

# Diplomarbeit

zum Thema

## Konstruktive Behandlung von Regelflächen mit CAD-Software anhand ausgewählter Beispiele für den Schulunterricht

ausgeführt am

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie  
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao. Univ.-Prof. Dr. Wolfgang Rath

und

Vertr.Ass. Dr. Andreas Asperl

als verantwortlich mitwirkender Assistent

durch

Christine List

1080 Wien, Langegasse 44

Wien, Februar 2004

# Vorwort

In den letzten Jahren konnte ich wertvolle Erfahrungen mit dem Einsatz des Computers im Schulunterricht sammeln. Insbesondere die Projekte und Schulversuche, in denen im Geometrieunterricht CAD-Paketen eine zentrale Rolle zukommt, habe ich als sehr positiv wahrgenommen. Ich halte diese neue Form des Geometrieunterrichtes für zukunftsweisend, weshalb ich mich im Rahmen meiner Diplomarbeit mit dieser Thematik auseinandersetzen wollte. Ich will mit dieser Arbeit einen Beitrag leisten, den Einsatz von CAD-Paketen im Unterricht weiter zu entwickeln und für mehr Lehrer und Schüler zu ermöglichen. Ich hoffe, dass die in dieser Diplomarbeit enthaltenen Beispiele und Arbeitsblätter im Unterricht Verwendung finden.

Mein Dank gilt meinen Betreuern, Univ.-Prof. Dr. Rath und Dr. Asperl für die intensive Betreuung, Hilfestellung und viele gute Anregungen.

Weiters möchte ich mich bei meinen Eltern für deren großzügige Unterstützung bedanken, die nicht zuletzt durch ihre finanziellen Zuwendungen mein Studium erst ermöglicht haben.

Nicht unerwähnt sollen in diesem Zusammenhang meine Studienkollegin Ruth und mein Freund Stephan bleiben, ohne deren Geduld und Einsatzfreude wohl der eine oder andere Erfolg in meinem Studium nicht möglich gewesen wäre.

Schließlich bedanke ich mich bei Florian für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

# Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Behandlung von Regelflächen mittels CAD-Software untersucht, sowie die Möglichkeiten des Einsatzes im Schulunterricht anhand von Beispielen demonstriert. Einerseits ist der Text allgemein gehalten, die theoretischen Aussagen und praktischen Beispiele können also unabhängig von einer konkreten Software zur Anwendung kommen. Andererseits wird die konkrete Durchführung mit dem Programm MicroStation Version 8.1 dargestellt (die Abschnitte des Textes, die sich auf den Einsatz von MicroStation Version 8.1 beziehen, sind durch kursiv geschriebenen Text erkennbar).

Im ersten Kapitel wird kurz auf die allgemeine Theorie zu Regelflächen eingegangen, wobei neben einer Definition von Regelflächen auf die Erzeugenden von Regelflächen, unterschiedliche Arten von Regelflächen, Tangentialebenen und Festlegungen von Regelflächen eingegangen wird. Diese theoretischen Grundlagen sind für das Verständnis der nachfolgenden Arbeit essenziell.

Im zweiten Kapitel wird die Funktionsweise von CAD-Software zur Konstruktion von Freiformkurven und -flächen dargestellt. Einen Schwerpunkt dieses Kapitels bildet die Erarbeitung der theoretischen Grundlagen zu B-Spline-Kurven und -Flächen, wobei hierfür von Bezier-Kurven und -Flächen ausgegangen wird. Spezielles Augenmerk wird diesbezüglich auf die Frage gelegt, inwiefern CAD-Software zur Konstruktion von Kurven und Flächen mit Hilfe von Freiformkurven und -flächen auf Approximationen zurückgreifen muss, oder ob diese Kurven und Flächen dadurch exakt dargestellt werden können. Anhand konkreter Beispiele, die auch praktisch mittels MicroStation umgesetzt werden, können die theoretischen Grundlagen eindrücklich veranschaulicht werden.

Das dritte Kapitel schließlich stellt den eigentlichen Kern dieser Arbeit dar. Anhand zahlreicher Beispiele, die sowohl allgemein als auch konkret mittels MicroStation erarbeitet werden, werden die wichtigsten speziellen Regelflächen dargestellt. Dies sind Konoide, HP-Flächen, einschalige Hyperboloide und Regelschraubflächen. Abschließend wird als Beispiel für eine allgemeine Regelfläche das Möbiusband und seine Konstruktionsweise beschrieben. Die Beispiele unterstreichen die praktische Relevanz des Themas, da sie aus konkreten Fragestellungen der Architektur, der Technik und des Designs abgeleitet werden. Im dritten Kapitel wird besonderes Augenmerk darauf gelegt, dass der Konstruktionsweg nachvollziehbar dargestellt ist und die Beispiele daher leicht konstruiert werden können. Anhand der Beispiele können die zentralen Eigenschaften von Regelflächen im Allgemeinen und von den konkret beschriebenen Regelflächen im Speziellen nachvollzogen und verstanden werden.

Im vierten Kapitel finden sich alle Beispiele sowie eine Kurzdarstellung des Konstruktionsweges als Arbeitsblätter, die für den unmittelbaren Einsatz im Unterricht geeignet sind.

Die Arbeit ist insofern als aufbauend zu betrachten, als die theoretischen Grundlagen des ersten und zweiten Kapitels für das Verständnis und die praktische Umsetzung der Beispiele im dritten Kapitel notwendig sind. Die Beispiele selbst können jedoch unabhängig von einander eingesetzt werden.

Einige der Materialien werden auch im Internet unter <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/rath/student/list> bereitgestellt.

Dieser Arbeit liegt eine CD bei, auf der alle Beispiele in elektronischer Form zu finden sind.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> .....	<b>2</b>
<b>Kurzfassung</b> .....	<b>3</b>
<b>1 Theorie über Regelflächen</b> .....	<b>7</b>
1.1 Allgemeines über Regelflächen .....	7
<b>2 Kurven und Flächen in CAD-Software</b> .....	<b>9</b>
2.1 Freiformkurven .....	9
2.1.1 Bezier-Kurven .....	10
2.1.2 Rationale Bezierkurven .....	14
2.1.3 Zusammengesetzte Bezier-Kurven .....	15
2.1.4 Exakte Darstellung oder Approximation .....	18
2.1.5 B-Spline-Kurven .....	18
2.1.6 Beispiel: B-Spline-Kurve .....	20
2.2 Freiformflächen .....	24
2.2.1 Bezier-Flächen .....	24
2.2.2 Rationale Flächen .....	27
2.2.3 Exakte Darstellung oder Approximation .....	27
2.2.4 Regelflächen – spezielle Bezierflächen .....	27
2.2.5 B-Spline-Flächen .....	28
2.3 Zusammenfassung .....	29
<b>3 Spezielle Regelflächen</b> .....	<b>30</b>
3.1 Konoidale Flächen .....	30
3.1.1 Beispiel Sheddach .....	30
3.1.2 Beispiel Schulhaus .....	35
3.1.3 Plückerkonoid .....	38
3.1.4 Beispiel Plückerkonoid .....	41
3.2 HP-Flächen (hyperbolische Paraboloid) .....	45
3.2.1 Allgemeines über HP-Flächen .....	45

3.2.2	Beispiel HP-Fläche: 2 Erzeugungsweisen.....	50
3.2.3	Beispiel Entertainment-Center von Felix Candela.....	54
3.2.4	Beispiel Lampen.....	58
3.3	Einschalige Hyperboloide.....	62
3.3.1	Allgemeines über einschalige Hyperboloide.....	62
3.3.2	Beispiel einschaliges Drehhyperboloid.....	68
3.3.3	Beispiel Ausstellungspavillon .....	72
3.4	Regelschraubflächen (RSF) – Gewinde .....	77
3.4.1	Schraubung .....	77
3.4.2	Regelschraubflächen .....	77
3.4.3	Beispiel Drillbohrer.....	81
3.4.4	Beispiel Korkenziehergewinde .....	85
3.5	Allgemeine Regelflächen.....	89
3.5.1	Möbiusband .....	89
<b>4</b>	<b>Arbeitsblätter.....</b>	<b>92</b>
4.1	Arbeitsblatt Sheddach.....	93
4.2	Arbeitsblatt Schulhaus.....	94
4.3	Arbeitsblatt Plückerkonoid .....	95
4.4	Arbeitsblatt HP-Fläche: 2 Erzeugungsweisen.....	97
4.5	Arbeitsblatt Entertainment-Center .....	99
4.6	Arbeitsblatt Lampen.....	101
4.7	Arbeitsblatt einschaliges Drehhyperboloid.....	103
4.8	Arbeitsblatt Ausstellungspavillon .....	105
4.9	Arbeitsblatt Drillbohrer.....	107
4.10	Arbeitsblatt Korkenziehergewinde .....	109
4.11	Arbeitsblatt Möbiusband .....	111

# 1 Theorie über Regelflächen

## 1.1 Allgemeines über Regelflächen

### Definition

Flächen, die von einer Geraden  $e$  im Laufe einer Bewegung überstrichen werden, nennt man **Regelflächen**.

### Die Erzeugenden einer Regelfläche

Die Geraden auf einer Regelfläche heißen **Erzeugende** und bilden eine **Erzeugendenschar**. Durch jeden Punkt einer Regelfläche  $F$  geht (mindestens) eine Erzeugende  $e$ . Die Tangentialebene  $\tau$  in jedem regulären Punkt  $P$  einer Erzeugenden  $e$  geht durch  $e$ . Je nachdem, ob  $\tau$  fest bleibt oder nicht, während der Punkt  $P$  die Erzeugende  $e$  durchläuft, heißt  $e$  **torsal** oder **nichttorsal**.

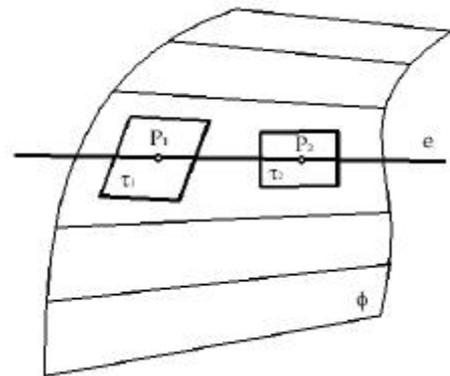


Abb. 1.1: allgemeine Regelfläche

Sind die Erzeugenden einer Regelfläche  $F$  zu einer Ebene  $e$  parallel, so heißt  $e$  **Richtebene** von  $F$ . Jede zur gegebenen Richtebene parallele Ebene ist ebenfalls eine Richtebene der Fläche.

### Unterschiedliche Arten von Regelflächen

Die Regelflächen lassen sich in zwei Gruppen einteilen:

- Flächen mit lauter torsalen Erzeugenden werden als **torsale Regelflächen** bezeichnet; Kegel und Zylinderflächen sind Beispiele dafür.
- Flächen mit nichttorsalen Erzeugenden heißen **windschiefe Regelflächen**, dazu gehören zum Beispiel die HP-Flächen.

**Konoidale Regelflächen** sind windschiefe Regelflächen, deren Erzeugende zu einer Richtebene parallel sind und zwei Leitkurven treffen.

Wird eine Gerade so bewegt, dass sie stets Tangente einer bestimmten Raumkurve ist, dann berührt – wie dies auch bei Kegel- und Zylinderflächen der Fall ist – längs jeder Erzeugenden genau eine Tangentialebene. Alle Erzeugenden der entstehenden Fläche sind somit torsal. Solche Flächen werden **Tangentenflächen** genannt. Nur

Kegelflächen, Zylinderflächen und Tangentenflächen einer Raumkurve können **abgewickelt** (verebnet) werden. Abwickelbare Flächen sind **einfach gekrümmt**. Alle anderen Regelflächen, wie zum Beispiel die konoidalen Regelflächen, sind **doppelt gekrümmt**.

### Tangentialebenen von Regelflächen

Bis auf vereinzelte Ausnahmen gilt für die Erzeugenden einer doppelt gekrümmten Regelfläche  $F$ : Jede Ebene durch eine Erzeugende  $e$  ist die **Tangentialebene** von  $F$  in genau einem Punkt von  $e$ . In verschiedenen Punkten von  $e$  berühren verschiedene Tangentialebenen. Diese Erzeugenden sind daher nichttorsal, da sie unterschiedliche Tangentialebenen entlang einer Erzeugenden besitzen. Beispiel für eine torsale Erzeugende auf einer doppelt gekrümmten Regelfläche ist die Erzeugende in einer Symmetrieebene; die zur Symmetrieebene normale Ebene durch die Erzeugende ist die Tangentialebene in allen Punkten dieser Erzeugenden. Sie ist daher eine torsale Erzeugende.

Für alle Punkte einer Erzeugenden von einfach gekrümmten Regelflächen gibt es genau eine Tangentialebene. Sie lässt sich durch die Erzeugende und die Tangente einer Flächenkurve durch einen Punkt der Erzeugenden aufspannen.

### Festlegung von Regelflächen

Eine Regelfläche wird meist durch drei Leitkurven  $l_1, l_2, l_3$  festgelegt: Die Erzeugenden sind die gemeinsamen Treffgeraden der drei Leitkurven. Man erhält sie, indem man aus den einzelnen Punkten  $P_1$  von  $l_1$  die Treffgeraden an  $l_2$  und  $l_3$  aufsucht. Die Treffgeraden  $e$  ergeben sich aus dem Schnitt des Kegels, dessen Spitze  $P_1$  und Leitlinie  $l_2$  ist, mit dem Kegel, der  $P_1$  als Spitze und  $l_3$  als Leitlinie besitzt.

Bei Kegeln und Zylindern genügt die Angabe einer Leitkurve, falls man die Spitze oder die Erzeugendenrichtung kennt.

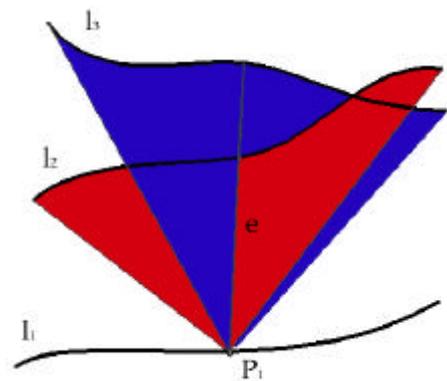


Abb. 1.2: Treffgerade der 3 Leitlinien

## 2 Kurven und Flächen in CAD-Software

Im folgenden Kapitel soll dargestellt werden, mit welchen Methoden übliche CAD<sup>1</sup>-Software-Pakete Kurven und Flächen darstellen. Einige Elemente werden exakt berechnet und dargestellt, bei anderen Kurven und Flächen ist eine Approximation aus verschiedenen Gründen notwendig. Für die Approximation von Kurven werden oft Bezier- bzw. B-Spline-Kurven (bzw. -Flächen) verwendet. Die Eigenschaften dieser Kurven werden in diesem Kapitel beschrieben, um besser zu verstehen, warum sie in CAD-Software-Paketen häufig angewendet werden.

Bezier- und B-Spline-Kurven sind auch die Voraussetzung für die in Kapitel 2.2 beschriebenen Bezier- und B-Spline-Flächen. Diese werden u. a. auch häufig zur Darstellung bzw. Approximation von Regelflächen verwendet und sind daher Grundlage für das Verständnis der in Kapitel 3 angeführten Beispiele.

### 2.1 Freiformkurven

In CAD-Software wird zur Festlegung von Kurven eine diskrete Folge von Punkten  $b_i$  vorgegeben. Sei  $x(u)$  eine Parameterdarstellung der Kurve. Es werden zwei Arten von Kurven unterschieden:

- **Interpolierende Kurven** enthalten diese Punktfolge.  $b_i = x(u_i)$  heißen Stützpunkte mit den Trennstellen (Parameterwerten)  $u_i$ .
- **Approximierende Kurven** passen sich an die vorgegebene Punktfolge gut an. Die Punkte  $b_i$  sind die Kontrollpunkte der Kurve.

Damit die Kurve mit der Parametrisierung  $x(u)$  einfach und effizient berechnet werden kann und damit beim Design eine lokale Änderung nicht den Gesamtverlauf beeinflusst, wird  $x(u)$  aus Segmenten aufgebaut. Nach einer Wahl von Knoten  $u_1 < u_2 < \dots < u_k$  kann jedes Segment  $(x(u_i), x(u_{i+1}))$  mit Hilfe eines lokalen Parameters  $t \in [0,1]$

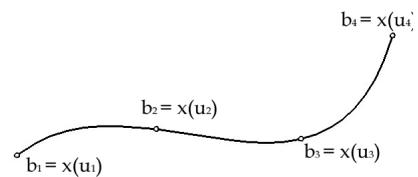


Abb. 2.1: Interpolierende Kurve

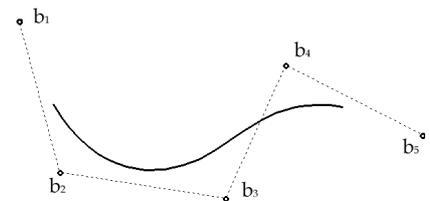


Abb. 2.2: Approximierende Kurve

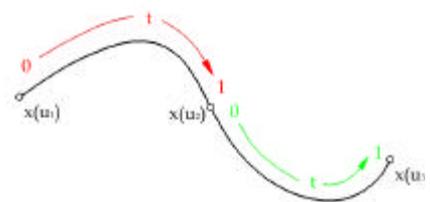


Abb. 2.3: Parametrisierung mit lokalem Parameter

<sup>1</sup> CAD – Computer Aided Design

dargestellt werden, wobei Polynomfunktionen verwendet werden:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n.$$

Diese Form ist aber ungünstig, da die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  in keinem einfachen Zusammenhang mit der Gestalt der Kurve stehen.

Die Polynome vom Grad  $n$  bilden einen Vektorraum. Bei der obigen Darstellung wird die Menge  $\{1, t, \dots, t^n\}$  als Basis dieses Vektorraumes verwendet. Ziel ist es, eine Basis so zu wählen, dass die Koordinaten  $a_i$  der Polynomkurve bezüglich dieser Basis einen einfachen Zusammenhang mit den vorgegebenen Kurven- bzw. mit den Kontrollpunkten haben.

### 2.1.1 Bezier-Kurven

Geeignete Basispolynome sind die so genannten Bernsteinpolynome. Sie besitzen folgende Form:

$$B_n^i(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

In der Abbildung 2.4 sind die Graphen der Polynome für  $n = 3$  dargestellt.

Die Kurve wird nun in folgender Form beschrieben:

$$x(t) = b_0 B_0^3(t) + b_1 B_1^3(t) + \dots + b_n B_n^3(t), \quad t \in [0, 1]$$

Kurven dieser Form heißen **Bezierkurven**.

Die Vektoren  $b_0, \dots, b_n$  sind die Ortsvektoren der **Bezier-Punkte** (Kontrollpunkte), die das **Bezier-Polygon** (Kontrollpolygon) bilden. Eine Bezierkurve  $n$ -ten Grades hat  $n+1$  Bezierpunkte.

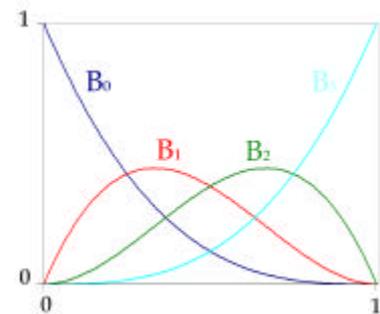


Abb. 2.4: Darstellung der kubischen Bernsteinpolynome

#### Eigenschaften der Bernsteinpolynome

Folgende **Eigenschaften der Bernsteinpolynome** sind für die Eigenschaften von Bezierkurven von besonderer Bedeutung:

1. **Zerlegung der Eins:**  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$

Dies ist durch Anwendung des Binomischen Lehrsatzes ersichtlich:

$$1 = ((1-t) + t)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)$$

2.  $B_i^n(t) \geq 0$  für  $t \in [0, 1]$



Die Bezier-Punkte dieser beiden Kurven ergeben sich aus dem Algorithmus von de Casteljau:

Der Bogen über  $[0, t]$  besitzt die Bezier-Punkte:  $\mathbf{b}_0^0, \mathbf{b}_1^1, \dots, \mathbf{b}_n^n$ .

Der Bogen über  $[t, 1]$  besitzt die Bezier-Punkte:  $\mathbf{b}_n^n, \mathbf{b}_{n-1}^{n-1}, \dots, \mathbf{b}_0^0$ .

Unterteilt man wieder beide Bögen nach de Casteljau, so erhält man insgesamt vier Bezier-Kurvenstücke und ein verfeinertes Bezier-Polygon. Fährt man mit diesen Unterteilungen fort, dann konvergieren die Polygone gegen die Kurve.

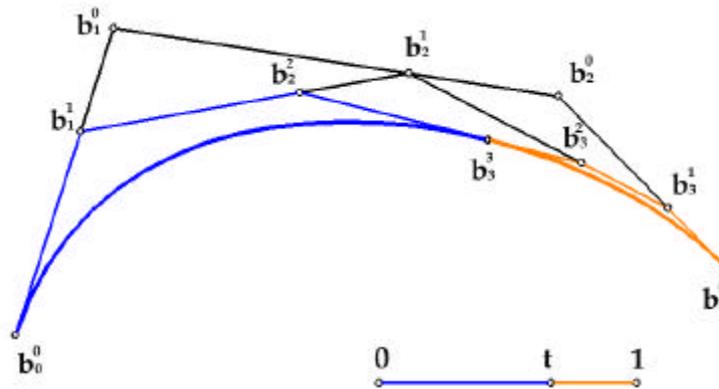


Abb. 2.7: Unterteilung der Bezierkurve in zwei Teilkurven

#### 4. Variationsreduzierende Eigenschaft

Keine Gerade  $g$  hat mit einer ebenen Bezier-Kurve mehr Punkte gemein als mit dem zugehörigen Bezier-Polygon. Keine Ebene hat mit einer Bezier-Kurve im Raum mehr Schnittpunkte als mit dem räumlichen Bezier-Polygon dieser Kurve.

#### Tangenten an Bezier-Kurven

Mit Hilfe der ersten Ableitung werden die Tangenten an eine Bezier-Kurve berechnet. Berechnet man den Ableitungsvektor von

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 B_0^n(t) + \mathbf{b}_1 B_1^n(t) + \dots + \mathbf{b}_n B_n^n(t), \quad t \in [0, 1]$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 (1-t)^n + \mathbf{b}_1 n(1-t)^{n-1}t + \mathbf{b}_2 \frac{n(n-1)}{2}(1-t)^{n-2}t^2 + \dots + \mathbf{b}_n t^n$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{b}_0 n(1-t)^{n-1}(-1) + \mathbf{b}_1 n(n-1)(1-t)^{n-2}(-1)t + \mathbf{b}_1 n(1-t)^{n-1} + \mathbf{b}_2 \frac{n(n-1)}{2}(n-2)(1-t)^{n-3}(-1)t^2 + \\ &\quad \mathbf{b}_2 \frac{n(n-1)}{2}(1-t)^{n-2}2t + t^2(\dots) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} &= \mathbf{b}_0 n(n-1)(1-t)^{n-2} + \mathbf{b}_1 n(n-1)(n-2)(1-t)^{n-3}t + 2\mathbf{b}_1 n(n-1)(1-t)^{n-2}(-1) + \\ &\quad \mathbf{b}_2 \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)(1-t)^{n-4}t^2 - \mathbf{b}_2 n(n-1)(n-2)(1-t)^{n-3}t + \\ &\quad \mathbf{b}_2 n(n-1)(n-2)(1-t)^{n-3}t + \mathbf{b}_2 n(n-1)(1-t)^{n-2} + t(\dots) + \dots \end{aligned}$$

und wertet die Ableitung an der Stelle  $t=0$  aus, so erhält man:

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = n(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$$

Daraus folgt, dass die Tangente im Anfangspunkt  $\mathbf{b}_0$  die Verbindung  $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$  ist.

Analog lässt sich die Ableitung an der Stelle  $t=1$  auswerten:

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=1} = n(\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1})$$

Die Tangente für den Endpunkt ergibt sich also als Verbindung von  $\mathbf{b}_{n-1}\mathbf{b}_n$ .

Aus der Unterteilungseigenschaft ist bekannt, dass man jede Bezierkurve  $x(t)$  in zwei Bezierkurven mit beliebigem Übergangspunkt  $P \in x(t)$ ,  $0 < t < 1$  unterteilen kann. Somit lässt sich jeder Punkt  $P$  der Kurve  $x(t)$  als Anfangspunkt einer Teilkurve auffassen, womit die Tangente  $\bar{t}$  aus dem Kontrollpolygon wie oben bestimmt ist. Analog kann auch jeder Punkt  $P$  von  $x(t)$  als Endpunkt einer Teilkurve dargestellt werden, woraus sich wiederum die Tangente  $t$  aus dem Kontrollpolygon nach obiger Berechnung ergibt. Die beiden so konstruierten Tangenten  $\bar{t}$  und  $t$  im Punkt  $P$  sind ident.

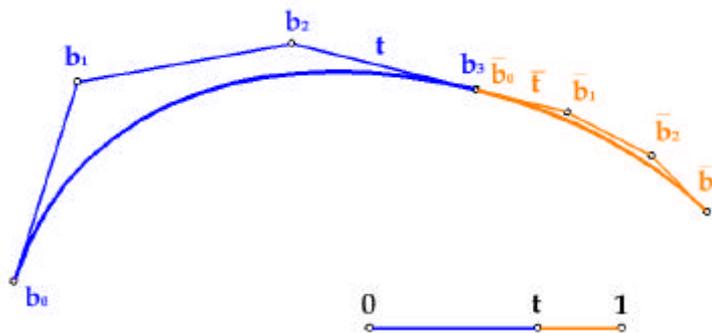


Abb. 2.8: Tangente an den Kurvenpunkt einer Bezierkurve

## Schmiegebene

Die Schmiegebene an die Bezier-Kurve in  $\mathbf{b}_0$  wird aufgespannt durch die Vektoren

$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}$  und  $\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0}$ . Durch Einsetzen in die Ableitungen der Kurve  $x(t)$  nach  $t$  und Umformen ergibt sich:

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = n(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \quad \frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0} = n(n-1)(\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0)$$

Also ist die Schmiegebene jene Ebene, die durch  $\mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  festgelegt ist. Analog ist die Schmiegebene in  $\mathbf{b}_n$  die Ebene  $\mathbf{b}_{n-2}$ ,  $\mathbf{b}_{n-1}$ ,  $\mathbf{b}_n$ .

## Krümmung

Um die Krümmung zu berechnen, wird die bekannte Formel  $k = \frac{\|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}\|}{\|\dot{\mathbf{x}}\|^3}$  (vgl. Rath, 2001, S.54) verwendet.  $\dot{\mathbf{x}}$  und  $\ddot{\mathbf{x}}$  werden durch  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  festgelegt und somit die Krümmung auch.  $\|\dot{\mathbf{x}}\|$  wurde schon berechnet:

$$\|\dot{\mathbf{x}}\| = n\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0\| = na \text{ wobei } a := \overline{\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1}$$

$$\|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}\| = n^2(n-1)\|(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \times (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)\|$$

Die Norm des Vektors  $(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \times (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)$  entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch  $(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$  und  $(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)$  aufgespannt wird. Um den Flächeninhalt des Parallelogramms zu berechnen, wird die Höhe  $h$  auf die Strecke  $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$  verwendet, also der Abstand von  $\mathbf{b}_2$  zur Tangente  $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ . Daraus folgt:  $\|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}\| = n^2(n-1)ah$

$$\text{Für die Krümmung gilt also: } k|_{\mathbf{b}_0} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{h}{a^2}$$

Mit Hilfe von Bezierkurven können also Kurven approximiert werden, bei denen sich die Anfangs- und Endpunkte durch die Wahl eines geeigneten Kontrollpolygons direkt bestimmen lassen, bei denen die Tangenten in Anfangs- und Endpunkt durch geeignete Wahl der nächstliegenden Kontrollpunkte kontrolliert werden können und die weitere Gestalt der Kurve, insbesondere die Krümmung, durch das Hinzufügen weiterer Kontrollpunkte bestimmt werden kann.

### 2.1.2 Rationale Bezierkurven

Rationale Bezierkurven in einer Ebene  $e$  kann man sich folgendermaßen entstanden denken:

Legt man  $e$  in die Ebene  $z=1$  eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems und projiziert eine gewöhnliche Bezierkurve  $\bar{b}$

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=0}^n \bar{\mathbf{b}}_i B_i^n(t)$$

mit den Kontrollpunkten  $\bar{\mathbf{b}}_i$  im Raum aus dem Ursprung auf die eingebettete Ebene  $e$ , so entsteht eine rationale Bezierkurve  $b$ . Sie ist festgelegt durch die Kontrollpunkte  $\mathbf{b}_i$  und die

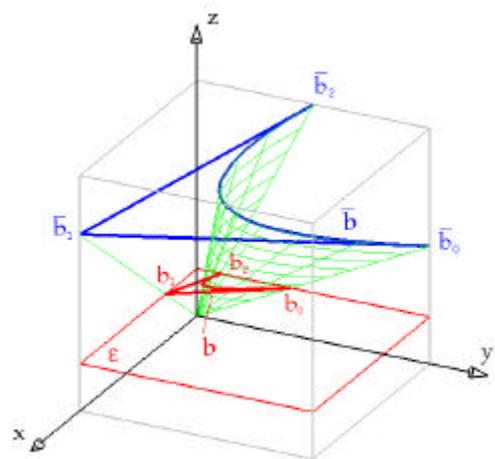


Abb. 2.9: rationale Bezierkurve

Gewichte  $g_i$ . Dabei sind  $b_i$  die Zentralrisse der Kontrollpunkte  $\bar{b}_i$  der Bezierkurve im Raum und  $g_i$  sind die z-Koordinaten der  $\bar{b}_i$ . Die Kurve hat die Darstellung

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n g_i b_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n g_i B_i^n(t)}$$

Insbesondere entsteht jeder Kegelschnitt (eine rationale Bezierkurve 2. Ordnung) durch Projektion einer Parabel (gewöhnliche Bezierkurve 2. Ordnung).

### 2.1.3 Zusammengesetzte Bezier-Kurven

Bezier-Kurven sind ein gutes Werkzeug um Kurven zu modellieren. Ist die Gestalt aber zu komplex, wird die Bezier-Darstellung von hohem Grad. Solche komplexen Kurven werden daher durch **zusammengesetzte Bezier-Kurven** modelliert. Stückweise polynomiale Kurven, unter die die zusammengesetzten Bezier-Kurven fallen, nennt man **Splines**.

Bei der Darstellung einer Bezier-Kurve läuft der Parameter  $t$  im Intervall  $[0,1]$ . Setzt man nun mehrere Bezier-Kurven zu einer Kurve zusammen, so benützt man einen globalen Parameter  $u$  und weist den Anfangs- bzw. Endpunkten der einzelnen Bezier-Kurven Parameter  $u_1, u_2, \dots$  zu. Im Segment  $u_i$   $u_{i+1}$  hängt  $u$  mit dem lokalen Parameter  $t$  durch  $u = u_i (1 - t) + u_{i+1} t$  zusammen.

Nun werden die Möglichkeiten der Zusammensetzung zweier Bezierkurven vom selben Grad über den Intervallen  $[u_{i-1}, u_i]$  und  $[u_i, u_{i+1}]$  an der Stelle  $u = u_i$  betrachtet. Dazu bezeichnet man die Bezier-Punkte zum Segment  $k_i$  über  $[u_i, u_{i+1}]$  mit  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  und zum Segment  $k_{i-1}$  über  $[u_{i-1}, u_i]$  mit  $\mathbf{b}_{-n}, \dots, \mathbf{b}_{-1}, \mathbf{b}_0$ .

Gesucht sind nun Bedingungen, die einen glatten Übergang zwischen den beiden Kurven gewährleisten.

#### **$C^1$ -Übergang**

In  $u_i$  wird nun  $C^1$ -Stetigkeit bezüglich des globalen Parameters  $u$  gefordert, d.h. der Tangentenvektor des Endpunktes von  $k_{i-1}$  stimmt mit dem Tangentenvektor des Anfangspunktes von  $k_i$  überein. Dafür bildet man die Ableitung des Zusammenhangs zwischen dem globalen und lokalen Parameter:

$$u = u_i(1 - t) + u_{i+1}t \Rightarrow \frac{du}{dt} = -u_i + u_{i+1} = \Delta_i$$

Daraus ergibt sich für den Ableitungsvektor  $\frac{d\mathbf{x}}{du}\Big|_{u=u_i}$  der Kurve  $k_i$

$$\frac{d\mathbf{x}}{du}\Big|_{u=u_i} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}\Big|_{t=0} \frac{dt}{du}\Big|_{u=u_i} = n(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \frac{1}{\Delta_i} \quad \text{mit} \quad \Delta_i := u_{i+1} - u_i$$

und analog für den Ableitungsvektor von  $k_{i-1}$

$$\frac{d\mathbf{x}}{du}\Big|_{u=u_i} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}\Big|_{t=1} \frac{dt}{du}\Big|_{u=u_i} = n(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{-1}) \frac{1}{\Delta_{i-1}} \quad \text{mit} \quad \Delta_{i-1} := u_i - u_{i-1}$$

$$C^1\text{-Übergang} \Leftrightarrow n(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \frac{1}{\Delta_i} = n(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{-1}) \frac{1}{\Delta_{i-1}}$$

Aus dieser Gleichung ist zu erkennen:

- Die Vektoren  $(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$  und  $(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{-1})$  unterscheiden sich in der Gleichung nur durch ein Vielfaches und sind daher parallel. Da  $\mathbf{b}_0$  End- bzw. Startpunkt der Vektoren ist, liegen die Punkte  $\mathbf{b}_{-1}$ ,  $\mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{b}_1$  **auf einer Geraden**.
- Die beiden Vektoren  $(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$  und  $(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{-1})$  sind gleich orientiert, da die Faktoren  $\frac{1}{\Delta_i}$  und  $\frac{1}{\Delta_{i-1}}$  jeweils positiv sind. Daher sind die Vektoren  $(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{-1})$  und  $(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_1)$  entgegengesetzt orientiert.  $\mathbf{b}_0$  liegt also zwischen  $\mathbf{b}_{-1}$  und  $\mathbf{b}_1$  bzw.  $\mathbf{b}_{-1}$  und  $\mathbf{b}_1$  **liegen auf verschiedenen Seiten von  $\mathbf{b}_0$** .
- Durch Umformen erhält man  $\overline{\mathbf{b}_{-1}\mathbf{b}_0} : \overline{\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1} = \Delta_{i-1} : \Delta_i$

Für einen  $GC^1$ -Übergang (tangentenstetigen Übergang, dh. es wird nur die Übereinstimmung der Tangenten und nicht des Tangentenvektors gefordert) müssen nur die ersten beiden Bedingungen erfüllt sein.

## **C<sup>2</sup>-Übergang**

(Für die folgenden Überlegungen wird daher ein  $C^1$ -Übergang an der betrachteten Stelle  $\mathbf{b}_0$  vorausgesetzt.)

Für den  $C^2$ -Übergang müssen die 2. Ableitungsvektoren der Kurven  $k_i$  und  $k_{i-1}$  im Punkt  $\mathbf{b}_0$  ident sein:

$$\text{für } k_i: \frac{d^2\mathbf{x}}{du^2}\Big|_{u=u_i} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\Big|_{t=0} \left(\frac{dt}{du}\right)^2\Big|_{u=u_i} = n(n-1)(\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0) \frac{1}{\Delta_i^2}$$

$$\text{für } k_{i-1}: \frac{d^2\mathbf{x}}{du^2}\Big|_{u=u_i} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\Big|_{t=1} \left(\frac{dt}{du}\right)^2\Big|_{u=u_i} = n(n-1)(\mathbf{b}_0 - 2\mathbf{b}_{-1} + \mathbf{b}_{-2}) \frac{1}{\Delta_{i-1}^2}$$

$$C^2\text{-Übergang} \Leftrightarrow (\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0) \frac{1}{\Delta_i^2} = (\mathbf{b}_0 - 2\mathbf{b}_{-1} + \mathbf{b}_{-2}) \frac{1}{\Delta_{i-1}^2}$$

Mit Hilfe der Vektoren  $\mathbf{b}_{-2}, \mathbf{b}_{-1}, \mathbf{b}_0$  und  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  ist also eine Bedingung für einen  $C^2$ -Übergang zweier Bezierkurven  $n$ -ten Grades formuliert.  $\mathbf{b}_{-2}, \mathbf{b}_{-1}, \mathbf{b}_0$  bestimmen die Krümmung von  $k_{i-1}$  über  $[u_{i-1}, u_i]$  und  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  die Krümmung des Kurvensegments  $k_i$  über  $[u_i, u_{i+1}]$ .

Um die Richtigkeit der Gleichung  $(\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0) \frac{1}{\Delta_i^2} = (\mathbf{b}_0 - 2\mathbf{b}_{-1} + \mathbf{b}_{-2}) \frac{1}{\Delta_{i-1}^2}$  für zwei Kurven einfacher zu überprüfen, werden zwei Hilfspunkte  $\mathbf{d}_-$  und  $\mathbf{d}_+$  verwendet, deren Konstruktion durch die Unterteilungseigenschaft motiviert ist:

$\mathbf{b}_0$  teilt die Strecke  $\overline{\mathbf{b}_{-1}\mathbf{b}_1}$  im Verhältnis  $\Delta_{i-1} : \Delta_i$ . Man konstruiert nun einen Punkt  $\mathbf{d}_-$ , sodass  $\mathbf{b}_{-1}$  die Strecke  $\overline{\mathbf{b}_{-2}\mathbf{d}_-}$  im gleichen Verhältnis teilt, also  $\overline{\mathbf{b}_{-2}\mathbf{b}_{-1}} : \overline{\mathbf{b}_{-1}\mathbf{d}_-} = \Delta_{i-1} : \Delta_i$ . Mit Hilfe einer Wegbeschreibung lässt sich  $\mathbf{d}_-$  folgendermaßen schreiben:

$$\mathbf{d}_- = \mathbf{b}_{-1} + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} (\mathbf{b}_{-1} - \mathbf{b}_{-2}).$$

Analog wird  $\mathbf{d}_+$  aus den Punkten  $\mathbf{b}_1$  und  $\mathbf{b}_2$  konstruiert:

$$\mathbf{d}_+ = \mathbf{b}_1 + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2).$$

Es handelt sich um einen  $C^2$ -Übergang, wenn  $\mathbf{d}_- = \mathbf{d}_+$ , also:

$$\mathbf{b}_{-1} + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} (\mathbf{b}_{-1} - \mathbf{b}_{-2}) = \mathbf{b}_1 + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)$$

Um das zu zeigen, verwendet man die Bedingung für einen  $C^1$ -Übergang  $((\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \frac{1}{\Delta_i} = (\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{-1}) \frac{1}{\Delta_{i-1}})$ , der vorausgesetzt wurde. Aus dieser Gleichung berechnet man  $\mathbf{b}_{-1}$  und  $\mathbf{b}_1$ :

$$\mathbf{b}_{-1} = \mathbf{b}_0 + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} (\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_1) \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_0 + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} (\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{-1})$$

und ersetzt in der zu beweisenden Gleichung das allein stehende  $\mathbf{b}_{-1}$  bzw.  $\mathbf{b}_1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} (\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_1) + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} (\mathbf{b}_{-1} - \mathbf{b}_{-2}) &= \mathbf{b}_0 + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} (\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{-1}) + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) \\ \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} (\mathbf{b}_0 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) &= \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} (\mathbf{b}_0 - 2\mathbf{b}_{-1} + \mathbf{b}_{-2}) \\ (\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0) \frac{1}{\Delta_i^2} &= (\mathbf{b}_0 - 2\mathbf{b}_{-1} + \mathbf{b}_{-2}) \frac{1}{\Delta_{i-1}^2} \end{aligned}$$

Damit ist durch  $\mathbf{d}_- = \mathbf{d}_+$  ein  $C^2$ -Übergang in  $\mathbf{b}_0$  festgelegt.

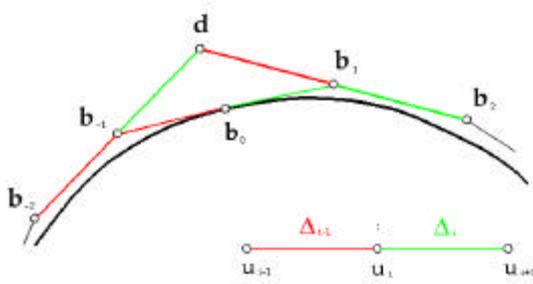


Abb. 2.10: Kontrolle für  $C^2$ -Übergang bei  $C^2$ -Übergang

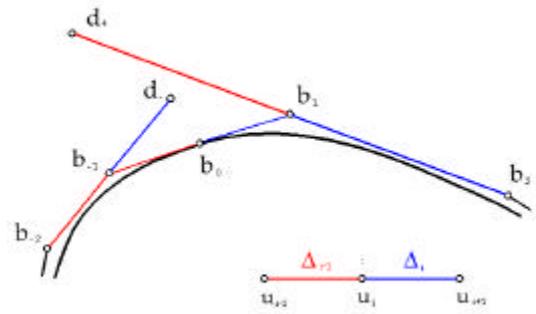


Abb. 2.11: Kontrolle für  $C^2$ -Übergang bei keinem  $C^2$ -Übergang

## 2.1.4 Exakte Darstellung oder Approximation

Exakt dargestellt werden können nur:

- Kurven, deren Parameterfunktionen Polynome der Ordnung  $\leq n$  sind. Sie werden durch Bezierkurven der Ordnung  $n$  dargestellt.
- Kurven, deren Parameterfunktionen Quotienten von Polynomen der Ordnung  $\leq n$  sind. Sie werden durch rationale Bezierkurven der Ordnung  $n$  dargestellt.

In allen anderen Fällen können Kurven nur angenähert werden.

## 2.1.5 B-Spline-Kurven

In der CAD-Software werden Kurven oft durch Bezierkurven approximiert. Einerseits werden sie zur Angabe allgemeiner Kurven verwendet (siehe Kapitel 3.1.2). Oft müssen aber auch rationale Kurven durch B-Spline-Kurven angenähert werden, um weitere Arbeitsschritte mit der Approximation der Kurve zu ermöglichen. In Kapitel 3.1.4 wird dies in einem konkreten Beispiel angewendet, in dem eine Ellipse mit einer B-Spline-Kurve angenähert wird.

Eine **B-Spline-Kurve** besteht aus zusammengesetzten Bezierkurven, bei denen, wie oben beschrieben, ein  $C^2$ -Übergang gefordert wird. Sie wird mit Hilfe von deBoor-Punkten (Kontrollpunkte der B-Spline-Kurve) dargestellt.

### deBoor-Punkte

Nun werden  $r+1$  Bezierkurven zu einer B-Spline-Kurve zusammengesetzt. Die so entstehende Kurve wird mit deBoor-Punkten beschrieben. Für jeden der  $r$  Übergänge erhält man einen deBoor-Punkt  $d_r$  analog zu der in Kapitel 2.1.3 („ $C^2$ -Übergang“)beschriebenen Konstruktion bzw. Berechnung des Hilfspunktes  $d$ . Nun

fehlen noch die deBoor-Punkte für den Beginn und das Ende der B-Spline-Kurve. Sie stimmen bis zu einem bestimmten Index mit den Bezier-Punkten überein.

Werden Bezierkurven  $n$ -ten Grades zusammengesetzt, so erhält man die **deBoor-Punkte** folgendermaßen:

- $d_{-(n-2)} \dots d_0$  stimmen mit den Bezierpunkten  $b_0$  bis  $b_{n-2}$  überein
- $d_1 \dots d_r$  wie in Kapitel 2.1.3 ( $C^2$ -Übergang)
- $d_{r+1} \dots d_{r+n-1}$  stimmen mit den letzten  $n-2$  Bezierpunkten überein

Anhand einer kubischen B-Spline-Kurve, die aus zwei zusammengesetzten Bezierkurven besteht, soll der Zusammenhang zwischen den deBoor-Punkten und den Bezier-Punkten etwas übersichtlicher illustriert werden:

Im Folgenden wird eine **uniforme B-Spline-Kurve** betrachtet, das heißt, dass für alle Intervallgrößen  $\Delta_i = 1$  (also gleich lang) gewählt wird.

In der Abbildung 2.12 ist ersichtlich, wie die Kurve unterteilt wird. Die Bezierkurve wird nach dem de Casteljau-Algorithmus zuerst im Verhältnis 1:2 unterteilt. Dadurch entstehen zwei Teile der Kurve. Der zweite Teil der Kurve wird noch einmal halbiert (also Verhältnis 1:1), sodass schließlich drei Kurventeile entstehen (rot, grün, blaue in Abbildung 2.12). In der Abbildung kann man nun den Zusammenhang zwischen Bezier- und deBoor-Punkten erkennen.

Für die deBoor-Punkte gilt folgendes:

$$d_{-1} = b_0$$

$$d_0 = b_1$$

$d_1, d_2$  werden wie in Kapitel 2.1.3 bei „ $C^2$ -Übergänge“ beschrieben konstruiert bzw. berechnet

$$d_3 = b_8$$

$$d_4 = b_9$$

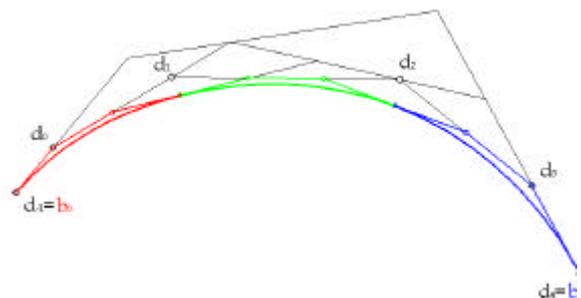


Abb. 2.12: Zusammenhang zwischen Bezier- und deBoor-Punkten

### Darstellung der B-Spline-Kurven

Eine B-Spline-Kurve kann beschrieben werden durch (vgl. Farin, 1990, S. 160):

$$q(u) = \sum_{i=0}^m N_i^n(u) d_i$$

$d_i$  sind die Kontrollpunkte (deBoor-Punkte).

$T(t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_{m+n+1})$  heißt Knotenvektor,

wobei gilt  $t_0 = \dots = t_n$ ,  $t_{m+1} = \dots = t_{m+n+1}$

$$N_i^0(u) := \begin{cases} 1, & t_i \leq u < t_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_i^r(u) := \frac{u - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_i^{r-1}(u) + \frac{t_{i+r+1} - u}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(u), \quad 1 \leq r \leq n$$

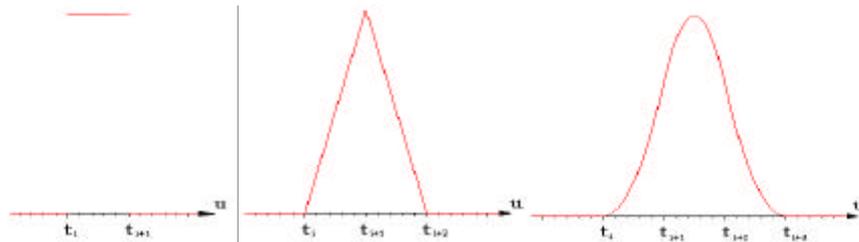


Abb. 2.13

In der Abbildung 2.13 sind  $N_i^0(u)$ ,  $N_i^1(u)$  und  $N_i^2(u)$  (von links nach rechts) dargestellt.

Die Einschränkung von  $N_i^n(u)$  auf das nichtleere Intervall  $(t_j, t_{j+1})$  ist ein Polynom  $N_{i,j}^n(u)$  vom Grad  $m$ .

## 2.1.6 Beispiel: B-Spline-Kurve

### a. Angabe einer Bezier bzw. einer B-Spline-Kurve

B-Spline-Kurven werden in der CAD-Software mit Hilfe der deBoor-Punkte angegeben. In diesem Beispiel werden die vier Punkte  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(2.5,2)$  und  $(4,1)$  als Kontrollpunkte verwendet.

Wird nun eine B-Spline-Kurve der Ordnung 3 mit den erwähnten Kontrollpunkten angegeben, so wird eine Bezierkurve konstruiert, da für Bezierkurven  $n$ -ter Ordnung genau  $n+1$  Kontrollpunkte benötigt werden. Eine Zusammensetzung mehrerer Bezierkurven ist daher nicht notwendig. In der Abbildung 2.14 ist die Bezierkurve grün eingezeichnet.

Wird eine B-Spline-Kurve der Ordnung 2 konstruiert, indem die vier oben beschriebenen Punkte als Kontrollpunkte ausgewählt werden, so wird eine zusammengesetzte Bezierkurve (aus zwei Bezierkurven, welche Parabeln sind) erzeugt, also eine B-Spline-Kurve. In der Abbildung ist die B-Spline-Kurve rot

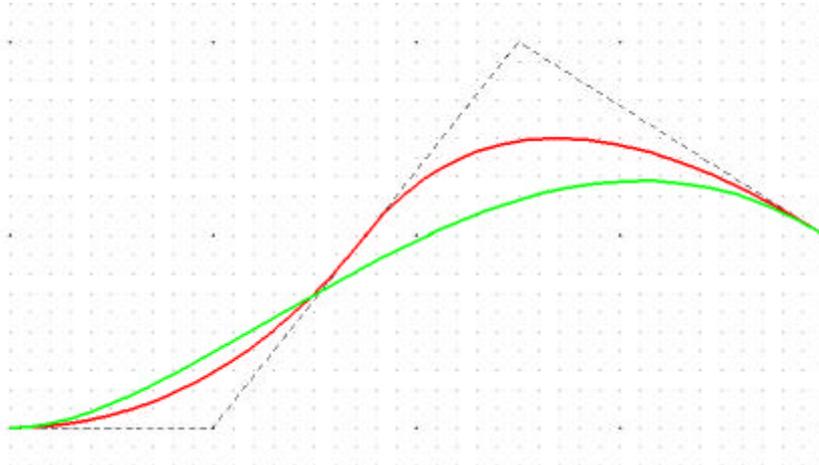


Abb. 2.14: Kontrollpolygon mit Bezierkurve (grün) und mit B-Splinekurve (rot)

eingezeichnet.

In MicroStation wird eine B-Spline-Kurve mit dem Werkzeug „**B-Spline-Kurve platzieren**“ (B-Spline-Kurven, 1a, ) erzeugt. Dabei wird als „Methode“ im Dialogfenster „Steuerpunkte definieren“ ausgewählt, um die Kontrollpunkte der Kurve anzugeben. Für die herkömmliche mathematische Ordnung  $n$  wird in MicroStation für „Ordnung“ „ $n+1$ “ eingegeben. Im Folgenden wird diese Ordnung als „MicroStation-Ordnung“ bezeichnet, um die beiden Werte eindeutig zu trennen. Soll die obige Bezierkurve erzeugt werden, muss MicroStation-Ordnung 4 eingegeben werden, für die B-Spline-Kurve die MicroStation-Ordnung 3. Im Zeichenfenster müssen die Kontrollpunkte ausgewählt werden. Die Eingabe wird durch einen Mausklick auf die rechte Maustaste beendet.

## b. Approximation einer Ellipse durch eine B-Spline-Kurve

Ellipsen werden in der CAD-Software meist als rationale Kurven dargestellt. Um mit dieser Kurve weiterzuarbeiten (z.B. um dadurch eine Fläche zu erzeugen, die später getrimmt werden soll), wird für die weitere Konstruktion in vielen Fällen eine Approximation durch eine B-Spline-Kurve verwendet.

In diesem Beispiel wird eine Ellipse mit einer Hauptachsenlänge von 6 cm und einer Nebenachsenlänge von 4 cm konstruiert. Diese soll nun durch eine B-Spline-Kurve approximiert werden. Dazu muss die Genauigkeit der Approximation durch die Toleranz angegeben werden. Je kleiner der Wert ist, der für die Toleranz angegeben wird, umso genauer ist die Approximation der Kurve. In diesem Beispiel wird die

Ellipse durch zwei B-Spline-Kurven approximiert. Die rote Kurve mit einer Toleranz von 1 und die grüne Kurve mit einer Toleranz von 0,1. In der Abbildung ist eindeutig zu erkennen, dass die grün eingezeichnete Kurve eine bessere Annäherung an die Ellipse (schwarz gestrichelt) ist, als die rote Kurve es ist.

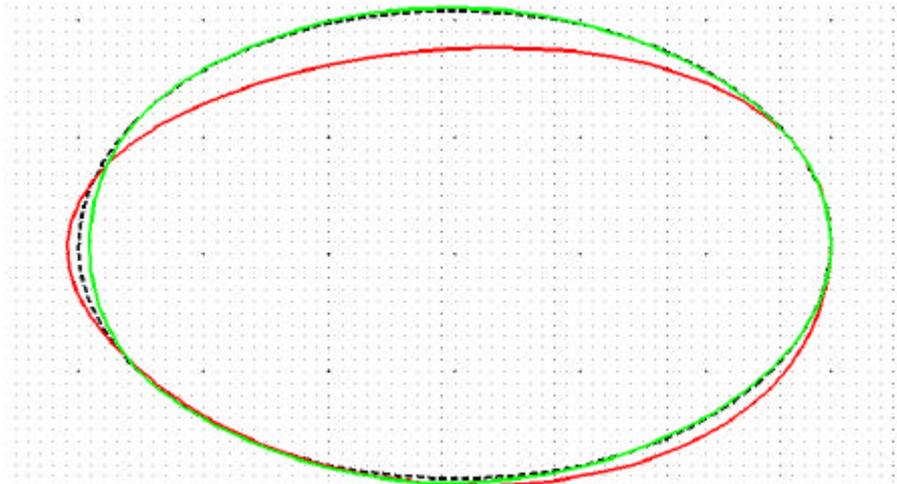


Abb. 2.15: Approximationen einer Ellipse durch B-Splinekurven

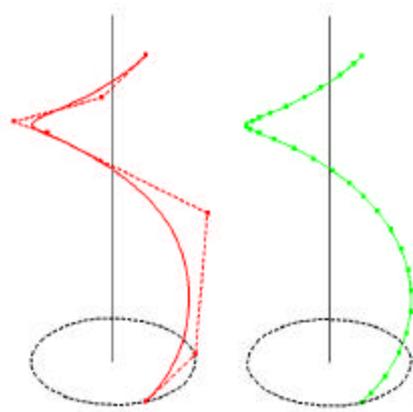
In MicroStation wird die oben beschriebene Ellipse mit Hilfe von „**Ellipse platzieren**“ (Hauptpalette, 4b, ) konstruiert. Um diese durch eine B-Spline-Kurve zu approximieren wird das Werkzeug „**Kurve neu erstellen**“ (B-Spline-Kurven, 1b, ) verwendet. Im Dialogfenster können unterschiedliche Werte für die Toleranz eingegeben werden. Durch einen Mausklick auf die Ellipse und die Bestätigung dieser Eingabe mit der linken Maustaste wird die Approximation dargestellt.

### c. Konstruktion einer Schraublinie

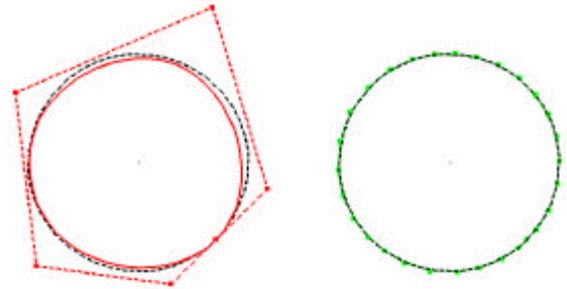
Die Schraublinie ist ein Beispiel für eine Kurve, die von CAD-Paketen meist schon bei der Angabe der Kurve mit Hilfe von B-Spline-Kurve angenähert wird. (Bemerkung: Schraublinien sind transzendente Kurven und können durch Splines nur angenähert werden.)

Dazu wird eine Schraublinie wie im Beispiel 3.4.3 (a) angegeben konstruiert. Auch hier können wieder unterschiedliche Werte für die Toleranz eingegeben werden. In der Abbildung sind zwei Approximationen von Schraublinien zu sehen. Die rote Kurve wurde mit einer Toleranz von 1 erzeugt, die grüne Kurve mit einer Toleranz von 0,001. Zusätzlich zu den Kurven sind hier die Kontrollpolygone dargestellt. Dadurch ist leicht ersichtlich, dass sich aus einer niedrigeren Toleranz mehr Kontrollpunkte und damit eine bessere Approximation ergeben. In der rechten Abbildung ist der Grundriss der B-Spline-Kurven zu sehen. Die gestrichelte Kurve ist

der Grundriss der exakten Schraublinie, also ein Kreis. Auch hier sind die unterschiedlichen Genauigkeiten der Approximation leicht zu erkennen.



*Abb. 2.16: Approximationen einer Schraublinie mit B-Spline-Kurven*



*Abb. 2.17: Grundriss der Approximationen einer Schraublinie mit B-Spline-Kurven*

## 2.2 Freiformflächen

Wie bei den Freiformkurven werden auch die Flächen durch Kontrollpunkte bestimmt. Es bieten sich mehrere Möglichkeiten an, eine Freiformfläche zu generieren:

- Durch die **Angabe aller Kontrollpunkte der Fläche**. Diese Art der Angabe wird zum Beispiel in Kapitel 3.2.3 für eine HP-Fläche verwendet, die mit Hilfe einer B-Spline-Fläche exakt dargestellt wird.
- Durch Berechnung, um eine **Interpolationsfläche durch gegebene Punkte** zu bestimmen.
- Durch Berechnung, um eine **gegebene Fläche zu approximieren**. Dies hat in der CAD-Software eine besondere Bedeutung, da einige Flächen, wie z.B. Schraubflächen, bei der Erzeugung durch die Software mit Hilfe von Freiformflächen (durch B-Spline-Flächen) approximiert werden. Andere Flächen hingegen, die exakt konstruiert werden können, muss man häufig in Approximationen durch B-Spline-Flächen umwandeln, um weitere Operationen (wie z.B. Trimmungen, Vereinigungen, etc.) mit der angenäherten Fläche durchführen zu können. Der Grund dafür ist, dass diese Operationen für B-Spline-Flächen weniger rechenaufwändig sind und in CAD-Paketen oft nur für B-Spline-Flächen programmiert sind. Ein konkretes Beispiel, in dem die Approximation durch eine B-Spline-Fläche angewendet wird, ist in Kapitel 3.3.2 zu sehen, wo eine Rotationsfläche in eine B-Spline-Fläche umgewandelt wird.

### 2.2.1 Bezier-Flächen

#### Definition

Als einfachster Fall werden zuerst die **Tensorproduktflächen** betrachtet. Sie werden analytisch durch folgende Parameterdarstellung (mit den Parametern  $u, v$ ) beschrieben:

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m \mathbf{b}_{ik} B_k^m(v) B_i^n(u), \quad (u, v) \in [0,1] \times [0,1]$$

Dabei sind  $\mathbf{b}_{ik}$  die Ortsvektoren der Kontrollpunkte (Bezierpunkte), die ein Kontrollnetz (Beziernetz)

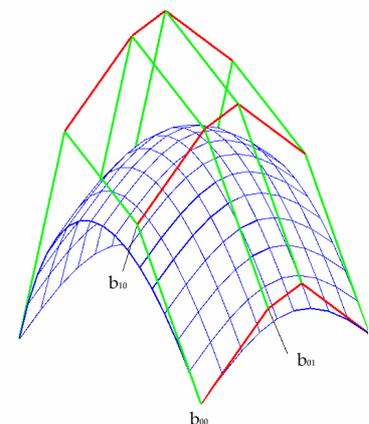


Abb. 2.18: Bezierfläche

bilden.  $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  sind die Bernsteinpolynome vom Grad  $n$ .

Die  $u$ -Linien ( $v=v_0=const.$ ) sind Bezierkurven vom Grad  $n$  mit der Darstellung

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^n \left[ \sum_{k=0}^m \mathbf{b}_{ik} B_k^m(v) \right] B_i^n(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i(v_0) B_i^n(u).$$

$\mathbf{b}_i(v_0)$  sind die Kontrollpunkte dieser  $u$ -Linie.

Insbesondere sind die Randkurven  $v=0$ ,  $v=1$  Bezierkurven mit den entsprechenden Randpolygone des Beziernetzes als Bezierpolygon.

Analog gilt:

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^n \left[ \sum_{k=0}^m \mathbf{b}_{ik} B_i^n(u) \right] B_k^m(v) = \sum_{k=0}^m \mathbf{b}_k(u_0) B_k^m(v).$$

Die  $v$ -Linien ( $u=u_0=const.$ ) sind daher Bezierkurven vom Grad  $m$  mit den Kontrollpunkten  $\mathbf{b}_k(u_0)$ . Die Randkurven  $u=0$  und  $u=1$  sind wiederum Bezierkurven, deren Bezierpolygone die Randpolygone des Beziernetzes sind.

Fasst man die von den Randpolygone unterschiedlichen Reihen und Spalten des Kontrollnetzes als Kontrollpunkte von Bezierkurven auf, so entstehen Bezierkurven  $r$  bzw.  $s$ , die nicht auf der Tensorproduktfläche liegen.

Die Bezierfläche kann nun erzeugt werden, indem eine ihrer Bezierkurven (z.B.  $u$ -Linie bzw.  $v$ -Linien) so bewegt wird, dass ihre Kontrollpunkte auf den oben erwähnten Kurven  $r$  bzw.  $s$  wandern.

### Algorithmus von de Casteljau

Durch den Algorithmus von de Casteljau ist es (wie auch schon bei den Bezierkurven) möglich, aus dem Kontrollnetz allgemeine Flächenpunkte zu konstruieren.

Die Bezierpunkte (Kontrollpunkte) einer  $v$ -Linie können durch Anwendung des Algorithmus' von de Casteljau aus verschiedenen  $u$ -Linien (zu festem Teilverhältniswert) erzeugt werden. Nun kann man wiederum mit Hilfe des de Casteljau-Algorithmus aus den Kontrollpunkten der  $v$ -Linie die Kurvenpunkte dieser  $v$ -Linie und damit Punkte der Fläche bestimmen.

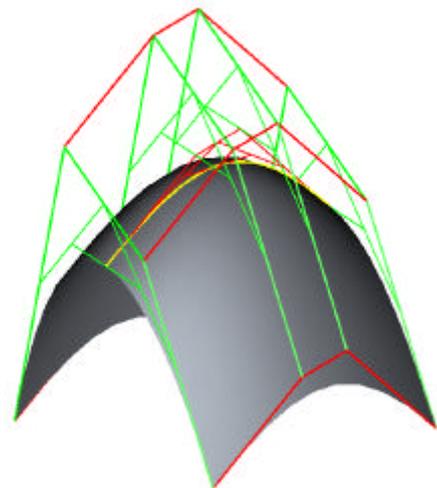


Abb. 2.19: Algorithmus von de Casteljau

Umgekehrt können auch zuerst die Kontrollpunkte einer  $u$ -Linie und dann die Punkte auf ihr bestimmt werden.

## Eigenschaften von Bezierflächen

### 1. Randkurven

Die Randkurven der Bezierfläche sind die durch die erste und letzte Reihe bzw. Spalte des Kontrollnetzes bestimmten Bezierkurven.

### 2. Tangentialebene

Die Tangentialebene in einer Ecke des Kontrollnetzes wird durch die Ecke und die benachbarten Kontrollpunkte aufgespannt. Das heißt, dass z.B. die Tangentialebene in  $\mathbf{b}_{00}$  von  $\mathbf{b}_{00}$ ,  $\mathbf{b}_{01}$ , und  $\mathbf{b}_{10}$  aufgespannt wird.

### 3. Konvexe-Hülle-Eigenschaft

Jeder Punkt der Fläche liegt in der konvexen Hülle der Bezierpunkte. Das ist aus folgender Rechnung ersichtlich:

Für die Bernsteinpolynome gilt die „Zerlegung der Eins“, also:  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$

Dies erkennt man durch Anwendung des Binomischen Lehrsatzes:

$$1 = ((1-t) + t)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)$$

$$B_i^n(t) \geq 0 \text{ für } t \in [0,1]$$

Damit gilt für eine Bezierfläche:

$$\sum_{i=0}^n \left[ \sum_{k=0}^n B_k^m(v) \right] B_i^n(u) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1$$

$$B_i^n(u) B_k^m(v) \geq 0 \text{ für } (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

Die Flächenpunkte entstehen also durch Linearkombination der Bezierpunkte, wobei die Koeffizienten alle größer oder gleich 0 sind und die Koeffizientensumme 1 ist. Somit liegt die Fläche in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte.

### 4. Keine variationsreduzierende Eigenschaft

Die variationsreduzierende Eigenschaft, die für Bezierkurven gilt, haben Bezierflächen nicht.

(vgl. Mathematische Grundlagen von Freiformflächen, S.4)

## 2.2.2 Rationale Flächen

In analoger Weise, wie aus den Bezierkurven rationale Kurven entstehen, entstehen rationale Bezierflächen aus Bezierflächen.

## 2.2.3 Exakte Darstellung oder Approximation

Exakt dargestellt werden können nur:

- Flächen, deren Parameterfunktionen Polynome der Ordnung  $\leq n$  sind. Sie werden durch Bezierflächen der Ordnung  $n$  dargestellt.
- Flächen, deren Parameterfunktion Quotienten von Polynomen der Ordnung  $\leq n$  sind. Sie werden durch rationale Bezierflächen der Ordnung  $n$  dargestellt.

In allen anderen Fällen können Flächen nur angenähert werden. Schraubflächen, zum Beispiel, können durch Bezierflächen nur angenähert werden

## 2.2.4 Regelflächen – spezielle Bezierflächen

### Regelflächen allgemein

Regelflächen sind in Kapitel 1.1 als Flächen definiert, die im Laufe der Bewegung einer Geraden  $e$  überstrichen werden. Für die Darstellung von Regelflächen durch Bezierflächen bedeutet das, dass die  $v$ -Linien, die die Erzeugenden der Regelfläche darstellen sollen, durch Bezierkurven der Ordnung 1 exakt beschrieben werden können (zur Angabe werden daher zwei Kontrollpunkte benötigt). Daher sind  $(n,1)$ -Bezierflächen Regelflächen. (Analog könnte man natürlich die  $u$ -Linien als Erzeugende der Regelfläche verwenden).

### Zylinderflächen

Zylinder mit einer Bezierkurve der Ordnung  $n$  als Leitkurve sind  $(n,1)$ -Bezierkurven. Die  $u$ -Linien sind zur Leitkurve kongruente Bezierkurven, die  $v$ -Linien (die Erzeugenden) sind Bezierkurven der Ordnung 1, festgelegt durch zwei Kontrollpunkte.

### Hyperbolische Paraboloid

Für die Konstruktion eines Hyperbolischen Paraboloids als Bezierfläche gibt es zwei Möglichkeiten (beide werden im Kapitel 3.2.2 behandelt):

- a) Paraboloiden können als **(2,2)-Bezierflächen** erzeugt werden, nämlich als Schiebflächen:

Durch Schiebung einer Parabel längs einer anderen mit derselben Achsenrichtung, wobei die Parabeln auf verschiedenen Seiten geöffnet sind, entsteht ein hyperbolisches Paraboloid.

- b) Da das hyperbolische Paraboloid zwei Erzeugendenscharen besitzt, lässt es sich auch als **(1,1)-Bezierfläche** erzeugen:

Eine (1,1)-Bezierfläche ist durch vier Kontrollpunkte bestimmt. Die entstehende Fläche ist eine HP-Fläche. Die vier Kontrollpunkte bestimmen ein Erzeugendenvierseit der HP-Fläche.

Beide Möglichkeiten stellen eine **exakte Darstellung** der HP-Fläche dar, da sowohl die Parabeln in Variante a) als auch die Geraden in Variante b) durch Bezierkurven exakt dargestellt werden können und die daraus resultierende Bezierfläche demnach auch exakt ist.

(vgl. Mathematische Grundlagen von Freiformflächen, S.5)

## 2.2.5 B-Spline-Flächen

Analog zu den Bezierflächen entsteht eine B-Spline-Fläche aus zwei Scharen von B-Spline-Kurven bzw. einem Kontrollpunktnetz und besitzt eine Darstellung der Bauart

$$x(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m d_{ik} N_k^m(v) N_i^n(u).$$

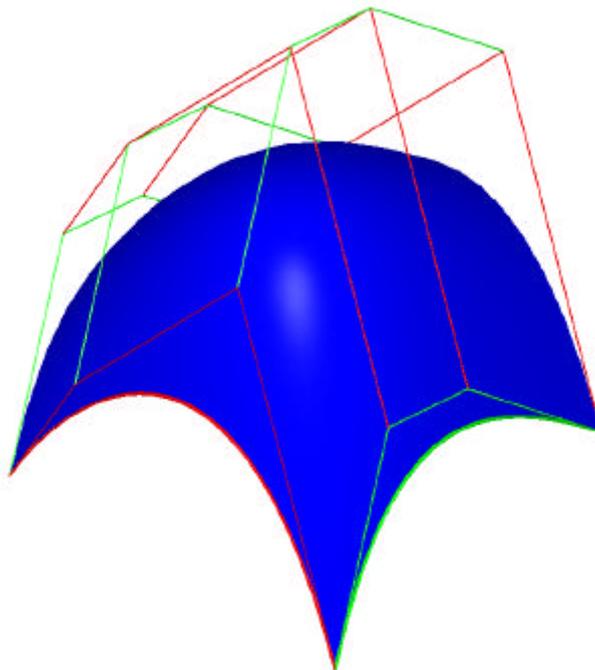


Abb. 2.20: B-Spline-Fläche mit Kontrollnetz

## 2.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden ausgehend von Bezierkurven und deren Eigenschaften die B-Spline-Kurven als zusammengesetzte Bezierkurven und in weiterer Folge auch Bezierflächen und B-Spline-Flächen als deren Zusammensetzung dargestellt. Insbesondere B-Spline-Kurven und B-Spline-Flächen finden in der CAD-Software häufig Anwendung. Einerseits, um allgemeine Kurven und Flächen anzugeben, da sie sich sehr benutzerfreundlich designen lassen. Für diese Diplomarbeit wichtiger ist aber die Verwendung der B-Spline-Kurven und B-Spline-Flächen, um komplexere Kurven und Flächen zu approximieren. Eine derartige Approximation benötigt man einerseits, um Rechenaufwand zu sparen, aber auch, um gewisse Operationen anstatt mit einer exakten Darstellung, in einheitlicher Weise mit approximierten B-Spline-Kurven und -Flächen durchzuführen.

Aus den Eigenschaften der Bezierkurven (bzw. in weiterer Folge der B-Spline-Kurven, der Bezierflächen und der B-Spline-Flächen) lässt sich argumentieren, dass nur durch Polynomfunktionen parametrisierte Kurven (bzw. Flächen) mit einer Ordnung, die die der Bezierkurve (bzw. in weiterer Folge der B-Spline-Kurven, der Bezierflächen und der B-Spline-Flächen) nicht übersteigt, exakt dargestellt werden können. Alle anderen Kurven (bzw. Flächen) können nur approximiert werden.

Für B-Spline-Kurven und B-Spline-Flächen hängt die Genauigkeit der Approximation in weiterer Folge von der Anzahl der Kontrollpunkte und der Ordnung ab. Zu bedenken ist jedoch, dass insbesondere die Anzahl der Kontrollpunkte die Rechendauer erheblich beeinflusst.

Wesentlich für die Arbeit mit CAD-Paketen ist das Bewusstsein der nicht exakten Approximation gewisser Kurven und Flächen. Dadurch können mögliche Fehlerquellen identifiziert und ein mögliches Fortpflanzen des Fehlers vermieden werden.

# 3 Spezielle Regelflächen

## 3.1 Konoidale Flächen

### Definition

Eine windschiefe Regelfläche heißt **konoidale Fläche**, wenn sie eine Richtebene besitzt. Eine konoidale Fläche mit einer Leitgeraden (die alle Erzeugenden treffen) heißt **Konoid**.

### 3.1.1 Beispiel Sheddach

Sheddächer sind häufig Ausschnitte von konoidalen Regelflächen mit lotrechten Richtebenen und werden im Bauwesen seit den dreißiger Jahren aufgrund der Einführung einer neuen Schalentechnik oft verwendet. Der Vorteil von Sheddächern liegt in der blendungsfreien Beleuchtung und in der Vermeidung von direkter Sonneneinstrahlung. Außerdem bieten sie günstige Bedingungen für Heizung bzw. Lüftung.



Abb. 3.1: Fabrikshalle in Villanova d'Asti  
(Rühle, 1969 b, S. 212)

### Überblick über das Beispiel

Im diesem Beispiel wird eine Fabrikshalle aus Villanova d'Asti in Italien etwas vereinfacht nachgezeichnet. Sie trägt ein aus Konoiden gebildetes Sheddach. Das Gebäude ist in Auf- und Kreuzriss gegeben. Das Konoid besitzt einen Kreisbogen und eine Strecke als Leitlinien. Diese werden durch Strecken verbunden, die alle parallel zu einer Ebene sind, wodurch ein Konoid entsteht.

Konstruktionsschritte	Beschrieben in	MicroStation
Boden und Wände	a	
Konstruktion des Konoids (Dach)	b	
Glasfront	c	
Verdickung zu Volumenelementen	d	
Vervollständigung des Gebäudes	e	
Material zuweisen	f	

## a. Boden und Wände

Als Erstes werden Boden und Wände des 42x40m großen Gebäudes mittels Rechtecken dargestellt.

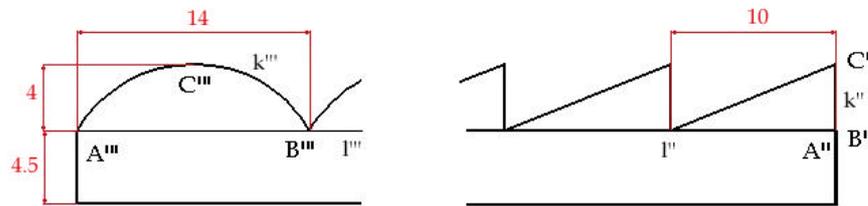


Abb. 3.2: Angabe in Kreuz- und Aufriss

Um in MicroStation Boden und Wände zu visualisieren, wird das Werkzeug „**Rechteck platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) verwendet.

## b. Konstruktion des Konoids

Für das Dach wird zuerst nur einer der zwölf Teile des kompletten Daches vollständig konstruiert und dann an die richtigen Positionen kopiert.

Um einen Teil des Sheddachs zu zeichnen, müssen zuerst die Leitlinien angegeben werden. Dabei wird zuerst der Kreisbogen  $k$  durch die Punkte A, B, C gelegt.

Das Konoid wird konstruiert, indem entsprechende Punkte der Leitlinien mit Geraden verbunden werden. Da die so konstruierten Erzeugenden alle zur  $xz$ -Ebene parallel liegen sollen (um ein Konoid zu erhalten), müssen auch jeweils die entsprechenden Punkte auf den Leitlinien in Ebenen liegen, die parallel zur  $xz$ -Ebene liegen. Dies wird mit einer Affinität erzwungen, indem die Leitkurve  $k$  so skaliert wird, dass sie die Leitgerade  $l$  ergibt.

Dieses Skalieren von  $k$  mit einem Skalierungsfaktor 0 in Richtung der  $z$ -Achse kann man sich als Parallelprojektion aus der  $z$ -Richtung vorstellen. Dadurch ist gewährleistet, dass die für die Flächenkonstruktion zugeordneten Punktepaare jeweils in Ebenen liegen, die zur  $xz$ -Ebene parallel sind. Die  $xz$ -Ebene ist daher die Richtebene des Konoids.  $k$  wird also skaliert und zugleich so kopiert, dass das Ergebnis  $l$  ergibt.

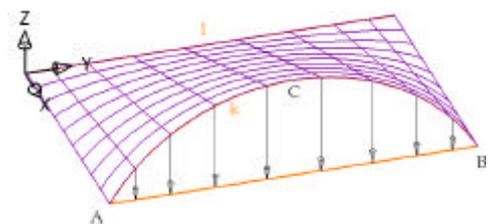


Abb. 3.3: Skalierung

Zwischen diesen beiden Abschnittselementen k und l wird nun eine B-Spline-Fläche gelegt, deren v-Linien die Ordnung 1 besitzen, also Geraden sind, da die Fläche ein Konoid annähern soll.

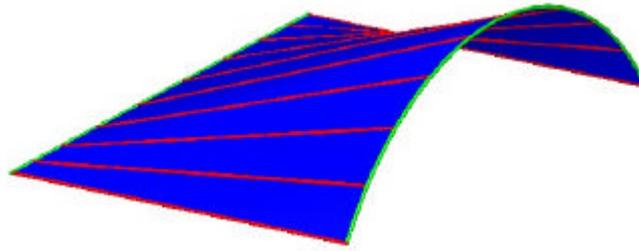


Abb. 3.4: Konoid (blau) mit Leitlinien (grün) und Erzeugenden (rot)

In MicroStation wird der Kreis mit dem Werkzeug „**Kreisbogen platzieren**“ (Hauptpalette, 4a, ) konstruiert, indem im Dialogfeld „Kante“ als Methode gewählt wird und die Punkte A, B, C im Zeichenfenster hintereinander eingegeben werden. Um dieses Kurvenstück zu skalieren wird „**Skalieren**“ (Hauptpalette, 8b, ) verwendet. Dabei muss bei der z-Skalierung 0 eingegeben werden. Da 0 aber kein zulässiger Wert ist, wird 0,000001 eingegeben. Außerdem muss das Feld „Kopie“ ausgewählt werden.

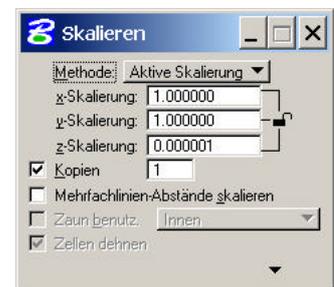


Abb. 3.5: Dialogfenster „Skalieren“

Nun kann die konoidale Fläche mit Hilfe von „**Fläche über Schnitt oder Netzwerk konstruieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) konstruiert werden. Die Fläche wird im Dialogfenster über „Schnitt“ definiert, das heißt, es werden Schnitte der B-Spline-Fläche angegeben. Nun müssen die beiden Leitlinien hintereinander mit der linken Maustaste angegeben werden. Man könnte natürlich beliebig viele Schnitte angeben, deshalb muss die Eingabe der Schnitte beendet werden, indem an einer beliebigen Stelle in der Zeichnung auf die linke Maustaste geklickt wird. Da nur zwei Schnitte eingegeben wurden, werden die v-Linien(Erzeugende) jeweils durch zwei entsprechende Punkte der u-Linien (Leitlinien k, l) festgelegt und haben daher Ordnung 1. Dadurch ist gewährleistet, dass die v-Linien der B-Spline-Fläche Geraden sind. Aufgrund der Skalierung liegen die entsprechenden Punktepaare (die zur Erzeugung der v-Linien dienen), in Ebenen, die parallel zur xz-Ebene sind, wodurch die Erzeugenden schließlich auch parallel zur xz-Ebene liegen. Die eben konstruierte B-Spline-Fläche nähert also ein Konoid an. MicroStation zeigt nun die so konstruierte Fläche an, die noch mit der linken Maustaste bestätigt werden muss.

### c. Glasfront

Das konoidale Dach ist vorne durch eine Glasfront abgeschlossen. Also muss noch ein Kreissegment konstruiert werden, das den Kreisbogen k und jene Strecke, die die Enden des Kreisbogens verbindet, als Rand besitzt.

Der Kreisbogen  $k$ , der Randkurve des gesuchten Kreissegments ist, wurde schon konstruiert. Mit „**SmartLine platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) wird die Strecke konstruiert, die Anfangs- und Endpunkt von  $k$  verbindet. Um die Fläche, die diese Randkurven enthält, zu konstruieren, wird in MicroStation das Werkzeug „**Komplexe Polygonfläche konstruieren**“ (Hauptpalette, 6a, ) verwendet.

#### d. Verdickung zu Volumenelementen

Da die Wände und das Dach in Wirklichkeit aus Materialien bestehen, die natürlich eine gewisse Dicke besitzen, werden nun die einzelnen Elemente zu Volumenelementen verdickt. Die Rechtecke, die die Wände darstellen, werden auf 20 cm verdickt. Sie sollen jeweils, mit Ausnahme des Rechtecks, das in der Ebene  $x=40$  liegt, in Richtung des Gebäudeinneren verdickt werden. Das Rechteck in der Ebene  $x=40$  wird nach außen verdickt. Das Dach wird um 10 cm nach innen verdickt und die Glasfront um 5 cm in Richtung der positiven  $x$ -Achse.

In MicroStation wird für die Verdickung das Werkzeug „**Auf Volumenelement verdicken**“ (3D-Haupt, 1b, ) verwendet. Die Dicke wird im Dialogfenster eingegeben und die Richtung der Verdickung wird mit der Maus bestimmt, nachdem das zu verdickende Element angeklickt wurde.

#### e. Vervollständigung des Gebäudes

Das konstruierte Konoid mit Glasfront muss noch 11 Mal in die richtigen Positionen vervielfältigt werden, sodass in  $y$ -Richtung drei Teile nebeneinander und in  $x$ -Richtung vier Teile hintereinander liegen.

Zum Vervielfältigen bietet sich in MicroStation das Werkzeug „**Matrix konstruieren**“ (Hauptpalette, 8b, ) an. Die Eingabe erfolgt wie in Abbildung 3.6.



Abb. 3.6: Dialogfenster „Matrix konstruieren“

#### f. Material zuweisen

Um dem Gebäude mehr Realitätsnähe zu verschaffen, werden den unterschiedlichen Teilen, wie Wänden, Glasfront und den Konoiddächern verschiedene Materialien zugewiesen.

Das Zuweisen eines Materials geschieht im Menüpunkt „Einstellungen-Rendern-Material zuweisen“. Um unterschiedliche Materialien zu verwenden, muss zuerst unter „Datei“ und „Palette öffnen“ eine Materialpalette geöffnet werden. Die von MicroStation zu Verfügung gestellten Paletten findet man im Unterverzeichnis Bentley/Workspace/system/materials. Um die Wände als Ziegelmauern erscheinen zu lassen, öffnet man die Palette „walls“ und wählt

das Material „Brick Red“ aus. In der Menüleiste wählt man bei „Funktionen“ „Durch Auswahl zuweisen“ aus und klickt eine Wand des Gebäudes an, wodurch das Material zugewiesen wird. Zu beachten ist, dass alle Objekte in einer Ebene mit der gleichen Farbe mit diesem Material belegt werden. (Daher sollten die Wände, die Glasfronten und das Sheddach zuvor in unterschiedlichen Farben bzw. Ebenen konstruiert werden.)

Dem Sheddach kann man als Material „Aluminium“ (in der Palette „metals“) und der Glasfront „Glazed“ (in der Palette „glass glazing“) zuweisen.

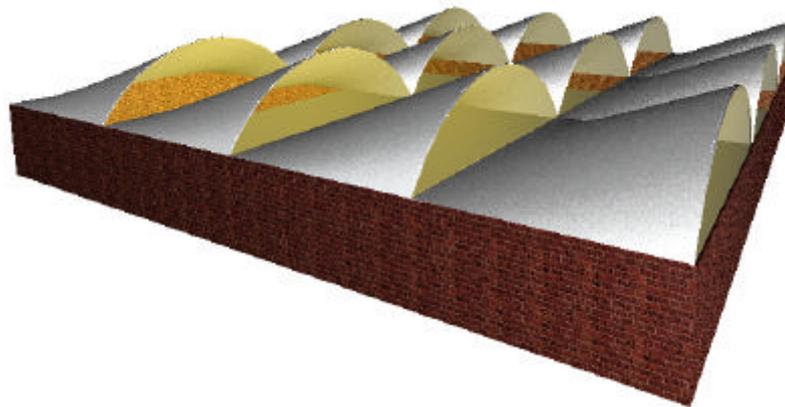


Abb. 3.7: Sheddach konstruiert mit MicroStation

### 3.1.2 Beispiel Schulhaus

In Barcelona steht direkt neben der Sagrada Familia ein kleines, von Gaudí erbautes Pfarrschulhaus, dessen Dach ein Konoid ist. In der nebenstehenden Abbildung ist ein Modell des Gebäudes zu sehen.

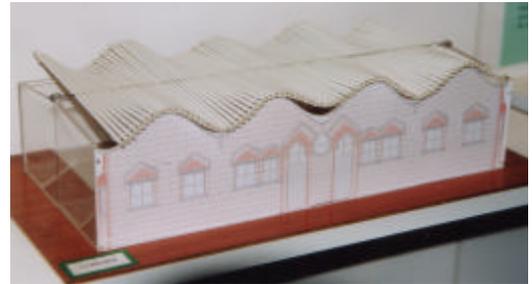


Abb. 3.8: Modell des Pfarrschulhauses

In diesem Beispiel soll das Gebäude (speziell das Dach) mit CAD-Software dargestellt werden.

#### Überblick über das Beispiel

Konstruktionsschritte	Beschrieben in	MicroStation
Dachkonstruktion	a	
	b	
restliches Gebäude	c	
Verdickung des Daches und der Wände	d	

#### a. Konstruktion des Konoids

Vorerst wird nur ein Achtel des Daches konstruiert. Die Randkurve wird mit Hilfe einer B-Spline-Kurve 3. Ordnung dargestellt, es werden vier Kontrollpunkte für deren Angabe benötigt: (10,0,5), (10,2,5), (10,2,7) und (10,4,7). (Die Maße sind in diesem Beispiel in Metern angegeben.)

Diese Kurve wird um 20 m in Richtung der negativen  $x$ -Achse verschoben und zugleich kopiert, wodurch der gegenüberliegende Rand des Daches dargestellt wird. Sie muss noch an der Ebene  $z=6$  gespiegelt werden.

Nun werden die beiden Kurven mit einer B-Spline-Fläche verbunden, die gerade Erzeugende besitzen.

Die Kurve wird in MicroStation mit Hilfe des Werkzeugs „**B-Spline-Kurve platzieren**“ (B-Spline-Kurven, 1a, ) konstruiert. Als „Methode“ wird „Steuerpunkte definieren“ ausgewählt, da die Kontrollpunkte der B-Spline-Kurve angegeben sind.



Abb. 3.9: Dialogfenster „B-Spline-Kurve platzieren“

Bei „Eingabe“ wird „Datenpunkte eingegeben“ gewählt, wenn man die Kurve ohne Vorgabe eines Kontrollpolygons zeichnen will. Dazu müssen die vier Punkte mit der linken Maustaste ausgewählt werden. Eine andere Möglichkeit ist es, zuerst das Kontrollpolygon mit „**SmartLine platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) an der gewünschten Stelle zu zeichnen und dann im Dialogfenster „B-Spline-Kurve platzieren“ bei „Eingabe“ „Polygonzug auswählen“ auszuwählen. Da die Kurve nicht geschlossen werden soll, wird „Offen“ gewählt. Die „MicroStation-Ordnung“ ist  $n+1$ , wenn  $n$  die herkömmliche mathematische Ordnung ist. Daher muss für die Ordnung hier 4 eingegeben werden, wenn eine B-Spline-Kurve 3. Ordnung gesucht ist.

Die gegenüberliegende Randkurve des Daches wird mit Hilfe von „**Kopieren**“ (Hauptpalette, 8b, ) und „**Spiegeln**“ (Hauptpalette, 8b, ) wie oben beschrieben erzeugt.

Um die B-Spline-Fläche zu konstruieren, wird das Werkzeug „**Fläche über Schnitt oder Netzwerk konstruieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) ausgewählt. Für die Angabe der Fläche werden die beiden Schnitte, also die beiden bisher konstruierten Kurven angegeben. Dann muss man die Eingabe der Schnitte beenden, indem auf eine beliebige andere Stelle in der Zeichnung mit der linken Maustaste geklickt wird. Da nur zwei u-Linien eingegeben wurden, werden entsprechende Punkte dieser u-Linien mit Geraden verbunden und da die Kurven gleich skaliert sind, sind alle Geraden parallel zur xz-Ebene. Um die Fläche endgültig festzulegen, muss noch einmal auf die linke Maustaste gedrückt werden.

## b. Konstruktion des kompletten Daches

Der bis jetzt konstruierte Teil wird an der Ebene  $y=4$  gespiegelt und zugleich kopiert. Diese beiden Flächenteile werden, nachdem sie vereinigt wurden, 4 Mal um 4 m in Richtung der positiven y-Achse verschoben. Zuletzt werden die vier einzelnen Teile zu einem kompletten Dach vereinigt.

Mit „**Spiegeln**“ (Hauptpalette, 8b, ) „**Flächen vereinigen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) und „**Kopieren**“ (Hauptpalette, 8b, ) wird das Dach in MicroStation vervollständigt.

## c. Die Wände und der Boden

Die Wände werden so konstruiert, dass das Dach diese um 40 cm überragt. Sie werden mit Rechtecken dargestellt, welche mit dem Dach getrimmt werden. Der Boden liegt in der xy-Ebene und wird auch mit Hilfe eines Rechtecks visualisiert.

Für die Rechtecke wird „**Rechteck platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) verwendet. Sie werden mit Hilfe des Werkzeugs „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) mit dem Dach getrimmt. Bei der Auswahl der Fläche, die getrimmt werden soll, ist zu beachten, dass sie in jenem Bereich angeklickt wird, der erhalten bleiben soll.

#### d. Verdickung des Daches und der Wände

Das Dach wird schließlich um 10 cm verdickt, da es in Wirklichkeit natürlich auch nicht nur aus einer Flächenhaut besteht. Bei der Verdickung soll die obere Fläche als Konoid erhalten bleiben, daher wird das Volumen in Richtung der negativen z-Achse aufgetragen. Die so entstandene untere Fläche des Daches ist eine Parallelfäche des Konoids, selbst aber kein Konoid.

Die Wände sollen jeweils nach innen um 20 cm verstärkt werden, so wie auch die Bodenplatte.

Für die Verdickung von Flächenelementen wird „**Auf Volumenelement verdicken**“ (3D-Haupt, 1b, ) ausgewählt. Die oben beschriebenen Werte werden in das Dialogfenster eingetippt. Klickt man auf die Fläche, muss noch ausgewählt werden, in welcher Richtung verdickt werden soll.

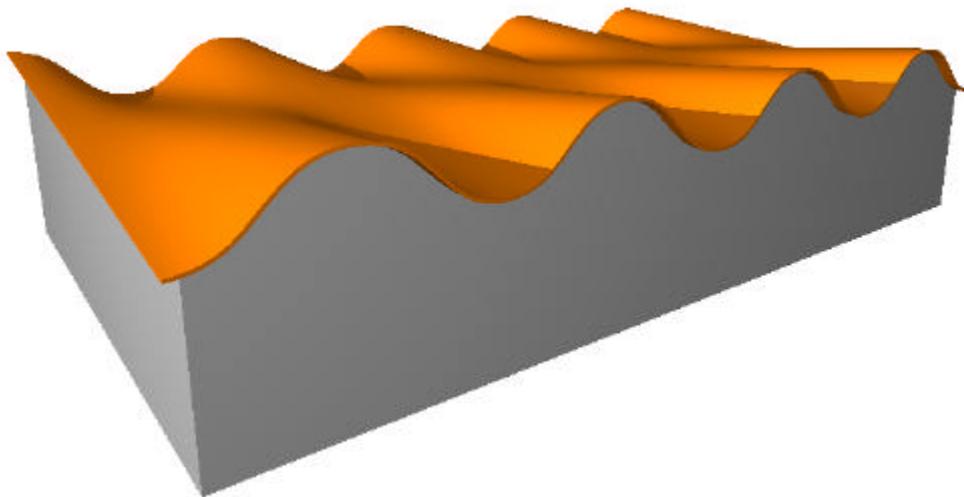


Abb. 3.10: Pfarrschulhaus von Gaudí, konstruiert mit MicroStation

### 3.1.3 Plückerkonoid

#### Eigenschaften des Plückerkonoids

Das nach J. Plücker (1801-1868) benannte spezielle Konoid spielt in der Raumkinematik eine besondere Rolle und kann durch folgenden Bewegungsvorgang erzeugt werden:

#### Definition (bzw. erste Erzeugungsweise)

Eine Gerade führt um eine sie rechtwinklig treffende Achse eine gleichförmige Drehung und gleichzeitig längs der Achse eine harmonische Schwingung mit der doppelten Frequenz aus.

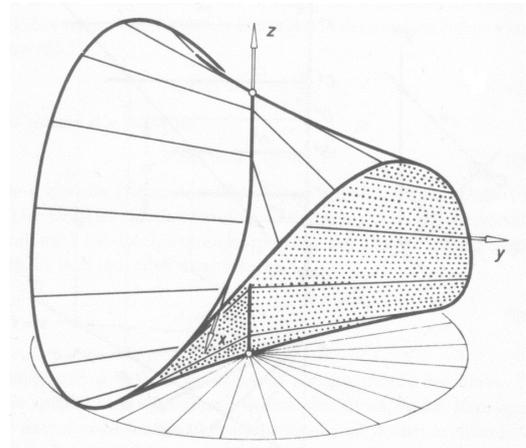


Abb. 3.11: Plückerkonoid  
(Wunderlich, 1967, S. 38)

In der Figur sieht man den innerhalb eines koaxialen Drehzylinders verlaufenden Teil der Fläche anschaulich dargestellt.

#### Analytische Darstellung des Plückerkonoids

Wählt man die  $z$ -Achse als Umschwungachse, die Amplitude als Längeneinheit und eine Mittellage der Erzeugenden als  $x$ -Achse, so lautet die **Parameterdarstellung** der Fläche mit den Parametern  $r$  und  $\mathbf{j}$ :

$$x = r \cos \mathbf{j}, \quad y = r \sin \mathbf{j}, \quad z = \sin 2\mathbf{j}$$

Dabei beschreibt  $r$  den Normalabstand zur  $z$ -Achse und  $\mathbf{j}$  den Drehwinkel um die  $z$ -Achse bezüglich der  $x$ -Achse. Durchläuft  $r$  das offene Intervall  $(-\infty, \infty)$  und  $\mathbf{j}$  die Werte  $[0, \mathbf{p}]$ , so wird die ganze Fläche überstrichen.

Um eine Gleichung für das Plückerkonoid zu erhalten, wird der Satz vom doppelten Winkel angewendet:

$$z = \sin 2\mathbf{j} = 2 \sin \mathbf{j} \cos \mathbf{j} = 2 \frac{xy}{r^2}.$$

$r$  kann folgendermaßen aus  $x$  und  $y$  beschrieben werden:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Setzt man  $r^2$  nun in die obige Gleichung ein, erhält man die **Gleichung** des Plückerkonoids:

$$2xy = (x^2 + y^2)z$$

### Torsale Erzeugende auf dem Plückerkonoid

Im Folgenden wird gezeigt, dass die höchste und die tiefste Erzeugende ( $\mathbf{j} = \pm \mathbf{p}/4$ ,  $z = \pm 1$ ) **torsale Erzeugende** sind.

Die Tangentialebene in einem Punkt  $P$  der Erzeugenden wird durch die Erzeugende und durch die Tangente an die „ $\mathbf{j}$ -Linie“ durch  $P$  aufgespannt. Die Erzeugende ist parallel zur  $xy$ -Ebene.

Die Richtung der Tangente an die „ $\mathbf{j}$ -Linie“ erhält man durch die Ableitung der Parameterdarstellung nach  $\mathbf{j}$ :

$$\frac{dx}{d\mathbf{j}} = -r \sin \mathbf{j}, \quad \frac{dy}{d\mathbf{j}} = r \cos \mathbf{j}, \quad \frac{dz}{d\mathbf{j}} = 2 \cos 2\mathbf{j}$$

und setzt bei der Ableitung der  $z$ -Koordinate  $\mathbf{j} = \pm \mathbf{p}/4$ , so ergibt das

$$\frac{dz}{d\mathbf{j}} = 0.$$

Daher sind alle Tangenten an die „ $\mathbf{j}$ -Linien“ durch die Punkte der Erzeugenden mit Parameterwert  $\mathbf{j} = \pm \mathbf{p}/4$  parallel zur  $xy$ -Ebene.

Die Tangentialebene ist daher in allen Punkten der höchsten und tiefsten Erzeugenden parallel zur  $xy$ -Ebene. Die Erzeugenden sind also torsal.

### Ellipsen auf dem Plückerkonoid

$\Gamma$  sei ein Drehzylinder, der die  $z$ -Achse als Erzeugende enthält. Jede Erzeugende  $e$  des Konoids schneidet  $\Gamma$  neben einem Punkt auf der  $z$ -Achse noch in einem zweiten Punkt  $P$ . Verfolgt man die Lagenänderung dieses Punktes  $P$  im Verlauf der Umschwungbewegung von  $e$ , so stellt man mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes fest, dass sein Grundriss  $P'$  auf dem Basiskreis von  $\Gamma$  mit konstanter Geschwindigkeit wandert, während sich die Höhenkote  $z$  gemäß (1) nach einem Sinusgesetz gleicher Frequenz ändert.

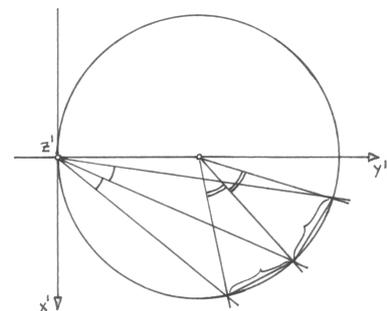


Abb. 3.12: Peripheriewinkelsatz

Vergleicht man dies mit der Abrollung eines ebenen Schnittes eines Zylinders (ergibt Sinuskurve), so stellt man fest, dass die Bahn  $c$ , die  $P$  beschreibt, eine von  $\Gamma$  getragene Ellipse ist. Die Hauptachse dieser Ellipse  $c$  ist eine Falllinie der Ellipseebene  $\tau$  und hat ihre Endpunkte auf den vorhin erwähnten Torsalerzeugenden. Die Ebene  $\tau$  schneidet das Konoid nicht bloß längs der Ellipse  $c$ , sondern noch nach einer Geraden, nämlich der Erzeugenden  $e_1$  durch den Schnittpunkt von  $\tau$  mit der Achse.  $\tau$  ist also eine Tangentialebene des Konoids.

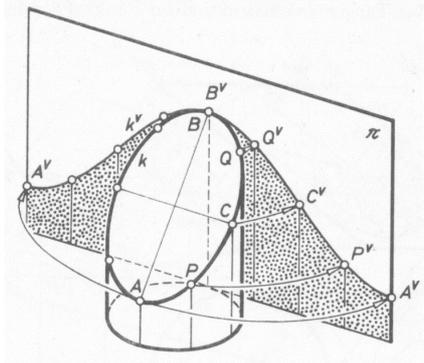


Abb. 3.13: Abrollung eines Zylinders

### Zweite Erzeugungsweise

Obige Überlegungen führen zu folgender Erzeugungsweise eines Plückerkonoids: Ein Plückerkonoid ist die Menge der Geraden, die einerseits einen ebenen Schnitt eines Drehzylinders und andererseits rechtwinklig eine beliebige Erzeugende dieses Drehzylinders schneiden (siehe auch Beispiel 3.1.4).

### 3.1.4 Beispiel Plückerkonoid

Im folgenden Beispiel wird ein Plückerkonoid, das mit einem koaxialen Zylinder abgeschnitten ist, mit Hilfe der zweiten Erzeugungsweise (siehe Kapitel 3.1.3) konstruiert.

#### Überblick über das Beispiel

Konstruktionsschritte	Beschrieben in	MicroStation
Konstruktion der Ellipse und der Achse	a	
	b	
Konstruktion eines Teil des Konoids	c	
Vervollständigung des Objektes	d	
Schnitt mit einem Zylinder	d	

#### a. Konstruktion der Ellipse

In der zweiten Erzeugungsweise (siehe Kapitel 3.1.3) heißt es, dass die Menge der Geraden, die einerseits einen ebenen Schnitt eines Drehzylinders schneiden, der eine Ellipse ist, und andererseits eine der Erzeugenden dieses Drehzylinders orthogonal schneiden, ein Plückerkonoid darstellt.

Als Drehzylinder wird der Zylinder  $\Phi$  wie in Abbildung 3.14 angegeben gewählt. Seine Achse verläuft durch die Punkte  $(5,0,0)$  und  $(5,0,10)$ , der Radius beträgt 5 cm.

Der ebene Schnitt des Zylinders soll in einer Ebene durch die Punkte  $(10,0,0)$ ,  $(10,5,0)$  und  $(0,0,10)$  liegen. Mit Hilfe eines Rechtecks durch die genannten Punkte kann diese Ebene dargestellt werden. Der Schnitt mit dem Zylinder ergibt den gesuchten Schnitt, eine Ellipse.

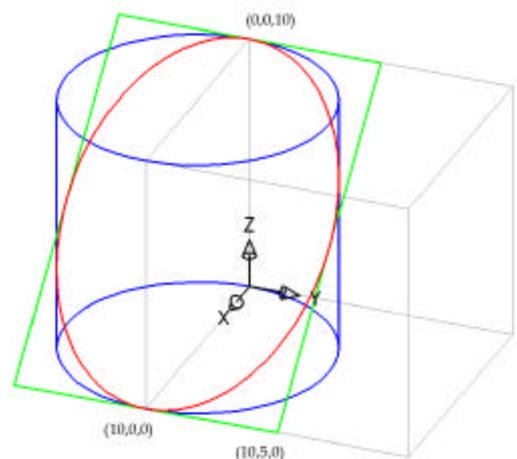


Abb. 3.14: Angabe mit Hilfe einer Ellipse

Für die Konstruktion des Drehzylinders wird in MicroStation das Werkzeug „**Zylinder platzieren**“ (3D-Haupt, 1a, ) verwendet, wobei im Dialogfenster als „Typ“ „Fläche“ ausgewählt werden muss. Die Maße des Zylinders werden wie oben beschrieben eingegeben.

Das Rechteck, das die Trägerebene des elliptischen Schnitts darstellt, kann mit Hilfe der Funktion „**Polygonfläche platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) gezeichnet werden.

Nun ist alles für die Konstruktion der Ellipse vorbereitet, die mit dem Werkzeug „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) ermittelt wird, indem im Dialogfenster das Feld „Schnittpunktkurve“ aktiviert wird. Werden die beiden Flächen mit der linken Maustaste angeklickt, erscheint die Schnittellipse, die noch mit einem Mausklick bestätigt werden muss.

Um im weiteren Beispiel problemlos mit dieser Kurve arbeiten zu können, wird statt Ellipse, die bisher als rationale Kurve dargestellt wurde, eine Approximation dieser durch eine B-Spline-Kurve verwendet. Die B-Spline-Kurve lässt sich mit „**Kurve neu erstellen**“ (B-Spline-Kurven, 1b, ) konstruieren. Im Dialogfenster wird als „Typ“ „Neu erstellen“ ausgewählt. Die damit neu erstellte Kurve ist eine B-Spline-Kurve, die die Ellipse annähert. Im Dialogfenster lässt sich bei der „Toleranz“ auswählen, wie genau diese Annäherung erfolgen soll (siehe auch Kapitel 2.1.6 (b)). Mit einem Doppelklick auf die Ellipse, wird diese durch die angenäherte B-Spline-Kurve dargestellt.

Will man die Kontrollpunkte der B-Spline-Kurve betrachten, so wählt man das Werkzeug „**Elementauswahl**“ (Hauptpalette, 1a, ) aus und klickt auf die Kurve. Wird nun noch auf den Button „**Elementinformationen**“ (Primäre Funktionen, 6, ) geklickt, so zeigt MicroStation den Typ der Kurve an.

Für die weitere Konstruktion wird nur noch die Ellipse gebraucht, also können Rechteck und Zylinder ausgeblendet werden.

## b. Konstruktion der Achse des Plückerkonoids

Damit die Fläche, die erzeugt wird, ein Konoid ergibt, wird die konstruierte Ellipse (bzw. B-Spline-Kurve) so skaliert (und zugleich kopiert), dass sie die Achse des Konoids ergibt. Diese Skalierung hat zur Folge, dass zugeordnete Punkte für die spätere Flächenkonstruktion den gleichen Abstand zur xy-Ebene haben, die damit die Richtebene des Konoids ist. Um die Kurve zu einer z-Achsen-parallelen Geraden zu skalieren, wird in x- und y-Richtung mit dem Wert 0 skaliert. In z-Richtung soll die Strecke gegenüber der Ellipse nicht verzerrt werden, daher wird hier mit dem Wert 1 skaliert.

In MicroStation wird dazu das Werkzeug „**Skalieren**“ (Hauptpalette, 8b, ) verwendet. Um als Ergebnis der Skalierung die Achse des Plückerkonoids zu erhalten, wird im Dialogfenster für die x- und y-Skalierung 0 der Wert 0,000001 eingegeben (da MicroStation den Wert 0 nicht annimmt), da sie parallel zur z-Achse liegt. Für die z-Skalierung wird der Wert 1 eingegeben.

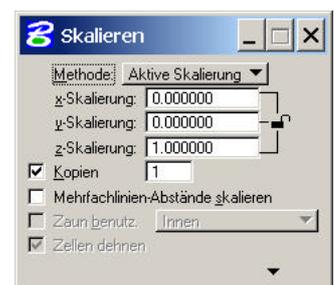


Abb. 3.15: Dialogfenster Skalieren

Damit die Ellipse erhalten bleibt, wird das Feld „Kopien“ aktiviert.

Wird nun die Ellipse mit der linken Maustaste angeklickt und dann der Punkt (0,0,10) als Ursprung der Skalierung eingegeben, so wird die Achse an der richtigen Stelle generiert.

### c. Konstruktion eines Teiles des Plückerkonoids

Nun ist alles für die Konstruktion des Plückerkonoids vorbereitet. Die Ellipse ist der in der zweiten Erzeugungsweise genannte ebene Schnitt des Zylinders. Die soeben durch Skalierung konstruierte Strecke stellt die Erzeugende dieses Zylinders dar. Wird nun eine B-Spline-Fläche konstruiert, indem die Ellipse und die Strecke als Schnitte der Fläche angegeben werden, so werden die zugehörigen Punkte der beiden Linien durch Strecken verbunden. Da zugehörige Punktepaar jeweils in Ebenen liegen, die parallel zur  $xy$ -Ebene liegen, ist die Bedingung der zweiten Erzeugungsweise, dass die Erzeugenden des Konoids zur Erzeugenden des Zylinders orthogonal stehen müssen, erfüllt. Die entstehende Freiformfläche approximiert daher einen Teil eines Plückerkonoids.

Diese Fläche wird von der Ebene  $z=5$  abgeschnitten. Der untere Teil des Konoids soll erhalten bleiben.

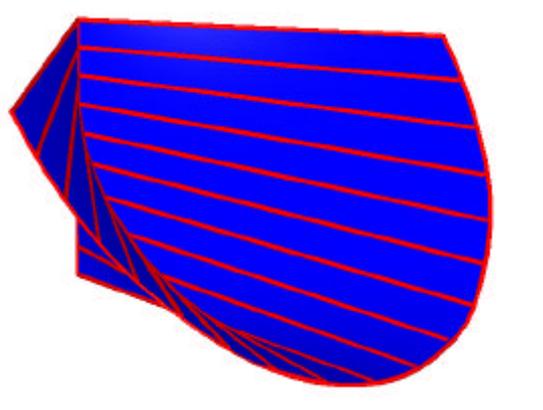


Abb. 3.16: Teil des Plückerkonoids

Die Fläche wird in MicroStation mit „**Fläche über Schnitt oder Netzwerk konstruieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) erstellt. Sie wird im Dialogfenster als „Schnitt“ definiert. Nun werden die Ellipse und die Achse als Schnitte mit der linken Maustaste angegeben. Um die Eingabe der Schnitte zu beenden, muss an einer beliebigen Stelle auf die linke Maustaste gedrückt werden. Da nur zwei Schnitte der Fläche angegeben wurden, werden zugehörige Punkte der beiden Schnitte durch Geraden miteinander verbunden. MicroStation zeigt nun die so konstruierte B-Spline-Fläche an, die wieder mit einem Mausklick auf die linke Taste bestätigt wird.

Mit „**Rechteck platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) wird ein Rechteck in der Ebene  $z=5$  konstruiert, womit das approximierte Konoid mit Hilfe des Werkzeugs „**Trimmung**“

**erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) getrimmt wird. Bei der Trimmung ist zu beachten, dass das Objekt an jener Seite anzuklicken ist, die erhalten bleiben soll.

#### d. Vervollständigung des Konoids

Der soeben konstruierte Teil des Plückerkonoids wird drei Mal um  $90^\circ$  um die z-Achse gedreht, wobei bei jeder Drehung eine Kopie zu erstellen ist. Zwei gegenüberliegende Teile werden an der Ebene  $z=5$  gespiegelt. Die vier Teile werden vereinigt und mit einem Drehzylinder geschnitten, der dieselbe Achse hat, wie das Plückerkonoid und einen Radius von 6,5 cm besitzt.

Der konstruierte Teil des Konoids wird mit „**Drehen**“ (Hauptpalette, 8b, ) drei Mal um die z-Achse verdreht. Im Dialogfenster wird eingegeben, dass eine Kopie erstellt werden soll. Um die zwei gegenüberliegenden Teile zu spiegeln, wird das Werkzeug „**Spiegeln**“ (Hauptpalette, 8b, ) verwendet.

Anschließend werden die vier Teile mit dem Werkzeug „**Flächen vereinigen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) vereinigt, indem alle vier Teile nacheinander angeklickt werden.

Der schon oben beschriebene Drehzylinder wird mit „**Zylinder platzieren**“ (3D-Haupt, 1a, ) konstruiert und kann nun für die Trimmung mit Hilfe von „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) verwendet werden. Dabei muss das Konoid in dem Bereich angeklickt werden, der nach der Trimmung erhalten bleiben soll.

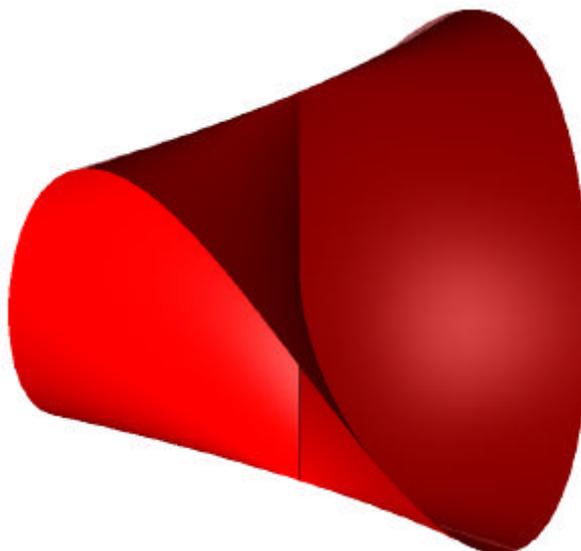


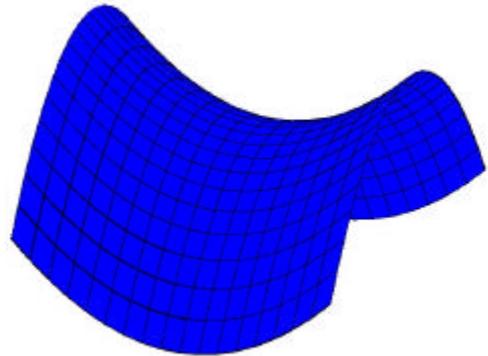
Abb. 3.17: Plückerkonoid innerhalb eines koaxialen Zylinders

## 3.2 HP-Flächen (hyperbolische Paraboloid)

### 3.2.1 Allgemeines über HP-Flächen

#### Definition der HP-Fläche als Schiebfläche

Bei Schiebung einer Parabel längs einer Parabel entsteht eine **HP-Fläche** bzw. ein **Hyperbolisches Paraboloid**, falls die Achsen der beiden Parabeln zur Schnittgeraden ihrer Ebenen parallel und die Parabeln nach verschiedenen Seiten hin offen sind.



#### Analytische Darstellung einer HP-Fläche

Die Gleichung der HP-Fläche wird nun als Schiebfläche zweier Parabeln hergeleitet:

Abb. 3.18: Darstellung einer HP-Fläche als Schiebfläche

Die Parabel  $p_1(u): x^2 = a^2 z$  liegt in der  $xz$ -Ebene und besitzt die  $z$ -Achse als Achse.  $p_1$  wird in dieser Form angenommen, um (unabhängig von  $a$ ) festzulegen, dass die Parabel in Richtung der positiven  $z$ -Achse geöffnet ist. Für die weitere Rechnung wird die folgende Parametrisierung verwendet ( $x=u$ ):

$$p_1(u): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ \frac{u^2}{a^2} \end{pmatrix}$$

Die Parabel  $p_2(v): y^2 = -b^2 z$  liegt in der  $yz$ -Ebene, besitzt die  $z$ -Achse als Achse und ist in Richtung der negativen  $z$ -Achse geöffnet. Für die weitere Rechnung wird die folgende Parametrisierung verwendet ( $y=v$ ):

$$p_2(v): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ -\frac{v^2}{b^2} \end{pmatrix}$$

Um die Gleichung der Schiebfläche, die durch Translation der Parabel  $p_1$  entlang der Parabel  $p_2$  entsteht, zu berechnen, müssen  $p_1(v)$  und  $p_2(v)$  addiert werden:

$$p_1(v) + p_2(v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die Gleichung der HP-Fläche (da  $x=u$  und  $y=v$ ):

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

### Jede HP-Fläche ist eine Regelfläche

Dies ist durch folgende Rechnung ersichtlich:

Die gemeinsamen eigentlichen Punkte des Hyperbolischen Paraboloids

$$z = \left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) = \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \cdot \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$$

und der erstprojizierenden Ebene  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c$  ( $c = \text{const.}$ ) liegen zugleich in der zweiten

Ebene  $z = c \cdot \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$ , also insgesamt auf einer Geraden  $e$ . Alle diese  $e$ -Erzeugenden

liegen in den zueinander parallelen Ebenen  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c$  und erscheinen daher im

Grundriss als zueinander parallele Geraden. Analog schneiden die Ebenen mit der Gleichung  $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c$  die HP-Fläche nach einer zweiten Erzeugendenschar, der Schar der  $f$ -Erzeugenden.

Eine HP-Fläche ist daher eine Regelfläche mit zwei Erzeugendenscharen, die zu je einer Richtebene parallel sind. Je zwei Erzeugenden derselben Schar sind windschief (da sie jeweils zur gleichen Ebene parallel liegen und nicht parallel zueinander liegen).

### Angabe der HP-Fläche durch ein Erzeugendenvierseit

Greift man aus jeder Erzeugendenschar zwei Geraden heraus, so erhält man ein Erzeugendenvierseit  $e_1, f_1, e_2, f_2$ . Die beiden Richtebenen der  $e$ - und der  $f$ -Erzeugendenschar sind durch diese Angabe bis auf Schiebung festgelegt. Verschiebt man  $e_2$  durch einen beliebigen Punkt von  $e_1$ , so ergibt die dadurch aufgespannte Ebene eine Richtebene der  $e$ -Erzeugendenschar (analog lässt sich eine

Richtebene der  $f$ -Erzeugendenschar konstruieren). Eine weitere  $f$ -Erzeugende  $f_3$  wird wie folgt konstruiert:

Man wählt einen Punkt  $P$  auf  $e_1$  (nicht  $e_1 \cap f_1$  und  $e_1 \cap f_2$ ), verschiebt die oben konstruierte Richtebene der  $f$ -Erzeugendenschar parallel durch  $P$  und schneidet diese mit  $e_2$ . So erhält man den Schnittpunkt  $S$ . Die Verbindungsgerade von  $P$  und  $S$  ist die Erzeugende  $f_3$ .

Analog lassen sich beliebig viele Erzeugende beider Scharen konstruieren.

### Tangentialebenen der HP-Fläche

Durch jeden Punkt  $P$  einer HP-Fläche geht je eine Erzeugende der  $e$ -Schar und eine der  $f$ -Schar; diese beiden Erzeugenden spannen die **Tangentialebene** in  $P$  auf. (siehe Abbildung 3.19)

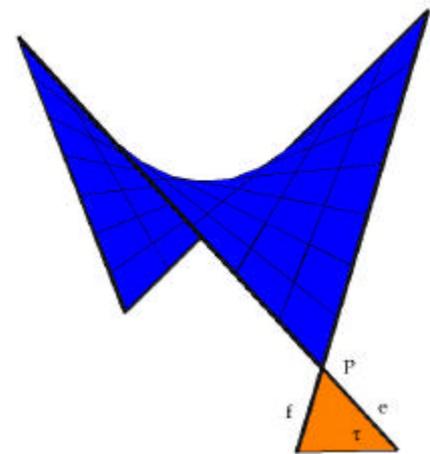


Abb. 3.19: Tangentialebene einer HP-Fläche

### HP-Flächen sind windschiefe Flächen

Jede Richtebene enthält genau eine Erzeugende  $e$ , die durch ihre Schnittpunkte  $S_1$  und  $S_2$  mit den beiden Leitgeraden  $f_1, f_2$  festgelegt sind. Da die Tangentialebenen an  $F$  in  $S_1$  und  $S_2$  stets verschieden sind, ist die HP-Fläche eine **windschiefe Fläche**, das heißt sie besitzt keine torsalen Erzeugenden.

### Scheitel, Achse und Symmetrieebene der HP-Fläche

Jede Schnittgerade einer Richtebene einer Erzeugendenschar mit einer Richtebene der anderen Erzeugendenschar heißt **Durchmessergerade** der HP-Fläche. Alle Durchmesser sind also zueinander parallel. Jede Durchmessergerade schneidet die HP-Fläche in genau einem Punkt. Jener Flächenpunkt, in dem die Tangentialebene zu den Durchmessergeraden normal ist, heißt **Scheitel**. Die Durchmessergerade durch den Scheitel heißt **Achse**. Die Symmetrieebenen der Richtebenen durch die Achse sind die **Symmetrieebenen** der HP-Fläche.

### Die Hauptschnittparabeln einer HP-Fläche

Die Schnittparabeln von  $F$  mit den beiden Symmetrieebenen heißen **Hauptschnittparabeln**. Sie sind in Bezug auf die Tangentialebene im Scheitel nach verschiedenen Seiten hin offen und im Allgemeinen nicht kongruent (siehe nebenstehende Abbildung).

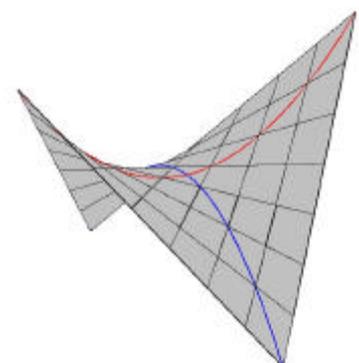


Abb. 3.20: Hauptschnittparabeln

### Schnitte der HP-Fläche mit Ebenen, die parallel zur $xy$ -Ebene liegen

1. Für Ebenen, die parallel zur  $xy$ -Ebene liegen, ergibt der Schnitt mit der HP-Fläche Hyperbeln.

Dies wird in der folgenden Rechnung gezeigt:

Wie oben erwähnt, besitzt eine HP-Fläche folgende Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

Schneidet man mit einer Ebene parallel zur  $xy$ -Ebene, dh.  $z=c$  ( $c=\text{const.}$ ), so ist die Schnittkurve festgelegt durch:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c$$

Das ist die Gleichung einer **Hyperbel**.

2. Wählt man die Ebene  $z=0$ , so zerfällt der Schnitt in **zwei Geraden**:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \cdot \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = 0$$

$$x = \pm y \frac{a}{b}$$

### Schnitte der HP-Fläche mit Ebenen, die parallel zur Achse liegen

Jede zur Achse parallele Ebene, die keine Richtebene ist, schneidet die HP-Fläche nach einer **Parabel**. Dies wird in folgender Rechnung gezeigt:

Die HP-Fläche besitzt die Form:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0 \quad (1)$$

Eine zur  $z$ -Achse Ebene durch den Punkt  $P=(x_p, y_p, 0)$  hat die Parameterdarstellung

$$X = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

mit Parametern  $u$  und  $v$ .

Um den Schnitt zu berechnen, wird (2) in (1) eingesetzt:

$$\frac{(x_p + c \cdot u)^2}{a^2} - \frac{(y_p + d \cdot u)^2}{b^2} - z \cdot v = 0.$$

Umgeformt ergibt das folgende Gleichung:

$$u^2 \cdot (c^2 b^2 - d^2 a^2) + u \cdot (2x_p c b^2 + 2y_p d a^2) - v \cdot (z a^2 b^2) + (x_p^2 - y_p^2) = 0$$

In den Klammerausdrücken stehen jeweils ausschließlich Konstante. Die Gleichung hat daher die Bauart  $u^2 \cdot k_1 + u \cdot k_2 - v \cdot k_3 + k_4 = 0$  und ist Gleichung einer Parabel.

### 3.2.2 Beispiel HP-Fläche: 2 Erzeugungsweisen

#### Überblick über das Beispiel

In diesem Beispiel soll ein Hyperbolisches Paraboloid einerseits als Schiebfläche und andererseits als Regelfläche konstruiert werden. Zuerst wird eine Schiebfläche mit Parabeln als Leit- und Profilkurve gezeichnet. Es werden unterschiedliche ebene Schnitte mit der so entstandenen HP-Fläche betrachtet. Insbesondere wird der Schnitt mit der Tangentialebene im Scheitel ermittelt, woraus sich ein Erzeugendenpaar der Regelfläche ergibt. Dadurch sind die beiden Stellungen der Richtebenen, zu denen alle Erzeugenden der Regelfläche parallel liegen, festgelegt. Die HP-Fläche kann nun mit Hilfe eines Erzeugendenvierseit auf eine zweite Weise, als Regelfläche, konstruiert werden.

Konstruktionsschritte	Beschrieben in	MicroStation
Konstruktion der HP-Fläche als Schiebfläche	a	
	b	
Erzeugendenvierseit konstruieren	c	
	d	
Konstruktion der HP-Fläche als Regelfläche	e	

#### a. Parabelbögen zur Angabe der Fläche

Für die Konstruktion der HP-Fläche müssen die Parabelbögen  $p$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_3$ , wie in Abbildung 3.2.1 angegeben werden.

In MicroStation werden die Parabelbögen  $p$  und  $l_1$  mit dem Werkzeug „**Kegelschnitt platzieren**“ (B-Spline Kurven, 1a, ) konstruiert. Definiert man die Kurve über Punkte, so muss man zuerst den Startpunkt, dann den Endpunkt und schließlich einen Schulterpunkt (dessen Tangente liegt parallel zur Verbindung von Start- und Endpunkt) des Parabelbogens angeben. Im Fall von  $p$  würde das die folgende Reihenfolge bedeuten:  $(0,0,0)$ ,  $(10,0,0)$ ,  $(5,0,5)$ ; für die Parabel  $l_1$ :  $(10,0,0)$ ,  $(10,10,0)$ ,  $(10,5,-2.5)$ . Um  $l_2$  und  $l_3$  zu erhalten, verschiebt man  $l_1$  mit „**Kopieren**“ (Hauptpalette, 8b, )“.

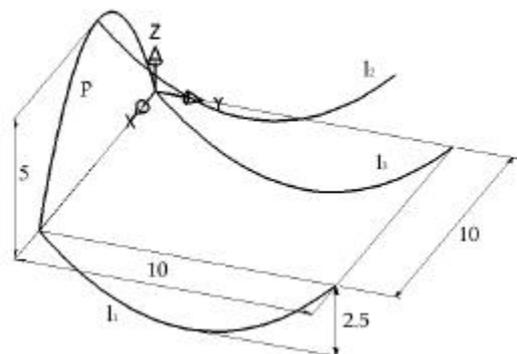


Abb. 3.21: Parabelbögen zur Angabe

## b. Konstruktion der HP-Fläche als Schiebfläche

Die Parabelbögen  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_3$  stellen drei Schnitte der HP-Fläche dar. Über diese Schnitte kann nun die Fläche als B-Spline-Fläche konstruiert werden. Die drei Parabelbögen müssen dieselbe Orientierung aufweisen, damit die erhaltene Fläche nicht „verdreht“ ist.

In MicroStation wird die Fläche mit dem Werkzeug „**Fläche über Schnitt oder Netzwerk konstruieren**“ (Fläche

modellieren, 1a, ) erzeugt. Im Dialogfenster ist bei „Definieren über:“

„Schnitt“ auszuwählen. Das bedeutet, dass zur Angabe der Fläche Schnitte der Fläche dienen. Nun müssen die u-Linien  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_3$  hintereinander mit der linken Maustaste angeklickt werden. Die Eingabe der Schnitte (u-Linien) muss nun mit der rechten Maustaste abgebrochen werden, da man noch mehrere Schnitte angeben könnte. Die Ordnung der v-Linien ist abhängig von der Anzahl der Schnitte, die angegeben werden. Da drei u-Linien angegeben wurden sind die v-Linien Parabeln. Die von MicroStation vorgeschlagene Fläche muss schließlich mit der linken Maustaste bestätigt werden.

Die so konstruierte Fläche ist exakt, da Parabeln exakt als Bezierkurven dargestellt werden und dadurch auch die Fläche, die als Schiebfläche von Parabeln entsteht, exakt ist.

## c. Ebene Schnitte der HP-Fläche

Nun werden unterschiedliche ebene Schnitte der HP-Fläche betrachtet. Wählt man eine Ebene parallel zur  $xy$ -Ebene, so ist der Schnitt dieser Ebene mit der HP-Fläche im Allgemeinen eine Hyperbel. Im Fall der Tangentialebene im Scheitelpunkt der Fläche zerfällt der Schnitt in zwei Geraden (Beweis siehe Kapitel 3.2.1).

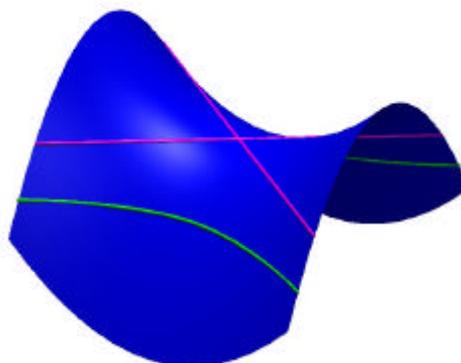


Abb. 3.23: ebene Schnitte der HP-Fläche, Erzeugendenpaar (violett) und Hyperbel (grün)

Um dies in MicroStation zu visualisieren, werden Rechtecke („**Rechteck platzieren**“, Hauptpalette, 3b, ) auf verschiedenen Höhen gezeichnet. Um ein Rechteck genau in den Scheitelpunkt zu legen, wird der Scheitel der Parabel  $l_2$  angesnappt. Dieser Punkt kann als Eckpunkt des Rechtecks verwendet werden, das daraufhin mit „**Element ändern**“ (Hauptpalette, 9b, ) vergrößert wird. Mit „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) wird der Schnitt mit der HP-Fläche ermittelt. Im Dialogfenster ist „Schnittpunktkurve“ zu wählen.

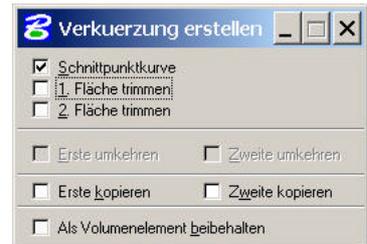


Abb. 3.24: Dialogfenster „Trimmung erstellen“

#### d. Konstruktion des Erzeugendenvierseits

Normal auf die Tangentialebene im Scheitelpunkt werden durch die geraden Schnitte Rechtecke gelegt. Die Trägerebenen der Rechtecke sind Richtebenen der Erzeugenden. Erzeugt man von jedem Rechteck durch Parallelverschiebung zwei Kopien (z.B. durch die Endpunkte von  $l_2$ ), so entstehen vier Rechtecke. Jedes schneidet die HP-Fläche längs einer Geraden. Die vier entstehenden Geraden bilden ein Erzeugendenvierseit.

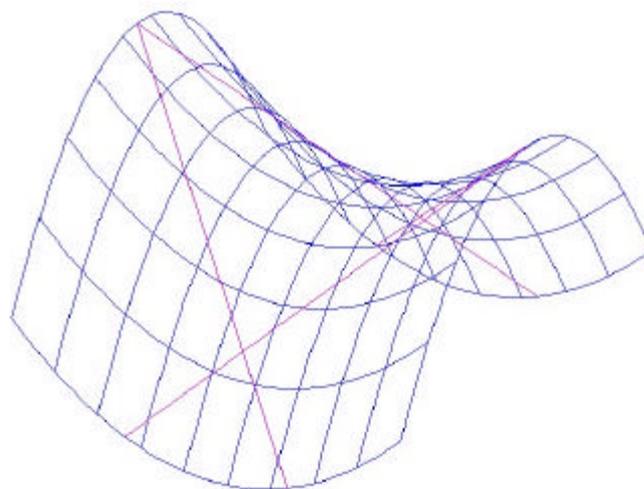


Abb. 3.25: Erzeugendenvierseit der HP-Fläche

Mit dem Werkzeug „**Extrudieren**“ (3D-Konstruktion, 1b, ) lassen sich die Rechtecke, die die Richtebenen festlegen, rasch zeichnen, indem man die geraden Schnitte extrudiert. Es ist darauf zu achten, dass das Rechteck ausreichend groß gewählt wird. Diese wird mit dem Werkzeug „**Kopieren**“ (Hauptpalette, 8b, ) parallel verschoben (zum Beispiel durch die Endpunkte des Parabelbogens  $l_2$ ). Mit „**Trimmung**“



Abb. 3.26: Dialogfenster „Extrudieren“

**erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) können die Geraden des Erzeugendenvierseits erzeugt werden, indem man im Dialogfenster angibt, dass die Schnittpunktkurve konstruiert werden soll.

### e. Konstruktion der HP-Fläche als Regelfläche

Da eine HP-Fläche durch die Angabe eines Erzeugendenvierseits festgelegt ist (siehe Kapitel 3.2.1), kann nun die HP-Fläche als B-Spline-Freiformfläche erzeugt werden.



Abb. 3.27: Dialogfenster „Freiformfläche platzieren“

Sie lässt sich in MicroStation mit Hilfe des Werkzeugs **„Freiformfläche platzieren“** (Fläche modellieren, 1a, ) konstruieren. Im Dialogfenster wird für die „Methode“ „Pole definieren“ ausgewählt und „definiert“ wird die Fläche über „Platzierung“. Das bedeutet, dass die Pole des Kontrollnetzes in der Zeichnung einzeln angegeben werden müssen. Die Ordnung in u- und v-Richtung beträgt 1 (also MicroStation-Ordnung 2), da die u- und v-Linien Geraden sein sollen. Es wird also eine (1,1)-Bezierfläche konstruiert, die wie in Kapitel 2.2.4 erwähnt, eine HP-Fläche ergibt.

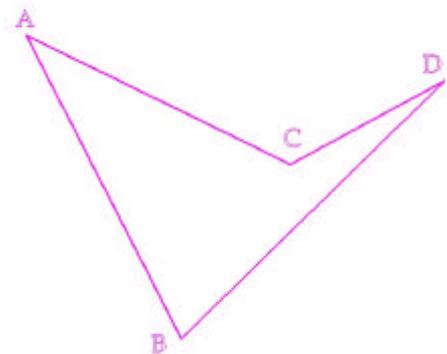


Abb. 3.28: Konstruktion der HP-Fläche mit Hilfe des Erzeugendenvierseits

Folgendermaßen wird die Freiformfläche angegeben: Es werden zuerst die Punkte A und B mit der linken Maustaste angeklickt, die Eingabe der ersten u-Linie wird mit der rechten Maustaste abgeschlossen. Danach werden die Punkte C und D mit der linken Maustaste eingegeben und wieder mit der rechten Maustaste beendet.

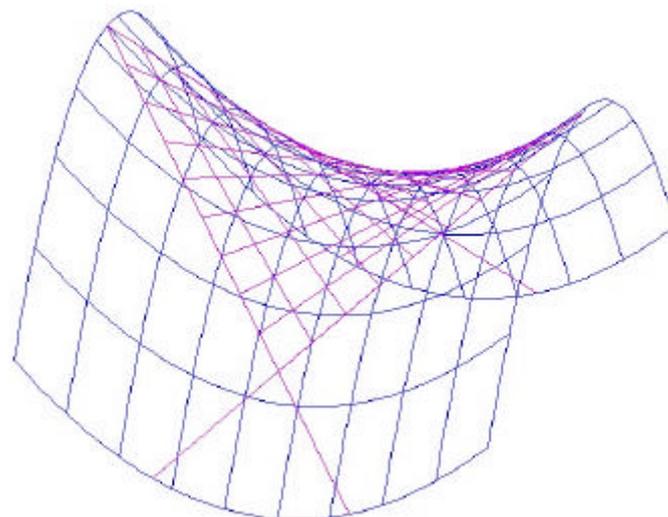


Abb. 3.29: Darstellung der HP-Fläche als Schiebfläche (blau) und als Regelfläche (violett)

### 3.2.3 Beispiel Entertainment-Center von Felix Candela

Das Dach des Entertainment-Centers von Felix Candela besteht aus vier HP-Flächen. Sie hängen längs ihrer horizontalen Erzeugenden zusammen. Dieses Objekt soll in diesem Beispiel samt der zylindrischen Träger und einer Bodenplatte möglichst originaltreu konstruiert werden.



Abb. 3.30: Entertainment-Center

#### Überblick über das Beispiel

Konstruktionsschritte	Beschrieben in	MicroStation
Erzeugendenvierseit konstruieren	a	
HP-Fläche aufspannen	b d	 
Zylindrische Träger konstruieren	c e	  
Bodenplatte konstruieren	e	
Objekt vervollständigen	f	 

#### a. Erzeugendenvierseit als Angabe der HP-Fläche

Als Angabeobjekt dient ein windschiefes Vierseit, das wie in der nebenstehenden Figur eingegeben wird. Da das gesamte Objekt drehsymmetrisch ist, wird zuerst nur ein Viertel des Objekts konstruiert und zuletzt wird das Gebäude durch Drehung vervollständigt.

In MicroStation wird das Erzeugendenvierseit mit dem Werkzeug „**SmartLine platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) gezeichnet. Die Koordinaten der Eckpunkte lauten  $A(0,0,15)$ ,  $B(20,0,15)$ ,  $C(20,20,5)$  und  $D(0,20,15)$ .

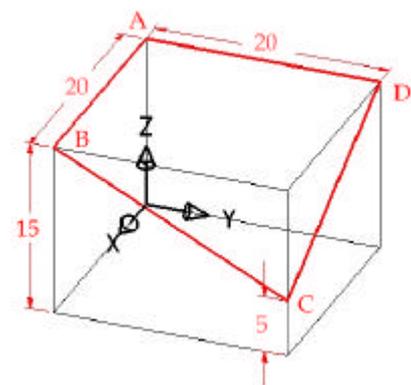


Abb. 3.31: Angabe

#### b. Konstruktion der HP-Fläche

Durch ein Erzeugendenvierseit ist eine HP-Fläche eindeutig bestimmt (siehe Kapitel 3.2.1). Um eine HP-Fläche über dem Vierseit aufzuspannen, wird eine Freiformfläche konstruiert, wobei die Seiten des Vierseits die Erzeugenden der Fläche sind. Die Ordnungen der  $u$ - und  $v$ -Linien betragen 1, da es sich in beiden Richtungen um Geraden handelt.

In MicroStation verwendet man dazu das Werkzeug „**Freiformfläche platzieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) , mit dem die vier Kontrollpunkte der (1,1)-



Abb. 3.32: Dialogfenster „Freiformfläche platzieren“

Bezierfläche angegeben werden müssen. Nachdem im Dialogfenster die Ordnungen (MicroStation-Ordnung: 2) eingegeben wurden, müssen zuerst die Punkte A und B mit der linken Maustaste angeklickt werden, dann zur Beendigung der ersten Eingabe einmal mit der rechten Maustaste klicken und dann werden noch die Punkte C und D mit der linken Maustaste eingegeben. Zuletzt wird die Eingabe mit der rechten Maustaste beendet.

### c. Konstruktion der Richtung der zylindrischen Träger

Die Richtung des zylindrischen Trägers ist parallel zur Tangente  $t$  an die Schnittparabel der HP-Fläche mit der lotrechten Ebene  $\varepsilon$  durch A und C.  $t$  ist daher Schnittgerade von  $\varepsilon$  mit der Tangentialebene  $\tau$  der HP-Fläche in C.  $\tau$  wird aufgespannt durch die beiden Erzeugenden  $e=[CD]$  und  $f=[BC]$  der HP-Fläche durch C.

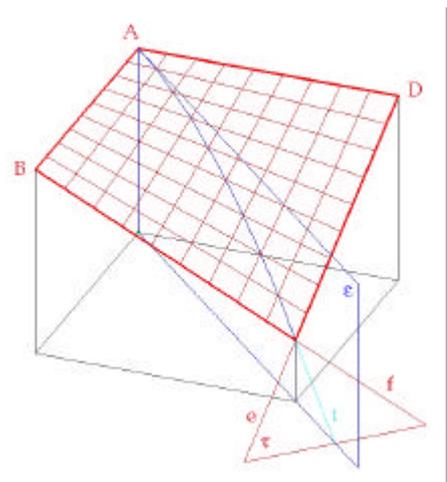


Abb. 3.33: Tangentenkonstruktion

Die Ebene  $e$  wird durch ein senkrechtes Rechteck durch die Punkte A und C repräsentiert. Wir legen dazu eine Strecke durch die Fußpunkte von A und C und spannen das Rechteck in beiden Richtungen mit der Funktion „**Extrudieren**“ (3D-Haupt, 1b, ) auf.

Die Tangentialebene  $t$ , die von  $e=[CD]$  und  $f=[BC]$  aufgespannt wird, wird mit Hilfe eines Dreiecks dargestellt. Dazu wird das Werkzeug „**Polygonfläche platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) verwendet und die Punkte B, C und D mit der linken Maustaste angeklickt.



Abb. 3.34: Dialogfenster „Polygonfläche platzieren“

Anschließend wird die gesuchte Tangente  $t$  als Schnittkurve der Ebenen  $e$  und  $t$  konstruiert. Dazu wählt man im Dialogfenster der Funktion „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) „Schnittpunktkurve“ aus und klickt die beiden Ebenen  $e$  und  $t$  an.

#### d. Verdickung des Daches

Um die Materialdicke, die das Dach in Wirklichkeit besitzt, darzustellen, soll das Dach nun zu einem Volumen verdickt werden. Die Stärke des Daches, das in Richtung der negativen z-Achse verdickt wird, soll 50 cm betragen.

In MicroStation wird das Dach mit Hilfe des Werkzeugs **„Auf Volumenelement verdicken“** (3D-Haupt, 1b, ) verdickt. Im Dialogfenster kann man die gewünschte Stärke eintragen und mit der Maus im Zeichenfenster die Richtung der Verdickung festlegen.



Abb. 3.35: Dialogfenster „Auf Volumenelement verdicken“

Die so entstandene untere Fläche des Daches ist nur eine Parallellfläche einer HP-Fläche und daher keine HP-Flächen.

#### e. Konstruktion der zylindrischen Träger

Die Richtung des zylindrischen Trägers wurde schon konstruiert. Da sie als Achse des Zylinders dienen soll, muss sie nun verschoben werden, da sie an die obere Fläche des Daches Tangente ist. Betrachtet man den Punkt C der HP-Fläche, so sieht man, dass sich durch die Verdickung eine 50 cm lange Kante bei dieser Ecke des Daches gebildet hat. Die konstruierte Tangente muss nun in die Mitte dieser Kante verschoben werden. Nun kann der Zylinder mit der verschobenen Tangente als Achse konstruiert werden, dessen Radius 20 cm betragen soll.

Um den Zylinder auch schon an beiden Enden fertig zu modellieren, wird ein Rechteck in der xy-Ebene konstruiert, das den Boden darstellt. Der Mittelpunkt des Rechtecks liegt im Ursprung, die Seitenlänge beträgt 60 m. Von ihm wird nicht nur ein Viertel, sondern schon die ganze Grundfläche gezeichnet. Zuletzt wird der Zylinder mit dem Rechteck und dem Dach getrimmt.

Nun wird das Rechteck noch in Richtung der negativen z-Achse um 20 cm verdickt.

Die Strecke wird mit **„Element verschieben“** (Hauptpalette, 8b, ) an die beschriebene Position verschoben. Für die Konstruktion des Zylinders wird das Werkzeug **„Zylinder platzieren“** (3D-Haupt, 1a, ) verwendet. Er muss unter Umständen mit der Funktion **„Element ändern“** (9b, ) verlängert werden, damit er auf jeden Fall über das Dachende und über die xy-Ebene hinausragt. Der Boden wird auf Höhe z=0 mit dem Werkzeug **„Rechteck platzieren“** (Hauptpalette, 3b, ) dargestellt. Der Zylinder wird nun mit der Rechteck und dem Dach getrimmt (**„Trimmung erstellen“**, Fläche modellieren, 1b, ). Im Dialogfenster muss **„Als Volumenelement beibehalten“** ausgewählt werden. Nun müssen die Objekte, die getrimmt werden, im Zeichenfenster ausgewählt werden. Dabei ist wichtig, dass der Zylinder jeweils auf der Seite, auf der er erhalten bleiben soll, angeklickt wird.

Mit „**Auf Volumenelement verdicken**“ (3D-Haupt, 1b, ) wird schließlich auch die Bodenplatte um 20 cm in Richtung der negativen z-Achse verdickt.

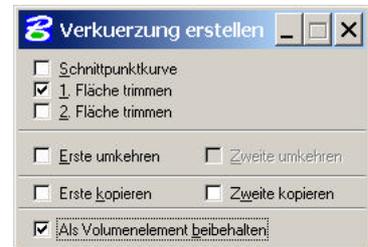


Abb. 3.36: Dialogfenster „Trimmung erstellen“

## f. Drehung und Vereinigung

Der letzte Schritt ist nun, das Dach und den Träger drei Mal um 90° zu drehen (dabei soll bei jeder Bewegung eine Kopie erstellt werden). Die vier Teile des Daches werden schließlich vereinigt.

Zum Drehen des Objekts verwendet man das Werkzeug „**Drehen**“ (Hauptpalette, 8b, ). Im dazugehörigen Dialogfenster wird bei „Methode“ „aktiver Winkel“ ausgewählt, der Winkel 90° eingegeben und „Kopie erstellen“ ausgewählt. Mit der Maustaste wird diese Bewegung dreimal bestätigt. Zum Vereinigen der vier Objekte wird die Funktion „**Volumenvereinigung bilden**“ (3D-Haupt, 2a, ) verwendet.

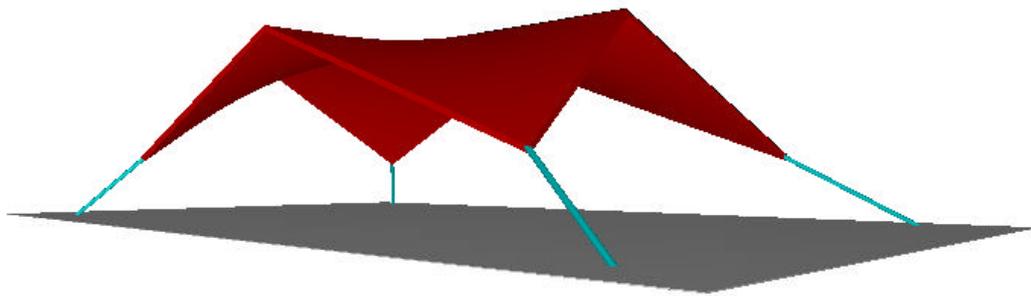


Abb. 3.37: Entertainment-Center, konstruiert mit MicroStation

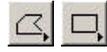
### 3.2.4 Beispiel Lampen

Die Beleuchtung vor dem Eingangsbereich eines Lokals, die in der Abbildung 3.3.6 zu sehen ist, besteht aus mehreren kongruenten HP-Flächen, Kegeln (Spots) und Polygonflächen. Sie wird in diesem Beispiel möglichst originalgetreu nachgezeichnet.



Abb. 3.38: Foto der zu zeichnenden Lampen

#### Überblick über das Beispiel

Konstruktionsschritte	Beschrieben in	MicroStation
Konstruktion einer HP-Fläche	a	
Konstruktion der Polygonflächen	b	
Vervielfältigung zu einer Lampe	c	
Konstruktion des Spots	d	
Vervielfältigung zur Gesamtbeleuchtung	e	

#### a. Konstruktion des Erzeugendenvierseits und der HP-Fläche

Die HP-Fläche wird in diesem Beispiel mit Hilfe eines Erzeugendenvierseits angegeben. Die vier Eckpunkte mit den Koordinaten (0,0,0), (10,0,0), (8,8,-4) und (0,10,0) werden mit einem geschlossenen Streckenzug verbunden, der das Erzeugendenvierseit angibt.

Wird eine B-Spline-Fläche, mit  $u$ - und  $v$ -Linien von Ordnung 1 und mit den Eckpunkten des Erzeugendenvierseits als Pole angegeben, so ergibt das die gesuchte HP-Fläche.

In MicroStation wird das Erzeugendenvierseit mit dem Werkzeug „**SmartLine platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) mit den oben erwähnten Eckpunkten angegeben.

Um eine B-Spline-Fläche zu konstruieren, bei der die Ordnung in u- und v-Richtung angegeben wird, wählt man das Werkzeug „**Freiformfläche platzieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) aus. Im Dialogfenster können nun die Ordnungen der beiden Kurven eingegeben werden (MicroStation-Ordnung 2). Da die Pole zur Angabe der Fläche dienen sollen, wird bei „Methode“ „Pole definieren“ ausgewählt. Um die Fläche eindeutig festzulegen, müssen zwei u-Linien angegeben werden. Dazu klickt man mit der linken Maustaste zuerst auf den Punkt (0,0,0) und auf den Punkt (10,0,0). Die Eingabe der ersten u-Linie wird beendet, indem einmal auf die rechte Maustaste gedrückt wird. Nun wird die zweite u-Linie mit Hilfe der Punkte (8,8,-4) und (0,10,0) eingegeben. Die Eingabe wird beendet, indem noch einmal auf die rechte Maustaste gedrückt wird.

## b. Konstruktion der Polygonflächen

Die Flächen, die direkt an den Spot anliegen, sind Dreiecke. Sie werden mit Polygonflächen durch die Punkte (10,0,0), (8,8,-4) und (10,10,0) bzw. durch die Punkte (0,10,0), (8,8,-4) und (10,10,0) visualisiert.

Um später das Objekt in ein Volumen umwandeln zu können, wird ein Quadrat, das (10,10,0), (10,-1,0) und (-1,-1,0) als Eckpunkte besitzt, gezeichnet. Damit wird zusätzlich der Metallstreifen dargestellt, der zwischen den einzelnen Lampen liegt.

Die Dreiecke werden mit „**Polygonfläche platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) und das Quadrat mit „**Rechteck platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) in der Zeichnung konstruiert.

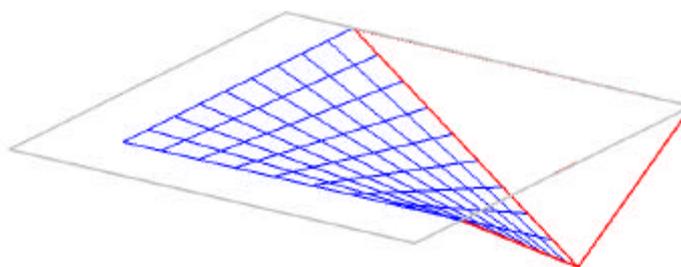


Abb. 3.39: HP-Fläche (blau), Polygonflächen (rot) und Quadrat und Metallstreifen (grau)

## c. Flächen vereinigen, Volumenelement erzeugen und vervielfältigen

In der Realität ist der bisher konstruierte Teil ein Volumenelement und besteht nicht nur aus einer Flächenhaut. Daher werden die HP-Fläche, die beiden Dreiecke und das Quadrat miteinander vereinigt und zu einem Volumenelement umgewandelt.

Da jede einzelne der oben abgebildeten Lampen aus vier der bisher gezeichneten Objekte besteht, wird dieses durch drei 90°-Drehungen um den Punkt (10,10,0) vervielfältigt.

Die Elemente werden mit „**Flächen vereinigen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) vereinigt, indem sie mit der linken Maustaste hintereinander ausgewählt werden. Es entsteht ein hohles Objekt, das von allen Seiten mit Flächen abgeschlossen ist. Daher kann nun daraus mit „**3D umwandeln**“ (Fläche modellieren, 1b, ) ein Volumenelement erzeugt werden.

Zum Vervielfältigen wird das Werkzeug „**Drehen**“ (Hauptpalette, 8b, ) benutzt.

#### d. Konstruktion des Spots

Der Spot, der mit Hilfe eines Kegels dargestellt wird, hat die Spitze im Punkt (10,10,0), eine Höhe von 3 cm und soll die vier umliegenden Strecken der Polygonzüge berühren. Dazu wird als erstes ein Teil der Achse konstruiert, der die Punkte (10,10,0) und (10,10,-3) verbindet. Nun wird die Trägerebene der Grundfläche des Kegels mit Hilfe eines Rechtecks dargestellt, das durch den Punkt (10,10,-3) verläuft und parallel zur xy-Ebene liegt. Durch den Schnitt des Rechtecks mit einem der Dreiecke ergibt sich eine Strecke. Der Endpunkt dieser Strecke, der auf der Schnittgeraden zwischen den beiden Polygonflächen liegt, ist ein Punkt des Kreises in der Grundfläche des Kegels. Der Kegel ist daher eindeutig festgelegt. (Die Konstruktion ist in Abbildung 3.40 mit einem Teil der Lampe dargestellt.)

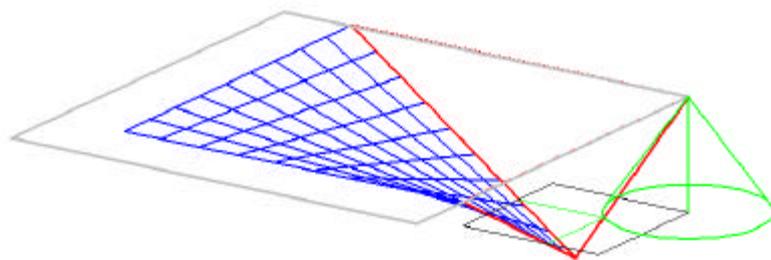


Abb. 3.40: Rechteck (schwarz) für die Konstruktion des Spots (grün)

Die Achse wird mit „**Linie platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) an der beschriebenen Stelle gezeichnet. Das Rechteck, das für die Hilfskonstruktion verwendet wird, um den Radius des unteren Kreises des Kegels zu ermitteln, wird mit „**Rechteck platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) konstruiert. Die Schnittgerade zwischen dem Rechteck und dem Dreieck wird mit dem Werkzeug „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) ermittelt, indem im Dialogfenster eingegeben wird, dass die Schnittpunktkurve gesucht wird.

Nun kann der Kegel eindeutig festgelegt werden. Dazu wird „**Kegel platzieren**“ (3D-Haupt, 1a, ) aktiviert. Als erstes muss der Mittelpunkt des unteren Kreises eingegeben werden,

also  $(10,10,-3)$ . Durch den ebenen Schnitt, der vorher konstruiert wurde, kennt man einen Punkt des unteren Kreises. Der Mittelpunkt des oberen Kreises ist  $(10,10,0)$ , der den Radius 0 hat, damit der Kegel eine Spitze besitzt.

#### e. Vervielfältigung zur Gesamtbeleuchtung

Schließlich wird die soeben vollständig konstruierte Lampe 12 mal vervielfältigt, sodass sich 3 Reihen und 4 Spalten ergeben.

In MicroStation lässt sich diese Vervielfältigung mit dem Werkzeug „**Matrix konstruieren**“ (Hauptpalette, 8b, ) sehr einfach und schnell konstruieren. Es muss darauf geachtet werden, dass AccuDraw im Moment der Vervielfältigung parallel zur xy-Ebene liegt, damit die Lampen nebeneinander dargestellt werden. Obwohl die einzelnen Objekte nicht vereinigt wurden, können sie trotzdem mit dem „**Power Selector**“ (Hauptpalette, 1a, ) gemeinsam ausgewählt werden.



Abb. 3.41: Dialogfenster „Matrix konstruieren“

Um die Lampenkonstruktion realistischer darzustellen, können den einzelnen Teilen Materialien zugewiesen werden. In Abbildung 3.42 wurde für die HP-Flächen das „Semi Gloss (Mahogany)“ aus der Palette „woods“ und für den Rest „Steel“ aus der Palette „metals“ verwendet.



Abb. 3.42: Lampenkonstruktion konstruiert mit MicroStation

## 3.3 Einschalige Hyperboloide

### 3.3.1 Allgemeines über einschalige Hyperboloide

#### Definition Drehhyperboloid

Bei Rotation einer Hyperbel um ihre Nebenachse entsteht ein einschaliges **Drehhyperboloid**.

#### Asymptotenkegel

Eine beliebige Hyperbeltangente erzeugt bei der Rotation um die Nebenachse einen Drehkegel, der die Drehfläche längs eines Parallelkreises berührt. Die Hyperbelasymptoten erzeugen bei dieser Drehung den **Asymptotenkegel**, der das Hyperboloid längs des Fernkreises berührt. Die Erzeugenden des Asymptotenkegels sind parallel zu den Erzeugenden des Hyperboloids.



Abb. 3.43: Drehhyperboloid mit Meridianhyperbeln

#### Allgemeine Hyperboloide

Ein allgemeines, dreiachsiges einschaliges Hyperboloid kann durch Affinität in ein einschaliges Drehhyperboloid verwandelt werden. Umgekehrt sind die allgemeinen einschaligen Hyperboloide durch Affinitäten aus einschaligen Drehhyperboloiden erzeugbar, sodass alle affinen Eigenschaften der einschaligen Drehhyperboloide auch für allgemeine einschalige Hyperboloide gelten. Dem Asymptotenkegel eines einschaligen Drehhyperboloids entspricht daher ein Asymptotenkegel 2. Ordnung des allgemeinen einschaligen Hyperboloids.

#### Analytische Darstellung eines einschaligen Drehhyperboloids

Im Folgenden wird die Gleichung des einschaligen Drehhyperboloids, das durch Rotation einer Hyperbel um die  $z$ -Achse entsteht, berechnet.

Als Hyperbel, die um die  $z$ -Achse rotiert, wird eine Hyperbel in der  $xz$ -Ebene mit dem Ursprung als Mittelpunkt gewählt:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

wobei  $a$  und  $c$  die halbe Haupt- und Nebenseitellänge der Hyperbel sind.

Für die weitere Rechnung wird eine Parameterdarstellung der Hyperbel benötigt. Dazu setzt man  $x=v$  und berechnet  $z$  in Abhängigkeit von  $v$ :

$$z(v) = \pm c \sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1}$$

Für die weitere Berechnung verwendet man nur noch den positiven Ast der Hyperbel, da nur einer der beiden Hyperbeläste für die Rotationsfläche benötigt wird.

Das Hyperboloid  $\Phi$  wird nun mit Hilfe einer Drehmatrix, die die Rotation um die  $z$ -Achse beschreibt, erzeugt:

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ c \sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos u \\ v \sin u \\ c \sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1} \end{pmatrix}$$

Die  $x$ - und  $y$ -Koordinate dieser Parameterdarstellung lassen sich folgendermaßen zu einer Gleichung zusammenfassen:

$$x^2 + y^2 = v^2$$

Diese wird in die  $z$ -Koordinate eingesetzt, um folgende Gleichung zu erhalten:

$$z = c \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2} - 1}$$

Durch Umformen der Gleichung ergibt das die gesuchte **Gleichung für das einschalige Drehhyperboloid**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ohne Beweis sei erwähnt, dass die Gleichung eines allgemeinen einschaligen Hyperboloids folgendermaßen aussieht:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

### Ebene Schnitte des einschaligen Drehhyperboloids

#### 1. Querschnitte:

Nach der Definition bzw. der Herleitung der Gleichung der Fläche ergibt sich, dass es sich hier um **Kreise** handelt. Der Querschnitt durch den Mittelpunkt des einschaligen Drehhyperboloids ergibt den **Kehlkreis**.

2. Meridianschnitte:

Auch die Meridianschnitte ergeben sich aus der Definition. Es handelt sich um **Hyperbeln**.

3. Schnitte mit Ebenen, die parallel zur Achse des Hyperboloids liegen:

Ebenen, die parallel zur Achse liegen haben folgende Parameterdarstellung:

$$\mathbf{e} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos u \\ v \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Koordinaten in die Gleichung des einschaligen Drehhyperboloids erhält man die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{(v \cos u - s \sin u)^2}{a^2} + \frac{(v \sin u + s \cos u)^2}{a^2} - \frac{t^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{v^2 \cos^2 u - 2vs \cos u \sin u + s^2 \sin^2 u}{a^2} + \frac{v^2 \sin^2 u + 2vs \sin u \cos u + s^2 \cos^2 u}{a^2} - \frac{t^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{v^2 + s^2}{a^2} - \frac{1}{c^2} t^2 &= 1 \end{aligned}$$

Schließlich lässt sich die Darstellung einer **Hyperbel** in der folgenden Gleichung erkennen:

$$\frac{1}{a^2} s^2 - \frac{1}{c^2} t^2 = 1 - \frac{v^2}{a^2}$$

Daraus berechnet man auch die speziellen Schnitte jener Ebenen, die zur  $z$ -Achse parallel sind und einen Kehlkreispunkt enthalten. Dazu setzt man  $v=a$ .

$$\frac{1}{a^2} s^2 - \frac{1}{c^2} t^2 = 0 = \left( \frac{1}{a} s - \frac{1}{c} t \right) \left( \frac{1}{a} s + \frac{1}{c} t \right)$$

Durch Umformung ergibt sich das **Geradenpaar**:

$$t = \pm \frac{c}{a} s$$

4. Schnitte mit allgemeinen Ebenen:

Die Schnitte mit allgemeinen Ebenen kann man analog berechnen. Die Berechnungen sind jedoch aufwändiger und werden hier nicht durchgeführt. Man unterscheidet Ebenen, deren Neigungswinkel  $m$  zur  $xy$ -Ebene kleiner bzw. größer als der Neigungswinkel  $a$  der Erzeugenden bzgl. der  $xy$ -Ebene sind. Ohne Beweis sei angemerkt, dass die Schnitte des Hyperboloids mit Ebenen, bei denen  $m < a$  ist, Ellipsen (bzw. Schichtkreise) ergeben und mit Ebenen, bei denen  $m > a$  ist,

Hyperbeln. Der Schnitt mit Ebenen mit  $m=a$  ergibt im Allgemeinen Parabeln, außer mit jener Ebene, die den Ursprung enthält. Sie schneidet das einschalige Drehhyperboloid nach Geraden.

### Das einschalige Drehhyperboloid – eine Regelfläche

In obiger Rechnung wurde gezeigt, dass auf dem einschaligen Hyperboloid Geraden liegen. Die zwei Geraden, die Ergebnis des Schnitts mit dem einschaligen Hyperboloid waren, werden als  $e_0$  und  $f_0$  bezeichnet.

Nimmt man die Geraden  $e_0$  oder  $f_0$  bei der Drehung um die  $z$ -Achse mit, so verlassen sie das Hyperboloid nicht, sie können also zur Erzeugung des Hyperboloids verwendet werden. Die Geraden überstreichen während der Rotation die **e-** und die **f-Erzeugendenschar** des einschaligen Drehhyperboloids.

Nimmt man umgekehrt eine zur  $z$ -Achse windschiefe Gerade  $e_0$  beliebig an und lässt sie um die  $z$ -Achse rotieren, erzeugt diese ein einschaliges Drehhyperboloid. Die aus der Drehung von  $e$  hervorgehenden Geraden bilden die  $e$ -Schar. Der Normalabstand von der  $z$ -Achse ergibt den Kehlkreisradius  $a$ . Eine zweite Geradenschar derselben Fläche entsteht aus der Erzeugenden  $f_0$ , die durch Spiegelung von  $e_0$  an der Kehlkreisebene oder der Meridianebene entsteht.

### Asymptotenkegel

Die Erzeugenden des Asymptotenkegels des einschaligen Drehhyperboloids sind parallel zu den Erzeugenden des einschaligen Drehhyperboloids. Die Spitze des Asymptotenkegels liegt im Mittelpunkt des einschaligen Drehhyperboloids.

Wählt man also eine zur oben berechneten  $e$ -Erzeugenden parallele Gerade, die durch den Ursprung (den Mittelpunkt des Hyperboloids) verläuft

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ c \end{pmatrix}$$

und lässt diese mit Hilfe einer Drehmatrix um die  $z$ -Achse rotieren, so erhält man die Parameterdarstellung des Asymptotenkegels:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ da \\ dc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad \sin u \\ ad \cos u \\ dc \end{pmatrix}$$

Die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$x^2 + y^2 = d^2 a^2$$

$$d^2 = \frac{x^2 + y^2}{a^2}$$

Setzt man dies nun in die  $z$ -Koordinate ein und formt diese Gleichung um, ergibt sich schließlich die Gleichung des Asymptotenkegels eines einschaligen Drehhyperboloids:

$$z^2 = d^2 c^2$$

$$z^2 = \frac{x^2 + y^2}{a^2} c^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Der Asymptotenkegel eines allgemeinen Hyperboloids besitzt die Gleichung (ohne Beweis):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

### Tangentialebene eines einschaligen Hyperboloids

Durch jeden Flächenpunkt  $P$  gehen zwei Geraden, eine  $f$ -Erzeugende und eine  $e$ -Erzeugende. Die Tangentialebene in jedem Flächenpunkt  $P$  wird von den beiden Erzeugenden durch  $P$  aufgespannt.

### Fadenmodell eines einschaligen Drehhyperboloids

Aus diesen Erkenntnissen ergibt sich folgende Konstruktionsmöglichkeit für ein Fadenmodell eines einschaligen Drehhyperboloids:

Verbindet man übereinander liegende Randpunkte zweier kongruenter, koaxial angeordneter Kreisscheiben durch gespannte Fäden, so hat man das Modell eines Drehzylinders. Verdreht man die beiden Kreisscheiben gegeneinander, so erhält man ein Modell einer Erzeugendenschar eines Drehhyperboloids.

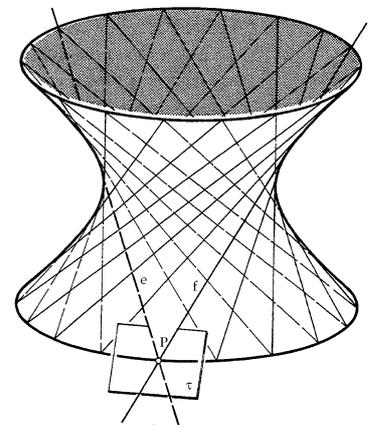


Abb. 3.44: Tangentialebene

### **Das allgemeine einschalige Hyperboloid – eine Regelfläche**

Betrachtet man die Affinität zwischen allgemeinen einschaligen Hyperboloiden und einschaligen Drehhyperboloiden, so lässt sich aufgrund der Geradentreue der Affinität die Existenz und Struktur der Geradenscharen des Drehhyperboloids auf das allgemeine Hyperboloid übertragen:

Das einschalige Hyperboloid trägt zwei reelle Scharen von geradlinigen Erzeugenden; je zwei Erzeugende aus derselben Schar sind zueinander windschief, während je zwei Erzeugende aus verschiedenen Scharen einander schneiden.

### **Angabe eines Hyperboloids durch 3 Erzeugende**

Die Erzeugenden der ersten Schar eines Hyperboloids sind durch drei Erzeugende  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  der zweiten Schar ausreichend bestimmt: Um eine Erzeugende der  $e$ -Schar zu erhalten, legt man durch einen beliebigen Punkt  $P \in f_1$  die Treffgerade  $e$  an  $f_2$  und  $f_3$ .

### 3.3.2 Beispiel einschaliges Drehhyperboloid

Im folgenden Beispiel werden einige Eigenschaften des einschaligen Drehhyperboloids behandelt. Die beiden Erzeugendenscharen werden visualisiert und die Fläche wird durch Rotation einer Erzeugenden um die z-Achse erzeugt. Zusätzlich werden ebene Schnitte und eine Tangentialebene des Hyperboloids konstruiert.

#### Überblick über das Beispiel

Konstruktionsschritte	Beschrieben in	MicroStation
Konstruktion der Erzeugendenschar	a	
Konstruktion des Hyperboloids	b	
Asymptotenkegel	c	
ebene Schnitte und Tangentialebene	d, e	

#### a. Konstruktion der Erzeugendenschar

Die erste  $e$ -Erzeugende, die konstruiert wird, ist 20 cm lang, ihr Mittelpunkt ist  $(2,0,0)$  und schließt einen Neigungswinkel von  $60^\circ$  mit der  $xy$ -Ebene ein (die Gerade wird in der Ebene  $x=2$  verdreht). Um die Achse des Hyperboloids darzustellen, wird eine Strecke entlang der  $z$ -Achse gezeichnet.

Eine  $f$ -Erzeugende erhält man nun durch Spiegelung der konstruierten  $e$ -Erzeugenden an der  $xz$ -Ebene.

Ein Teil der  $e$ -Erzeugendenschar, und zwar jeweils die um  $20^\circ$  verdrehten Geraden, werden nun mit Hilfe von Drehungen um die  $z$ -Achse dargestellt.

Analog wird auch ein Teil der  $f$ -Erzeugendenschar konstruiert.

Die  $e$ -Erzeugende wird in MicroStation mit „**Linie platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) von  $(2,0,10)$  nach  $(2,0,-10)$  gezeichnet und anschließend mit „**Drehen**“ (Hauptpalette, 8b, ) um  $30^\circ$  (Komplementärwinkel zu  $60^\circ$ ) um den Punkt  $(2,0,0)$  verdreht.

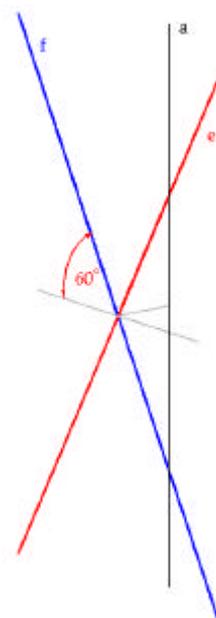


Abb. 3.45: Angabe

Um eine  $f$ -Erzeugende zu erhalten, wird die  $e$ -Erzeugende mit der Funktion „**Spiegeln**“ (Hauptpalette, 8b, ) an der  $xz$ -Ebene gespiegelt.

Diese Gerade wird nun mit „**Matrix konstruieren**“ (Hauptpalette, 8b, ) an die gewünschten Positionen vervielfältigt, indem die Werte wie in der nebenstehenden Abbildung eingegeben werden.

Analog wird ein Teil der  $f$ -Erzeugendenschar konstruiert.



Abb. 3.46: Dialogfenster „Matrix konstruieren“

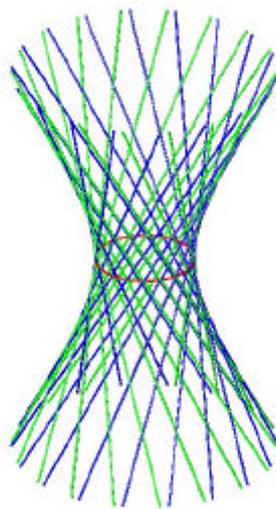


Abb. 3.47: Erzeugende des einschaligen Drehhyperboloids

## b. Konstruktion des Hyperboloids

Das Hyperboloid wird nun als Drehfläche erzeugt, indem eine Erzeugende um die  $z$ -Achse rotiert.

Die Fläche wird in MicroStation mit dem Werkzeug „**Rotation konstruieren**“ (3D-Haupt, 1b, ) konstruiert. Als erstes wird das Profil, also eine Erzeugende, ausgewählt. Dann muss die Achse durch zwei Punkte, die auf der Achse liegen, festgelegt werden. MicroStation berechnet mit diesem Werkzeug eine rationale Fläche. Dies ist ersichtlich, wenn die Fläche mit „**Elementauswahl**“ (Hauptpalette, 1a, ) aktiviert und das Werkzeug „**Elementinformationen**“ (Primäre Funktionen, 6, ) ausgewählt wird. Für die weiteren Konstruktionen wird eine Annäherung durch eine B-Spline-Fläche benötigt, da einige Werkzeuge nur für B-Spline-Flächen programmiert sind.



Abb. 3.48: Dialogfenster „Rotation konstruieren“

Mit der Funktion „**Fläche neu erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) wird die Fläche durch eine B-Spline-Fläche approximiert.

### c. Asymptotenkegel

Alle Erzeugenden des Hyperboloids sind parallel zu den Erzeugenden des Asymptotenkegels. Daher wird eine beliebige Erzeugende des Hyperboloids durch den Mittelpunkt des Hyperboloids verschoben. Durch Rotation dieser Geraden um die z-Achse wird der Asymptotenkegel erzeugt.

Um eine Erzeugende in den Ursprung zu verschieben, wird „**Kopieren**“ (Hauptpalette, 8b, ) ausgewählt und die Erzeugende an die gewünschte Position verschoben.

Für die Erzeugung des Asymptotenkegels wird wieder das Werkzeug „**Rotation konstruieren**“ (3D-Haupt, 1b, ) mit den gleichen Einstellungen wie vorhin verwendet. Für die Konstruktion müssen die parallel verschobene Strecke und die Strecke auf der z-Achse angeklickt werden.

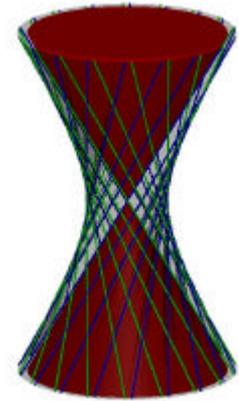


Abb. 3.49:  
Asymptotenkegel

### d. Ebene gerade Schnitte und die Tangentialebene des Hyperboloids

Wie schon im Kapitel 3.3.1 erwähnt, wird die Tangentialebene durch einen Punkt des Hyperboloids von den beiden Erzeugenden, die durch diesen Punkt verlaufen, aufgespannt. Wählt man also einen beliebigen Schnittpunkt  $P$  zweier Erzeugender, so lässt sich die Tangentialebene mit Hilfe einer Polygonfläche visualisieren, die die  $e$ - und  $f$ -Erzeugenden durch  $P$  enthält. Der Schnitt der Tangentialebenen mit dem Hyperboloid ergibt daher zwei Erzeugende, also zwei Geraden.

Um die Tangentialebene in einem beliebigen Schnittpunkt  $P$  zweier Erzeugender darzustellen, wird die Funktion „**Polygonfläche platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) verwendet. Als Ecken der Polygonfläche werden  $P$  und zwei beliebige Punkte auf je einer Erzeugenden durch  $P$  gewählt.

### e. Ebene nicht gerade Schnitte des Hyperboloids

Ebenen, deren Winkel zur Achse des Hyperboloids größer ist als der Öffnungswinkel  $\alpha$  des Asymptotenkegels, schneiden das Hyperboloid nach Ellipsen. Ebenen, deren Winkel zur Achse kleiner ist als  $\alpha$ , schneiden das Hyperboloid längs Hyperbeln.

Um dies in MicroStation ersichtlich zu machen, werden zwei Ebenen  $e_1$ ,  $e_2$  anhand eines Rechtecks dargestellt („**Rechteck platzieren**“, Hauptpalette, 3b, ) , wobei der Winkel

jeweils wie oben erwähnt gewählt wird.  $\mathbf{e}_1$  kann durch die Punkte  $(-2,0,0)$ ,  $(2,0,0)$  und  $(0,2,2)$  festgelegt werden (elliptischer Schnitt).  $\mathbf{e}_2$  wird zum Beispiel parallel zur  $xz$ -Ebene durch den Punkt  $(0,3,0)$  gewählt (hyperbolischer Schnitt). Die Schnittkurve wird mit dem Werkzeug „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) ermittelt.

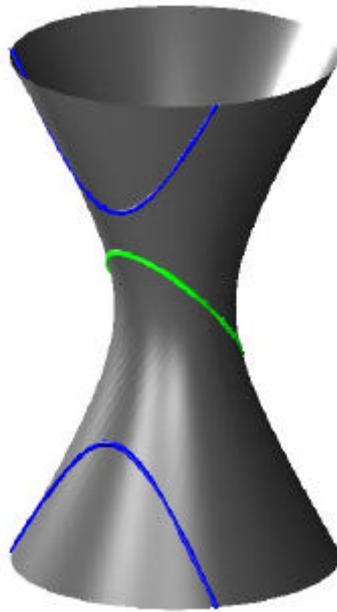


Abb. 3.50: ebene Schnitte des einschaligen Drehhyperboloids

### 3.3.3 Beispiel Ausstellungspavillon

Im folgenden Beispiel soll der Ausstellungspavillon von H. Seidler, der im Hyde-Park von Sydney steht, möglichst originalgetreu visualisiert werden. Der Großteil des Gebäudes besteht aus einem Teil eines einschaligen Drehhyperboloids. Dieses wird in diesem Beispiel als Extrusionsfläche konstruiert, wobei eine Erzeugende des Drehhyperboloids am Kehlkreis und einem Schichtkreis extrudiert wird.

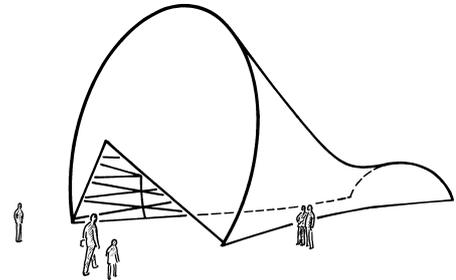


Abb. 3.51: Ausstellungspavillon in Sydney  
(Brauner, 1982 b, S.62)

Für den Eingangsbereich wird ein Teil eines Kegels verwendet. Die Rückseite des Gebäudes wird mit einem Kreissegment abgeschlossen.

#### Überblick über das Beispiel

Konstruktionsschritte	Beschrieben in	MicroStation
Konstruktion der Grundelemente (in waagrechtter Lage)	a	
	b	
	c, d	
Drehung des Objekts	d	
Bodenkonstruktion und Schnitt mit Objekt	e	
Ausschnitt für den Eingang	f	

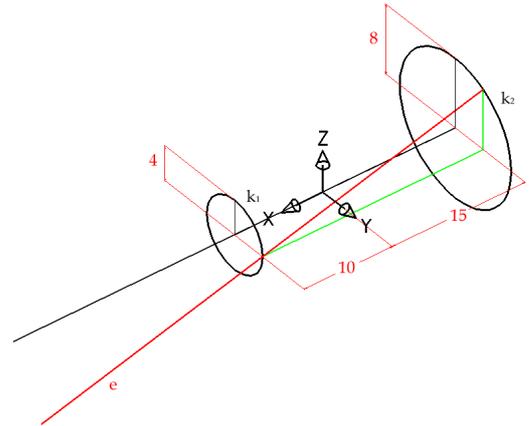
#### a. Hilfslinien für die Konstruktion des Hyperboloids

Das Hyperboloid wird zuerst mit waagrechtter Achse konstruiert und erst nachdem es mit dem Kegel, der Kreisscheibe für den Eingangsbereich und der Rückwand vereinigt wurde, wird das Objekt in die richtige Position gedreht.

Für die Konstruktion des Hyperboloids  $F$  sind die Achse, der Kehlkreis  $k_1$ , und ein Schichtkreis  $k_2$  gegeben. Die Achse ist die  $x$ -Achse und wird mit einer Strecke von  $(10,0,0)$  nach  $(-15,0,0)$  visualisiert (Angabe siehe auch Abbildung 3.52)

Der Schichtkreis  $k_1$  mit Mittelpunkt  $(10,0,0)$  hat einen Radius von 4 m.  $k_2$  ist ein Schichtkreis des Drehhyperboloids, der einen Radius von 8 m hat und dessen Mittelpunkt  $(-15,0,0)$  ist. Die Trägerebenen von  $k_1$  und  $k_2$  liegen parallel zur  $yz$ -Ebene.

Aus dieser Angabe muss nun eine Erzeugende des Hyperboloids konstruiert werden: Die Tangentialebene im Kehlkreispunkt  $(10,4,0)$  liegt in der Ebene  $y=4$ . Dies ergibt sich, da jede Tangentialebene eines Schichtkreispunktes an das Hyperboloid auch den Schichtkreis berührt. In Kehlkreispunkten liegt die Tangentialebene aufgrund der Symmetrie des Drehhyperboloids orthogonal zur Trägerebene des Kehlkreises. Also wird die Tangentialebene mit Hilfe eines Rechtecks dargestellt.



In der soeben konstruierten Tangentialebene liegen zwei Erzeugende des Hyperboloids, die jeweils auch den Schichtkreis  $k_2$  schneiden. Daher ergibt sich ein zweiter Punkt der gesuchten Erzeugenden durch den Schnitt der Tangentialebene mit dem Schichtkreis  $k_2$ . Dieser Schnitt ergibt zwei Punkte. Einer davon wird ausgewählt und mit dem Kehlkreispunkt  $(10,4,0)$  verbunden, was eine e-Erzeugende des Drehhyperboloids ergibt.

In MicroStation wird die Achse  $a$  mittels „**Linie platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) gezeichnet. Für die Konstruktion der Kreise  $k_1$  und  $k_2$  wird „**Kreis platzieren**“ (Hauptpalette, 4b, ) verwendet (es werden Kreisflächen konstruiert).

Die Tangentialebene wird im Kehlkreispunkt mit Hilfe eines Rechtecks mittels „**Rechteck platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) visualisiert. Sie liegt parallel zur  $xz$ -Ebene und enthält den Punkt  $(10,4,0)$ . Das so konstruierte Rechteck muss zumindest den Kreis  $k_2$  überragen.

Mit „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) kann nun der Schnitt des Rechtecks mit der Kreisfläche  $k_2$  ermittelt werden, indem im Dialogfenster „Schnittpunktkurve“ ausgewählt wird und die beiden Elemente angeklickt werden. Die Angabe der Elemente muss nun mit der linken Maustaste bestätigt werden. Nun schlägt MicroStation die Schnittgerade vor, die noch einmal mit der linken Maustaste bestätigt wird. Dadurch erhält man auch den Schnittpunkt des Kreises  $k_2$  mit der Tangentialebene.

Die Erzeugende  $e$  kann nun durch den Schnittpunkt und durch  $(10,4,0)$  mit „**Linie platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) konstruiert werden.

## b. Konstruktion des Hyperboloids

Um das gesuchte Hyperboloid  $F$  in einem CAD-Paket zu konstruieren, gibt es mehrere Möglichkeiten. Es entsteht, wenn die Gerade  $e$  um die  $y$ -Achse rotiert. Eine

andere Möglichkeit wäre, die Gerade  $e$  die beiden Kreise  $k_1$  und  $k_2$  überstreichen zu lassen.

Die beiden Kreise  $k_1$  und  $k_2$  müssen in B-Spline-Kurven umgewandelt werden, da sonst später, bei der Bearbeitung des Hyperboloids, einige Werkzeuge (wie zum Beispiel „Trimmung erstellen“) nicht funktionieren. Für die Umwandlung in eine B-Spline-Kurve wird das Werkzeug „**Kurve neu erstellen**“ (B-Spline-Kurven, 1b, ) verwendet.



Abb. 3.53: Dialogfenster „Kurve neu erstellen“

Im Dialogfenster kann nun die Toleranz eingestellt werden. Sie legt fest, mit welcher Genauigkeit die neu erstellte B-Spline-Kurve den Kreis annähert. Umso kleiner der Wert ist, umso genauer ist die Annäherung. Die Kurven, die bis jetzt rational dargestellt wurden, werden in B-Spline-Kurven umgewandelt, indem man die gewünschte Kurve mit der Maus auswählt.

Das Hyperboloid wird dann mit Hilfe des Werkzeugs „**An zwei Leitlinien extrudieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) konstruiert.

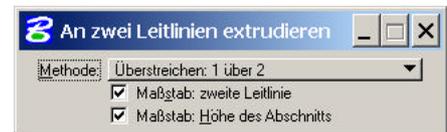


Abb. 3.54: Dialogfenster „An zwei Leitlinien extrudieren“

Dabei wird eine B-Spline-Fläche durch Extrusion der Abschnittsprofilkurve  $e$  an den zwei Leitlinien  $k_1$ ,  $k_2$  erstellt. Es müssen zuerst die beiden Leitlinien  $k_1$  und  $k_2$  und dann die Erzeugende  $e$  angeklickt werden. Schließlich wird die Eingabe mit einem Mausklick auf die linke Taste bestätigt. MicroStation zeigt nun die berechnete Fläche an, die noch einmal mit einem Mausklick auf die linke Taste bestätigt werden muss.

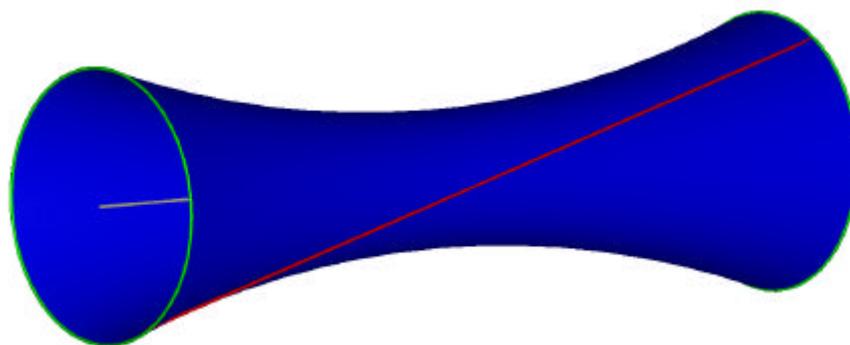


Abb. 3.55: einschaliges Drehhyperboloid

### c. Konstruktion des Kegels und der Kreisplatte

Das Gebäude wird auf der Seite der negativen  $x$ -Achse mit einer Kreisscheibe und auf der Seite der positiven  $x$ -Achse mit einem Kegelteil abgeschlossen. Der Kegel besitzt den Kreis, den der Streckenendpunkt von  $e$  bei der Rotation beschrieben hat,

als Basiskreis, die Höhe des Kegels beträgt 2 m. Sie wird in Richtung der positiven  $x$ -Achse aufgetragen.

In MicroStation werden dazu die Werkzeuge „**Kreis platzieren**“ (Hauptpalette, 4b, ) und „**Kegel platzieren**“ (3D-Haupt, 1a, ) verwendet.

#### d. Vereinigung und Drehung des Objekts

Die drei Teile, Hyperboloid, Kreisscheibe und Kegel werden nun vereinigt und dann um die  $x$ -Achse um  $-7,5^\circ$  gedreht.

Die Objekte werden mit der Funktion „**Flächen vereinigen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) vereinigt. Dazu müssen die drei Flächen hintereinander angeklickt werden. Um das vereinigte Objekt um die  $y$ -Achse zu drehen, wird „**Drehen**“ (Hauptpalette, 8b, ) verwendet. Im Dialogfenster wird „Aktiver Winkel“ als Methode ausgewählt und  $-7,5^\circ$  eingegeben. Als Drehpunkt wird der Ursprung gewählt.

#### e. Der Boden

Auf der Höhe  $z=0$  kann nun der Boden mit einem ausreichend großen Rechteck (z.B. 40 m breit und 60 m lang) dargestellt werden. Eventuell muss das Rechteck noch so verschoben werden, dass es das ganze bis jetzt konstruierte Objekt überragt. Dieses wird mit dem Rechteck getrimmt, sodass der Teil über der  $xy$ -Ebene übrig bleibt.

In MicroStation lässt sich der Boden mit dem Werkzeug „**Rechteck platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) darstellen. Mit „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) lässt sich das abgeschnittene Objekt erzeugen. Dabei ist wichtig, das Gebäude auf jener Seite mit der Maus anzuklicken, auf der es erhalten bleiben soll.

#### f. Der Eingang

Der Eingangsausschnitt wird von jenen zwei Erzeugenden des Kegels begrenzt, die durch die Schnittpunkte  $S$  und  $T$  des Basiskreises des Kegels mit der Bodenplatte verlaufen. Um diese Erzeugenden zu erhalten, wird der vorhandene Kegel  $G$  mit einem Hilfskegel  $L$  geschnitten.  $L$  hat dieselbe Spitze wie  $G$  eine  $z$ -parallele Achse und der Basiskreis verläuft durch  $S$  und  $T$ . Durch Trimmung bleibt der gewünschte Teil des Eingangsbereiches übrig. Der Hilfskegel  $L$  wird nach der Konstruktion wieder ausgeblendet.

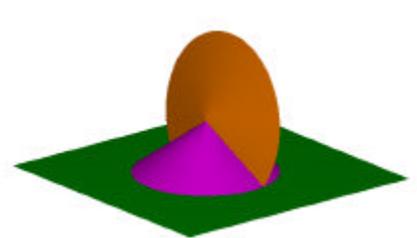


Abb. 3.56: Schnitt mit Hilfskegel  
(violett)

In MicroStation wird der Hilfskegel **L** mit dem Werkzeug „**Kegel platzieren**“ (3D-Haupt, 1a, ) konstruiert. Beim Trimmen mit „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) muss wieder darauf geachtet werden, dass die richtige Seite des Kegels Gangeklickt wird. Nach diesem Schritt wird **L** ausgeblendet.

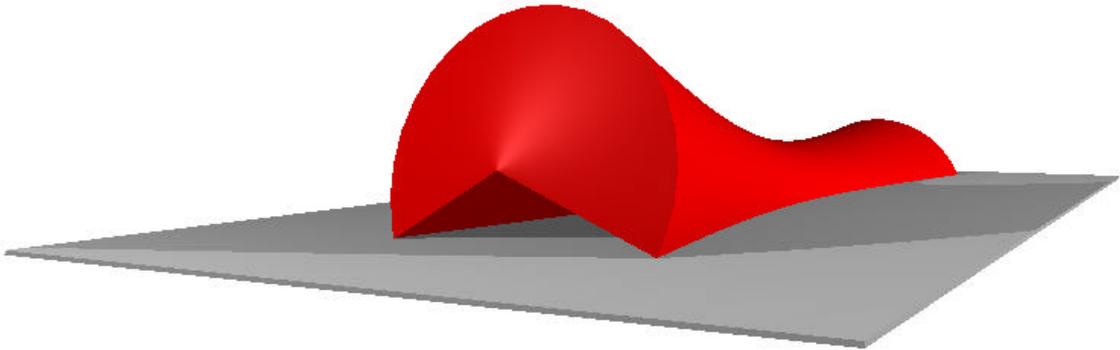


Abb. 3.57: Ausstellungspavillon konstruiert mit MicroStation

## 3.4 Regelschraubflächen (RSF) – Gewinde

### 3.4.1 Schraubung

Überlagert man eine gleichförmige Drehung um eine Achse  $a$  mit einer ebenfalls gleichförmigen Schiebung längs  $a$ , so entsteht als stetige Raumbewegung eine **Schraubung** mit der **Schraubachse**  $a$ . Nach Wahl einer Orientierung dieser Achse  $a$  bezeichne  $I$  das **Bogenmaß** des Drehwinkels und  $l$  die orientierte Schieblänge. Dann heißt das konstante Verhältnis

$$p = \frac{l}{I}$$

**Schraubparameter.** Durch die Forderung  $p \neq 0$  werden reine Drehungen um  $a$  ausgeschlossen.

Einer vollen Umdrehung um eine Achse  $a$  ( $I = 2\pi$ ) entspricht als Schieblänge die **Ganghöhe**  $h = 2\pi p$ .

Eine Schraubung mit  $p > 0$  heißt **Rechtsschraubung**, mit  $p < 0$  **Linksschraubung**. Die Bahnkurven der Punkte bei Ausübung einer Schraubung heißen **Schraublinien**.

Wird die Schraubachse  $a$  als  $z$ -Achse eines Koordinatensystems gewählt, so lautet die Parameterdarstellung einer Schraublinie, die durch den Punkte  $(r,0,0)$  verläuft und die  $z$ -Achse als Achse besitzt:

$$s = \{(r \sin I, -r \cos I, pI) \mid I \in \mathbb{R}\}$$

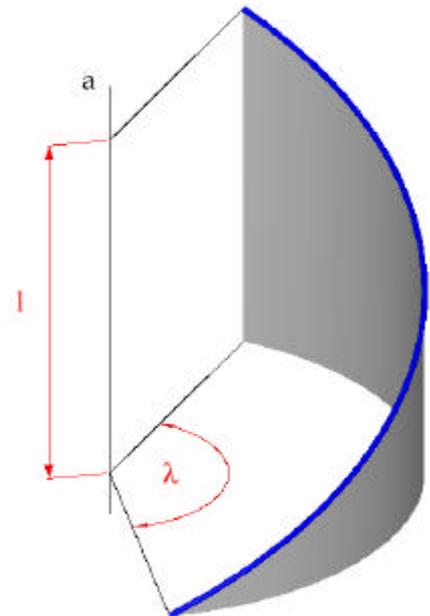


Abb. 3.58: Achse  $a$ , Schieblänge  $l$  und Bogenmaß  $I$  einer Schraublinie

### 3.4.2 Regelschraubflächen

#### Definition

Eine Fläche  $F$  heißt Regelschraubfläche, wenn sie von einer Geraden  $g$  bei einer Schraubung überstrichen wird.

Die untereinander kongruenten Schnitte von  $F$  mit Normalebene zur Schraubachse  $a$  heißen **Querschnitte** von  $F$ . Die Schnitte mit Ebenen durch  $a$  heißen **Meridianschnitte**. Diese umfassen unendlich viele kongruente Teilkurven, die durch

wiederholte Spiegelung an  $a$  und Schiebung um die halbe Ganghöhe längs  $a$  auseinander hervorgehen, nachdem die zum Drehwinkel  $\varphi=180^\circ$  gehörige Schraubung die Meridianebene  $e$  und die Fläche  $F$  und daher auch den vollen Meridianschnitt  $e \cap F$  in sich überführen muss.

Durch jeden Punkt von  $F$  geht eine Erzeugende  $e$  und eine Schraublinie  $s$ . In regulären Punkten spannen  $e$  und die Tangente  $t$  an  $s$  die **Tangentialebene  $t$**  auf.

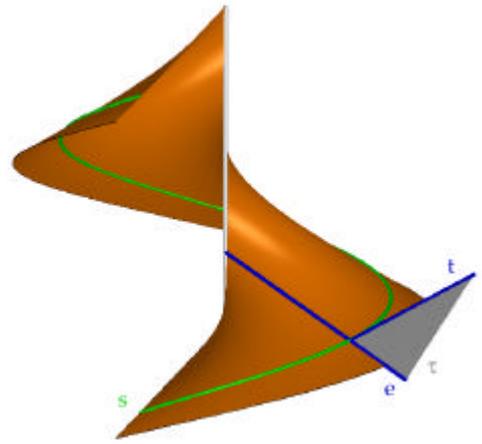


Abb. 3.59: Konstruktion einer Tangentialebene

Bei diesen im Allgemeinen windschiefen Regelflächen sind je nach Lage von  $g$  zur Schraubachse  $a$  vier Typen zu unterscheiden, wobei der auf den Schraubzylinder führende triviale Sonderfall  $g \parallel a$  nicht betrachtet wird.

Die Regelschraubfläche heißt **gerade**, wenn  $g \perp a$ , sonst heißt sie **schief**. Sie wird **geschlossen** genannt, wenn  $a$  und  $g$  einen Schnittpunkt besitzen, andernfalls wird sie als **offen** bezeichnet. Aus der Kombination dieser beiden Merkmale ergeben sich die vier erwähnten Typen.

	geschlossen	offen
gerade		
schief		

Abb. 3.60: 4 Arten von Regelschraubflächen

### Gerade geschlossene Regelflächen – Wendelflächen

Eine gerade geschlossene Regelfläche entsteht durch Verschraubung einer die Schraubachse rechtwinklig treffenden Geraden (siehe Abbildung 3.61). Sie wird auch Wendelfläche genannt, weil die Trittkanten der Stufen einer Wendeltreppe auf einer solchen Fläche liegen. Die glatt verputzte Unterseite einer gemauerten Wendeltreppe zeigt die Fläche in kontinuierlicher Form. Im Maschinenbau tritt sie beispielsweise bei Förderschnecken und Schiffschrauben auf.

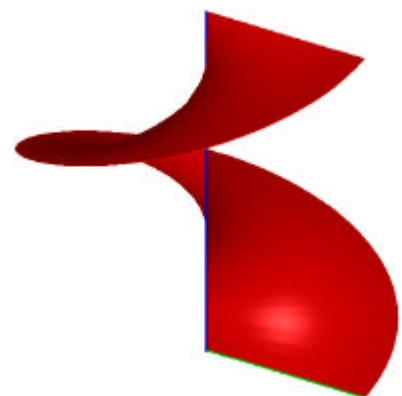


Abb. 3.61: Wendelfläche

Die Erzeugenden der Wendelfläche sind gleichzeitig ihre Meridiane und ihre Querschnitte. Die Fläche ist bezüglich jeder einzelnen Erzeugenden axial-symmetrisch. (Ein Beispiel für Wendelflächen ist bei Grader (2004) zu finden.)

## Gerade offene Regelfläche

Diese Fläche entsteht durch Verschraubung einer Geraden  $g$ , die rechtwinklig zur Schraubachse  $a$  liegt, jedoch diese nicht schneidet.

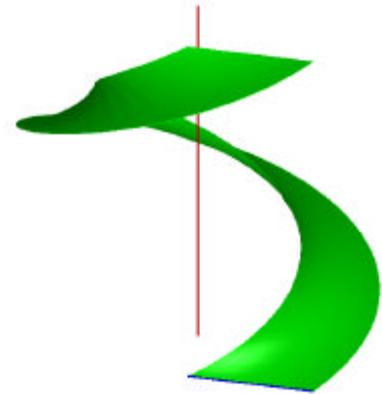


Abb. 3.62: gerade offene RSF

## Schiefe geschlossene Regelschraubflächen

Durch Verschraubung einer Geraden  $g$ , welche die

Schraubachse  $a$  in einem beliebigen Winkel ? (aber nicht  $0^\circ$  oder  $90^\circ$ ) schneidet, entsteht eine schiefe geschlossene Regelschraubfläche. Die Erzeugenden stellen gleichzeitig die Meridiane der Fläche dar. Solche Flächen treten bei vielen Gewinden auf, wie auch zum Beispiel beim Gewinde des Korkenziehers.

Der vollständige Meridianschnitt der Fläche besteht aus unendlich vielen Geraden, die bei halben Umschraubungen ineinander übergehen. Die gegenseitigen Schnittpunkte dieser Geraden durchlaufen während der Schraubung unendlich viele Doppelkurven der Fläche. Die achsennächste dieser Doppelschraublinien bildet bei dem in der Abbildung 3.64 gezeigten Korkenziehergewinde die Randkante.

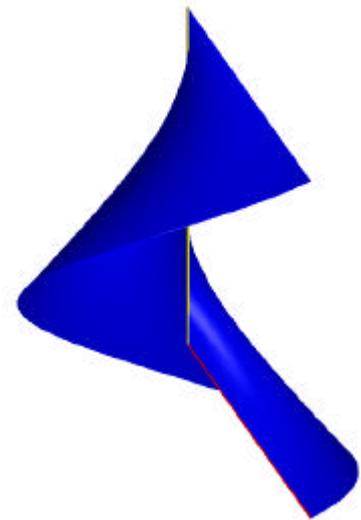


Abb. 3.63: schiefe geschlossene RSF

## Schiefe offene Regelschraubflächen

Dieser allgemeinste Typ der Regelschraubflächen entsteht durch die Verschraubung einer Geraden  $g$ , die windschief jedoch nicht rechtwinklig zur Schraubachse liegt. Die Fläche besitzt eine Kehlschraublinie, die der achsennächste Punkt von  $g$  durchläuft.

Eine Sonderstellung unter den schiefen offenen Regelflächen bildet die **Schraubtorse**. Sie besteht aus sämtlichen Tangenten einer Schraublinie  $s$ , kann also durch Verschraubung einer Tangente von  $s$  erzeugt werden.  $s$  ist die Gratschraublinie dieser Torse und ist ein Grenzfall der oben erwähnten Kehlschraublinie. Schraubtorsen treten im Straßenbau bei Böschungsflächen und im Maschinenbau als Flanken von Schrägzahnradern und Getriebeschnecken auf.



Abb. 3.64: Korkenziehergewinde

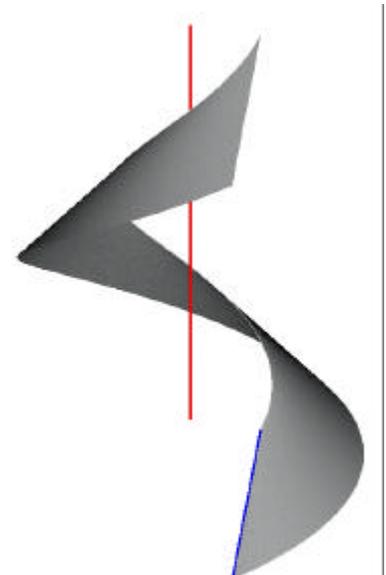


Abb. 3.65: schiefe offene RSF

Die Tangentialebenen berühren die Schraubtorse (wie jede Torse) jeweils längs einer ganzen Erzeugenden und sind mit den Schmieglinien der Gratlinie ident. Die Schraubtorse kann daher auch als die Einhüllende einer verschraubten Ebene erhalten werden, sofern diese schräg zur Achse steht.

### 3.4.3 Beispiel Drillbohrer

Für Bohrer werden oft unterschiedliche Regelschraubflächen verwendet. In diesem Beispiel soll ein Bohrer gezeichnet werden, der aus vier geraden offenen Regelschraubflächen zusammengesetzt ist. Um diese vier Regelschraubflächen zu erhalten, wird ein Quadrat um jene Gerade verschraubt, die die Normalgerade durch den Mittelpunkt des Quadrats ist. Jede Seite des Quadrats überstreicht während der Verschraubung je eine Regelschraubfläche. Da alle vier Seiten die Schraubachse nicht schneiden und orthogonal zur Schraubachse liegen, handelt es sich hier um Teile von vier geraden offenen Regelschraubflächen.

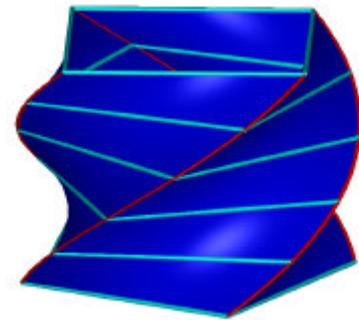


Abb. 3.66: Drillbohreroberfläche

#### Überblick über das Beispiel

Konstruktionsschritte	Beschrieben in	MicroStation
Schraubfläche konstruieren	a	
	b	
Trimmung der Schraubfläche mit einer Kugel	c	
Fläche in Volumenelement umwandeln	d	
Meridianschnitt konstruieren	e	

#### a. Vorbereitungen für die Konstruktion der Schraubfläche

Um eine Schraubfläche konstruieren zu können, müssen die Schraublinie, die Profilkurve und die Achse angegeben werden.

Als Achse wird in diesem Beispiel die z-Achse verwendet. Dazu wird eine Strecke mit dem Ursprung als Anfangspunkt und (0,0,30) als Endpunkt konstruiert.

Die Profilkurve ist bei dem Bohrer, der in diesem Beispiel gezeichnet werden soll, ein Quadrat, das in der xy-Ebene liegt. Der Mittelpunkt des Quadrats ist der Ursprung und (5,5,0) ist ein Eckpunkt.

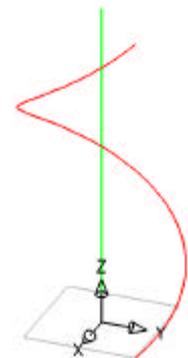


Abb. 3.67: Angabe

Der Anfangspunkt der Rechts-Schraublinie ist der Eckpunkt des Quadrats (5,5,0). Die Achse ist die z-Achse, die Ganghöhe beträgt 10 cm und die Höhe 30 cm. Das bedeutet, dass die so konstruierte Schraublinie sich drei mal um ihre Achse verwindet.

In MicroStation wird eine Strecke, die die Achse darstellt, mit dem Werkzeug „**Linie platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) konstruiert.

Das Quadrat wird mit „**Rechteck platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) in der xy-Ebene konstruiert. Der erste Eckpunkt, der angegeben wird, ist (5,5,0). Die Seitenlänge beträgt 10 cm.

Für die Schraublinie wird „**Helix platzieren**“ (B-Spline-Kurven, 1a, ) verwendet. Im Dialogfenster muss beachtet werden, dass es sich um eine Rechtsschraubung handelt, also wird bei „Gewinde“ „Rechts“ eingestellt. Die Achse wird später mit Hilfe der Maus angegeben. Das Feld „Orthogonal“ muss aktiviert sein, um eine Schraubung im herkömmlichen geometrischen Sinn zu konstruieren. Der obere und untere Radius wird später mit der Maus in der Zeichnung angegeben.



Abb. 3.68: Dialogfenster „Helix platzieren“

Die Höhe der Schraubung wird im Dialogfenster mit 30 festgelegt. Die Ganghöhe wird in MicroStation als „Steigung“ bezeichnet, daher muss in diesem Feld 30 eingegeben werden. Die Toleranz gibt die Genauigkeit der Annäherung der B-Spline-Kurve an die tatsächliche Schraublinie an. Je kleiner Wert ist, umso weniger wird die konstruierte Kurve von der Schraublinie abweichen. Das bedeutet auch, dass die Kurve umso mehr Kontrollpunkte besitzt.

Nun muss als erstes der „Mittelpunkt“, also der Ursprung, angeklickt werden. Um den Radius zu definieren, wird der Punkt (5,5,0) angegeben. Die Achse wird definiert, indem der Endpunkt der konstruierten Strecke, also (0,0,30), ausgewählt wird. Der obere Radius hat denselben Wert wie der untere.

Will man Struktur und Anzahl der Kontrollpunkte ansehen, so aktiviert man das Werkzeug „**Elementauswahl**“ (Hauptpalette, 1a, ) und klickt die Kurve an.

## b. Konstruktion der Schraubfläche

Für die Konstruktion der Schraubfläche ist nun alles vorbereitet. Durch die Angabe der Schraublinie, der Profilkurve (=Quadrat) und der Achse ist die Schraubfläche eindeutig festgelegt. Nun entstehen zugleich Teile von vier Regelschraubflächen, jede Seite des Quadrates überstreicht eine davon.

In MicroStation wird für die Konstruktion der Schraubfläche das Werkzeug „**Schraubfläche konstruieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) verwendet.



Abb. 3.69: Dialogfenster „Schraubfläche konstruieren“

Im Dialogfenster können nun drei verschiedene Werte eingestellt werden. Mit dem „Maßstab des Abschnitts in X-Richtung“ stellt man den Faktor ein, um welchen die Profilkurve während der Verschraubung in Richtung ihres Mittelpunktes skaliert wird. Mit dem „Maßstab des Abschnitts in Y-Richtung“ lässt sich die Skalierung der Profilkurve in Richtung der Schraubachse festlegen, während sie die Schraubfläche überstreicht. Da sich die Profilkurve in diesem Beispiel während der Verschraubung nicht verändern soll, wird für diese beiden Werte jeweils 1 eingegeben. Bei „Drehwinkel“ legt man den Winkel fest, um den das Profil während seiner Bewegung gedreht werden soll. Da das Quadrat nur jene Drehung durchführen soll, die durch die Schraubung festgelegt ist, wird für diesen Wert 0 eingegeben.

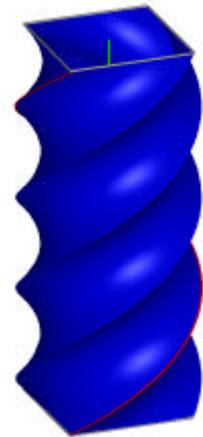


Abb. 3.70: Schraubfläche

Um die Schraubfläche im Zeichenfenster anzugeben, wird zuerst die Schraublinie, dann das Quadrat und schließlich die Achse mit der linken Maustaste angeklickt. Drückt man noch einmal auf die linke Maustaste, um die Eingabe zu beenden, zeigt MicroStation die so konstruierte Schraubfläche an, die noch einmal mit der linken Maustaste bestätigt werden muss.

### c. Trimmung der Schraubfläche mit einer Kugel

Das Ende des Bohrers wird mit Hilfe einer Kugel abgerundet. Dazu wird eine Kugelfläche konstruiert, die (0,0,10) als Mittelpunkt und einen Radius von 20 cm besitzt.

Nun können Kugel und Schraubfläche getrimmt werden, sodass von der Schraubfläche jener Teil erhalten bleibt, der näher zur xy-Ebene liegt, und von der Kugel jener Teil, der von der Schraubfläche eingeschlossen wird.

Für die Konstruktion der Kugel wird „**Kugel platzieren**“ (3D-Haupt, 1a, ) verwendet. Dabei wird als „Typ“ im Dialogfenster „Fläche“ ausgewählt. Die restlichen Parameter werden mit der Maus im Zeichenfeld eingegeben. Nachdem der Mittelpunkt (0,0,10) eingegeben wurde, wird noch der Kugelpunkt (0,0,30) angeklickt, womit die Kugel festgelegt ist.

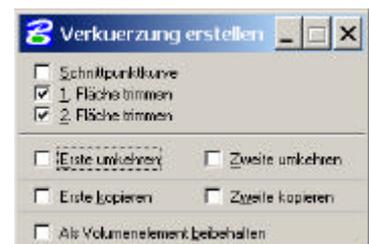


Abb. 3.71: Dialogfenster „Trimmung erstellen“

Für das Trimmen der Schraubfläche und der Kugel wird das Werkzeug „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) verwendet. Da beide Flächen getrimmt werden sollen, werden auch beide Felder im Dialogfenster aktiviert. Nun müssen die beiden Flächen jeweils in jenen Bereichen angeklickt werden, die

wie oben angegeben erhalten bleiben sollen. Wird noch einmal auf die linke Maustaste geklickt, zeigt MicroStation die getrimmten Flächen an, die nun mit einem linken Mausklick bestätigt werden müssen.

#### d. Fläche in Volumenelement umwandeln

Da eine Drillbohrerspindel in Wirklichkeit keine hohle Flächenhaut ist, muss das konstruierte Objekt noch in ein Volumenelement umgewandelt werden.

Dazu wird in MicroStation die Funktion „**3D umwandeln**“ (Fläche modellieren, 1b, ) ausgewählt. Hat man im Dialogfenster angegeben, dass in ein „Volumenelement“ umgewandelt werden soll, muss die Fläche nur noch an einer beliebigen Stelle angeklickt werden.

Will man überprüfen, ob das Objekt nun wirklich ein Volumenelement ist, so aktiviert man das Werkzeug „**Elementauswahl**“ (Hauptpalette, 1a, ) und klickt auf das Objekt. Um Informationen darüber zu

bekommen, verwendet man „**Elementinformationen**“ (Primäre Funktionen, 6, ) . Hier lässt sich nun im Dialogfenster ablesen, dass es sich um ein „Smart-Volumenelement“ handelt. Das bedeutet, dass dieses Volumen durch dessen Randflächen angegeben ist.



Abb. 3.72: Schraubfläche

#### e. Meridianschnitt konstruieren

Um den Meridianschnitt der Schraubfläche zu sehen, wird das Objekt mit der yz-Ebene getrimmt.

Dazu wird in MicroStation ein Rechteck in der yz-Ebene gezeichnet, das die Drillbohrerspindel auf allen Seiten überragt. Nun kann wieder das Werkzeug „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) verwendet werden, wobei im Dialogfenster anzugeben ist, dass nur eine Fläche getrimmt wird und das Volumenelement beibehalten werden soll. Wird nun der Bohrer und das Rechteck angeklickt und diese Eingabe zwei Mal mit der linken Maustaste bestätigt, erhält man den Meridianschnitt des Bohrers.

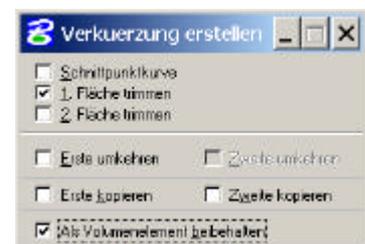


Abb. 3.73: Dialogfenster „Trimmung erstellen“



Abb. 3.74: Meridianschnitt der Schraubfläche

### 3.4.4 Beispiel Korkenziehergewinde

Um die Oberfläche eines Korkenziehergewindes zu erhalten, wird eine Gerade verschraubt, die die Schraubachse schneidet und nicht orthogonal dazu liegt. Die Fläche ist daher eine schiefe geschlossene Regelschraubfläche. Die Spitze am Ende des Gewindes wird erzeugt, indem mit einem Kegel abgeschnitten wird.



Abb. 3.75:  
Korkenzieher

#### Überblick über das Beispiel

Konstruktionsschritte	Beschrieben in	MicroStation
Schraubfläche konstruieren (1. Möglichkeit)	a	
	b	
	c	
Schraubfläche konstruieren (2. Möglichkeit)	d	
	e	
Schraubfläche mit Kegel trimmen	f	
Konstruktion des Querschnitts	g	
Fläche in Volumenelement umwandeln	h	

#### a. Vorbereitungen für die Schraubflächenkonstruktion (1. Möglichkeit)

Als Profilkurve für die Regelflächenkonstruktion wird bei der 1. Möglichkeit die Strecke zwischen den Punkten (0,5,0) und (0,-5,5) verwendet (Als Einheit für dieses Beispiel werden mm gewählt.) Die Achse der Schraubung ist die z-Achse.

Die Angabewerte für die Schraublinie werden so gewählt, dass der untere Punkt der Ausgangsstrecke nach einer halben Umdrehung der Schraubung den oberen Punkt der Ausgangsstrecke durchläuft. Dieser Punkt beschreibt während der Schraubung die Randkante des Gewindes. Sie wird während der Bewegung zweimal durchlaufen. Einerseits vom unteren Punkt der Ausgangsstrecke, andererseits vom oberen

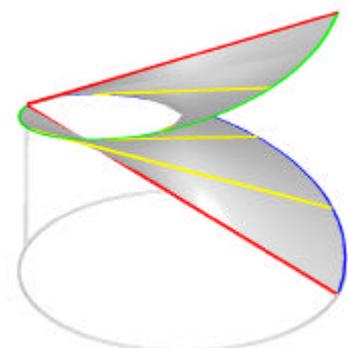


Abb. 3.76: Schraublinien-  
Angabe

Punkt der Ausgangsstrecke.

Für die Angabewerte der Schraublinie bedeutet das also: Der obere und untere Radius der Schraublinie beträgt 5 mm, die Ganghöhe 10 mm und die Höhe 20 mm. Die Achse der Schraublinie ist die z-Achse und ihr Anfangspunkt liegt im unteren Punkt der konstruierten Strecke.

In MicroStation wird die Profilstrecke mit „**Linie platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) konstruiert. Zusätzlich wird eine Strecke auf der z-Achse mit demselben Werkzeug konstruiert, um die Achse der Schraubung darzustellen.

Für die Konstruktion der Schraublinie werden die Werte wie oben beschrieben in das Dialogfenster des Werkzeugs „**Helix platzieren**“ (B-Spline-Kurven, 1a, ) eingetragen. Der Wert für den unteren Radius wird nicht im Dialogfenster eingetragen, da sich sonst der Startpunkt der Helix nicht mehr festlegen lässt. Um die Schraublinie an die richtige Stelle in der Zeichnung zu positionieren, müssen der Punkt (0,0,0), der Punkt (0,5,0) und zum Schluss ein beliebiger Punkt der positiven z-Achse angeklickt werden.



Abb. 3.77: Dialogfenster „Helix platzieren“

## b. Konstruktion der Regelschraubfläche

Die Regelschraubfläche kann nun durch die Schraublinie, die Profilkurve (=Strecke) und die z-Achse als Achse eindeutig festgelegt werden.

Die Fläche wird in MicroStation mit „**Schraubenfläche konstruieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) konstruiert. Im Dialogfenster wird für den Maßstab des Abschnitts in X- bzw. Y-Richtung jeweils 1 eingegeben, da sich die Strecke während der Verschraubung nicht verändern soll. Der Drehwinkel wird mit 0 festgelegt, da die Profilstrecke keine weitere Drehung (außer jene, die durch die Schraubung festgelegt ist) ausführen soll.

Nun müssen die Schraublinie, die Profilstrecke und die Achsenstrecke nacheinander angeklickt werden. Die Eingabe wird bestätigt, indem zwei Mal auf die linke Maustaste geklickt wird.



Abb. 3.78: Regelschraubfläche

## c. Fläche in ein Volumenelement umwandeln

Die Form des Korkenziehers lässt sich jetzt schon gut erkennen. Da er in Wirklichkeit natürlich ein Volumen besitzt, wird die Fläche nun in ein Volumenelement umgewandelt.

Um ein Objekt in ein Volumen umzuwandeln, wird in MicroStation das Werkzeug „**3D umwandeln**“ (Fläche modellieren, 1b, ) verwendet. Im Dialogfenster wird ausgewählt, dass in ein Volumenelement umgewandelt werden soll. Klickt man nun auf die bisher erzeugte Fläche, so muss man feststellen, dass MicroStation diese Fläche nicht umwandeln kann.

Daher wird das Objekt auf eine zweite Art konstruiert.

#### d. Vorbereitung für die Schraubflächenkonstruktion (2. Möglichkeit)

Betrachtet man den Meridianschnitt der bisher konstruierten Fläche, so ergibt das Strecken, die zur Profilstrecke kongruent sind. Betrachtet man jedoch von zwei aufeinander folgenden Strecken im Meridianschnitt die obere Hälfte der unteren Strecke und die untere Hälfte der oberen Strecke, so erkennt man, dass man auch ein Dreieck als Profilkurve angeben kann. Das ergibt die zweite Möglichkeit der Konstruktion der Fläche:

Als Profilkurve wird also ein Dreieck verwendet. Nahe liegend wäre es, die Punkte  $(0,0,-2.5)$ ,  $(0,0,2.5)$  und  $(0,5,0)$  als Eckpunkt auszuwählen. Da es aber auch mit der senkrechten Strecke von  $(0,0,-2.5)$  nach  $(0,0,2.5)$  später Probleme gibt (da diese Strecke im Laufe der Schraubung sich nicht von der z-Achse wegbewegt), wird sie um 0.1 mm (der Wert wird relativ klein gewählt, damit sich das Objekt nicht wesentlich von der vorigen Erzeugungsweise unterscheidet) in y-Richtung verschoben. Das Profildreieck hat also die Eckpunkte  $(0,0.1,-2.5)$ ,  $(0,0.1,2.5)$  und  $(0,5,0)$ .

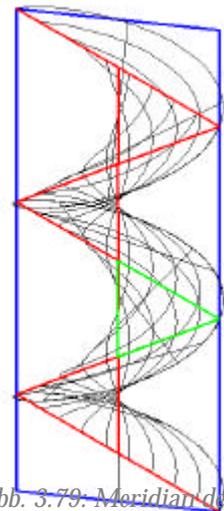


Abb. 3.79: Meridian der Regelschraubfläche

Um den Querschnitt zu betrachten, wird ein Rechteck in der yz-Ebene konstruiert, das die bisher konstruierte Fläche zumindest überragt. Mit „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) lässt sich die Schnittkurve darstellen, indem im Dialogfenster „Schnittpunktkurve“ ausgewählt wird und beide Flächen angeklickt werden. Diese Eingabe muss zwei Mal mit der linken Maustaste bestätigt werden.

Für die Konstruktion des Dreiecks wird „**SmartLine platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) verwendet, die Eckpunkte des Dreiecks werden wie oben beschrieben festgelegt.

Für die Darstellung der Achse wird wieder eine Strecke auf der z-Achse konstruiert.

Die Schraublinie ist dieselbe wie die in Abschnitt (a) beschriebene.

### e. Konstruktion der Regelschraubfläche

Die Konstruktion der Regelschraubfläche funktioniert wie schon in (b) beschrieben. Statt der Profilstrecke wird nun das Profildreieck verwendet.

### f. Konstruktion des Kegels und Trimmung mit der Schraubfläche

Bevor das Objekt in ein Volumenelement umgewandelt wird, wird das obere Ende mit einem Kegel getrimmt. Die Grundfläche des Kegels liegt in  $z=10$ , der Mittelpunkt des Kreises in der Grundfläche ist  $(0,0,10)$  und die Höhe beträgt 7,5 cm. Die Regelschraubfläche und der Kegel sollen nun so getrimmt werden, dass von beiden Flächen die gewünschten Teile erhalten bleiben, also der untere Teil der Regelschraubfläche und jener Teil des Kegels, der von der Regelschraubfläche eingeschlossen wird.

Für die Konstruktion des Kegels wird „**Kegel platzieren**“ (3D-Haupt, 1a, ) ausgewählt und der Kegel an der beschriebenen Stelle als Flächenelement erzeugt. Die Trimmung der beiden Fläche erfolgt mit dem Werkzeug „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) , wobei im Dialogfenster eingestellt wird, dass beide Flächen getrimmt werden sollen. Die Flächen müssen nun an jenen Stellen angeklickt werden, an denen sie erhalten bleiben sollen. Die Eingabe wird bestätigt, indem zwei Mal auf die linke Maustaste gedrückt wird.

### g. Querschnitt (bzw. unteres Ende des Korkenziehers)

Der Korkenzieher wird am unteren Ende mit der Ebene  $z=2.5$  abgeschnitten, wodurch der Querschnitt der Regelschraubfläche sichtbar wird.

Mit „**Rechteck platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) wird ein Rechteck in der Ebene  $z=2.5$  gezeichnet. Die Regelschraubfläche wird nun mittels „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) mit dem Rechteck getrimmt.

### h. Fläche in Volumenelement umwandeln

Nun wird die Fläche von der Regelschraubfläche, von einem Teil eines Kegels und einem Flächenstück begrenzt und kann in ein Volumen umgewandelt werden.

Für die Umwandlung in ein Volumen wird „**3D umwandeln**“ (Fläche modellieren, 1b, ) verwendet. Im Dialogfenster wird wieder eingestellt, dass ein Volumenelement erzeugt werden soll. Durch Doppelklick auf die bisher konstruierte Fläche erhält der Korkenzieher ein Volumen.

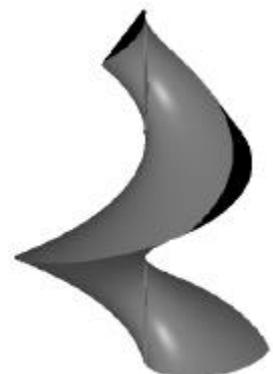


Abb. 3.80: Korkenzieher dargestellt mit MicroStation

## 3.5 Allgemeine Regelflächen

Die allgemeine Theorie zu den Regelflächen wurde schon im Kapitel 1.1 behandelt. Als Beispiel für eine Fläche, die nicht eine der schon genannten speziellen Regelflächen ist, wird hier das Möbiusband, eine einseitige Fläche, vorgestellt.

### 3.5.1 Möbiusband

Diese Bänder werden nach Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868) benannt, der sie als erster benutzte, um damit gewisse bedeutende topologische Besonderheiten zu demonstrieren. Es ist sehr einfach, sich selbst ein Modell davon zu machen.

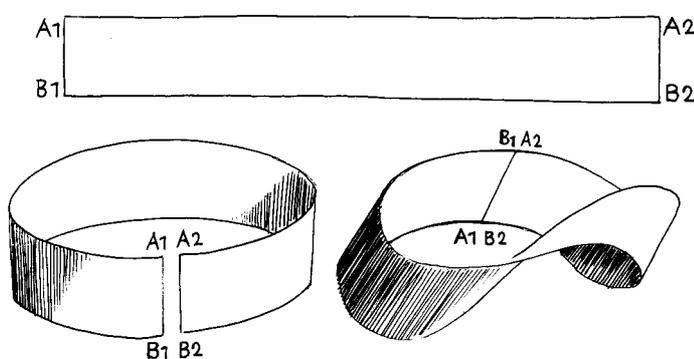


Abb. 3.81: Wie man ein Möbiusband macht (Ernst B., 1994, S. 99)

Werden die beiden Breiten eines rechteckigen Papierstreifens zusammengeklebt, ohne den Streifen dabei zu verdrehen, so entsteht ein Zylinder. Dieses zylindrische Band hat zwei Ränder (Unter- und Oberrand) und eine innere und eine äußere Oberfläche.

Um ein Möbiusband zu erhalten, wird das Band so in sich verdreht (ein- oder mehrfach), dass  $A_1$  auf  $B_2$  trifft und  $B_1$  auf  $A_2$ . Das Band hat nun nur noch **einen Rand** und **eine Seite**.

Dass das Möbiusband nur einen Rand besitzt, ist nachzuvollziehen, wenn man mit dem Finger einem Rand folgt und nach zwei Umrundungen wieder zu dem Ausgangspunkt gelangt.

Auf dem Bild Möbiusband II von M. C. Escher (1898-1972) (<http://www.mcescher.com/Gallery/recogn-bmp/LW437.jpg>) ist ein Holzstich zu sehen, in dem ein Möbiusband dargestellt wird, das durch einmalige Verdrehung des Papierstreifens, vor dem Zusammenkleben, entsteht. Hier ist die zweite Eigenschaft, dass ein Möbiusband nur eine Seite besitzt, leicht zu erkennen: Verfolgt man den

Weg einer Ameise, den sie entlang einer Seite des Möbiusbandes geht, so gelangt man wieder an ihre Ausgangsposition.

Noch eine merkwürdige Eigenschaft des Möbiusbandes ist zu erwähnen: Wird ein Möbiusband der Länge nach durchgeschnitten, so zerfällt es nicht in zwei Ringe, wie das zum Beispiel beim Zylinder der Fall wäre, sondern es bleibt ein zusammenhängendes Band. Diese Eigenschaft zeigt Escher in dem Holzstich Möbiusband II (<http://www.mcescher.com/Gallery/recogn-bmp/LW437.jpg>) anhand eines Möbiusbandes, das entsteht, wenn man einen Papierstreifen nach dreifacher Verwindung an den Breitseiten, zusammenklebt. Dieses Band, das sich nach dem Schnitt ergibt, hat nun zwei Seiten.

### Überblick über das Beispiel

In diesem Beispiel soll ein Möbiusband gezeichnet werden, das erzeugt wird, wenn man einen Papierstreifen einmal verwindet und dann an den Breitseiten zusammenklebt.

Das Möbiusband wird als spezielle verallgemeinerte Schraubfläche, nämlich mit einem Kreis als Schraublinie, konstruiert. Würde man eine Strecke entlang eines Kreises verschieben, so würde ein Zylinder entstehen. Wird die Strecke jedoch während dieser Bewegung um insgesamt  $180^\circ$  verdreht, was der einmaligen Verwindung eines Papierstreifens gleicht, so entsteht ein Möbiusband.

Konstruktionsschritte	Beschrieben in	MicroStation
Vorbereitungen für die Schraubflächenkonstruktion	a	
Konstruktion des Möbiusbandes	b	

#### a. Vorbereitung für die Schraubflächenkonstruktion

Als Angabeobjekte für die Schraubfläche werden die Mittenschraublinie, die Profilkurve und die Schraubachse verwendet. Als Mittenschraublinie wird ein Kreis in der  $xy$ -Ebene konstruiert, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt und der einen Radius von 10 cm besitzt. Die Profilkurve ist eine Strecke mit Anfangspunkt (10,0,5) und Endpunkt (10,0,-5). Die Schraubachse der Schraubfläche ist die  $z$ -Achse.

In MicroStation wird der Kreis mit „**Kreis platzieren**“ (Hauptpalette, 4b, ) erzeugt. Die Strecke wird mit dem Werkzeug „**Linie platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) konstruiert, wobei AccuDraw dabei in der  $xz$ -Ebene liegen muss (also „s“ drücken). MicroStation merkt sich, in welcher Ebene die Strecke konstruiert wird, was für die spätere Drehung der Strecke

während der Schraubbewegung eine wichtige Rolle spielt. Mit dem gleichen Werkzeug lässt sich eine Strecke auf der z-Achse, die die Schraubachse darstellen soll, erzeugen.

## b. Konstruktion des Möbiusbandes

Das Möbiusband wird nun als verallgemeinerte Schraubfläche erzeugt. Dazu müssen Kreis, Strecke und Schraubachse angegeben werden. Während der verallgemeinerten Schraubbewegung soll die Strecke in der Normalebene auf den Kreis mit konstanter Geschwindigkeit um  $180^\circ$  gedreht werden, was dem einmaligen Verwinden des Papierstreifens entspricht.

Um eine Schraubfläche in MicroStation zu konstruieren, wird das Werkzeug „**Schraubenfläche konstruieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) verwendet.



Abb. 3.84: Dialogfenster „Schraubfläche konstruieren“

Im Dialogfenster wird für den Maßstab des Abschnitts in X- bzw. in Y-Richtung jeweils 1 eingegeben, da sich die Profilkurve (also die Strecke) während der Schraubung nicht verändern soll. Für den Drehwinkel wird der Wert 180 eingetragen (Die Strecke muss stets in der Normalebene des Kreises gedreht werden. Dies wurde in (a) festgelegt, da die Strecke in Bezug auf die xz-Ebene konstruiert wurde, die die Normalebene auf den Kreis in der Anfangsposition der Strecke ist. MicroStation dreht nun automatisch die Strecke orthogonal zum Kreis).

Schließlich müssen die Schraublinie (Helixkurve), die Strecke (Profilkurve) und zuletzt die Strecke, die die Achse darstellt, angeklickt werden.

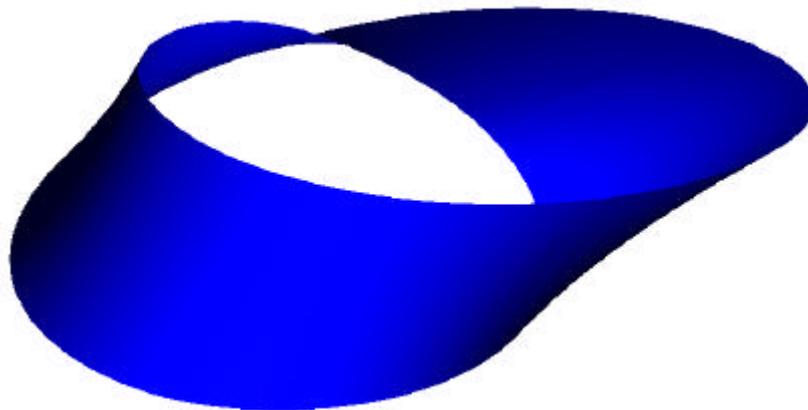


Abb. 3.85: Möbiusband dargestellt mit MicroStation

## 4 Arbeitsblätter

In den folgenden Arbeitsblättern werden die im dritten Kapitel beschriebenen Beispiele in verkürzter Form dargestellt. Es wird auf die allgemeine Darstellung verzichtet, die Verwendung dieser Arbeitsblätter ist daher nur dann möglich, wenn im Unterricht auf MicroStation gearbeitet wird.

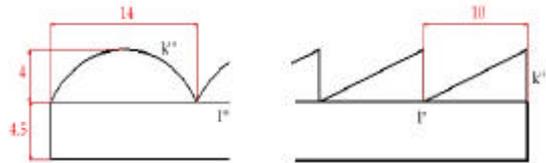
Die Arbeitsblätter sowie die entsprechenden Konstruktionen in MicroStation können der beiliegenden CD entnommen oder im Internet unter der Adresse <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/rath/student/list> bezogen werden.

## 4.1 Arbeitsblatt Sheddach

In diesem Beispiel wird eine Fabrikshalle aus Villanova d'Asti in Italien etwas vereinfacht nachgezeichnet, die ein aus Konoiden gebildetes Sheddach trägt. Das Gebäude ist in Auf- und Kreuzriss gegeben.

### a. Boden und Wände:

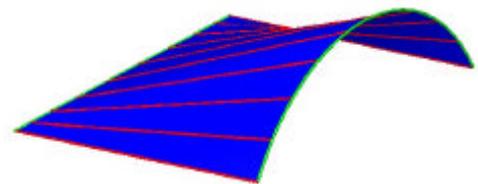
Boden (42x40m) und Wände (h=4.5m) werden mittels Rechtecken („**Rechteck platzieren**“, Hauptpalette, 3b, ) konstruiert und daraufhin vereinigt.



### b. Konstruktion eines Konoids

Die Leitlinien des Konoids sind der Kreisbogen  $k$  und die Strecke  $l$ . Die Strecke  $l$  wird durch Skalierung von  $k$  erzeugt, indem im Dialogfenster des Werkzeugs „**Skalieren**“ (Hauptpalette, 8b, ) für die  $z$ -Richtung der Skalierungsfaktor 0 verwendet wird und die Kurve angeklickt wird. Sie wird mit „**Element verschieben**“ (Hauptpalette, 8b, ) auf die gewünschte Position verschoben. Durch die Skalierung ist gewährleistet, dass die für die Flächenkonstruktion zugeordneten Punktepaare jeweils in Ebenen liegen, die zur  $xz$ -Ebene parallel sind und die Fläche somit ein Konoid ergibt.

Zwischen diesen beiden Abschnittselementen wird mit „**Fläche über Schnitt oder Netzwerk konstruieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) nun eine B-Spline-Fläche gelegt, deren  $v$ -Linien die Ordnung 1 besitzen, also Geraden sind, da die Fläche ein Konoid annähern soll.



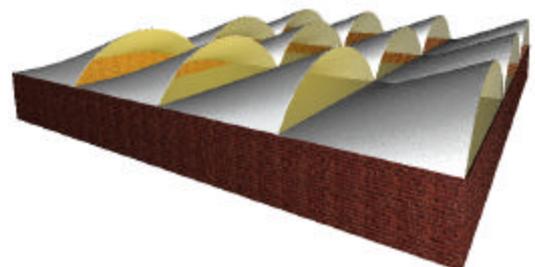
### c. Glasfront

Um die Front des Konoids abzuschließen, wird der Kreisbogen  $k$  mit dem Werkzeug „**Komplexe Polygonfläche konstruieren**“ (Hauptpalette, 6a, ) zu einem Kreissegment vervollständigt.

### d. Verdickung der Wände und Vervollständigung des Gebäudes

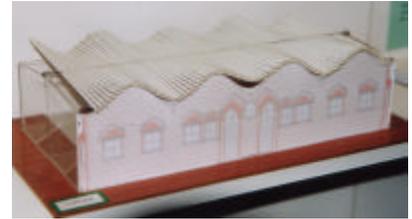
Die Rechtecke, die die Wände darstellen, werden mit „**Auf Volumenelement verdicken**“ (3D-Haupt, 1b, ) auf 20 cm verdickt. Sie sollen jeweils in Richtung des Gebäudeinneren verdickt werden bis auf das Rechteck in der Ebene  $x=40$ , das nach außen verdickt wird. Das Dach wird um 10 cm nach innen verdickt und die Glasfront um 5 cm in Richtung der positiven  $x$ -Achse. Die Elemente werden mit dem Werkzeug „**Matrix konstruieren**“ (Hauptpalette, 8b, ) vervielfacht (zwei Mal in  $y$ -Richtung, drei Mal in  $z$ -Richtung).

Schließlich werden den Gebäudeteilen Materialien zugewiesen. Das Dach besteht aus Aluminium, die Front der Konoide (die Kreissegmente) aus Glas, und die Wände sind Ziegelmauern.



## 4.2 Arbeitsblatt Schulhaus

Das in Barcelona direkt neben der Sagrada Familia stehende Pfarrschulhaus, dessen Dach ein Konoid ist, soll in diesem Beispiel nachgebildet werden.



### a. Konstruktion des Konoids

Vorerst wird nur ein Achtel des Daches konstruiert. Die Randkurve wird mit Hilfe einer B-Spline-Kurve 3. Ordnung (also MicroStation-Ordnung 4) mit dem Werkzeug „**B-Spline-Kurve platzieren**“ (B-Spline-Kurven, 1a, ) dargestellt. Es werden vier Kontrollpunkte für deren Angabe benötigt: (10,0,5), (10,2,5), (10,2,7) und (10,4,7) (Maße in m).



Diese Kurve wird mit „**Kopieren**“ (Hauptpalette, 8b, ) um 20 m in Richtung der negativen x-Achse verschoben und an der Ebene z=6 gespiegelt („**Spiegeln**“, Hauptpalette, 8b, ) , wodurch der gegenüberliegende Rand des Daches dargestellt wird.

Nun werden die beiden Kurven mit dem Werkzeug „**Fläche über Schnitt oder Netzwerk konstruieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) durch eine B-Spline-Fläche verbunden, die gerade Erzeugende besitzt.

### b. Konstruktion des kompletten Daches

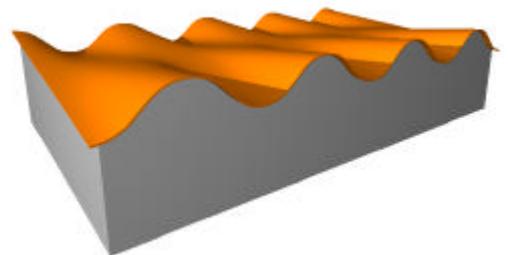
Der bis jetzt konstruierte Teil des Daches wird mit „**Spiegeln**“ (Hauptpalette, 8b, ) an der Ebene y=4 gespiegelt und dabei zugleich kopiert. Mit „**Flächen vereinigen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) werden die beiden Flächenteile vereinigt und mit „**Kopieren**“ (Hauptpalette, 8b, ) drei Mal um 4 m in Richtung der positiven y-Achse verschoben. Zuletzt werden alle Teile zu einem kompletten Dach vereinigt.

### c. Die Wände und der Boden

Die Wände werden so konstruiert, dass das Dach diese um 40 cm überragt. Sie werden mit dem Werkzeug „**Rechteck platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) dargestellt und mit dem Dach getrimmt („**Trimmung erstellen**“, Fläche modellieren, 1b, ) . Der Boden liegt in der xy-Ebene und wird ebenfalls mit Hilfe eines Rechtecks visualisiert.

### d. Verdickung des Daches und der Wände

Das Dach wird schließlich um 10 cm mit dem Werkzeug „**Auf Volumenelement verdicken**“ (3D-Haupt, 1b, ) verdickt. Bei der Verdickung soll die obere Fläche als Konoid erhalten bleiben, daher wird das Volumen in Richtung der negativen z-Achse aufgetragen.

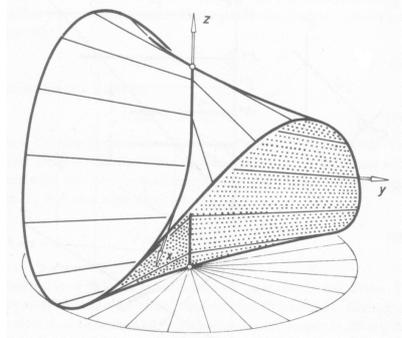


Die Wände sollen jeweils nach innen um 20 cm verstärkt werden, ebenso die Bodenplatte.

## 4.3 Arbeitsblatt Plückerkonoid

### Definition (bzw. erste Erzeugungsweise)

Eine Gerade führt um eine sie rechtwinklig treffende Achse eine gleichförmige Drehung und gleichzeitig längs der Achse eine harmonische Schwingung mit der doppelten Frequenz aus.



### Zweite Erzeugungsweise

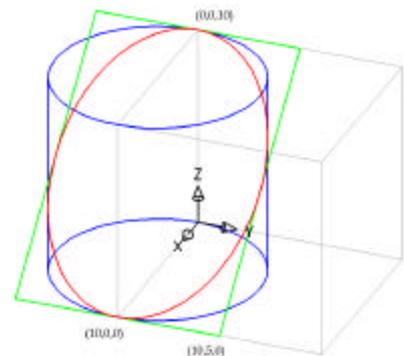
Es lässt sich zeigen, dass auf dem Plückerkonoid Ellipsen liegen. Das führt zu folgender weiterer Erzeugungsweise eines Plückerkonoids: Ein Plückerkonoid ist die Menge der Geraden, die einerseits einen ebenen Schnitt eines Drehzylinders (Ellipse) und andererseits rechtwinklig eine beliebige Erzeugende dieses Drehzylinders schneiden.

### Konstruktion des Plückerkonoids in diesem Beispiel

Im folgenden Beispiel wird ein Plückerkonoid, das mit einem koaxialen Zylinder abgeschnitten ist, mit Hilfe der zweiten Erzeugungsweise konstruiert.

#### a. Konstruktion der Ellipse

Der Drehzylinder wird mit Werkzeug „**Zylinder platzieren**“ (3D-Haupt, 1a, ) wie in der nebenstehenden Figur konstruiert. Die Achse verläuft durch die Punkte (5,0,0) und (5,0,10), der Radius beträgt 5 cm.



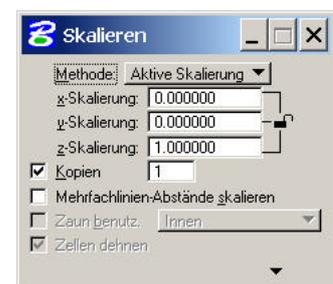
Der ebene Schnitt des Zylinders soll in einer Ebene durch die Punkte (10,0,0), (10,5,0) und (0,0,10) liegen. Mit Hilfe eines Rechtecks („**Polygonfläche platzieren**“, Hauptpalette, 3b, ) durch die genannten Punkte kann diese Ebene dargestellt werden.

Mit „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) wird der Schnitt mit dem Zylinder erzeugt, der die in der 2. Erzeugungsweise erwähnte Ellipse ergibt.

Um im weiteren Beispiel problemlos mit dieser Ellipse weiterarbeiten zu können, wird sie in eine B-Spline-Kurve umgewandelt. Die B-Spline-Kurve lässt sich mit „**Kurve neu erstellen**“ (B-Spline-Kurven, 1b, ) konstruieren. Als Typ wird im Dialogfenster „Neu erstellen“ ausgewählt. Mit einem Doppelklick auf die Ellipse wird diese durch die angenäherte B-Spline-Kurve dargestellt.

#### b. Konstruktion der Achse des Plückerkonoids

Damit die Fläche, die erzeugt wird, ein Konoid ergibt, wird die konstruierte Ellipse mit „Skalieren“ (Hauptpalette, 8b, ) so skaliert, dass sie die Achse des Konoids darstellt. Diese Skalierung hat zur Folge, dass zugeordnete Punkte für die spätere Flächenkonstruktion den gleichen Abstand zur xy-Ebene haben,

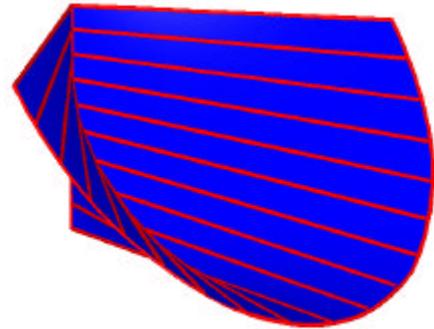


die damit die Richtebene des Konoids ist. Um die Kurve zu einer z-parallelen Geraden zu skalieren, wird in x- und y-Richtung mit dem Wert 0 (bzw. in MicroStation mit 0.0000001) skaliert. In z-Richtung soll die Strecke gegenüber der Ellipse nicht verzerrt werden, daher wird hier mit dem Wert 1 skaliert. Wird nun die Ellipse mit der linken Maustaste angeklickt und dann der Punkt (0,0,10) als Ursprung der Skalierung eingegeben, so wird die Achse an der richtigen Stelle generiert.

### c. Konstruktion eines Teiles des Plückerkonoids

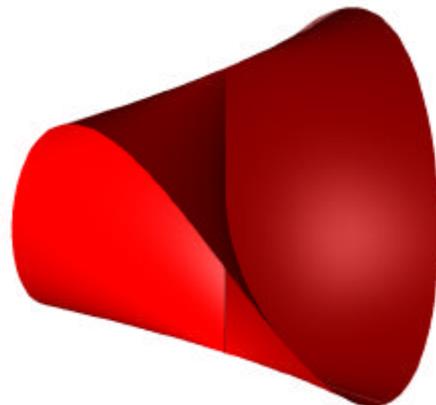
Das Plückerkonoid wird mit „**Fläche über Schnitt oder Netzwerk konstruieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) erstellt. Im Dialogfenster wird bei „Definieren über“ „Schnitt“ eingegeben. Das Ergebnis ist ein Teil eines Plückerkonoids.

Diese Fläche soll mit der Ebene  $z=5$  abgeschnitten werden. Mit „**Rechteck platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) wird dazu ein Rechteck konstruiert, mit dem das Konoid mit Hilfe des Werkzeugs „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) getrimmt wird. Der untere Teil des Konoids soll erhalten bleiben.



### d. Vervollständigung des Konoids

Der soeben konstruierte Teil des Plückerkonoids wird mit „Drehen“ (Hauptpalette, 8b, ) vier Mal um  $90^\circ$  um die z-Achse verdreht, wobei bei jeder Drehung eine Kopie zu erstellen ist. Zwei gegenüberliegende Teile werden an der Ebene  $z=5$  gespiegelt („Spiegeln“, Hauptpalette, 8b, ). Die vier Teile werden mit dem Werkzeug „**Flächen vereinigen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) vereinigt und mit einem Drehzylinder („**Zylinder platzieren**“, 3D-Haupt, 1a, ) geschnitten, der dieselbe Achse hat wie das Plückerkonoid und einen Radius von 6,5 cm besitzt. Für den Schnitt wird das Werkzeug „Trimmung erstellen“ (Fläche modellieren, 1b, ) verwendet.

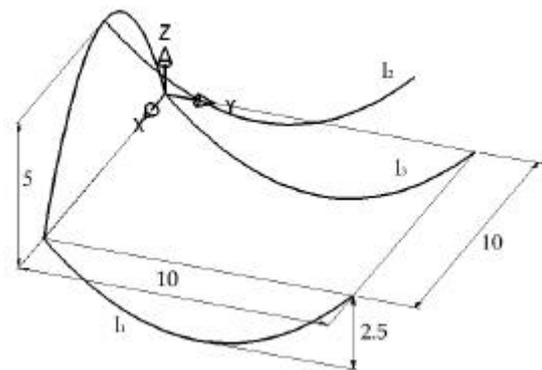


## 4.4 Arbeitsblatt HP-Fläche: 2 Erzeugungsweisen

In diesem Beispiel soll ein Hyperbolisches Paraboloid einerseits als Schiebfläche und andererseits als Regelfläche konstruiert werden. Zuerst wird eine Schiebfläche mit Parabeln als Leit- und Profilkurve gezeichnet. Es werden unterschiedliche ebene Schnitte mit der so entstandenen HP-Fläche betrachtet. Insbesondere soll der Schnitt mit der Tangentialebene im Scheitel ermittelt werden, woraus sich ein Erzeugendenpaar der Regelfläche ergibt. Dadurch sind die beiden Stellungen der Richtebenen, zu denen alle Erzeugenden der Regelfläche parallel liegen, festgelegt. Die HP-Fläche kann nun mit Hilfe eines Erzeugendenvierseits auf eine zweite Weise, als Regelfläche, konstruiert werden.

### a. Parabeln zur Angabe der HP-Fläche

Für die Konstruktion der HP-Fläche müssen die Parabeln  $p$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_3$ , wie in der nebenstehenden Figur gezeigt, angegeben werden. Für  $p$  und  $l_1$  wird das Werkzeug „**Kegelschnitt platzieren**“ (B-Spline Kurven, 1a, ) verwendet.



Um die Parabeln  $l_2$  und  $l_3$  zu erhalten, verschiebt man die Parabel  $l_1$  parallel. Dazu verwendet man das Werkzeug „**Kopieren**“ (, 8b).

### b. Konstruktion der HP-Fläche als Schiebfläche

Die Parabeln  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_3$  stellen drei Schnitte der HP-Fläche dar. Über diese Schnitte kann nun die Fläche als B-Spline-Fläche mit dem Werkzeug „**Fläche über**

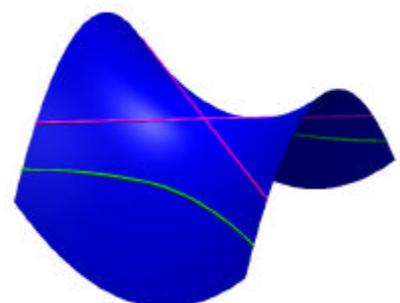


**Schnitt oder Netzwerk konstruieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) konstruiert werden. Schließlich müssen die Kurven  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_3$  hintereinander mit der linken Maustaste angeklickt werden.

Achtung: Die drei Parabeln müssen dieselbe Orientierung aufweisen, damit die erhaltene Fläche nicht „verdreht“ ist. Die Orientierung kann mit „**Elementrichtung ändern**“ (B-Spline-Kurven, 1b, ) geändert werden.

### c. Ebene Schnitte der HP-Fläche

Wählt man eine Ebene parallel zur  $xy$ -Ebene, so ist der Schnitt dieser Ebene mit der HP-Fläche im Allgemeinen eine Hyperbel. Dazu werden Rechtecke (mit „**Rechteck platzieren**“ Hauptpalette, 3b, ) auf verschiedenen Höhen gezeichnet und mit der HP-Fläche geschnitten („**Trimmung erstellen**“, Fläche modellieren 1b, ). Im Dialogfenster ist „Schnittpunktkurve“ zu wählen.



Im Fall der Tangentialebene im Scheitelpunkt der Fläche zerfällt der Schnitt in zwei Geraden. Um ein Rechteck genau

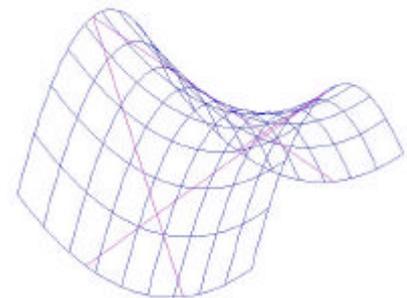
in den Scheitelpunkt zu legen, wird der Scheitel der Parabel  $l_2$  angesnappt. Dieser Punkt kann als Eckpunkt des Rechtecks verwendet werden, das daraufhin mit „**Element ändern**“ (Hauptpalette, 9b, ) vergrößert wird.

#### d. Konstruktion des Erzeugendenvierseits

Normal auf die Tangentialebene im Scheitelpunkt werden durch die geraden Schnitte Rechtecke gelegt, die die Richtebenen darstellen. Dazu wird das Werkzeug „**Extrudieren**“ (3D-Konstruktion, 1b, ) verwendet, sodass in beide Richtungen der Geraden 5 cm extrudiert werden.



Erzeugt man von jedem Rechteck mit „**Kopieren**“ (Hauptpalette, 8b, ) zwei Kopien (z.B. jeweils durch die Endpunkte von  $l_2$ ), so entstehen vier Rechtecke. Schneidet man diese mit der HP-Fläche, indem man das Werkzeug „**Trimmung erstellen**“ („Fläche modellieren, 1b, ) verwendet, so ergeben sich vier Erzeugende der Fläche. Die vier entstehenden Geraden bilden ein Erzeugendenvierseit.

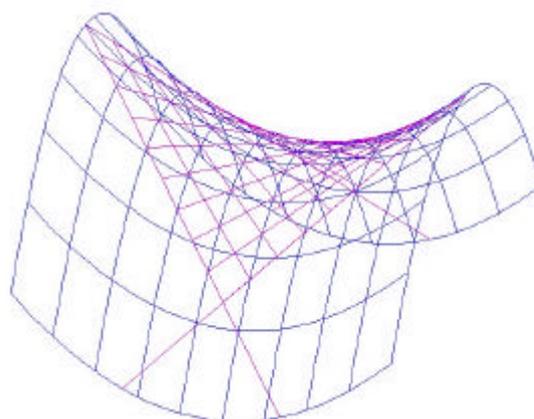
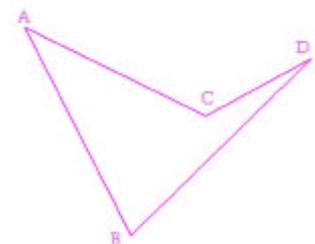


#### e. Konstruktion der HP-Fläche als Regelfläche

Da eine HP-Fläche durch die Angabe eines Erzeugendenvierseits festgelegt ist, kann sie nun mit „**Freiformfläche platzieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) als B-Spline-Freiformfläche erzeugt werden. Die Ordnung in u- und v-Richtung beträgt 1 (also MicroStation Ordnung 2).



Folgendermaßen wird die Freiformfläche angegeben: Es werden zuerst die Punkte A und B mit der linken Maustaste angeklickt, die Eingabe der ersten u-Linie wird mit der rechten Maustaste abgeschlossen. Danach werden die Punkte C und D mit der linken Maustaste eingegeben und wieder mit der rechten Maustaste beendet.



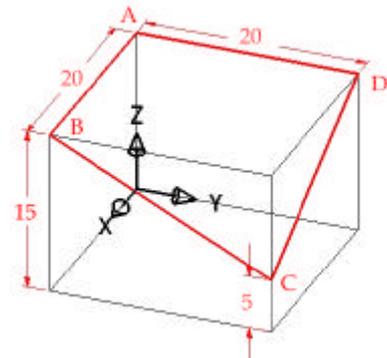
## 4.5 Arbeitsblatt Entertainment-Center

Das Dach des Entertainment-Centers von Felix Candela besteht aus vier HP-Flächen. Sie hängen längs ihrer horizontalen Erzeugenden zusammen. Dieses Objekt soll in diesem Beispiel samt der zylindrischen Träger und einer Bodenplatte möglichst originaltreu konstruiert werden.



### a. Erzeugendenvierseit als Angabe der HP-Fläche

Als Angabeobjekt für die HP-Fläche (ein Viertel des Daches) dient ein windschiefes Vierseit, das mit „**SmartLine platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) wie in der nebenstehenden Figur eingegeben wird. Da das gesamte Objekt drehsymmetrisch ist, wird zuerst nur ein Viertel des Objekts konstruiert und zuletzt wird das Gebäude durch Drehung vervollständigt.



### b. Konstruktion der HP-Fläche

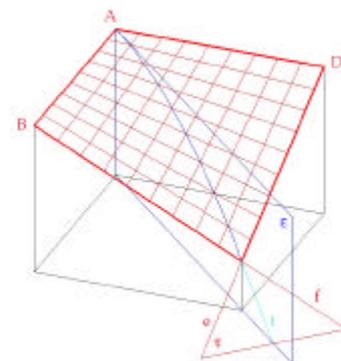
Durch ein Erzeugendenvierseit ist eine HP-Fläche eindeutig bestimmt. Um diese über dem Vierseit aufzuspannen, wird eine B-Spline-Fläche mit dem Werkzeug „**Freiformfläche platzieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) konstruiert, wobei die Seiten des Vierseits die Erzeugenden der Fläche sind. Die Ordnungen der u- und v-Linien betragen 1 (also MicroStation-Ordnung 2), da es sich in beiden Richtungen um Geraden handelt.



Eingabe der Fläche: A und B mit linker Maustaste; rechte Maustaste; C und D mit linker Maustaste; rechte Maustaste

### c. Konstruktion der Richtung der zylindrischen Träger

Die Richtung des zylindrischen Trägers ist parallel zur Tangente  $t$  an die Schnittparabel der HP-Fläche mit der lotrechten Ebene  $\varepsilon$  durch A und C.  $\varepsilon$  wird durch ein senkrechtetes Rechteck dargestellt, indem die Strecke durch die Fußpunkte von A und B mit der Funktion „**Extrudieren**“ (3D-Haupt, 1b, ) um 15 cm in Richtung der positiven z-Achse extrudiert wird.



Die Tangentialebene  $\tau$ , die von  $e=[CD]$  und  $f=[BC]$  aufgespannt wird, wird mit Hilfe eines Dreiecks dargestellt. Dazu wird das Werkzeug „**Polygonfläche platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) verwendet.

Anschließend wird die gesuchte Tangente  $t$  als Schnittkurve der Ebenen  $\varepsilon$  und  $\tau$  mit Hilfe des Werkzeugs „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) konstruiert. Dazu wählt man im Dialogfenster „Schnittpunktcurve“ aus und klickt die beiden Ebenen  $\varepsilon$  und  $\tau$  an.

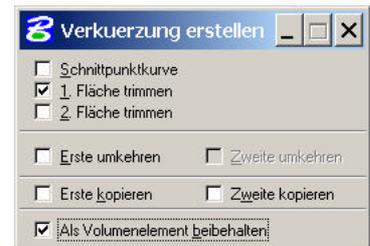
#### d. Verdickung des Daches

Um die Materialdicke, die das Dach in Wirklichkeit besitzt, darzustellen, wird das Dach nun mit „**Auf Volumenelement verdicken**“ (3D-Haupt, 1b, ) in Richtung der negativen z-Achse um 50 cm verdickt.

#### e. Konstruktion der zylindrischen Träger

Für die Richtung des zylindrischen Trägers wurde in (c) schon die Tangente t konstruiert. t muss verschoben werden, da t die Achse des Zylinders sein soll, und zwar an den Mittelpunkt der Strecke, die bei der Verdickung beim Punkt C entstanden ist. Mit „**Zylinder platzieren**“ (3D-Haupt, 1a, ) kann nun der Zylinder konstruiert werden, dessen Radius 20 cm betragen soll.

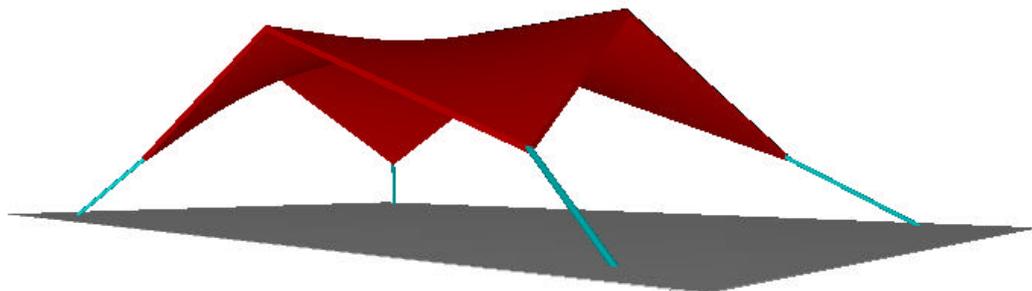
Der Zylinder wird mit Hilfe des Werkzeugs „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) mit einem Rechteck in der xy-Ebene getrimmt, das den Boden darstellen soll. Der Mittelpunkt des Rechtecks liegt im Ursprung, die Seitenlänge ist 60 m. Zuletzt wird der Zylinder mit dem Dach getrimmt.



Nun wird das Rechteck mit „**Auf Volumenelement verdicken**“ (3D-Haupt, 1b, ) um 20 cm in Richtung der negativen z-Achse verdickt.

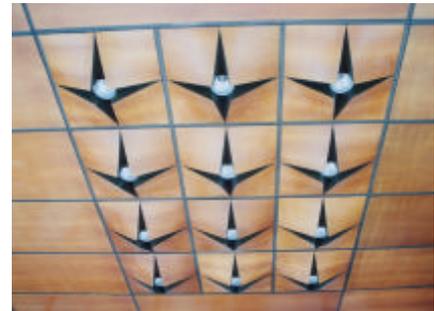
#### f. Drehung und Vereinigung

Der letzte Schritt ist nun, das Dach und den Träger mit „**Drehen**“ (Hauptpalette, 8b, ) drei Mal um 90° um die z-Achse zu drehen (dabei soll bei jeder Bewegung eine Kopie erstellt werden). Die vier Objekte werden schließlich mit „**Volumenvereinigung bilden**“ (3D-Haupt, 2a, ) vereinigt.



## 4.6 Arbeitsblatt Lampen

Die Beleuchtung im Eingangsbereich eines Lokals, die aus mehreren kongruenten HP-Flächen besteht, soll möglichst originalgetreu nachgezeichnet werden.



### a. Konstruktion des Erzeugendenvierseits und der HP-Fläche

Die HP-Fläche wird in diesem Beispiel mit Hilfe eines Erzeugendenvierseits  $(0,0,0)$ ,  $(10,0,0)$ ,  $(8,8,-4)$  und  $(0,10,0)$  angegeben (mit „**SmartLine platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) konstruieren).

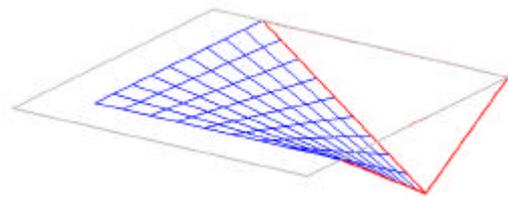
Nun wird mit „**Freiformfläche platzieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) eine HP-Fläche als B-Spline-Fläche konstruiert. Im Dialogfenster können nun die Ordnungen der u- und v-Linien eingegeben werden (jeweils MicroStation-Ordnung 2, um gerade u- und v-Linien zu konstruieren). Im Dialogfenster wird als „Methode“ „Pole definieren“ ausgewählt. Um die Fläche eindeutig anzugeben, müssen zwei u-Linien angegeben werden.

Um die Freiformfläche anzugeben, klickt man:

auf  $(0,0,0)$ ,  $(10,0,0)$  mit linken Maustaste, dann Klick mit rechter Maustaste auf  $(8,8,-4)$ ,  $(0,10,0)$  mit linker Maustaste, dann Klick mit rechter Maustaste

### b. Konstruktion der Polygonflächen

Die Flächen, die direkt an den Spot anliegen, sind Dreiecke. Sie werden mit Polygonflächen („**Polygonfläche platzieren**“, Hauptpalette, 3b, ) durch die Punkte  $(10,0,0)$ ,  $(8,8,-4)$  und  $(10,10,0)$  bzw. durch die Punkte  $(0,10,0)$ ,  $(8,8,-4)$  und  $(10,10,0)$  visualisiert.



Zusätzlich wird ein Quadrat, das  $(10,10,0)$ ,  $(10,-1,0)$  und  $(-1,-1,0)$  als Eckpunkte besitzt, mit „**Rechteck platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) konstruiert.

### c. Flächen vereinigen, Volumenelement erzeugen und vervielfältigen

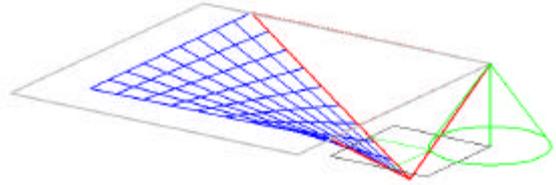
Die HP-Fläche, die beiden Dreiecke und das Quadrat werden miteinander vereinigt („**Flächen vereinigen**“, Fläche modellieren, 1b, ) und mit „3D umwandeln“ (**Fläche modellieren**, 1b, ) zu einem Volumenelement umgewandelt.

Da jede einzelne der oben abgebildeten Lampen aus vier der bisher gezeichneten Objekte besteht, wird dieses mit „**Drehen**“ (Hauptpalette, 8b, ) mit  $90^\circ$ -Drehungen um den Punkt  $(10,10,0)$  vervielfältigt.

### d. Konstruktion eines Spots

Der Spot wird mit Hilfe eines Kegels dargestellt, der die Spitze im Punkt  $(10,10,0)$ , eine Höhe von 3 cm hat und die vier umliegenden Strecken berührt. Eine Strecke von  $(10,10,0)$  nach  $(10,10,-3)$  wird als Teil der Achse konstruiert („**Linie platzieren**“, Hauptpalette, 2b, ). Nun wird die Trägerebene der Grundfläche des Kegels mit Hilfe eines Rechtecks („**Rechteck**

**platzieren**“, Hauptpalette, 3b, ) dargestellt, das durch den Punkt (10,10,-3) verläuft und parallel zur xy-Ebene liegt. Durch den Schnitt des Rechtecks mit einem der Dreiecke mit Hilfe des Werkzeugs „Trimmung erstellen“ (**Fläche modellieren**, 1b, ) ergibt sich ein Punkt des Kreises in der Grundfläche des Kegels. Der Kegel ist dadurch eindeutig festgelegt.



Nun wird der Kegel mit „**Kegel platzieren**“ (3D-Haupt, 1a, ) konstruiert. Als erstes muss der Mittelpunkt des unteren Kreises eingegeben werden, also (10,10,-3). Durch den ebenen Schnitt kennt man einen Punkt des unteren Kreises. Der Mittelpunkt des oberen Kreises ist (10,10,0) und der Radius 0, damit der Kegel eine Spitze besitzt.



### e. Vervielfältigung zur Gesamtbeleuchtung

Schließlich wird die soeben vollständig konstruierte Lampe mit dem Werkzeug „Matrix konstruieren“ (Hauptpalette, 8b, ) 11 Mal vervielfältigt, sodass sich drei Reihen und vier Spalten ergeben.



## 4.7 Arbeitsblatt einschaliges Drehhyperboloid

Im folgenden Beispiel werden einige Eigenschaften des einschaligen Drehhyperboloids behandelt: Erzeugendenschar des Drehhyperboloids, Erzeugung der Fläche durch Rotation einer Erzeugenden, Tangentialebene und ebene Schnitte.

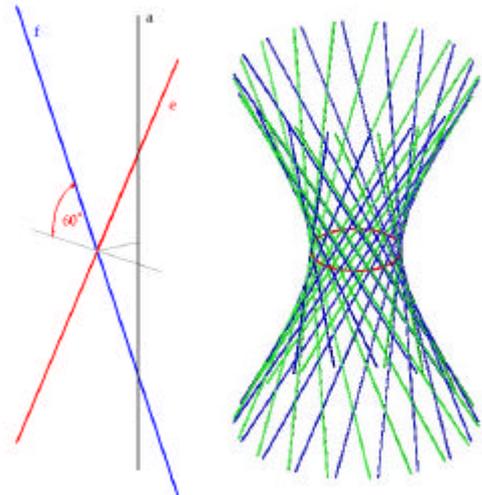
### a. Konstruktion der Erzeugendenschar

Eine e-Erzeugende des Hyperboloids wird mit „**Linie platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) konstruiert. Sie ist 20 cm lang, ihr Mittelpunkt ist (2,0,0) und sie schließt einen Neigungswinkel von  $60^\circ$  mit der xy-Ebene ein (die Gerade wird in der Ebene  $x=2$  verdreht). Um die Achse des Hyperboloids darzustellen, wird eine Strecke entlang der z-Achse gezeichnet.

Eine f-Erzeugende erhält man nun durch Spiegelung („**Spiegeln**“, Hauptpalette, 8b, ) der konstruierten e-Erzeugenden an der xz-Ebene.

Ein Teil der e-Erzeugendenschar, und zwar jeweils die um  $20^\circ$  verdrehten Geraden, wird nun mit Hilfe von Drehungen um die z-Achse mit „**Matrix konstruieren**“ (Hauptpalette, 8b, ) dargestellt.

Analog wird auch ein Teil der f-Erzeugendenschar konstruiert.



### b. Konstruktion des Hyperboloids

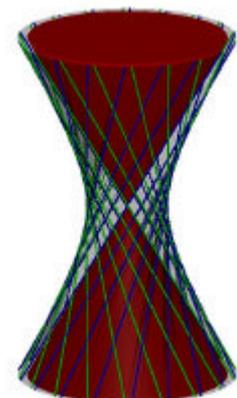
Das Hyperboloid wird nun erzeugt, indem eine Erzeugende um die z-Achse rotiert.

Dazu verwendet man das Werkzeug „**Rotation konstruieren**“ (3D-Haupt, 1b, ). Als Erstes wird das Profil, also die Strecke, ausgewählt. Dann muss die Achse durch zwei Punkte, die auf der Achse liegen, festgelegt werden. Um bei den weiteren Konstruktionen problemlos mit der Fläche arbeiten zu können, wird diese mit „**Fläche neu erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) mit einer B-Spline-Fläche angenähert.



### c. Asymptotenkegel

Alle Erzeugenden des Hyperboloids sind parallel zu den Erzeugenden des Asymptotenkegels. Daher wird eine beliebige Erzeugende mit „**Kopieren**“ (Hauptpalette, 8b, ) durch den Mittelpunkt des Hyperboloids verschoben. Durch Rotation dieser Geraden um die z-Achse wird der Asymptotenkegel erzeugt („**Rotation konstruieren**“, 3D-Haupt, 1b, )



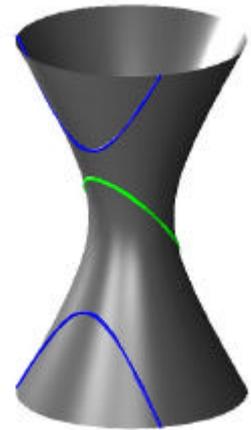
#### d. Ebene gerade Schnitte und Tangentialebene des Hyperboloids

Nun soll die Tangentialebene in einem beliebigen Schnittpunkt zweier Erzeugender konstruiert werden. Sie wird mit „**Polygonfläche platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) als Dreieck gezeichnet, die den Schnittpunkt der Erzeugenden als Ecke und je einen Punkt aus den Erzeugenden als Eckpunkte besitzt, da die Tangentialebene durch die beiden Erzeugenden aufgespannt wird.

#### e. Ebene nicht gerade Schnitte des Hyperboloids

Nun sollen unterschiedliche ebene Schnitt mit dem Hyperboloid konstruiert werden. Die Ebenen werden mit „**Rechteck platzieren**“ (Hauptpalette, 3b, ) dargestellt. Mit „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) wird der Schnitt mit dem Hyperboloid ermittelt.

Ebenen, deren Winkel zur Achse des Hyperboloids größer ist als der Öffnungswinkel  $\alpha$  des Asymptotenkegels schneiden das Hyperboloid nach Ellipsen (z.B. durch die Punkte  $(-2,0,0)$ ,  $(2,0,0)$  und  $(0,2,2)$ ). Ebenen, deren Winkel zur Achse kleiner ist als  $\alpha$ , schneiden das Hyperboloid längs Hyperbeln (z.B. parallel zur xz-Ebene durch den Punkt  $(0,3,0)$ ).



## 4.8 Arbeitsblatt Ausstellungspavillon

Im folgenden Beispiel soll der Ausstellungspavillon in Sydney von H. Seidler möglichst originalgetreu visualisiert werden. Das Gebäude besteht aus einem Teil eines einschaligen Drehhyperboloids, einem Teil eines Kegels und einem Kreissegment.

### a. Hilfslinien für die Konstruktion des Hyperboloids

Das Hyperboloid wird zuerst mit waagrecht Achse konstruiert und erst nachdem es mit einem Kegel und einer Kreisscheibe für Eingangsbereich und Rückwand vereinigt wurde, wird das Objekt in die richtige Position gedreht.

Für die Konstruktion des Hyperboloids  $F$  werden die Achse (als Strecke von  $(10,0,0)$  nach  $(-15,0,0)$ ), der Kehlkreis  $k_1$  (Mittelpunkt  $(10,0,0)$ , Radius: 4 m), und ein Schichtkreis  $k_2$  (Mittelpunkt  $(-15,0,0)$ , Radius: 8 m) wie in der nebenstehenden Figur angegeben.

Dazu werden die Werkzeuge „**Linie platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) und „**Kreis platzieren**“ (Hauptpalette, 4b, ) verwendet.

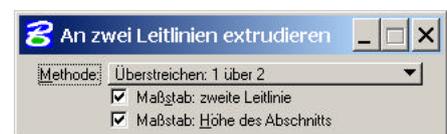
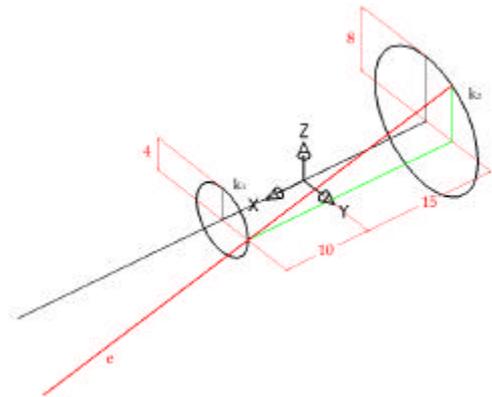
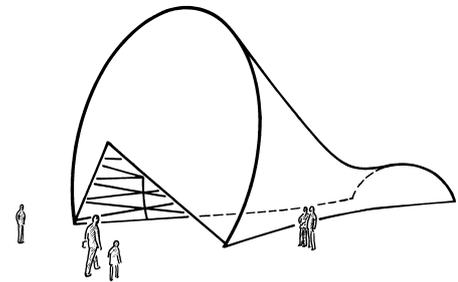
Aus dieser Angabe muss nun eine Erzeugende des Hyperboloids konstruiert werden: Die Tangentialebene im Kehlkreispunkt  $(10,4,0)$  liegt in der Ebene  $y=4$ . In Kehlkreispunkten liegt die Tangentialebene aufgrund der Symmetrie des Drehhyperboloids orthogonal zur Trägerebene des Kehlkreises. Also wird die Tangentialebene mit Hilfe eines Rechtecks („**Rechteck platzieren**“, Hauptpalette, 3b, ) dargestellt.

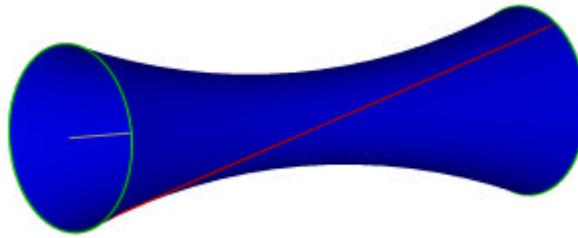
Der Schnitt dieser Tangentialebene („**Trimmung erstellen**“, Fläche modellieren, 1b, ) mit dem Schichtkreis  $k_2$  ergibt einen Punkt der Erzeugenden. Er wird mit dem Kehlkreispunkt  $(10,4,0)$  verbunden (und über den Kehlkreispunkt hinaus doppelt so lange verlängert), wodurch die  $e$ -Erzeugende festgelegt ist.

### b. Konstruktion des Hyperboloids

Nun wird das Hyperboloid erzeugt, indem die Gerade  $e$  die beiden Kreise  $k_1$  und  $k_2$  überstreicht. Bevor das Hyperboloid konstruiert wird, müssen die beiden Kreise mit „**Kurve neu erstellen**“ (B-Spline-Kurven, 1b, ) durch Annäherungen von B-Spline-Flächen dargestellt werden, da das Hyperboloid sonst später nicht getrimmt werden kann. (Die Toleranz gibt die Genauigkeit der Annäherung an.)

Das Hyperboloid wird dann mit Hilfe des Werkzeugs „**An zwei Leitlinien extrudieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) als B-Spline-Fläche konstruiert. Es müssen zuerst die beiden Leitlinien  $k_1$  und  $k_2$  und dann die Erzeugende  $e$  angeklickt werden.





### c. Konstruktion des Kegels und der Kreisplatte

Das Gebäude wird auf der Seite der negativen x-Achse mit einer Kreisscheibe („**Kreis platzieren**“, Hauptpalette, 4b, ) die  $k_1$  als Randkurve besitzt, und auf der anderen Seite mit einem Kegel („**Kegel platzieren**“, 3D-Haupt, 1a, ) abgeschlossen. Der Kegel besitzt die Randkurve des Hyperboloids als Basiskreis und eine Höhe von 2m. Diese wird in Richtung der positiven x-Achse aufgetragen.

### d. Vereinigung und Drehung des Objekts

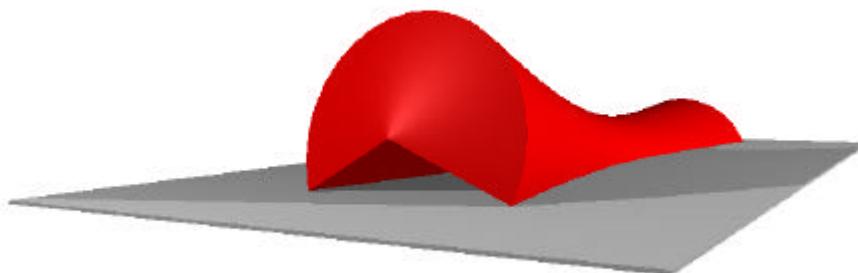
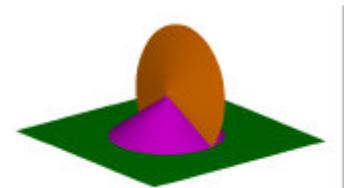
Die drei Teile Hyperboloid, Kreisscheibe und Kegel werden mit „**Flächen vereinigen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) miteinander vereinigt und dann mit „**Drehen**“ (Hauptpalette, 8b, ) um die y-Achse um  $-7,5^\circ$  gedreht.

### e. Der Boden

Auf der Höhe  $z=0$  wird nun der Boden mit einem Rechteck, das 40 m breit und 60 m lang ist, dargestellt („**Rechteck platzieren**“, Hauptpalette, 3b, ) sodass es zumindest das ganze Gebäude überragt. Nun wird das Hyperboloid mit Hilfe des Werkzeugs „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) mit dem Rechteck getrimmt, sodass der Teil über der xy-Ebene übrig bleibt.

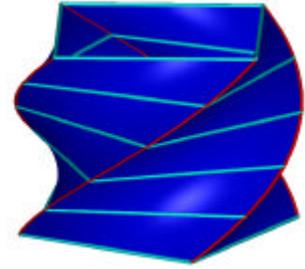
### f. Der Eingang

Der Eingangsausschnitt wird von jenen zwei Erzeugenden des Kegels begrenzt, die durch die Schnittpunkte S, T des Basiskreises des Kegels mit der Bodenplatte verlaufen. Dazu wird der Kegel mit einem Hilfskegel geschnitten. Er wird mit „**Kegel platzieren**“ (3D-Haupt, 1a, ) konstruiert: Er hat dieselbe Spitze wie der Kegel, eine z-parallele Achse und der Basiskreis verläuft durch S und T. Durch Trimmung („**Trimmung erstellen**“, Fläche modellieren, 1b, ) bleibt der gewünschte Teil des Eingangsbereiches übrig. Der Hilfskegel wird nach der Konstruktion wieder ausgeblendet.



## 4.9 Arbeitsblatt Drillbohrer

Der Drillbohrer besteht aus Teilen von vier geraden offenen Regelschraubflächen. Dazu wird ein Quadrat um jene Gerade verschraubt, die die Normalgerade durch den Mittelpunkt des Quadrats ist. Jede Seite des Quadrats überstreicht während der Verschraubung je eine Regelschraubfläche

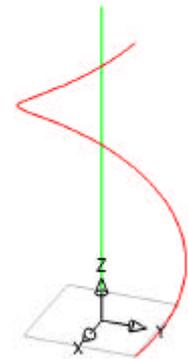


### a. Vorbereitungen für die Konstruktion der Schraubfläche

Für die Konstruktion einer Schraubfläche müssen Schraublinie, Profilkurve und Achse angegeben werden.

Die Achse soll bei dieser Schraubung die z-Achse sein, die mit Hilfe einer Strecke von (0,0,0) nach (0,0,30) dargestellt wird („Linie platzieren“, Hauptpalette, 2b, ).

Die Profilkurve ist beim Drillbohrer ein Quadrat, das in der xy-Ebene liegt. Der Mittelpunkt des Quadrats ist der Ursprung und (5,5,0) ist ein Eckpunkt („Rechteck platzieren“, Hauptpalette, 3b, ).



Der Anfangspunkt der nach rechts verschraubten Schraublinie ist der Eckpunkt des Quadrats (5,5,0). Die Achse ist die z-Achse, die Ganghöhe beträgt 10 cm und die Höhe 30 cm. Für die Schraublinie wird „Helix platzieren“ (B-Spline-Kurven, 1a, ) verwendet. Als Erstes muss der „Mittelpunkt“, also der Ursprung, angeklickt werden. Um den Radius zu definieren, wird der Punkt (5,5,0) angegeben. Die Achse wird definiert, indem der Endpunkt der konstruierten Strecke, also (0,0,30), ausgewählt wird. Der obere Radius soll denselben Wert wie der Untere haben.



### b. Konstruktion der Schraubfläche

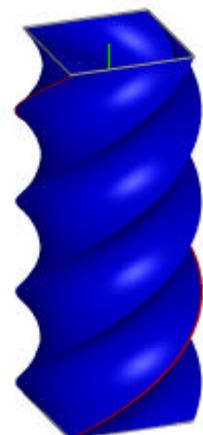
Für die Konstruktion der Schraubfläche wird das Werkzeug „Schraubenfläche konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a, ) verwendet. Um die Schraubfläche im Zeichenfenster anzugeben, wird zuerst die Schraublinie, dann das Quadrat und schließlich die Achse mit der linken Maustaste angeklickt.



### c. Trimmung der Schraubfläche mit einer Kugel

Das Ende des Bohrers wird mit Hilfe einer Kugel abgerundet. Dazu wird mit „Kugel platzieren“ (3D-Haupt, 1a, ) eine Kugelfläche konstruiert, die (0,0,10) als Mittelpunkt und einen Radius von 20 cm besitzt.

Nun können Kugel und Schraubfläche mit Hilfe des Werkzeugs „Trimmung erstellen“ (Fläche modellieren, 1b, ) getrimmt werden,



sodass von der Schraubfläche jener Teil erhalten bleibt, der näher zur xy-Ebene liegt, und von der Kugel jener Teil, der von der Schraubfläche eingeschlossen wird.



#### d. Fläche in Volumenelement umwandeln

Da eine Drillbohrerspindel in Wirklichkeit keine hohle Flächenhaut ist, muss das konstruierte Objekt noch in ein Volumenelement umgewandelt werden. Dazu wird das Werkzeug „**3D umwandeln**“ (Fläche modellieren, 1b, ) ausgewählt. Hat man im Dialogfenster angegeben, dass in ein „Volumenelement“ umgewandelt werden soll, muss die Fläche nur noch an einer beliebigen Stelle angeklickt werden.



#### e. Meridianschnitt konstruieren

Um den Meridianschnitt der Schraubfläche zu erhalten, wird das Objekt mit einem Rechteck in der yz-Ebene getrimmt („**Trimmung erstellen**“, Fläche modellieren, 1b, )



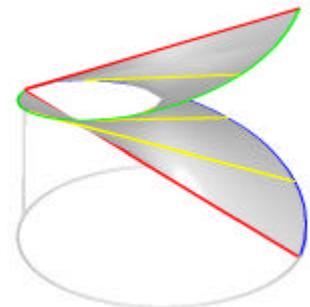
## 4.10 Arbeitsblatt Korkenziehergewinde

Um die Oberfläche eines Korkenziehergewindes zu erhalten, wird eine Gerade verschraubt, die die Schraubachse schneidet und nicht orthogonal dazu liegt. Die Fläche ist daher eine schiefe geschlossene Regelschraubfläche. Die Spitze am Ende des Gewindes wird erzeugt, indem mit einem Kegel abgeschnitten wird.



### a. Vorbereitungen für die Schraubflächenkonstruktion (1. Möglichkeit)

Als Profilkurve für die Regelflächenkonstruktion wird die Strecke („**Linie platzieren**“, Hauptpalette, 2b, ) zwischen den Punkten (0,5,0) und (0,-5,5) verwendet. (Als Einheit für dieses Beispiel werden mm gewählt.) Die Achse der Schraubung ist die z-Achse.



Die Angabewerte für die Schraublinie werden so gewählt, dass der untere Punkt der Ausgangsstrecke nach einer halben Umdrehung der Schraubung den oberen Punkt der Ausgangsstrecke durchläuft. Dieser Punkt beschreibt während der Schraubung die Randkante des Gewindes.

Für die Angabewerte der Schraublinie bedeutet das also: Der obere und untere Radius der Schraublinie beträgt 5 mm, die Ganghöhe 10 mm und die Höhe 20 mm. Die Achse der Schraublinie ist die z-Achse und ihr Anfangspunkt liegt im unteren Punkte der konstruierten Strecke. Sie wird mit dem Werkzeug „**Helix platzieren**“ (B-Spline-Kurven, 1a, ) erzeugt. Um die Schraublinie an der richtige Stelle in der Zeichnung zu positionieren, muss der Punkt (0,0,0), der Punkt (0,5,0) und zum Schluss ein beliebiger Punkt der positiven z-Achse angeklickt werden.



### b. Konstruktion der Regelschraubfläche

Die Regelschraubfläche wird nun mit „**Schraubenfläche konstruieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) erzeugt. Nun müssen die Schraublinie, die Profilstrecke und die Achsenstrecke nacheinander angeklickt werden.



### c. Fläche in ein Volumenelement umwandeln

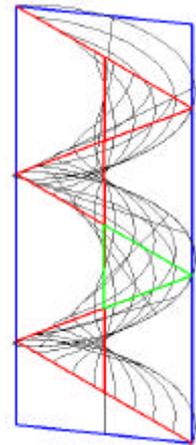
Nun muss die Fläche mit „**3D umwandeln**“ (Fläche modellieren, 1b, ) in ein Volumenelement umgewandelt werden.

Klickt man nun auf die bisher erzeugte Fläche, so wird man feststellen, dass MicroStation diese Fläche nicht umwandeln kann. Daher wird das Objekt auf eine zweite Art konstruiert.

### d. Vorbereitung für die Schraubflächenkonstruktion (2. Möglichkeit)

Als Profilkurve wird nun ein Dreieck verwendet. (Aus dem Meridianschnitt, der mit „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) an der konstruierten Schraubfläche

betrachtet werden kann, ist ersichtlich, dass dadurch dieselbe Fläche erzeugt wird). Nahe liegend wäre es, die Punkte  $(0,0,-2.5)$ ,  $(0,0,2.5)$  und  $(0,5,0)$  als Eckpunkte auszuwählen. Da es aber auch mit der senkrechten Strecke von  $(0,0,-2.5)$  nach  $(0,0,2.5)$  später Probleme gibt, wird sie um 0.1 mm in y-Richtung verschoben. Das Profildreieck, das mit „**SmartLine platzieren**“ (Hauptpalette, 2b, ) konstruiert wird, hat also die Eckpunkte  $(0,0.1,-2.5)$ ,  $(0,0.1,2.5)$  und  $(0,5,0)$ .



Für die Darstellung der Achse wird wieder eine Strecke auf der z-Achse konstruiert.

Die Schraublinie ist dieselbe wie die in (a) beschriebene.

### e. Konstruktion der Regelschraubfläche

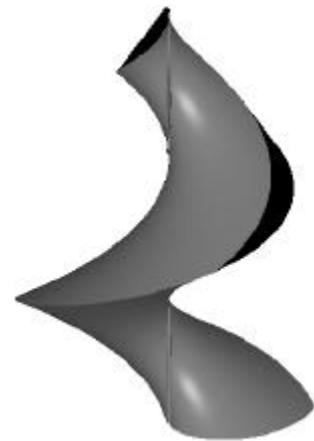
Die Konstruktion der Regelschraubfläche funktioniert wie schon in (b) beschrieben. Statt der Profilstrecke wird nun das Profildreieck verwendet.

### f. Konstruktion des Kegels und Trimmung mit der Schraubfläche

Das obere Ende der Schraubfläche wird mit einem Kegel, der mit „**Kegel platzieren**“ (3D-Haupt, 1a, ) konstruiert wird, getrimmt. Die Grundfläche des Kegels liegt in  $z=10$ , der Mittelpunkt des Kreises in der Grundfläche ist  $(0,0,10)$  und die Höhe beträgt 7,5 cm. Die Regelschraubfläche und der Kegel sollen nun mit „**Trimmung erstellen**“ (Fläche modellieren, 1b, ) so getrimmt werden, dass von beiden Flächen die gewünschten Teile erhalten bleiben, also der untere Teil der Regelschraubfläche und jener Teil des Kegels, der von der Regelschraubfläche eingeschlossen wird.

### g. Querschnitt (bzw. unteres Ende des Korkenziehers)

Der Korkenzieher wird am unteren Ende mit einem Rechteck („**Rechteck platzieren**“, Hauptpalette, 3b, ) in der Ebene  $z=2.5$  abgeschnitten („**Trimmung erstellen**“, Fläche modellieren, 1b, ) , wodurch der Querschnitt der Regelschraubfläche sichtbar wird.

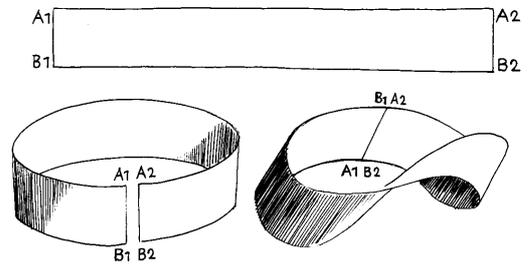


### h. Fläche in Volumenelement umwandeln

Nun wird die Fläche von der Regelschraubfläche, von einem Teil eines Kegels und einem Flächenstück begrenzt und kann mit „**3D umwandeln**“ (Fläche modellieren, 1b, ) in ein Volumen umgewandelt werden.

## 4.11 Arbeitsblatt Möbiusband

Um ein Möbiusband zu basteln, werden die beiden Breiten eines rechteckigen Papierstreifens so in sich verdreht (ein- oder mehrfach) und zusammengeklebt, dass  $A_1$  auf  $B_2$  trifft und  $B_1$  auf  $A_2$ . Das Band scheint nun nur noch **einen Rand** und **eine Seite** zu haben. Wird außerdem ein Möbiusband der Länge nach durchgeschnitten, so **zerfällt es nicht in zwei Ringe**, sondern bleibt ein zusammenhängendes Band.



Alle drei Eigenschaften sind in den Bildern Möbiusband I und Möbiusband II von M. C. Escher (<http://www.mcescher.com>) leicht zu erkennen.

In diesem Beispiel soll ein Möbiusband gezeichnet werden, das erzeugt wird, wenn man einen Papierstreifen einmal verwindet und dann an den Breitseiten zusammenklebt.

Das Möbiusband wird als spezielle Schraubfläche, nämlich mit einem Kreis als Schraublinie, konstruiert. Wird die Strecke jedoch während der Verschraubung um insgesamt  $180^\circ$  verdreht, was der einmaligen Verwindung eines Papierstreifens entspricht, so entsteht ein Möbiusband.

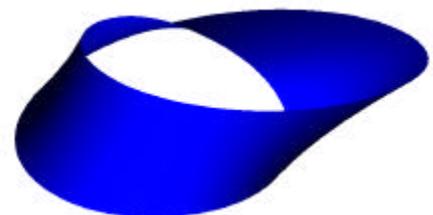
### a. Vorbereitung für die Schraubflächenkonstruktion

Als Mittenschraublinie wird ein Kreis mit „**Kreis platzieren**“ (Hauptpalette, 4b, ) in der xy-Ebene konstruiert, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt und der einen Radius von 10 cm besitzt. Die Profilkurve ist eine Strecke („**Linie platzieren**“, Hauptpalette, 2b, ) mit Anfangspunkt (10,0,5) und Endpunkt (10,0,-5) (Achtung: bei der Konstruktion der Strecke muss AccuDraw auf „Side“ gedreht sein, womit die Bezugsebene für die Drehung der Strecke in (b) festgelegt ist.) Die Schraubachse der Schraubfläche ist die z-Achse, die mit einer Strecke dargestellt wird.

### b. Konstruktion des Möbiusbandes

Das Möbiusband wird nun als Schraubfläche mit „**Schraubfläche konstruieren**“ (Fläche modellieren, 1a, ) erzeugt. Dazu müssen Kreis, Strecke und Schraubachse angegeben werden. Während der Schraubbewegung soll die Strecke in der Normalebene des Kreises mit konstanter Geschwindigkeit um  $180^\circ$  gedreht werden, was dem einmaligen Verwinden des Papierstreifens entspricht.

Schließlich müssen die Schraublinie (Helixkurve), die Strecke (Profilkurve) und zuletzt die Strecke, die die Achse darstellt, angeklickt werden.



# Literaturverzeichnis

- Brauner H. (1986), *Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie*, Wien, Springer Verlag
- Brauner H. und Kicking W. (1982 a), *Baugeometrie, Band 1*, Frankfurt am Main, Bauverlag
- Brauner H. und Kicking W. (1982 b), *Baugeometrie, Band 2*, Frankfurt am Main, Bauverlag
- Ernst B. (1994), *Der Zauberspiegel des M. C. Escher*, Köln, Taschen
- Escher M. C. (1998), *Graphiken und Zeichnungen*, Köln, Taschen
- Faber C. (1962), *Candela und seine Schalen*, London, Verlag Georg D. W. Callwey
- Farin G. (1990), *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Arizona
- Grader R. (2004), *Konstruktive Behandlung von Schraub- und Spiralflächen mit CAD-Software anhand ausgewählter Beispiele für den Schulunterricht*, Wien, TU, in Arbeit
- Pottmann H. (1997), *Skriptum Darstellende Geometrie und Perspektive*, Wien, TU
- Rath W. (2001), *Skriptum Geometrie für Informatiker*, Wien, TU
- Rühle H. (1969 a), *Räumliche Dachtragwerke Konstruktionen und Ausführung*, Band 1, Berlin, VEB Verlag für Bauwesen
- Rühle H. (1969 b), *Räumliche Dachtragwerke Konstruktionen und Ausführung*, Band 2, Berlin, VEB Verlag für Bauwesen
- Stachel H. (1998), *Skriptum Darstellende Geometrie 1*, Wien, TU
- Wunderlich W. (1966), *Darstellende Geometrie 1*, Mannheim, Hochschultaschenbuch-Verlag
- Wunderlich W. (1967), *Darstellende Geometrie 2*, Mannheim, Hochschultaschenbuch-Verlag
- *Mathematische Grundlagen von Freiformflaechen:*  
<http://www.brg4.ac.at/acg/unterlagen/>
- *MicroStation Versoin 8.1-Hilfe* : <http://docs.bentley.com>
- *Graffiti*: [http://olli.informatik.uni-oldenburg.de/Graffiti3/graffiti/flow1/page5.html#Ref\\_ID13](http://olli.informatik.uni-oldenburg.de/Graffiti3/graffiti/flow1/page5.html#Ref_ID13)