Das Teilverhältnis $TV(ABC)$ von drei Punkten ABC einer Geraden ist folgendermaßen definiert: Für den Betrag des Teilverhältnisses gilt $\mid (ABC) \mid = \overline{AC} : \overline{BC}$. Für das Vorzeichen des Teilverhältnisses gilt: $TV(ABC) < 0$, wenn C innerhalb der Strecke AB liegt, $TV(ABC) \geq 0$, wenn C ausserhalb der Strecke AB liegt oder $C = A$ oder $C = B$.

Man sagt: "Vier Punkte A, B, C, D (in dieser Reihenfolge) auf einer Geraden liegen harmonisch", wenn $TV(ABC) = -TV(ABD)$. (C bzw. D teilen die Strecke AB innen und außen im selben Verhältnis).

Satz 1. *Sei ABC ein Dreieck. Genau dann ist W_i der Schnittpunkt einer Winkelsymmetrale von $\angle ACB$ durch C mit der Gegenseite, wenn*

$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AW_i} : \overline{BW_i}$

Beweis:

Voraussetzung: W_i seien die Schnittpunkte der Winkelsymmetralen mit der Gegenseite

Durch Anwendung des Strahlensatzes folgt:

$\overline{AW_i} : \overline{BW_i} = \overline{AC} : \overline{B_iC} = \overline{AC} : \overline{BC}$

Voraussetzung: Für den Punkt W gelte $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AW} : \overline{BW} = \mid TV(ABW) \mid$

$W_i = w_i \cap c$ seien die Schnittpunkte der Winkelsymmetralen mit der Gegenseite. Nach obigen gilt dann für die Punkte W_i:

$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AW_1} : \overline{BW_2} == \overline{AW_2} : \overline{BW_2}$

Somit ist (abhängig vom Vorzeichen von $TV(ABW)$ entweder $W = W_1$ oder $W = W_2$, da $TV(ABX)$ den Punkt X eindeutig festlegt.

Aus diesen Überlegungen folgt:

Korrolar:

Seien A, B, E, F vier Punkte einer Geraden und C ein Punkt ausserhalb dieser Geraden und $[CE] \perp [CF]$, dann liegen A, B, E, F genau dann harmonisch, wenn $[CE]$ und $[CF]$ die Winkelsymmetralen von $[CA]$ und $[CB]$ sind.

Satz 2. *Die Menge aller Punkte C, für die $\overline{AC} : \overline{BC} = k > 0$ konstant ist, ist der Kreis k (Kreis des Apollonius) über dem Durchmesser EF mit $TV(ABE) = -k$, $TV(ABF) = k$.*

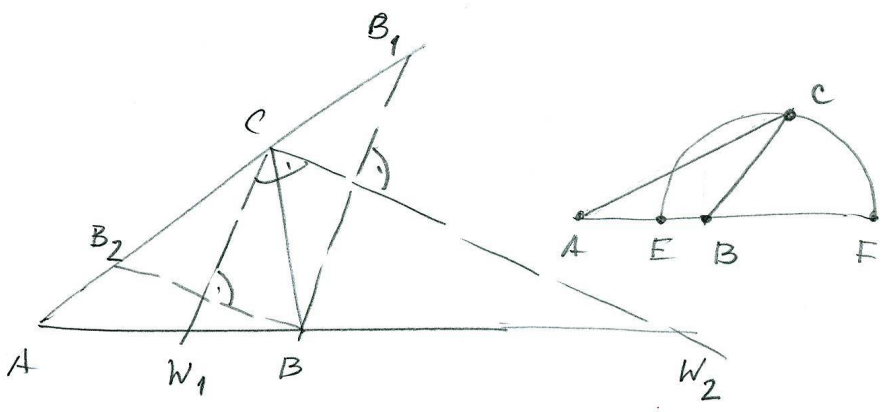
Beweis:

Voraussetzung: $\overline{AC} : \overline{BC} = k > 0$

Für die Punkte E mit $TV(ABE) = -k$ und F mit $TV(ABF) = k$ folgt nach Satz 1, dass [CE] und [CF] die Winkelsymmetralen des Winkels ACB sind. Daher gilt $[CE] \perp [CF]$ und C liegt nach dem Satz von Thales auf dem Kreis k über dem Durchmesser EF.

Voraussetzung: $C \in k$, $TV(ABE) = -k$, $TV(ABF) = k$

Nach dem Satz von Thales gilt $CE \perp CF$. Nach obigem Korollar gilt $\angle ACE = \angle ECB$ und nach Satz 1 folgt die Aussage.



Satz 1. *Die Menge aller Punkte C von welchen aus die Strecken AE und EB auf einer Geraden unter gleichem Winkel ($\neq 0$) erscheinen, ist der Kreis k (Kreis des Apollonius) über dem Durchmesser EF wobei $ABEF$ harmonisch liegen.*

Beweis:

Voraussetzung: $\angle ACE = \angle ECB$

Nach dem Korollar im Abschnitt "Satz des Apollonius I" folgt $[CE] \perp [CF]$ und C liegt auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser EF.

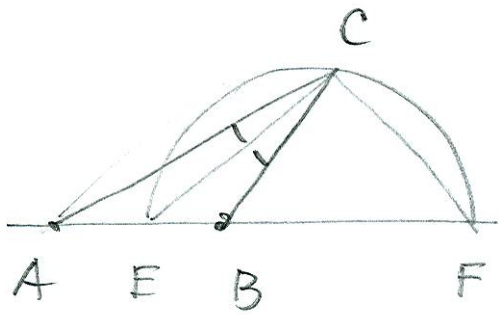
Voraussetzung: $C \in k$

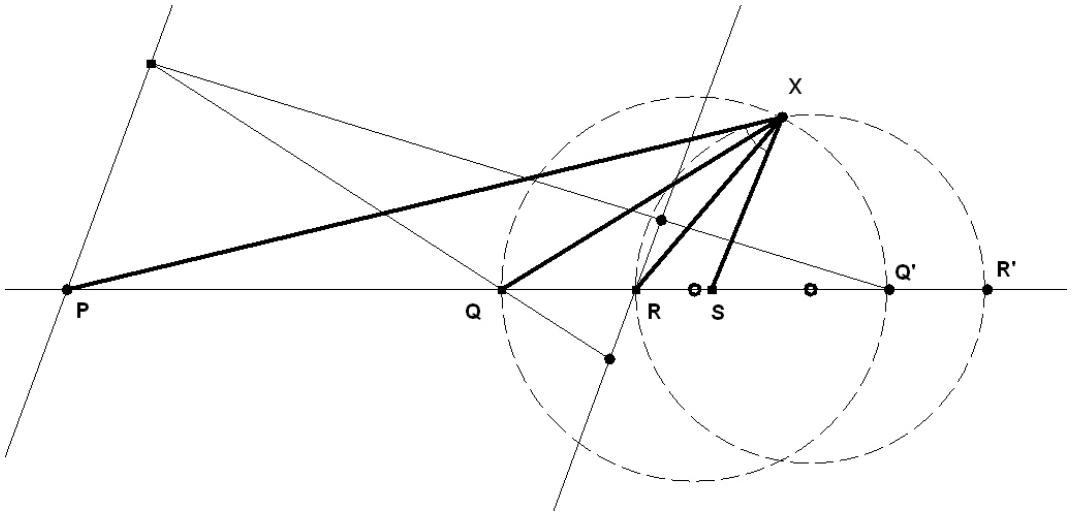
Daraus folgt $[CE] \perp [CF]$. Da weiters $ABEF$ harmonisch liegen folgt aus dem Korollar im Abschnitt "Satz des Apollonius I", dass $\angle ACE = \angle ECB$.

Damit kann etwa folgende Aufgabe gelöst werden:

Aufgabe: Gegeben sind die Punkte P, Q, R, S auf einer Geraden. Bestimme die Punkte X, sodass $\angle PXQ = \angle QXR = \angle RXS$.

Lösung: Wir bestimmen zuerst die Menge aller Punkte, für die $\angle PXQ = \angle QXR$. Das ist ein Kreis über dem Durchmesser QQ', wobei die Punkte $PRQQ'$ harmonisch liegen. Die für die Punkte PQR durchgeführte Konstruktion wenden wir in analoger Weise auf QRS an und schneiden die beiden Ortslinien.





Den Schwerpunkt eines Systems von n Massenpunkten berechnet man, indem man iterativ die Masse im Schwerpunkt eines Teilsystems konzentriert.

Für ein Massensystem mit zwei Massen, Masse α im Punkt P mit Ortsvektor $\mathbf{p}$ und Masse β im Punkt Q mit Ortsvektor $\mathbf{q}$, berechnet man den Schwerpunkt (unter Berücksichtigung des "Hebelgesetzes") durch

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{1}}{\alpha+\beta}(\beta\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}) \tag{1}$$

Nun seien die Punkte P_i $(i = 1, \ldots, n)$ mit den Ortsvektoren $\mathbf{p}_i$ und den Gewichten $\gamma_i > 0$ gegeben. Dann hat der *Schwerpunkt* S den Ortsvektor

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{1}}{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \gamma_\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \gamma_\mathbf{i}\mathbf{p_i} \tag{2}$$

$$\left(\frac{\text{Summe der gewichteten Ortsvektoren}}{\text{Summe der Gewichte}}\right)$$

Beweis: durch vollständige Induktion

Induktionsanfang: $n = 2$, gilt gemäß "Hebelgesetz".

Induktionsannahme: Die Behauptung ist für n bewiesen.

Induktionsschluß: $n \to n+1$

Nach Induktionsannahme gilt:

$$\mathbf{s}_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{p}_i \tag{3}$$

S ist Schwerpunkt von S_n (belastet mit $\sum_1^n \gamma_i$ und P_{n+1} (belastet mit γ_{n+1}.

Nach 1.7.1 folgt:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i\right)\mathbf{s}_n + \gamma_{n+1}\mathbf{p}_{n+1}\right] = \frac{1}{\sum_{i=1}^{1+n} \gamma_i}\left[\sum_{i=1}^{n} \gamma_i\mathbf{p}_i + \gamma_{n+1}\mathbf{p}_{n+1}\right] \tag{4}$$

Flächenschwerpunkt des Dreiecks

Die Fläche des Dreiecks $A_1A_2A_3$ sie gleichmäßig mit Masse belegt. Jede Schwerlinie, das ist eine Gerade, welche die Fläche des Dreiecks halbiert, geht durch den Schwerpunkt. Wegen der Flächenformel eines Dreiecks (Grundlinie x Höhe /2) können wir drei spezielle Schwerlinien einfach angeben, nämlich die Verbindungsgeraden einer Ecke A_i mit der Mitte M_i der gegenüberliegenden Seite. Aufgrund der physikalischen Eigenschaft der Schwerlinien gehen diese drei Schwerlinien durch einen Punkt den "Flächenschwerpunkt" S_f des Dreiecks. Durch Anwendung des Strahlensatzes folgt:

$$\overline{A_3A_1} : \overline{M_2A_1} = \overline{A_2A_1} : \overline{M_3A_1} = \overline{SA_1} : \overline{SM_1} = 2 : 1$$

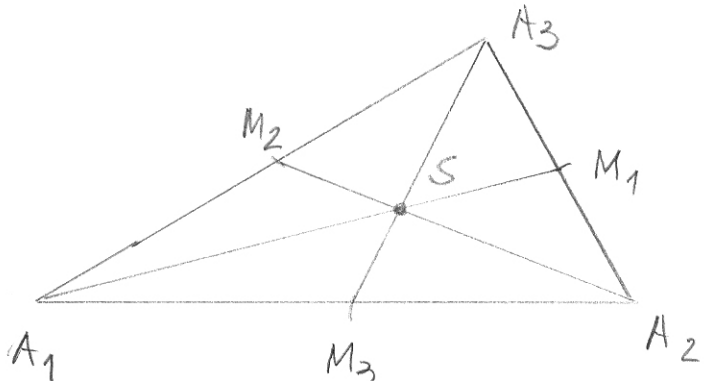
d.h. der Schwerpunkt teilt die Strecke A_1M_1 im Verhältnis 2:1.

Eckenschwerpunkt des Dreiecks

Nun sollen nur in den Ecken des Dreiecks gleich größe Massen α angebracht sein. Zwei solche Massen kann man durch die Masse 2α im Mittelpunkt einer Seite ersetzen. Durch Anwendung der Formel für zwei Massen oder gleich Anwendung der Formel für n Massen erhält man den Ortsvektor des Schwerpunktes

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \mathbf{a_3}) \tag{5}$$

und erkennt, dass der Eckenschwerpunkt mit dem Flächenschwerpunkt des Dreiecks übereinstimmt.



Kantenschwerpunkt des Dreiecks

Belegt man die Kanten eines Dreiecks (entsprechend ihrer Länge a_i) homogen mit Masse, so kann man dieses System ersetzen, durch jenes, bei dem in den Seitenmitten M_i die Massen a_i angebracht sind. Für den Kantenschwerpunkt ergibt sich damit

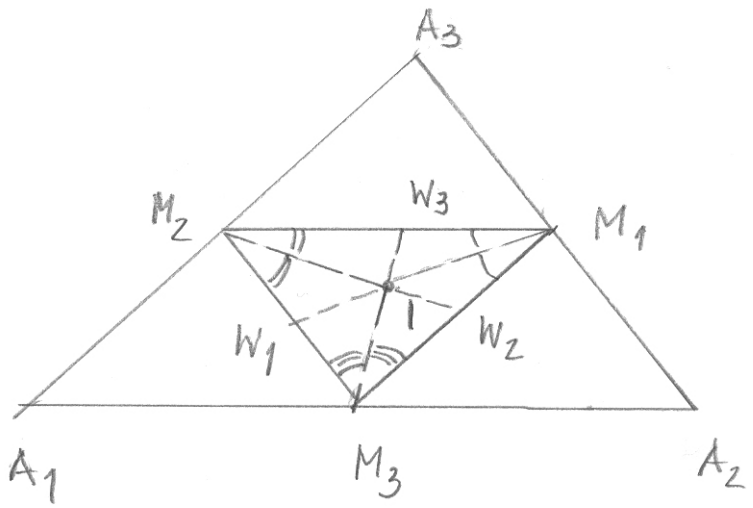
$$(1) \quad \mathbf{s}_k = \frac{a_3(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + a_1(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) + a_3(\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1)}{2(a_1 + a_2 + a_3)}$$

Führt man die Konstruktion schrittweise durch, so fasst man die Massen in M_j und M_k zur Masse $a_j + a_k$ im Punkt W_i zusammen, der die Strecke M_jM_k im Verhältnis $a_j : a_k$ teilt. Der Schwerpunkt s_k liegt dann auf der Verbindungsgerade M_iW_i.

Da W_i die Strecke M_jM_k im Verhältnis $a_j : a_k$ teilt und sich die Seiten M_iM_j und M_iM_k des Mittendreiecks wie $a_j : a_k$ verhalten, folgt aus dem Abschnitt "Satz des Apollonius I", dass W_iM_i Winkelsymmetrale des Mittendreiecks ist.

Analoge Überlegungen nach zyklischer Vertauschung lassen erkennen:

Satz 1. *Der Kantenschwerpunkt eines Dreiecks ist der Inkreismittelpunkt seines Mittendreiecks.*



Gegeben ist ein konvexes Viereck $ABCD$. Bestimme seinen Flächenschwerpunkt S.

1. Methode:

Wir zerlegen das Viereck $ABCD$ in die beiden Dreiecke ABD und CBD und bestimmen deren Schwerpunkte S_A bzw. S_C. Der Schwerpunkt S des Vierecks $ABCD$ liegt dann auf der Strecke S_AS_C und teilt sie im umgekehrten Verhältnis der Dreiecksflächen. Da die beiden Dreiecke die gemeinsame Seite BD besitzen gilt für deren Flächen $F_A : F_C = h_A : h_C$ wobei h_A bzw. h_C die Normalabstände der Punkte A bzw C von BD bedeuten.

T_{AC} bezeichne den Schnittpunkt von S_AS_C mit BD. Aus der Konstruktion der Schwerpunkte S_A und S_C als Schnittpunkt der Schwerlinien und aus dem Strahlensatz erkennen wir, dass S_AS_C parallel zu AC ist, und dass $\overline{S_AT_{AC}} : \overline{S_CT_{AC}} = F_A : F_C$. Für S muss gelten $\overline{S_AS} : \overline{S_CS} = F_C : F_A$. Daher entsteht S durch Spiegelung von T_{AC} am Mittelpunkt der Strecke S_AS_C.

Eine analoge Konstruktion ergibt sich durch Zerlegung von $ABCD$ durch die Diagonale AC.

2. Methode:

S kann als Schnittpunkt zweier Schwerlinien konstruiert werden. Man muss also nicht S durch Bestimmung des Teilverhältnisses mit S_AS_C bestimmen sondern erhält S als Schnittpunkt von S_AS_C und S_BS_D

3. Methode: Wittenbauer Parallelogramm

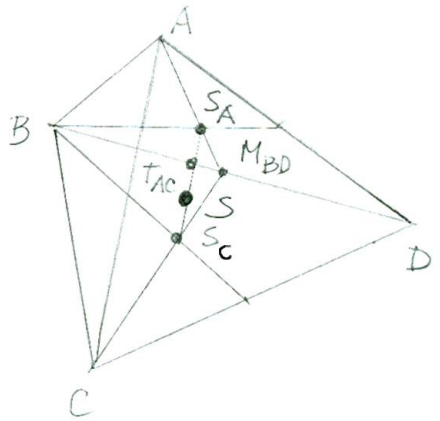
Drittelt man die Seiten des konvexen Vierecks $ABCD$ und verbindet man jeweils die beiden nächstliegenden Punkte einer Ecke so entsteht das Wittenbauer Parallelogramm $W_{AB}W_{BC}W_{CD}W_{AD}$.

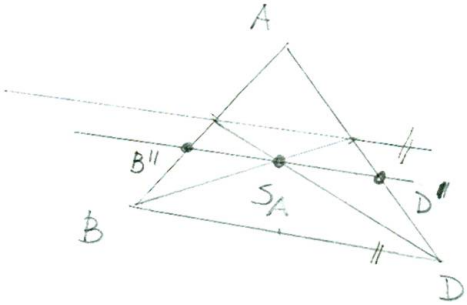
Wir betrachten zuerst das Dreieck ABD. Wir wissen aus früheren Überlegungen: Bezeichnet M_{CD} den Mittelpunkt der Strecke CD, so teilt der Schwerpunkt S_A von ABD die Strecke AM_{CD} im Verhältnis $2 : 1$. Durch Anwendung des Strahlensatzes erkennt man: Teilt B'' die Strecke AB und D' die Strecke AD jeweils im Verhältnis $2 : 1$ so ist S_A Mittelpunkt der Strecke $B''D'$.

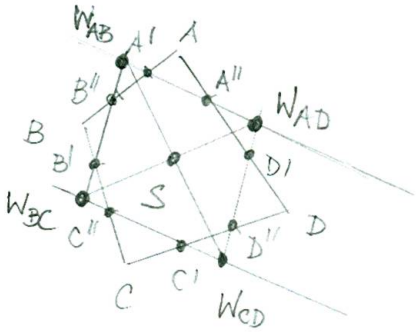
Führt man die analoge Konstruktion mit dem Dreieck CBD durch, so erkennt man (vgl. Figur): $B''B'D''D'$ ist ein Parallelogramm und dessen Mittellinie S_AS_C eine Schwerlinie des Vierecks $ABCD$. Diese Mittelline ist auch eine Mittelline des Wittenbauer Parallelogramms.

Betrachtet man nun die analoge Konstruktion mit den durch die Diagonale AC bestimmten Teildreiecken so erkennt man insgesamt:

Der Schwerpunkt S von $ABCD$ ist Schnittpunkt der Mittellinien und somit auch Schnittpunkt der Diagonalen des zu $ABCD$ gehörigen Wittenbauer Parallelogramms $W_{AB}W_{BC}W_{CD}W_{AD}$.







Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$ durch die Ortsvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$. Bestimme seinen Eckenschwerpunkt S.

Dazu fassen wir die in den Ecken liegenden Massen sukzessive zusammen. Da wir so mit verschiedenen Konstruktionen zum selben Punkt gelangen ergeben sich daraus geometrische Schließungssätze.

Durch Anwendung des Strahlensatzes oder Vergleich der Richtungsvektoren erkennen wir, dass die Seitenmitten $S_{AB}, S_{BC}, S_{CD}, S_{DA}$ in dieser Reihenfolge die Ecken eines Parallelogramms sind, das wir kurz als "Mittenparallelogramm" des Vierecks bezeichnen.

1. Methode:

Wir fassen zuerst die Massen der benachbarten Ecken A und B bzw. C und D zusammen und erhalten die Schwerpunkte S_{AB} bzw. S_{CD} mit den Ortsvektoren

$$\mathbf{s_{AB}} = \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \text{ bzw. } \mathbf{s_{CD}} = \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{c}+\mathbf{d})$$

Der Schwerpunkt S ist dann Mittelpunkt der Strecke $S_{AB}S_{AC}$ und hat den Ortsvektor

$$\mathbf{s} = \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{s_{AB}}+\mathbf{s_{CD}}) = \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$$

Analog verfahren wir mit AD und BC und erkennen:

Der Eckenschwerpunkt S ist der Schnittpunkt der Diagonalen des Mittenparallelogramms.

2. Methode:

S ist als Diagonalenschnittpunkt des Mittenparallelogramms auch Schnittpunkt der Mittellinien des Mittenparallelogramms.

Dies kann man mit einer Schwerpunktskonstruktion so erkennen: Wir teilen in jeder Ecke die Masse der Einheit 1 auf zwei Massen der Einheit 1/2 auf und fassen die Massen der Einheit 1/2 benachbarter Punkte zu Massen der Einheit 1 in den Mittelpunkten $S_{AB}, S_{BC}, S_{CD}, S_{DA}$ der Seiten des Vierecks zusammen. Bezeichnet M_A den Mittelpunkt der Strecke $S_{AB}S_{DA}$, usf. so gilt

$$\mathbf{m_A} = \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{s_{AB}}+\mathbf{s_{DA}}) \text{ usf.}$$

und weiters

$$\mathbf{s} = \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{m_A}+\mathbf{m_C}) = \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{m_B}+\mathbf{m_D})$$

S ist der Schnittpunkt der Mittellinien des Mittenparallelogramms.

3. Methode

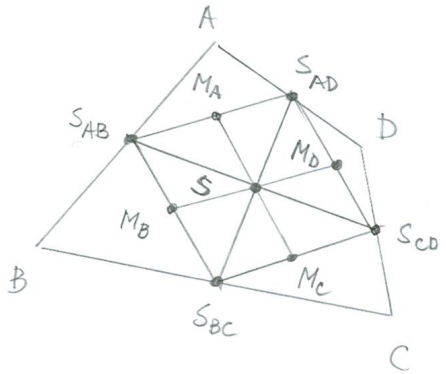
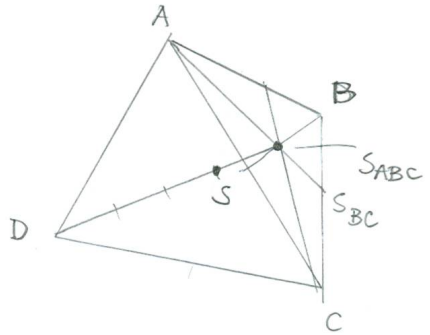
Wir fassen nun zuerst die Massen gegenüberliegender Ecken in den Mittelpunkten S_{AC} und S_{BD} zusammen und erkennen.

S ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Diagonalenmitten von $ABCD$.

4. Methode

Wir fassen die Masse der drei Ecken ABC im Schwerpunkt S_{ABC} des Dreiecks ABC zusammen. Dort befindet sich nun eine Masse mit 3 Einheiten. Nun bestimmen wir den Schwerpunkt des Massensystems mit einer Masse mit einer Einheit in D und 3 Einheiten in S_{ABC}. S teilt daher die Strecke AS_{ABC} im Verhältnis $3:1$. Analoges gilt für die Betrachtung der anderen 3 Teildreicke.

S enthält die Verbindungsstrecken des Schwerpunktes eines Teildreiecks mit der restlichen Ecke.

Aus den obigen Überlegungen können wir auch folgende Konstruktion des Schwerpunktes herleiten:

Wir verbinden die Ecke A mit der Mitte S_{BC} der gegenüberliegenden Seite BC und bestimmen den Punkt S_{ABC} der die Strecke AB im Verhältnis $2:1$ teilt. Wir verbinden diesen Punkt mit der noch nicht verwendeten Ecke D und finden S als jenen Punkt, der die Strecke DS_{ABC} im Verhältnis 3:1 teilt.