Falten und Verebnen polyedrischer Figuren

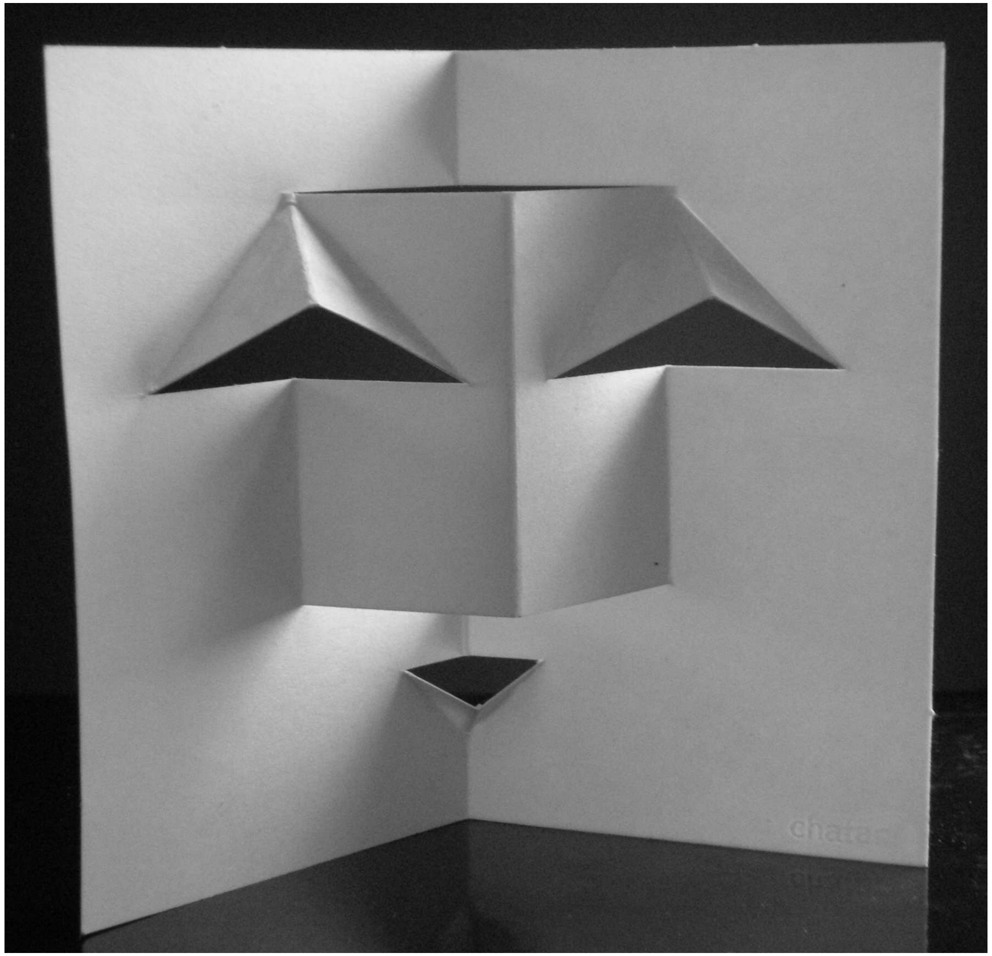
Hellmuth Stachel, Technische Universität Wien

Technische Universität Wien
Vienna University of Technology

stachel@dmg.tuwien.ac.at — http://www.geometrie.tuwien.ac.at/stachel

Inhaltsübersicht

1. Ein Beispiel aus Japan

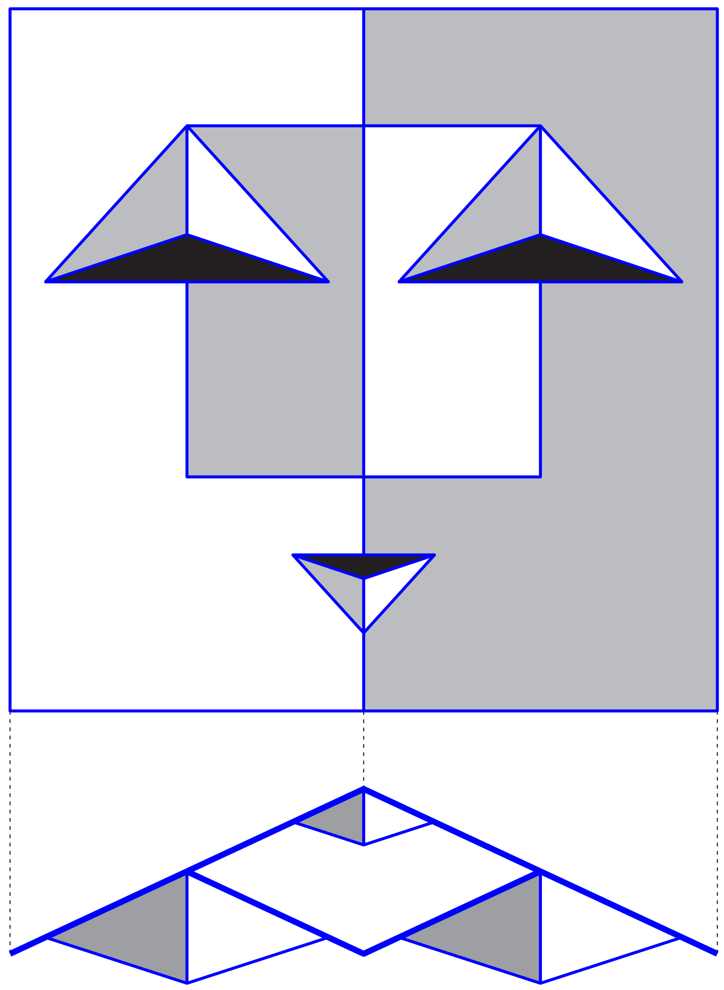


. . . ein Souvenir von
Prof. Emiko TSUTSUMI

ein japanischer 3D-smiley

1. Ein Beispiel aus Japan

das Ergebnis in Grund- und Aufriss

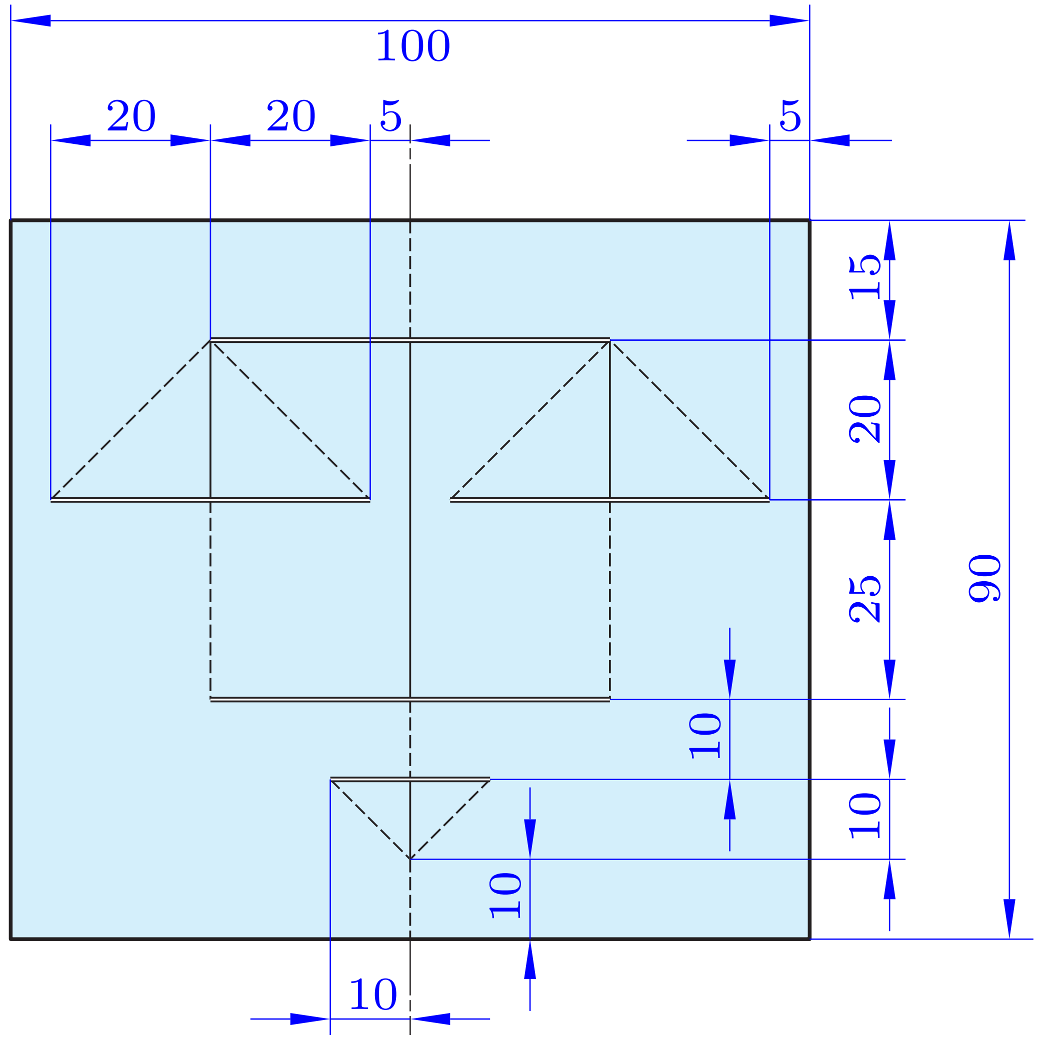


ein japanischer 3D-Smiley

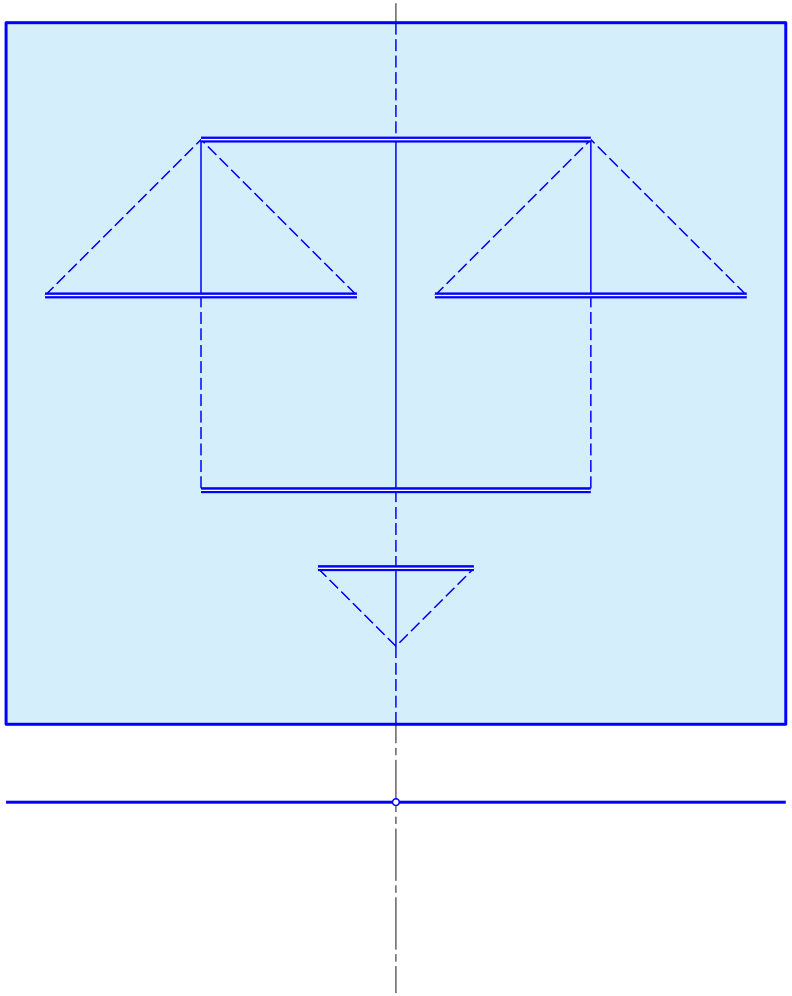
Abmessungen:

Faltlinien: [Täler strichliert
Grate durchgezogen

Doppellinien bedeuten Schnitte

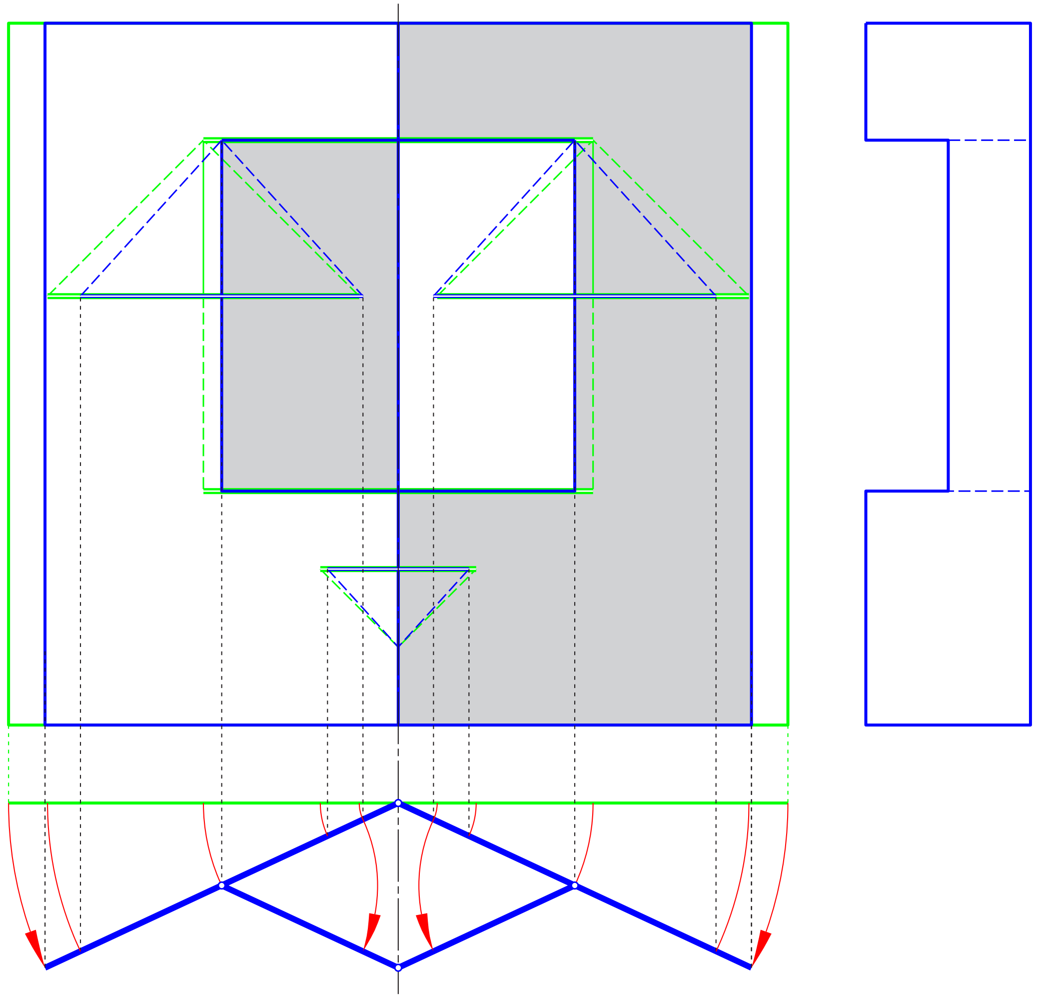


1. Ein Beispiel aus Japan



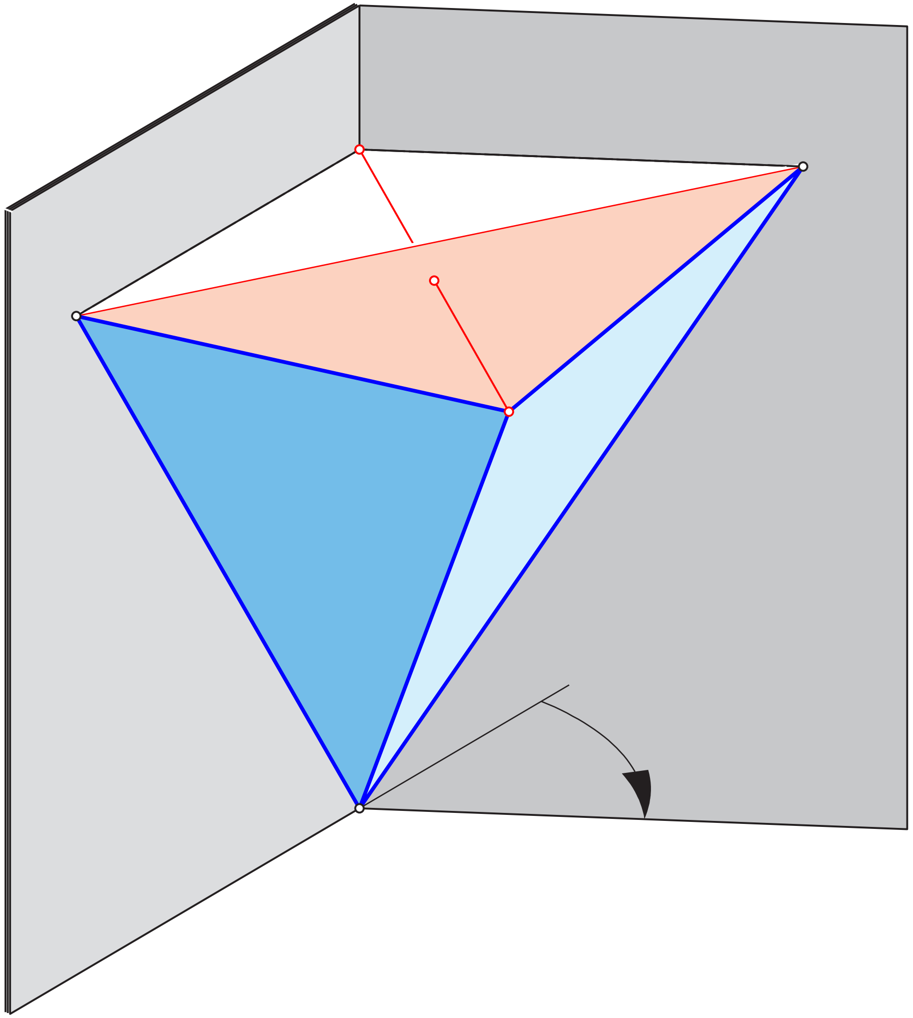
wir beginnen mit der flachgedrückten Figur . . .

1. Ein Beispiel aus Japan



nun ist die Figur geknickt, die ‘Nase’ nach vor gewölbt . . .

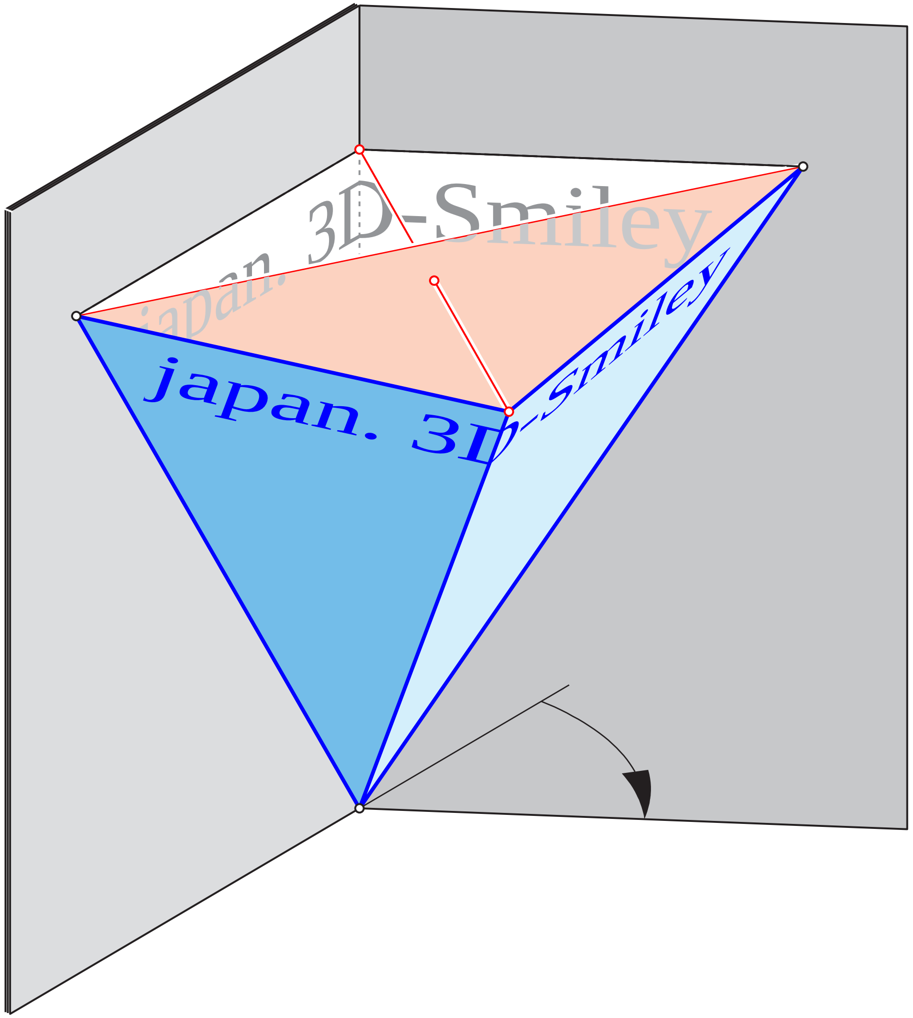
1. Ein Beispiel aus Japan



Was passiert beim Vorstülpen ?

Es wird gespiegelt!

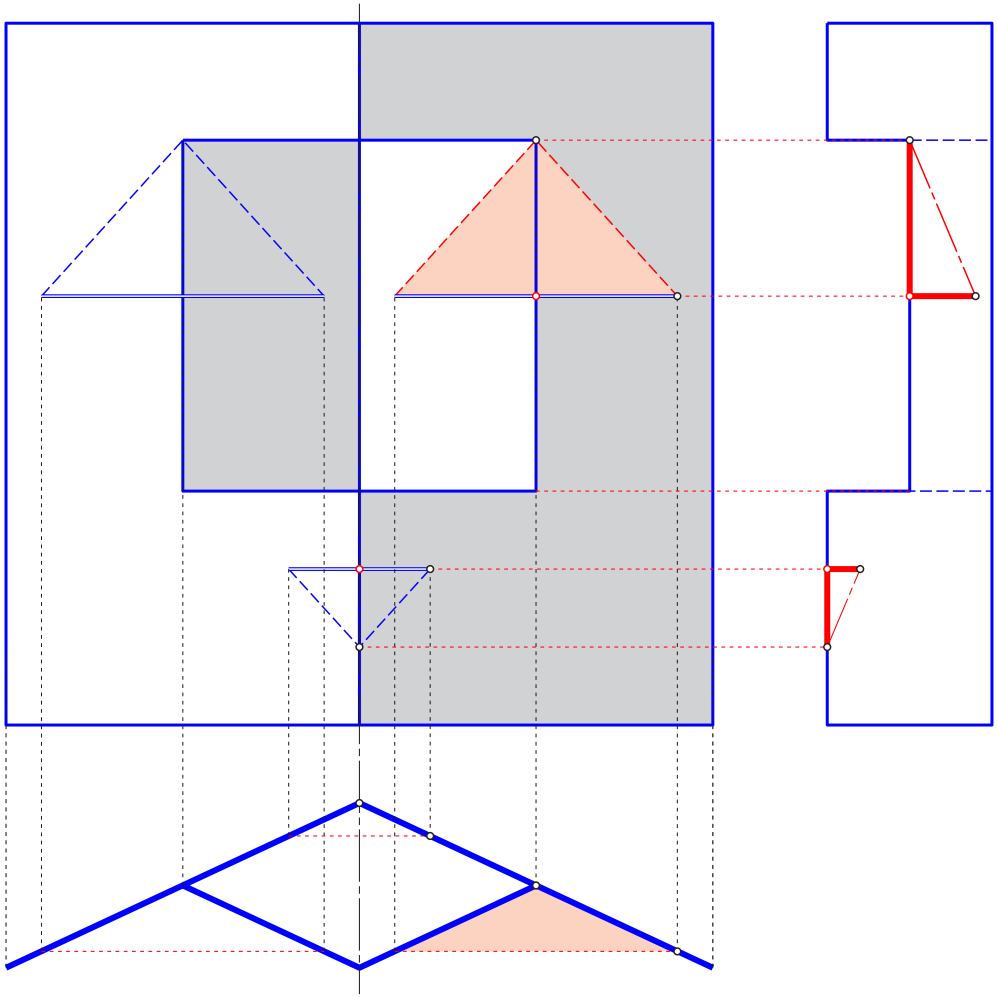
1. Ein Beispiel aus Japan



Eigentlich wird nur eine Kante gespiegelt.

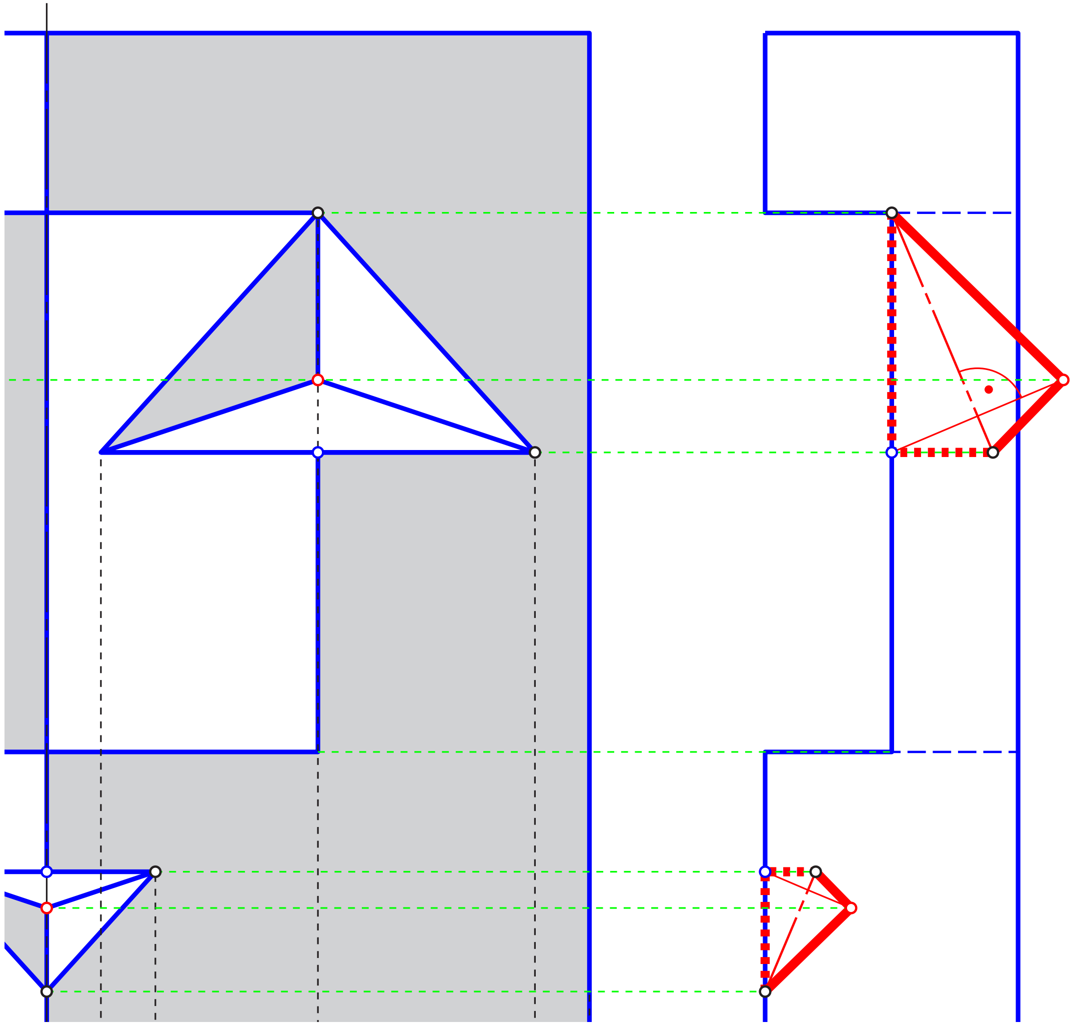
Würden die Ebenen gespiegelt, müsste die Schrift spiegelbildlich erscheinen!

1. Ein Beispiel aus Japan



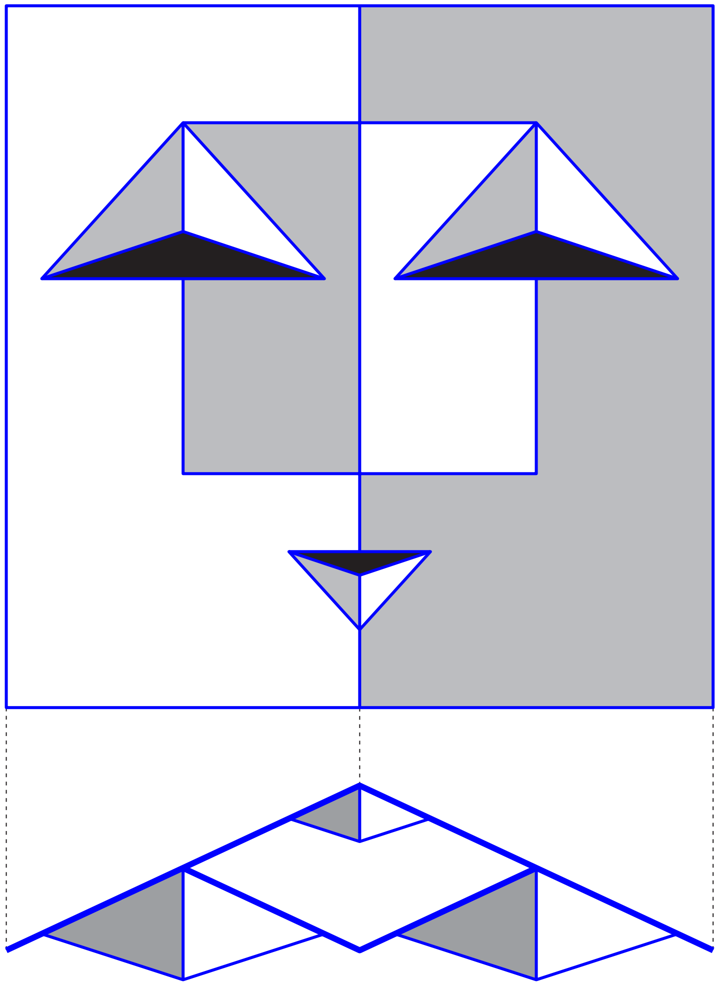
wir identifizieren die Spiegelungsebene und die zu spiegelnde Teilfigur . . .

1. Ein Beispiel aus Japan



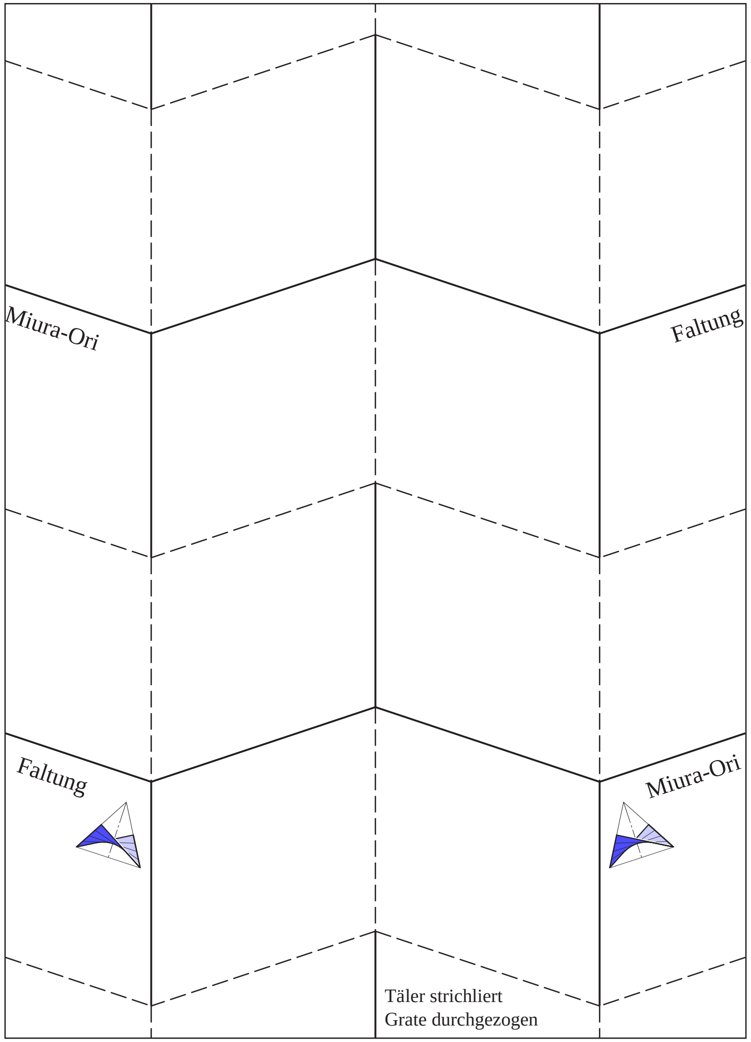
es wird gespiegelt . . .

1. Ein Beispiel aus Japan



die Spiegelungen sind durchgeführt,
beide Augen und der Mund
sind geöffnet

2. Eine japanische Falttechnik



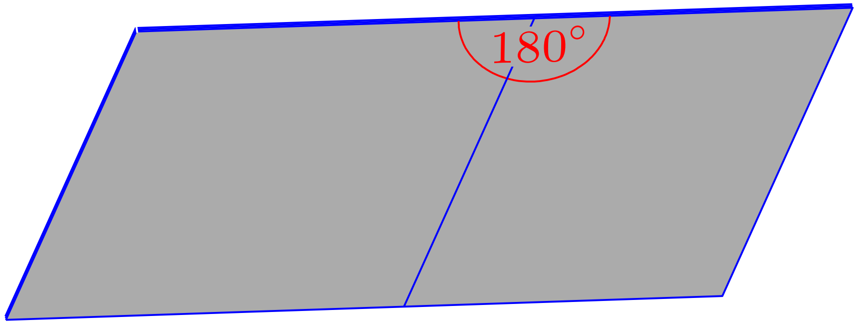
die Miura-Ori-Faltung

Faltlinien: [Täler strichliert
Grate durchgezogen

Diese nach Prof. Koryo Miura, The Tokyo University, benannte Art der Faltung wird z.B. bei Satelliten zum Falten der Sonnenkollektoren verwendet. Denn damit lassen sich diese allein durch einfaches Auseinanderziehen vollständig öffnen.

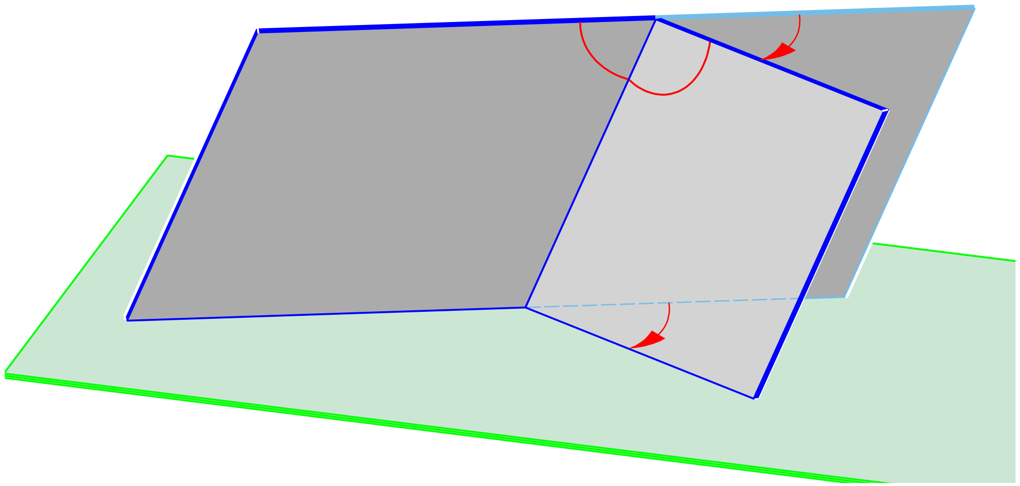
http://www.miura-pro.com

2. Eine japanische Falttechnik



wir beginnen mit zwei längs einer Kante zusammenhängenden Parallelogrammen . . .

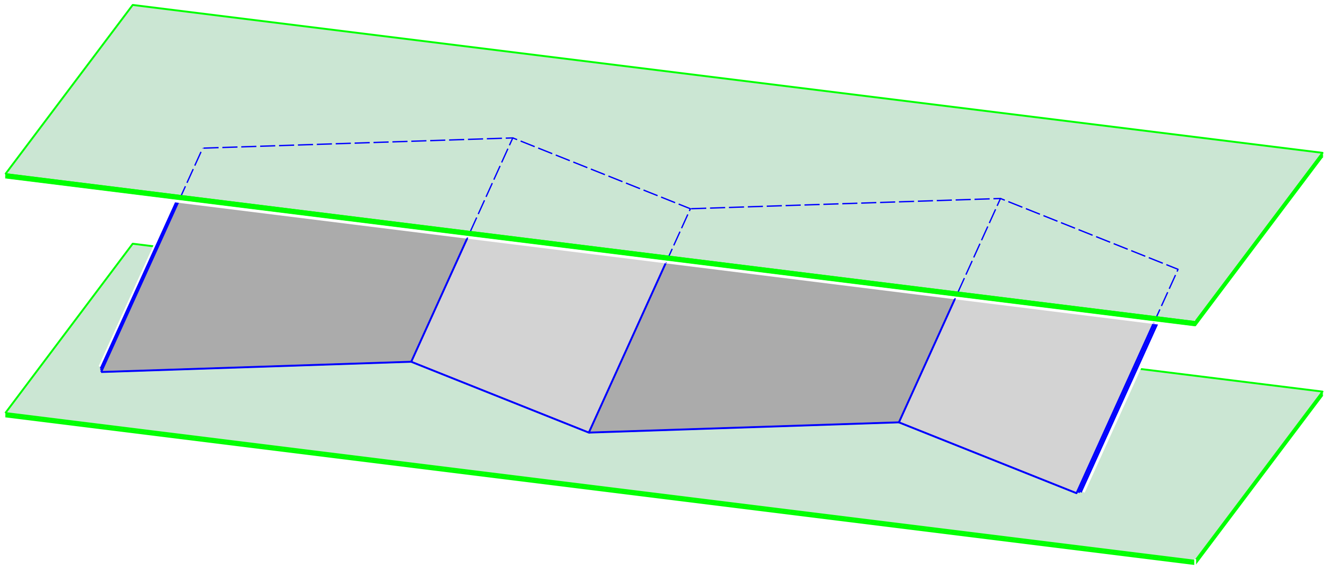
2. Eine japanische Falttechnik



und drehen das rechte Parallelogramm gegenüber dem linken

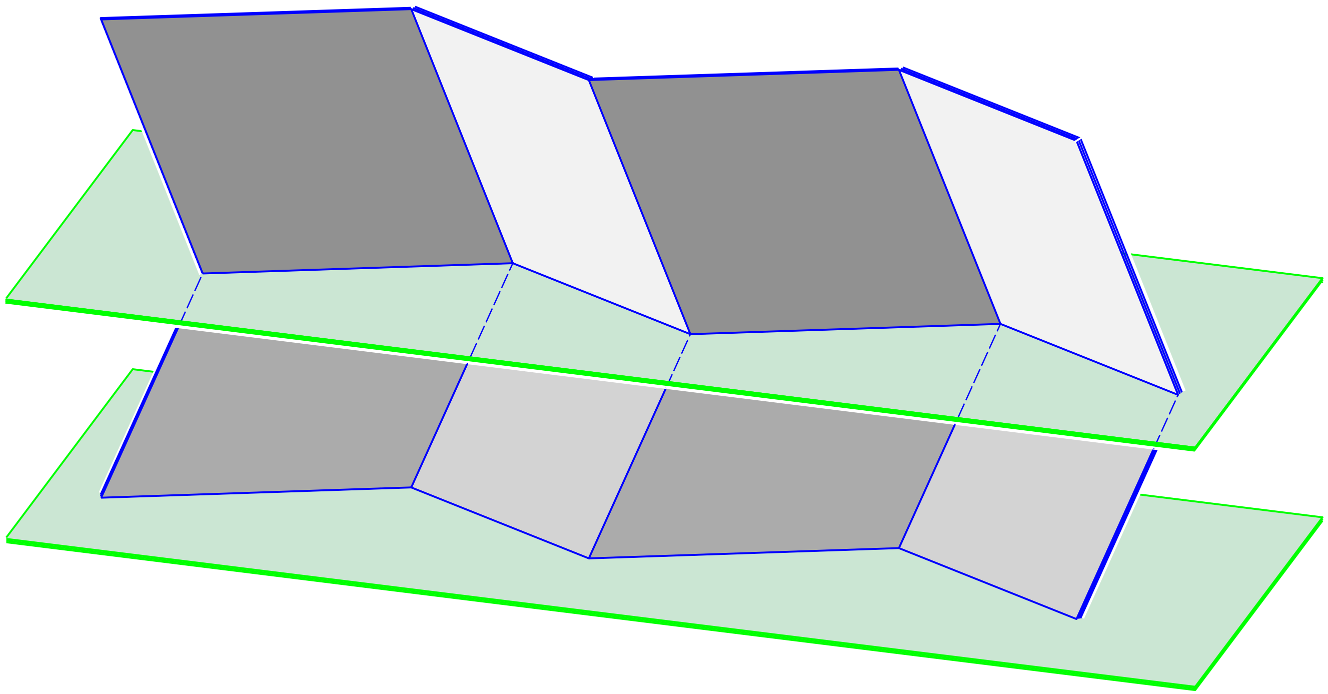
die unteren Seiten spannen eine Ebene auf, die oberen eine Parallelebene.

2. Eine japanische Falttechnik



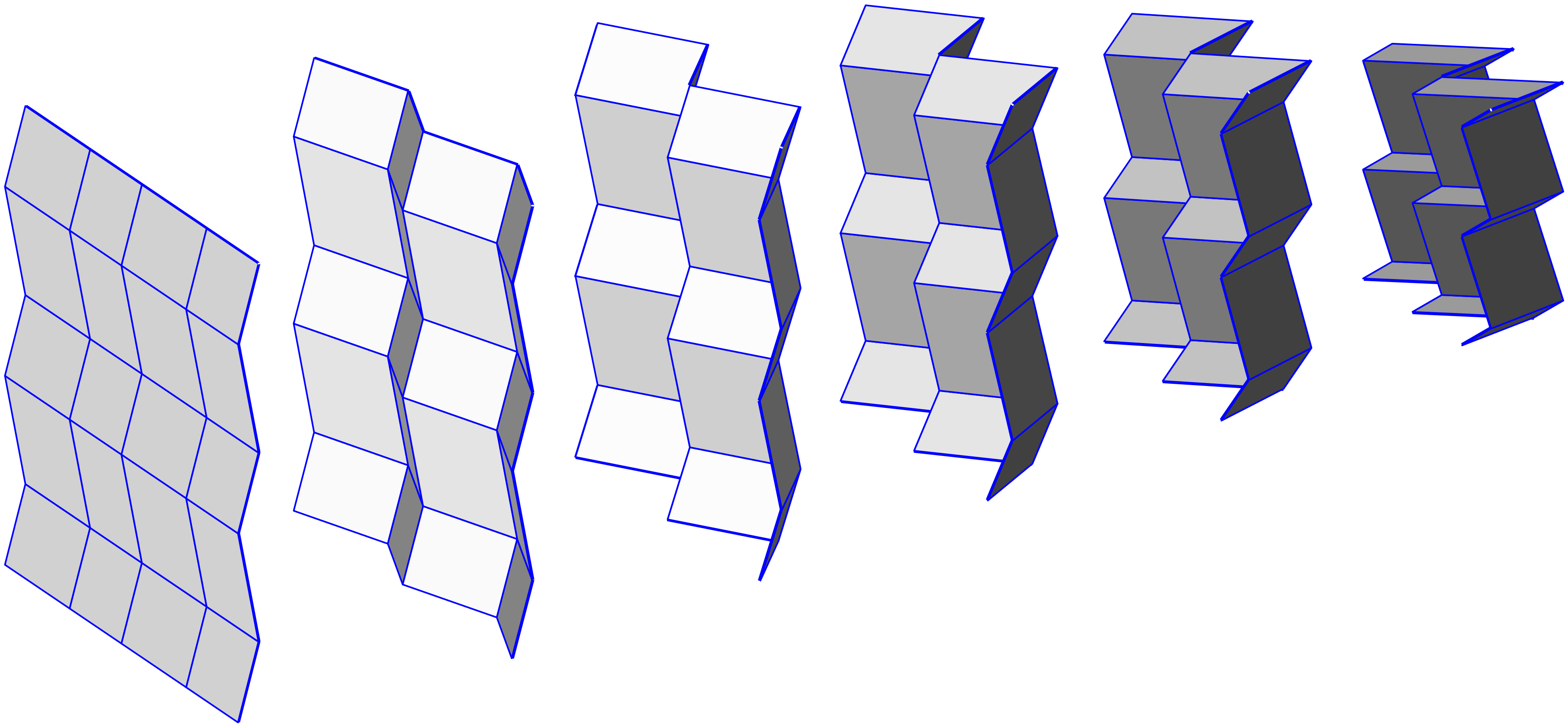
durch Parallelverschiebung entsteht ein ganzer Streifen von Parallelogrammen zwischen den Parallelebenen . . .

2. Eine japanische Falttechnik



durch Spiegelung an der oberen Ebene entsteht ein zweiter Streifen von Parallelogrammen — und wir iterieren . . .

2. Eine japanische Falttechnik



3. Verlängern des Umfanges durch Falten ?

V.I. Arnold: *Arnold's problems.*
Phasis 2000; engl. Übersetzung in Springer-Phasis 2004:

Can a rumpled rouble have a bigger perimeter ? . . . erstmals 1956 gestellt

---

I.V. Yaschenko: *Make your dollar bigger now!!!* Math. Intelligencer **20** (2), 38–40 (1998)

Positive Antwort in
A.S. Tarasov: *Solving Arnold's problem on "rumpled rouble".* Chebyshevskii sbornik **5**, 1(9), 174–187 (2004)

3. Verlängern des Umfanges durch Falten ?

Nikolai Dolbilin, Mathematical Steklov Institute (Moscow):
Vortrag am Erwin Schrödinger Institut, April 2006

On the unfolding of a rectangle enlarging perimeter.

Gegeben: Rechteck aus Papier.
Gesucht: *Kann es derart wiederholt gefaltet werden, dass der Umfang der Faltfigur länger ist als zu Beginn ?*

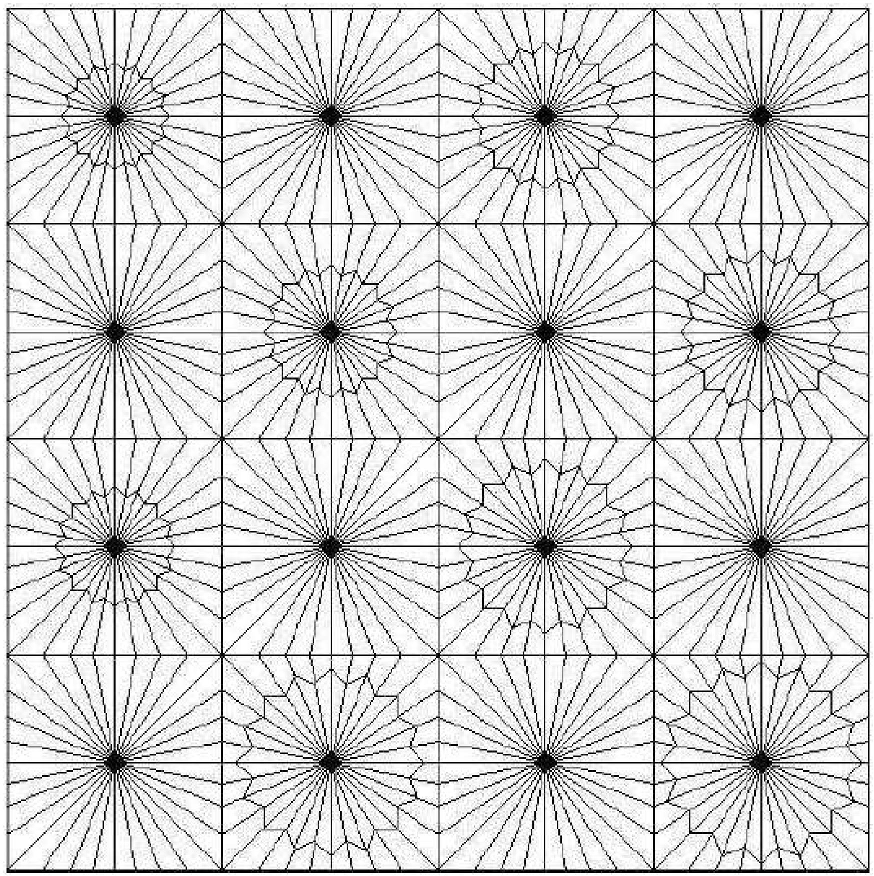
3. Verlängern des Umfanges durch Falten ?

In unserem Fall ist das Rechteck ein Quadrat der Seitenlänge 1.

Dieses wird zerlegt in N^2 Teilquadrate, wobei N gerade sein muss.

Jedes Teilquadrat wird in K Sektoren unterteilt, $K \equiv 0 \pmod 8$.

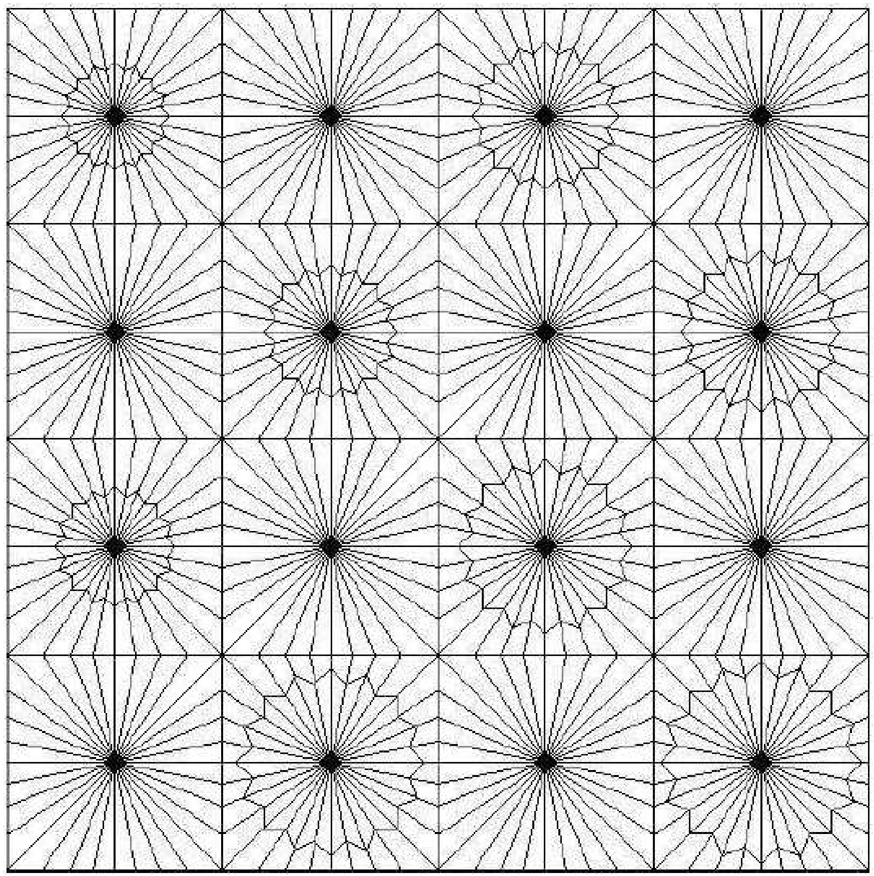
Die folgenden Bilder stammen mit freundlicher Genehmigung von N. Dolbilin und A.S. Tarasov.



3. Verlängern des Umfanges durch Falten ?

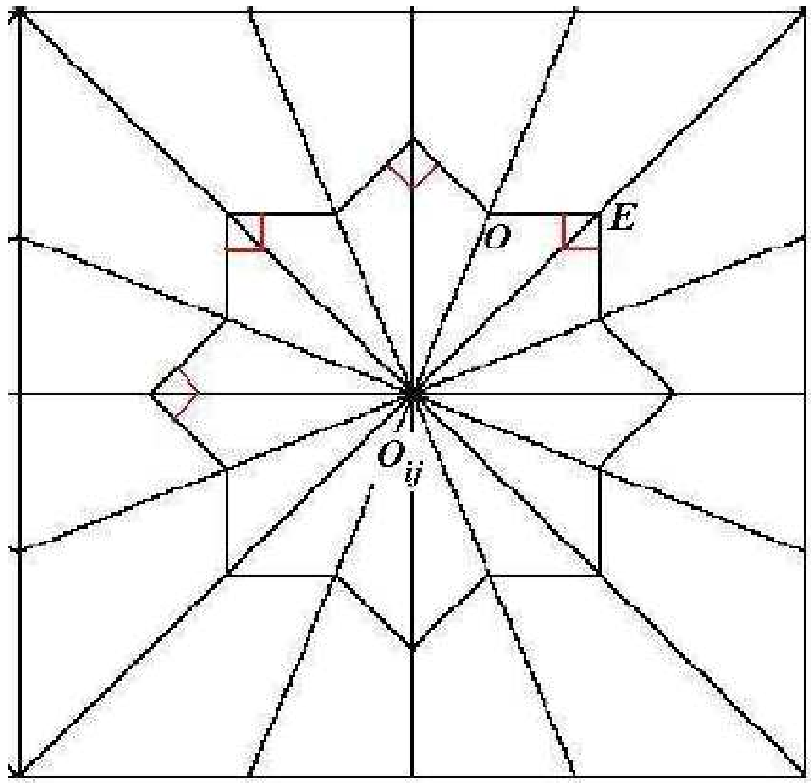
Wie bei einem Schachbrett wird in jedem zweiten Teilquadrat innen eine ‘Blume’ gezeichnet.

Die Radien dieser Blume variieren nach einer gewissen Gesetzmäßigkeit.



3. Verlängern des Umfanges durch Falten ?

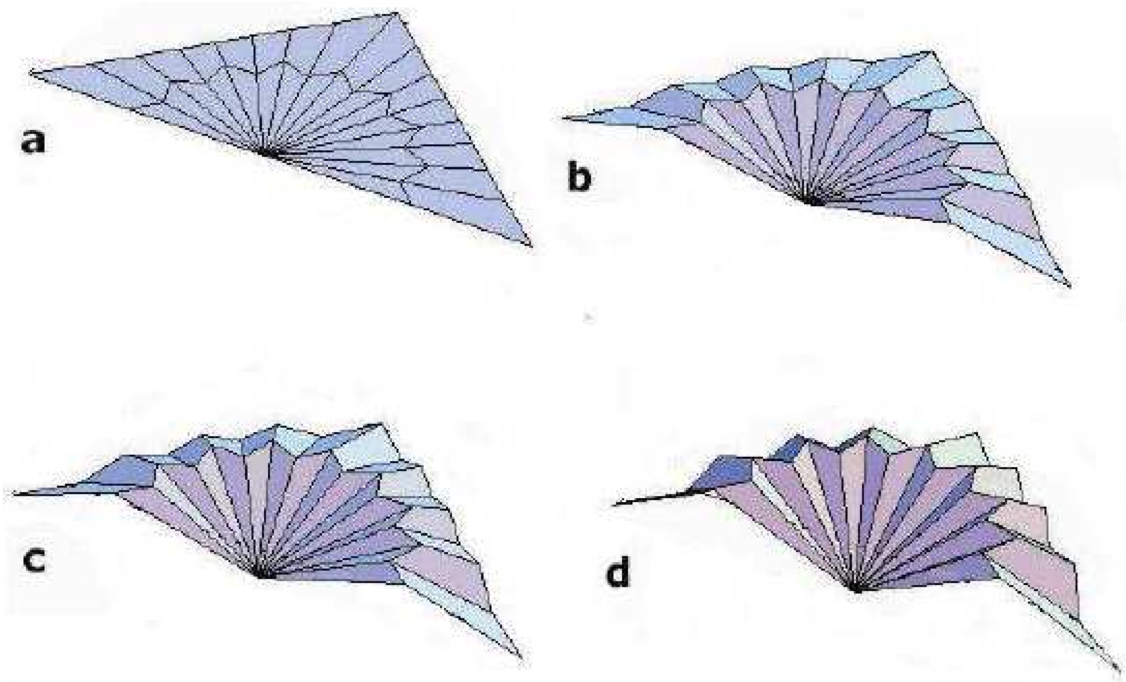
Rechts wird die genau Form der Blumen gezeigt.



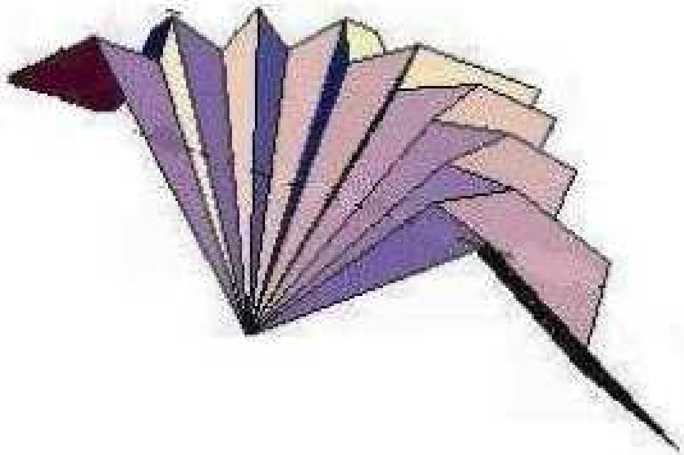
3. Verlängern des Umfanges durch Falten ?

Jedes Teilquadrat wird fächerartig zusammengelegt.

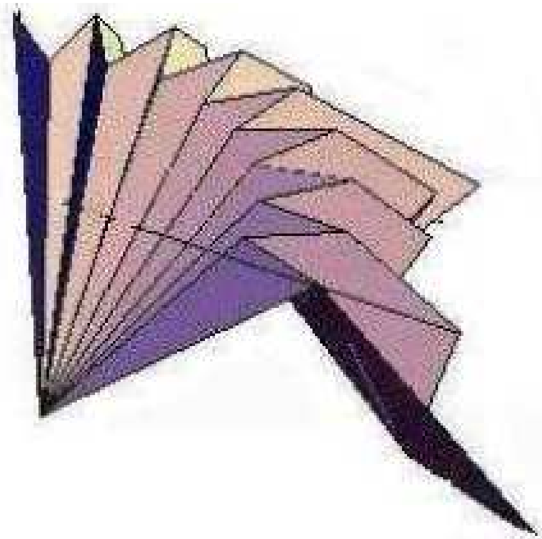
Der äußere Teil der Blume wird umgestülpt (Spiegelung!).



3. Verlängern des Umfanges durch Falten ?



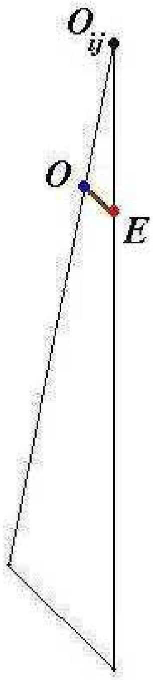
f

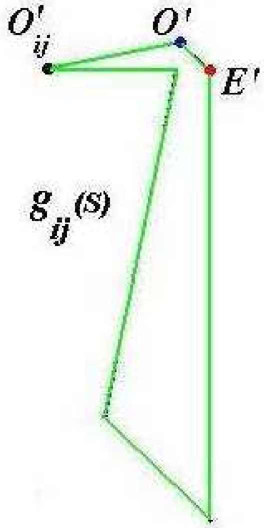


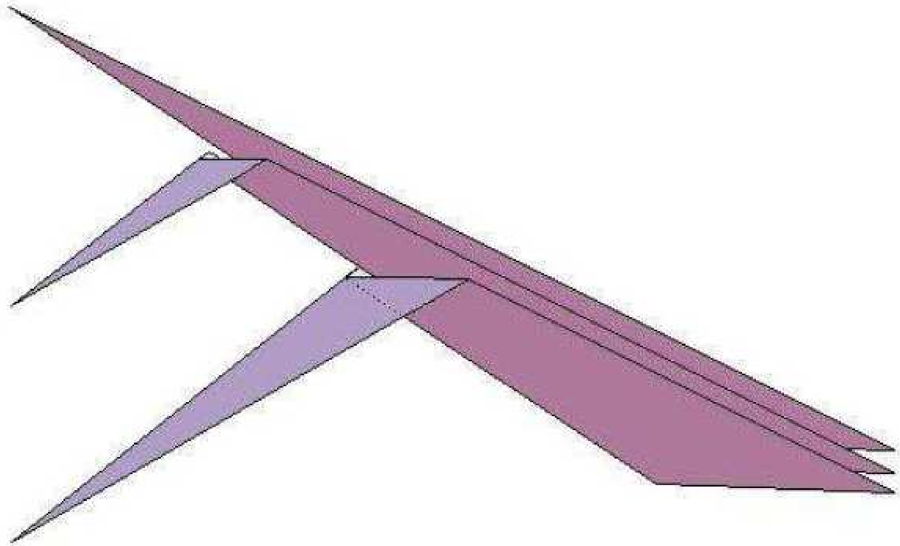
g

3. Verlängern des Umfanges durch Falten ?

Es entsteht eine ‘Ente mit Schnabel’:



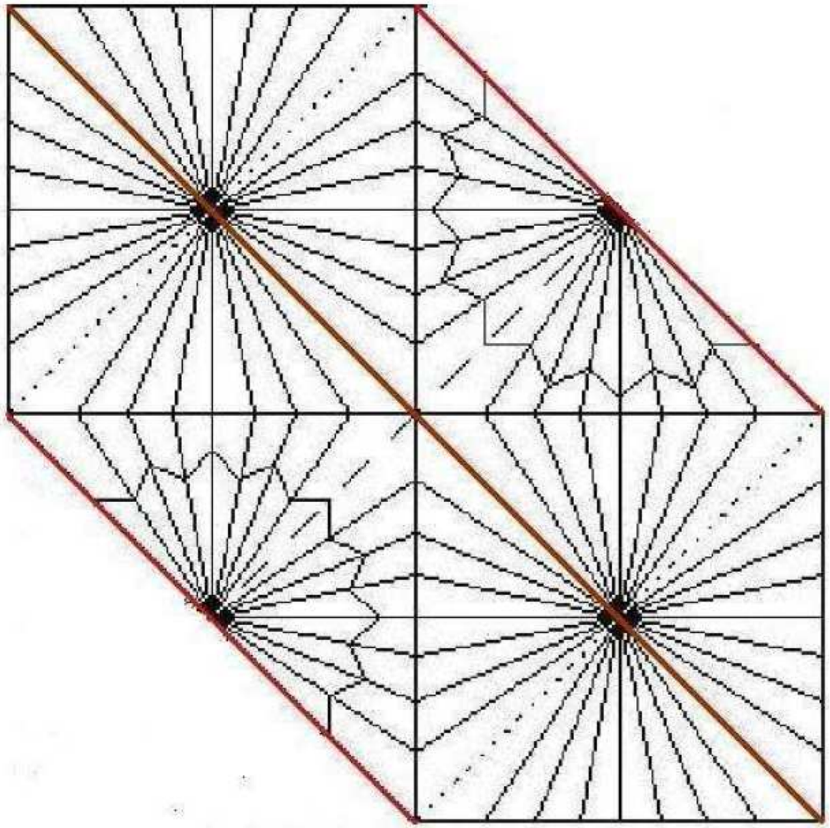




3. Verlängern des Umfanges durch Falten ?

Nun wird das gesamte Einheitsquadrat gefaltet:

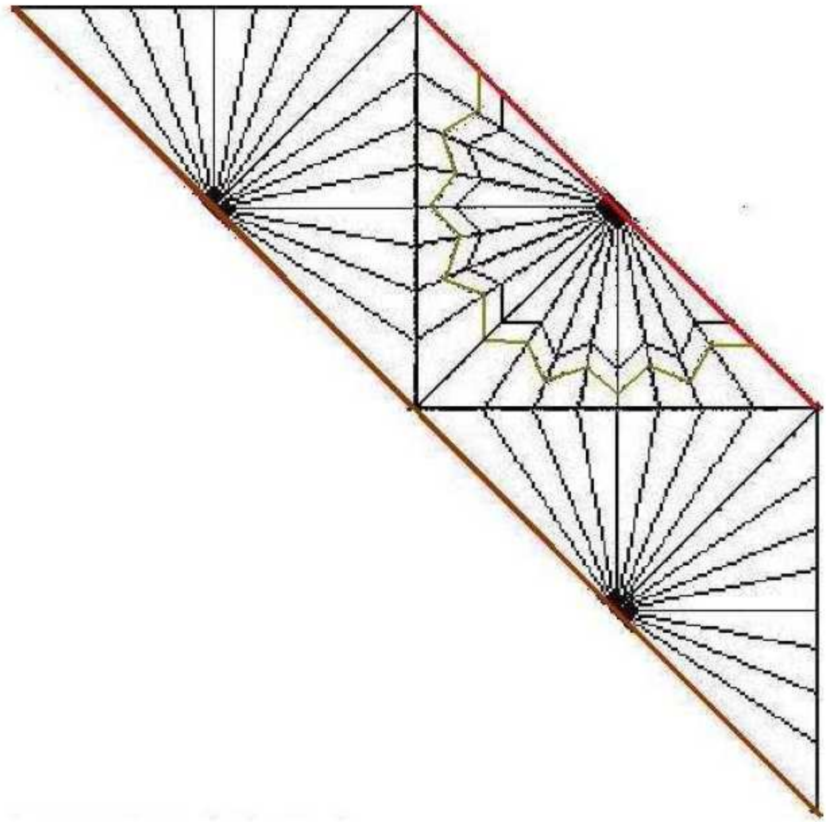
Wir biegen nach Diagonalen (z.B. rechts bei $N = 2$):



3. Verlängern des Umfanges durch Falten ?

Nun wird das gesamte Einheitsquadrat gefaltet:

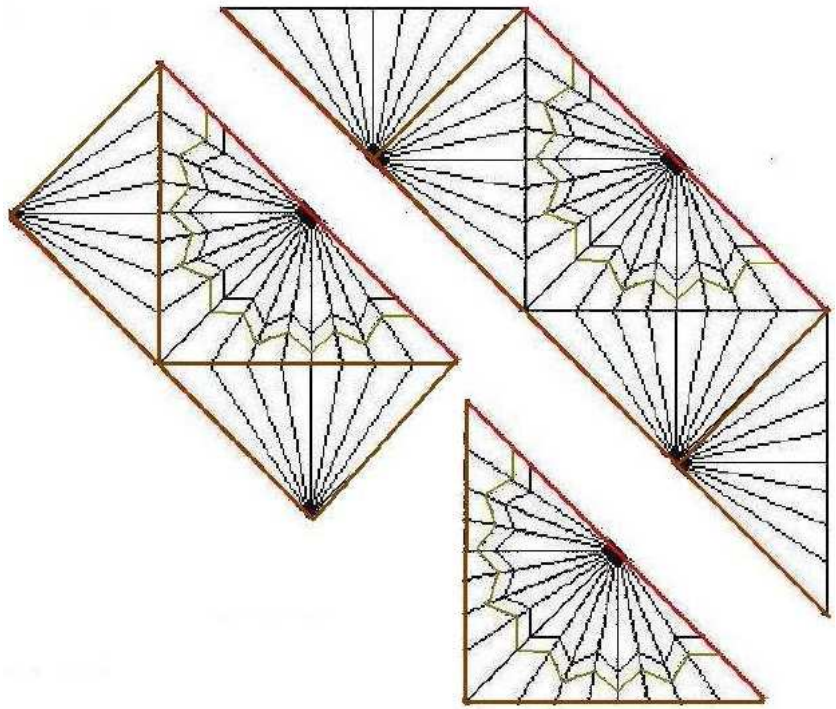
Wir biegen nach Diagonalen (z.B. rechts bei $N = 2$):



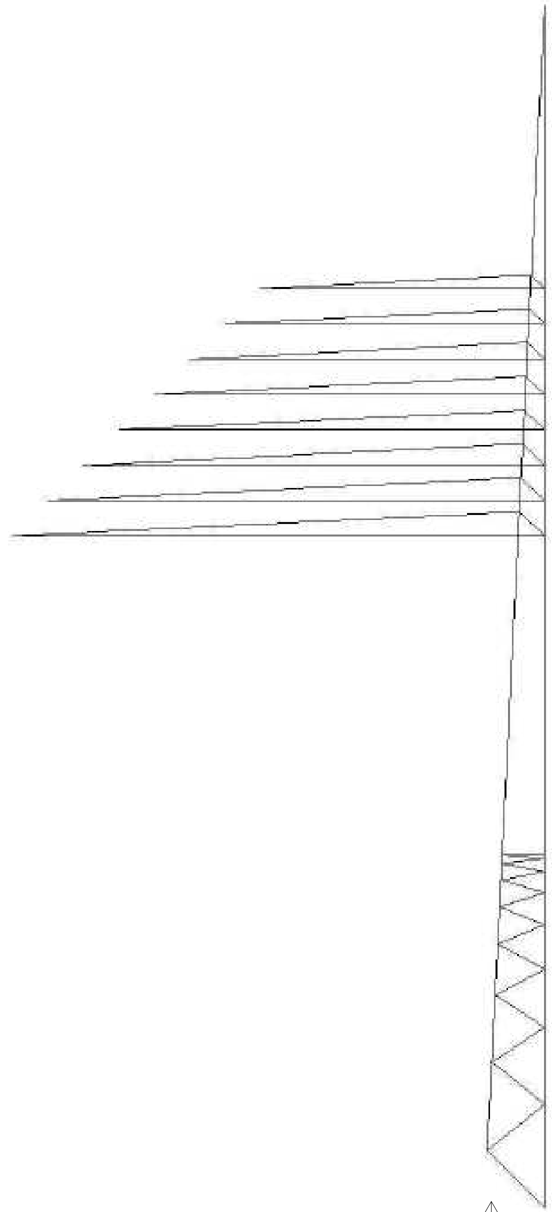
3. Verlängern des Umfanges durch Falten ?

Nun wird das gesamte Einheitsquadrat gefaltet, so dass die größte Blume innen, die kleinste außen ist:

Wir biegen nach Diagonalen (z.B. rechts bei $N = 2$):



Nun stülpen wir jeden zweiten Sektor um, so dass die $N^2/2$ Entenschnäbel einen ‘Baum’ bilden.

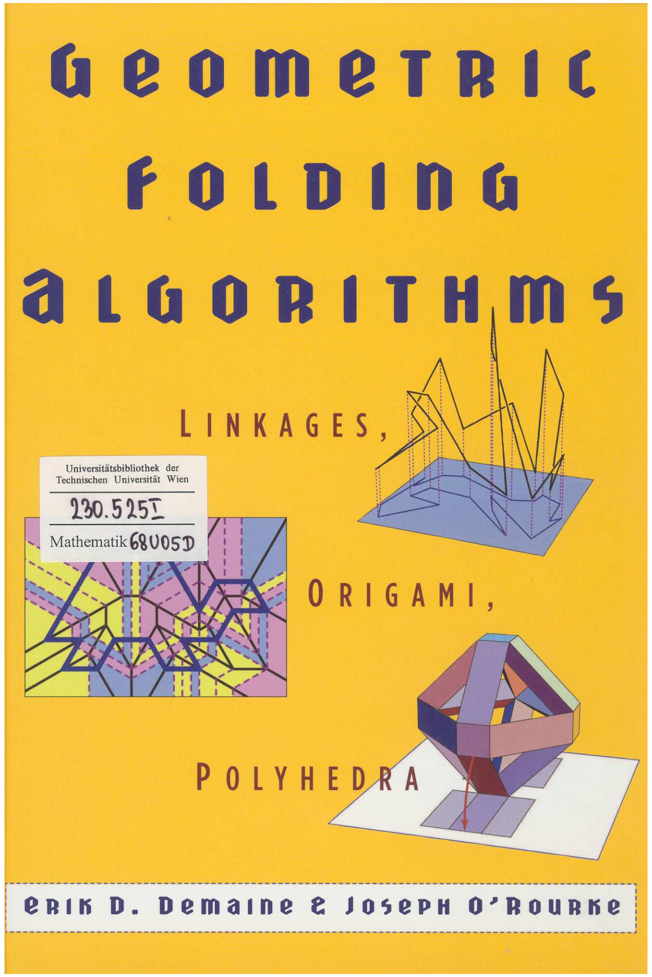


Behauptung: Bei $K \geq 30N^2$ (N Teilungszahl für Quadrate, K Teilungszahl für Sektoren) wird der Umfang des Baumes größer als $N/4$.

Lösung bei $N/4 \geq 4$, also bei

$$N \geq 16 \quad \text{und} \quad K \geq 16^2 \cdot 30 = 7680!$$

4. Geodätische auf Polyedern

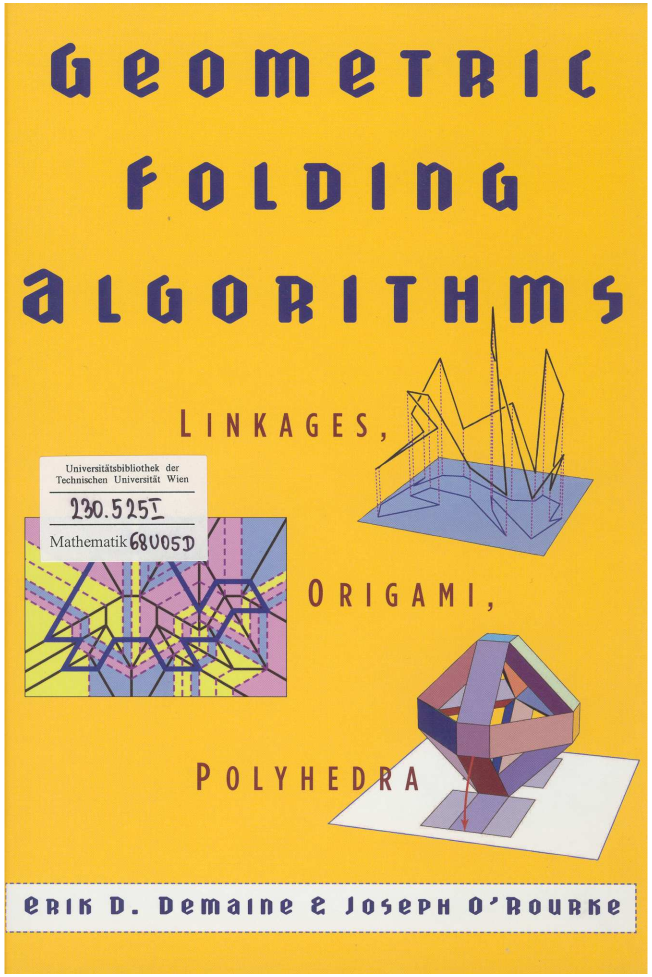


E.D. Demaine, J. O'Rourke:

Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedra

Cambridge University Press, 2007

4. Geodätische auf Polyedern



Wir nennen die Abwicklung eines Polyedern ein Netz, wenn es durch Zerschneiden der Polyederfläche nach Kanten und dem Ausbreiten in eine Ebene durch Verbiegen längs der Polyederkanten entsteht. Demnach erwarten man vom 'Netz', dass es

1. eine Vereinigung der Seitenflächen,
2. einfach zusammenhängend und
3. frei von Überlappungen ist.

4. Geodätische auf Polyedern

Resultate:

Nicht jedes Polyeder besitzt ein Netz.

Offene Fragen:

Besitzt jedes konvexe Polyeder eine 'Netz'?

Man kann aber auch die Forderung 1. fallen lassen, indem man beliebige geradlinige Schnitte quer durch die Seitenflächen zulässt. Für derartige 'nicht-kantentreue' Verebnungen gilt:

4. Geodätische auf Polyedern

Resultate:

Jedes konvexe Polyeder besitzt ein nicht-kantentreues Netz.

Beweis: Dazu zerschneidet man das Polyeder ähnlich wie eine Orangenschale von einem Punkt aus auf radiale Weise und breitet diese Streifen dann sternförmig in die Ebene aus. Damit vermeidet man Überlappungen.

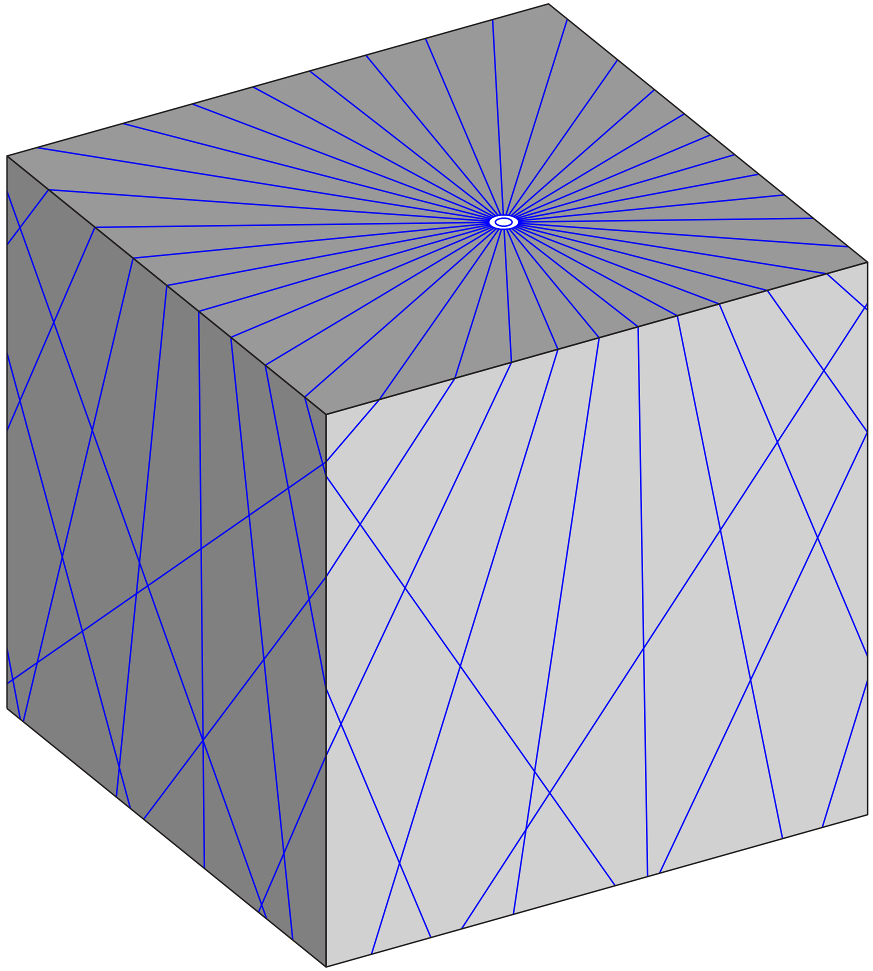
Offene Fragen:

Besitzt jedes nicht-konvexe Polyeder ein nicht-kantentreues 'Netz'?

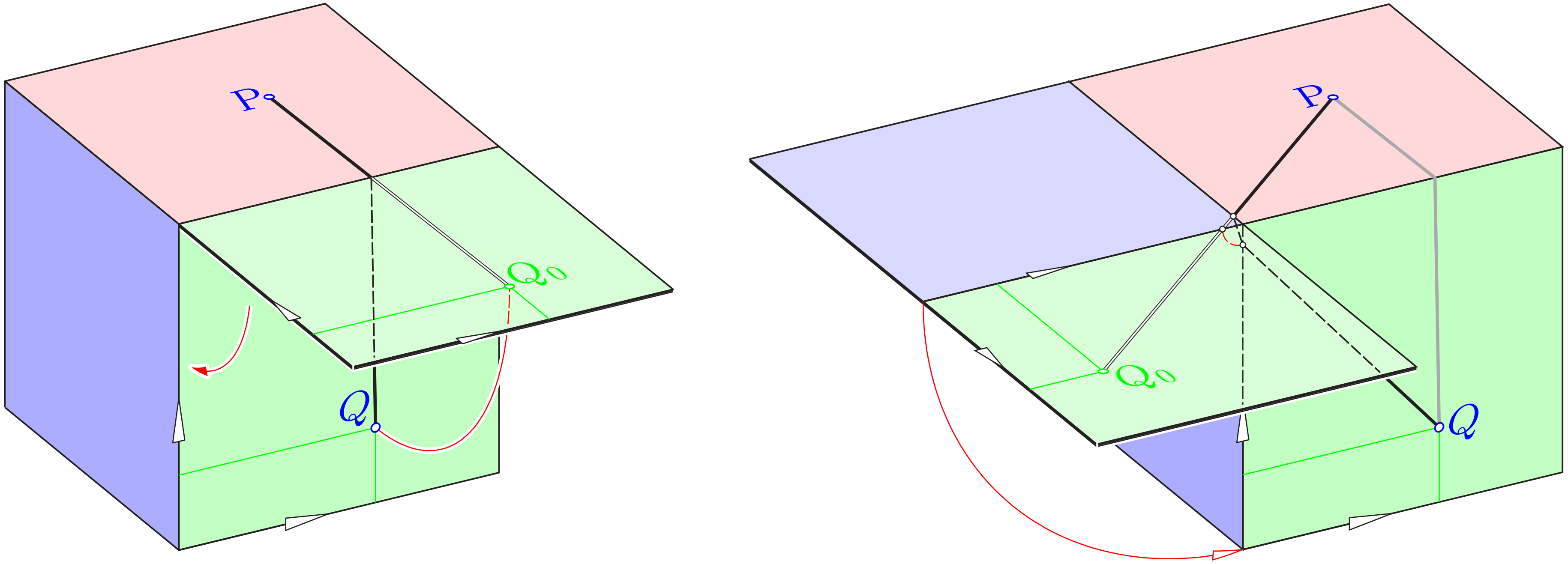
4. Geodätische auf Polyedern

Geodätische Linien auf dem Polyeder entstehen durch Aufwickeln von Geraden und geben den Verlauf eines über das Polyeder gespannten Fadens an.

Rechts der Verlauf einiger Geodätischer auf einem Würfel.

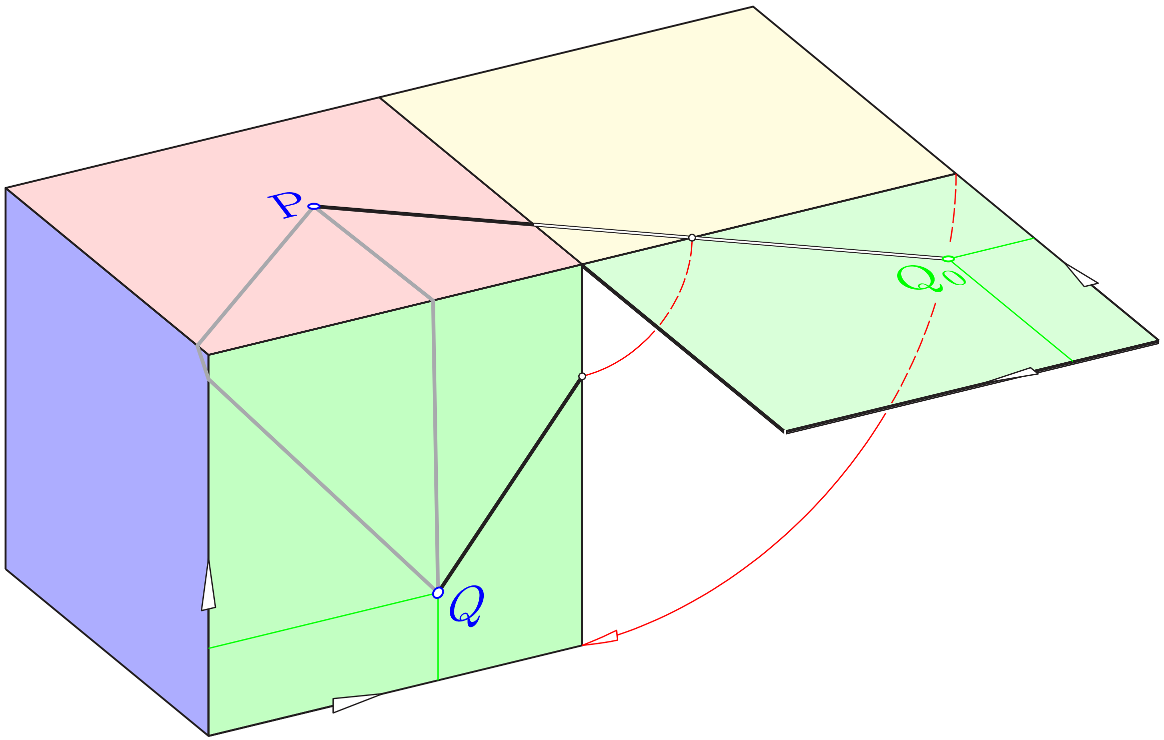


4. Geodätische auf Polyedern



Es können zu zwei Punkten P, Q der Polyederfläche mehrere geodätische Verbindungen existieren.

4. Geodätische auf Polyedern



In diesem Fall gibt es sogar drei geodätische Verbindungen von P mit Q auf dem Würfel.

Je zwei bilden ein geodätisches Zweieck.

4. Geodätische auf Polyedern

Auf Polyedern gilt der Satz von Gauss-Bonnet:

In einem von Geodätischen begrenzten Polygon auf dem Polyeder gilt bei Umlaufung im mathematisch positiven Sinn:

Die Summe der Drehwinkel + Summe der Krümmungen der eingeschlossenen Ecken ist $360°$.

Die Krümmung einer Ecke (= Maß für die 'Spitzheit') ist $360°$ minus der Summe angrenzenden Innenwinkel. Z.B., die Krümmung einer Würfelecke beträgt $90°$.

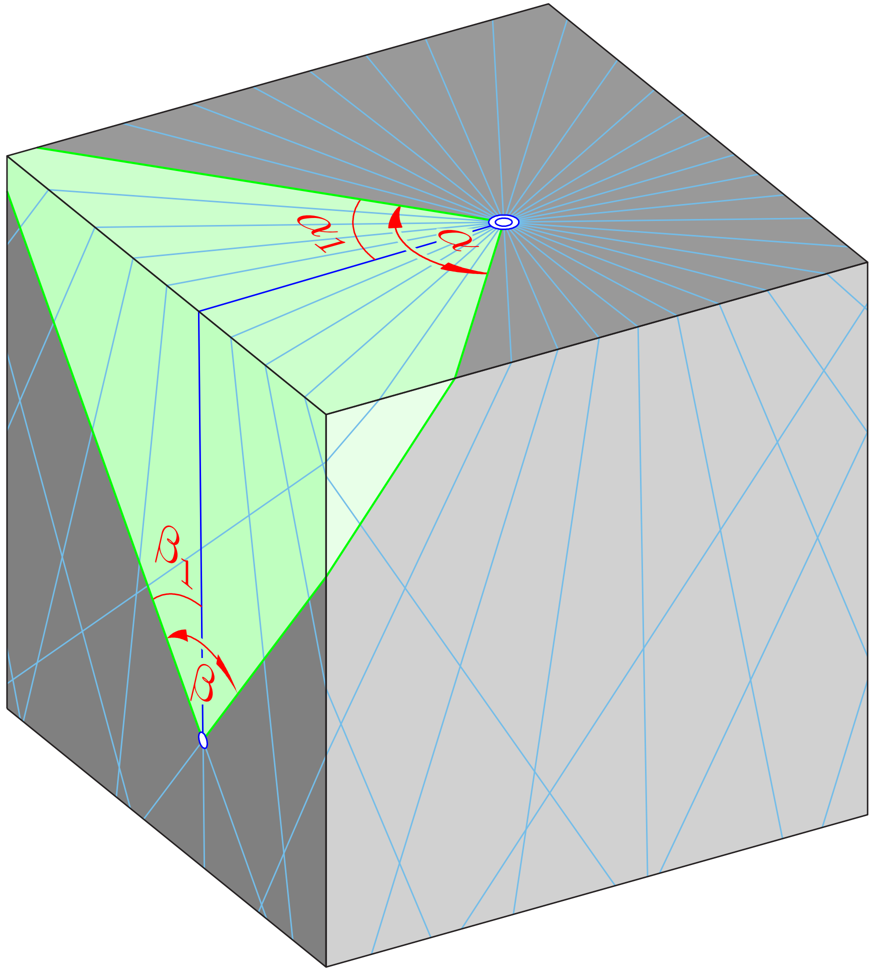
Die Gesamtkrümmung eines konvexen Polyeders ist $720°$.

Dieselbe Formel gilt für alle zur Kugel homöomorphen Polyeder.

4. Geodätische auf Polyedern

Für geodätische Zweiecke gilt:

Die Summe der Innenwinkel ist gleich der Summe der Krümmungen der eingeschlossenen Ecken.



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ$$

Literatur

- N. Dolbilin: *On the unfolding of a rectangle enlarging perimeter*. Vortragsmanuskript, Workshop 'Rigidity and Flexibility', Schrödinger-Institut Wien, 2006.

- E.D. Demaine, J. O'Rourke: *Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedra*. Cambridge University Press, 2007.