indizes* in der Literatur auch öfters als Abstandsmaß zur nächstgelegenen Singularität angesehen. Jedoch ist diese Sichtweise aus den folgenden Gründen nicht korrekt:

Da die Menge der singulären Lagen einer Stewart Gough Plattform bzw. eines 6R Roboters alleine durch die Geometrie der Stewart Gough Plattform bzw. des 6R Roboters bestimmt ist, darf ein Abstandsmaß, welches die Nähe zur Singularität angibt, nicht vom *EE* abhängig sein. Somit kommen nur die *EE independent Performance Indizes* als Abstandsmaß in Frage. Wie sich jedoch im Verlauf der Arbeit zeigen wird, berücksichtigen aber die meisten der existierenden *EE independent Performance Indizes* nicht die Geometrie des Manipulators, durch welche die Singularitäten bestimmt ist. Umgekehrt ist aber auf Grund von Satz 2.5 ein Abstandsmaß, welches die Nähe zu einer Singularität angibt, auch ein *EE independent Performance Index*.

Wünschenswerte Eigenschaften eines Performance Index

Ein *Performance Index* $PI(\mathcal{K})$ für 6R Roboter bzw. Stewart Gough Plattformen der jedem Element \mathcal{K} aus dem Konfigurationsraum des Manipulators einen Skalar zuordnet und der Def. 2.1 genügt, soll die folgenden sechs Eigenschaften erfüllen:

1. $PI(\mathcal{K}) \geq 0$ für alle \mathcal{K} des Konfigurationsraumes. (2.8)

2. $PI(\mathcal{K}) = 0$ dann und nur dann, wenn \mathcal{K} singulär ist. (2.9)

3. $PI(\mathcal{K})$ ist invariant gegenüber Euklidischen Bewegungen. (2.10)

4. $PI(\mathcal{K})$ ist invariant gegenüber Ähnlichkeiten. (2.11)

5. $PI(\mathcal{K})$ hat eine geometrisch-kinematische Deutung. (2.12)

6. $PI(\mathcal{K})$ sollte in *Echtzeit* berechenbar sein. (2.13)

Alle in dieser Arbeit neu eingeführten *kinematischen Performance Indizes* erfüllen diese 6 Forderungen. Die Eigenschaften (2.8)–(2.13) sind aus den folgenden Gründen sinnvolle Anforderungen an einen *kinematischen Performance Index*:

Neben der trivialen Forderung in (2.8) begründet sich jene in (2.9) durch Satz 2.5. Eine weitere sinnvolle Anforderung an einen Performance Index ist, dass dieser nicht von der Skalierung abhängt, also invariant gegenüber Ähnlichkeiten ist. Ansonsten müßte man zusätzlich immer noch den verwendeten Maßstab angeben, um beurteilen zu können, ob eine gute Performance des Manipulators in dieser Konfiguration gegeben ist oder nicht. Natürlicherweise ist es wünschenswert, dass der Performance Index nicht von der Wahl des Rastkoordinatensystems abhängt, also invariant gegenüber Euklidischen Bewegungen ist. Außerdem sollte der Index in Echtzeit berechenbar sein, um dessen Einsatz in der Praxis für *Robot Control* zu gewährleisten. Die fünfte Eigenschaft, der zufolge der Index eine geometrisch-kinematische Deutung besitzen soll, war die eigentliche Motivation für die Suche nach neuen Performance Indizes für 6R Roboter und *SGPen*, da diese Forderung von den bisher existierenden Indizes wenn überhaupt nur sehr beschränkt erfüllt worden war. Bei den *EE dependent Performance Indizes* muss sich auf Grund der Abhängigkeit vom Endeffektor, die geometrisch-kinematische Deutung der Indizes auf den Endeffektor beziehen. Dies gelingt bei den in dieser Arbeit neu definierten *EE dependent Performance Indizes*, durch die Einführung des sogenannten *Operation Ellipsoids* und der Verwendung einer objektbezogenen Metrik im Raum der Euklidischen Bewegungen.

Da *EE independent Performance Indizes* vom Endeffektor unabhängig sind, kann sich die geometrisch-kinematische Deutung nur auf den Manipulator als ganzen beziehen. Bei den von uns eingeführten *EE independent Performance Indizes* wird dies im Wesentlichen dadurch erreicht, dass wir eine siebente Forderung zu den sechs aus (2.8)–(2.13) hinzufügen, nämlich:

$$7. \quad PI(\mathcal{K}) \text{ hängt von der Geometrie des Manipulators ab.} \quad (2.14)$$

Diese Bedingung wird in den Kapiteln 4 bzw. 6 für 6R Roboter bzw. *SGPen* konkretisiert.

Es wurden viele Arbeiten über *Performance Indizes* geschrieben, jedoch sind die zwei wohl bekanntesten Indizes, die auch heute noch die meiste Anwendung sowohl bei 6R Robotern als auch bei Stewart Gough Plattformen finden, die *Condition Number* [46] einerseits und die *Manipulability* [55] andererseits. Die *Condition Number* ist ein Vertreter der *EE dependent Performance Indizes*, im Gegensatz zur *Manipulability*, welche zu den *EE independent Performance Indizes* zu zählen ist.

Obwohl diese beiden Indizes einerseits von Angeles in [1] für 6R Roboter und andererseits von Merlet in [35] für Stewart Gough Plattformen ausführlich analysiert wurden, werden wir zu Beginn jedes Kapitels, welche nach *EE dependent* und *EE independent Performance Indizes* für 6R Roboter bzw. *SGPen* gegliedert sind, den entsprechenden Index in Hinblick auf die von uns gestellten 6 bzw. 7 Forderungen untersuchen.

Kapitel 3

EE dependent Performance Indizes für 6R Roboter

3.1 Review: Condition Number $CDN(\mathcal{K})$

Salisbury und Craig [46] führten 1982 dieses Konzept ein, welches sich auf die Jakobimatrix \mathbf{J} aus (2.2) des Manipulators stützt. Dieser Index gibt die positive Quadratwurzel des Verhältnisses vom größten zum kleinsten Eigenwert von $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ wider. Wenn man nun den Kehrwert der CDN als Maß betrachtet, also CDN^{-1} , so liefert dieser Index stets Werte zwischen 0 und 1, wobei 0 eine singuläre Lage charakterisiert. Lagen, die den Maximalwert liefern, werden als *isotrop* bezeichnet. Es sei bemerkt, dass es sich bei der CDN um ein ursprünglich numerisches Verfahren handelt, welches angibt, wie gut die Invertierung einer Matrix konditioniert ist.

Trivialerweise erfüllt somit CDN^{-1} die Forderungen 1 und 2, jedoch nicht die Punkte 3 und 4. Wir wollen dieses Konzept nun von einem anderen Standpunkt aus betrachten, der es uns erlaubt, die fehlenden Invarianzen leicht einzusehen.

3.1.1 Interpretation und Varianz der $CDN(\mathcal{K})$

Die Eigenwerte von $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ können wir auch, wie folgt, interpretieren. Wir suchen das Minimum beziehungsweise das Maximum der Zielfunktion $\hat{\zeta}(\boldsymbol{\omega})$,

$$\hat{\zeta}(\boldsymbol{\omega}): \quad \mathbf{q}_{6|0}^T \mathbf{q}_{6|0} = \boldsymbol{\omega}^T \hat{\mathbf{Z}} \boldsymbol{\omega} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} \quad (3.1)$$

unter der Nebenbedingung $\hat{\nu}(\boldsymbol{\omega})$,

$$\hat{\nu}(\boldsymbol{\omega}): \quad \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{E}_6 \boldsymbol{\omega} = 1. \quad (3.2)$$

Die Lösung dieser Extremwertaufgabe führt mit Hilfe eines Lagrange Multiplikators genau auf die Eigenwerte von $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$. Also gibt die CDN nichts anderes an, als die positive Quadratwurzel des Verhältnisses vom Maximum zum Minimum der Quadratsumme $\mathbf{q}_{6|0}^T \mathbf{q}_{6|0}$ unter der Normierungsbedingung, dass die Quadratsumme der Winkelgeschwindigkeiten

gleich 1 ist. Wir wollen im folgenden Satz die fehlenden Invarianzen der Zielfunktion $\widehat{\zeta}(\boldsymbol{\omega})$ aufzeigen, welche sich auf den Index der CDN^{-1} durchdrücken.

Satz 3.1. $\widehat{\zeta}(\boldsymbol{\omega})$ ist variant unter Ähnlichkeiten. $\widehat{\zeta}(\boldsymbol{\omega})$ ist nicht invariant gegenüber Raumbewegungen mit Ausnahme der Gruppe der Drehungen des Rastkoordinatensystems um dessen Ursprung U .

Beweis: Die Behauptung ist leicht einzusehen, wenn wir $\underline{\mathbf{q}}_{6|0}^T \underline{\mathbf{q}}_{6|0}$, wie folgt, anschreiben:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{q}}_{6|0}^T \underline{\mathbf{q}}_{6|0} &= \mathbf{q}_{6|0}^2 + \widehat{\mathbf{q}}_{6|0}^2 = \omega_{6|0}^2 + (\omega_{6|0} \widehat{\mathbf{p}}_{6|0} + \frac{\widehat{\omega}_{6|0}}{\omega_{6|0}} \mathbf{q}_{6|0})^2 = \\ &= \omega_{6|0}^2 + \frac{\widehat{\omega}_{6|0}^2}{\omega_{6|0}^2} \mathbf{q}_{6|0}^2 + \omega_{6|0}^2 \widehat{\mathbf{p}}_{6|0}^2 + 2\widehat{\omega}_{6|0} \widehat{\mathbf{p}}_{6|0} \mathbf{q}_{6|0} = \\ &= \omega_{6|0}^2 + \left[\widehat{\omega}_{6|0}^2 + \omega_{6|0}^2 \overline{U \mathbf{p}_{6|0}}^2 \right] = \omega_{6|0}^2 + \|\mathbf{v}(U)\|^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei $\omega_{6|0}$ die Winkelgeschwindigkeit und $\widehat{\omega}_{6|0}$ die Schubgeschwindigkeit der Schraube $\underline{\mathbf{q}}_{6|0}$ sind. $\underline{\mathbf{p}}_{6|0}$ sind die Plückerkoordinaten der Schraubachse $\mathbf{p}_{6|0}$ von $\underline{\mathbf{q}}_{6|0}$. Somit bezeichnet $\overline{U \mathbf{p}_{6|0}}$ den Normalabstand des Rastkoordinatenursprunges U von der Schraubachse $\mathbf{p}_{6|0}$.

Auf Grund der Inhomogenität der Summanden bezüglich deren Dimensionen (Summe aus Längen und Winkel), ist die Invarianz gegenüber Ähnlichkeiten nicht gegeben. Abgesehen davon ist die Zielfunktion nur von der Wahl des Koordinatenursprunges U abhängig, womit der Satz bewiesen ist. \square

3.1.2 Lösungskonzepte für die Varianz der $CDN(\mathcal{K})$

Wir wollen nun zwei Lösungskonzepte vorstellen, welche die Varianzen der CDN beseitigen. Diese beiden Methoden finden derzeit in der Praxis die meiste Anwendung.

Konzept A

Eine Möglichkeit, um die Varianz gegenüber Euklidischen Bewegungen zu überwinden, besteht darin, die Zielfunktion unabhängig vom Rastkoordinatenursprung zu formulieren, also die Führungsgeschwindigkeit von U durch jene eines speziellen Punktes des EE zu ersetzen. Die Frage, die sich stellt ist, welcher Punkt des EE ausgezeichnet werden soll. In der Theorie (z.B. [1, 2, 3]) sowie in der Praxis hat es sich durchgesetzt, den *Operation Point* OP des Manipulators heranzuziehen. Dies ist äquivalent mit der Bedingung, dass das Rastkoordinatensystem in jeder Konfiguration des Roboters so gewählt wird, dass dessen Ursprung U mit dem OP zusammenfällt. Wir wollen diese Sichtweise infolge bevorzugen.

Um noch die Inhomogenität der Summanden der Zielfunktion bezüglich deren Dimensionen zu beseitigen, wird auf das Konzept der *charakteristischen Länge* CL zurückgegriffen, welches von Tandirci, Angeles und Ranjbaran in [50] eingeführt wurde. Die Idee ist, die Längeneinheiten in der Jakobimatrix zu eliminieren, indem man die letzten drei Zeilen von \mathbf{J} durch CL dividiert. $\widehat{\mathbf{Z}}$ aus (3.1) schreibt sich somit als:

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \mathbf{J}^T \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{J} \quad \text{mit} \quad \widehat{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \frac{\mathbf{E}_3}{CL^2} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Es sei noch bemerkt, dass dies der Division von $\|\mathbf{v}(U)\|^2$ durch CL^2 in (3.3) gleichkommt. Die Autoren von [50] definierten die *charakteristische Länge* CL , wie folgt:

Definition 3.1. *Die charakteristische Länge CL ist jene Länge, welche sich aus der Minimierung der CDN in Abhängigkeit der Unbekannten $\theta_2, \dots, \theta_6$ und CL ergibt.*

Wir bezeichnen die *CDN*, welche sich dieses Konzeptes bedient, infolge mit CDN_{CL} .

Kritikpunkte am Konzept A Die Schwäche dieser Methode steckt in der charakteristischen Länge CL , die das Verhältnis zwischen Länge und Winkel gewichtet. Auf Grund ihrer Definition als Lösung einer Minimierungsaufgabe fehlt es bislang an einer sinnvollen geometrischen Interpretation für diese und somit auch für CDN_{CL} . Wir werden am Ende dieses Kapitels, basierend auf dem in dieser Arbeit eingeführten Index CDN_{OE} , eine geometrische Interpretation der CL angeben, die Anlass für eine Neudefinition derselbigen sein wird.

Konzept B

Gosselin versuchte 1990 in [13, 14] die angesprochenen Varianzen, wie folgt, in den Griff zu bekommen. Er charakterisierte die momentane Bewegung des Endeffektors eindeutig durch die Führungsgeschwindigkeiten dreier nicht kollinearer Referenzpunkte desselben, anstatt diese durch $\mathbf{q}_{6|0}$ zu beschreiben. Somit gelang es ihm eine homogene Jakobimatrix zu formulieren, bezüglich welcher er die *Condition Number* berechnete. Dadurch wurden die gewünschten Eigenschaften erlangt.

Kritikpunkte am Konzept B Der Nachteil dieses Konzeptes ist, dass die Wahl der drei Bezugspunkte beliebig und der Index nicht invariant gegenüber einer Änderung dieses Tripels ist. Gosselin ließ in seiner Arbeit völlig offen, welche drei Punkte des Endeffektors gewählt werden sollen und wie deren Wahl den Index beeinflusst.

Angeles und Lopes-Cajun schlugen in einem Kapitel von [2] vor, nicht nur drei Punkte zu verwenden sondern die Ecken eines Platonischen Körpers, welcher im OP zentriert ist. Jedoch ließen sie die Frage offen, welcher Platonische Körper mit welchem Umkugelradius herangezogen werden soll und wie das Ergebnis zu interpretieren ist. Auf Grund der folgenden Überlegungen und der eingeführten Metrik werden wir auch die Beliebigkeit in der Anzahl und Wahl der Referenzpunkte beseitigen, indem wir CDN_{OE} definieren.

3.2 Vorüberlegungen für einen neuen Performance Index

Da die beiden Lösungskonzepte und somit auch die daraus folgenden Indizes die oben angeführten Schwächen haben, besteht das Interesse an einem neuen verbesserten EE dependent Performance Index. Um bei dem neuen Index eine fehlende geometrische Interpretation bzw. eine Beliebigkeit in der Anzahl und Wahl der Referenzpunkte auszuschließen, benötigen wir eine geometrisch sinnvolle Metrik im Raum der Euklidischen Bewegungen. Die Grundmotivation für die in diesem Kapitel verwendete Metrik ist die folgende:

Im Grunde genommen ist man in der Praxis nicht an der Manipulation eines einzelnen Punktes (*OP*) oder von drei Punkten des *EE* interessiert, sondern an der eines ganzen Objektes \mathcal{O} , welches zum Beispiel ein Schweißgerät oder eine zu transportierende Last sein kann. Aus diesem Grund wollen wir einen *Performance Index* einführen, der diesen Umstand berücksichtigt. Dazu benötigen wir zuallererst eine objektbezogene Metrik, die es uns erlaubt, den Abstand zwischen zwei Raumpositionen ein und desselben Objektes anzugeben.

3.2.1 Objektbezogene Metrik und das Operation Ellipsoid

Die verwendete Metrik wurde von Hofer, Pottmann und Ravani in [18] eingeführt und hat ihren Ursprung im Registrierungsproblem³ mit bekannter Korrespondenz. Wir repräsentieren das Objekt \mathcal{O} , an dessen Manipulation wir interessiert sind, durch eine endliche Anzahl von Punkten \mathbf{p}_i ($i = 1, \dots, N$). Mit Hilfe dieser Punktvolke ist es uns möglich, einen Abstand zwischen zwei Raumpositionen des Körpers, nämlich zwischen $\mathcal{O}(0)$ und $\mathcal{O}(t)$, wie folgt, zu definieren:

$$d(\mathcal{O}(0), \mathcal{O}(t))^2 := \sum_{i=1}^N \|\mathbf{p}_i(0) - \mathbf{p}_i(t)\|^2.$$

Diese Metrik hängt nur vom Massenschwerpunkt $\mathbf{s}_{\mathcal{O}}$ und der Kovarianzmatrix $\mathbf{D}_{\mathcal{O}}$ von \mathcal{O} bezüglich des Massenschwerpunkt $\mathbf{s}_{\mathcal{O}}$ ab, mit

$$\mathbf{s}_{\mathcal{O}} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{D}_{\mathcal{O}} := \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_i - \mathbf{s}_{\mathcal{O}})(\mathbf{p}_i - \mathbf{s}_{\mathcal{O}})^T. \quad (3.5)$$

Somit können wir uns auf die sechs spezielle Punkte \mathbf{S}_i mit den Koordinaten

$$\mathbf{s}_i := \mathbf{s}_{\mathcal{O}} + \sqrt{\frac{\lambda_i}{2}} \mathbf{i}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{s}_{i+3} := \mathbf{s}_{\mathcal{O}} - \sqrt{\frac{\lambda_i}{2}} \mathbf{i}_i \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.6)$$

beschränken, wodurch sich die Rechnung vereinfacht. Es sei noch bemerkt, dass λ_i die Eigenwerte und \mathbf{i}_i die zugehörigen normierten Eigenvektoren der Kovarianzmatrix $\mathbf{D}_{\mathcal{O}}$ bezeichnen. Durch diese Vereinfachung wird weder der Massenschwerpunkt $\mathbf{s}_{\mathcal{O}}$, die Kovarianzmatrix $\mathbf{D}_{\mathcal{O}}$ noch der Trägheitstensor $\mathbf{I}_{\mathcal{O}} := \text{tr}(\mathbf{D}_{\mathcal{O}})\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{\mathcal{O}}$ von \mathcal{O} verändert.

Mit Hilfe dieser Überlegungen ist es uns nun möglich den *Operation Point* auf den praxisnäheren Begriff des *Operation Ellipsoids*, wie folgt, auszudehnen:

Definition 3.2. *Das Operation Ellipsoids OE bezeichnet jenen durch ein Ellipsoid \mathcal{E} beschränkten Bereich des Endeffektors mit $\text{Vol}(\mathcal{E}) \neq 0$, an dessen Manipulation man interessiert ist. Das OE wird durch die sechs Scheitel \mathbf{S}_i ($i = 1, \dots, 6$) des Ellipsoids \mathcal{E} repräsentiert.*

Es sei noch bemerkt, dass durch die Bedingung $\text{Vol}(\mathcal{E}) \neq 0$ die nicht praxisrelevanten Fälle ausgeschlossen werden, in denen das OE in eine Ellipse, Strecke oder einen Punkt entartet. Auf die objektbezogene Metrik sowie auf das OE stützt sich der infolge präsentierte Performance Index $PI_{OE}(\mathcal{K})$.

³Angenommen, man hat zwei Punktvolken \mathcal{X} bzw. \mathcal{Y} von korrespondierenden Punkten $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ und $\mathbf{y}_i \in \mathcal{Y}$ gegeben. Gesucht wird nun jene Bewegung, die so gut wie möglich \mathcal{X} mit \mathcal{Y} zur Deckung bringt.

3.3 Der Performance Index $PI_{OE}(\mathcal{K})$

Zuerst legen wir das OE durch die Scheitel $\mathbf{S}_i \in \Sigma_6$ fest, welche die folgenden Koordinaten bezüglich des Rastkoordinatensystems haben: $\mathbf{s}_i := (s_{i,1}, s_{i,2}, s_{i,3})$ mit $i = 1, \dots, 6$. Die Form des OE ist von der jeweiligen Anwendung des Roboters abhängig und sollte so gewählt werden, dass es den Bereich des Interesses bestmöglich repräsentiert. Nun lässt sich bezüglich der objektbezogenen Metrik der Abstand zwischen zwei Lagen $OE(0)$ und $OE(t)$ des OE schreiben als:

$$d(OE(0), OE(t))^2 := \sum_{i=1}^6 \|\mathbf{s}_i(0) - \mathbf{s}_i(t)\|^2. \quad (3.7)$$

Wenn wir nun die Lage $OE(t)$ linear approximieren (Taylor Approximation 1. Ordnung), so ergibt sich der Abstand zwischen $OE(0)$ und $OE(t)$ näherungsweise als

$$d(OE(0), OE(t))^2 \approx \sum_{i=1}^6 \|\mathbf{v}(\mathbf{S}_i)\|^2 \quad \text{mit} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{S}_i) = \hat{\mathbf{q}}_{6|0} + (\mathbf{q}_{6|0} \times \mathbf{s}_i(0)) = \sum_{j=1}^6 \hat{\mathbf{a}}_j \omega_{j|j-1} + \left(\sum_{j=1}^6 \mathbf{a}_j \omega_{j|j-1} \times \mathbf{s}_i(0) \right). \quad (3.9)$$

Wir sind nun an jenem normierten Winkelgeschwindigkeitsvektor interessiert, welcher die schlechteste Performance des OE zur Folge hat, also die momentan schlechteste Geschwindigkeitsübertragung auf das OE nach sich zieht. Dieses Winkelgeschwindigkeitsverhältnis erhalten wir über die Lösung der folgenden Minimierungsaufgabe:

Wir suchen jenes Winkelgeschwindigkeitsverhältnis $\mathbb{R} \boldsymbol{\omega}$, welches die nachstehende Zielfunktion $\zeta(\boldsymbol{\omega})$

$$\zeta(\boldsymbol{\omega}): \quad \sum_{i=1}^6 \|\mathbf{v}(\mathbf{S}_i)\|^2 \quad (3.10)$$

mit $\mathbf{v}(\mathbf{S}_i)$ laut (3.9) unter der Nebenbedingung $\nu(\boldsymbol{\omega})$ mit

$$\nu(\boldsymbol{\omega}): \quad \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{E}_6 \boldsymbol{\omega} = 1, \quad (3.11)$$

minimiert. Die Nebenbedingung $\nu(\boldsymbol{\omega})$ stellt die Normierungsbedingung für $\mathbb{R} \boldsymbol{\omega}$ dar. Da es sich bei der Zielfunktion $\zeta(\boldsymbol{\omega})$ offensichtlich um eine quadratische Form in den Unbekannten $\omega_{i|i-1}$ handelt, können wir diese auch als $\zeta(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{Z} \boldsymbol{\omega}$ anschreiben, wobei die symmetrische 6×6 Matrix \mathbf{Z} die folgende Gestalt hat:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} \quad \text{mit} \quad \mathbf{W} = \sum_{i=1}^6 \begin{pmatrix} \mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i & \mathbf{S}_i^T \\ \mathbf{S}_i & \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$\text{und} \quad \mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} 0 & s_{i,3} & -s_{i,2} \\ -s_{i,3} & 0 & s_{i,1} \\ s_{i,2} & -s_{i,1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Die Lösung des Minimierungsproblems erfolgt über Einführung eines Lagrange'schen Multiplikators λ , wobei sich aber der Ansatz $\nabla\zeta - \lambda\nabla\nu = 0$ unter Berücksichtigung von $\nabla\zeta = 2\mathbf{Z}\boldsymbol{\omega}$ und $\nabla\nu = 2\mathbf{E}_6\boldsymbol{\omega}$ zu dem Eigenwertproblem

$$(\mathbf{Z} - \lambda\mathbf{E}_6)\boldsymbol{\omega} = \mathbf{o}$$

vereinfacht. Dieses lineare Gleichungssystem besitzt genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante der Matrix $(\mathbf{Z} - \lambda\mathbf{E}_6)$ verschwindet. Dieses charakteristische Polynom ist maximal vom Grad 6 in der Unbekannten λ . Mit jeder Lösung λ_i (Eigenwert von \mathbf{Z}) ist auch ein Eigenvektor $\boldsymbol{\omega}_i$ verbunden. Aus den Gleichungen

$$\mathbf{Z}\boldsymbol{\omega}_i = \lambda_i\mathbf{E}_6\boldsymbol{\omega}_i \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega}_i^T\mathbf{E}_6\boldsymbol{\omega}_i = 1 \quad \text{folgt nun}$$

$$\zeta(\boldsymbol{\omega}_i) = \boldsymbol{\omega}_i^T\mathbf{Z}\boldsymbol{\omega}_i = \lambda_i\boldsymbol{\omega}_i^T\mathbf{E}_6\boldsymbol{\omega}_i = \lambda_i.$$

Somit spiegelt der Eigenwert λ_i den zur Lösung gehörigen Funktionswert $\zeta(\boldsymbol{\omega}_i)$ wider, woraus nun folgt, dass der zum kleinsten Eigenwert λ_{min} gehörige Eigenvektor $\boldsymbol{\omega}_{min}$ das gesuchte Winkelgeschwindigkeitsverhältnis ist. λ_{min} ist somit ein Maß für die momentan schlechteste Geschwindigkeitsübertragung.

3.3.1 Definition von $PI_{OE}(\mathcal{K})$

Wir wollen bei der Definition des neuen Index ausnützen, dass das OE fix mit dem Gangsystem Σ_6 verbunden ist, und somit seine relative Lage zur Drehachse \mathbf{a}_6 unverändert bleibt. Somit kann in jeder Konfiguration des Roboters eine Drehung des OE um die sechste Drehachse mit derselben Performance DC ausgeführt werden, wobei DC , wie folgt, definiert ist:

$$DC := \zeta(0, \dots, 0, 1) = \sum_{i=1}^6 \overline{\mathbf{a}_6\mathbf{S}_i}^2 \geq \lambda_{min} \quad DC = const. \quad \forall \mathcal{K} \quad (3.14)$$

und $\overline{\mathbf{a}_6\mathbf{S}_i}$ den Abstand von \mathbf{S}_i zu \mathbf{a}_6 bezeichnet. DC ist somit eine Designkonstante des 6R Roboters.

Definition 3.3. *Der EE dependent Performance Index $PI_{OE}(\mathcal{K})$, der auf der objektbezogenen Metrik und dem Operation Ellipsoid (Def. 3.2) basiert, ist bezüglich der 6R Roboterkonfiguration \mathcal{K} definiert als*

$$PI_{OE}(\mathcal{K}) := +\sqrt{\frac{\lambda_{min}}{DC}} \quad \text{mit} \quad PI_{OE}(\mathcal{K}) \in [0, 1], \quad (3.15)$$

wobei λ_{min} dem kleinsten Eigenwert der Matrix \mathbf{Z} (3.12) entspricht und DC gemäß (3.14) definiert ist.

Satz 3.2. *Der Performance Index $PI_{OE}(\mathcal{K})$ ist wohldefiniert.*

Beweis: Die Matrix \mathbf{Z} aus (3.12) ist im nicht singulären Fall des Manipulators stets positiv definit, denn die Zielfunktion $\zeta(\boldsymbol{\omega})$ hängt von den Normalabständen der Scheitel \mathbf{S}_i von der momentanen Schraubachse $\mathbf{p}_{6|0}$ sowie von $\omega_{6|0}$ und $\widehat{\omega}_{6|0}$, wie folgt, ab:

$$\sum_{i=1}^6 \|\mathbf{v}(\mathbf{S}_i)\|^2 = \omega_{6|0}^2 \sum_{i=1}^6 \overline{\mathbf{p}_{6|0} \mathbf{S}_i}^{-2} + 6 \widehat{\omega}_{6|0}^2. \quad (3.16)$$

\mathbf{Z} ist somit in einer nicht singulären Konfiguration nur dann positiv semidefinit, wenn das OE in eine Strecke (bzw. Punkt) ausarten würde. Denn in diesem Fall würde eine momentane Drehung $\mathbf{d}_{6|0}$ mit $\mathbf{S}_i \in \mathbf{d}_{6|0}$ für $i = 1, \dots, 6$ die Zielfunktion stets identisch erfüllen, unabhängig davon, ob sich der Manipulator in einer singulären Lage befindet oder nicht. Diese Sonderfälle können jedoch auf Grund der Definition des OE (Def. 3.2) nicht eintreten.

In einer singulären Konfiguration ist \mathbf{Z} stets positiv semidefinit. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass in singulären Lagen mindestens ein Winkelgeschwindigkeitsverhältnis $\mathbb{R} \boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{o}$ existiert, welches einen momentanen Stillstand des Endeffektors nach sich zieht, also $\mathbf{q}_{6|0} = \mathbf{o}$ gilt, woraus $\mathbf{v}(\mathbf{P}) = \mathbf{o}$ für alle $\mathbf{P} \in \Sigma_6$ folgt.

Man muss sich noch überlegen, dass der Index auch bezüglich des OE wohldefiniert ist. Damit ist gemeint, dass der Index invariant gegenüber der Wahl der Scheitel \mathbf{S}_i des OE ist, falls diese nicht eindeutig bestimmt sind; also im Fall einer Sphäre oder eines Drehellipsoids. Auf Grund von (3.16) ist nur zu zeigen, dass die Quadratsumme der Abstände von \mathbf{S}_i zu $\mathbf{p}_{6|0}$ für jede beliebige Wahl der Scheitel ident ist. Dies ist aber trivial, womit der Satz bewiesen ist. \square

Satz 3.3. $PI_{OE}(\mathcal{K})$ hat alle geforderten sechs Eigenschaften aus (2.8) – (2.13).

Beweis: Auf Grund des vorherigen Satzes sind die ersten beiden Forderungen bereits erfüllt. $PI_{OE}(\mathcal{K})$ ist auch invariant gegenüber Ähnlichkeiten, da es als Verhältnis definiert wurde. Die Invarianz des Indizes gegenüber Euklidischen Bewegungen, folgt direkt aus der Invarianz der Zielfunktion, welche aus (3.16) unmittelbar hervorgeht. Der fünfte Punkt unserer gewünschten Eigenschaften ist auf Grund der objektbezogenen Metrik, die geometrisch interpretierbar ist, trivialerweise erfüllt. Da die Berechnung von $PI_{OE}(\mathcal{K})$ nur die Lösung eines Polynoms sechsten Grades erfordert, kann der Index auch in Echtzeit berechnet werden. \square

Bemerkung: Wenn $PI_{OE}(\mathcal{K})$ sehr klein ist, sollte das Winkelgeschwindigkeitsverhältnis $\mathbb{R} \boldsymbol{\omega}_{min}$ vermieden werden, da dieses nur geringe Auswirkungen auf die momentane Lageänderung des OE hat.

3.3.2 Gewichtete Version des $PI_{OE}(\mathcal{K})$

Wir können die Einheitsmatrix \mathbf{E}_6 in $\nu(\boldsymbol{\omega})$ aus (3.11) durch eine gewichtete Diagonalmatrix $\mathbf{G} := \text{diag}(g_1, \dots, g_6)$ ersetzen. Es stellt sich nur die Frage, wie die Gewichtung vorzunehmen ist, also wie die g_i zu wählen sind. Wir schlagen eine praxisorientierte Wahl vor:

Wir setzen $g_i = \mathbf{I}_i/2$, wobei $\mathbf{I}_i > 0$ die Näherung für das Massenträgheitsmoment der Vereinigung der Körper $\Sigma_i, \dots, \Sigma_6$ bezüglich der Achse \mathbf{a}_i bezeichnet. Das Massenträgheitsmoment \mathbf{I}_i lässt sich, wie folgt, berechnen:

$$\mathbf{I}_i = \sum_j m_j r_j^2, \quad (3.17)$$

wobei m_j die Masse des j -ten Massepunktes $\in \bigcup_i \Sigma_i$ und r_j den Abstand desselben von der Drehachse \mathbf{a}_i notiert. Somit entspricht die gewichtete Nebenbedingung

$$\nu^G(\boldsymbol{\omega}): \quad \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{G} \boldsymbol{\omega} = 1 \quad \text{mit} \quad \mathbf{G} = \text{diag} \left(\frac{\mathbf{I}_1}{2}, \dots, \frac{\mathbf{I}_6}{2} \right) \quad (3.18)$$

der Forderung, dass die Summe der benötigten (investierten) Rotationsenergie gleich 1 ist. Der einzige Unterschied in der Berechnung ist, dass wir nun den kleinsten allgemeinen Eigenwert λ_{min}^G von \mathbf{Z} bezüglich \mathbf{G} benötigen. Auf Grund dieser gewichteten Nebenbedingung $\nu^G(\boldsymbol{\omega})$ erhalten wir nun als Analogon zu (3.14) die folgende Ungleichung:

$$DC^G := \zeta \left(0, \dots, 0, \sqrt{\frac{2}{\mathbf{I}_6}} \right) = \frac{2}{\mathbf{I}_6} \sum_{i=1}^6 \frac{1}{a_{6|5} S_i^2} \geq \lambda_{min}^G \quad DC^G = \text{const.} \quad \forall \mathcal{K}. \quad (3.19)$$

Somit können wir nun analog zu $PI_{OE}(\mathcal{K})$ den gewichteten Index definieren, den wir mit $PI_{OE}^G(\mathcal{K})$ bezeichnen wollen.

Definition 3.4. *Der vom Endeffektor und der Masseverteilung des 6R Roboters abhängige Performance Index $PI_{OE}^G(\mathcal{K})$, der auf der objektbezogenen Metrik und dem Operation Ellipsoid (Def. 3.2) basiert, ist bezüglich der 6R Roboterkonfiguration \mathcal{K} definiert als*

$$PI_{OE}^G(\mathcal{K}) := + \sqrt{\frac{\lambda_{min}^G}{DC^G}} \quad \text{mit} \quad PI_{OE}^G(\mathcal{K}) \in [0, 1], \quad (3.20)$$

wobei λ_{min}^G dem kleinsten allgemeinen Eigenwert von \mathbf{Z} (3.12) bezüglich \mathbf{G} (3.18) entspricht und DC^G gemäß (3.19) definiert ist.

Der Nachteil eines solchen gewichteten Index ist, dass man den rein kinematischen Standpunkt verlässt; also $PI_{OE}^G(\mathcal{K})$ kein kinematischer Performance Index mehr ist. Somit haben Roboter, die sich nur in der Verteilung der Masse unterscheiden, bezüglich desselben OE und in derselben Konfiguration \mathcal{K} verschiedene Werte der Funktion $PI_{OE}^G(\mathcal{K})$ zur Folge.

3.4 Der Performance Index $CDN_{OE}(\mathcal{K})$

Wie in Abschnit 3.1.2 angekündigt, wollen wir nun, basierend auf der eingeführten Metrik im Raum der Euklidischen Bewegungen, eine geometrische Interpretation der CL angeben sowie die Beliebigkeit in der Anzahl und Wahl der Referenzpunkte von Gosselins Konzept beseitigen. Letzteres wird durch die Einführung des Performance Index CDN_{OE} erledigt, der, wie folgt, definiert ist:

Definition 3.5. Der EE dependent Performance Index $CDN_{OE}(\mathcal{K})$, der auf der objektbezogenen Metrik und dem Operation Ellipsoid (Def. 3.2) basiert, ist bezüglich der 6R Roboterkonfiguration \mathcal{K} definiert als

$$CDN_{OE}(\mathcal{K}) := +\sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} \quad \text{mit} \quad CDN_{OE}^{-1}(\mathcal{K}) \in [0, 1], \quad (3.21)$$

wobei λ_{min} und λ_{max} den kleinsten bzw. größten Eigenwert der Matrix \mathbf{Z} aus (3.12) bezeichnet.

Satz 3.4. CDN_{OE}^{-1} ist wohldefiniert und genügt allen sechs Anforderungen aus (2.8)–(2.13).

Beweis: Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 3.2 und Satz 3.3 sowie deren Beweisen. \square

Bevor wir eine geometrische Interpretation der CL angeben, wollen wir noch den Zusammenhang zwischen $CDN_{OE}(\mathcal{K})$ und $PI_{OE}(\mathcal{K})$ klären.

Satz 3.5. Ist für eine Konfiguration \mathcal{K}_i die $CDN_{OE}(\mathcal{K}_i)$ bezüglich eines OE gleich 1, so folgt daraus $PI_{OE}(\mathcal{K}_i) = 1$. Die Umkehrung gilt nicht.

Beweis: Die Konstante DC aus (3.14) ist der Funktionswert der Zielfunktion $\zeta(\boldsymbol{\omega})$ (3.10) bezüglich $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Da in einer isotropen Lage alle Winkelgeschwindigkeitsverhältnisse, welche die Normierungsbedingung $\nu(\boldsymbol{\omega})$ (3.11) erfüllen, denselben Zielfunktionswert haben, gilt: $\lambda_i = DC$ für $i = 1, \dots, 6$ wobei die λ_i die sechs Eigenwerte von \mathbf{Z} sind. \square

3.4.1 Geometrische Interpretation der charakteristischen Länge

Infolge wollen wir CDN_{OE} und CDN_{CL} für ein und dieselbe Manipulatorkonfiguration \mathcal{K} berechnen. Wir setzen voraus, dass das Operation Ellipsoid OE im Operation Point OP zentriert ist und dass das Rastkoordinatensystem mit den Hauptachsen des OE zusammenfällt. Somit haben die sechs Scheitel \mathbf{S}_i des OE die folgenden Rastkoordinaten:

$$\mathbf{s}_{1,4} = (\pm a, 0, 0) \quad \mathbf{s}_{2,5} = (0, \pm b, 0) \quad \mathbf{s}_{3,6} = (0, 0, \pm c). \quad (3.22)$$

Die Matrix \mathbf{W} aus Gleichung (3.12) vereinfacht sich zu

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & 6\mathbf{E}_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & 2(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2(a^2 + b^2) \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Mit diesen Vereinbarungen lässt sich die Aussage des nächsten Satzes leicht zeigen.

Satz 3.6. Die CL von CDN_{CL} entspricht $R\sqrt{2/3}$ dem Radius R jener Operation Sphere OS mit Mittelpunkt OP , bezüglich welcher der Manipulator die kleinste CDN_{OE} besitzt.

Beweis: Die Indizes CDN_{OE} und CDN_{CL} stimmen genau dann überein, wenn $\mathbf{W} = 6CL^2\widehat{\mathbf{W}}$ gilt. Dieses Gleichungssystem ist genau dann erfüllt, wenn das OE eine *Operation Sphere* OS mit Radius $R := a = b = c = CL\sqrt{3/2}$ ist.

Der Umstand, dass das OE zu einer OS ausarten muss, folgt auch aus der Invarianz der CDN_{CL} gegenüber der Rotationen um den Rastkoordinatenursprung U . \square

Auf Grund dieses Satzes können wir die CDN_{CL} als Sonderfall der CDN_{OE} ansehen. Diese Interpretation stellt die Sinnhaftigkeit der Definition der CL aus den folgenden Gründen in Frage. Die Gründe sind gegliedert nach der Anwendung des Index CDN_{OE} für *Robot Design* einerseits und *Robot Control* andererseits:

• Robot Design

Das Konzept der CDN_{CL} wird auch herangezogen, um das Design von 6R Manipulatoren zu optimieren, wobei ein Roboter als optimal angesehen wird, wenn eine Konfiguration \mathcal{K}_i sowie eine CL so existieren, dass $CDN_{CL}(\mathcal{K}_i) = 1$ gilt. Dabei war es bisher völlig bedeutungslos, welchen Wert die CL annimmt, solange die Bedingung $CDN_{CL}(\mathcal{K}_i) = 1$ erfüllt wurde. Auf Grund der angegebenen Interpretation sollte jedoch die CL nicht das Resultat eines Optimierungsprozesses sein, sondern als eine Designkonstante fungieren. Dies bedeutet, dass bei der Planung eines Roboters zuerst überlegt werden muss, für welche OS und somit für welche CL dieser konzipiert werden soll. Der Mittelpunkt dieser OS ist stets als *Operation Point* anzusehen. Erst dann sollte das Design (DH-Parameter) so optimiert werden, dass eine isotrope Roboterkonfiguration im Arbeitsbereich existiert. Es sollte noch bemerkt werden, dass ein 6R Roboter, dessen OP auf der sechsten Achse \mathbf{a}_6 liegt, niemals isotrop bezüglich CDN_{CL} sein kann. Denn eine notwendige Bedingung für isotrope Lagen ist, dass der OP gleichen Abstand von allen sechs Drehachsen \mathbf{a}_i mit $i = 1, \dots, 6$ hat.

Natürlich muss man sich nicht auf die Festlegung einer *Operation Sphere* OS beschränken, sondern kann auch allgemeiner ein *Operation Ellipsoid* vorgeben. Dann muss der 6R Roboter so optimiert werden, dass dieser bezüglich der CDN_{OE} isotrop ist. Eine Optimierung bezüglich der CDN_{OE} macht nur dann einen Sinn, wenn der zu entwickelnde Roboter mit einem ganz bestimmten Endeffektor ausgerüstet wird. Ein Beispiel dafür wäre die Entwicklung eines Schweißroboter, dessen Endeffektor ein Schweißgerät bekannter Dimension ist. Da aber im Allgemeinen 6R Roboter für ein möglichst breites Anwendungsgebiet designt werden, scheint es sinnvoll zu sein, für diese eine Optimierung bezüglich einer *Operation Sphere* vorzunehmen, um ein solches auch zu gewährleisten.

• Robot Control

Die *Operation Sphere* mit Radius $R = CL\sqrt{3/2}$, welche im *Operation Point* zentriert ist, stimmt im Allgemeinen nicht mit dem tatsächlichen Bereich des Endeffektors überein, an dessen Manipulation man interessiert ist. Deshalb ist die CDN_{CL} kein adäquater Index für *Robot Control*. Deshalb sind in diesem Fall ganz klar die Indizes PI_{OE} und CDN_{OE} zu bevorzugen.

Bemerkung: Kurz vor Fertigstellung dieser Arbeit wurde der Autor auf den Artikel [25] von Khan und Angeles aufmerksam. In diesem Artikel wurde auf Basis einer Neudefinition der CL ebenfalls eine geometrische Interpretation derselbigen angegeben, wobei sich diese grundlegend von jener in dieser Arbeit unterscheidet. Da die CL eines Roboters im 4 Kapitel von [25] wiederum aus der Lösung einer Minimierungsaufgabe resultiert, können die zuvor formulierten Kritikpunkte aufrecht erhalten werden.

Auf Grund der angestellten Überlegungen dieses Abschnittes wollen wir die folgende Neudefinition für die *charakteristische Länge* veranschlagen:

Definition 3.6. Die charakteristische Länge ist definiert als:

$$CL := R\sqrt{2/3}, \quad (3.24)$$

wobei R der Radius jener Operation Sphere OS ist, welche den Bereich des Interesses am besten repräsentiert. Der Mittelpunkt dieser OS ist als Operation Point zu definieren.

Bemerkung: Wir können ohne CDN_{OE} zu verändern die Matrix \mathbf{W} aus (3.23) durch $\frac{1}{6}\mathbf{W}$ ersetzen. Dann wird die untere 3×3 Matrix zur Einheitsmatrix und die obere 3×3 Matrix ($= \frac{1}{6}\mathbf{L}$) gleicht dem Trägheitstensor des *Operation Ellipsoids* materialisiert als ellipsoidale Schale \mathcal{E} mit Masse 1. Somit kann CDN_{OE} auch als die Quadratwurzel des Verhältnisses der kleinsten und größten kinetischen Energie von \mathcal{E} unter der Nebenbedingung $\nu(\boldsymbol{\omega})$ (3.11) interpretiert werden. PI_{OE} aus Def. 3.3 gleicht somit der Quadratwurzel des Verhältnisses der kleinsten kinetischen Energie von \mathcal{E} unter $\nu(\boldsymbol{\omega})$ und der Rotationsenergie von \mathcal{E} bezüglich der Drehung um \mathbf{a}_6 mit Winkelgeschwindigkeit 1.

Bemerkung: Der Index CDN_{OE} kann auch für potenzielle Käufer von 6R Robotern zur Evaluierung der am Markt erhältlichen Modelle herangezogen werden. Denn mit Hilfe dieses Index ist es möglich, jenes Fabrikat ausfindig zu machen, welches für die ganz spezielle Anwendung des Käufers am besten geeignet ist. Man müsste für jeden in Frage kommenden Robotertyp (Vorkriterien: Reichweite, Nutzlast, ...) das Maximum der CDN_{OE}^{-1} bezüglich des durch die Anwendung festgelegten OE im Arbeitsraum berechnen. Rein vom kinematischen Standpunkt aus betrachtet, wäre dann jenes Modell zu bevorzugen, dessen Maximalwert am größten ist.

3.4.2 Gewichtete Version der $CDN_{OE}(\mathcal{K})$

Analog zur Definition von $PI_{OE}^G(\mathcal{K})$ können wir auch eine gewichtete Version von $CDN_{OE}(\mathcal{K})$ einführen, welche sich ebenfalls auf die investierte Rotationsenergie stützt. Wir wollen diesen Index mit $CDN_{OE}^G(\mathcal{K})$ bezeichnen und ihn, wie folgt, definieren:

Definition 3.7. Der vom Endeffektor und der Masseverteilung des Roboters abhängige Performance Index $CDN_{OE}^G(\mathcal{K})$, der auf der objektbezogenen Metrik und dem Operation Ellipsoid (Def. 3.2) basiert, ist bezüglich der 6R Roboterkonfiguration \mathcal{K} definiert als

$$CDN_{OE}^G(\mathcal{K}) := +\sqrt{\frac{\lambda_{max}^G}{\lambda_{min}^G}} \quad \text{mit} \quad CDN_{OE}^{-G}(\mathcal{K}) \in [0, 1], \quad (3.25)$$

wobei λ_{min}^G bzw. λ_{max}^G den kleinsten bzw. größten allgemeinen Eigenwert der Matrix \mathbf{Z} aus (3.12) bezüglich der Matrix \mathbf{G} aus (3.18) bezeichnet.

Der Nachteil dieses gewichteten Indizes ist wiederum, dass man den rein kinematischen Standpunkt verlässt; also $CDN_{OE}^G(\mathcal{K})$ kein kinematischer Performance Index mehr ist. Somit haben Roboter, die sich nur in der Verteilung der Masse unterscheiden, bezüglich desselben OE und in derselben Konfiguration \mathcal{K} verschiedene Werte der Funktion $CDN_{OE}^G(\mathcal{K})$ zur Folge.

3.5 Beispiel: ABB IRB 2000

Als Beispiel wurde der Industrieroboter *IRB 2000* der Marke *ABB* herangezogen. In der Ausgangslage (siehe *Abbildung 3.1*) sind die Drehachsen $\vec{\mathbf{a}}_i$ des Manipulators gegeben durch die folgenden Speerkoordinaten:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{a}}_1 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \underline{\mathbf{a}}_2 &= (0, -1, 0, 0, 0, 0) \\ \underline{\mathbf{a}}_3 &= (0, -1, 0, 0, 0, 710) \\ \underline{\mathbf{a}}_4 &= (0, 0, -1, 0, -835, 0) \\ \underline{\mathbf{a}}_5 &= (0, 1, 0, -850, 0, 835) \\ \underline{\mathbf{a}}_6 &= (0, 0, 1, 0, -835, 0)\end{aligned}$$

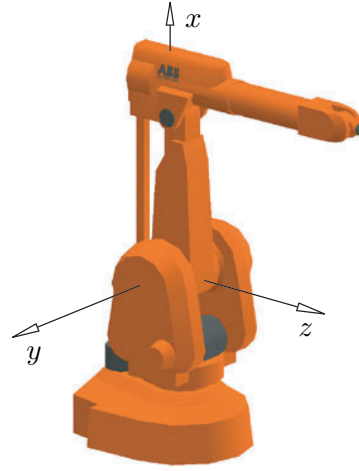


Abbildung 3.1: Ausgangslage

bezüglich der Einheit *mm*. Der Arbeitsraum des Manipulators ist bestimmt durch:

$$\begin{aligned}\theta_1 &\in [-179^\circ, 179^\circ] & \theta_3 &\in [-60^\circ, 60^\circ] & \theta_5 &\in [-120^\circ, 120^\circ] \\ \theta_2 &\in [-110^\circ, 100^\circ] & \theta_4 &\in [-200^\circ, 200^\circ] & \theta_6 &\in [-200^\circ, 200^\circ].\end{aligned}$$

Anhand dieses Beispiels wollen wir die Auswirkungen der Veränderung des *Operation Ellipsoids* auf die Indizes $PI_{OE}(\mathcal{K})$ und $CDN_{OE}^{-1}(\mathcal{K})$ illustrieren. Die Scheitel \mathbf{s}_i haben die folgenden Rastkoordinaten \mathbf{s}_i in der Ausgangslage:

$$\mathbf{s}_{1,4} := \mathbf{p} \pm (0, 0, a), \quad \mathbf{s}_{2,5} := \mathbf{p} \pm (0, b, 0), \quad \mathbf{s}_{3,6} := \mathbf{p} \pm (c, 0, 0),$$

wobei $\mathbf{p} := (835, 0, 1150)$ die Rastkoordinaten des *Operation Points* sind. Wir betrachten den einparametrischen Zwangslauf, welcher, wie folgt, bestimmt ist:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 0 & \theta_2 &= t \frac{21\pi}{18} - \frac{11\pi}{18} & \theta_3 &= t^2 \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \\ \theta_6 &= 0 & \theta_4 &= t\pi - \frac{\pi}{2} & \theta_5 &= t \frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

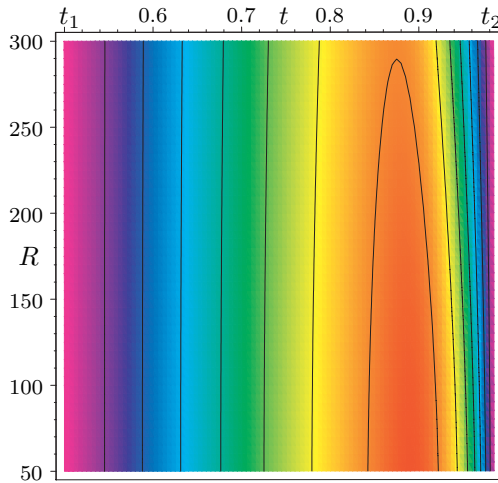


Abbildung 3.2: PI_{OE}

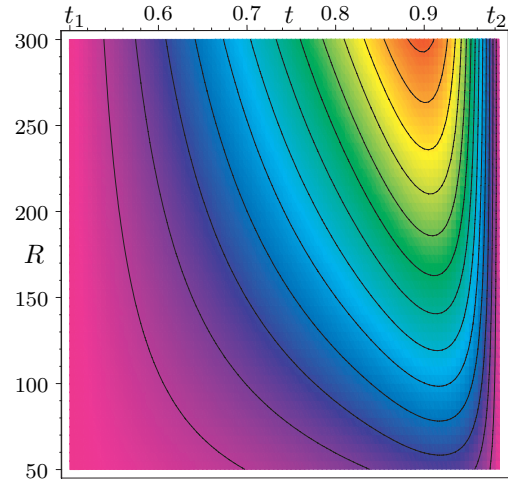


Abbildung 3.3: CDN_{OE}^{-1}

Zuerst wollen wir annehmen, dass das OE eine *Operation Sphere* mit Radius $R := a = b = c$ ist, welche im *Operation Point* zentriert ist. In *Abbildung 3.2* und *Abbildung 3.3* sind die Isolinien von PI_{OE} bzw. CDN_{OE}^{-1} über $R \times t \in [50, 300] \times [t_1, t_2]$ dargestellt, wobei $\mathcal{K}(t_1)$ und $\mathcal{K}(t_2)$ singuläre Lagen des 6R Roboters sind. Es zeigt sich, dass $CDN_{OE}^{-1}(\mathcal{K})$ sehr stark von der Wahl des Radius R abhängt. Im Gegensatz dazu ist PI_{OE} mehr oder weniger konstant für $R \in [50, 300]$. Die höchste Isolinie von PI_{OE} hat einen Wert von 0.7 und jene von CDN_{OE}^{-1} einen von 0.12.

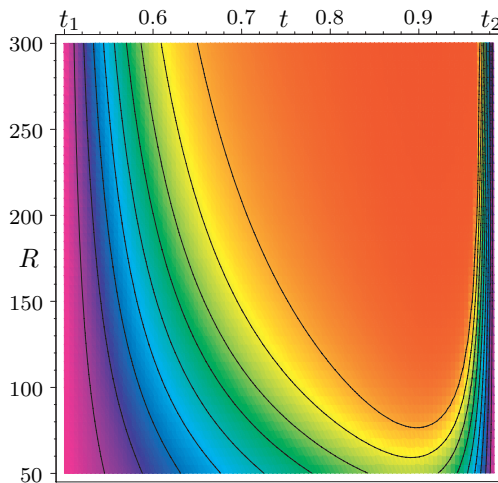


Abbildung 3.4: PI_{OE}

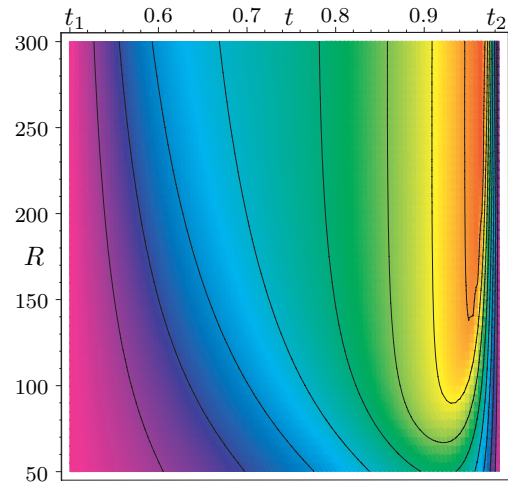


Abbildung 3.5: CDN_{OE}^{-1}

Infolge wollen wir als *OE* keine Sphäre mehr heranziehen sondern ein eiförmiges Drehellipsoid. Dieses ist gegeben durch $R := a$ sowie $b = c = 50$. In *Abbildung 3.4* und *Abbildung 3.5* sind die Isolinien von PI_{OE} bzw. CDN_{OE}^{-1} über $R \times t \in [50, 300] \times [t_1, t_2]$ dargestellt. Die höchste Isolinie von PI_{OE} hat einen Wert von 0.9 und jene von CDN_{OE}^{-1} einen von 0.04.

Da λ_{max} im Gegensatz zu *DC* keine Konstante ist, können in der Praxis sehr oft kleine Werte für CDN_{OE}^{-1} auftreten, obwohl λ_{min} nur geringfügig kleiner oder sogar gleich *DC* ist. Dieser Umstand zeigt sich in diesen beiden Graphiken sehr eindrucksvoll.

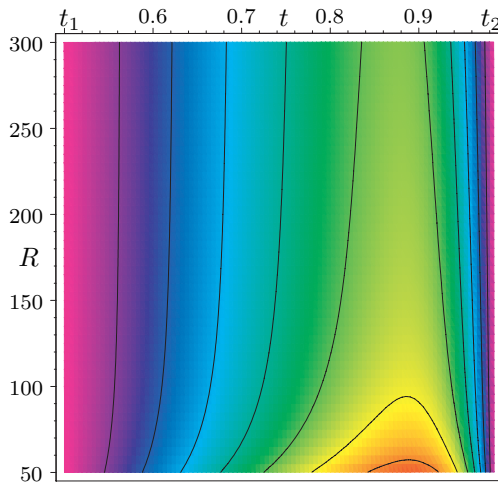


Abbildung 3.6: PI_{OE}

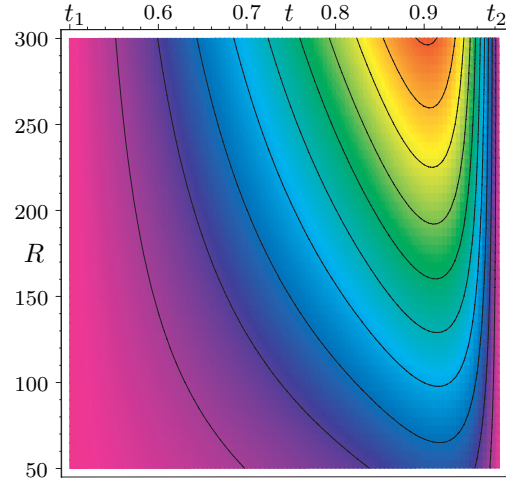


Abbildung 3.7: CDN_{OE}^{-1}

Zuletzt wollen wir noch als *OE* ein abgeplattetes Drehellipsoid betrachten, welches durch $a = 50$ und $R := b = c$ bestimmt ist. In *Abbildung 3.6* und *Abbildung 3.7* sind die Isolinien von PI_{OE} bzw. CDN_{OE}^{-1} über $R \times t \in [50, 300] \times [t_1, t_2]$ dargestellt. Die höchste Isolinie von PI_{OE} hat einen Wert von 0.7 und jene von CDN_{OE}^{-1} einen von 0.1.

Dieses Beispiel unterstreicht auch die Überlegungen aus 2.3.1, daß nämlich ein *EE dependent Performance Index* auf Grund der Abhängigkeit vom Endeffektor kein geeignetes Abstandsmaß zur Singularität sein kann.

Kapitel 4

EE independent Performance Indizes für 6R Roboter

4.1 Review: Manipulability $MPB(\mathcal{K})$

Dieses Konzept, das 1985 von Yoshikawa [55] eingeführt wurde, beruht auf der Aussage von Satz 2.1, denn dieser *Performance Index* gibt für nicht redundante Manipulatoren nichts anderes als den Betrag der Determinante der Jakobimatrix \mathbf{J} aus (2.2) wider. Wir wollen uns nun überlegen, dass dieser Index nicht nur trivialerweise die Bedingungen 1 und 2 erfüllt, sondern auch unsere dritte Forderung.

Satz 4.1. *Die Manipulability ist invariant gegenüber Euklidischen Bewegungen des Rastkoordinatensystems.*

Beweis: Sei \mathbf{R} eine orthogonale Matrix, die eine Drehung ρ des Rastkoordinatensystems induziert, und $\mathbf{t} := (x, y, z)^T$ ein beliebiger Schiebvektor der Translation τ desselben. Da jede gleichsinnige Euklidische Bewegung aus einer Drehung und einer Translation zusammengesetzt werden kann, brauchen wir nur zeigen, dass die Determinante der Jakobimatrix \mathbf{J} invariant gegenüber Translationen und Rotationen ist. Aus der Koordinatentransformation von Speeren folgt:

$$(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) \xrightarrow{\rho} (\mathbf{R}\mathbf{a}, \mathbf{R}\hat{\mathbf{a}}) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{J} \xrightarrow{\rho} \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{R} \end{pmatrix} \mathbf{J} := \mathbf{J}_\rho \quad (4.1)$$

$$(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) \xrightarrow{\tau} (\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}} + (\mathbf{t} \times \mathbf{a})) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{J} \xrightarrow{\tau} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{T} & \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} \mathbf{J} := \mathbf{J}_\tau \quad (4.2)$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & +z & -y \\ -z & 0 & +x \\ +y & -x & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus $\det(\mathbf{R}) = \det(\mathbf{E}_3) = 1$ folgt nun $\det(\mathbf{J}_\rho) = \det(\mathbf{J}_\tau) = \det(\mathbf{J})$, und somit haben wir die angesprochene Invarianz des Index $|\det(\mathbf{J})|$ bewiesen. \square

4.1.1 Interpretation und Varianz von $MPB(\mathcal{K})$

Die *Manipulability* ist variant unter Ähnlichkeiten, da sich eine Änderung der Skalierung mit dem Faktor λ auf die Momentenvektoren durchdrückt und sich somit der Wert der Determinante von \mathbf{J} um das λ^3 -fache ändert. Neben dieser Varianz besitzt die *Manipulability* einen zweiten großen Schwachpunkt, den wir infolge aufzeigen wollen.

Interpretieren lässt sich MPB , wie folgt: Der Vektorraum \mathbb{R}^6 aller Momentanschrauben ist die Menge aller möglichen $\mathbf{a}_{6|0}$ von Σ_6 / Σ_0 , welche die Bedingung $|\omega_{i|i-1}| \leq 1$ für $i = 1, \dots, 6$ erfüllen, ein Parallelepipid, welches das Volumen $2^6 \cdot |\det(\mathbf{J})|$ besitzt. Somit ist die *Manipulability* stets proportional zu diesem Volumen.

Aus diesem Volumen kann man jedoch weder einen Rückschluss auf die Geschwindigkeitsübertragung auf den EE ziehen, da MPB unabhängig vom EE ist, noch hat dieses aus dem folgenden Grund eine geometrische Bedeutung für den Manipulator: Der Index ist nämlich invariant gegenüber dem Vertauschen von Spalten der Jakobimatrix, welches eine Änderung der Reihenfolge der Drehgelenke nach sich zieht, und somit jede der möglichen $6! = 720$ Realisierungen gleichberechtigt wäre.

Da uns die geometrische Bedeutung des Index von großer Wichtigkeit war, sahen wir gerade hier den Ansatzpunkt für die Suche nach einem neuen EE independent Performance Index. Wir wollen deshalb infolge einen EE independent Performance Index als den Abstand der momentanen Konfiguration zur nächstgelegenen Singularität definieren, wobei dieser Abstand eine geometrische Bedeutung für den Manipulator haben soll. Es liegt nun auf der Hand, wie die siebente Forderung aus (2.14) für 6R Roboter zu spezifizieren ist, nämlich, wie folgt:

7. $PI(\mathcal{K})$ soll die Geometrie des 6R Roboters berücksichtigen, und deshalb von der Reihenfolge der Drehachsen abhängen.

4.2 Vorüberlegungen für ein Abstandsmaß

Es scheint nicht zielführend zu sein, den *rein liniengeometrischen Standpunkt* einzunehmen, also nur die momentane Lage der sechs Drehachsen \mathbf{a}_i zu beachten. Dies ist aber letztlich der Fall, wenn man nur die momentane Jakobimatrix betrachtet. Natürlich findet man „in der Nähe“ stets Positionen, wo die 6 Achsen in einem linearen Komplex liegen. Nehmen wir zum Beispiel den Komplex \mathcal{C} her, der von den ersten fünf Achsen aufgespannt wird. Alle Geraden von \mathcal{C} , die gleichzeitig auch die sechste Achse schneiden, bilden im nichtsingulären Fall von \mathcal{C} ein hyperbolisches Netz. Jeder Ersatz von \mathbf{a}_6 durch eine beliebige Netzgerade ergibt eine singuläre Konfiguration. Aber welche ist jetzt die zu \mathbf{a}_6 „nächstgelegene“ Netzgerade? Wie soll ein Abstand definiert werden, der zwischen „besseren“ und „schlechteren“ Konfigurationen unterscheiden lässt? Natürlich bietet sich an, Abstände und Winkel zur zweiten Achse des Netzes zu verwenden, aber wie soll aus diesen zwei Größen ein in allen Fällen sinnvolles einziges positives Maß definiert werden, das skalierungsunabhängig ist?

Demnach scheint der einzig sinnvolle Weg zu einem geometrisch interpretierbaren Abstandsmaß darin zu bestehen, die durch die mechanische Realisierung mögliche Veränderbarkeit der Drehachsen mitzuberücksichtigen. Bei einem seriellen Roboter mit rastfestem \mathbf{a}_1 ist ja die zweite Achse nur eingeschränkt beweglich, und jede Änderung dieser hat natürlich einen Einfluß auf die nächste Achse, usw... Demnach hat es wenig Sinn, die zu einer einzelnen Achse \mathbf{a}_i „nächstgelegene“ Position zu suchen, die dem von allen anderen Achsen aufgespannten linearen Komplex angehört. Das Konzept, welches die durch die mechanische Realisierung mögliche Veränderbarkeit der Drehachsen berücksichtigt, bietet sich bei seriellen Robotern an, da diese im Gegensatz zu den parallelen Manipulatoren eine einfache Lösung für die Vorwärtskinematik besitzen, welche es gilt, für ein Abstandsmaß auszunützen.

4.2.1 Grundidee

Angenommen, der 6R Roboter bewegt sich mit dem momentanen Winkelgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$ durch eine beliebige Konfiguration \mathcal{K} und wird in dieser abrupt gestoppt, dann kommt es in der Praxis zum Übersteuern des Manipulators aus der Lage \mathcal{K} . Dabei bewegt sich die Gelenksachse \mathbf{a}_{i+1} aus der Position \mathcal{K} entlang der Momentanschraubung $\underline{\mathbf{q}}_{i|0}$ der zwangläufigen Bewegung der i -ten Gelenksachse gegenüber der Basis, wobei $\underline{\mathbf{q}}_{i|0}$ unter Berücksichtigung von Satz 1.11 die folgende Gestalt hat:

$$\underline{\mathbf{q}}_{i|0} = \sum_{j=1}^i \mathbf{a}_j \omega_{j|j-1} \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, 6. \quad (4.3)$$

Angenommen, wir lassen die Momentandrehung um die Drehachse $\vec{\mathbf{a}}_i$ mit der Geschwindigkeit $\omega_{i|i-1}$ die Zeit $\delta_i \in \mathbb{R}^+$ lang wirken für $i = 1, \dots, 5$. Dann wird der orientierte Drehwinkel $\Delta_i = \delta_i \omega_{i|i-1}$ überstrichen. Die Frage, die sich jetzt stellt, ist, wie die Drehwinkel gewählt werden müssen, um zur nächstgelegenen Singularität zu kommen. Da eine Drehung des seriellen Roboters um die rastfeste Achse \mathbf{a}_1 keinen Einfluss auf dessen Abstand zu einer singulären Lage haben darf, setzen wir sinnvollerweise $\omega_{1|0} = 0$, also Σ_1 als momentan unbewegt voraus. In Abhängigkeit von der Bedingung, welche man an die Drehwinkel Δ_i stellt, ergeben sich die verschiedenen in diesem Kapitel angeführten Abstandsmaße für 6R Roboter.

4.2.2 Linearisierte Näherung der Vorwärtskinematik

Wir gehen von der Position $\mathcal{K}(\theta_1, \dots, \theta_6) =: \mathcal{K}(\boldsymbol{\theta})$ des Konfigurationsraumes aus und fragen uns, wann $\mathcal{K}(\theta_1, \theta_2 + \Delta_2, \dots, \theta_5 + \Delta_5, \theta_6) =: \mathcal{K}(\boldsymbol{\delta})$ singulär ist, wobei die Δ_i möglichst klein gehalten werden sollen. Um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten und somit unserer sechsten Bedingung gerecht zu werden, stützen wir uns auf die linearisierte Näherung dieses Problems. Diese ist aus dem folgenden Grund für die Definition eines Abstandsmaßes ausreichend: Einerseits ist die Approximation in der *Nähe* von Singularitäten hinreichenden genau und andererseits ist der exakte Wert uninteressant, solange er über einem zu definierenden kritischen Abstand liegt; sich der Manipulator also nicht in der unmittelbaren Nähe einer singulären Lage befindet.

Nachdem die Singularität allein durch die augenblickliche Lage der Gelenksachsen bestimmt ist, benötigen wir die linearisierte Näherung der Achsen $\mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_6$. Offensichtlich hängt $\mathbf{a}_i(\delta)$ nur von den Drehwinkeln $\theta_j + \Delta_j$ für $j = 2, \dots, i-1$ ab. Somit lässt sich die Taylorapproximation 1. Ordnung schreiben als:

$$\mathbf{a}_i(\delta) = \mathbf{a}_i(\theta_2 + \Delta_2, \dots, \theta_{i-1} + \Delta_{i-1}) \approx \mathbf{a}_i(\theta_2, \dots, \theta_{i-1}) + \sum_{j=2}^{i-1} \Delta_j \frac{\partial \mathbf{a}_i(\theta_2, \dots, \theta_{i-1})}{\partial \theta_j} =: \mathbf{b}_i(\delta)$$

wobei $\partial \mathbf{a}_i(\theta)/\partial \theta_j$ die augenblickliche Änderung von \mathbf{a}_i bei Drehung um $\vec{\mathbf{a}}_j$ mit der vorzeichenbehafteten Winkelgeschwindigkeit $\omega_{j|j-1} = 1$ bedeutet. Die zugehörige Schraube ist somit $\underline{\mathbf{a}}_j$, und wir erhalten unter Berücksichtigung von Satz 1.10

$$\frac{\partial \mathbf{a}_i(\theta)}{\partial \theta_j} = \underline{\mathbf{a}}_j(\theta) \times \mathbf{a}_i(\theta).$$

Daraus folgt: $\mathbf{b}_i(\delta) = \mathbf{a}_i(\theta_2, \dots, \theta_{i-1}) + \sum_{j=2}^{i-1} \Delta_j (\underline{\mathbf{a}}_j \times \mathbf{a}_i)$ mit

dem Realteil $\mathbf{b}_i(\delta) = \mathbf{a}_i(\theta) + \sum_{j=2}^{i-1} \Delta_j \frac{\partial \mathbf{a}_i(\theta)}{\partial \theta_j} = \mathbf{a}_i(\theta) + \sum_{j=2}^{i-1} \Delta_j (\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_i)$ und

dem Dualteil $\widehat{\mathbf{b}}_i(\delta) = \widehat{\mathbf{a}}_i(\theta) + \sum_{j=2}^{i-1} \Delta_j \frac{\partial \widehat{\mathbf{a}}_i(\theta)}{\partial \theta_j} = \widehat{\mathbf{a}}_i(\theta) + \sum_{j=2}^{i-1} \Delta_j [(\widehat{\mathbf{a}}_j \times \mathbf{a}_i) + (\mathbf{a}_j \times \widehat{\mathbf{a}}_i)].$

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass die Näherung $\mathbf{b}_i(\delta)$ für $\mathbf{a}_i(\delta)$ im Allgemeinen nicht mehr die Plückerbedingung $\mathbf{b}_i(\delta) \cdot \widehat{\mathbf{b}}_i(\delta) = 0$ erfüllt und es sich dabei um keine Speerkoordinaten ($\underline{\mathbf{b}}_i(\delta) \cdot \underline{\widehat{\mathbf{b}}}_i(\delta) = \mathbf{b}_i(\delta) \cdot \widehat{\mathbf{b}}_i(\delta) + 2\varepsilon \cdot \mathbf{b}_i(\delta) \cdot \widehat{\mathbf{b}}_i(\delta) = 1$) mehr handelt. Aber auch hier gilt für kleine Δ_i die Approximation:

$$\mathbf{b}_i(\delta) \cdot \widehat{\mathbf{b}}_i(\delta) = \mathbf{a}_i \cdot \widehat{\mathbf{a}}_i + \sum_{j=2}^{i-1} \Delta_j \frac{\partial (\mathbf{a}_i \cdot \widehat{\mathbf{a}}_i)}{\partial \theta_j} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=2}^{i-1} \Delta_j \Delta_k \frac{\partial^2 (\mathbf{a}_i \cdot \widehat{\mathbf{a}}_i)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \approx 0,$$

denn aus $\mathbf{a}_i \cdot \widehat{\mathbf{a}}_i = 0$ folgt durch partielles Differenzieren $\widehat{\mathbf{a}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial \theta_j} + \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \widehat{\mathbf{a}}_i}{\partial \theta_j} = 0$.

$$\mathbf{b}_i(\delta) \cdot \mathbf{b}_i(\delta) = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i + \sum_{j=2}^{i-1} \Delta_j \frac{\partial (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i)}{\partial \theta_j} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=2}^{i-1} \Delta_j \Delta_k \frac{\partial^2 (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \approx 1,$$

denn aus $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i = 1$ folgt durch partielles Differenzieren $\frac{\partial (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i)}{\partial \theta_j} = 2\mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial \theta_j} = 0$. Für die Determinante der Jakobimatrix $\mathbf{J}(\delta) := \mathbf{J}(\theta_2 + \Delta_2, \dots, \theta_5 + \Delta_5)$ ergibt sich somit als Näherung

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{J}(\delta)] &= \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3(\theta_2 + \Delta_2), \dots, \mathbf{a}_6(\theta_2 + \Delta_2, \dots, \theta_5 + \Delta_5)] \approx \dots \\ &\approx \det[\mathbf{J}(\theta_2, \dots, \theta_5)] + \sum_{j=2}^5 \frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial \theta_j} \Delta_j \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial \theta_j} \Delta_j = \sum_{k=j+1}^6 \det(\mathbf{a}_1, \dots, \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial \theta_j} \Delta_j, \dots). \end{aligned}$$

Da wir die nächstgelegene Singularität suchen, setzen wir $\det[\mathbf{J}(\delta)]$ gleich Null. Wir schreiben die somit erhaltene Gleichung in einer etwas anderen Form an als

$$\det(\mathbf{J}) + \sum_{i=2}^5 \Delta_i \sum_{j=i+1}^6 \det(\mathbf{J}_{i,j}) = 0, \quad (4.4)$$

wobei \mathbf{J} die Jakobimatrix des Manipulators in der momentanen Konfiguration bezeichnet, und man die Matrizen $\mathbf{J}_{i,j}$ erhält, indem man die j -te Spalte der Jakobimatrix ersetzt durch:

$$\underline{\mathbf{a}}_i \times \underline{\mathbf{a}}_j = (\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j, \hat{\mathbf{a}}_i \times \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_i \times \hat{\mathbf{a}}_j).$$

4.3 Definition neuer Abstandsmaße

Alle Lösungsquadrupel $(\Delta_2, \dots, \Delta_5)$ der inhomogenen Gleichung (4.4) bilden eine Hyperebene \mathcal{H} im Raum $\mathbb{V}_{\mathcal{K}}$, welcher durch die Drehwinkel $\theta_2, \dots, \theta_5$ aufgespannt wird. Die Variablen Δ_i dienen als lokales Koordinatensystem \mathcal{D} , dessen Ursprung in $\mathcal{K}_o := \mathcal{K}(\theta)$ liegt und welches mit dem Koordinatensystem der Drehwinkel θ_i in $\mathbb{V}_{\mathcal{K}}$ durch eine Schiebung um $(-\theta_2, \dots, -\theta_5)$ zur Deckung gebracht werden kann. Es sei noch bemerkt, dass der Nullvektor dann und nur dann eine Lösungsvektor ist, wenn die Hyperebene \mathcal{H} durch den Ursprung \mathcal{K}_o geht, also das Absolutglied $\det(\mathbf{J})$ verschwindet. Siehe dazu auch *Abbildung 4.1*.

4.3.1 Das Abstandsmaß $DM_{\infty}(\mathcal{K}) = \Delta_{\mathbf{L}}$

Infolge wollen wir die Gleichung (4.4) nach dem Gesichtspunkt lösen, dass $|\Delta_i| \leq \Delta_{\mathbf{L}}$ für $i = 2, \dots, 5$ gilt und dass $\Delta_{\mathbf{L}}$ minimal ist. Das gesuchte Quadrupel erhalten wir aus dem nichtleeren Durchschnitt des kleinsten achsenparallelen Hyperwürfels, der im Ursprung \mathcal{K}_o zentriert ist, mit dieser Hyperebene \mathcal{H} . Dieser nichtleere Durchschnitt enthält stets die Ecke \mathbf{L} des Hyperwürfels (*siehe Abbildung 4.1*). Der Ortsvektor $\mathbf{l} = (l_2, \dots, l_5)_{\mathcal{D}}$ von \mathbf{L} ist gegeben durch:

$$l_i = \operatorname{sgn} \left(\det(\mathbf{J}) \cdot \frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial \theta_i} \right) \Delta_{\mathbf{L}} \quad \text{mit} \quad \Delta_{\mathbf{L}} = \frac{|\det(\mathbf{J})|}{\sum_{j=2}^5 \left| \frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial \theta_j} \right|}. \quad (4.5)$$

Satz 4.2. $DM_{\infty}(\mathcal{K})$ gibt näherungsweise den kleinsten Winkel $\Delta_{\mathbf{L}}$ aus (4.5) an, um welchen man gleichzeitig die Systeme Σ_{j+1} um die Drehachse $\vec{\mathbf{a}}_j$ ($j = 2, \dots, 5$) mit der Orientierung $\operatorname{sgn}(l_j)$ drehen muss, um in eine singuläre Lage zu kommen.

Es kann durchaus der Fall eintreten, dass der kleinste nichtleere Durchschnitt des Hyperwürfels mit \mathcal{H} auch ein-, zwei- oder dreidimensional ist. Dem entspricht eine Berührung des Hyperwürfels mit \mathcal{H} längs einer Würfelkante, Würfelfläche oder Würfelhyperfläche. Derartige Ausnahmefälle manifestieren sich in unseren Formeln wie folgt: Je nach Dimension des Durchschnitts kann man einem, zwei oder drei l_i 's kein eindeutiges Vorzeichen zuordnen, da die i -te Koordinate des Normalvektors zu \mathcal{H} verschwindet. Dies bedeutet nun, dass der Abstand zur Singularität unabhängig von den jeweiligen Δ_i 's ist.

Bemerkung Bei dieser Methode erhalten wir im allgemeinen Fall neben unserem Ziel, einem Abstandsmaß, wenig weitere Informationen. Wir können nur auf Grund des mit der Lösung verbundenen Vektors $(\text{sgn}(l_2), \text{sgn}(l_3), \text{sgn}(l_4), \text{sgn}(l_5))$ eine Aussage über die momentan ungünstigsten Drehrichtungen der Gelenke treffen. Wie wir sehen werden, wird uns die nächste Methode nicht nur ein Maß, sondern auch das momentan schlechteste Winkelgeschwindigkeitsverhältnis liefern, also jenes, das am schnellsten an die singuläre Lage heranführt.

4.3.2 Das Abstandsmaß $DM_2(\mathcal{K}) = \Delta_Q$

Wir wollen nun von derselben Gleichung (4.4) wie zuvor ausgehen, jedoch nun so minimieren, dass die Quadratsumme der Winkeländerungen Δ_i minimal ist. Dies bedeutet, dass wir jenen Punkt $Q \in \mathcal{H}$ mit den lokalen Koordinaten $\mathbf{q} = (q_2, \dots, q_5)_{\mathcal{D}}$ suchen, für den $q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + q_5^2 = \Delta_Q^2$ minimal ist. Diese Minimierungsbedingung scheint noch legitim unter dem Gesichtspunkt die Δ_i so klein wie möglich zu halten, denn es gilt die folgende Relation:

$$0 \leq |q_i| \leq \frac{3}{2} \Delta_L.$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass L im positiven Sektor liegt, also $l_2 = \dots = l_5 = \Delta_L$ gilt. Dann liegen nach dem Satz von Thales die Lotfußpunkte F mit $\mathbf{f} = (f_2, f_3, f_4, f_5)$ aller möglichen Hyperebenen durch L bezüglich des Ursprunges auf der Hypersphäre Λ mit

$$\Lambda : \sum_{i=2}^5 \left(f_i - \frac{\Delta_L}{2} \right)^2 = \Delta_L^2.$$

Nun ist f_i genau dann maximal, wenn F der Lotfußpunkt von \mathcal{H} bezüglich des Ursprunges ist, mit

$$f_i = \frac{\Delta_L}{2} + \Delta_L = \frac{3}{2} \Delta_L \quad \text{und} \quad f_j = \frac{\Delta_L}{2} \quad \text{für} \quad j \in \{2, 3, 4, 5\} \setminus \{i\}. \quad \square$$

Bemerkung: Eine Optimierung in der Hinsicht, dass die Summe der Beträge der überstrichenen Winkel minimal ist, erscheint nicht sinnvoll, da man im schlechtesten Fall nicht wie hier mit dem Faktor 3/2, sondern mit dem Faktor 4 zu rechnen hat.

Q erhalten wir als den Berührungspunkt der Hypersphäre Γ , deren Mittelpunkt im Ursprung \mathcal{K}_o liegt, mit der Hyperebene \mathcal{H} (siehe Abbildung 4.1). Wir erhalten somit für die Koordinaten von Q die Ausdrücke

$$q_i = \frac{-\det(\mathbf{J})}{\sum_{j=2}^5 \left(\frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial \theta_j} \right)^2} \cdot \frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial \theta_i}. \quad (4.6)$$

Daraus lässt sich nun Δ_Q sofort berechnen als

$$\Delta_Q = + \sqrt{\frac{\det(\mathbf{J})^2}{\sum_{j=2}^5 \left(\frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial \theta_j} \right)^2}} = \frac{|\det(\mathbf{J})|}{\sqrt{\sum_{j=2}^5 \left(\frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial \theta_j} \right)^2}}. \quad (4.7)$$

Satz 4.3. $DM_2(\mathcal{K})$ gibt näherungsweise die kürzeste Zeit Δ_Q aus (4.7) an, welche benötigt wird, um die nächstgelegene Singularität zu erreichen, vorausgesetzt, dass die Quadratsumme der Winkelgeschwindigkeiten gleich 1 ist. Weiters gilt noch die folgende Beziehung:

$$\Delta_L \leq \Delta_Q \leq 2\Delta_L.$$

Beweis der Ungleichung: Wenn \mathcal{H} den Hyperwürfel entlang einer Hyperebene berührt, erhalten wir $\Delta_L = \Delta_Q$. Die obere Grenze wird hingegen erreicht, wenn $L = Q$ gilt. \square

Das momentan schlechteste Winkelgeschwindigkeitsverhältnis ω_s

Wie schon zuvor erwähnt, erhält man hierbei nicht nur ein Abstandsmaß, sondern auch ein momentan schlechtestes Winkelgeschwindigkeitsverhältnis $\omega_s := \mathbb{R}^+(q_2, q_3, q_4, q_5)$. Dieses Winkelgeschwindigkeitsverhältnis ermöglicht es uns, das momentane Winkelgeschwindigkeitsverhältnis ω_o mit der eine nichtsinguläre Lage \mathcal{K}_o durchlaufen wird, zu evaluieren. Als Maß dafür bietet sich der Winkel $\sigma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ an, der, wie folgt, definiert ist:

$$\sigma := \angle(\omega_s, \omega_o) - \frac{\pi}{2} \quad \text{mit} \quad \angle(\omega_s, \omega_o) \in [0, \pi]. \quad (4.8)$$

Bei $\sigma = -\frac{\pi}{2}$ bewegt man sich direkt auf die durch \mathcal{H} approximierten Singularitätsmannigfaltigkeit zu bzw. bei $\sigma = \frac{\pi}{2}$ entfernt man sich schnellstmöglich von dieser und bei $\sigma = 0$ läuft man parallel zu \mathcal{H} .

4.4 Nähere Analyse von $DM_\infty(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$

Für ein besseres Verständnis der neu eingeführten Indizes $DM_\infty(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$ wollen wir zuerst einmal die Beziehung zwischen der *Manipulability*, Δ_L , Δ_Q und ω_s graphisch darstellen. Die dazu nötigen Überlegungen werden uns danach auch behilflich sein, die auftretenden Sonderfälle der beiden Indizes leichter einzusehen.

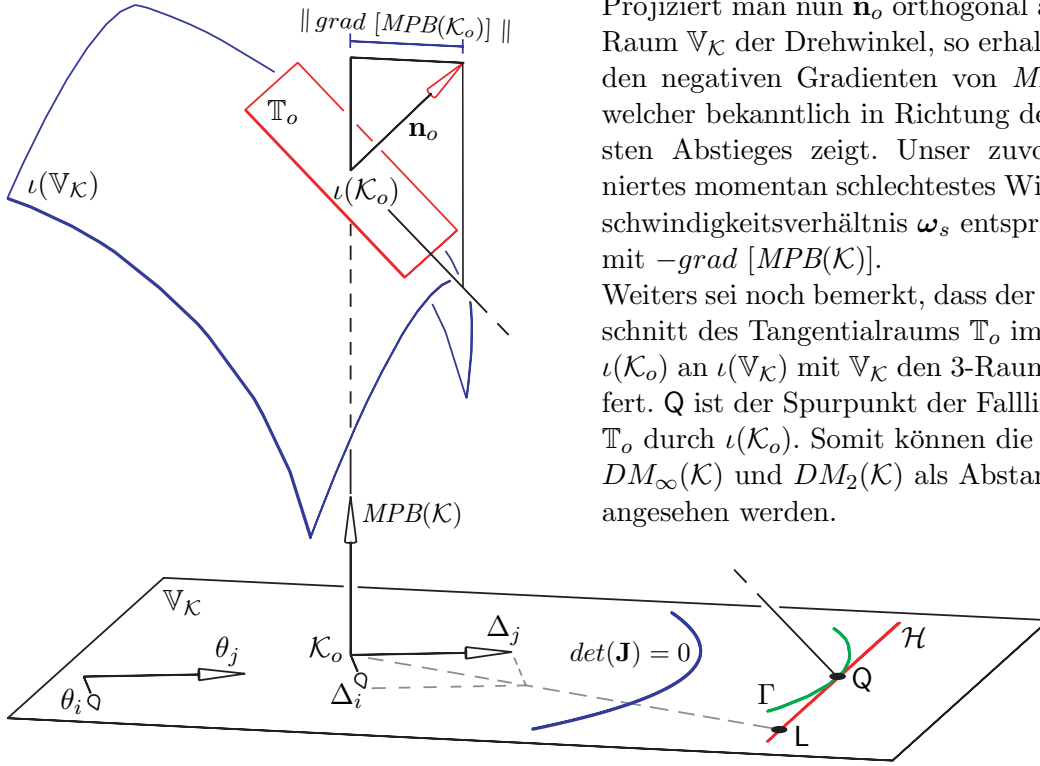
4.4.1 Visualisierung von $DM_\infty(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$

Wir betrachten den Graph der Funktion $MPB(\mathcal{K}) := |\det(\mathbf{J})|$ über dem Raum $\mathbb{V}_{\mathcal{K}}$, also die Abbildung:

$$\iota : (\theta_2, \dots, \theta_5) \mapsto (\theta_2, \dots, \theta_5, |\det(\mathbf{J})|). \quad (4.9)$$

Somit kann der Normalvektor \mathbf{n}_o in jedem Punkt $\iota(\mathcal{K}_o)$ der Hyperfläche $\iota(\mathbb{V}_{\mathcal{K}})$ angeschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_o &= (n_2, n_3, n_4, n_5, 1) \quad \text{mit} \\ n_i &= -\text{sgn}[\det(\mathbf{J})] \frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial \theta_i}. \end{aligned} \quad (4.10)$$



Projiziert man nun \mathbf{n}_o orthogonal auf den Raum $\mathbb{V}_{\mathcal{K}}$ der Drehwinkel, so erhalten wir den negativen Gradienten von $MPB(\mathcal{K})$, welcher bekanntlich in Richtung des steilsten Abstieges zeigt. Unser zuvor definiertes momentan schlechtestes Winkelgeschwindigkeitsverhältnis ω_s entspricht somit $-grad [MPB(\mathcal{K})]$.

Weiters sei noch bemerkt, dass der Durchschnitt des Tangentialraums \mathbb{T}_o im Punkt $\iota(\mathcal{K}_o)$ an $\iota(\mathbb{V}_{\mathcal{K}})$ mit $\mathbb{V}_{\mathcal{K}}$ den 3-Raum \mathcal{H} liefert. Q ist der Spurpunkt der Falllinie von \mathbb{T}_o durch $\iota(\mathcal{K}_o)$. Somit können die Indizes $DM_{\infty}(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$ als Abstandsmaß angesehen werden.

Abbildung 4.1: Visualisierung des Sachverhalts

4.4.2 Sonderfälle und Wohldefiniertheit von $DM_{\infty}(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$

Sonderfall (a) Wie ist das Ergebnis zu interpretieren, wenn die Gleichung (4.4) identisch erfüllt ist, also $det(\mathbf{J}_{i,j}) = 0$ und $det(\mathbf{J}) = 0$ gilt? Wenn dieser Fall eintritt, dann befindet sich der Manipulator in einer singulären Lage \mathcal{K}_o höherer Ordnung, denn es verschwinden alle vier partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} det(\mathbf{J}) \Big|_{\mathcal{K}_o} = \sum_{j=i+1}^6 det(\mathbf{J}_{i,j}) \quad \text{mit} \quad i = 2, \dots, 5.$$

Dann ist $DM_{\infty}(\mathcal{K}) = DM_2(\mathcal{K}) = 0$ ($\Leftrightarrow \mathbf{l} = \mathbf{q} = \mathbf{o}$), da die Gleichung (4.4) für alle Quadrupel $(\Delta_2, \dots, \Delta_5) \in \mathbb{R}^4$ erfüllt ist und somit auch für den Nullvektor \mathbf{o} . In der Graphik würde dieser Fall jener Situation entsprechen, in der $\mathcal{K}_o = \iota(\mathcal{K}_o)$ gilt und die Tangentialhyperebene \mathbb{T}_o mit $\mathbb{V}_{\mathcal{K}}$ zusammenfällt.

Somit bekommt man bei einer algorithmischen Implementierung der Maße $DM_{\infty}(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$ automatisch die Information mitgeliefert, ob es sich bei einer singulären Konfiguration \mathcal{K}_o um eine gewöhnliche oder um eine Singularität höherer Ordnung handelt.

Bemerkung. Bei einem 6R Roboter mit allgemeinen Abmessungen treten keine höheren Singularitäten auf, da für vier Unbekannte $\theta_2, \dots, \theta_5$ fünf Gleichungen zu erfüllen sind: Die vier partiellen Ableitungen der Jakobimatrix sowie diese selbst sind gleich Null. Manipulatoren mit singulären Lagen höherer Ordnung müssten somit eine Gleichung in den Denavit Hartenberg Parametern erfüllen, jedoch ist diese so komplex, dass diese laut [22] bis jetzt noch nicht berechnet werden konnte.

Sonderfall (b) Ein Problem bei diesen beiden Methoden entsteht, wenn die vier partiellen Ableitungen der Jakobimatrix verschwinden und $\det(\mathbf{J}) \neq 0$ ist, denn dann kann die Gleichung (4.4) von keinem Quadrupel erfüllt werden. Wie aus der vorigen Bemerkung hervorgeht, besitzt jeder 6R Roboter solche Konfigurationen, da die vier Unbekannten $\theta_2, \dots, \theta_5$ nur vier Gleichungen zu erfüllen haben.

Verschwinden alle vier partiellen Ableitungen, so gilt dies auch für $\|grad [MPB(\mathcal{K}_o)]\|$, woraus $\mathbf{n}_o \perp \mathbb{V}_{\mathcal{K}}$ folgt, was äquivalent zur Aussage $\mathbb{T}_o \parallel \mathbb{V}_{\mathcal{K}}$ ist. Somit ist \mathcal{H} die Fernhyperebene von $\mathbb{V}_{\mathcal{K}}$. Für \mathcal{K}_o resultiert dadurch der Maximalabstand $DM_{\infty}(\mathcal{K}_o) = DM_2(\mathcal{K}_o) \rightarrow \infty$, da Q und L Fernpunkte sind.

Da die spezielle Konfiguration \mathcal{K}_o der beiden Sonderfälle stationäre Punkte (Gleichgewichtslagen) des Vektorfeldes $-grad [MPB(\mathcal{K}_o)]$ sind, ist im Fall (b) der Winkel σ nicht definiert. Um nun auch in \mathcal{K}_o das momentane Winkelgeschwindigkeitsverhältnis $\boldsymbol{\omega}_o$ evaluieren zu können, müssen wir eine Differentiationsordnung höher gehen, also die Krümmungen von $\iota(\mathbb{V}_{\mathcal{K}})$ im Punkt $\iota(\mathcal{K}_o)$ betrachten. Somit können wir im Fall (b) das momentan schlechteste Winkelgeschwindigkeitsverhältnis $\boldsymbol{\omega}_s$ über die Hauptkrümmungsrichtung $\boldsymbol{\kappa}$ der betragskleinsten Krümmung definieren als:

$$\boldsymbol{\omega}_s := \pm \boldsymbol{\kappa} \quad \implies \quad \angle(\boldsymbol{\omega}_s, \boldsymbol{\omega}_o) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \implies \quad \sigma \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]. \quad (4.11)$$

Satz 4.4. $DM_{\infty}(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$ sind wohldefiniert und genügen allen sieben Anforderungen aus (2.8) – (2.14).

Beweis: Trivialerweise erfüllen $DM_{\infty}(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$ die Eigenschaften 1 und 2, sowie der Forderung 5 und 7, da wir uns ja über diesen Gesichtspunkt dem Abstandsmaß genähert haben. Um die verbleibenden Punkte zu zeigen, wollen wir die Gleichung (4.4) betrachten. Die in der Gleichung auftretenden Koeffizienten $\det(\mathbf{J}_{i,j})$ sind aus den gleichen Gründen wie die Determinante der Jakobimatrix invariant gegenüber gleichsinnigen Euklidischen Bewegungen (siehe Satz 4.1). Außerdem bleibt diese Gleichung auch bei einer Änderung der Skalierung mit dem Faktor λ unverändert, da dies nur einem Multiplizieren der Gleichung (4.4) mit λ^3 entspräche. Durch die linearisierte Näherung des Problems kann Δ_L bzw. Δ_Q in Echtzeit berechnet werden, was ein wichtiges Kriterium für die Anwendbarkeit des Maßes in der Praxis darstellt. \square

4.5 Gewichtete Versionen von $DM_\infty(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$

Als Ausgangspunkt für die Definition der gewichteten Abstandsmaße dient uns wiederum Gleichung (4.4), die sich auch, wie folgt, anschreiben lässt:

$$\det(\mathbf{J}) + \sum_{i=2}^5 \omega_{i|i-1} \sum_{j=i+1}^6 \det(\mathbf{J}_{i,j}) = 0. \quad (4.12)$$

Wir können nun wieder die jeweiligen Minimierungsbedingungen durch deren gewichtetes Analogon, basierend auf der Rotationsenergie ersetzen, wobei die Massenträgheitsmomente $\mathbf{I}_i > 0$ wie in (3.17) definiert sind.

Das Abstandsmaß $DM_2^G(\mathcal{K}) = \Delta_Q^G$

Alle Lösungsquadrupel $(\omega_{2|1}, \dots, \omega_{5|4})$ der inhomogenen Gleichung (4.4) bilden wiederum die Hyperebene \mathcal{H} . Nun suchen wir jenen Punkt $\mathbf{Q}^G \in \mathcal{H}$, für welchen die Summe der benötigten Rotationsenergie minimal ist, also die folgende Bedingung erfüllt:

$$\frac{\omega_{2|1}^2 \mathbf{I}_2}{2} + \frac{\omega_{3|2}^2 \mathbf{I}_3}{2} + \frac{\omega_{4|3}^2 \mathbf{I}_4}{2} + \frac{\omega_{5|4}^2 \mathbf{I}_5}{2} = \Delta^G \rightarrow \min. \quad (4.13)$$

Alle Quadrupel $(\omega_{2|1}, \dots, \omega_{5|4})$, welche die Gleichung (4.13) für ein fixes $\Delta^G \in \mathbb{R}^+$ erfüllen, liegen auf einem Hyperellipsoid mit Mittelpunkt \mathcal{K}_o . Somit ist der Ausdruck (4.13) genau dann minimal, wenn das Hyperellipsoid die Hyperebene \mathcal{H} berührt. Die Koordinaten des Berührungspunktes \mathbf{Q}^G liefern uns durch Einsetzen in (4.13) den gesuchten Wert Δ_Q^G . Wir wollen infolge die Koordinaten $\mathbf{q}^G = (q_2^G, \dots, q_5^G)$ von \mathbf{Q}^G explizit anschreiben:

$$q_i^G = \frac{-\det(\mathbf{J})}{S} \cdot \frac{\frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial \theta_i}}{\mathbf{I}_i} \quad \text{mit} \quad S = \sum_{j=2}^5 \frac{\left(\frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial \theta_j}\right)^2}{\mathbf{I}_j}. \quad (4.14)$$

Somit erhalten wir für Δ_Q^G den folgenden Ausdruck

$$\Delta_Q^G = \frac{\det(\mathbf{J})^2}{2S} \quad \text{mit } S \text{ laut (4.14)}. \quad (4.15)$$

Satz 4.5. $DM_2^G(\mathcal{K})$ gibt näherungsweise die kleinste Rotationsenergie Δ_Q^G aus (4.15) an, welche benötigt wird, um die nächstgelegene Singularität zu erreichen.

Das Abstandsmaß $DM_\infty^G(\mathcal{K}) = \Delta_L^G$

Nun suchen wir jenes Quadrupel $(\omega_{2|1}, \dots, \omega_{5|4})$, welches den nachstehenden Ausdruck minimiert:

$$|\omega_{i|i-1} \sqrt{\mathbf{I}_i/2}| \leq \sqrt{\Delta_L^G} \rightarrow \min. \quad \text{für } i = 2, \dots, 5. \quad (4.16)$$

Wir erhalten das gesuchte Quadrupel, sprich den entsprechenden Punkt der Hyperebene \mathcal{H} als den nichtleeren Durchschnitt dieser mit dem kleinsten achsenparallelen Hyperquader,

welcher in \mathcal{K}_o zentriert ist. Dieser Hyperquader ist durch das folgende Verhältnis seiner Kantenlängen k_i bestimmt:

$$k_2 : k_3 : k_4 : k_5 = \sqrt{\frac{2}{\mathbf{I}_2}} : \sqrt{\frac{2}{\mathbf{I}_3}} : \sqrt{\frac{2}{\mathbf{I}_4}} : \sqrt{\frac{2}{\mathbf{I}_5}}. \quad (4.17)$$

Die nichtleere Menge enthält stets die Ecke \mathbf{L}^G des Hyperquaders, dessen Koordinaten $\mathbf{l}^G = (l_2^G, \dots, l_5^G)$ uns nach Einsetzen in Gleichung (4.16) den gesuchten Wert $\sqrt{\Delta_{\mathbf{L}}^G}$ liefern. Infolge wollen wir wiederum die Koordinaten von \mathbf{L}^G explizit anschreiben:

$$l_i^G = \operatorname{sgn} \left(\det(\mathbf{J}) \cdot \frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial \theta_i} \right) \frac{|\det(\mathbf{J})|}{\sum_{j=2}^5 \sqrt{\frac{2}{\mathbf{I}_j}} \left| \frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial \theta_j} \right|}. \quad (4.18)$$

Somit ergibt sich für $\Delta_{\mathbf{L}}^G$ der folgende Ausdruck:

$$\Delta_{\mathbf{L}}^G = \frac{\det(\mathbf{J})^2}{\left(\sum_{j=2}^5 \sqrt{\frac{2}{\mathbf{I}_j}} \left| \frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial \theta_j} \right| \right)^2}. \quad (4.19)$$

Satz 4.6. $DM_{\infty}^G(\mathcal{K})$ gibt näherungsweise die kleinste Rotationsenergie $\Delta_{\mathbf{L}}^G$ aus (4.19) an, welche in jedem Gelenk benötigt wird, um in eine singuläre Lage zu kommen.

Die somit erhaltenen gewichteten Abstandsmaße $DM_{\infty}^G(\mathcal{K})$ und $DM_2^G(\mathcal{K})$ sind nicht mehr unabhängig vom Endeffektor, da dieser die Masseverteilung beeinflusst; also handelt es sich um keine *EE independent kinematischen Performance Indizes* mehr.

4.6 Beispiel: ABB IRB 2000

Wir ziehen als Beispiel wiederum den 6R Roboter *ABB IRB 2000* heran. Wir haben nicht nur auf Grund der Praxisnähe einen Roboter mit Handgelenk gewählt, sondern auch um zu zeigen, wie die in diesem Kapitel erarbeitete Theorie gegebenenfalls anzupassen ist. Da die Determinante der Jakobimatrix eines 6R Roboters mit Handgelenk stets von θ_4 unabhängig ist, müssen wir nur den Graphen der Funktion $MPB(\mathcal{K})$ über dem von θ_2 , θ_3 und θ_5 aufgespannten Vektorraum betrachten; also

$$\iota : (\theta_2, \theta_3, \theta_5) \mapsto (\theta_2, \theta_3, \theta_5, |\det(\mathbf{J})|). \quad (4.20)$$

Zuerst wollen wir jene Lagen im Arbeitsraum ausfindig machen, in denen das momentan schlechteste Winkelgeschwindigkeitsverhältnis nicht definiert ist, sprich die folgenden 4 Bedingungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial \theta_i} = 0 \quad \text{mit} \quad i = 2, 3, 5 \quad \text{und} \quad \det(\mathbf{J}) \neq 0.$$

Wir erhalten die folgende Lösung im Arbeitsraum:

$$\mathcal{K}_o : (\theta_2, \theta_3, \theta_5) \approx (+0.88638, -0.19062, \pm\pi/2).$$

Dabei ist es völlig unerheblich, ob θ_5 als $+\pi/2$ oder $-\pi/2$ gewählt wird, da sich die beiden Lagen nur durch die Orientierung der sechsten Drehachse unterscheiden. Bei dieser Konfiguration \mathcal{K}_o handelt es sich um ein lokales Maximum des Graphen der Funktion $MPB(\mathcal{K})$ über dem von θ_2 , θ_3 und θ_5 aufgespannten Vektorraum.

Um nun auch dieser Position ein momentan schlechtestes Winkelgeschwindigkeitsverhältnis zuweisen zu können, betrachten wir die Hauptkrümmungen κ_i und die dazugehörigen Krümmungsrichtungen \mathbf{k}_i für $i = 1, 2, 3$ im Punkt $\iota(\mathcal{K}_o)$. Für diese erhalten wir nach den allseits bekannten Formeln folgendes:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &\approx -5.21468 \cdot 10^8 & \text{mit} & & \mathbf{k}_1 &\approx \pm(0.88919, -0.45754, 0), \\ \kappa_2 &\approx -7.38491 \cdot 10^8 & \text{mit} & & \mathbf{k}_2 &\approx \pm(0, 0, 1), \\ \kappa_3 &\approx -1.55817 \cdot 10^9 & \text{mit} & & \mathbf{k}_3 &\approx \pm(0.45754, 0.88919, 0). \end{aligned}$$

Es sei bemerkt, dass einerseits die Richtungsvektoren des momentan schlechtesten \mathbf{k}_1 und des momentan besten \mathbf{k}_3 Winkelgeschwindigkeitsverhältnisses die $\theta_2\theta_3$ -Ebene aufspannen und dass andererseits die partielle Ableitung von $\det(\mathbf{J})$ nach θ_5 an der Stelle $\theta_5 = \pm\pi/2$ für alle $\theta_2, \theta_3 \in [-\pi, \pi]$ verschwindet. In der *Abbildung 4.2* wurde daher diese Ebene herausgegriffen. Diese Abbildung zeigt das Vektorfeld $-\text{grad}[MPB(\mathcal{K})]$, einige Isolinien von $\iota(\nabla_{\mathcal{K}})$, die Hauptkrümmungsrichtungen \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_3 in \mathcal{K}_o sowie die singulären Konfigurationen dieser Ebene, die weiß dargestellt wurden.

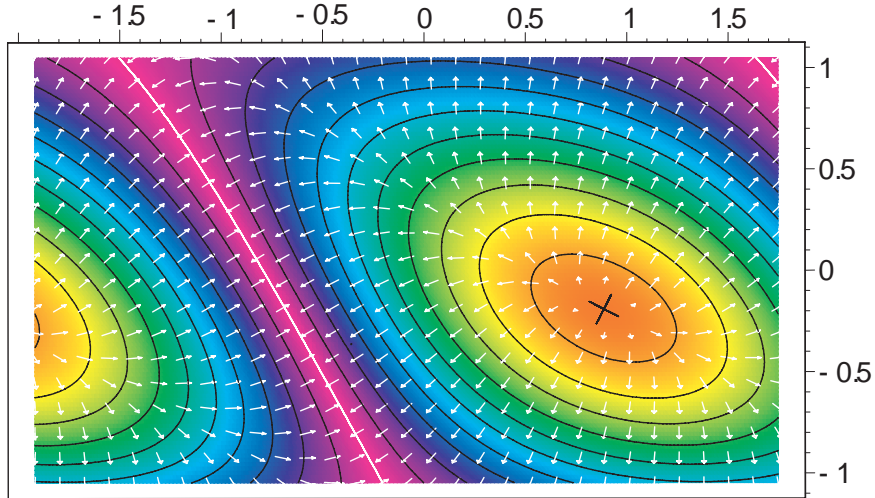


Abbildung 4.2: $\theta_2 \in [-110^\circ, 100^\circ]$, $\theta_3 \in [-60^\circ, 60^\circ]$ und $\theta_5 = \pm 90^\circ$

Bemerkung: Da sich $\det(\mathbf{J})$ als das Produkt von $\sin(\theta_5)$ mit einem Ausdruck, der nur mehr von θ_2 und θ_3 abhängt, anschreiben läßt, sind die in *Abbildung 4.2* eingezeichneten Singularitäten unabhängig von θ_5 . Nur bei $\theta_5 = 0$ liegt trivialerweise unabhängig von allen anderen Drehwinkeln stets eine singuläre Lage vor.

Vergleich von $MPB(\mathcal{K})$, $DM_\infty(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$

Infolge wollen wir die in diesem Abschnitt erarbeiteten Abstandsmaße mit dem Konzept der *Manipulability* vergleichen. Wir betrachten wiederum eine zweiparametrische Menge von Konfigurationen, die durch $\theta_2 \in [-110^\circ, 100^\circ]$ und $\theta_3 \in [-60^\circ, 60^\circ]$ bestimmt ist. Weiters wählen wir $\theta_5 = 60^\circ$ anstelle von $\pm 90^\circ$ wie in *Abbildung 4.2*, da ansonsten bei den Maßen $DM_\infty(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$ für \mathcal{K}_o der Abstand ∞ auftritt, und dies eine ansprechende graphische Darstellung unmöglich machen würde. Weiters soll $\theta_4 = \theta_6 = 0$ gelten. In den folgenden drei Abbildungen ist θ_2 horizontal und θ_3 vertikal aufgetragen.

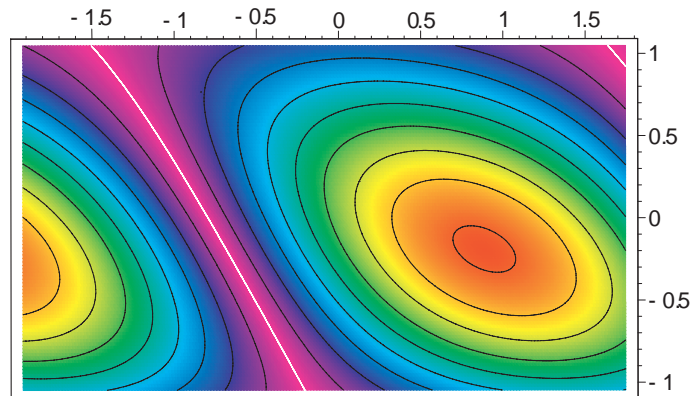
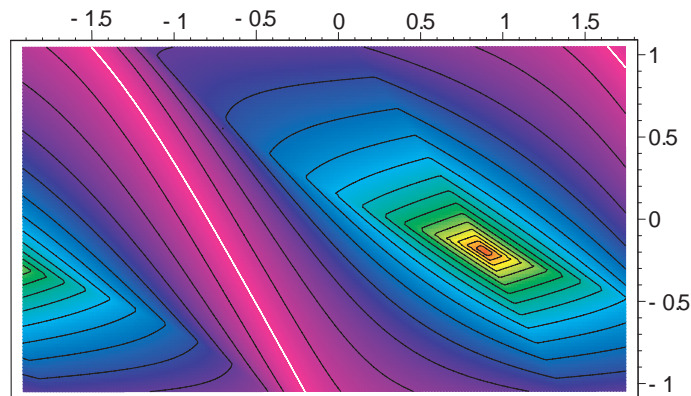


Abbildung 4.3: Manipulability


 Abbildung 4.4: $DM_\infty(\mathcal{K})$

Wenn man die Isolinie von $DM_\infty(\mathcal{K})$ bzw. $DM_2(\mathcal{K})$ betrachtet, welche der Singularität am Nächsten ist, so approximiert diese eine Offsetkurve zur Singularität (siehe *Abbildung 4.4* und *Abbildung 4.5*). Dies bestätigt die Überlegungen, dass die lineare Approximation in der Nähe von Singularitäten hinreichend genau ist, um ein Abstandsmaß anzugeben. Dieses Verhalten zeigt die *Manipulability* erwartungsgemäß nicht (siehe *Abbildung 4.3*).

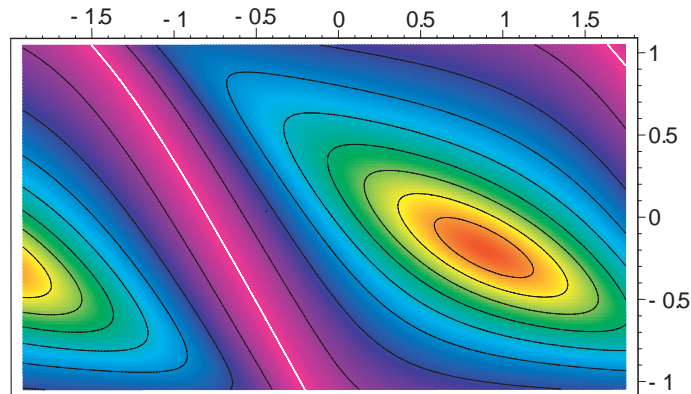


Abbildung 4.5: $DM_2(\mathcal{K})$

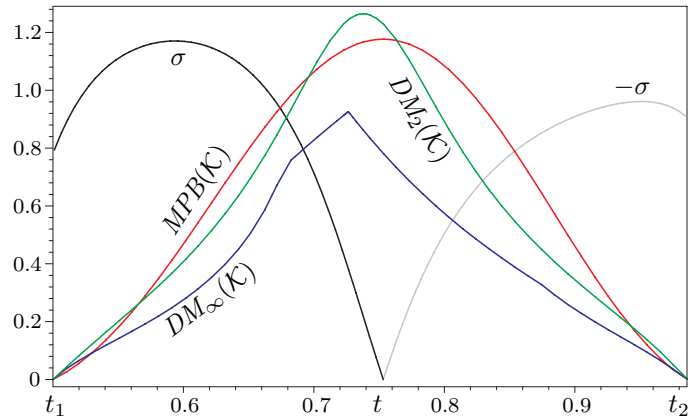


Abbildung 4.6: Die Graphen von $MPB(\mathcal{K})$, $DM_\infty(\mathcal{K})$, $DM_2(\mathcal{K})$, σ

Noch besser zeigt sich diese Eigenschaft der beiden Indizes, wenn man die drei Animationen vergleicht, welche auf der dieser Dissertation beigelegten CD unter den Namen „*Animation-MPB*“, „*Animation-DMinfinity*“ und „*Animation-DM2*“ gespeichert sind. Das Startbild jeder Animation ist ident mit der zum jeweiligen Index gehörigen Abbildung von zuvor. Mit der Zeit verändert sich jedoch der Wert für θ_5 von $\pi/3$ auf 0. Beim Vergleich der drei Animationen ist besonders auf das Verhalten der Isolinien nahe der Singularität zu achten.

Wir wollen noch eine einparametrische Bewegung des Roboters betrachten, um auch den Graphen der Funktion σ angeben zu können, welche das Winkelgeschwindigkeitsverhältnis evaluiert mit dem eine Konfiguration durchlaufen wird. Wir ziehen zu diesem Zweck jenen Zwanglauf heran, der in Abschnitt 3.5 angegeben wurde. Der Verlauf des Graphen von σ in *Abbildung 4.6* verhält sich in keinsten Weise entgegen den Erwartungen, wenn wir jenen der Graphen von $MPB(\mathcal{K})$, $DM_\infty(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$ betrachten.

Kapitel 5

EE dependent Performance Indizes für SGPen

Der am meist verbreitete *EE dependent Performance Index* für *SGPen* ist wiederum die *Condition Number* (siehe z.B. [56, 26, 34]). Da dieser Index bereits im Kapitel 3 ausführlich analysiert wurde, wollen wir an dieser Stelle nur ganz kurz die wichtigsten Fakten nochmals wiederholen.

5.1 Review: Condition Number $CDN(\mathcal{K})$

Die *Condition Number* CDN für *SGPen* gleicht der Quadratwurzel des Verhältnisses vom Minimum zum Maximum der Zielfunktion

$$\hat{\zeta}(\underline{\mathbf{q}}) : \quad \underline{\mathbf{q}}^T \mathbf{E}_6 \underline{\mathbf{q}} = \omega^2 + \left[\hat{\omega}^2 + \omega^2 \overline{U} \underline{\mathbf{p}}^2 \right] \quad (5.1)$$

unter der Nebenbedingung

$$\nu(\underline{\mathbf{q}}) : \quad \underline{\mathbf{d}}^T \underline{\mathbf{d}} = \underline{\mathbf{q}}^T \mathbf{N} \underline{\mathbf{q}} = 1 \quad \text{mit} \quad \mathbf{N} = \mathbf{J}^T \mathbf{J}; \quad (5.2)$$

also dass die Quadratsumme der momentanen Längenänderungen der Beine gleich 1 ist. Die Zielfunktion $\hat{\zeta}(\underline{\mathbf{q}})$ ist wiederum nicht invariant gegen Ähnlichkeiten sowie Raumbewegungen mit Ausnahme der Gruppe der Drehungen des Rastkoordinatensystems um dessen Ursprung U (vgl. Satz 3.1). Die in der Literatur vorgeschlagenen Lösungsstrategien zur Beseitigung der Varianzen sind indent mit jenen für 6R Robotern:

Einerseits weitet Kim in [26] das von Gosselin für serielle Roboter entworfene Konzept (siehe Kapitel 3.1.2) auf *SGPen* aus. Der daraus resultierende Index ist deshalb mit denselben Kritikpunkten konfrontiert wie jener von Gosselin für 6R Roboter.

Andererseits legt man den Rastkoordinatenursprung U wiederum in den *Operation Point* OP und beseitigt die Inhomogenität der Zielfunktion durch die Einführung der *charakteristischen Länge* CL . Die Zielfunktion läßt sich dann schreiben als:

$$\hat{\zeta}(\underline{\mathbf{q}}) : \quad \underline{\mathbf{q}}^T \widehat{\mathbf{W}} \underline{\mathbf{q}} \quad \text{mit} \quad \widehat{\mathbf{W}} \text{ aus (3.4)}. \quad (5.3)$$

Die *Condition Number*, welche sich dieses Konzeptes bedient, notieren wir mit CDN_{CL} . Natürlich muss die Definition der *charakteristischen Länge* aus Def. 3.1 für *SGPen* adaptiert werden.

Definition 5.1. *Die charakteristische Länge CL ist jene Länge, welche sich aus der Minimierung der CDN in Abhängigkeit der sechs Lageparameter (Translationsvektor plus Eulersche Drehwinkel) der Plattform gegenüber der Basis und CL ergibt.*

5.2 Der Performance Index $CDN_{OE}(\mathcal{K})$

Wir wollen in diesem Abschnitt die *Condition Number* für *SGPen* bezüglich der in Abschnitt 3.2.1 eingeführten objektbezogenen Metrik sowie des *Operation Ellipsoids* (Def. 3.2) definieren. Da bereits sämtliche Vorbereitungen für diesen Index in Kapitel 3 geleistet wurden, können wir die Zielfunktion aus (5.1) ersetzen durch

$$\zeta(\underline{\mathbf{q}}) : \sum_{i=1}^6 \|\mathbf{v}(\mathbf{S}_i)\|^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}(\mathbf{S}_i) = \hat{\mathbf{q}} + (\mathbf{q} \times \mathbf{s}_i), \quad (5.4)$$

wobei $\mathbf{s}_i = (s_{i,1}, s_{i,2}, s_{i,3})$ für $i = 1, \dots, 6$ den Ortsvektor des i -ten Scheitels \mathbf{S}_i des *Operation Ellipsoids* (Def. 3.2) beschreibt. Hierbei handelt es sich wiederum um eine quadratische Form in den Unbekannten der Schraube $\underline{\mathbf{q}}$, womit sich $\zeta(\underline{\mathbf{q}})$ auch schreiben lassen kann als:

$$\zeta(\underline{\mathbf{q}}) : \underline{\mathbf{q}}^T \mathbf{W} \underline{\mathbf{q}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{W} = \sum_{i=1}^6 \begin{pmatrix} \mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i & \mathbf{S}_i^T \\ \mathbf{S}_i & \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

$$\text{und} \quad \mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} 0 & s_{i,3} & -s_{i,2} \\ -s_{i,3} & 0 & s_{i,1} \\ s_{i,2} & -s_{i,1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Somit sind wir unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Kapitel 3 bereits in der Lage den Index CDN_{OE} für *SGPen* zu definieren. Die folgenden Definition umfaßt auch die redundanten *SGPen*.

Definition 5.2. *Der EE dependent Performance Index $CDN_{OE}(\mathcal{K})$, der auf der objektbezogenen Metrik und dem Operation Ellipsoid (Def. 3.2) basiert, ist bezüglich der n -beinigen Stewart Gough Plattform Konfiguration \mathcal{K} mit $n > 5$ definiert als*

$$CDN_{OE}(\mathcal{K}) := +\sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} \quad \text{mit} \quad CDN_{OE}^{-1}(\mathcal{K}) \in [0, 1], \quad (5.7)$$

wobei λ_{max} bzw. λ_{min} der größte bzw. kleinste allgemeine Eigenwert der Matrix \mathbf{W} aus (5.5) bezüglich der Matrix \mathbf{N} aus (5.2) bezeichnet.

Satz 5.1. $CDN_{OE}^{-1}(\mathcal{K})$ ist wohldefiniert und genügt allen sechs Anforderungen aus (2.8) – (2.13).

Beweis: Auf Grund der Definition des OE (Def. 3.2), welche eine koplanare Lage der sechs Scheitel S_i ausschließt, ist $CDN_{OE}^{-1}(\mathcal{K})$ genau dann gleich Null, wenn der Rang von \mathbf{J} kleiner als 6 ist. Denn dann fallen genau so viele allgemeine Eigenwerte λ_i nach Unendlich wie $defect(\mathbf{N})$. Der Index ist invariant gegenüber Ähnlichkeiten, da dieser als Verhältnis definiert wurde. Die Invarianz von CDN_{OE}^{-1} gegenüber Euklidischen Bewegungen folgt wiederum aus jener der Zielfunktion. Der fünfte Punkt unserer gewünschten Eigenschaften ist auf Grund der objektbezogenen Metrik, die eine geometrische Interpretation besitzt, trivialerweise erfüllt. Da die Berechnung von CDN_{OE}^{-1} nur die Lösung eines Polynoms sechsten Grades erfordert, kann der Index auch in Echtzeit berechnet werden. \square

Geometrische Interpretation der charakteristischen Länge

Die charakteristische Länge CL für $SGPEN$ läßt sich genauso interpretieren und beweisen wie jene für 6R Roboter in Satz 3.6. Deshalb können wir wiederum die CDN_{CL} als Sonderfall der CDN_{OE} ansehen. Die angegebene Interpretation zieht analoge Konsequenzen für $SGPEN$ wie für 6R Roboter in Kapitel 3 nach sich. Wir werden uns deshalb kurz fassen:

• Robot Control

Die *Operation Sphere* mit Mittelpunkt OP und Radius $R = CL\sqrt{3/2}$ stimmt im Allgemeinen nicht mit dem tatsächlichen Bereich des Interesses überein. Deshalb ist die CDN_{CL} kein adäquater Index für *Robot Control*.

• Robot Design

Das Konzept der CDN_{CL} wird auch herangezogen, um das Design von $SGPEN$ zu optimieren, wobei ein Manipulator als optimal angesehen wird, wenn eine Konfiguration \mathcal{K}_i sowie eine CL so existieren, dass $CDN_{CL}(\mathcal{K}_i) = 1$ gilt. Auf Grund der angegebenen Interpretation sollte die CL nicht das Resultat eines Optimierungsprozesses sein, sondern als eine Designkonstante fungieren. Dies bedeutet, dass bei der Planung einer SGP zuerst überlegt werden muss, für welche *Operation Sphere* OS und somit für welche CL diese konzipiert werden soll. Anschließend kann man nach jenen Konfigurationen von Trägergeraden der Beine suchen, welche eine isotrope Lage bezüglich der *Operation Sphere* haben. Aus jeder dieser Konfigurationen resultieren ∞^{2n} mögliche isotrope Manipulatorkonfigurationen bezüglich CDN_{OE} , wobei $n > 5$ die Anzahl der Beine notiert. Man hat nämlich noch die Freiheit die Plattformankerpunkte P_i und Basisankerpunkt B_i für $i = 1, \dots, n$ auf der Trägergeraden l_i beliebig zu wählen, insofern $B_i \neq P_i$ erfüllt ist.

Natürlich muss man sich wiederum nicht auf die Festlegung einer *Operation Sphere* beschränken, sondern kann auch allgemeiner ein *Operation Ellipsoid* vorgeben. Im folgenden Abschnitt werden wir als *Operation Ellipsoid* ein Drehellipsoid wählen und die isotropen Konfigurationen einer speziellen Konfigurationsmenge bestimmen.

Es sei noch bemerkt, dass die Neudefinition der charakteristischen Länge aus Def. 3.6 auch für $SGPEN$ gültig ist.

5.3 Isotrope Konfigurationen bezüglich $CDN_{OE}(\mathcal{K})$

Es existiert eine Vielzahl von Arbeiten (siehe z.B. [56, 10, 43, 26, 32, 51, 52, 36]), die die Berechnung von isotropen Konfigurationen paralleler Manipulatoren zum Thema haben. Wir wollen dieser Tradition folgen, indem wir für den Index CDN_{OE} eine dreiparametrische isotrope Konfigurationsmenge berechnen. Wir beschränken uns bei der Suche nach isotropen Konfigurationen bezüglich CDN_{OE} auf eine ganz spezielle Menge $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}^g$ von Konfigurationen, die in der Praxis die meiste Relevanz hat. Außerdem wird das *Operation Ellipsoid* als Drehellipsoid vorausgesetzt. Die genauen Bedingungen lauten, wie folgt:

Definition 5.3. Die Konfigurationsmenge $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}^g$ ist, wie folgt, definiert: Die Mengen \mathcal{G}_1^g und \mathcal{G}_2^g gegeben durch

$$\mathcal{G}_1^g := \{l_1, \dots, l_g\}, \quad \mathcal{G}_2^g := \{l_{g+1}, \dots, l_n\} \quad \text{mit} \quad g > 2 \quad (5.8)$$

und $n = 2g$ sind abgeschlossen gegenüber Drehungen von $\frac{2\pi}{g}$ um eine gemeinsame Achse s . Das OE bezüglich dem CDN_{OE} berechnet wird, ist ein Drehellipsoid mit Drehachse s .

Die zwei Mengen von Trägergeraden wollen wir, wie folgt, parametrisieren. Die Trägergerade l_i wird durch einen Punkt F_i und einen Richtungsvektor \mathbf{g}_i festgelegt. Es sei noch bemerkt, dass F_i mit Ortsvektor \mathbf{f}_i stets jenen Punkt auf l_i beschreibt, der der Fußpunkt der gemeinsamen Normalen von l_i und der z-Achse ist, welche die Rolle der Achse s einnimmt. Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &:= \left(r_1 \cos \left(\frac{2(i-1)}{g} \pi \right), r_1 \sin \left(\frac{2(i-1)}{g} \pi \right), h_1 \right) \\ \mathbf{f}_j &:= \left(r_2 \cos \left(\mu + \frac{2(i-1)}{g} \pi \right), r_2 \sin \left(\mu + \frac{2(i-1)}{g} \pi \right), h_2 \right) \\ \mathbf{g}_i &:= \left(-\sin \left(\frac{2(i-1)}{g} \pi \right), \cos \left(\frac{2(i-1)}{g} \pi \right), z_1 \right) \\ \mathbf{g}_j &:= \left(-\sin \left(\mu + \frac{2(i-1)}{g} \pi \right), \cos \left(\mu + \frac{2(i-1)}{g} \pi \right), z_2 \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

mit $i = 1, \dots, g$ und $j = g + i$. Den Faktor der Ähnlichkeit eliminieren wir durch die Festlegung der Koordinaten \mathbf{s}_i der sechs Scheitel S_i des OE . Diese sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= (+1, 0, 0) & \mathbf{s}_2 &= (0, +1, 0) & \mathbf{s}_3 &= (0, 0, +p) \\ \mathbf{s}_4 &= (-1, 0, 0) & \mathbf{s}_5 &= (0, -1, 0) & \mathbf{s}_6 &= (0, 0, -p), \end{aligned} \quad (5.10)$$

wobei p ein aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ frei zu wählender Parameter ist. Durch die Parametrisierung (5.9) wird nicht die ganze Menge $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}^g$ erfasst, da jener Fall ausgeschlossen ist, in dem eine Gruppe von Beinen parallel zur z-Achse ist. Dieser Fall wird später gesondert behandelt.

Setzen wir nun die Koordinaten \mathbf{s}_i für die Scheitel S_i in die Matrix \mathbf{W} aus (5.5) ein, so vereinfacht sich diese zu:

$$\mathbf{W} = \text{diag} (2 + 2p^2, 2 + 2p^2, 4, 6, 6, 6). \quad (5.11)$$

Damit die sechs allgemeinen Eigenwerte λ_i von \mathbf{W} bezüglich \mathbf{N} ident sind, also $\lambda_i = \rho$ für $i = 1, \dots, 6$ mit $\rho \in \mathbb{R}^+$ gilt, muss das charakteristische Polynom $\det(\mathbf{W} - \lambda\mathbf{N}) = 0$ die folgende Gestalt haben:

$$\varphi(\rho - \lambda)^6 = \varphi(\rho^6 - 6\rho^5\lambda + 15\rho^4\lambda^2 - 20\rho^3\lambda^3 + 15\rho^2\lambda^4 - 6\rho\lambda^5 + \lambda^6) = 0$$

mit $\varphi \in \mathbb{R}$. Bringen wir nun $\det(\mathbf{W} - \lambda\mathbf{N}) = 0$ durch entsprechende Division in die Form

$$\lambda^6 + a\lambda^5 + b\lambda^4 + c\lambda^3 + d\lambda^2 + e\lambda + f = 0,$$

so erhält man durch Koeffizientenvergleich die folgenden 5 Bedingungen, die zu erfüllen sind um eine isotrope Lage zu erlangen:

$$f = \rho^6, \quad e = -6\rho^5, \quad d = 15\rho^4, \quad c = -20\rho^3, \quad b = 15\rho^2 \quad \text{mit} \quad \rho = -\frac{a}{6}. \quad (5.12)$$

Wenn wir aus (5.9) die Speerkoordinaten der Geraden l_i berechnen, so können wir sofort die $(n \times 6)$ Jakobimatrix \mathbf{J} des Manipulators anschreiben. Bilden wir nun $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$, so erhalten wir die (6×6) Matrix \mathbf{N} , welche die folgenden Einträge hat:

$$\begin{aligned} n_{1,1} &= n_{2,2} = (r_1^2 z_1^2 z_2^2 + h_2^2 z_1^2 + r_1^2 z_1^2 + h_1^2 z_2^2 + h_1^2 + r_2^2 z_2^2 + h_2^2 + r_2^2 z_1^2 z_2^2) \cdot \mathcal{D}_N \\ n_{3,3} &= 2(r_1^2 z_2^2 + r_2^2 z_1^2 + r_1^2 + r_2^2) \cdot \mathcal{D}_N \\ n_{4,4} &= n_{5,5} = (z_1^2 + z_2^2 + 2) \cdot \mathcal{D}_N \\ n_{6,6} &= (2z_1^2 + 2z_2^2 + 4z_1^2 z_2^2) \cdot \mathcal{D}_N \\ n_{3,6} &= -2n_{1,4} = -2n_{2,5} = 2(r_1 z_1 z_2^2 + r_1 z_1 + r_2 z_2 + r_2 z_2 z_1^2) \cdot \mathcal{D}_N \\ n_{2,4} &= -n_{1,5} = (h_1 z_2^2 + h_2 z_1^2 + h_1 + h_2) \cdot \mathcal{D}_N \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad \mathcal{D}_N = \frac{g}{2(1+z_1^2)(1+z_2^2)}. \quad (5.13)$$

Die restlichen Matrizeneinträge von \mathbf{N} sind gleich Null. Berechnen wir nun $\det(\mathbf{W} - \lambda\mathbf{N})$, so zerfällt das charakteristische Polynom in $\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2^2$ mit:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \lambda^2(4n_{1,4}^2 - n_{3,3}n_{6,6}) + \lambda(+6n_{3,3} + 4n_{6,6}) - 24 \quad \text{und} \\ \mathcal{F}_2 &= \lambda^2(n_{1,4}^2 + n_{1,5}^2 - n_{4,4}n_{1,1}) + \lambda(6n_{1,1} + 2n_{4,4} + 2n_{4,4}p^2) - 12(1 + p^2). \end{aligned}$$

Da $g > 2$ gilt, können wir den Faktor \mathcal{D}_N jedes Matrizeneintrages $n_{i,j}$ in die Unbekannte λ hineinziehen, wodurch die Polynome \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 unabhängig von g sind. Damit alle sechs Nullstellen dieses Polynoms zusammenfallen sind aber nur drei Bedingungen zu erfüllen, nämlich, dass \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 je eine Doppellösung hat, und dass diese Doppellösungen übereinstimmen. Eine Bedingung ist vom Grad 8, in den Unbekannten z_1 , z_2 , r_1 und r_2 , welche jeweils zur Potenz 4 vorkommen. Die zweite Bedingung ist vom Grad 12 und hängt von alle sieben Unbekannten ab, welche jeweils zur Potenz 4 vorkommen. Das letzte Polynom ist vom Grad 10, in welchem z_1 , z_2 , r_1 und r_2 jeweils zur Potenz 4 und h_1 , h_2 und p nur quadratisch vorkommen. Man kann das letzte Polynom nach h_1 , h_2 oder p lösen und die erhaltene Lösung in das Polynom vom Grad 12 einsetzen. In diesem kommen nun die

anderen zwei Unbekannten h_2, p bzw. h_1, p bzw. h_1, h_2 nur zur vierten Potenz vor, womit diese Gleichung explizit nach einer dieser beiden Unbekannten gelöst werden kann. Zum Schluß kann man sich aus der Gleichung vom Grad 8 irgendeine der Unbekannten z_1, z_2, r_1 oder r_2 in Abhängigkeit der anderen drei ausdrücken, und die erhaltene Lösung in die zuvor berechneten zwei Ausdrücke einsetzen. Wir wollen dies hier nicht durchführen, da die so erhaltenen Lösungen gewaltige Dimensionen annehmen und keinerlei Interpretation zulassen. Wir werden uns deshalb isotrope Konfigurationen über den folgenden Zugang berechnen:

Trivialerweise liegt auch dann eine isotrope Lage vor, wenn \mathbf{W} und \mathbf{N} zueinander ähnliche Diagonalmatrizen sind; also $\mathbf{W} = \mathbb{R}\mathbf{N}$ gilt. Unsere verbleibenden sieben Unbekannten müssen somit die folgenden fünf Gleichungen erfüllen:

$$\mathcal{P}_1 : n_{1,4} = 0 \quad \mathcal{P}_2 : n_{1,5} = 0 \quad \mathcal{P}_3 : n_{6,6} - n_{4,4} = 0 \quad (5.14)$$

$$\mathcal{P}_4 : 2n_{6,6} - 3n_{3,3} = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_5 : (1 + p^2)n_{6,6} - 3n_{1,1} = 0. \quad (5.15)$$

Bei der Berechnung von isotropen Konfigurationen der Menge $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}^g$ ist folgende Fallunterscheidung vorzunehmen:

FALL 1:

Für diesen Fall wollen wir $z_1 \neq 0$ und $z_2 \neq 0$ voraussetzen. Aus \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 berechnen wir uns h_1 und r_1 . Wir erhalten

$$h_1 = -h_2 \frac{1 + z_1^2}{1 + z_2^2} \quad \text{und} \quad r_1 = -r_2 \frac{z_2(1 + z_1^2)}{z_1(1 + z_2^2)}. \quad (5.16)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in das Polynom \mathcal{P}_3 ein und berechnen uns aus diesem z_1 , so erhalten wir die folgenden zwei Lösungen:

$$z_1 = \pm \frac{\sqrt{(2 - z_2^2)(1 + 4z_2^2)}}{1 + 4z_2^2}. \quad (5.17)$$

Da in den restlichen zu erfüllenden Polynomen sowieso jede Unbekannte nur quadratisch vorkommt, ist es egal, welche der beiden Lösungen wir in weiterer Folge verwenden. Aus dem Polynom \mathcal{P}_4 berechnen wir uns z_2 , für welches wir neben den nicht in Frage kommenden komplexen Lösungen $z_2 = \pm \frac{i}{2}$ noch die folgenden zwei Lösungen erhalten:

$$z_2 = \pm \frac{\sqrt{8 - 18r_2^2}}{2}. \quad (5.18)$$

Damit $z_2 \in \mathbb{R}^+$ gewährleistet ist, kann r_2 nur Werte im Intervall $]-2/3, 2/3[$ annehmen. Aus dem letzten zu erfüllenden Polynom \mathcal{P}_5 berechnen wir uns h_2 . Unabhängig davon, welche der zwei Lösungen für z_2 wie in \mathcal{P}_5 einsetzen und nach h_2 lösen erhalten wir:

$$h_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{18r_2^4 - 16r_2^2 - 8p^2r_2^2 + 4p^2 + 4}. \quad (5.19)$$

Dabei ist zu beachten, dass der Ausdruck unter der Wurzel stets positiv sein muss, um eine reelle Konfiguration zu erhalten. Lösen wir nun die Gleichung $18r_2^4 - 16r_2^2 - 8p^2r_2^2 + 4p^2 + 4 = 0$ nach p auf, so erhalten wir:

$$p = \pm \frac{\sqrt{2(2r_2^2 - 1)(9r_2^4 - 8r_2^2 + 2)}}{4r_2^2 - 2}. \quad (5.20)$$

Da für alle $r_2 \in \mathbb{R}$ stets $9r_2^4 - 8r_2^2 + 2 > 0$ gilt, existieren für p aus (5.20) keine reellen Werte, wenn $r_2 \in]-2/3, 2/3[$ ist. Somit ist nun h_2 für alle Werte (p, r_2) mit $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $r_2 \in]-2/3, 2/3[$ entweder reell oder komplex. Durch Einsetzen eines einzelnen Wertepaares (p, r_2) kann leicht gezeigt werden, dass h_2 aus (5.19) für alle $r_2 \in]-2/3, 2/3[$ reell ist. Drücken wir nun alle Unbekannten in Abhängigkeit von p und r_2 aus, so erhalten wir die folgenden 8 Zweige:

$$\begin{aligned} z_1 &= - - - - + + + + \frac{\sqrt{2r_2^2(1 - 2r_2^2)}}{2(1 - 2r_2^2)} \\ z_2 &= - - + + - - + + \frac{\sqrt{8 - 18r_2^2}}{2} \\ h_2 &= - + - + - + - + \frac{1}{2} \sqrt{18r_2^4 - 16r_2^2 - 8p^2r_2^2 + 4p^2 + 4} \\ h_1 &= + - + - + - + - \frac{\sqrt{18r_2^4 - 16r_2^2 - 8p^2r_2^2 + 4p^2 + 4}}{6(1 - 2r_2^2)} \\ r_1 &= - - + + + + - - \frac{r_2 \sqrt{2(8 - 18r_2^2)}}{6\sqrt{r_2^2(1 - 2r_2^2)}} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Damit auch $z_1 \neq 0$ gilt, darf r_2 nicht den Wert Null annehmen. Da der Nenner von z_1 , h_1 und r_1 nur für $r_2 = \pm\sqrt{2}/2$ verschwindet, aber diese Werte ohnehin nicht im Intervall $]-2/3, 2/3[$ liegen, können wir den Wertebereich \mathcal{Q} für p und r_2 , wie folgt, definieren:

$$\mathcal{Q} := \left\{ (p, r_2) \mid p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge r_2 \in \left] -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right[\setminus \{0\} \right\}. \quad (5.22)$$

Satz 5.2. Die dreiparametrische Konfigurationsmenge \mathcal{U}_1^g (Parameter p , r_2 und μ), welche man erhält, indem man die Werte aus (5.21) für z_1 , z_2 , h_1 , h_2 und r_1 in die Parametrisierung (5.9) von $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}^g$ einsetzt und (p, r_2) aus \mathcal{Q} wählt, ist reell und frei von Singularitäten.

Beweis: Da bei dieser Wahl der Unbekannten in Abhängigkeit von p und r_2 die beiden Matrizen \mathbf{W} und \mathbf{N} stets ähnliche Diagonalmatrizen sind, kann nur dann eine Singularität vorliegen, wenn $\text{rank}(\mathbf{W}) < 6$ gilt. Dieser Fall kann für $p \in \mathbb{R}$ aber nicht eintreten. Die Konfigurationen von \mathcal{U}_1^g sind auf Grund der Definition von \mathcal{Q} aus (5.22) reell. \square

Satz 5.3. Für alle Konfigurationen $\mathcal{K} \in \mathcal{U}_1^g$ gilt: Die Öffnungswinkel $\alpha_1 \in]0, \pi/2[$ und $\alpha_2 \in]0, \pi/2[$ der Asymptotenkegel der Drehhyperboloide, welche durch die Trägergeraden der Beine l_1, \dots, l_g bzw. l_{g+1}, \dots, l_{2g} bestimmt sind, hängen nur vom Parameter r_2 ab und lauten:

$$\cos(\alpha_1) = \frac{|r_2|}{\sqrt{2 - 3r_2^2}} \quad \text{und} \quad \cos(\alpha_2) = \sqrt{\frac{9r_2^2 - 4}{9r_2^2 - 6}}. \quad (5.23)$$

Beweis: Die Formel der Winkel kann durch Nachrechnen leicht bestätigt werden. \square

Es sei noch bemerkt, dass für $r_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ die Öffnungswinkel der beiden Asymptotenkegel ident sind, nämlich $\alpha_1 = \alpha_2 = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{3})$. Da $r_2 \in]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[\setminus \{0\}$ gilt, können α_1 und α_2 nur die folgenden Werte annehmen:

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \left] \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right), \frac{\pi}{2} \right[. \quad (5.24)$$

Außerdem hat der Parameter p nur einen Einfluss auf die z-Koordinate der Fußpunkte F_i .

FALL 2:

Nun werden jene Fälle besprochen, die durch die Forderung $z_1 \neq 0$ und $z_2 \neq 0$ ausgeschlossen wurden. Der Fall $z_1 = 0 \wedge z_2 = 0$ hat eine singuläre Konfiguration zur Folge, da die Trägergeraden der Beine stets in einem singulären linearen Komplex (Komplexachse = Ferngerade der xy-Ebene) liegen. Da die Fälle $z_1 = 0$ bzw. $z_2 = 0$ zu einander äquivalent sind und bis auf Beschriftung dieselbe Lösungsmenge besitzen, wollen wir uns auf die Diskussion eines Falles beschränken. O.B.d.A. setzen wir $z_1 = 0$ und $z_2 \neq 0$ voraus.

Das Polynom \mathcal{P}_1 ist nun genau dann erfüllt, wenn $r_2 = 0$ gilt. Lösen wir die verbleibenden 4 Gleichungen nach den 4 Unbekannten r_1, z_2, h_1 und h_2 in Abhängigkeit von p auf, so erhalten wir folgende Lösungen:

$$\begin{aligned} z_2 &= + + - - + + - - \sqrt{2} \\ h_1 &= + - + - + - + - \frac{1}{3} \sqrt{1+p^2} \\ h_2 &= - + - + - + - + \sqrt{1+p^2} \\ r_1 &= + + + + - - - - \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Satz 5.4. *Die zweiparametrische Konfigurationsmenge \mathcal{U}_2^g (Parameter p und μ), welche man erhält, indem man die Werte aus (5.25) für z_2, h_1, h_2 und r_1 sowie $r_2 = z_1 = 0$ in die Parametrisierung (5.9) von $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}^g$ einsetzt und p aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ wählt, ist reell und frei von Singularitäten.*

Beweis: Trivialerweise ist jede Konfiguration aus \mathcal{U}_2^g reell für $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. \mathcal{U}_2^g ist aus denselben Gründen wie \mathcal{U}_1^g aus Satz 5.2 frei von Singularitäten. \square

Satz 5.5. *Für alle Konfigurationen $\mathcal{K} \in \mathcal{U}_2^g$ gilt: Die Trägergeraden l_1, \dots, l_g liegen in einem Ebenenfeld. Die restlichen Geraden l_{g+1}, \dots, l_{2g} sind die Erzeugenden eines Drehkegels mit Öffnungswinkel*

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right). \quad (5.26)$$

Beweis: Die erste Aussage folgt unmittelbar aus der Bedingung $z_1 = 0$. Die Geraden l_{g+1}, \dots, l_{2g} liegen auf Grund von $r_2 = 0$ auf einem Kegel. Die Formel für den Winkel α kann durch Nachrechnen leicht bestätigt werden. \square

Bevor wir die Resultate der Falldiskussion in einem Satz zusammenfassen, müssen wir noch jenen Fall besprechen, der, wie schon zuvor bemerkt, durch die Parametrisierung von $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}^g$ in (5.9) nicht erfasst wurde. O.B.d.A. setzen wir $\mathbf{g}_i = (0, 0, 1)$ für $i = 1, \dots, g$ und $h_1 = 0$. Berechnen wir nun wiederum \mathbf{N} und betrachten die Matrizeneinträge

$$n_{4,4} = n_{5,5} = \frac{g}{2(z_2^2 + 1)} \quad \text{und} \quad n_{6,6} = \frac{2g(1 + 2z_2^2)}{2(z_2^2 + 1)},$$

so zeigt sich, dass kein reelles z_2 die notwendige Bedingung $n_{4,4} = n_{5,5} = n_{6,6}$ erfüllen kann. Somit beinhaltet der bisher vernachlässigte Fall keine Lösung, womit alle Fälle abgehandelt wurden.

Satz 5.6. *Jede Konfiguration \mathcal{K} aus der dreiparametrischen Konfigurationsmenge \mathcal{U}_1^g aus Satz 5.2 oder der zweiparametrischen Konfigurationsmenge \mathcal{U}_2^g aus Satz 5.4 ist isotrop bezüglich CDN_{OE} , wobei die Koordinaten \mathbf{s}_i der Scheitel S_i $i = 1, \dots, 6$ des Operation Ellipsoids gegeben sind durch (5.10).*

Bemerkung: Da alle *Condition Number* Indizes nicht von der Wahl der Basis- und Plattformankerpunkte auf der Trägergeraden abhängen, ist eine Designoptimierung mit Hilfe der *Condition Number* nur bedingt möglich. Denn aus jeder einzelnen Konfiguration \mathcal{K} aus \mathcal{U}_1^g oder \mathcal{U}_2^g resultieren ∞^{4g} mögliche isotrope Manipulatorkonfigurationen bezüglich CDN_{OE} .

Wir werden im nächsten Kapitel einen *EE independent Performance Index* für *Robot Control* einführen, der von der Wahl der Ankerpunkte auf den Trägergeraden abhängt. Dieser Index kann auch für *Robot Design* verwendet werden, wodurch es möglich ist explizite Designs von Stewart Gough Plattformen zu berechnen.

Kapitel 6

EE independent Performance Indizes für SGPen

6.1 Review

Es wurden im Laufe der Zeit schon viele EE independent Performance Indizes für SGPen ausgearbeitet, von denen wir nun kurz die unserer Ansicht nach wichtigsten in Hinblick auf die in (2.8)–(2.13) gestellten Forderungen analysieren wollen. Wir werden nochmals kurz die *Manipulability* wiederholen sowie die Konzepte des *bestapproximierenden linearen Komplexes* und der *Rigidity Rate* vorstellen.

6.1.1 Manipulability

Dieser von Yoshikawa in [55] eingeführte Index, der seinen Ursprung in der seriellen Robotik hat, findet auch Anwendung bei SGPen. Für nicht redundante SGPen gibt dieser Index wiederum nichts anderes als den Betrag der Determinante der Jakobimatrix \mathbf{J} aus (2.7) an. Auf Grund von Satz 4.1 ist die *Manipulability* invariant gegenüber Euklidischen Bewegungen, aber variant unter Ähnlichkeiten.

Um die Varianz gegenüber Ähnlichkeiten zu überwinden, benutzten einige Autoren, wie zum Beispiel Lee und Duffy, [29, 31] das folgende Verhältnis

$$|\det(\mathbf{J})| \cdot |\det(\mathbf{J})|_m^{-1}, \quad (6.1)$$

als Performance Index, wobei $|\det(\mathbf{J})|_m$ mit jener Plattformkonfiguration des Arbeitsraumes korrespondiert, in der $\det(\mathbf{J})$ maximal ist. Die Berechnung eines solchen Maximums ist jedoch eine nichtlineare Aufgabe und wurde in [29, 31] nur für ebene SGPen mit sehr speziellen Geometrien durchgeführt. Speziell im Fall des 3-3 Manipulators [31], bei welchem die Basis und die Plattform aus zwei gleichseitigen Dreiecken besteht und die Dreiecksseiten im Verhältnis 2 : 1 stehen, ist $|\det(\mathbf{J})|_m$ geometrisch interpretierbar als das Volumen des aufgespannten Stabwerkes. Jedoch lässt sich mit Ausnahme einiger weniger Fälle $|\det(\mathbf{J})|_m$ nicht sinnvoll geometrisch interpretieren. Es sei noch bemerkt, dass dieses Konzept in [57] auf redundante SGPen ausgeweitet wurde und in [30] auf ebene 3-dof RPR Manipulatoren angewandt wurde.

6.1.2 Bestapproximierender linearer Komplex

Dieses Konzept wurde von Pottmann, Peternell und Ravani [45] ausgearbeitet und stützt sich prinzipiell auf die Berechnung des *bestapproximierenden linearen Komplexes* $(\mathbf{c}, \widehat{\mathbf{c}})$ in Hinblick auf die Minimierung der Quadratsumme der Momente der sechs Beine bezüglich $(\mathbf{c}, \widehat{\mathbf{c}})$, also

$$\sum_{i=1}^6 \frac{(\widehat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{l}_i + \mathbf{c} \cdot \widehat{\mathbf{l}}_i)^2}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}} \rightarrow \min., \quad (6.2)$$

wobei $(\mathbf{l}_i, \widehat{\mathbf{l}}_i)$ die beliebig orientierten Speerkoordinaten des i -ten Beines sind. Dies ist äquivalent zur Minimierung der quadratischen Form $\sum (\widehat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{l}_i + \mathbf{c} \cdot \widehat{\mathbf{l}}_i)^2$ unter der Nebenbedingung $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 1$. Nach Einführung eines Lagrange Multiplikators λ führt die Lösung des Optimierungsproblems auf eine kubische Gleichung in λ . Als Standardabweichung vom *bestapproximierenden linearen Komplex* wird schließlich der Wert $\sqrt{\lambda_{\min}}$ definiert, wobei λ_{\min} die kleinste Nullstelle des kubischen Polynoms ist.

Dieses Abstandsmaß ist nicht invariant gegenüber Ähnlichkeiten, denn eine Änderung der Skalierung mit dem Faktor μ wirkt sich linear auf das Abstandsmaß aus. Jedoch liegt der größte Schwachpunkt dieses Maßes darin, dass das Moment nur für lineare Komplexe mit endlichem Schraubparameter p definiert ist. Diese Tatsache ist leicht zu erkennen, da für singuläre lineare Komplexe mit $p = \infty$ stets $\mathbf{c} = \mathbf{o}$ gilt und man somit in (6.2) durch Null dividieren müsste. Um diese Lücke zu schließen, schlugen die Autoren vor, die Gleichung $\sum (\widehat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{l}_i)^2$ unter der Nebenbedingung $\widehat{\mathbf{c}} \cdot \widehat{\mathbf{c}} = 1$ zu minimieren. Somit bekommt man für jede Plattformkonfiguration zwei verschiedene Werte, die aus den zwei Minimierungsaufgaben resultieren. Das Problem besteht nun darin, wie diese zwei Werte sinnvoll zu einem einzigen Maß kombiniert werden sollen. Diese Frage ließen die Autoren von [45] unbeantwortet.

Vom kinematischen Standpunkt aus betrachtet, lässt sich der Index, wie folgt, interpretieren: Bei der Optimierungsaufgabe wird eigentlich jene Momentanschraube $\underline{\mathbf{c}}$ mit Winkelgeschwindigkeit $\mathbf{c} \mathbf{c} = 1$ berechnet, welche die Quadratsumme der momentanen Längenänderungen der Beine minimiert. Unter diesem Blickwinkel ist es offensichtlich, dass durch die Nebenbedingung $\mathbf{c} \mathbf{c} = 1$ momentane Translationen ausgeschlossen sind. Deshalb muss man noch nach jener momentanen Translation mit Schiebgeschwindigkeit $\widehat{\mathbf{c}} \widehat{\mathbf{c}} = 1$ suchen, welche ebenfalls die Quadratsumme der momentanen Längenänderungen der Beine minimiert.

6.1.3 Rigidity Rate

Eine sehr schöne geometrische Idee steckt hinter diesem von Lang, Mick und Röschel in [27] vorgeschlagenem Maß, welches speziell für SGPEN entwickelt wurde⁴. Man erweitert die 6-dimensionale Gruppe der gleichsinnigen euklidischen Kongruenzabbildungen \mathcal{G}_6 um eine Dimension zur Gruppe der euklidischen Ähnlichkeitsabbildungen \mathcal{G}_7 . In dieser besitzt nun die Plattform gegenüber der Basis in jeder Lage eine eindimensionale Selbstbewegung.

⁴Für ein besseres geometrisches Verständnis dieser Arbeit empfiehlt sich das Studium der Arbeit [41] von Odehnal, Pottmann und Wallner.

Wenn nun die infinitesimale Selbstbewegung in die Nachbarlage der Gruppe \mathcal{G}_6 angehört, so befindet sich der Manipulator in einer singulären Lage.

Die Idee ist nun jene, dass man als Abstand den Winkel φ definiert, den die Tangente der eindimensionalen Selbstbewegung in der Konfiguration \mathcal{K} mit dem Unterraum \mathcal{G}_6 einschließt. Dies gelingt mit Hilfe von Methoden aus der Theorie der Liegruppen und einer symmetrischen positiv semidefiniten Bilinearform im Tangentialraum an \mathcal{G}_7 . Die Berechnung von φ führt nur über die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Eine gewisse Beliebigkeit besteht jedoch in der Wahl der Bilinearform, denn um ein Maß im Sinne der nichteuklidischen Geometrie zu definieren, benötigt man nur eine invariante symmetrische Bilinearform, die nicht notwendigerweise positiv semidefinit sein muss. Die Autoren begründen ihre Wahl damit, dass dadurch die sonst nötigen Fallunterscheidungen vermieden werden. Die bedingte Anwendbarkeit dieses Maßes in der Praxis wird sich im abschließenden Beispiel dieses Kapitels manifestieren. Eine weitere Schwäche dieses Index wird im nächsten Abschnitt zur Sprache kommen.

6.2 Vorüberlegungen für einen neuen Performance Index

Da wir unseren zu definierenden Index auch als Abstandsmaß zur Singularität auffassen wollen, muss dieser Index wie in Abschnitt 2.3.1 überlegt, von der Geometrie der *SGP* abhängen, welche durch die Lage der Plattformankerpunkte im Gangkoordinatensystem und die Lage der Basisankerpunkte im Rastkoordinatensystem bestimmt ist. Wir wollen nun die siebenten Forderung aus (2.14) für *SGP* spezifizieren:

7. $PI(\mathcal{K})$ soll die Geometrie der *SGP* berücksichtigen und deshalb nicht nur von den Trägergeraden l_i abhängen, sondern auch von der Lage der Ankerpunkte auf diesen.

Da die Jakobimatrix \mathbf{J} der *SGP* bezüglich einer Konfiguration \mathcal{K} invariant gegenüber der Wahl der Plattformankerpunkte P_i und Basisankerpunkte B_i auf der Trägergeraden l_i des i -ten Beines ist, sind die in Abschnitt 6.1.1 und 6.1.2 vorgestellte Methoden nicht von der Geometrie des Manipulators abhängig.

Rigidity Rate Dieser Index ist unabhängig von der Wahl der Basisankerpunkte B_i auf der Trägergeraden l_i . Somit berücksichtigt die *Rigidity Rate* nur die Geometrie der Plattform, woraus das folgende Problem entsteht: Wenn wir nun den Standpunkt ändern und Σ als das ruhende System betrachten und Σ_0 als Plattform, dann bekommen wir einen anderen Index für dieselbe *SGP* Konfiguration. Somit hängt die *Rigidity Rate* von der Art der Betrachtung ab, was wenig zufriedenstellend ist.

Liniensegment Methode Pottmann, Peternell und Ravani präsentierten in [45] auch eine modifizierte Version der Methode des *bestapproximierenden linearen Komplexes*, die sogenannte *Liniensegment Methode*. Der daraus berechnete Index erfüllt die siebente Forderung, jedoch konnten die anderen Nachteile nicht beseitigt werden. Außerdem nimmt die Rechenzeit zu, da sich die Berechnung des Index auf einen iterativen Algorithmus stützt.

6.2.1 Unkontrollierbare Lagen

In der Praxis müssen Konfigurationen von *SGPEN* vermieden werden, bei denen kleine Veränderungen der Beinlängen unkontrollierbar große Auswirkungen auf die momentane Lageänderung der Plattform haben. Aber wie soll die Größe der Auswirkungen in Relation zur Veränderung der Beinlänge gemessen werden? Der Grenzfall dieser Unkontrollierbarkeit ist jener, wo bereits ohne jede Änderung der Beinlängen eine infinitesimale Beweglichkeit der Plattform besteht, also eine singuläre Lage vorliegt. Dies läßt sich, wie folgt, überlegen:

Angenommen $\underline{\mathbf{k}} \in \ker \iota$ und $\underline{\mathbf{k}} \neq \mathbf{o}$ mit ι laut (2.6). Dann liegt trivialer Weise auch $\mu \underline{\mathbf{k}}$ mit $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ im Kern der Abbildung ι . Somit sind in singulären Lagen die Führungsgeschwindigkeiten der Plattformpunkte beliebig groß und die Position ist unkontrollierbar. Eine Ausnahme bilden jene Punkte der Plattform, die auf der Drehachse liegen, wenn $\underline{\mathbf{k}}$ eine Momentandrehung ($\underline{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} = 0$) beschreibt. Diese Punkte sind momentan in Ruhe.

Die Frage, die es nun zu beantworten gilt lautet, wie folgt: Welcher messbare Parameter einer *SGP* beschreibt den Zustand der Unkontrollierbarkeit auf natürliche Weise und hat zusätzlich noch eine geometrisch-kinematische Bedeutung für den Manipulator. Eine Antwort werden wir im nächsten Kapitel geben.

6.3 Der Performance Index $CTN(\mathcal{K})$

Um die Auswirkungen der momentanen Längenänderungen der Beine in irgendeiner Weise messen zu können, müssen wir vorab für diese eine sinnvolle Normierungsvorschrift formulieren. Da generell wegen der Linearität der Abbildung ι aus (2.6) dem $\mu \underline{\mathbf{q}}$ die μ -fachen Schubgeschwindigkeiten der sechs prismatischen Gelenke entsprechen, wollen wir uns auf dieselbe Normierungsbedingung wie im vorherigen Kapitel beschränken, nämlich dass die Quadratsumme der Längenänderungen der Beine gleich 1 ist. Wir wollen die Nebenbedingung $\nu(\underline{\mathbf{q}})$ nochmals anschreiben:

$$\nu(\underline{\mathbf{q}}): \quad \underline{\mathbf{q}}^T \mathbf{N} \underline{\mathbf{q}} = 1 \quad \text{mit} \quad \mathbf{N} = \mathbf{J}^T \mathbf{J}. \quad (6.3)$$

6.3.1 Idee und Definition von $CTN(\mathcal{K})$

Angenommen, es liegt momentan eine kleine Veränderung der sechs Beinlängen vor und die *SGP* befindet sich nicht in einer singulären Lage. Dann existiert auf Grund der Abbildung ι eine eindeutige Schraube $\underline{\mathbf{q}}$, welche die Momentanbewegung der Plattform Σ gegenüber der Basis Σ_0 beschreibt. Wir wollen nun die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}(\mathbf{P}_i)$ der Plattformankerpunkte \mathbf{P}_i bezüglich $\underline{\mathbf{q}}$ betrachten, da wir aus diesen auf Grund ihrer speziellen Lage die meiste Information über das System erhalten. Wir zerlegen $\mathbf{v}(\mathbf{P}_i)$ gemäß (2.3) in die Komponente $\mathbf{v}_\parallel(\mathbf{P}_i)$ in Richtung des i -ten Beines und in jene $\mathbf{v}_\perp(\mathbf{P}_i)$ orthogonal zu dieser.

Wir sind nicht an der momentanen Lageänderung von $\mathbf{v}(P_i)$ in Richtung des i -ten Beines interessiert, da die Längenänderung des Beines über ein Schubgelenk erfolgt, welches aktiv und somit voll kontrollierbar ist. Somit kann nur die Komponente $\mathbf{v}_\perp(P_i)$ ein Indikator für die Unkontrollierbarkeit des Manipulators sein. Da $\mathbf{v}_\perp(P_i)$ aber kein mechanischer Parameter einer *SGP* ist, wollen wir die Winkelgeschwindigkeit ω_{B_i} des i -ten passiven Basisgelenks betrachten.

Winkelgeschwindigkeiten der passiven Gelenke

Bei den passiven Gelenken handelt es sich entweder um Kugel- oder Kardangelenke, wobei dieser Unterschied für die weitere Betrachtung zu vernachlässigen ist. Wir sprechen daher allgemein vom i -ten passiven Basis- bzw. Plattformgelenk. Die Winkelgeschwindigkeit ω_{B_i} des i -ten passiven Basisgelenks ist definiert als:

$$\omega_{B_i} := \frac{\|\mathbf{v}_\perp(P_i)\|}{\|\mathbf{l}_i\|} \quad (6.4)$$

und somit ist diese direkt proportional zu $\mathbf{v}_\perp(P_i)$. Auf Grund von (2.3) und (2.5) können wir das Quadrat von ω_{B_i} auch schreiben als:

$$\omega_{B_i}^2 = \frac{\|\mathbf{v}_\perp(P_i)\|^2}{\|\mathbf{l}_i\|^2} = \frac{\|\mathbf{v}(P_i)\|^2 - d_i^2}{\|\mathbf{l}_i\|^2}. \quad (6.5)$$

Aber es existieren auch Winkelgeschwindigkeiten ω_{P_i} in den passiven Plattformgelenken, welche analog definiert sind. Der einzige Unterschied besteht darin, dass wir nun die Plattform als ruhend betrachten und die Basis als bewegtes System. Da laut Satz 1.12 die momentane Schraube der Umkehrbewegung durch $-\underline{\mathbf{q}}$ gegeben ist, müssen wir in (2.3),(2.5) und (6.5) die Koordinaten \mathbf{p}_i von P_i durch die Koordinaten \mathbf{b}_i von B_i sowie $\underline{\mathbf{q}}$ durch $-\underline{\mathbf{q}}$ ersetzen, um ω_{P_i} zu erhalten.

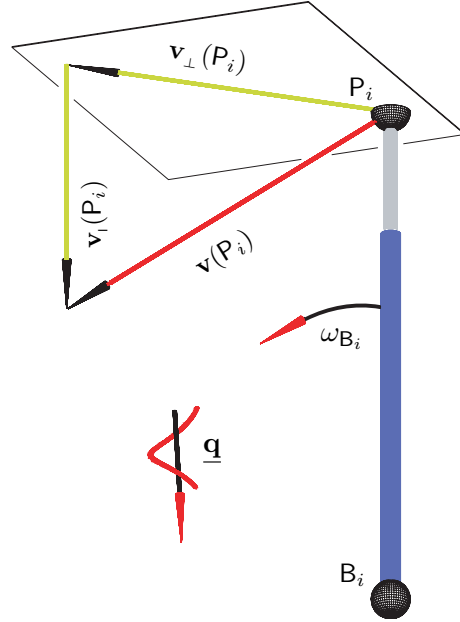


Abbildung 6.1: Definition von ω_{B_i}

Offensichtlich sind ω_{B_i} und ω_{P_i} quadratische Formen in den Unbekannten der Schraube $\underline{\mathbf{q}}$. Deshalb können wir diese auch, wie folgt, anschreiben:

$$\omega_{B_i}^2 = \underline{\mathbf{q}}^T \mathbf{W}_{B_i} \underline{\mathbf{q}} \quad \text{und} \quad \omega_{P_i}^2 = \underline{\mathbf{q}}^T \mathbf{W}_{P_i} \underline{\mathbf{q}}, \quad (6.6)$$

wobei \mathbf{W}_{B_i} und \mathbf{W}_{P_i} symmetrische 6×6 Matrizen sind. Mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse und Überlegungen können wir einen neuen Performance Index, namens *Control Number* definieren. Die folgende Definition umfaßt auch redundante *SGPen*:

Definition 6.1. Die Control Number einer n -beinigen SGP Konfiguration mit $n > 5$ ist definiert als

$$CTN(\mathcal{K}) := +\sqrt{\lambda_-/\lambda_+} \quad \text{mit} \quad CTN(\mathcal{K}) \in [0, 1], \quad (6.7)$$

wobei λ_- bzw. λ_+ das Minimum bzw. Maximum der Zielfunktion $\zeta(\underline{\mathbf{q}})$ mit

$$\zeta(\underline{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^n \omega_{\mathbf{B}_i}^2 + \omega_{\mathbf{P}_i}^2 = \underline{\mathbf{q}}^T \mathbf{Z} \underline{\mathbf{q}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^n \mathbf{W}_{\mathbf{B}_i} + \mathbf{W}_{\mathbf{P}_i} \quad (6.8)$$

unter der Nebenbedingung $\nu(\underline{\mathbf{q}})$ aus (6.3) bezeichnet. $CTN(\mathcal{K}) = 0$ charakterisiert singuläre Konfigurationen und der Maximalwert von 1 kennzeichnet optimale Lagen.

Die Control Number gibt somit das Verhältnis der kontrollierbarsten gegenüber der unkontrollierbarsten momentanen Bewegung der SGP wider, wobei der Grad der Kontrollierbarkeit über die Quadratsumme der Winkelgeschwindigkeiten in den passiven Gelenken bei konstanter Quadratsumme der momentanen Längenänderungen bestimmt wird.

6.3.2 Berechnung und Wohldefiniertheit von $CTN(\mathcal{K})$

Die Lösung der Optimierungsaufgabe erfolgt wiederum über die Einführung eines Lagrange'schen Multiplikators λ , wobei sich aber der Ansatz $\nabla\zeta - \lambda\nabla\nu = 0$ unter Berücksichtigung von $\nabla\zeta = 2\mathbf{Z}\underline{\mathbf{q}}$ und $\nabla\nu = 2\mathbf{N}\underline{\mathbf{q}}$ zu dem allgemeinen Eigenwertproblem

$$(\mathbf{Z} - \lambda\mathbf{N})\underline{\mathbf{q}} = \mathbf{o}$$

vereinfacht. Dieses lineare Gleichungssystem besitzt genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante der Matrix $(\mathbf{Z} - \lambda\mathbf{N})$ verschwindet. Der Grad des charakteristischen Polynoms korrespondiert mit dem Rang der Jakobimatrix \mathbf{J} , da $\mathbf{N} = \mathbf{J}^T\mathbf{J}$ gilt. Jeder allgemeine Eigenwert λ_i ist mit einem allgemeinen Eigenvektor $\underline{\mathbf{e}}_i$ gekoppelt. Der kleinste λ_- bzw. der größte λ_+ allgemeine Eigenwert entspricht den gesuchten Extrema auf Grund von:

$$\mathbf{Z}\underline{\mathbf{e}}_i = \lambda_i\mathbf{N}\underline{\mathbf{e}}_i \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{e}}_i^T\mathbf{N}\underline{\mathbf{e}}_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \zeta(\underline{\mathbf{e}}_i) = \lambda_i, \quad (6.9)$$

womit auch schon der erste Teil des nächsten Satzes bewiesen ist.

Satz 6.1. λ_- und λ_+ von Def. 6.1 sind die extremalen allgemeinen Eigenwerte von \mathbf{Z} aus (6.8) bezüglich \mathbf{N} aus (6.3). Alle sechs Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms $|\mathbf{Z} - \lambda\mathbf{N}| = 0$ sind, dann und genau dann, reell und größer als Null, wenn $\text{rank}(\mathbf{J}) = 6$ gilt.

Beweis: Nach Hestenes [16] sind alle λ_i reell. Auf Grund von (6.9) können die λ_i 's auch nicht negativ sein, da diese ja mit dem Funktionswert der Zielfunktion bezüglich des korrespondierenden Eigenvektors $\underline{\mathbf{e}}_i$ übereinstimmen. Nun müssen wir nur noch zeigen, dass die Eigenwerte und somit auch die Zielfunktion ungleich Null sind, wenn $\text{rank}(\mathbf{J}) = 6$ gilt. Um den Sachverhalt nicht aus den Augen zu verlieren, wählen wir einen rein geometrischen Zugang zur Lösung dieses Problems: Im i -ten Basisankergelenk tritt genau dann keine Winkelgeschwindigkeit auf, wenn entweder $\mathbf{v}(\mathbf{P}_i) = \mathbf{o}$ oder $\mathbf{v}_\perp(\mathbf{P}_i) = \mathbf{o}$ gilt. Analog

verhält es sich mit den Winkelgeschwindigkeiten in den Plattformankergelenken. Es sei noch bemerkt, dass auf Grund von (1.20) der Normalenkomplex von $\underline{\mathbf{q}}$ mit jenem von $-\underline{\mathbf{q}}$ übereinstimmt und deshalb infolge nur mehr von einem Normalenkomplex und der damit verbundenen Nullpolarität die Rede ist. Es müssen drei Fälle unterschieden werden:

1. Fall: Angenommen $\underline{\mathbf{q}}$ sei eine echte Schraube, d.h. es liegt keine momentane Drehung oder Translation vor. Da bei $\underline{\mathbf{q}}$ kein eigentlicher Punkt des Gangsystems momentan in Ruhe bleibt, müssen die Führungsgeschwindigkeiten von P_i bezüglich $\underline{\mathbf{q}}$ bzw. von B_i bezüglich $-\underline{\mathbf{q}}$ in Richtung des Beines l_i liegen. Somit sind die Bahnnormalebene von B_i und P_i parallel, woraus folgt, dass die Nullpolare von l_i bezüglich des Normalenkomplexes eine Ferngerade ist. Somit sind die Bahnnormalebene aller Punkte von l_i normal zu l_i , woraus folgt, dass l_i die Schraubachse von $\pm\underline{\mathbf{q}}$ ist. Also kann dieser Fall nur eintreten, wenn alle $2n$ Ankerpunkte auf der Schraubachse liegen. Eine solche Konfiguration ist aber von höchstem Grad singulär, da $\text{rank}(\mathbf{J}) = 1$ gilt.

2. Fall: Nun sei $\underline{\mathbf{q}}$ eine Momentandrehung. Bei dieser enthalten alle Bahnnormalebene die Drehachse, woraus sofort folgt, dass keine zwei voneinander verschiedenen Bahnnormalebene parallel sein können. Außerdem kann auch nicht der Fall eintreten, dass nur ein Ankerpunkt auf der Drehachse liegt, also momentan in Ruhe ist, da ansonsten l_i stets eine Bahnnormale wäre. Der einzig mögliche Fall, in dem keine Winkelgeschwindigkeiten in den Ankergelenken auftreten, ist somit jener, wo die Ankerpunkte B_i und P_i auf der Drehachse liegen. Dies führt auf dieselbe Manipulatorkonfiguration wie im ersten Fall.

3. Fall: $\underline{\mathbf{q}}$ beschreibe nun eine momentane Translation. In diesem Fall sind alle Bahnnormalebene untereinander parallel und kein eigentlicher Punkt des bewegten Systems hat einen momentanen Stillstand. Damit die Winkelgeschwindigkeiten verschwinden, müssen alle n Trägergeraden l_i der Beine in Schubrichtung liegen. Eine solche Konfiguration hat mindestens drei unkontrollierbare Freiheitsgrade, da die Trägergeraden in einem Geradenbündel liegen. Somit gilt $\text{rank}(\mathbf{J}) \leq 3$. \square

Satz 6.2. Die Anzahl der Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms $|\mathbf{Z} - \lambda \mathbf{N}| = 0$, welche nach Unendlich fallen, gleicht dem defect(\mathbf{N}).

Beweis: Alle Schrauben $\pm\mu\underline{\mathbf{q}} \in \ker_i$ mit $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ haben beliebig große Geschwindigkeiten $\mathbf{v}(P_i) = \mathbf{v}_\perp(P_i)$ bzw. $\mathbf{v}(B_i) = \mathbf{v}_\perp(B_i)$ zur Folge. Somit sind auch die Winkelgeschwindigkeiten ω_{B_i} bzw. ω_{P_i} unbestimmt, da diese direkt proportional zu $\|\mathbf{v}_\perp(P_i)\|$ bzw. $\|\mathbf{v}_\perp(B_i)\|$ sind. Der Beweis folgt durch Ausführung des Grenzüberganges $\lim_{\mu \rightarrow \infty}$ und (6.9). \square

Bemerkung Es wäre aus den folgenden Gründen sinnlos die Zielfunktion $\zeta(\underline{\mathbf{q}})$ nur als $\sum \omega_{B_i}^2$ (bzw. $\sum \omega_{P_i}^2$) zu definieren: Erstens würde der dadurch entstehende Index nicht unsere siebente Forderung erfüllen, da dieser dann genauso wie die *Rigidity Rate* von der Betrachtungsweise abhängen würde. Außerdem wäre der Index auch nicht wohldefiniert, weil nicht singuläre *SGP* Konfigurationen existieren, in denen die Trägergeraden l_i Bahntangenten von P_i (bzw. B_i) bezüglich $\underline{\mathbf{q}}$ sind für $i = 1, \dots, n$. Daraus würde $\zeta(\underline{\mathbf{q}}) = 0$ folgen und $\text{CTN}(\mathcal{K}) = 0$ obwohl die Konfiguration regulär wäre.

Satz 6.3. Die Control Number hängt von der Wahl der Ankerpunkte auf den n Trägergeraden ab. Die 2^n Manipulatorkonfigurationen, welche durch das Vertauschen von Plattformankerpunkten P_i und Basisankerpunkten B_i hervorgehen, haben dieselbe Control Number.

Beweis: Die Nebenbedingung $\nu(\mathbf{q})$ ist auf Grund von (6.3) sowieso unabhängig von der Wahl der Ankerpunkte auf den Trägergeraden. Da die Führungsgeschwindigkeitsvektoren eines Punktes bezüglich \mathbf{q} und $-\mathbf{q}$ nur entgegengesetzt orientiert sind, aber gleiche Länge besitzen, folgt unter Berücksichtigung von Satz 1.8, dass auch die Zielfunktion $\zeta(\mathbf{q})$ aus (6.8) invariant gegenüber dem Vertauschen von Plattformankerpunkten P_i und Basisankerpunkten B_i ist. \square

Satz 6.4. $CTN(\mathcal{K})$ ist wohldefiniert und genügt allen sieben Anforderungen aus (2.8) – (2.14).

Beweis: Auf Grund Satz 6.1 und Satz 6.2 ist die Control Number wohldefiniert, womit die Forderungen 1 und 2 erfüllt sind. Da unsere Zielfunktion $\zeta(\mathbf{q})$ aus (6.8) als Quadratsumme von Winkelgeschwindigkeiten sowie unsere Nebenbedingung $\nu(\mathbf{q})$ aus (6.3) als Quadratsumme von momentanen Längenänderungen invariant gegenüber Euklidischen Bewegungen sind, ist auch die dritte Forderung erfüllt. Die Invarianz gegenüber Ähnlichkeiten wurde dadurch erreicht, dass $CTN(\mathcal{K})$ als dimensionsloses Verhältnis definiert wurde. Dieser Index hat eine geometrisch-kinematische Bedeutung und hängt von der Geometrie des Manipulators ab, da wir uns über diesen Gesichtspunkt dem Maß genähert haben. Der Rechenaufwand für den vorgeschlagenen Index hält sich in Grenzen, da im Wesentlichen nur ein Polynom vom Grad 6 zu lösen ist. Somit ist eine Berechnung der CTN in Echtzeit gewährleistet. \square

6.3.3 Momentanbewegung nahe singulären Lagen

Nach Wolf und Shoham [54] liefert der nächste Bahnnormalenkomplex einer Schraubung (Drehungen und Translationen inklusive) bezüglich l_1, \dots, l_n mit $n > 5$, beschrieben durch die Schraubachse und den Schraubparameter, zusätzliche Information über die Momentanbewegung der SGP , wenn sich diese in oder in der Nähe einer singulären Lage befindet. Die zusätzliche Kenntnis der Schraubachse sowie des Schraubparameters hilft auch ein besseres physikalisches Verständnis vom Typ der (nahegelegenen) Singularität zu erlangen.

Da es sich bei der Control Number sowohl um einen Performance Index als auch um ein Abstandsmaß handelt, kennzeichnet eine kleine CTN die Nähe zu einer Singularität. Auf Grund von Satz 6.2 und der Stetigkeit der Polynomfunktion $|\mathbf{Z} - \lambda \mathbf{N}| = 0$, welche entstehen, wenn man sich einer Singularität nähert, kann man sagen, dass der nächste lineare Komplex bezüglich l_1, \dots, l_n ident mit dem Bahnnormalenkomplex der Schraube $\underline{\mathbf{e}}_+$ nach (6.9) ist. Der Schraubparameter p_+ und die normierten Plückerkoordinaten $\underline{\mathbf{f}}_+$ der Schraubachse \mathbf{f}_+ von $\underline{\mathbf{e}}_+$ lassen sich dann gemäß Satz 1.7, wie folgt, berechnen:

$$p_+ = \frac{\mathbf{e}_+ \hat{\mathbf{e}}_+}{\mathbf{e}_+ \mathbf{e}_+}, \quad \mathbf{f}_+ = \frac{\mathbf{e}_+}{\|\mathbf{e}_+\|}, \quad \hat{\mathbf{f}}_+ = \frac{\hat{\mathbf{e}}_+ - p_+ \cdot \mathbf{e}_+}{\|\mathbf{e}_+\|}. \quad (6.10)$$

Somit liefert dieser Index zusätzlich eine Methode zur Bestimmung des *bestapproximierenden linearen Komplexes* in der Nähe von Singularitäten automatisch mit, dessen Berechnung im Gegensatz zur Methode [45] ohne Fallunterscheidungen auskommt.

Angenommen, λ_+ ist eine Doppellösung oder ein zweiter allgemeiner Eigenwert von \mathbf{Z} bezüglich \mathbf{N} unterscheidet sich nur geringfügig von λ_+ . Dann können die Trägergeraden der Beine l_1, \dots, l_n (nahezu) gleich gut durch zwei verschiedene lineare Komplexe \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C}_2 und somit durch die eindimensionale lineare Mannigfaltigkeit von linearen Komplexen, welche von \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C}_2 aufgespannt wird, approximiert werden. Dies bedeutet nun, dass die Beine durch ein Geradenetz approximiert werden können, welches hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch sein kann (vgl. Abschnitt 1.1.3).

Dieser Gedankengang lässt sich erweitern auf den Fall, dass mehrere Eigenwerte in der Nähe von λ_+ liegen. Sind nun zwei andere allgemeine Eigenwerte (nahezu) gleich groß wie λ_+ so können die Trägergeraden der Beine durch ein Bündel linearer Komplexe approximiert werden, also entweder durch ein Geradenbündel, Geradenfeld, einen Regulus oder durch zwei Geradenbüschel, die eine gemeinsame Gerade besitzen, aber in unterschiedlichen Ebenen liegen (vgl. Abschnitt 1.1.3).

6.4 Vergleichendes Beispiel

Wir wollen eine einparametrische Schar von Lagen einer einparametrischen Menge von *SGPEN* analysieren. Die dadurch resultierende zweiparametrische Menge $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ von Konfigurationen \mathcal{K} ist bestimmt durch die Rastkoordinaten \mathbf{b}_i bzw. \mathbf{p}_i ihrer Ankerpunkte B_i bzw. P_i :

$$\mathbf{b}_i = (\cos \alpha_i, \sin \alpha_i, -h)^T, \quad \mathbf{p}_i = (\cos \beta_i, \sin \beta_i, h)^T$$

$$\alpha_1 = \beta_2 - \frac{\pi}{3} = -\alpha \quad \alpha_2 = \beta_1 + \frac{\pi}{3} = \alpha$$

$$\alpha_3 = \beta_4 - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \alpha \quad \alpha_4 = \beta_3 + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \alpha$$

$$\alpha_5 = \beta_6 - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} - \alpha \quad \alpha_6 = \beta_5 + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + \alpha$$

wobei der Winkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{6}[$ den *Designparameter* des Manipulators und $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ den *Lageparameter* der *SGP* darstellt (siehe *Abbildung 6.2*). Alle Konfigurationen $\mathcal{K} \in \mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ sind regulär. Singuläre Lagen befinden sich am Rand des Definitionsintervalls, nämlich bei $\alpha = \frac{\pi}{6}$ und $h = 0$.

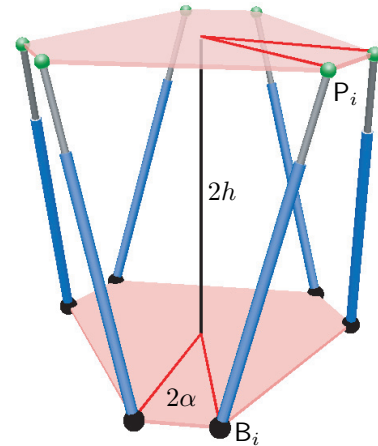


Abbildung 6.2: Beispiel

Wir ziehen gerade dieses Beispiel in Betracht, da derartige Manipulatoren in der Praxis sehr oft für Flugsimulatoren eingesetzt werden. Anhand dieses Beispiels sollen die im Abschnitt 6.1 vorgestellten Indizes mit dem der *Control Number* verglichen werden.

Manipulability

Paradoxerweise ist laut dieses Index die Konfiguration umso besser, je näher man der Singularität kommt, in welcher die Basis und Plattform zusammenfallen, also bei $\alpha = \frac{\pi}{6}$ und $h = 0$ (siehe *Abbildung 6.3*). Somit existiert kein lokales Maximum im Definitionsintervall, woraus folgt, dass \mathcal{S}_K keine optimale Konfiguration im Sinne dieses Maßes besitzt.

Ziehen wir hingegen den von Lee und Duffy vorgeschlagenen Index (6.1) zur Evaluierung der zweiparametrischen Konfigurationsmenge heran, so ergibt sich definitionsbedingt eine einparametrische Lösungsmenge von optimalen Konfigurationen (siehe *Abbildung 6.4*), da für jeden Designparameter $\alpha \in [0, \frac{\pi}{6}[$ ein Maximum $|\det(\mathbf{J})|_m$ existiert. Somit eignen sich diese beiden Indizes, die auf der Determinante der Jakobimatrix beruhen, nicht um verschiedene Konfigurationen von unterschiedlichen SGPEn miteinander zu vergleichen.

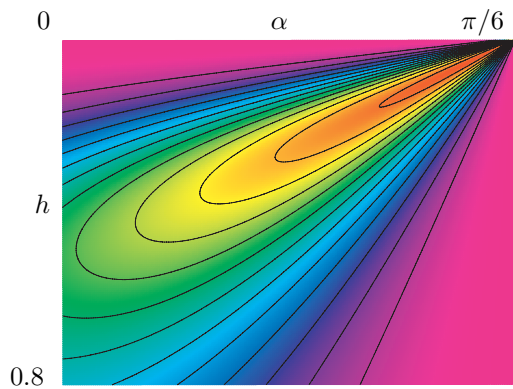


Abbildung 6.3: $|\det(\mathbf{J})|$

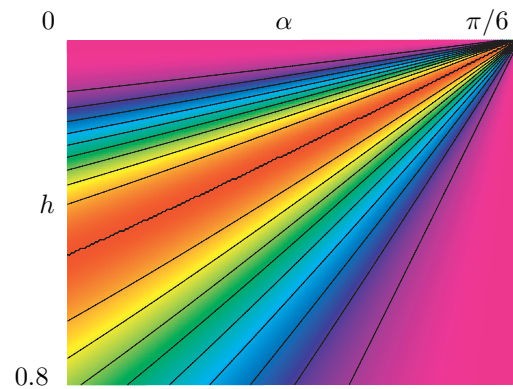


Abbildung 6.4: $|\det(\mathbf{J})| \cdot |\det(\mathbf{J})|_m^{-1}$

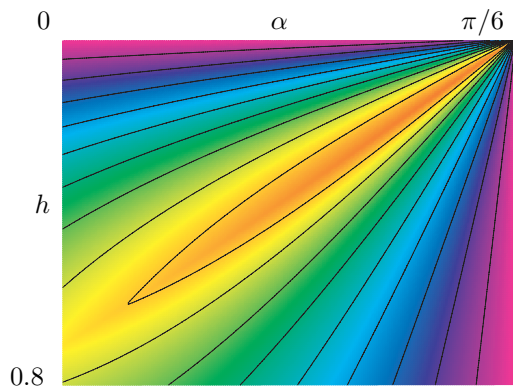


Abbildung 6.5: Standardabweichung σ_R

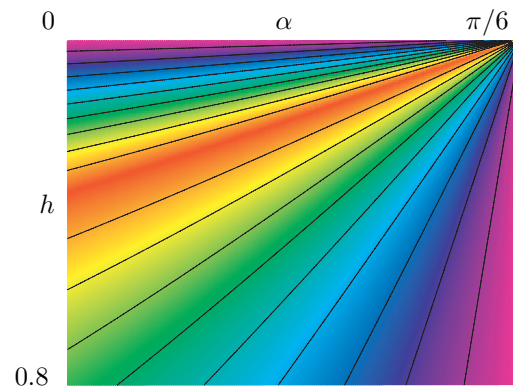


Abbildung 6.6: Standardabweichung σ_S

Bestapproximierender linearer Komplex

In diesem Fall müssen wir zwei Graphiken angeben, welche aus den beiden Minimierungsaufgaben resultieren. In *Abbildung 6.5* wird die Standardabweichung σ_R zum bestapproximierenden regulären linearen Komplex bzw. bestapproximierenden Drehkomplex dargestellt, und in *Abbildung 6.6* jene σ_S zum bestapproximierenden Schiebkomplex.

Wir erkennen für die Standardabweichung σ_R dasselbe Phänomen wie bei der Manipulability, nämlich dass dieser Index umso größer wird, je näher man der Konfiguration $\alpha = \frac{\pi}{6}$ und $h = 0$ kommt. Dies ist wie bei der *Manipulability* auf die fehlende Invarianz des Indizes gegenüber Ähnlichkeiten zurückzuführen. Bei der Standardabweichung zum Schiebkomplex existiert eine eindimensionale Menge von optimalen Konfigurationen, was darauf zurückzuführen ist, dass der Index invariant gegenüber Translationen jeder einzelnen Trägergeraden ist.

Rigidity Rate

Für die Berechnung der *Rigidity Rate* sei im Speziellen auf das neunte Kapitel von [27] verwiesen. In diesem Fall ist die Angabe einer Graphik überflüssig, da jeder Konfiguration des Definitionsintervalls der Maximalwert $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bescheinigt wird. Somit bleibt der Index konstant, wenn man sich einer singulären Lage nähert, und fällt nur in dieser nach Null. Somit ist dieser Index weder geeignet um verschiedene Lagen von unterschiedlichen *SGPen* miteinander zu vergleichen, noch um den Abstand zu einer Singularität anzugeben.

Control Number

Berechnen wir nun für die angegebenen Koordinaten der Ankerpunkte die Matrix $\mathbf{Z} - \lambda\mathbf{N}$, so lässt sich diese mittels elementarer Zeilen- bzw. Spaltenumformungen auf Diagonalgestalt bringen; also $\mathbf{Z} - \lambda\mathbf{N} = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_6)$. Somit können die Eigenwerte λ_i explizit aus $\Delta_i = 0$ berechnet werden. Es zeigt sich, dass $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\lambda_4 = \lambda_5$ gilt.

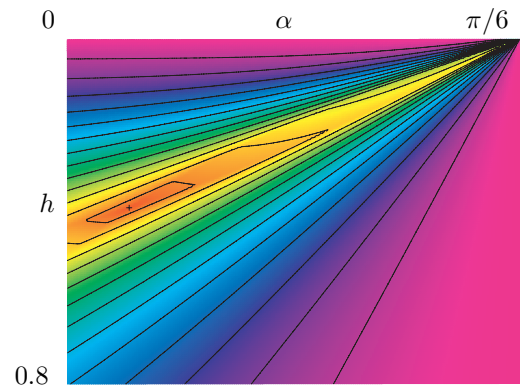


Abbildung 6.7: Isolinien von $CTN(\mathcal{S}_{\mathcal{K}})$

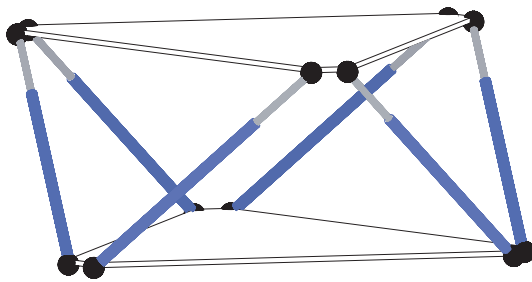


Abbildung 6.8: Axonometrie von \mathcal{K}_+

Betrachten wir nun *Abbildung 6.7*, so erkennen wir, dass $CTN(\mathcal{K})$ ein Maximum über $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ besitzt. Eine nähere Inspektion der Formeln zeigt, dass jene Konfiguration $\mathcal{K}_+ \in \mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ die größte *Control Number*, nämlich

$$CTN(\mathcal{K}_+) = \sqrt{2\sqrt{5} - 4} \approx 0.687$$

hat, für die $\lambda_{1,2} = \lambda_{4,5}$ und $\lambda_3 = \lambda_6$ gilt.

Lösen wir nun die zwei Gleichungen explizit nach den Unbekannten auf, so erhalten wir:

$$h_+ = \frac{\gamma}{4} \approx 0.4, \quad \alpha_+ = -\arctan\left(\frac{\sqrt{5}\gamma - \sqrt{15}}{5}\right) \approx 4^\circ, \quad \text{mit} \quad \gamma = \sqrt{2\sqrt{5} - 2} \quad (6.11)$$

Der Manipulator mit dem Designparameter α_+ , der in *Abbildung 6.8* graphisch dargestellt ist, macht auch aus dem Blickwinkel der Praxis Sinn, da im Gegensatz zum oft propagierten 3-3 oktaedralen Manipulator ($\alpha = 0$) keine Ankerpunkte identisch sind. Kardan- bzw. Kugelgelenke für zusammenfallende Plattform- oder Basisankerpunkte können technisch nicht realisiert werden. Deshalb wollen wir infolge den Manipulator, der durch α_+ bestimmt ist, näher betrachten:

Abbildung 6.10 zeigt den Graph von CTN in Abhängigkeit von der Höhe h . *Abbildung 6.9* illustriert die Isolinien von CTN , wenn die Plattform aus der zentralen Konfiguration parallel zur Basisebene verschoben wird. Es sei bemerkt, dass die Isolinien im Abstand von 0.05 eingezeichnet wurden, wobei die höchste den Wert 0.65 besitzt. Auf Grund der Symmetrie des Manipulators ist der Graph auch symmetrisch bezüglich der x-Achse. Die *Abbildungen 6.11, 6.12 und 6.13* geben die CTN -Werte jener Konfigurationen wider, die aus \mathcal{K}_+ durch Rotation der Plattform um eine x-Parallele bzw. z-Parallele bzw. y-Parallele durch den Punkt $(0, 0, h_+)$ mit dem Winkel δ (Bogenmaß) hervorgehen.

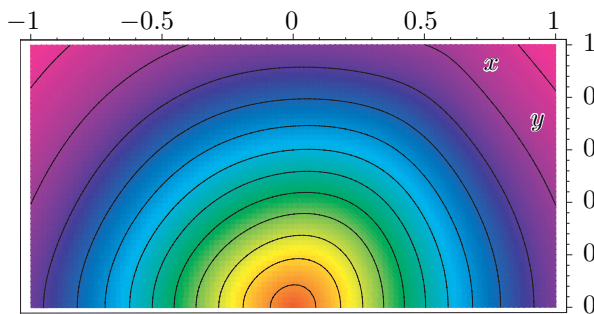


Abbildung 6.9: Translation von Σ in $z = h_+$

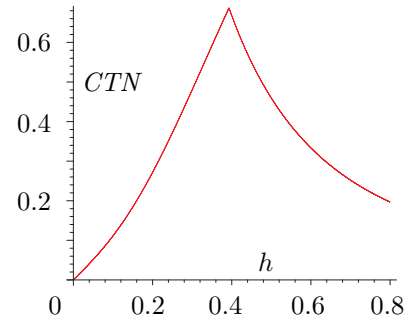


Abbildung 6.10: Variation von h

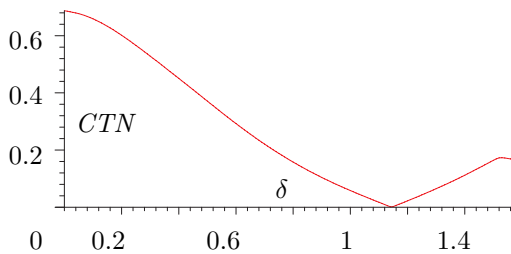


Abbildung 6.11: Rotation um x-Parallele

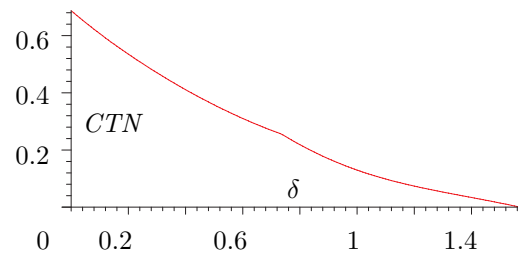


Abbildung 6.12: Rotation um z-Parallele

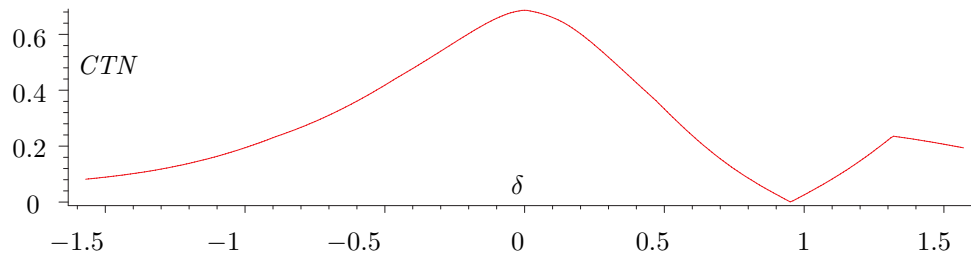


Abbildung 6.13: Rotation um y-Parallele

Dieses Beispiel zeigt, dass die *Control Number*, auf Grund der Erfüllung der geforderten sieben Eigenschaften, nicht nur für *Robot Control* geeignet ist, sondern auch benutzt werden kann um verschiedene Konfigurationen von unterschiedlichen *SGPen* miteinander zu vergleichen.

Es sollte an dieser Stelle noch bemerkt sein, dass die Anwendung der *CTN* nicht auf *SGPen* beschränkt ist. Man kann diesen Index auch für ebene 3-dof RPR Manipulatoren adaptieren. Wie die Adaptierung vorzunehmen ist, sehen wir im nächsten Kapitel, das der Frage auf dem Grund geht, ob Konfigurationen mit einer maximalen *Control Number* existieren. Da die Berechnungen um einiges umfangreicher sind als jene für die isotropen Konfigurationen bezüglich CDN_{OE} in Abschnitt 5.3, wollen wir diesem Sachverhalt ein eigenes Kapitel widmen.

Kapitel 7

Konfigurationen mit maximaler Control Number

7.1 Motivation und Vorüberlegungen

Die Motivation für die Berechnung von Konfigurationen \mathcal{K} mit $CTN(\mathcal{K}) = 1$ gründet in der Suche nach optimalen Designs für *SGPen*. In [29, 31, 57] bzw. [56, 10, 43, 26, 32, 51, 52, 36] wurden die *Manipulability* bzw. *CDN* Indizes benutzt um das Design von *SGPen* zu optimieren. Jedoch hängen diese Indizes, inklusive des Index CDN_{OE} aus Kapitel 5, nicht von der Wahl der Plattform- und Basisankerpunkte auf deren Trägergeraden ab, wodurch die Anwendbarkeit dieser Indizes für Designoptimierung sehr beschränkt ist. Da die *Control Number* von der Geometrie des Manipulators abhängt und dadurch verschiedene Konfigurationen von unterschiedlichen *SGPen* miteinander verglichen werden können, bietet sich dieser Index an, um das Design zu optimieren.

Wir suchen also nach Konfigurationen \mathcal{K} mit $CTN(\mathcal{K}) = 1$. Zuerst wollen wir uns vor Augen führen, was dies für den Manipulator bedeutet:

Jede mögliche Momentanbewegung induziert dieselbe Quadratsumme von Winkelgeschwindigkeiten in den passiven Gelenken bei konstanter Quadratsumme der momentanen Längenänderungen der prismatischen Gelenke. Für die sechs Eigenwerte von \mathbf{Z} bezüglich \mathbf{N} gilt somit $\lambda_i = \rho$ mit $\rho \in \mathbb{R}^+$, woraus unmittelbar nach dem Satz von Vieta das charakteristische Polynom $(\rho - \lambda)^6 = 0$ folgt. Wie in Abschnitt 5.3 überlegt, resultieren aus einem Koeffizientenvergleich mit $\det(\mathbf{Z} - \lambda\mathbf{N})$ die fünf Bedingungen aus (5.12), welche zu erfüllen sind um eine Konfiguration mit $CTN(\mathcal{K}) = 1$ zu erlangen.

Aus Gründen der Vollständigkeit sowie als Vorbereitung für die folgenden Abschnitte wollen wir an dieser Stelle eine Vereinbarung bezüglich der Notation der Matrizeneinträge von \mathbf{Z} und \mathbf{N} treffen:

$$\mathbf{Z} := \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{T} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{N} := \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & \mathbf{G} \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

mit \mathbf{R} laut (7.4), \mathbf{S} laut (7.5), \mathbf{T} laut (7.3), \mathbf{E} laut (7.6), \mathbf{F} laut (7.2) und \mathbf{G} laut (7.7).

$$\mathbf{F} = (f_{jk})_{j,k=1}^3 \quad \text{mit} \quad f_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{f_{jk}^i}{(\mathbf{1}_i \mathbf{1}_i)} \quad \text{und} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} f_{11}^i &= (b_{i,3}p_{i,2} - b_{i,2}p_{i,3})(p_{i,1} - b_{i,1}) & f_{12}^i &= (b_{i,3}p_{i,2} - b_{i,2}p_{i,3})(p_{i,2} - b_{i,2}) \\ f_{13}^i &= (b_{i,3}p_{i,2} - b_{i,2}p_{i,3})(p_{i,3} - b_{i,3}) & f_{21}^i &= (b_{i,1}p_{i,3} - b_{i,3}p_{i,1})(p_{i,1} - b_{i,1}) \\ f_{22}^i &= (b_{i,1}p_{i,3} - b_{i,3}p_{i,1})(p_{i,2} - b_{i,2}) & f_{23}^i &= (b_{i,1}p_{i,3} - b_{i,3}p_{i,1})(p_{i,3} - b_{i,3}) \\ f_{31}^i &= (b_{i,2}p_{i,1} - b_{i,1}p_{i,2})(p_{i,1} - b_{i,1}) & f_{32}^i &= (b_{i,2}p_{i,1} - b_{i,1}p_{i,2})(p_{i,2} - b_{i,2}) \\ f_{33}^i &= (b_{i,2}p_{i,1} - b_{i,1}p_{i,2})(p_{i,3} - b_{i,3}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{T} = (t_{jk})_{j,k=1}^3 \quad \text{mit} \quad t_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{t_{jk}^i}{(\mathbf{1}_i \mathbf{1}_i)^2} \quad \text{und} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} t_{11}^i &= 2(p_{i,2} - b_{i,2})^2 + 2(p_{i,3} - b_{i,3})^2 & t_{12}^i &= t_{21}^i = 2(p_{i,1} - b_{i,1})(b_{i,2} - p_{i,2}) \\ t_{22}^i &= 2(p_{i,1} - b_{i,1})^2 + 2(p_{i,3} - b_{i,3})^2 & t_{13}^i &= t_{31}^i = 2(p_{i,1} - b_{i,1})(b_{i,3} - p_{i,3}) \\ t_{33}^i &= 2(p_{i,1} - b_{i,1})^2 + 2(p_{i,2} - b_{i,2})^2 & t_{23}^i &= t_{32}^i = 2(p_{i,2} - b_{i,2})(b_{i,3} - p_{i,3}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{R} = (r_{jk})_{j,k=1}^3 \quad \text{mit} \quad r_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{r_{jk}^i}{(\mathbf{1}_i \mathbf{1}_i)^2} \quad \text{und} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} r_{11}^i &= (b_{i,2}^2 + b_{i,3}^2 + p_{i,2}^2 + p_{i,3}^2)(p_{i,1} - b_{i,1})^2 + (b_{i,2}^2 + b_{i,3}^2)^2 + (p_{i,2}^2 + p_{i,3}^2)^2 \\ &\quad - 2(b_{i,2}p_{i,2} + b_{i,3}p_{i,3}) [(p_{i,2} - b_{i,2})^2 + (p_{i,3} - b_{i,3})^2] \\ r_{22}^i &= (b_{i,1}^2 + b_{i,3}^2 + p_{i,1}^2 + p_{i,3}^2)(p_{i,2} - b_{i,2})^2 + (b_{i,1}^2 + b_{i,3}^2)^2 + (p_{i,1}^2 + p_{i,3}^2)^2 \\ &\quad - 2(b_{i,1}p_{i,1} + b_{i,3}p_{i,3}) [(p_{i,1} - b_{i,1})^2 + (p_{i,3} - b_{i,3})^2] \\ r_{33}^i &= (b_{i,1}^2 + b_{i,2}^2 + p_{i,1}^2 + p_{i,2}^2)(p_{i,3} - b_{i,3})^2 + (b_{i,1}^2 + b_{i,2}^2)^2 + (p_{i,1}^2 + p_{i,2}^2)^2 \\ &\quad - 2(b_{i,1}p_{i,1} + b_{i,2}p_{i,2}) [(p_{i,1} - b_{i,1})^2 + (p_{i,2} - b_{i,2})^2] \\ r_{12}^i &= r_{21}^i = (p_{i,3}^2 - b_{i,3}^2)(b_{i,1}b_{i,2} - p_{i,1}p_{i,2}) + 2b_{i,3}p_{i,3}(p_{i,1} - b_{i,1})(p_{i,2} - b_{i,2}) \\ &\quad - (b_{i,1}b_{i,2} + p_{i,1}p_{i,2}) [(p_{i,1} - b_{i,1})^2 + (p_{i,2} - b_{i,2})^2] \\ r_{13}^i &= r_{31}^i = (p_{i,2}^2 - b_{i,2}^2)(b_{i,1}b_{i,3} - p_{i,1}p_{i,3}) + 2b_{i,2}p_{i,2}(p_{i,1} - b_{i,1})(p_{i,3} - b_{i,3}) \\ &\quad - (b_{i,1}b_{i,3} + p_{i,1}p_{i,3}) [(p_{i,1} - b_{i,1})^2 + (p_{i,3} - b_{i,3})^2] \\ r_{23}^i &= r_{32}^i = (p_{i,1}^2 - b_{i,1}^2)(b_{i,2}b_{i,3} - p_{i,2}p_{i,3}) + 2b_{i,1}p_{i,1}(p_{i,2} - b_{i,2})(p_{i,3} - b_{i,3}) \\ &\quad - (b_{i,2}b_{i,3} + p_{i,2}p_{i,3}) [(p_{i,2} - b_{i,2})^2 + (p_{i,3} - b_{i,3})^2] \end{aligned}$$

$$\mathbf{S} = (s_{jk})_{j,k=1}^3 \quad \text{mit} \quad s_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{s_{jk}^i}{(\mathbf{1}_i \mathbf{1}_i)^2} \quad \text{und} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} s_{12}^i &= +(b_{i,2}^2 - p_{i,2}^2)(p_{i,3} - b_{i,3}) - (b_{i,3} + p_{i,3}) [(p_{i,1} - b_{i,1})^2 + (p_{i,3} - b_{i,3})^2] \\ s_{13}^i &= -(b_{i,3}^2 - p_{i,3}^2)(p_{i,2} - b_{i,2}) + (b_{i,2} + p_{i,2}) [(p_{i,2} - b_{i,2})^2 + (p_{i,1} - b_{i,1})^2] \\ s_{21}^i &= +(b_{i,1}^2 - p_{i,1}^2)(p_{i,3} - b_{i,3}) + (b_{i,3} + p_{i,3}) [(p_{i,3} - b_{i,3})^2 + (p_{i,2} - b_{i,2})^2] \\ s_{23}^i &= -(b_{i,3}^2 - p_{i,3}^2)(p_{i,1} - b_{i,1}) - (b_{i,1} + p_{i,1}) [(p_{i,2} - b_{i,2})^2 + (p_{i,1} - b_{i,1})^2] \\ s_{31}^i &= -(b_{i,1}^2 - p_{i,1}^2)(p_{i,2} - b_{i,2}) - (b_{i,2} + p_{i,2}) [(p_{i,3} - b_{i,3})^2 + (p_{i,2} - b_{i,2})^2] \\ s_{32}^i &= +(b_{i,2}^2 - p_{i,2}^2)(p_{i,1} - b_{i,1}) + (b_{i,1} + p_{i,1}) [(p_{i,1} - b_{i,1})^2 + (p_{i,3} - b_{i,3})^2] \\ s_{11}^i &= 2(p_{i,1} - b_{i,1})(b_{i,3}p_{i,2} - b_{i,2}p_{i,3}) \\ s_{22}^i &= 2(p_{i,2} - b_{i,2})(b_{i,1}p_{i,3} - b_{i,3}p_{i,1}) \\ s_{33}^i &= 2(p_{i,3} - b_{i,3})(b_{i,2}p_{i,1} - b_{i,1}p_{i,2}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = (e_{jk})_{j,k=1}^3 \quad \text{mit} \quad e_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{e_{jk}^i}{(\mathbf{1}_i \mathbf{1}_i)} \quad \text{und} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} e_{11}^i &= (b_{i,3}p_{i,2} - b_{i,2}p_{i,3})^2 & e_{12}^i &= e_{21}^i = (b_{i,3}p_{i,2} - b_{i,2}p_{i,3})(b_{i,1}p_{i,3} - b_{i,3}p_{i,1}) \\ e_{22}^i &= (b_{i,1}p_{i,3} - b_{i,3}p_{i,1})^2 & e_{13}^i &= e_{31}^i = (b_{i,3}p_{i,2} - b_{i,2}p_{i,3})(b_{i,2}p_{i,1} - b_{i,1}p_{i,2}) \\ e_{33}^i &= (b_{i,2}p_{i,1} - b_{i,1}p_{i,2})^2 & e_{23}^i &= e_{32}^i = (b_{i,1}p_{i,3} - b_{i,3}p_{i,1})(b_{i,2}p_{i,1} - b_{i,1}p_{i,2}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{G} = (g_{jk})_{j,k=1}^3 \quad \text{mit} \quad g_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{g_{jk}^i}{(\mathbf{1}_i \mathbf{1}_i)} \quad \text{und} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} g_{11}^i &= (p_{i,1} - b_{i,1})^2 & g_{12}^i &= g_{21}^i = (p_{i,1} - b_{i,1})(p_{i,2} - b_{i,2}) \\ g_{22}^i &= (p_{i,2} - b_{i,2})^2 & g_{13}^i &= g_{31}^i = (p_{i,1} - b_{i,1})(p_{i,3} - b_{i,3}) \\ g_{33}^i &= (p_{i,3} - b_{i,3})^2 & g_{23}^i &= g_{32}^i = (p_{i,2} - b_{i,2})(p_{i,3} - b_{i,3}) \end{aligned}$$

Bevor wir die Berechnung der optimalen Konfigurationen von Stewart Gough Plattformen im Sinne der *Control Number* in Angriff nehmen, wollen wir jedoch diesen Sachverhalt für ebene 3-dof RPR Manipulatoren klären. Dabei wird auch erläutert, wie die *Control Number* für diese Mechanismen zu adaptieren ist.

7.2 3-dof RPR Manipulatoren

Die n -beinigen 3-dof RPR Manipulatoren bestehen aus einer Plattform, welche an n Punkten über Dreh-Schub-Dreh-Gelenke mit der Basis verbunden sind, wobei $n > 2$ gilt. Wir können diesen ebenen Manipulator mit drei Freiheitsgraden als Spezialfall der räumlichen Version ansehen. Wir setzen $b_{i,3} = p_{i,3} = 0$ für $i = 1, \dots, n$. Da nur mehr Schiebungen in der Ebene sowie Drehungen um Achsen normal auf diese möglich sind, setzen wir $q_1 = q_2 = \hat{q}_3 = 0$. Wir erhalten somit die 3×3 Matrizen

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} r_{33} & s_{31} & s_{32} \\ s_{31} & t_{11} & t_{12} \\ s_{32} & t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} e_{33} & f_{31} & f_{32} \\ f_{31} & g_{11} & g_{12} \\ f_{32} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

mit den Matrizeneinträgen von \mathbf{Z} und \mathbf{N} laut (7.4), (7.5), (7.3), (7.6), (7.2) und (7.7).

Definition 7.1. Die Control Number einer n -beinigen 3-dof RPR Manipulator Konfiguration mit $n > 2$ ist definiert als

$$CTN(\mathcal{K}) := +\sqrt{\lambda_-/\lambda_+} \quad \text{mit} \quad CTN(\mathcal{K}) \in [0, 1], \quad (7.9)$$

wobei λ_- bzw. λ_+ der kleinste bzw. größte allgemeine Eigenwert der Matrix \mathbf{Z} aus (7.8) bezüglich \mathbf{N} aus (7.8) ist.

Wir wollen in Hinblick auf das nächste Kapitel die optimalen Konfigurationen von ganz speziellen Konfigurationsmengen $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^n$ von n -beinigen 3-dof RPR Manipulatoren berechnen.

Definition 7.2. Die Konfigurationsmenge $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^n$ ist, wie folgt, definiert: Die Mengen \mathcal{M}_1^n und \mathcal{M}_2^n mit

$$\mathcal{M}_1^n = \{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n\}, \quad \mathcal{M}_2^n = \{l_1, \dots, l_n\} \quad \text{und} \quad n > 2$$

sind abgeschlossen gegenüber Drehungen von $\frac{2\pi}{n}$ um einen gemeinsamen Punkt \mathbf{S} .

Aus Def. 7.2 folgt unmittelbar, dass für alle Konfigurationen $\mathcal{K} \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^n$ die Beine gleiche Länge haben, also $\|\mathbf{l}_1\| = \|\mathbf{l}_i\|$ mit $i = 2, \dots, n$ gilt. Wenn wir den Faktor der Ähnlichkeit eliminieren, so können wir $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^n$ mit Hilfe des Winkels Φ und der Beinlänge r , wie folgt, parametrisieren:

$$\mathbf{y}_i = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} \cos\left(\frac{2(i-1)}{n}\pi\right), \frac{2}{3}\sqrt{3} \sin\left(\frac{2(i-1)}{n}\pi\right) \right) \quad (7.10)$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i + \left(r \cos\left(\Phi + \frac{2(i-1)}{n}\pi\right), r \sin\left(\Phi + \frac{2(i-1)}{n}\pi\right) \right) \quad (7.11)$$

$$\text{mit } \mathbf{b}_i, \mathbf{p}_i \in \{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_i \neq \mathbf{p}_i \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.12)$$

Setzt man nun die Koordinaten in die zuvor angegebenen Formeln ein, so zeigt sich folgendes:

$$t_{11} = t_{22}, \quad g_{11} = g_{22} \quad \text{und} \quad s_{3j} = f_{3j} = t_{12} = g_{12} = 0 \quad \text{für} \quad j \in \{1, 2\}.$$

Wenn man außerdem \mathbf{Z} und \mathbf{N} mit n^{-1} multipliziert, so kürzt sich n heraus und die beiden Matrizen sind unabhängig von dieser Variable. Da es sich auf Grund der Parametrisierung bei \mathbf{Z} und \mathbf{N} aus (7.8) bereits um Diagonalmatrizen handelt, müssen die zwei verbleibenden Unbekannten Φ und r nur noch der folgenden Bedingung gerecht werden, damit die drei Eigenwerte des charakteristischen Polynoms $\det(\mathbf{Z} - \lambda\mathbf{N}) = 0$ ident sind:

$$\frac{r_{33}}{e_{33}} - \frac{t_{11}}{g_{11}} = \frac{16 \cos(\Phi)^2 + 3r^2 + 4\sqrt{3}r \cos(\Phi) - 8}{16 \sin(\Phi)^2} = 0.$$

Lösen wir diese Gleichung nun nach Φ auf, so erhalten wir die einparametrische Lösungsmenge \mathfrak{c} , welche in zwei Zweige $\mathfrak{c}(\Phi_1)$ und $\mathfrak{c}(\Phi_2)$ zerfällt:

$$\begin{aligned} \Phi^- &= \operatorname{sgn}(r) \cdot \arccos\left(\frac{|r|\sqrt{3} - \sqrt{32 - 9r^2}}{-8}\right) \\ \Phi^+ &= \operatorname{sgn}(r) \cdot \arccos\left(\frac{|r|\sqrt{3} + \sqrt{32 - 9r^2}}{-8}\right). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Damit wir für Φ^\pm stets reelle Werte erhalten, muss r die Bedingung

$$r \in \left[-\frac{4}{3}\sqrt{2}, \frac{4}{3}\sqrt{2}\right] \setminus \{0\} \quad (7.14)$$

erfüllen, welche sich aus $32 - 9r^2 \geq 0$ und $r \neq 0$ ergibt. Die Bedingung $r \neq 0$ schließt jenen Fall aus, in dem alle Plattform- und Basisankerpunkte zusammenfallen. Wir wollen die gesammelten Ergebnisse in dem nächsten Satz zusammenfassen:

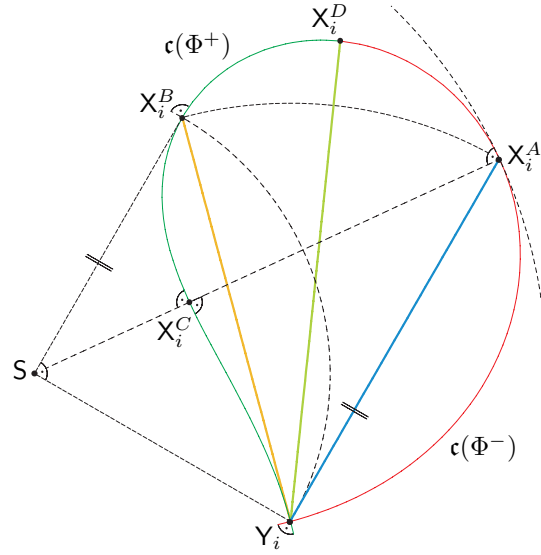
Satz 7.1. *Alle Konfigurationen \mathcal{K} der Parametrisierung von $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^n$ in (7.10) – (7.12) mit $n > 2$, Φ gemäß (7.13) und r gemäß (7.14) haben eine maximale Control Number. Unterwirft man diese Konfigurationen den zentrischen Streckungen aus S , so erhält man bis auf gleichsinnige Euklidische Bewegungen alle Konfigurationen $\mathcal{K} \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^n$ mit $CTN(\mathcal{K}) = 1$.*

Geometrie der Lösungskurve \mathfrak{c}

Bevor wir auf die geometrischen Eigenschaften der Lösungskurve \mathfrak{c} eingehen, müssen wir noch eine Vereinbarung bezüglich der Notation der Punkte $\in \mathfrak{c}$ treffen:

Die n Ankerpunkte \mathbf{X}_i mit Koordinaten \mathbf{x}_i des j -ten Lösungszweiges werden mit $\mathfrak{c}(\Phi^j, r)$ für $j = +, -$ angegeben. Wir wollen neben dem Ankerpunkt \mathbf{Y}_i mit Koordinaten \mathbf{y}_i noch die folgenden vier Punkte $\mathbf{X}_i^A := \mathfrak{c}(\Phi^-, \frac{2}{3}\sqrt{6})$, $\mathbf{X}_i^B := \mathfrak{c}(\Phi^+, \frac{2}{3}\sqrt{6})$, $\mathbf{X}_i^C := \mathfrak{c}(\Phi^+, \frac{2}{3}\sqrt{2})$ und $\mathbf{X}_i^D := \mathfrak{c}(\Phi^\pm, \frac{4}{3}\sqrt{2})$ betrachten, welche in *Abbildung 7.1* eingezeichnet sind. In derselben Abbildung ist die Lösungskurve \mathfrak{c} für $r \in]0, \frac{4}{3}\sqrt{2}]$ dargestellt. Der zweite Teil liegt auf Grund von (7.13) spiegelsymmetrisch bezüglich $S\mathbf{Y}_i$. Diese angegebenen fünf Punkte \mathbf{Y}_i , \mathbf{X}_i^A , \mathbf{X}_i^B , \mathbf{X}_i^C und \mathbf{X}_i^D , sowie der Punkt S aus Def. 7.2 stehen, wie folgt, miteinander in Beziehung:

1. $\overline{SY_i} = \overline{SX_i^B}$
2. $\overline{Y_iX_i^A} = \overline{Y_iX_i^B}$
3. $Y_iX_i^B$ ist Tangente an $c(\Phi^+)$ in Y_i
4. $SY_i \perp SX_i^B$
5. $\sphericalangle(X_i^A, Y_i, X_i^B) = \pi/4$
6. SX_i^B ist Tangente an $c(\Phi^+)$ in X_i^B
7. $SX_i^A \perp$ Tangente an $c(\Phi^-)$ in X_i^A
8. $SX_i^C \perp$ Tangente an $c(\Phi^+)$ in X_i^C
9. c schneidet sich in Y_i orthogonal
10. $Y_iX_i^C$ ist Tangente an $c(\Phi^+)$ in X_i^C
11. S_i, X_i^C und X_i^A liegen kollinear.


 Abbildung 7.1: Die Lösungskurve c

Bemerkung: Es würde genügen all jene Konfigurationen zu betrachten, die durch die folgende Bedingung gegeben sind:

$$\Phi^- : r^- \in \left[-\frac{4}{3}\sqrt{2}, \frac{4}{3}\sqrt{2} \right] \setminus \{0\} \quad \Phi^+ : r^+ \in \left[-\frac{4}{3}\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{6} \right] \cup \left[\frac{2}{3}\sqrt{6}, \frac{4}{3}\sqrt{2} \right]. \quad (7.15)$$

Die Konfigurationen, die gegenüber (7.14) ausgeschlossen wurden, gehen aus denen in (7.15) durch Ähnlichkeitstransformationen hervor. Zum Beispiel ist die Konfiguration $\{Y_i, X_i^C\}$ ungleichsinnig ähnlich zu $\{Y_i, X_i^A\}$.

7.2.1 Optimale Konfigurationen von $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^3$

Die aus (7.12) resultierenden 8 kombinatorischen Möglichkeiten für $n = 3$ können auf Grund der Drehsymmetrie der Konfigurationen von $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^3$ bezüglich S auf die folgenden 4 Fälle reduziert werden:

| | | | |
|----|-------------|-------------|---------------|
| a) | $B_i = X_i$ | $P_i = Y_i$ | $i = 1, 2, 3$ |
| b) | $B_i = Y_i$ | $P_i = X_i$ | $i = 1, 2, 3$ |
| c) | $B_1 = X_1$ | $B_2 = X_2$ | $B_3 = Y_3$ |
| | $P_1 = Y_1$ | $P_2 = Y_2$ | $P_3 = X_3$ |
| d) | $B_1 = Y_1$ | $B_2 = Y_2$ | $B_3 = X_3$ |
| | $P_1 = X_1$ | $P_2 = X_2$ | $P_3 = Y_3$ |

Da durch Vertauschen von Plattform und Basis **a)** in **b)** sowie **c)** in **d)** übergeht und umgekehrt, können im Wesentlichen zwei Typen von Manipulatoren unterschieden werden. Fall **a)** und **b)** gehören zum symmetrische Typ und Fall **c)** und **d)** zum asymmetrischen.

Infolge wurden jeweils die Konfigurationen mit den Ankerpunkten $\{Y_i, X_i^A\}$ und $\{Y_i, X_i^B\}$ dargestellt, wobei in *Abbildung 7.2* die Plattform und Basispunkte gemäß Fall **a)** verteilt wurden und in *Abbildung 7.3* gemäß Fall **c)**. Da in der Praxis zumeist symmetrische RPR Manipulatoren zum Einsatz kommen, wollen wir diesen Typ genauer betrachten.

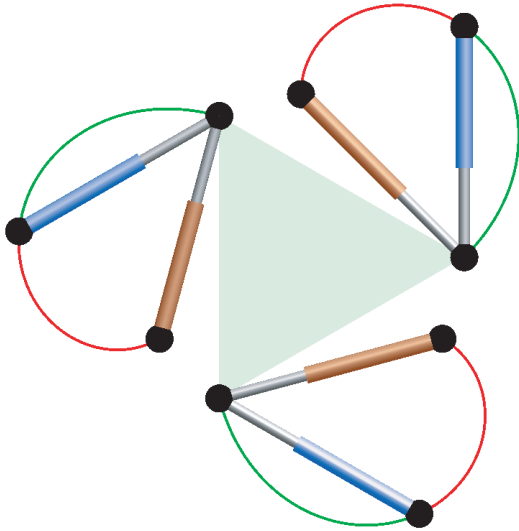


Abbildung 7.2: Symmetrischer Typ

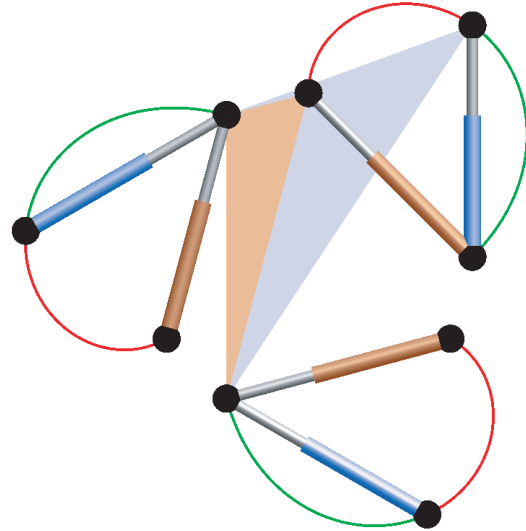


Abbildung 7.3: Asymmetrischer Typ

Animation: Symmetrischer Typ

Die aus **a)** in **b)** resultierenden Manipulatoren sind der Inhalt jener Animation, welche auf einer CD unter dem Dateinamen „ANIMATION-RPR“ gespeichert, dieser Arbeit beiliegt. Die Animation wurde mit Hilfe des Programmes *Open Geometry* [11, 12] erstellt.

Über der xy -Ebene wurde als z -Koordinate der Drehwinkel um den Plattformschwerpunkt S aufgetragen. Die einparametrische Konfigurationsmenge von symmetrischen Manipulatoren wurde anders als in Satz 7.1 parametrisiert. Bei der für die Animation verwendeten Parametrisierung existieren ebenfalls zwei Zweige, welche in *Abbildung 7.4* rot bzw. grün eingezeichnet sind. Der Zweigwechsel erfolgt über das Anklicken des Buttons „Zweigwechsel“ in der rechten Leiste namens „Adjustments“. In derselben Leiste findet sich der Regler namens „Radius r “, über welchen sich der Parameter r der einparametrischen Konfigurationsmenge steuern lässt. r gibt den Abstand des Basisankerpunktes vom Plattformschwerpunkt S in der Ausgangslage an und kann Werte zwischen $\frac{2}{3}$ und 2 annehmen. Bei einer Veränderung von r ändert sich auch automatisch die Singularitätsmannigfaltigkeit mit, welche in *Abbildung 7.4* orange dargestellt wurde. Es existieren Orientierungen der Plattform, in denen der Manipulator unabhängig von der gewählten x und y Translation singularär ist. Diese Orientierungen korrespondieren mit den orange eingezeichneten Kreisscheiben in *Abbildung 7.4*.

Über die Tasten U/u bzw. O/o kann die minimal bzw. maximal mögliche Länge der Beine vergrößert bzw. verkleinert werden. Der aktuelle Wert ist unten rechts eingeblendet. Eine Veränderung dieser beiden Parameter hat Einfluss auf den *Constant Orientation Workspace*, welcher bezüglich des Plattformschwerpunktes S in *Abbildung 7.4* grün eingezeichnet wurde.

Mit Hilfe der restlichen Regler in „Adjustments“ kann die *x*-Translation, die *y*-Translation sowie die Rotation der Plattform um den Plattformschwerpunkt S gesteuert werden. Dies kann zusätzlich über die Zuhilfenahme der Maus geschehen. Wenn man die linke Maustaste gedrückt hält, dann kann die Plattform mit Hilfe der Maus verschoben werden und wenn man die rechte Maustaste gedrückt hält, dann kann der Drehwinkel um den Plattformschwerpunkt gesteuert werden. Auch beides gleichzeitig ist möglich.

Mit Hilfe dieser Animation kann man recht einfach testen welcher 3-dof RPR Manipulator mit maximaler *Control Number* den für eine bestimmte Tätigkeit benötigten Arbeitsbereich besitzt.

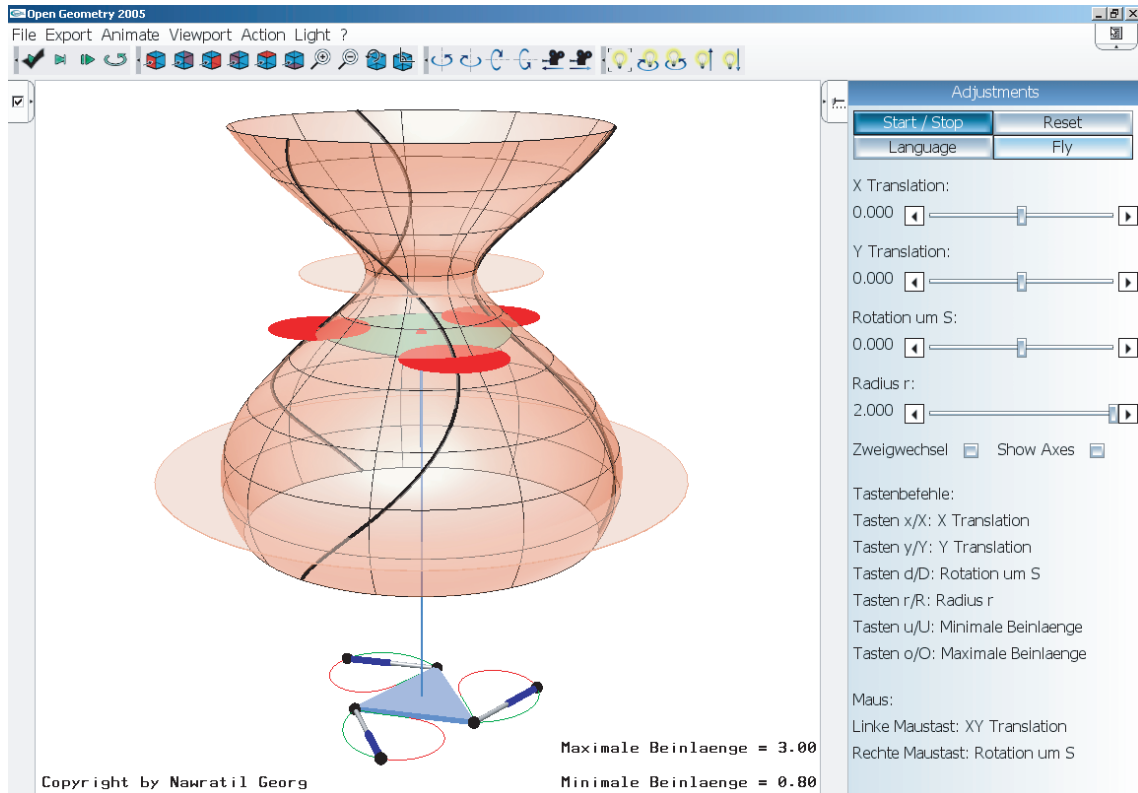


Abbildung 7.4: Screenshot der Arbeitsoberfläche von „ANIMATION-RPR“

7.3 Stewart Gough Plattformen

Wir wollen uns bei der Berechnung von optimalen Konfigurationen im Sinne der *Control Number* wieder auf jene von speziellen Konfigurationsmengen $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}^g$ beschränken:

Definition 7.3. Die Konfigurationsmenge $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}^g$ ist, wie folgt, definiert: Die Mengen \mathcal{S}_1^g , \mathcal{S}_2^g und \mathcal{S}_3^g mit

$$\mathcal{S}_1^g = \{B_1, \dots, B_g, P_1, \dots, P_g\}, \quad \mathcal{S}_2^g = \{B_{g+1}, \dots, B_n, P_{g+1}, \dots, P_n\}, \quad \mathcal{S}_3^g = \{l_1, \dots, l_n\} \quad \text{und}$$

$n = 2g$ sind abgeschlossen gegenüber Drehungen von $\frac{2\pi}{g}$ um eine gemeinsame Achse \mathbf{s} .

Aus der Def. 7.3 folgt unmittelbar, dass zwei Gruppen von Beinen existieren, die jeweils gleiche Länge haben, also $\|\mathbf{l}_1\| = \|\mathbf{l}_i\|$ mit $i = 2, \dots, g$ und $\|\mathbf{l}_{g+1}\| = \|\mathbf{l}_j\|$ mit $j = g + 2, \dots, n$. Wenn wir o.B.d.A. die z-Achse als gemeinsame Achse \mathbf{s} wählen, dann können wir die Konfigurationsmenge $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}^g$, wie folgt, parametrisieren:

$$\mathbf{y}_i = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} \cos\left(\frac{2(i-1)}{g}\pi\right), \frac{2}{3}\sqrt{3} \sin\left(\frac{2(i-1)}{g}\pi\right), a_1 \right) \quad (7.16)$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i + \left(r_1 \cos\left(\Phi_1 + \frac{2(i-1)}{g}\pi\right), r_1 \sin\left(\Phi_1 + \frac{2(i-1)}{g}\pi\right), b_1 \right) \quad (7.17)$$

$$\text{mit } \mathbf{b}_i, \mathbf{p}_i \in \{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_i \neq \mathbf{p}_i \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, g \quad \text{und} \quad (7.18)$$

$$\mathbf{y}_j = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}F \cos\left(\mu + \frac{2(i-1)}{g}\pi\right), \frac{2}{3}\sqrt{3}F \sin\left(\mu + \frac{2(i-1)}{g}\pi\right), a_2 \right) \quad (7.19)$$

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{y}_j + \left(r_2 \cos\left(\Phi_2 + \frac{2(i-1)}{g}\pi\right), r_2 \sin\left(\Phi_2 + \frac{2(i-1)}{g}\pi\right), b_2 \right) \quad (7.20)$$

$$\text{mit } \mathbf{b}_j, \mathbf{p}_j \in \{\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j\} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_j \neq \mathbf{p}_j \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, g \quad j = g + i \quad (7.21)$$

Es handelt sich hierbei nach Elimination des Faktors der Ähnlichkeit um eine elfparametrische Menge. Setzen wir nun diese Koordinaten in die Matrizen \mathbf{Z} und \mathbf{N} ein und vereinfachen diese, so zeigt sich einerseits, dass beide Matrizen unabhängig von μ sind, und andererseits, dass folgende Beziehungen gelten:

$$r_{12} = r_{13} = r_{23} = s_{13} = s_{23} = s_{31} = s_{32} = t_{12} = t_{13} = t_{23} = 0 \quad (7.22)$$

$$e_{12} = e_{13} = e_{23} = f_{13} = f_{23} = f_{31} = f_{32} = g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0 \quad (7.23)$$

$$2s_{11} = 2s_{22} = -s_{33}, \quad s_{12} = -s_{21}, \quad r_{11} = r_{22}, \quad t_{11} = t_{22} \quad (7.24)$$

$$2f_{11} = 2f_{22} = -f_{33}, \quad f_{12} = -f_{21}, \quad e_{11} = e_{22}, \quad g_{11} = g_{22} \quad (7.25)$$

Es sei noch bemerkt, dass die Nenner $D_{\mathbf{Z}}$ bzw. $D_{\mathbf{N}}$ der Matrizeneinträge von \mathbf{Z} bzw. \mathbf{N} mit

$$D_{\mathbf{N}} = ((a_1 - b_1)^2 + r_1^2)((a_2 - b_2)^2 + r_2^2) \quad \text{und} \quad D_{\mathbf{Z}} = D_{\mathbf{N}}^2 \quad (7.26)$$

genau dann und nur dann verschwinden, wenn entweder die Beine l_1, \dots, l_g oder l_{g+1}, \dots, l_n oder alle n Beine Null Länge haben. Jedoch seien diese Fälle stets ausgeschlossen. Wenn wir nun das charakteristische Polynom $\det(\mathbf{Z} - \lambda \mathbf{N})$ berechnen, so zerfällt dieses wiederum in $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_2^2$ mit:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= \lambda^2(f_{11}^2 - e_{33}g_{33}) + \lambda(r_{33}g_{33} + e_{33}t_{33} - 2s_{11}f_{11}) + s_{11}^2 - r_{33}t_{33} \\ \mathcal{H}_2 &= \lambda^2(4f_{11}^2 + f_{12}^2 - e_{11}g_{11}) + \lambda(e_{11}t_{11} - 8s_{11}f_{11} + r_{11}g_{11} - 2s_{12}f_{12}) - r_{11}t_{11} + 4s_{11}^2 + s_{12}^2\end{aligned}$$

Somit müssen wiederum nur drei Bedingungen erfüllt werden, um eine Konfiguration mit maximaler *Control Number* zu berechnen, nämlich, dass \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 eine Doppellösung haben und dass diese ident sind. Jedoch ist es in diesem Fall auf Grund der Grade und Dimensionen dieser drei Bedingungen völlig sinnlos eine solche allgemeine Berechnung vorzunehmen. Wir wollen deshalb analog zu Abschnitt 5.3 vorgehen.

Wir wollen wiederum jene Konfigurationen mit optimalen *Control Number* berechnen, welche aus der Bedingung hervorgehen, daß \mathbf{Z} und \mathbf{N} zueinander ähnliche Diagonalmatrizen sind. Da man aus jedem Matrizeneintrag von \mathbf{Z} und \mathbf{N} die Unbekannte g herausheben kann, wollen wir folgende Vereinbarung treffen:

$$\mathbf{Z} := \mathbf{Z} \cdot D_{\mathbf{Z}} \cdot g^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{N} := \mathbf{N} \cdot D_{\mathbf{N}} \cdot g^{-1}.$$

Die neudefinierten Matrizen sind somit unabhängig von g . Die verbleibenden 9 Unbekannten müssen die folgenden 7 Gleichungen erfüllen, damit \mathbf{Z} und \mathbf{N} zueinander ähnliche Diagonalmatrizen sind:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 : f_{11} &= 0, & \mathcal{P}_2 : f_{12} &= 0, \\ \mathcal{P}_3 : s_{11} &= 0, & \mathcal{P}_4 : s_{12} &= 0, \\ \mathcal{P}_5 : (g_{11} \cdot t_{33} - g_{33} \cdot t_{11}) \cdot D_{\mathbf{N}}^{-1} &= 0, & (7.27) \\ \mathcal{P}_6 : (e_{11} \cdot t_{33} - g_{33} \cdot r_{11}) \cdot D_{\mathbf{N}}^{-1} &= 0, \\ \mathcal{P}_7 : (e_{33} \cdot t_{33} - g_{33} \cdot r_{33}) \cdot D_{\mathbf{N}}^{-1} &= 0.\end{aligned}$$

Das Polynom \mathcal{P}_5 wurde deshalb so angeschrieben, da sich bei der Berechnung von $g_{11} \cdot t_{33} - g_{33} \cdot t_{11}$ der Faktor $D_{\mathbf{N}}$ abspaltet. Analoges gilt für die Polynome \mathcal{P}_6 und \mathcal{P}_7 . Als Vorbereitungsarbeit für den Eliminationsprozess wollen wir noch die trivialen Singularitäten der Konfigurationsmenge ausfindig machen. Eine durch (7.16)–(7.21) parametrisierte Konfiguration \mathcal{K} , welche diesen sieben Bedingungen genügt ist somit genau dann singulär, wenn

$$e_{11} \cdot e_{33} \cdot g_{11} \cdot g_{33} = 0 \quad (7.28)$$

gilt. Die singulären Konfigurationen von $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}^g$ sind auch der Inhalt des nächsten Satzes:

Satz 7.2. *Die n Beine befinden sich in einer singulären Konfiguration, wenn*

$$a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \quad \vee \quad \sin(\Phi_1) = 0 \wedge \sin(\Phi_2) = 0 \quad \vee \quad \sin(\Phi_1) = 0 \wedge F = 0 \quad (7.29)$$

gilt. Weitere Singularitäten sind charakterisiert durch:

$$a_1 = b_1 \wedge \sin(\Phi_1) = 0 \quad \vee \quad a_2 = b_2 \wedge \sin(\Phi_2) = 0 \quad \vee \quad a_2 = b_2 \wedge F = 0. \quad (7.30)$$

Beweis: Ist die erste Bedingung von (7.29) erfüllt, so liegen die beiden Gruppen von Geraden jeweils in einem Ebenenfeld. Diese beiden Ebenenfelder haben ein gemeinsames Element, nämlich die Ferngerade. Somit schneiden alle Trägergeraden diese Ferngerade, wodurch ein singulärer linearer Komplex vorliegt. In den anderen beiden Fällen von (7.29) schneiden die Trägergeraden der Beine stets die z-Achse. In den drei Fällen von (7.30) liegen die Trägergeraden der Beine einer Gruppe stets in einem Geradenbüschel. Da die andere Gruppe maximal einen Regulus aufspannen kann, liegt eine Singularität vor. \square

Neben den in Satz 7.2 angeführten trivialen Singularitäten existieren noch die folgenden

$$r_1 = 0 \wedge r_2 = 0, \quad r_2 = 0 \wedge \sin(\Phi_1) = 0 \quad (7.31)$$

$$r_1 = 0 \wedge F = 0, \quad r_1 = 0 \wedge \sin(\Phi_2) = 0. \quad (7.32)$$

Im ersten Fall von (7.31) liegen die Trägergeraden der Beine in einem Geradenbüschel. Im zweiten Fall von (7.31) sowie in den beiden Fällen von (7.32) schneiden die Trägergeraden der Beine wiederum stets die z-Achse; liegen also in einem singulären linearen Komplex. Auf diese vier Fälle (7.31) und (7.32) muss aber im Eliminationsprozess keine Rücksicht genommen werden, da die Aussage des nächsten Satzes um einiges stärker ist.

Satz 7.3. *Wir können stets $r_1 \neq 0$ und $r_2 \neq 0$ voraussetzen, da $r_1 = 0$ bzw. $r_2 = 0$ unter den sieben Bedingungen aus (7.27) stets eine singuläre Konfiguration der durch (7.16) – (7.21) parametrisierten Konfigurationsmenge \mathcal{S}_K^g nach sich zieht.*

Beweis: Angenommen $r_i = 0$ für $i, j \in \{1, 2\}$ und $i \neq j$: Dann gilt:

$$r_1 = 0 \implies \mathcal{P}_1 : Fr_2 \sin(\Phi_2)(a_1 - b_1)^2(a_2 - b_2) = 0$$

$$r_2 = 0 \implies \mathcal{P}_1 : r_1 \sin(\Phi_1)(a_2 - b_2)^2(a_1 - b_1) = 0.$$

Damit \mathcal{P}_1 erfüllt ist, aber andererseits keine triviale Singularität vorliegt, muss $a_j = b_j$ gelten:

$$a_j = b_j \implies \mathcal{P}_2 : -3r_j^2 b_j (a_i - b_i)^2 = 0.$$

Da $r_j = 0$ bzw. $a_i = b_i$ bereits triviale Singularitäten zur Folge haben, kann nur noch $b_j = 0$ sein:

$$b_j = 0 \implies \mathcal{P}_4 : -6r_j^4 (a_i + b_i)(a_i - b_i)^2 = 0.$$

Hier gilt nun dasselbe wie zuvor, woraus $a_i = -b_i$ folgt:

$$a_i = -b_i \implies \mathcal{P}_5 : -4b_i^2 r_j^4.$$

Dieses Polynom kann somit nur noch erfüllt werden, wenn $r_j = 0$ oder $b_i = 0$ gilt, was aber jeweils eine triviale Singularität darstellt. \square

Mit Hilfe der letzten beiden Sätze können wir nun die Berechnung in Angriff nehmen. Wir betrachten zunächst das Polynom \mathcal{P}_1 , welches folgende Gestalt hat:

$$Fr_2 \sin(\Phi_2)((a_1 - b_1)^2 + r_1^2)(a_2 - b_2) - r_1 \sin(\Phi_1)((a_2 - b_2)^2 + r_2^2)(a_1 - b_1) = 0. \quad (7.33)$$

Infolge müssen zwei Fälle unterschieden werden, nämlich der Hauptfall (7.3.1) und der Sonderfall (7.3.2). Wir wollen mit dem allgemeinen Fall beginnen.

7.3.1 Hauptfall

Dieser Fall ist durch die Voraussetzungen

$$r_1 \neq 0, \quad r_2 \neq 0, \quad a_1 \neq b_1, \quad a_2 \neq b_2, \quad \sin(\Phi_1) \neq 0, \quad \sin(\Phi_2) \neq 0 \quad (7.34)$$

charakterisiert, welche garantieren, dass $F \neq 0$ ist und F , wie folgt, aus \mathcal{P}_1 berechnet werden kann:

$$F = -\frac{r_1 \sin(\Phi_1)((a_2 - b_2)^2 + r_2^2)(a_1 - b_1)}{r_2 \sin(\Phi_2)((a_1 - b_1)^2 + r_1^2)(a_2 - b_2)}. \quad (7.35)$$

Wenn wir nun F in \mathcal{P}_3 einsetzen, so vereinfacht sich dieses zu

$$\mathcal{P}_3 : \quad r_1 \sin(\Phi_1)((a_2 - b_2)^2 + r_2^2)(a_1 - b_1) \cdot \mathcal{F}_1 = 0 \quad \text{mit} \quad (7.36)$$

$$\mathcal{F}_1 := (a_1 - b_1)^2 + r_1^2 - (a_2 - b_2)^2 - r_2^2. \quad (7.37)$$

Auf Grund der Voraussetzungen (7.34) kann \mathcal{P}_1 nur dann erfüllt werden, wenn der Faktor \mathcal{F}_1 aus (7.37) verschwindet. Die Erfüllung von \mathcal{F}_1 gleicht der Bedingung, dass die Beine beider Guppen gleiche Länge haben, also $\|\mathbf{l}_1\| = \|\mathbf{l}_i\|$ mit $i = 2, \dots, n$ gilt. Wenn wir uns nun a_2, b_2, r_2, Φ_2 aus den Polynomen $\mathcal{F}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5$ berechnen, so erhalten wir die folgende Lösung, welche in vier Zweige zerfällt:

$$\Phi_2 = \arctan \left(\frac{2\sqrt{3} \sin(\Phi_1) r_1 (a_1 - b_1)}{r_1 (r_1 (2a_1 - b_2 - b_1) + 2\sqrt{3} \cos(\Phi_1) (a_1 - b_1)) - 4(a_1 - b_1)^2 (a_1 + b_2 + b_1)} \right) \quad (7.38)$$

mit

Zweig 1:

$$a_2 = \frac{3(a_1 + b_1) + \sqrt{U}}{-6} \quad b_2 = \frac{3(a_1 + b_1) - \sqrt{U}}{-6} \quad r_2 = +\sqrt{\frac{4(a_1 - b_1)^2 + r_1^2}{3}} \quad (7.39)$$

Zweig 2:

$$a_2 = \frac{3(a_1 + b_1) + \sqrt{U}}{-6} \quad b_2 = \frac{3(a_1 + b_1) - \sqrt{U}}{-6} \quad r_2 = -\sqrt{\frac{4(a_1 - b_1)^2 + r_1^2}{3}} \quad (7.40)$$

Zweig 3:

$$a_2 = \frac{3(a_1 + b_1) - \sqrt{U}}{-6} \quad b_2 = \frac{3(a_1 + b_1) + \sqrt{U}}{-6} \quad r_2 = +\sqrt{\frac{4(a_1 - b_1)^2 + r_1^2}{3}} \quad (7.41)$$

Zweig 4:

$$a_2 = \frac{3(a_1 + b_1) - \sqrt{U}}{-6} \quad b_2 = \frac{3(a_1 + b_1) + \sqrt{U}}{-6} \quad r_2 = -\sqrt{\frac{4(a_1 - b_1)^2 + r_1^2}{3}} \quad (7.42)$$

und

$$U := 6r_1^2 - 3(a_1 - b_1)^2.$$

Der einzige Unterschied zwischen den Lösungszweigen 1, 2 und 3, 4 ist, dass a_2 und b_2 die Rollen tauschen. Damit $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ und $a_2 \neq b_2$ gewährleistet ist, muss $U > 0$ gelten, also

$$2r_1^2 - (a_1 - b_1)^2 > 0. \quad (7.43)$$

Unabhängig davon, welche der vier Lösungen wir infolge in die verbleibenden Polynome \mathcal{P}_6 und \mathcal{P}_7 einsetzen, erhalten wir:

$$\mathcal{P}_6 : \frac{((a_1 - b_1)^2 + r_1^2)^3}{3(4(a_1 - b_1)^2 + r_1^2)(2r_1^2 - (a_1 - b_1)^2)} \cdot \mathcal{F}_2 = 0 \quad (7.44)$$

$$\mathcal{P}_7 : \frac{((a_1 - b_1)^2 + r_1^2)^3}{3(4(a_1 - b_1)^2 + r_1^2)(2r_1^2 - (a_1 - b_1)^2)} \cdot \mathcal{F}_3 = 0. \quad (7.45)$$

Der Nenner dieser Polynome ist auf Grund von (7.43) und (7.34) stets ungleich Null. \mathcal{P}_6 bzw. \mathcal{P}_7 können nur dann verschwinden, wenn \mathcal{F}_2 bzw. \mathcal{F}_3 identisch erfüllt sind. Somit berechnen wir uns aus \mathcal{F}_3 den Winkel Φ_1 , für welchen wir die folgenden zwei Lösungen erhalten:

$$\Phi_1^i = \arccos(H^i) \quad \text{mit } i \in \{-, +\} \quad \text{und} \quad (7.46)$$

$$H^- = \frac{r_1^4 + r_1^2(11a_1 - 5b_1)(a_1 - b_1) - 4(2a_1 + b_1)(a_1 - b_1)^3 - \sqrt{W}}{-4\sqrt{3}r_1(4(a_1 - b_1)^2 + r_1^2)} \quad (7.47)$$

$$H^+ = \frac{r_1^4 + r_1^2(11a_1 - 5b_1)(a_1 - b_1) - 4(2a_1 + b_1)(a_1 - b_1)^3 + \sqrt{W}}{-4\sqrt{3}r_1(4(a_1 - b_1)^2 + r_1^2)}$$

$$W = -6r_1^8 - 8r_1^6(6b_1^2 - 12b_1a_1 + 9a_1^2 - 4) + 24r_1^2(2a_1^2 + 5b_1a_1 - b_1^2 + 12)(a_1 - b_1)^4 - 3r_1^4(33a_1^2 - 78b_1a_1 + 33b_1^2 - 64)(a_1 - b_1)^2 - 16(12b_1a_1 + 3b_1^2 - 8)(a_1 - b_1)^6.$$

Wir werden später zeigen, dass Φ_1^\pm für unsere Lösungsmenge wohldefiniert ist, also $H^\pm \in]-1, 1[$ gilt. Wenn wir nun die Lösungen für Φ_1^\pm in das letzte zu erfüllende Polynom \mathcal{F}_2 einsetzen, so erhalten wir 2 verschiedene Polynome. Auf Grund der auftretenden Grade ist es aber nicht möglich, diese Gleichungen explizit nach einer Unbekannten zu lösen. Wir nehmen daher eine Umparametrisierung vor in der Hoffnung, dass sich die Polynome vereinfachen. Wir setzen

$$a_1 = t\sqrt{2}r_1 + b_1 \quad \text{mit} \quad t \in \mathcal{I}_t :=]-1, 0[\cup]0, 1[, \quad (7.48)$$

wobei $t \in \mathcal{I}_t$ gewährleistet, dass (7.43) stets erfüllt ist und $a_1 \neq b_1$ gilt. Nach der Umparametrisierung sind die beiden Polynome von der Gestalt:

$$Ab_1^2 + Bb_1 + C + \sqrt{Db_1^2 + Eb_1 + F}. \quad (7.49)$$

Die daraus resultierenden Gleichungen können wir aber nun explizit nach b_1 lösen. Wir erhalten die folgenden vier Lösungen für

$$\bullet \quad t \neq \pm \frac{1}{2} \quad b_{1,1}^{\pm} = \frac{tr_1(24t^4 - 84t^2 + 33) + 12t\sqrt{S} + \sqrt{S_2}}{18\sqrt{2}(4t^2 - 1)} \quad (7.50)$$

$$b_{1,2}^{\pm} = \frac{tr_1(24t^4 - 84t^2 + 33) + 12t\sqrt{S} - \sqrt{S_2}}{18\sqrt{2}(4t^2 - 1)} \quad (7.51)$$

$$b_{1,3}^{\pm} = \frac{tr_1(24t^4 - 84t^2 + 33) - 12t\sqrt{S} + \sqrt{S_1}}{18\sqrt{2}(4t^2 - 1)} \quad (7.52)$$

$$b_{1,4}^{\pm} = \frac{tr_1(24t^4 - 84t^2 + 33) - 12t\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}{18\sqrt{2}(4t^2 - 1)} \quad (7.53)$$

mit

$$\begin{aligned} S &= 4r_1^2t^8 - 16r_1^2t^6 + 24t^4 + 15r_1^2t^4 + 2t^2r_1^2 - 12t^2 - 5r_1^2 + 15 \\ S_i &= 3(1 - t^2)(8r_1\sqrt{S}(4t^2 + 1 + 40t^4)(-1)^i + 48 - 1216t^6r_1^2 \\ &\quad - 624t^4r_1^2 + 1920t^4 + 192t^2 - 40t^2r_1^2 + 25r_1^2 + 640t^8r_1^2) \end{aligned}$$

für $i = 1, 2$. Diese vier Lösungen $b_{1,j}^{\pm}$ ($j = 1, \dots, 4$) gehören zu beiden Zweigen von Φ_1 .

$$\bullet \quad t = \frac{1}{2} \quad b_{1,5}^- = \frac{r_1\sqrt{2} \left(3r_1^4 - \sqrt{-3r_1^6(9r_1^2 - 32)} \right)}{4 \left(3r_1^4 + \sqrt{-3r_1^6(9r_1^2 - 32)} \right)} \quad (7.54)$$

$$\bullet \quad t = -\frac{1}{2} \quad b_{1,6}^- = -\frac{r_1\sqrt{2} \left(3r_1^4 - \sqrt{-3r_1^6(9r_1^2 - 32)} \right)}{4 \left(3r_1^4 + \sqrt{-3r_1^6(9r_1^2 - 32)} \right)} \quad (7.55)$$

$$\bullet \quad t = \frac{1}{2} \wedge r_1 \neq \pm \frac{2}{3}\sqrt{6} \quad b_{1,5}^+ = \frac{r_1\sqrt{2} \left(3r_1^4 + \sqrt{-3r_1^6(9r_1^2 - 32)} \right)}{4 \left(3r_1^4 - \sqrt{-3r_1^6(9r_1^2 - 32)} \right)} \quad (7.56)$$

$$\bullet \quad t = -\frac{1}{2} \wedge r_1 \neq \pm \frac{2}{3}\sqrt{6} \quad b_{1,6}^+ = -\frac{r_1\sqrt{2} \left(3r_1^4 + \sqrt{-3r_1^6(9r_1^2 - 32)} \right)}{4 \left(3r_1^4 - \sqrt{-3r_1^6(9r_1^2 - 32)} \right)} \quad (7.57)$$

Es sei bemerkt, dass die vier Punkte M_i des Parametergebiets mit den (t, r_1) -Koordinaten

$$\mathbf{m}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\sqrt{6} \right), \quad \mathbf{m}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{6} \right), \quad \mathbf{m}_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\sqrt{6} \right), \quad \mathbf{m}_4 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{6} \right),$$

nur Lösungen bezüglich des Zweiges Φ_1^- besitzen. Auf diese speziellen vier Punkte und die damit verknüpften Manipulatorkonfigurationen wird im anschließenden Beispiel noch genauer eingegangen.

Der Wertebereich von r_1 und t

Wir wissen bereits, dass t nur aus \mathcal{I}_t gewählt werden darf. Doch wie muss r_1 in Abhängigkeit von t gewählt werden, dass $b_{1,i}^\pm \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, 6$ gewährleistet ist. Um diese Frage zu klären, müssen wir die in den Formeln für $b_{1,i}^\pm$ auftretenden Wurzeln näher betrachten. Wir setzen $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ und $S = 0$ und berechnen uns daraus r_1 in Abhängigkeit von t . $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ liefert dieselbe Lösungsmenge $\mathcal{S}_{1,2}$, welche in vier Zweige zerfällt und in *Abbildung 7.5* blau dargestellt wurde:

$$\mathcal{S}_{1,2}: \quad r_1 = \pm 4 \sqrt{\frac{(4t^2 + 1 + 40t^4)(320t^6 + 336t^4 + 24t^2 - 5 \pm 4H_1)}{-3(320t^6 + 112t^4 - 32t^2 + 5)(64t^6 - 144t^4 - 48t^2 - 7)}}$$

mit $H_1 = \sqrt{(4t^2 - 1)(2t^2 + 1)(32t^4 + 8t^2 + 5)(4t^2 + 1 + 40t^4)}$ (7.58)

und $t \in \mathcal{I}_t \setminus \{-1/2, +1/2\}$. Da t nicht die Werte $\pm 1/2$ annehmen darf, gehören die Punkte M_i nicht der Lösungsmenge $\mathcal{S}_{1,2}$ an. Würde man die vier Punkte zu $\mathcal{S}_{1,2}$ hinzufügen, so wäre die Tangente in M_1 und M_2 an $\mathcal{S}_{1,2}$ durch $t = 1/2$ und in M_3 und M_4 an $\mathcal{S}_{1,2}$ durch $t = -1/2$ gegeben. Wenn wir $S = 0$ nach r_1 auflösen, so erhalten wir die folgenden zwei Lösungen:

$$\mathcal{S}: \quad r_1 = \pm \frac{\sqrt{-(12t^4 - 24t^2 - 15)(8t^4 - 4t^2 + 5)}}{(4t^4 - 8t^2 - 5)(t^2 - 1)} \quad (7.59)$$

für $t \in \mathcal{I}_t \setminus \{-1/2, +1/2\}$. Die zugehörige Lösungsmenge \mathcal{S} wurde in *Abbildung 7.5* schwarz dargestellt. Neben den Punkten M_i mit $i = 1, \dots, 4$ existieren noch vier weitere spezielle Punkte, nämlich die Berührungspunkte N_i von \mathcal{S} und $\mathcal{S}_{1,2}$. Leider ist es nicht möglich, die (t, r_1) Koordinaten von N_i mit $i = 1, \dots, 4$ explizit zu ermitteln, da diese über die Lösung des folgenden Polynoms führen:

$$205 - 12t^2 + 72t^4 - 5888t^6 - 5568t^8 - 2304t^{10} + 2560t^{12} = 0. \quad (7.60)$$

Diese Gleichung hat im Intervall $] -1, 1[$ genau zwei reelle Lösungen, nämlich $t_N > 0$ und $-t_N$. Die numerisch ermittelte Lösung lautet, wie folgt:

$$\mathbf{n}_i = (\pm 0.54775168735, \pm 1.98271818060). \quad (7.61)$$

Wenn wir nun die in $b_{1,5}^\pm$ und $b_{1,6}^\pm$ auftretende Wurzel gleich Null setzen und nach r_1 lösen, so erhalten wir neben $r_1 = 0$ noch die vier Punkte T_i mit Koordinaten

$$\mathbf{t}_i = \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{4}{3} \sqrt{2} \right). \quad (7.62)$$

Genau diese vier Punkte wurden durch die Bedingung $t \neq \pm 1/2$ aus den Lösungsmenge \mathcal{S} eliminiert. Bevor wir die für $b_{1,i}^\pm$ zulässigen Wertebereiche von t und r_1 in einem Satz festhalten, müssen wir noch die folgenden Vereinbarungen bezüglich der Notation treffen:

Wir wollen die Menge aller Punkte der grün bzw. gelb. bzw. rosa eingefärbten offenen Gebiete von *Abbildung 7.5*, welche durch die Geraden $t = 0$, $t = \pm 1/2$, $t = \pm 1$, $r_1 = 0$ sowie den Kurven $S_{1,2}$ und S begrenzt sind, den Farben entsprechend mit \blacksquare bzw. \blacksquare bzw. \blacksquare notieren. Außerdem wollen wir noch die Menge aller Punkte von $S_{1,2}$ mit \blacksquare bezeichnen. Die Menge aller Punkte von S , deren t -Koordinaten im Intervall $] -t_N, 0[\cup] 0, t_N[$ liegen, wollen wir hingegen mit \blacksquare notieren.

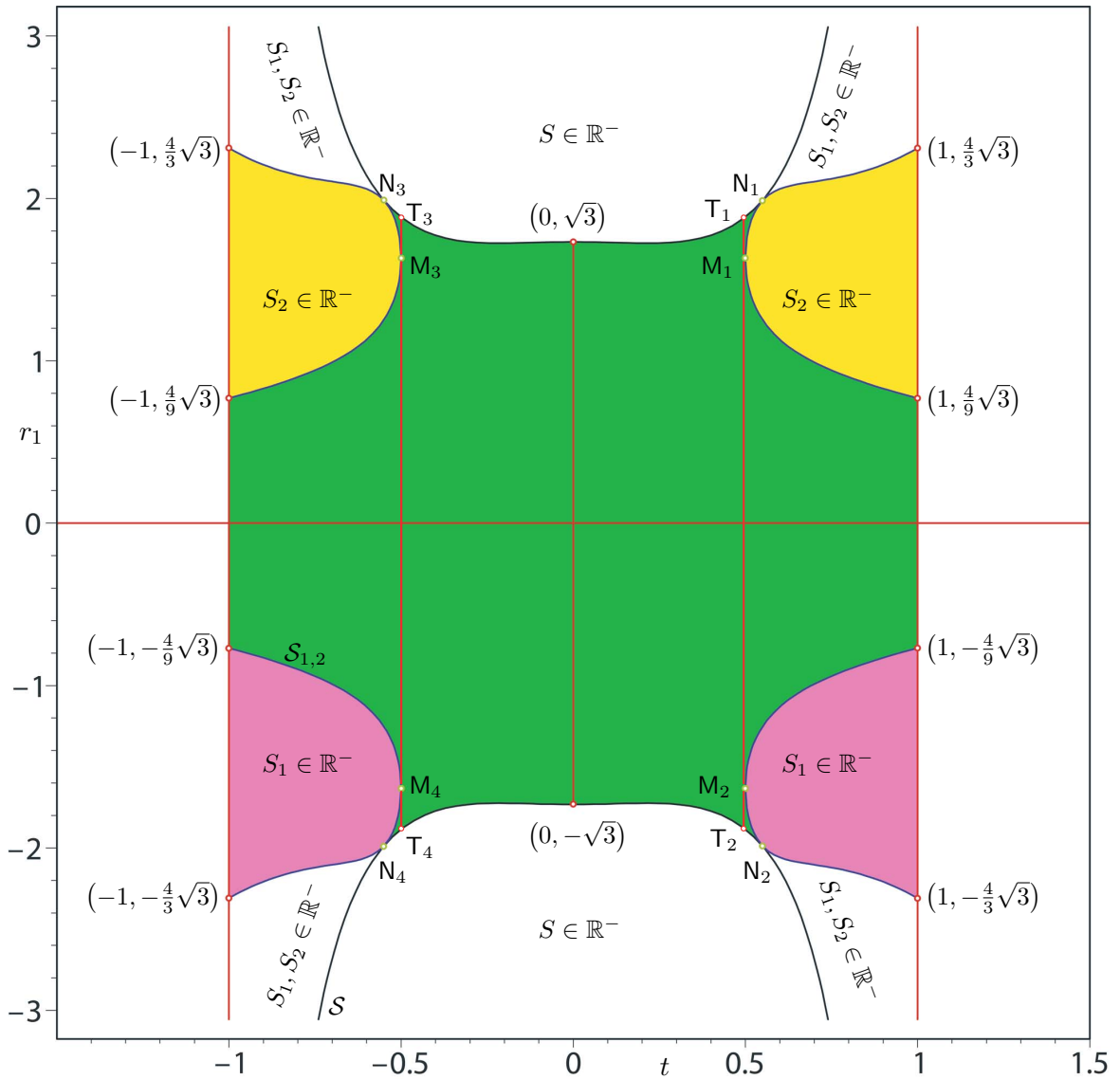


Abbildung 7.5: Wertebereich für t und r_1

Satz 7.4. Die $b_{1,i}^\pm$ mit $i = 1, \dots, 6$ aus (7.50)–(7.57) sind reell, wenn (t, r_1) aus den folgenden Wertebereichen \mathcal{B}_i^\pm gewählt wird:

$$\begin{aligned}
 b_{1,1}^\pm, b_{1,2}^\pm \in \mathbb{R} &\iff (t, r_1) \in \mathcal{B}_1^\pm = \mathcal{B}_2^\pm := (\blacksquare \cup \blacksquare \cup \blacksquare \cup \blacksquare) \\
 b_{1,3}^\pm, b_{1,4}^\pm \in \mathbb{R} &\iff (t, r_1) \in \mathcal{B}_3^\pm = \mathcal{B}_4^\pm := (\blacksquare \cup \blacksquare \cup \blacksquare \cup \blacksquare) \\
 b_{1,5}^- \in \mathbb{R} &\iff (t, r_1) \in \mathcal{B}_5^- := \left\{ (t, r_1) \mid t = +\frac{1}{2} \wedge r_1 \in \left[-\frac{4}{3}\sqrt{2}, \frac{4}{3}\sqrt{2} \right] \setminus \{0\} \right\} \\
 b_{1,6}^- \in \mathbb{R} &\iff (t, r_1) \in \mathcal{B}_6^- := \left\{ (t, r_1) \mid t = -\frac{1}{2} \wedge r_1 \in \left[-\frac{4}{3}\sqrt{2}, \frac{4}{3}\sqrt{2} \right] \setminus \{0\} \right\} \\
 b_{1,5}^+ \in \mathbb{R} &\iff (t, r_1) \in \mathcal{B}_5^+ := \left\{ (t, r_1) \mid t = +\frac{1}{2} \wedge r_1 \in \left[-\frac{4}{3}\sqrt{2}, \frac{4}{3}\sqrt{2} \right] \setminus \left\{ -\frac{2}{3}\sqrt{6}, 0, \frac{2}{3}\sqrt{6} \right\} \right\} \\
 b_{1,6}^+ \in \mathbb{R} &\iff (t, r_1) \in \mathcal{B}_6^+ := \left\{ (t, r_1) \mid t = -\frac{1}{2} \wedge r_1 \in \left[-\frac{4}{3}\sqrt{2}, \frac{4}{3}\sqrt{2} \right] \setminus \left\{ -\frac{2}{3}\sqrt{6}, 0, \frac{2}{3}\sqrt{6} \right\} \right\}.
 \end{aligned}$$

Beweis: Dies folgt aus den bisherigen Überlegungen dieses Abschnitts sowie durch das Einsetzen von (t, r_1) Koordinaten einzelner Punkte aus den durch die Geraden $t = 0$, $t = \pm 1/2$, $t = \pm 1$, $r_1 = 0$ sowie den Kurven $\mathcal{S}_{1,2}$ und \mathcal{S} begrenzten Gebieten in die Ausdrücke S , S_1 und S_2 . Siehe dazu *Abbildung 7.5*. \square

Satz 7.5. Φ_1^j aus (7.46) ist für $b_{1,i}^j(\mathcal{B}_i^j)$ für $i = 1, \dots, 6$ und $j \in \{+, -\}$ wohldefiniert. Somit sind alle Konfigurationen, die durch $b_{1,i}^j(\mathcal{B}_i^j)$ bestimmt sind, reell. Keine dieser Konfigurationen ist singulär.

Beweis: Zuerst wollen wir zeigen, dass für alle $b_{1,i}^\pm(\mathcal{B}_i^\pm)$ für $i = 1, \dots, 4$ stets $H^\pm \in \mathbb{R}$ gilt mit H^\pm laut (7.47). Wenn wir $(t, r_1) \in \mathcal{B}_i^\pm$ wählen, so kann H^\pm auf Grund von Satz 7.4 nur dann nicht reell sein, wenn W negativ ist. Wir setzen $W = 0$ und berechnen uns r_1 in Abhängigkeit von t , nachdem wir eine der vier Lösungen für $b_{1,i}^\pm$ ($i = 1, \dots, 4$) eingesetzt haben. Unabhängig von dem gewählten $b_{1,i}^\pm$ erhalten wir neben der Trivillösung $r_1 = 0$ die folgende Lösungsmenge \mathcal{W} , welche in vier Zweige zerfällt:

$$r_1 = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{25600t^{14} - 13056t^{10} + 5632t^8 - 864t^6 - 2136t^4 - 551t^2 - 45 \pm H_2}{(t^2 - 1)(8t^2 + 1)(5120t^{10} - 2048t^8 - 2688t^6 + 976t^4 + 584t^2 + 81)}} \quad (7.63)$$

$$\text{mit } H_2 = 4t(40t^4 + 4t^2 + 1)\sqrt{S_3} \quad \text{und} \quad (7.64)$$

$$S_3 = (2t^2 + 1)(12800t^{14} - 6400t^{12} + 4224t^{10} + 128t^8 + 344t^6 - 84t^4 - 67t^2 - 10)(t^2 - 1) \quad (7.65)$$

für $t \in \mathcal{I}_t \setminus \{-1/2, +1/2\}$. \mathcal{W} wurde in *Abbildung 7.6* grün eingezeichnet. Dabei handelt es sich aber bloß um jenen Teil der Lösungsmenge für die $r_1 > 0$ gilt. Der zweite Teil liegt spiegelsymmetrisch bezüglich der t -Achse. Wenn wir $b_{1,5}^\pm$ bzw. $b_{1,6}^\pm$ in $W = 0$ einsetzen und nach r_1 lösen, so erhalten wir die Punkte \mathbb{T}_i . Es sei noch bemerkt, dass sich $\mathcal{W} \cup \{\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_4\}$ und $\mathcal{S} \cup \{\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_4\}$ in den Punkten \mathbb{T}_i berühren (siehe *Abbildung 7.6* und *Abbildung 7.7*).

Durch Einsetzen von Koordinaten einzelner Punkte innerhalb und außerhalb der durch die Lösungsmenge \mathcal{W} begrenzten Gebiete von \mathcal{B}_i^\pm zeigt sich, dass W für alle $b_{1,i}^\pm(\mathcal{B}_i^\pm)$ für

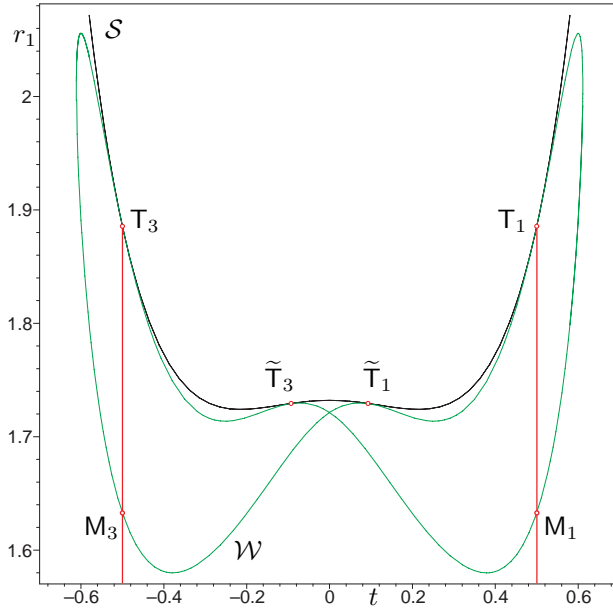
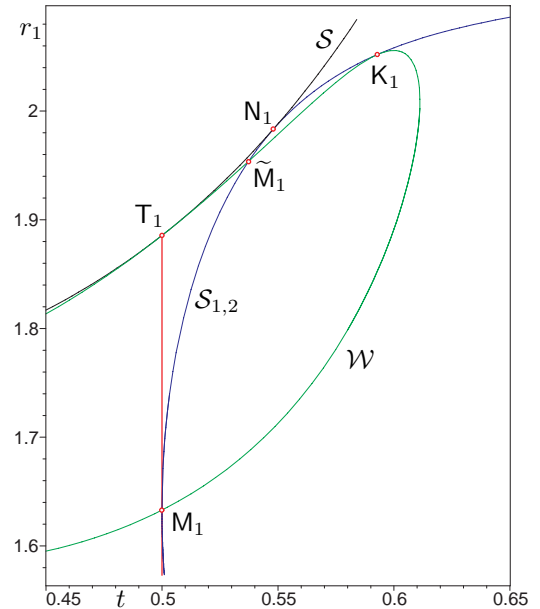
$i = 1, \dots, 4$ stets größer oder gleich Null ist. Für die Sonderfälle $b_{1,5}^\pm(\mathcal{B}_5^\pm)$ und $b_{1,6}^\pm(\mathcal{B}_6^\pm)$ kann ebenso gezeigt werden, dass stets $W \geq 0$ gilt. Somit ist Φ_1^\pm nur dann nicht reell, wenn $H^\pm \in \mathbb{R}$ größer als 1 oder kleiner als -1 ist. Daraus folgt nun, dass Φ_1^\pm die Werte 0 bzw. π annehmen muss, bevor es den reellen Bereich verlässt. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $\sin(\Phi_1^\pm) \neq 0$ gilt, für $b_{1,i}^\pm(\mathcal{B}_i^\pm)$ ($i = 1, \dots, 6$).

$\sin(\Phi_1^\pm) = 0$ zieht eine singuläre Konfiguration des Manipulators nach sich. Um dies einzusehen, genügt es auf Grund von (7.28) den Matrizeneintrag e_{33} nach Einsetzen von a_2, b_2, r_2 und Φ_2 zu betrachten. Unabhängig vom gewählten Lösungszweig (7.39)–(7.42) von a_2, b_2, r_2 und Φ_2 erhalten wir:

$$e_{33} = \frac{r_1^2 \sin(\Phi_1)^2 ((a_1 - b_1)^2 + r_1^2)^2}{(a_1 - b_1)^2 - 2r_1^2}. \quad (7.66)$$

Da in jeder Konfiguration alle sechs allgemeinen Eigenwerte λ_i ident sind, wäre nur jene Singularität möglich, in der alle λ_i nach Unendlich fallen. Dies korrespondiert mit dem Fall in dem die Jakobimatrix gleich der Nullmatrix ist, also Plattform und Basis zusammenfallen. Damit dies eintritt, müsste jedoch $a_1 = b_1, r_1 = 0$ und $a_2 = b_2, r_2 = 0$ gelten. Jedoch folgt aus $(t, r_1) \in \mathcal{B}_i^\pm$ für $i = 1, \dots, 6$ stets $a_1 \neq b_1, r_1 \neq 0$ und $a_2 \neq b_2, r_2 \neq 0$, womit der Satz bewiesen ist. \square

Definition 7.4. Die Menge aller Konfigurationen \mathcal{K} , die wir durch Rückeinsetzen von $b_{1,i}^\pm(\mathcal{B}_i^\pm)$ für $i = 1, \dots, 6$ in (7.48), (7.46), (7.39)–(7.42), (7.38) und (7.35) erhalten, wollen wir mit \mathcal{L}_H^g notieren.


 Abbildung 7.6: \mathcal{W} und \mathcal{S}

 Abbildung 7.7: \mathcal{W} , \mathcal{S} und $\mathcal{S}_{1,2}$

Bemerkung: Die Kurven \mathcal{W} und \mathcal{S} berühren einander in den Punkten \tilde{T}_i mit Koordinaten $\tilde{\mathbf{t}}_i = (\pm 0.09284698744, \pm 1.72934680750)$ für $i = 1, \dots, 4$. \mathcal{W} und $\mathcal{S}_{1,2}$ schneiden einander in den Punkten \tilde{M}_i mit Koordinaten $\tilde{\mathbf{m}}_i = (\pm 0.53727775658, \pm 1.95363846420)$ für $i = 1, \dots, 4$. \mathcal{W} und $\mathcal{S}_{1,2}$ berühren einander in den Punkten K_i mit $\mathbf{k}_i = (\pm 0.59278998698, \pm 2.05195821570)$ für $i = 1, \dots, 4$. Siehe dazu die *Abbildung 7.6* und *Abbildung 7.7*.

Satz 7.6. *Alle Konfigurationen $\mathcal{K} \in \mathcal{L}_H^g$ sind reell und es gilt $CTN(\mathcal{K}) = 1$.*

Beweis: Die Gültigkeit dieses Satzes folgt aus Def. 7.4 und Satz 7.5. □

Geometrie der Lösungsmenge

Satz 7.7. *Für alle Konfigurationen $\mathcal{K} \in \mathcal{L}_H^g$ gilt: Alle $2g = n$ Beine haben dieselbe Länge $\|\mathbf{l}_i\|^2 = r_1^2(2t^2 + 1)$. Die Öffnungswinkel $\alpha_1 \in]0, \pi/2[$ und $\alpha_2 \in]0, \pi/2[$ der Asymptotenkegel der Drehhyperboloide, welche durch die Trägergeraden der Beine $\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_g$ bzw. $\mathbf{l}_{g+1}, \dots, \mathbf{l}_{2g}$ bestimmt sind, hängen nur vom Parameter t ab und lauten:*

$$\cos(\alpha_1) = \frac{\sqrt{2}|t|}{\sqrt{2t^2 + 1}} \quad \text{und} \quad \cos(\alpha_2) = \frac{\sqrt{6 - 6t^2}}{3\sqrt{2t^2 + 1}}. \quad (7.67)$$

Beweis: Die Behauptung, dass alle Beine gleich lang sind, folgt unmittelbar aus \mathcal{F}_1 von (7.36). Die Formel der Beinlänge sowie die Aussage über die Winkel kann durch Nachrechnen leicht bestätigt werden. □

Es sei noch bemerkt, dass für $t = \pm 1/2$ die Öffnungswinkel der beiden Asymptotenkegel ident sind mit $\alpha_1 = \alpha_2 = \arccos(\sqrt{3}/3)$. Da $t \in \mathcal{I}_t$ gilt, können α_1 und α_2 nur die folgenden Werte annehmen:

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \left] \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right), \frac{\pi}{2} \right[. \quad (7.68)$$

Satz 7.8. *Für alle Konfigurationen $\mathcal{K} \in \mathcal{L}_H^3$ gilt: Die Winkel $\beta_1 := \sphericalangle(\mathbf{l}_i, \mathbf{l}_j) \in]0, \pi[$ mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$ und $\beta_2 := \sphericalangle(\mathbf{l}_k, \mathbf{l}_l) \in]0, \pi[$ mit $k, l \in \{4, 5, 6\}$ und $\mathbf{l}_m := \mathbf{x}_m - \mathbf{y}_m$ für $m = 1, \dots, 6$ ergänzen sich auf π ; also $\beta_1 + \beta_2 = \pi$. Die Winkel sind bestimmt durch:*

$$\cos(\beta_1) = \frac{4t^2 - 1}{4t^2 + 2} \quad \text{und} \quad \cos(\beta_2) = -\frac{4t^2 - 1}{4t^2 + 2}. \quad (7.69)$$

Beweis: Da die Beine nach Satz 7.7 gleich lang sind, müssen wir nur zeigen, dass $\mathbf{l}_i \mathbf{l}_j = -\mathbf{l}_k \mathbf{l}_l$ gilt. Dies kann ebenso durch Nachrechnen bestätigt werden, wie die Formeln für β_1, β_2 . □

Bemerkung: Es sei bemerkt, dass β_1 und β_2 nur vom Parameter t abhängen. Da $t \in \mathcal{I}_t$ gilt, können die beiden Winkel nur Werte des folgenden Intervalls annehmen:

$$\beta_1, \beta_2 \in \left] \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right[.$$

Bei $t = \pm \frac{1}{2}$ sind die beiden Winkel gleich groß, also $\beta_1 = \beta_2 = \frac{\pi}{2}$.

Satz 7.9. Für die zweiparametrische Konfigurationsmenge mit Parametern r_1 und μ , welche aus $b_{1,5}^\pm(\mathcal{B}_5^\pm)$ und $b_{1,6}^\pm(\mathcal{B}_6^\pm)$ resultiert, gilt: Der Grundriss der Raumkurve, welche der Punkt X_i mit $i \in \{1, \dots, g\}$ in Abhängigkeit von r_1 mit $\mu = \text{const.}$ durchläuft, ist mit der Lösungskurve $\mathfrak{c} \setminus \{\mathfrak{c}(\Phi^+, \frac{2}{3}\sqrt{6}), \mathfrak{c}(\Phi^+, -\frac{2}{3}\sqrt{6})\}$ aus Abschnitt 7.2 ident (vgl. Abbildung 7.1).

Beweis: Für die Punkte X_i für $i = 1, \dots, g$ ist dies offensichtlich, wenn man $t = \pm\frac{1}{2}$ und $a_1 = t\sqrt{2}r_1 + b_1$ in die Formel für Φ_1^\pm einsetzt und mit (7.13) vergleicht. Die Punkte $\mathfrak{c}(\Phi^+, \frac{2}{3}\sqrt{6})$ und $\mathfrak{c}(\Phi^+, -\frac{2}{3}\sqrt{6})$ müssen deshalb von \mathfrak{c} entfernt werden, da diese mit den Punkten M_i des Wertebereichs von t und r_1 korrespondieren. \square

7.3.2 Sonderfall

Bevor wir nochmals das Polynom \mathcal{P}_1 aus (7.33) betrachten, wollen wir uns über die Beziehung der Parameter F und Φ_2 Klarheit verschaffen: $F = 0$ ist eine stärkere Bedingung als $\sin(\Phi_2) = 0$, da im ersten Fall mit F auch alle Φ_2 aus den Gleichungen (7.27) verschwinden. Jedoch verschwindet F nicht, wenn wir $\sin(\Phi_2) = 0$ setzen. Somit ist $F = 0$ ein Unterfall von $\sin(\Phi_2) = 0$ und wir können $F \neq 0$ fordern. Den Unterfall $F = 0$ werden wir später betrachten.

Wir wollen nun jene Fälle besprechen, die durch die Voraussetzungen (7.34) des Hauptfalls verloren gegangen sind. Das Polynom \mathcal{P}_1 aus (7.33) ist genau dann identisch erfüllt, ohne dass der Manipulator trivialerweise singulär ist, wenn entweder

$$a_1 = b_1 \quad \text{und} \quad \sin(\Phi_2) = 0 \quad \text{oder} \quad a_2 = b_2 \quad \text{und} \quad \sin(\Phi_1) = 0$$

gilt. Da diese zwei Fälle zu einander äquivalent sind und bis auf Beschriftung dieselbe Lösungsmenge besitzen, brauchen wir nur einen Fall besprechen. O.B.d.A. sei $a_1 = b_1$ und $\sin(\Phi_2) = 0$. Damit $\sin(\Phi_2) = 0$ gilt, muss Φ_2 entweder gleich 0 oder π sein. Wir setzen o.B.d.A. $\Phi_2 = 0$.⁵ Somit lauten die gesammelten Voraussetzungen für diesen Fall, wie folgt:

$$r_1 \neq 0, \quad r_2 \neq 0, \quad a_1 = b_1, \quad \Phi_2 = 0 \quad \text{und} \quad F \neq 0. \quad (7.70)$$

Durch die beiden Bedingungen $a_1 = b_1$ und $\sin(\Phi_2) = 0$ sind die Polynome \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_3 bereits identisch erfüllt. Da \mathcal{P}_3 im Hauptfall dafür verantwortlich war, dass alle Beine dieselbe Länge haben, ist dies nun nicht mehr der Fall. \mathcal{P}_2 vereinfacht sich zu $r_1^2 \mathcal{G}_1 = 0$, wobei \mathcal{G}_1 nur linear von F abhängt. Daraus berechnen wir uns nun F als:

$$F = \frac{\sqrt{3}(b_1(a_2 - b_2)^2 + r_2^2(a_2 + b_1))}{2r_2(b_2 - a_2)}. \quad (7.71)$$

Setzen wir nun F in \mathcal{P}_4 und \mathcal{P}_5 ein, so vereinfachen sich diese zu:

$$\mathcal{P}_4 : r_1^2((a_2 - b_2)^2 + r_2^2)\mathcal{G}_2 = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_5 : r_1^2\mathcal{G}_3 = 0. \quad (7.72)$$

Berechnen wir uns nun aus \mathcal{G}_2 und \mathcal{G}_3 die Unbekannten a_2 und b_2 , so erhalten wir die folgende Lösung, welche in 2 Zweige zerfällt:

⁵Würden wir $\Phi_2 = \pi$ voraussetzen, so blieben alle Formeln dieses Abschnitts gleich bis auf jene von F . Bei dieser müsste man nur das Vorzeichen ändern.

Zweig 1:

$$a_2 = \frac{b_1(r_1^2 + r_2^2) + r_2\sqrt{r_1^4 - r_2^4}}{-2(r_1^2 - r_2^2)} \quad b_2 = \frac{b_1(r_1^2 + r_2^2) - r_2\sqrt{r_1^4 - r_2^4}}{-2(r_1^2 - r_2^2)} \quad (7.73)$$

Zweig 2:

$$a_2 = \frac{b_1(r_1^2 + r_2^2) - r_2\sqrt{r_1^4 - r_2^4}}{-2(r_1^2 - r_2^2)} \quad b_2 = \frac{b_1(r_1^2 + r_2^2) + r_2\sqrt{r_1^4 - r_2^4}}{-2(r_1^2 - r_2^2)}. \quad (7.74)$$

Der einzige Unterschied zwischen den zwei Zweigen ist wiederum, dass a_2 und b_2 die Rollen tauschen. Da $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ und $a_2 \neq b_2$ gelten muss, erhalten wir die Nebenbedingung

$$r_1^2 > r_2^2. \quad (7.75)$$

Somit kann auch der Nenner von a_2 und b_2 nicht verschwinden. Unabhängig davon, welche der beiden Lösungen man hernimmt und in die Polynome \mathcal{P}_6 und \mathcal{P}_7 einsetzt, erhalten wir:

$$P_6 = \frac{r_1^4 r_2^2}{(r_1^2 - r_2^2)^3} \mathcal{G}_4 \quad \text{und} \quad P_7 = \frac{r_1^4 r_2^2}{(r_1^2 - r_2^2)^2} \mathcal{G}_5. \quad (7.76)$$

Lösen wir nun \mathcal{G}_4 nach Φ_1 , so ergibt sich:

$$\Phi_1 = \arccos \left(\frac{r_2^2(r_1^4 - r_2^4)(3r_2^2 + 32 + 21r_1^2) - 3b_1^2(r_1^2 + 3r_2^2)(3r_1^2 - r_2^2)^2}{-16\sqrt{3}r_1 r_2^2(r_1^4 - r_2^4)} \right). \quad (7.77)$$

Wir wollen wiederum erst später zeigen, dass Φ_1 wohldefiniert ist. Setzen wir diesen Ausdruck in die letzte zu erfüllende Gleichung \mathcal{G}_4 ein, so vereinfacht sich diese zu

$$\sum_{i=0}^2 K_{2i} b_1^{2i} r_2^{4-2i} (3r_1^2 - r_2^2)^{2i} (r_1^4 - r_2^4)^{2-i} (-1)^i = 0 \quad \text{mit} \quad (7.78)$$

$$K_4 = 9(r_1^2 + 3r_2^2)^3$$

$$K_2 = 6(21r_1^6 + 81r_2^2 r_1^4 + 32r_1^4 + 192r_2^2 r_1^2 + 159r_1^2 r_2^4 + 288r_2^4 + 27r_2^6)$$

$$K_0 = 441r_1^6 + 576r_1^4 + 1161r_2^2 r_1^4 + 1024r_1^2 + 99r_1^2 r_2^4 + 1920r_2^2 r_1^2 + 576r_2^4 + 27r_2^6 + 3072r_2^2$$

Diese Gleichung können wir explizit nach b_1 lösen. Wir erhalten die folgende Lösung, welche in vier Zweige zerfällt:

$$b_1 := \pm \frac{r_2 \sqrt{(r_1^2 + 3r_2^2)^3 (r_1^4 - r_2^4)} H_3}{\sqrt{3} (r_1^2 + 3r_2^2)^3 (3r_1^2 - r_2^2)} \quad \text{mit} \quad (7.79)$$

$$H_3 = 21r_1^6 + 32r_1^4 + 81r_2^2 r_1^4 + 192r_2^2 r_1^2 + 159r_2^4 r_1^2 + 27r_2^6 + 288r_2^4 \pm 8r_1 \sqrt{V} \quad \text{und} \quad (7.80)$$

$$V = 12(r_1^4 + 2r_2^2 r_1^2 + 5r_2^4)(r_1^2 + 3r_2^2)^2 - 9r_2^2(r_1^2 + r_2^2)(-9r_2^6 + 17r_2^4 r_1^2 + 13r_2^2 r_1^4 + 3r_1^6). \quad (7.81)$$

Der Nenner von b_1 kann nur verschwinden, wenn $3r_1^2 = r_2^2$ gilt, was aber auf Grund der Bedingung aus (7.75) nicht möglich ist. Wir führen wieder eine Parametersubstitution durch, indem wir $r_2 = t r_1$ setzen.

Wertebereich von r_1 und t

Aus $r_1^2 > r_2^2$ (7.75) und $r_2 \neq 0$ (7.70) folgt, dass t nur Werte im Intervall \mathcal{I}_t aus (7.48) annehmen darf. Damit $b_1 \in \mathbb{R}$ gewährleistet ist, muss $H_3 \in \mathbb{R}^+$ gelten. Setzen wir nun $H_3 = 0$ und berechnen uns die Nullstellen, so zeigt sich, dass außer $r_1 = r_2 = 0$ keine reellen Nullstellen existieren. Somit ist b_1 nur dann nicht reell, wenn V negativ wird. Wir setzen $V = 0$ und berechnen uns r_1 in Abhängigkeit von t . Neben der Trivalllösung $r_1 = r_2 = 0$ erhalten wir die folgende Lösung, welche in zwei Zweige zerfällt:

$$\begin{aligned}
 r_{1,1} &= + \frac{2(1 + 3t^2)\sqrt{-(t^2 + 1)(9t^6 - 17t^4 - 13t^2 - 3)}(5t^4 + 2t^2 + 1)}{\sqrt{3}(t^2 + 1)(9t^6 - 17t^4 - 13t^2 - 3)t} \\
 r_{1,2} &= - \frac{2(1 + 3t^2)\sqrt{-(t^2 + 1)(9t^6 - 17t^4 - 13t^2 - 3)}(5t^4 + 2t^2 + 1)}{\sqrt{3}(t^2 + 1)(9t^6 - 17t^4 - 13t^2 - 3)t}
 \end{aligned}
 \tag{7.82}$$

mit $t \in \mathcal{I}_t$. Die dazugehörige Lösungsmenge \mathcal{V} wurde für $t \in \mathcal{I}_t$ in *Abbildung 7.8* schwarz eingezeichnet. Es sei noch bemerkt, dass $t = 0$ eine Asymptote der 4 Lösungszweige ist.

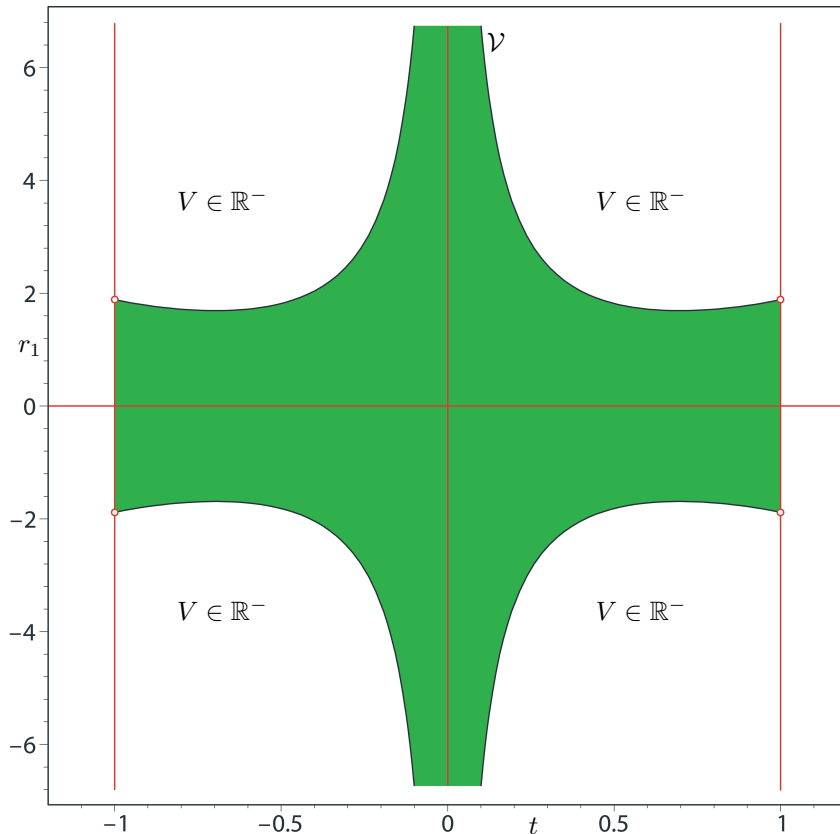


Abbildung 7.8: Wertebereich für t und r_1

Satz 7.10. *Alle vier Zweige von b_1 aus (7.79) haben stets reelle Werte zur Folge, wenn $(t, r_1) \in \mathcal{B}$ mit*

$$\mathcal{B} := \{(t, r_1) \mid t \in \mathcal{I}_t \wedge 0 < r_1 \leq r_{1,1}(t)\} \cup \{(t, r_1) \mid t \in \mathcal{I}_t \wedge 0 > r_1 \geq r_{1,2}(t)\} \quad (7.83)$$

und $r_{1,1}, r_{1,2}$ laut (7.82) gilt.

Beweis: Die Beweis läuft analog zu jenem von Satz 7.4. \square

Satz 7.11. Φ_1 aus (7.77) ist für alle vier Lösungszeige von b_1 aus (7.79) und $(t, r_1) \in \mathcal{B}$ wohldefiniert. Somit sind alle Konfigurationen, die durch b_1 und $(t, r_1) \in \mathcal{B}$ bestimmt sind, reell. Keine dieser Konfigurationen ist singulär.

Beweis: Da $\cos(\Phi_1)$ auf Grund von Satz 7.10 stets reell ist, wenn $(t, r_1) \in \mathcal{B}$ gilt, nimmt Φ_1 nur dann keine reellen Werte an, wenn $\cos(\Phi_1)$ größer als 1 oder kleiner als -1 ist. Da $\sin(\Phi_1) = 0$ auf Grund von Satz 7.29 wiederum eine singuläre Konfiguration nach sich ziehen würde, könnten wir die analoge Argumentation wie im Beweis von Satz 7.5 anwenden.

In diesem Fall ist es aber auch möglich, die Argumentation rechnerisch zu überprüfen: Wir lösen diese Gleichung $\sin(\Phi_1) = 0$ nach r_1 und erhalten neben den Trivialfällen $r_1 = 0$ und $t = \pm 1$ noch die folgende Lösung, welche in vier Zweige zerfällt:

$$r_1 = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{t^2 - 1 + 2\sqrt{t^2 - 2}}{t^4 - 6t^2 + 9}} \quad \text{und} \quad r_1 = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{t^2 - 1 - 2\sqrt{t^2 - 2}}{t^4 - 6t^2 + 9}}. \quad (7.84)$$

Diese vier Zweige erhält man unabhängig vom gewählten b_1 aus (7.79). Diese Lösungsmenge besitzt keine reellen Punkte für $t \in \mathcal{I}_t$, da $t^2 - 2$ stets kleiner als Null ist. Somit wurde auch der analytische Beweis erbracht. \square

Definition 7.5. *Die Menge aller Konfigurationen \mathcal{K} , die wir durch Rückeinsetzen aller vier Zweige $b_1(\mathcal{B})$ aus (7.79) in (7.77), (7.73) bzw. (7.74) und (7.71) erhalten, wollen wir mit \mathcal{L}_S^g notieren.*

Satz 7.12. *Alle Konfigurationen $\mathcal{K} \in \mathcal{L}_S^g$ sind reell und es gilt $CTN(\mathcal{K}) = 1$.*

Beweis: Die Gültigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus Def. 7.5 und Satz 7.11. \square

Unterfall $F = 0$:

Betrachten wir nun die 8 möglichen kombinatorischen Ausdrücke von F in Abhängigkeit von r_1 und t und lösen diese jeweils nach r_1 auf, so erhalten wir stets dieselbe Lösung wie in (7.84). Somit kann F niemals Null werden.

Geometrie der Lösungsmenge

Satz 7.13. *Für alle Konfigurationen $\mathcal{K} \in \mathcal{L}_S^g$ gilt: Das Verhältnis der Beinlängen der Beine l_1, \dots, l_g zu jener der Beine l_{g+1}, \dots, l_{2g} hängt nur vom Parameter t ab, mit*

$$\|l_i\|^2 = r_1^2 \quad \text{und} \quad \|l_j\|^2 = \frac{2t^2 r_1^2}{1 - t^2} \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, g, \quad j = i + g. \quad (7.85)$$

Der Öffnungswinkel $\alpha \in]0, \pi/2[$ des Drehkegels, welchem die Trägergeraden der Beine l_{g+1}, \dots, l_{2g} angehören, hängt nur vom Parameter t ab und lautet:

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2t^2 + 2}}{2}. \quad (7.86)$$

Beweis: Die Formeln dieses Satzes können durch Nachrechnen leicht bestätigt werden. \square

Bemerkung: Da $t \in \mathcal{I}_t$ gilt kann α nur Werte im Intervall $]0, \pi/4[$ annehmen. Bei $t = \pm\sqrt{3}/3$ sind die Beine der beiden Gruppen gleich lang. Fordert man zusätzlich noch $r_1 = \pm\sqrt{10}/2$, dann ist $\Phi_1 = \pm\pi/2$. Ein zu diesem Fall gehöriger Manipulator Typ $\mathcal{K}_S \in \mathcal{L}_S^3$ ist infolge abgebildet, mit:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{29} - \sqrt{5})}{8} \\ r_1 &= \frac{\sqrt{10}}{2} \\ r_2 &= \frac{\sqrt{30}}{6} \\ a_1 = b_1 &= -\frac{\sqrt{87}}{12} \\ a_2 &= -a_1 + \frac{\sqrt{15}}{6} \\ b_2 &= -a_1 - \frac{\sqrt{15}}{6} \\ \Phi_1 &= -\frac{1}{2}\pi \\ \mu &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

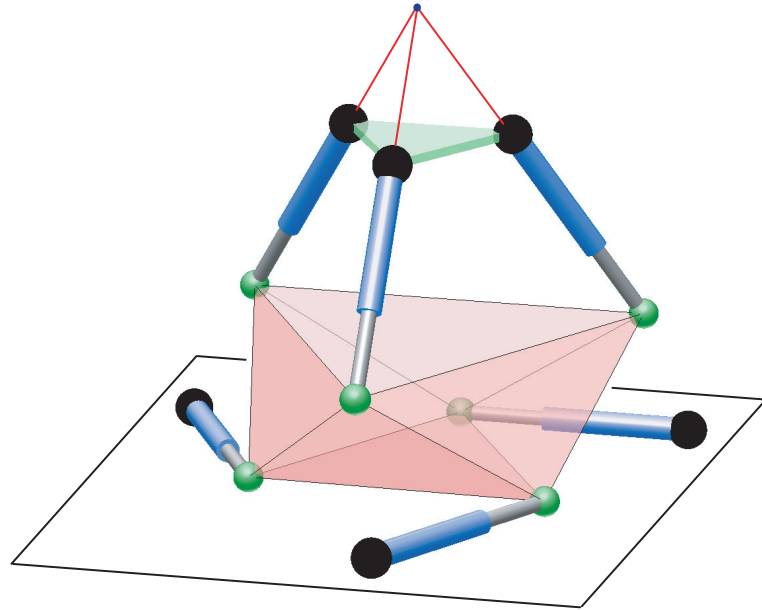


Abbildung 7.9: $\mathcal{K}_S \in \mathcal{L}_S^3$

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir die gesammelten Ergebnisse aus Abschnitt 7.3.1 und 7.3.2 in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 7.14. Die Konfigurationen \mathcal{K} der Mengen \mathcal{L}_H^g laut Def. 7.4 und \mathcal{L}_S^g laut Def. 7.5 sind Konfigurationen der Konfigurationsmenge \mathcal{S}_K^g mit Parametrisierung (7.16) – (7.21), welche eine maximale Control Number besitzen. Die Lösungsmenge \mathcal{L}_H^g sowie \mathcal{L}_S^g hat abgesehen von der Anzahl der Beine jeweils drei frei zu wählende Parameter, nämlich t , r_1 und μ .

7.3.3 Beispiel

Wie zuvor angekündigt, wollen wir als Beispiel jene Konfigurationen $\in \mathcal{L}_H^g$ betrachten, die mit den Punkten M_i des Wertebereiches korrespondieren. Durch Rückeinsetzen der (t, r_1) Koordinaten von M_i für $i = 1, \dots, 4$ erhält man unter Berücksichtigung von (7.18) und (7.21) im Wesentlichen nur eine Konfiguration \mathcal{K}_M . Diese ist z.B. gegeben durch $F = 1$, sowie

$$r_1 = r_2 = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$a_1 = a_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$b_1 = b_2 = 0$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \pm \frac{1}{2}\pi.$$

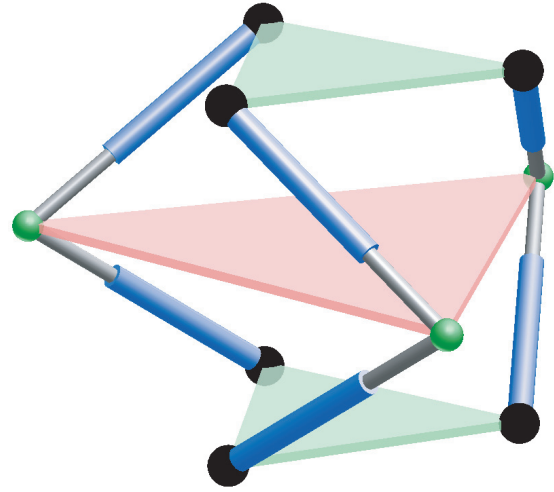


Abbildung 7.10: $\mathcal{K}_M \in \mathcal{L}_H^3$: $\mu = 0, \Phi_1 = \Phi_2 = \frac{\pi}{2}$

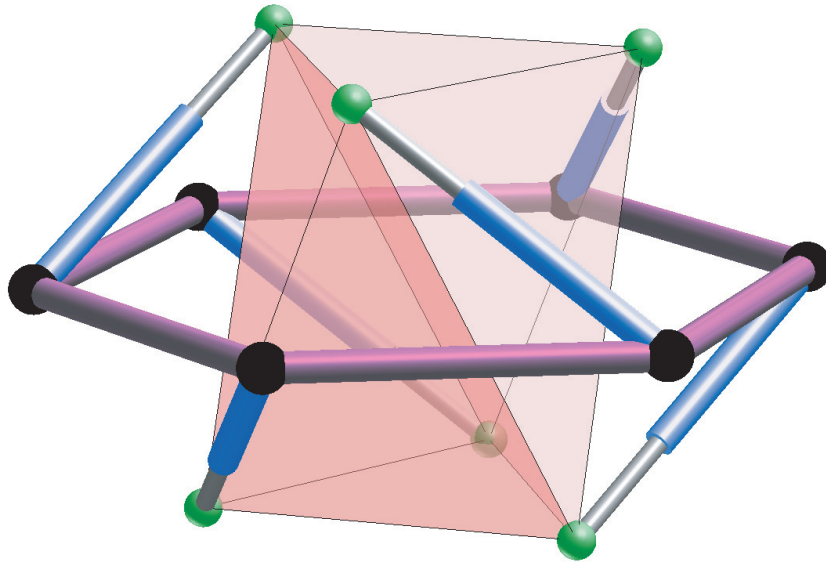


Abbildung 7.11: $\mathcal{K}_M \in \mathcal{L}_H^3$ mit $\mu = \pi/3$ und $\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{\pi}{2}$

In *Abbildung 7.10* und *Abbildung 7.11* sind zwei auf Grund von (7.18) und (7.21) mögliche kombinatorische Typen von Stewart Gough Plattformen der Konfiguration $\mathcal{K}_M \in \mathcal{L}_H^3$ abgebildet. Wir wollen infolge den Manipulator aus *Abbildung 7.11* näher betrachten. Die Koordinaten der Plattform- und Basisankerpunkte lauten nach Umskalierung, wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_1 = -\mathbf{b}_5 &= (1, \sqrt{2}, 0) & \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_5 &= (1, 0, 1) \\
 \mathbf{b}_2 = -\mathbf{b}_6 &= \left(\frac{1 + \sqrt{6}}{-2}, \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-2}, 0 \right) & \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_6 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right) \\
 \mathbf{b}_3 = -\mathbf{b}_4 &= \left(\frac{1 - \sqrt{6}}{-2}, \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{-2}, 0 \right) & \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right).
 \end{aligned}$$

Abbildung 7.15 zeigt den Graph von *CTN* in Abhängigkeit der *z*-Translation. *Abbildung 7.12* illustriert die Isolinien von *CTN*, wenn die Plattform aus der zentralen Konfiguration parallel zur Basisebene verschoben wird. Die Isolinien wurden im Abstand von 0.05 eingezeichnet, wobei die höchste den Wert 0.95 besitzt. Die *Abbildung 7.13*, *7.14* und *7.16* geben die *CTN* - Werte jener Konfigurationen wider, die durch Rotation der Plattform um die *x*-Achse, *y*-Achse bzw. *z*-Achse mit dem Winkel δ (Bogenmaß) hervorgehen.

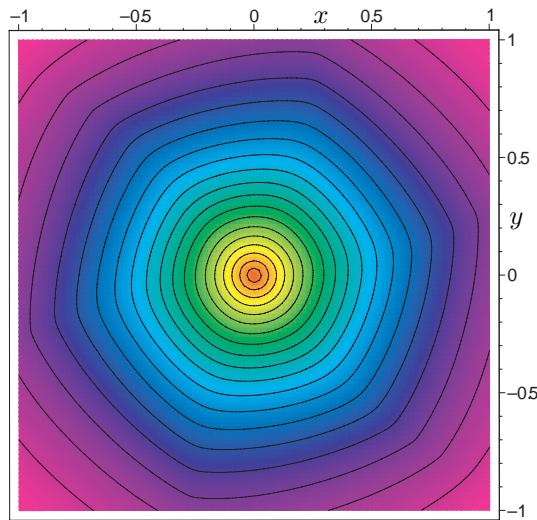


Abbildung 7.12: Translation in xy Ebene

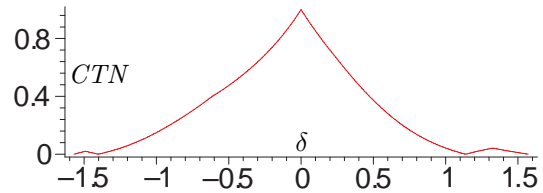


Abbildung 7.13: Rotation um x-Achse

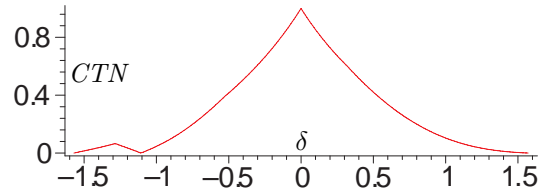


Abbildung 7.14: Rotation um y-Achse

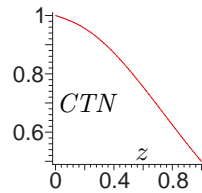


Abbildung 7.15: z-Translation

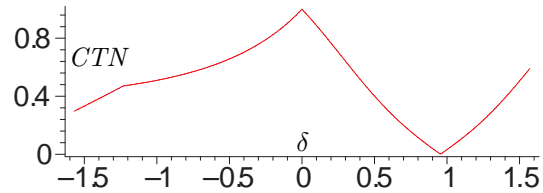


Abbildung 7.16: Rotation um z-Achse

Animation: Stewart Gough Plattform

Die Stewart Gough Plattform aus *Abbildung 7.10*, welche eine optimale Konfiguration bezüglich der *Control Number* besitzt, wurde mit Hilfe des Softwarepaketes *Open Geometry* [11, 12] animiert. Das entsprechende File namens „ANIMATION-SGP“ findet sich wiederum auf der CD, welche dieser Dissertation beiliegt.

Die Plattform kann entweder mit Hilfe der Regler in der Leiste „Adjustments“ oder unter Zuhilfenahme der Maus verschoben werden. Bei festgehaltener linker Maustaste kann die Plattform in x und y Richtung verschoben werden, und bei gedrückter rechter Maustaste können Translationen derselben in z Richtung ausgeführt werden.

Die Rotation der Plattform um deren Schwerpunkt wird, wie folgt, gesteuert: Mit Hilfe der Regler „Winkel a “ und „Winkel b “ können zuerst die Kugelkoordinaten jener Drehachse s durch den Schwerpunkt festgelegt werden, um welche sich die Plattform drehen soll. Dies kann auch mit der festgehaltenen linken Maustaste erfolgen, wenn die Maus zuvor durch Anklicken eines Buttons in der Leiste „Adjustments“ auf Rotationen umgestellt wurde. Mit gedrückter rechter Maustaste bzw. mit dem entsprechenden Regler kann der Drehwinkel der Plattform um s gesteuert werden.

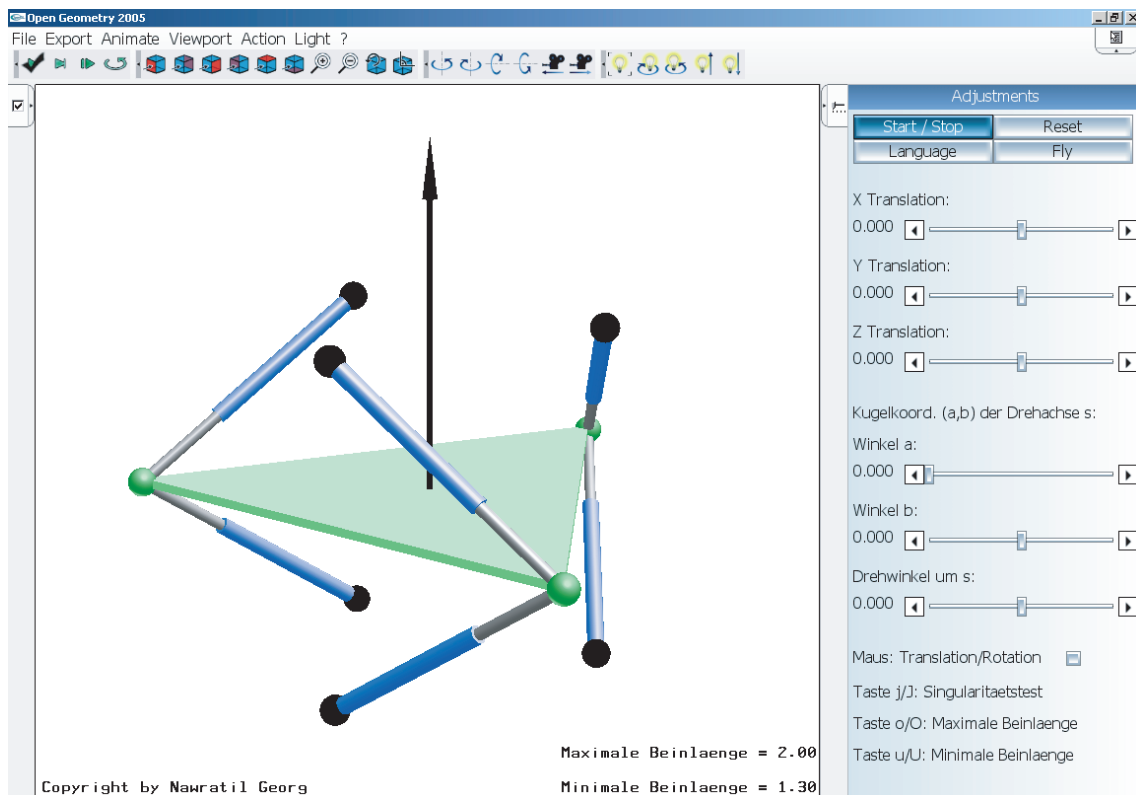


Abbildung 7.17: Screenshot der Arbeitsoberfläche von „ANIMATION-SGP“

Bei dieser Animation wurde der *Constant Orientation Workspace* nicht eingezeichnet, jedoch wird durch eine Farbänderung der Beine angezeigt, ob die entsprechende Konfiguration der Stewart Gough Plattform bei gegebener maximaler bzw. minimaler Beinlänge technisch realisierbar ist.⁶ Falls dem nicht so ist, werden je nachdem ob die minimale bzw. maximale Länge unter- bzw. überschritten wird, die entsprechende Differenz rot eingefärbt. Dies ist auch bei der Animation des 3-dof RPR Manipulators der Fall, jedoch wurde dies zuvor nicht explizit erwähnt.

Jedoch wurde die Singularitätsfläche für eine konstante Orientierung bezüglich des Plattformschwerpunktes eingezeichnet. Nach Karger [24] ist diese für den gegebenen Manipulator stets eine Quadrik, da die Basis mit der Plattform über eine (singuläre) Affinität gekoppelt ist. In diesem konkreten Fall handelt es sich stets um einen z -parallelen Zylinder. Deshalb kann recht einfach durch Betrachten des Grundrisses, in welchen man durch Drücken der Taste j gelangt (zurück mit der Taste J), überprüft werden, ob eine Konfiguration singulär ist oder nicht, da die Singularitätsfläche projektionsbedingt als Kegelschnitt erscheint.

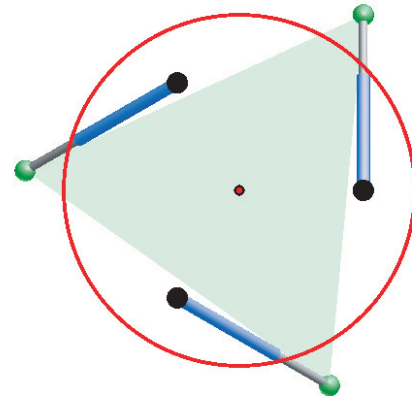


Abbildung 7.18: Grundriß

Aus diesem Grund ist im Grundriß stets ein Kegelschnitt sowie der Plattformschwerpunkt rot eingezeichnet (siehe *Abbildung 7.18*). Die Konfiguration ist somit genau dann singulär, wenn der Schwerpunkt auf dem Kegelschnitt liegt. Jedoch existieren Orientierungen der Plattform, welche unabhängig von der gewählten Translation stets singuläre Lagen nach sich ziehen. In solchen Konfigurationen bzw. in deren unmittelbarer Nähe ist nun kein Kegelschnitt mehr zu sehen, sondern eine rote Kreisscheibe, welche diesen Fall symbolisieren soll.

Bemerkung: Es sei noch bemerkt, dass diese Stewart Gough Plattform singuläre Lagen besitzt, in denen vier Parameter beliebig verändert werden können, ohne an dem Umstand der Singularität etwas zu ändern. Denn wählt man zum Beispiel den Winkel $a = \frac{\pi}{2}$ und den Drehwinkel um s als $\pm \frac{\pi}{2}$, so ist die erhaltene Konfiguration stets singulär, unabhängig davon wie der Winkel b gewählt wird oder welche Translation man anwendet.

⁶Es ist prinzipiell möglich den *Constant Orientation Workspace* mit Hilfe dieses Softwarepaketes für konkrete Konfigurationen zu visualisieren, jedoch ergeben sich bei der Animation Probleme, welche auf interne Differenzen des Programmes zurückzuführen sind.

Kapitel 8

Zusammenfassung

In Kapitel 3 dieser Arbeit wurden zwei neue *EE dependent Performance Indizes* für 6R Roboter eingeführt, nämlich $PI_{OE}(\mathcal{K})$ und $CDN_{OE}(\mathcal{K})$. Beide Indizes stützen sich auf eine objektbezogene Metrik im Raum der Euklidischen Bewegungen und das in dieser Arbeit neu eingeführte *Operation Ellipsoid*.

Auf Basis des Indizes $CDN_{OE}(\mathcal{K})$ konnte eine geometrische Interpretation der *charakteristischen Länge* gegeben werden, weil die *Condition Number*, welche sich dieses Konzeptes bedient, als Spezialfall von $CDN_{OE}(\mathcal{K})$ aufgefaßt werden kann. Da die gegebene Interpretation der *charakteristischen Länge* die ursprüngliche Definition derselben aus den verschiedensten Gründen in Frage stellt, wurde eine Neudefinition der *charakteristischen Länge* vorgeschlagen. Da durch die Definition von $CDN_{OE}(\mathcal{K})$ auch die Beliebigkeit in der Anzahl und Wahl der Referenzpunkte von Gosselins Konzept beseitigt wurde, stellt der Index $CDN_{OE}(\mathcal{K})$ eine Vereinheitlichung der beiden bekannten *CDN*-Indizes dar. Der Index $CDN_{OE}(\mathcal{K})$ kann deshalb ebenfalls wie diese *CDN*-Indizes zur Designoptimierung von 6R Robotern herangezogen werden.

Im vierten Kapitel dieser Dissertation wurden zwei neue *EE independent Performance Indizes* für 6R Roboter eingeführt, welche als Abstandsmaß zur nächstgelegenen Singularität angesehen werden können. Da $DM_{\infty}(\mathcal{K})$ und $DM_2(\mathcal{K})$ auf einer linearen Approximation der Vorwärtskinematik beruhen, ziehen diese beiden Indizes die mechanisch realisierbare Lageveränderung der Drehachsen in Betracht. Diesem Ansatz ist es zu verdanken, dass diese beiden Indizes nicht nur von der momentanen Lage der Drehachsen abhängen, sondern auch von deren Reihenfolge.

Außerdem wurde der Winkel σ definiert, mit dessen Hilfe das Winkelgeschwindigkeitsverhältnis, mit dem eine gegebene Konfiguration durchlaufen wird, evaluiert werden kann.

Als Nebenprodukt unserer Überlegungen wurde noch zu jedem der vier neu eingeführten *Performance Indizes* für 6R Roboter eine gewichtete Version vorgeschlagen, die sich jeweils auf die benötigte Rotationsenergie stützt. Es sei hier nochmals gesagt, dass diese Indizes keine *kinematischen Performance Indizes* sind, da sie von der Masseverteilung des 6R Roboters abhängen.

In Kapitel 5 dieser Arbeit wurde ein *EE dependent Performance Index* für Stewart Gough Plattformen eingeführt. Dabei handelt es sich um das Konzept der *Condition Number* auf Basis des *Operation Ellipsoids* und der objektbezogenen Metrik im Raum der Euklidischen Bewegungen. Die im dritten Kapitel angestellten Überlegungen bezüglich der *charakteristischen Länge* (geometrische Interpretation, Neudefinition) können auf diesen Fall übertragen werden. Da der Index $CDN_{OE}(\mathcal{K})$ wiederum als Vereinheitlichung der beiden existierenden *CDN*-Indizes angesehen werden kann, kann dieser Index auch analog zu den bekannten Methoden für *Robot Design* herangezogen werden. Es wurde eine Menge von isotropen Konfigurationen bezüglich $CDN_{OE}(\mathcal{K})$ berechnet, welche abgesehen von der Anzahl der Beine und der Ähnlichkeit drei frei wählende Parameter besitzt. Im Sonderfall können nicht drei sondern nur zwei Parameter frei gewählt werden.

Ein neuer *EE independent Performance Index* für Stewart Gough Plattformen namens *Control Number* wurde in Kapitel 6 eingeführt. Dieser Index basiert auf den Winkelgeschwindigkeiten in den passiven Gelenken des Manipulators. Die *Control Number* ist nach der *Liniensegment Methode* von Pottmann, Peternell und Ravani erst der zweite dem Autor bekannte Index, welcher nicht nur die momentane Lage der Trägergeraden der Beine in Betracht zieht sondern auch die Lage der Plattform- und Basisankerpunkte auf diesen. Da dieser Index die Geometrie des Manipulators berücksichtigt und nicht vom EE abhängt, kann er auch als Abstandsmaß zur nächstgelegenen Singularität angesehen werden. Dieser Index liefert außerdem eine Methode zur Bestimmung des bestapproximierenden linearen Komplexes der Trägergeraden in der Nähe von Singularitäten automatisch mit.

Da sich die *Control Number* aber nicht nur für *Robot Control* sondern auch zum Vergleich von verschiedenen Konfigurationen unterschiedlicher Manipulatoren eignet, kann der Index auch für *Robot Design* eingesetzt werden. In Kapitel 7 wurde deshalb eine Menge von Konfigurationen mit maximaler *Control Number* berechnet, welche abgesehen von der Anzahl der Beine und der Ähnlichkeit drei frei wählende Parameter besitzt. Bei der Optimierung bezüglich der *Control Number* erhält man, im Gegensatz zu jener bezüglich der *CDN*-Indizes, nicht nur die Trägergeraden der Beine, sondern auch die Lage der Ankerpunkte auf diesen, wodurch die Geometrie der Stewart Gough Plattform bestimmt ist.

Interessant wäre es noch den folgenden Zusammenhang zwischen der *Control Number* und dem Index $CDN_{OE}(\mathcal{K})$ zu klären: Angenommen eine Konfiguration einer Stewart Gough Plattform mit maximaler *Control Number* ist auch isotrop bezüglich der $CDN_{OE}(\mathcal{K})$. Wie muss das *Operation Ellipsoid* bezüglich dem diese Konfiguration isotrop ist zu den Ankerpunkten des Manipulators, welche durch die Optimierung bezüglich der *Control Number* bestimmt sind, liegen? Im Beispiel der Konfiguration \mathcal{K}_M aus *Abbildung 7.10* bzw. *Abbildung 7.11* liegen die Ankerpunkte auf dem *Operation Ellipsoid*. In diesem Fall spannt somit die Stewart Gough Plattform den Bereich des Interesses auf. Dies stimmt mit der Überlegung aus 2.3.1 überein, dass sich die geometrisch-kinematische Interpretation eines *EE independent Performance Indizes* auf den Manipulator als ganzen beziehen muss.

Der Autor dieser Arbeit hofft, dass die neu eingeführten kinematischen *EE dependent* bzw. *EE independent Performance Indizes* auf Grund ihrer Eigenschaften (2.8)–(2.13) bzw. (2.8)–(2.14) auch wirklich Anwendung in der Praxis finden.

Literaturverzeichnis

- [1] Angeles, J., *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Theory, Methods, and Algorithms*. Springer, 2nd Edition (2002).
- [2] Angeles, J., Lopez-Cajun, C.S., *Kinematic Isotropy and the Conditioning Index of Serial Robotic Manipulators*. Int. Journal of Robotics Research 11(6) (1992) 560–571.
- [3] Angeles, J., Rojas, A., *Manipulator inverse kinematics via condition number minimization and continuation*. Int. Journal of Robotics and Automation 2(2) (1987) 61–69.
- [4] Bonev, I.A., *Geometric Analysis of Parallel mechanisms*. Ph.D. Dissertation, Université Laval Quebec (2002).
- [5] Bonev, I.A., Zlatanov, D., Gosselin, C.M., *Singularity Analysis of 3-DOF Planar Parallel Mechanisms via Screw Theory*. Journal of Mechanical Design 125 (2003) 573–581.
- [6] Bottema, O., Roth, B., *Theoretical Kinematics*. Dover Publications (1990).
- [7] Dasgupta, B., Mruthyunjaya, T.S., *The Stewart platform manipulator: a review*. Mechanism and Machine Theory 35(1) (2000) 15–40.
- [8] Dietmaier, P., *The Stewart-Gough Platform of general geometry can have 40 real postures*. Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control (J. Lenarcic, M.L. Husty, eds.), Kluwer (1998) 7–16.
- [9] Doty, K.L., Melchiorri, C., Schwartz, E.M., Bonivento, C., *Robot Manipulability*. IEEE Transactions on Robotics and Automation 11(3) (1995) 462–468.
- [10] Fattah, A., Hasan Ghasemi, A.M., *Isotropic Design of Spatial Parallel Manipulators*. Int. Journal of Robotics Research 21(9) (2002) 811–824.
- [11] Glaeser, G., Schröcker, H.-P., *Geometric Programming using Open Geometry GL*. Springer (2002).
- [12] Glaeser, G., Stachel, H., *Open Geometry*. Springer (1999).
- [13] Gosselin, C.M., *Dexterity Indices for Planar and Spatial Robotic Manipulators*. IEEE Int. Conference on Robotics and Automation 1 (1990) 650–655.

- [14] Gosselin, C.M., *The optimum design of robotic manipulators using dexterity indices*. Robotics and Autonomous Systems 9 (1992) 213–226.
- [15] Hayes, M.J.D., Husty, M.L., Zsombor-Murray, P.J., *Singular Configurations of Wrist-Partitioned 6R Serial Robots: a Geometric Perspective for Users*. Transactions of the CSME 26(1) (2002) 41–55.
- [16] Hestenes, M.R., *Optimization theory*. A Wiley publication (1975).
- [17] Hofer, M., *Variational motion design in the presence of obstacles*. Ph.D. Dissertation, TU Wien, Institut für diskrete Mathematik und Geometrie (2004).
- [18] Hofer, M., Pottmann, H., Ravani, B., *From curve design algorithms to the design of rigid body motions*. The Visual Computer 20(5) (2004) 279–297.
- [19] Husty, M.L., *An algorithm for solving the direct kinematics of Stewart-Gough-type platforms*. Research Report TR-CIM-94-7, Universite McGill, Montreal (1994).
- [20] Husty, M.L., *An algorithm for solving the direct kinematics of general Stewart-Gough platforms*. Mechanism and Machine Theory 31(4) (1996) 365–380.
- [21] Husty, M.L., Hayes, M.J.D., Loibnegger H., *The General Singularity Surface of Planar Three-Legged Platforms*. Advances in Multibody Systems and Mechantronics (A. Kecskemethy, eds.), Gerhard-Mercator-Universität, Duisburg, Germany (1999) 203–214.
- [22] Husty, M., Karger, A., Sachs, H., Steinhilper, W., *Kinematik und Robotik*. Springer (1997).
- [23] Karger, A., *Singularity Analysis of Serial Robot-Manipulators*. Journal of Mechanical Design 118 (1996) 520–525.
- [24] Karger, A., *Stewart-Gough platforms with simple singularity surface*. Advances in Robot Kinematics: Mechanisms and Motion (J. Lenarcic, B. Roth eds.), Springer (2006) 247–254.
- [25] Khan, W.A., Angeles, J., *The Kinetostatic Optimization of Robotic Manipulators: The Inverse and the Direct Problems*. Journal of Mechanical Design 128 (2006) 168–178.
- [26] Kim, S.-G., Ryu, J., *New Dimensionally Homogeneous Jacobian Matrix Formulation by Three End-Effector Points for Optimal Design of Parallel Manipulators*. IEEE Transactions on Robotics and Automation 19(4) (2003) 731–737.
- [27] Lang, J., Mick, S., Röschel, O., *The Rigidity Rate of Positions of Stewart-Gough Platforms*. Journal for Geometry and Graphics 5(2) (2001) 121–132.
- [28] Lee, H.Y., Liang, C.G., *A New Vector Theory for the Analysis of Spatial Mechanisms*. Mechanism and Machine Theory 23(3) (1988) 209–217.

- [29] Lee, J., Duffy, J., *The optimum quality index for some spatial in-parallel devices*. Florida Conference on Recent Advances in Robotics, Gainesville, USA (1999).
- [30] Lee, J., Duffy, J., Keler, J., *The Optimum Quality Index for the Stability of In-Parallel Planar Platform Devices*. ASME Journal of Mechanical Design 121 (1999) 15–20.
- [31] Lee, J., Duffy, J., Hunt, H., *A Practical Quality Index Based on the Octahedral Manipulator*. Int. Journal of Robotics Research 17(10) (1998) 1081–1090.
- [32] McInroy, J.E., Jafari, F., O’Brien, J., *Tri-symmetric orthogonal Gough-Stewart platforms*. IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, Barcelona, Spain (2005) 948–953.
- [33] Merlet, J.-P., *Singular Configurations of Parallel Manipulators and Grassmann Geometry*. Int. Journal of Robotics Research 8(5) (1992) 45–56.
- [34] Merlet, J.-P., *Jacobian, Manipulability, Condition Number, and Accuracy of Parallel Robots*. Journal of Mechanical Design 128 (2006) 199–206.
- [35] Merlet, J.-P., *Parallel Robots*. Springer, 2nd Edition (2006).
- [36] Mohammadi Daniali, H.R., Zsombor-Murray, P.J., Angeles, J., *The Isotropic Design of Two General Classes of Planar Parallel Manipulators*. Journal of Robotic Systems 12(12) (1995) 795–805.
- [37] Nawratil, G., *Zur Geometrie von Stewart Gough Plattformen*. Diplomarbeit, TU Wien, Institut für diskrete Mathematik und Geometrie (2004).
- [38] Nawratil, G., *New Performance Indices for 6R Robot Postures*. CD-Proceedings of the 1st EuCoMeS (M. Husty, H.P. Schröcker, eds.), Obergurgl, Austria (2006).
- [39] Nawratil, G., *The Control Number as Index for Stewart Gough Platforms*. Advances in Robot Kinematics: Mechanisms and Motion (J. Lenarcic, B. Roth eds.), Springer (2006) 15–22.
- [40] Nawratil, G., *New Performance Indices for 6R Robots*. Mechanism and Machine Theory, to appear.
- [41] Odehnal, B., Pottmann, H., Wallner, J., *Equiform Kinematics and the geometry of line elements*. Beiträge zur Algebra und Geometrie 48 (2007), to appear.
- [42] Pernkopf, F., *Workspace analysis of Stewart-Gough platforms*. Ph.D. Dissertation, University of Innsbruck, Institute of Engineering Mathematics, Geometry and Computer Sciences (2003).
- [43] Pittens, K.H., Podhorodeski, R.P., *A Family of Stewart Platforms with Optimal Dexterity*. Journal of Robotic Systems 10(4) (1993) 463–479.
- [44] Pottmann, H., Wallner, J., *Computational Line Geometry*. Springer (2001).

- [45] Pottmann, H., Peternell, M., Ravani, B., *Approximation in line space - applications in robot kinematics and surface reconstruction*. Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control (J. Lenarcic, M. Husty eds.), Kluwer (1998) 403–412.
- [46] Salisbury, J.K., Craig, J.J., *Articulated Hands: Force Control and Kinematic Issues*. Int. Journal of Robotics Research 1(1) (1982) 4–17.
- [47] Stachel, H., *Skriptum zur Vorlesung über Projektive Geometrie*. TU Wien, Institut für Geometrie (1999-2001).
- [48] Stachel, H., *Skriptum zur Vorlesung über Höhere Kinematik*. TU Wien, Institut für Geometrie (2001-2002).
- [49] Stafetti, E., Bruyninckx, H., De Schutter, J., *On the invariance of manipulability indices*. Advances in Robot Kinematics (J. Lenarcic, F. Thomas, eds.), Kluwer (2002) 57–66.
- [50] Tandirci, M., Angeles, J., Ranjbaran, F., *The Characteristic Point and the Characteristic Length of Robotic Manipulators*. Proc. ASME 22nd Biennial Conf. Robotics, Spatial Mechanisms, and Mechanical Systems 45 (1992) 203–208.
- [51] Tsai, K.Y., Huang, K.D., *The design of isotropic 6-DOF parallel manipulators using isotropy generators*. Mechanism and Machine Theory 38(11) (2003) 1199–1214.
- [52] Tsai, K.Y., Zhou, S.R., *The Optimum Design of 6-DOF Isotropic Parallel Manipulators* Journal of Robotic Systems 22(6) (2005) 333–340.
- [53] Voglewede, P.A., Ebert-Uphoff, I., *Measuring „Closeness“ to Singularities for Parallel Manipulators*. IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, New Orleans, USA (2004) 4539–4544.
- [54] Wolf, A., Shoham, M., *Investigations of Parallel Manipulators Using Linear Complex Approximation*. Journal of Mechanical Design 125 (2003) 564–572.
- [55] Yoshikawa, T., *Manipulability of Robotic Mechanisms*. Int. Journal of Robotics Research 4 (2) (1985) 3–9.
- [56] Zanganeh, K.E., Angeles, J., *Kinematic Isotropy and the Optimum Design of Parallel Manipulators*. Int. Journal of Robotics Research 16(2) (1997) 185–197.
- [57] Zhang, Y., *Quality index and kinematic analysis of spatial redundant in-parallel manipulators*. Ph.D. Dissertation, University of Florida (2000).

C U R R I C U L U M V I T A E

Geboren am 25.11.1979 in St. Pölten
Staatsangehörigkeit: Österreich
Familienstand: ledig

Georg Nawratil
Stauwerkstraße 9
3370 Ybbs/Donau

Ausbildung

- 1986-1990** Volksschule Ybbs
1990-1998 Gymnasium Wieselburg - Matura am 8. Juni 1998 mit ausgezeichnetem Erfolg bestanden
1998-1999 Dienst am Staat
Okt. 1999 Beginn des Studiums der Darstellenden Geometrie und Mathematik (LA) an der TU Wien
WS 00/01 Tutor für die VU „Grundkurs Architektur und Darstellung – Darstellende Geometrie“
April 2004 Beendigung des Studiums in Mindeststudienzeit und mit Auszeichnung
Juni 2004 Verleihung des akademischen Grades Mag.rer.nat.
Okt. 2004 Beginn des Doktoratsstudiums (Dr.tech.) am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie der TU Wien
Seit Juli 06 FWF Assistent im Projekt „Industrial Geometry“ von O.Univ.Prof. Dr. Helmut Pottmann
Seit Nov. 06 Universitätsassistent am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie

Diplomarbeit

- Nawratil G.** Zur Geometrie von Stewart Gough Plattformen, Diplomarbeit, ausgeführt am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie der TU Wien unter der Anleitung von O.Univ.Prof. Dr. Hellmuth Stachel, März 2004.

Wissenschaftliche Arbeiten

- Nawratil G.** New Performance Indices for 6R Robot Postures, Proceedings of the 1st EuCoMeS (M. Husty and H.P. Schröcker, editors), 12pp., Obergurgl February 21–26 2006, Austria, ISBN 3-901249-85-0.
- Nawratil G.** The Control Number as Index for Stewart Gough Platforms, Advances in Robot Kinematics: Mechanisms and Motion (J. Lenarcic and B. Roth, editors), Springer, 15–22, Ljubljana June 25–29 2006, Slovenia, ISBN 978-1-4020-4940-8.
- Nawratil G.** New Performance Indices for 6R Robots, Mechanism and Machine Theory, to appear.

Wissenschaftliche Vorträge

- Nawratil G.** Geometrie Tagung des Instituts für Geometrie der TU Graz, Stift Vorau June 6–11 2004, Austria, Title: Zur Geometrie der Stewart Gough Plattformen – ein Nachtrag.
- Nawratil G.** 1st European Conference on Mechanism Science (EuCoMeS), Obergurgl February 21–26, Austria, paper presentation.
- Nawratil G.** 10th International Symposium on Advances in Robot Kinematics, Ljubljana June 25–29, Slovenia, paper presentation.
- Nawratil G.** 3rd FSP Seminar, Obergurgl Sept. 4–5 2006, Title: Distance computations in kinematics.

Preise/Förderungen

- Juni 2004** Gewinner des HTU Diplomarbeitspreises für die beste Diplomarbeit im Studienjahr 2003/04 in der Kategorie Lehramtsstudien.