



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
VIENNA  
UNIVERSITY OF  
TECHNOLOGY

# DIPLOMARBEIT

„Sphärische Kegelschnitte  
- didaktisch aufbereitet“

Ausgeführt am

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie  
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von

Ao. Univ.-Prof. Dr. Wolfgang RATH  
und

Vertr.Ass. Dr. Andreas ASPERL  
als verantwortlich mitwirkender Assistent

durch

Harald TRANACHER  
1180 Wien, Johann Nepomuk Vogl Platz 8/13

Wien, Februar 2006

# DANKSAGUNG

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei meinen Betreuern Univ.-Prof. Dr. Rath und Dr. Asperl für die fachliche Unterstützung bedanken.

Mein besonderer Dank gilt aber auch allen übrigen Professoren und Assistenten, welche mir während meiner Studienzeit an der TU Graz und TU Wien unterstützend zur Seite standen.

Ebenso möchte ich meiner Familie, vor allem aber meinen Eltern Hildegard und Siegfried Tranacher danken. Sie haben mir dieses Studium ermöglicht und in schwierigen Zeiten immer aufmunternde Worte für mich gefunden.

Abschließend möchte ich mich bei Daniela Weißmann für ihre oft notwendige Geduld und seelische Unterstützung bedanken. Danke Winnie!

# Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird die klassische Theorie der ebenen Kegelschnitte, insbesondere der Ellipse und Hyperbel, auf die Sphäre übertragen. Anhand einer großen Anzahl von Abbildungen wird versucht, die geometrischen Inhalte und Problemstellungen möglichst verständlich und „schülerfreundlich“ zu gestalten. Computeranimationen zu den wesentlichen Inhalten dieser Arbeit sollen weiters eine Brücke zwischen altbekannter Theorie und den modernen Medien, welche mittlerweile eine grundlegende „Disziplin“ der Darstellenden Geometrie einnehmen, darstellen. Die Arbeit ist in drei Kapitel gegliedert, wobei stets versucht wird, die Analogie zwischen der Ebene und der Sphäre herzustellen.

Im ersten Kapitel meiner Arbeit werden die notwendigen Grundlagen der sphärischen Geometrie, insbesondere der sphärischen Dreiecke behandelt. Weiters wird die gnomonische Projektion untersucht, da diese im Folgenden von großer Bedeutung für den Zusammenhang zwischen sphärischen und ebenen Kegelschnitten sein wird.

Im zweiten Kapitel wird ausgehend von der Brennpunktsdefinition der sphärische Kegelschnitt als Schnittkurve zwischen Kugel und quadratischem Kegel erzeugt. Neben der Konstruktion von DE LA HIRE wird auch die projektive Erzeugung der Kegelschnitte behandelt.

Im letzten Abschnitt werden verschiedenste Anwendungen, praktischer als auch theoretischer Natur besprochen. Der Schwerpunkt liegt dabei auf dem OMEGA Navigationsverfahren und der sphärischen Version des Peripheriewinkelsatzes. Weiters werden noch Beispiele zum Lösen von Kegelschnittsaufgaben sowie der Satz von Ivory vorgestellt.

Alle Bilder wurden in *Open Geometry* [7] erstellt und in *Corel Photo Paint* beschriftet. Die Computeranimationen entstanden aus einer Serie von Bildern, welche in *Open Geometry* erstellt, und mit Hilfe der *Rad Video Tools* [14] in Videodateien exportiert wurden. Mathematische Grundlagen, welche nicht Gegenstand dieser Arbeit sind, jedoch laufend für Berechnungen herangezogen wurden, werden im Anhang zusammengefasst.

Die Animationen sowie die gesamte Diplomarbeit sind auf der beigelegten CD vorhanden. Ebenso können die Dateien unter

*[www.geometrie.tuwien.ac.at/rath/student/tranacher](http://www.geometrie.tuwien.ac.at/rath/student/tranacher)*

gefunden werden.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Grundlagen</b>	<b>6</b>
1.1. Kugelkoordinaten . . . . .	6
1.2. Großkreise und sphärischer Abstand . . . . .	7
1.3. Winkel auf der Sphäre . . . . .	8
1.4. Dreiecke auf der Kugel . . . . .	8
1.4.1. Der „sphärische Pythagoras“, Nepersche Regel . . . . .	10
1.4.2. Formeln zur Berechnung von sphärischen Dreiecken . . . . .	14
1.5. Die gnomonische Projektion . . . . .	16
<b>2. Die sphärischen Kegelschnitte</b>	<b>18</b>
2.1. Die sphärische Ellipse als Ortslinie . . . . .	18
2.2. Die sphärische Hyperbel als Ortslinie . . . . .	20
2.3. Die sphärischen Kegelschnitte analytisch . . . . .	22
2.4. Die sphärische Ellipse als Kegelschnitt . . . . .	25
2.5. Konstruktion von DE LA HIRE . . . . .	30
2.6. Projektive Erzeugung der Kegelschnitte . . . . .	33
2.6.1. Projektivitäten in der euklidischen Ebene . . . . .	33
2.6.2. Projektivitäten auf der Sphäre . . . . .	35
2.6.3. Projektive Definition der Kegelschnitte . . . . .	37
2.6.4. Der Satz von Pascal . . . . .	40
2.7. Kreise . . . . .	43
2.8. Leitkreis und Gegenpunkte . . . . .	45
2.8.1. Die Leitkreise der ebenen Kegelschnitte . . . . .	45
2.8.2. Die Leitkreise der sphärischen Kegelschnitte . . . . .	46

<b>3. Anwendungen</b>	<b>48</b>
3.1. Funknavigation . . . . .	48
3.1.1. Peilverfahren . . . . .	48
3.1.2. Hyperbelverfahren . . . . .	49
3.2. Lösen von Kegelschnittsaufgaben . . . . .	52
3.2.1. Aufgabe 1 . . . . .	53
3.2.2. Aufgabe 2 . . . . .	55
3.3. Der sphärische Peripheriewinkelsatz . . . . .	56
3.3.1. Der ebene Peripheriewinkelsatz . . . . .	56
3.3.2. Der sphärische Peripheriewinkelsatz . . . . .	58
3.4. Der Rückwärtseinschnitt . . . . .	64
3.4.1. Rückwärtseinschnitt in der Ebene . . . . .	65
3.4.2. Rückwärtseinschnitt auf der Sphäre . . . . .	65
3.5. Satz von IVORY . . . . .	66
3.5.1. Der Satz von IVORY in der Ebene . . . . .	66
3.5.2. Der Satz von IVORY auf der Sphäre . . . . .	68
<b>A. Anhang: Mathematische Grundlagen</b>	<b>71</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>72</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>74</b>

# 1. Grundlagen

## 1.1. Kugelkoordinaten

Häufig wird in der Ebene ein Punkt  $P$  mit Hilfe seiner kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  festgelegt. Geraden und Kurven können festgelegt werden, indem ein „Zusammenhang“ zwischen den beiden Koordinaten  $x$  und  $y$  angegeben wird. Liegen zum Beispiel die Punkte  $P = (x, y)$  auf einer Geraden, so gilt:  $y = k \cdot x + d$ .

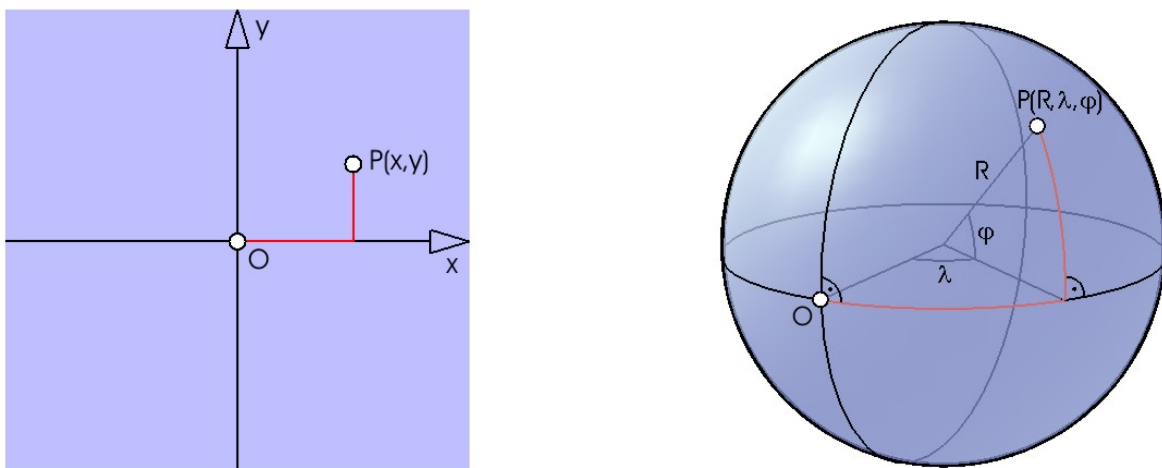


Abbildung 1.1.:

Analog zur Ebene wollen wir nun auf der Sphäre mit gegebenem Radius  $R$  ein Koordinatensystem einführen. Ähnlich zu den Koordinatenachsen in der Ebene bestimmen wir die „Koordinatenachsen“ auf der Sphäre. Die Funktion der  $x$ -Achse im ebenen Koordinatensystem übernimmt auf der Sphäre der Äquator. Die  $y$ -Achse wird auf der Sphäre durch einen halben Längengrad ersetzt (siehe Abbildung 1.1). Jeder Punkt der Sphäre kann so durch Angabe von  $R$ , sowie seiner **geografischen Länge**  $\lambda$  und seiner **geografischen Breite**  $\varphi$  bezeichnet werden. Währenddessen die Kartesischen Koordinaten  $x$

und  $y$  eines Punktes in der Ebene unendlich groß werden können, wird die geografische Länge eines Punktes auf der Sphäre von  $0^\circ$  ostwärts bis  $360^\circ$ , und die geografische Breite vom Äquator aus nach Norden positiv von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  und nach Süden negativ von  $0^\circ$  bis  $-90^\circ$  gezählt. Auch auf der Sphäre können wir Kurven beschreiben, indem wir den „Zusammenhang“ zwischen  $\lambda$  und  $\varphi$  mit Hilfe einer so genannten **Funktionsgleichung** angeben.

## 1.2. Großkreise und sphärischer Abstand

Unter der Entfernung zweier Punkte  $A$  und  $B$  versteht man im allgemeinen die Länge der kürzesten Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten. In der euklidischen Ebene, oder auch im euklidischen Raum ist die kürzeste Verbindungslinie die Strecke  $\overline{AB}$ . Auf der Kugel ist es der **Großkreisbogen** zwischen  $A$  und  $B$ . Der Großkreisbogen übernimmt also auf der Kugel die Funktion einer Strecke. Die Länge des Großkreisbogens  $\widehat{AB}$  bezeichnen wir mit  $|\widehat{AB}|$  und wird **sphärischer Abstand** genannt. Er wird

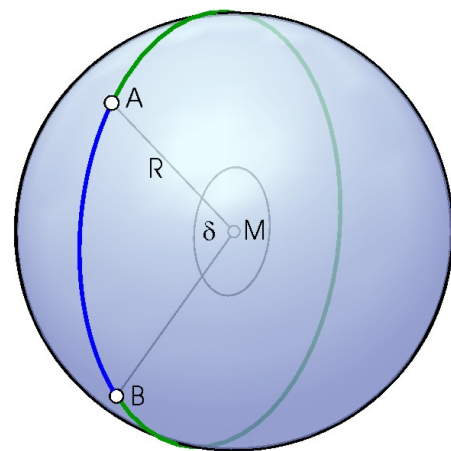


Abbildung 1.2.:

bestimmt durch den Kugelradius  $R$  und die Größe des Mittelpunktswinkels  $\delta = \angle AMB$ . Nachdem zu gegebenen Punkten  $A$  und  $B$  zwei Großkreisbögen existieren, gilt für  $|\widehat{AB}| = \delta$ , oder  $|\widehat{AB}| = 360 - \delta$ . Im folgenden werden wir immer von der Einheitskugel ausgehen und den sphärischen Abstand durch den entsprechenden Mittelpunktswinkel  $\delta$  im Gradmaß angeben.

Ist  $AB$  ein Großkreis, so schneidet die Senkrechte auf der Großkreisebene durch  $M$  die Kugel in zwei Punkten  $P$  und  $\bar{P}$ , die **Pole** von  $AB$  genannt werden. Für alle Punkte  $X$  auf dem Großkreis  $AB$  gilt:

$$|\widehat{PX}| = |\widehat{\bar{P}X}| = 90^\circ$$

### 1.3. Winkel auf der Sphäre

Unter dem **Winkel**  $\alpha$  zweier Großkreise  $AS$  und  $BS$  oder zweier Großkreisbögen  $\widehat{AS}$  und  $\widehat{BS}$  verstehen wir im folgenden den Winkel, den die beiden entsprechenden von  $S$  ausgehenden Halbgeraden miteinander bilden, die auf den Tangenten in  $S$  an die beiden Großkreise liegen (siehe Abbildung 1.3). Für die Größe  $\alpha$  dieses Winkels gilt  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ , wenn die Großkreise  $AS$  und  $BS$  verschieden sind. Sind die beiden Großkreise dieselben, so ist entweder  $\alpha = 0^\circ$  oder aber  $\alpha = 180^\circ$ , je nachdem, ob auch die beiden Halbgroßkreise dieselben sind oder aber sich zum Großkreis ergänzen.

Hat nun der Winkel zweier Großkreise die Größe  $\alpha$ , so sind deren Trägerebenen ebenfalls unter  $\alpha$  geneigt.

Schneiden einander zwei Großkreise in  $S$ , so werden von ihnen in  $S$  vier Winkel gebildet. Die jeweils gegenüberliegenden Winkel sind gleich groß und werden - wie in der Ebene auch - als Scheitelwinkel bezeichnet. Jeweils zwei nebeneinander liegende Winkel werden als Nebenwinkel bezeichnet und ergänzen sich zu  $180^\circ$ .

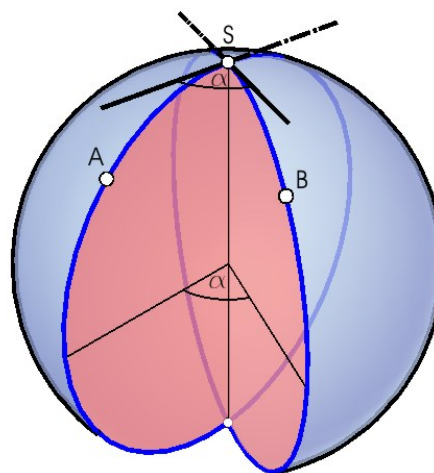


Abbildung 1.3.:

### 1.4. Dreiecke auf der Kugel

Werden auf einer Kugel drei Punkte  $A, B$  und  $C$ , welche nicht in einer Durchmessersebene der Kugel liegen, durch die drei Großkreise  $\widehat{AB} = c$ ,  $\widehat{BC} = a$  und  $\widehat{CA} = b$  verbunden, so wird die Kugel in acht Gebiete zerlegt. Jedes dieser Gebiete wird von drei Großkreisbögen berandet, die zusammen ein Kugeldreieck bilden. Ein Kugeldreieck dieser Art, bei dem also die Winkel  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  jeweils  $< 180^\circ$  und die Seitenlängen  $a, b$  und  $c$  jeweils  $< 180^\circ$  sind, wird **Eulersches Dreieck** genannt.

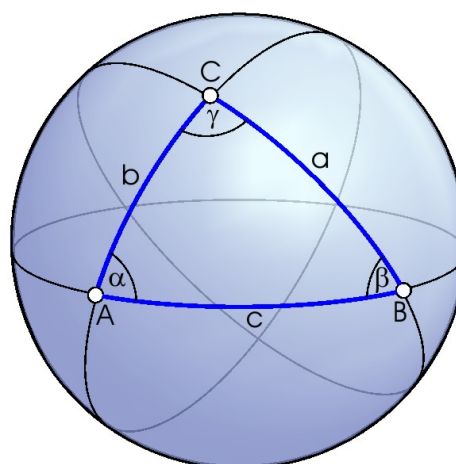


Abbildung 1.4.:



Analog zur Ebene benötigt man auch auf der Sphäre drei Angabestücke um ein Eulersches Dreieck eindeutig bestimmen zu können. Diese wären:

- drei Seiten  $a, b, c$
- zwei Seiten und ein Winkel  $a, b, \gamma$  oder  $a, b, \alpha$
- eine Seite und zwei Winkel  $a, \alpha, \beta$  oder  $c, \alpha, \beta$

Weiters kann ein sphärisches Dreieck, im Unterschied zur Ebene, durch die Angabe von

- drei Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$

eindeutig bestimmt werden.

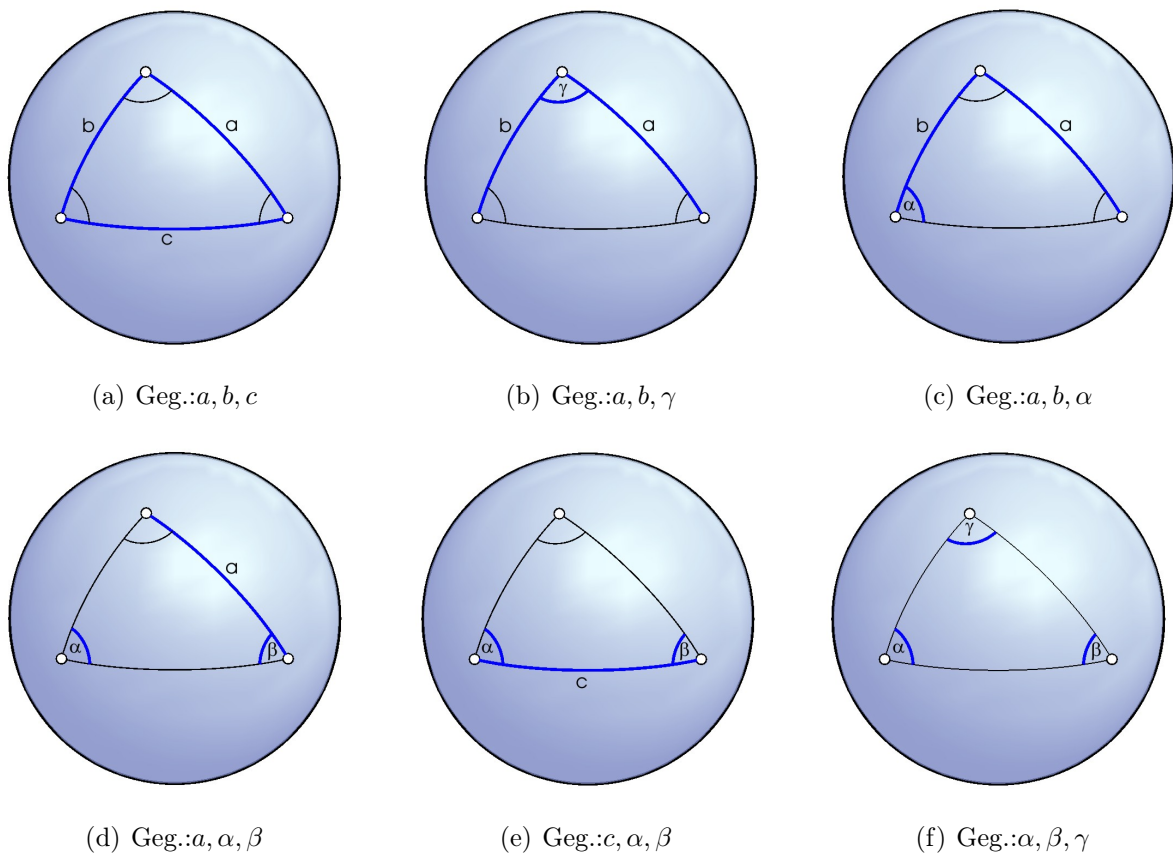


Abbildung 1.5.:

*Bemerkung:*

- Sind von einem sphärischen Dreieck die drei Seiten  $a, b$  und  $c$  gegeben, so kann man problemlos ein „Pappmodell“ bauen (siehe Abbildung 1.6). Klappt man die äußeren Sektoren mit den Seiten  $a$  und  $b$  längs der strichpunktierten Linien gegeneinander, so entsteht ein Kugeldreieck mit den Seiten  $a, b, c$ .

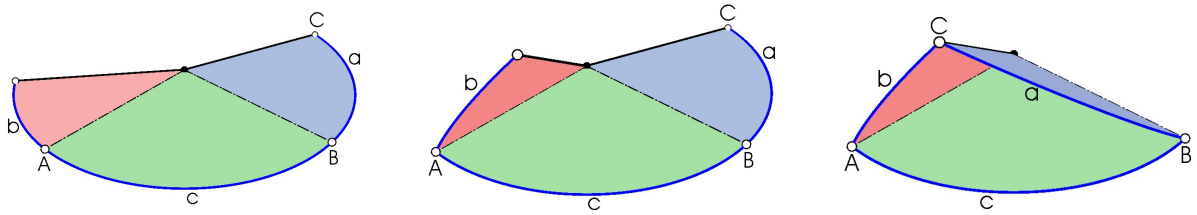


Abbildung 1.6.: **Animation 1**

- Für sphärische Dreiecke gilt somit der *WWW*– **Satz**. Ohne Beweis sei noch bemerkt, dass die Winkelsumme  $\alpha + \beta + \gamma$  für sphärische Dreiecke immer größer als  $180^\circ$  ist. Offensichtlich wird die Überschreitung von  $180^\circ$  (Winkelsumme für Dreiecke in der euklidischen Ebene) durch die Krümmung der Kugel bewirkt. Man bezeichnet daher den Betrag, um den  $180^\circ$  überschritten wird, als **sphärischen Exzeß**  $\varepsilon$ .
- Die Geometrie auf der Kugel ist ein Beispiel einer sogenannten **nichteuklidischen Geometrie**. Typisch für nichteuklidische Geometrien ist, dass für die Winkelsumme  $\delta$  von Dreiecken gilt:

$$\delta = \alpha + \beta + \gamma \neq 180^\circ$$

Ist  $\delta < 180^\circ$ , so spricht man von einer **hyperbolischen** Geometrie, für  $\delta > 180^\circ$  wird die Geometrie **elliptisch** genannt.

**Noch genauer:** Auf der Halbkugel stimmt die elliptische Geometrie mit der sphärischen Geometrie überein.

### 1.4.1. Der „sphärische Pythagoras“, Napiersche Regel

Gilt auf der Kugel der Satz des Pythagoras? Setzt man voraus, dass unter dem „Satz des Pythagoras“ die bekannte Beziehung  $a^2 + b^2 = c^2$  für Dreiecke mit einem rechten Winkel bei  $C$  in der euklidischen Ebene gemeint ist, so kann man leicht durch Angabe eines Gegenbeispiels zeigen, dass eine entsprechende Übertragung auf die Kugel nicht gilt.

Als Gegenbeispiel wählen wir ein Kugeldreieck  $ABC$ , dessen Winkel  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  gleich  $90^\circ$  groß sind. Für dieses Dreieck gilt (siehe Abbildung 1.7):  $a = b = c = 90^\circ$  und folglich  $a^2 + b^2 \neq c^2$ .

Auf der Kugel gilt jedoch ein entsprechender Satz, der deswegen auch **sphärischer Satz des Pythagoras** genannt wird.

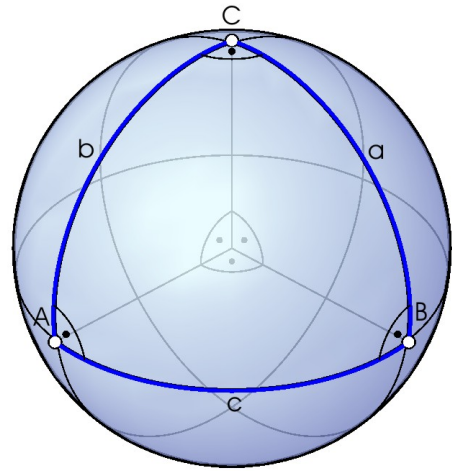


Abbildung 1.7.:

**Satz 1.1 (Sphärischer Satz des Pythagoras)** Für ein Eulersches Dreieck mit einem rechten Winkel bei  $C$  gilt:

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b)$$

*Beweis:*

- 1.Fall: Rechtseitiges Dreieck (d.h.:  $a = 90^\circ$  oder  $b = 90^\circ$  oder  $c = 90^\circ$ )

–  $a = |\widehat{BC}| = 90^\circ$ . Da für  $\gamma = 90^\circ$  gilt, ist  $B$  der Pol zum Großkreis  $\widehat{AC}$  und somit gilt:

$$c = |\widehat{BA}| = |\widehat{BC}| = 90^\circ$$

Durch  $a = 90^\circ$  und  $c = 90^\circ$  ist die Gleichung  $\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b)$  erfüllt.

- Analog für  $b = 90^\circ$  und  $c = 90^\circ$

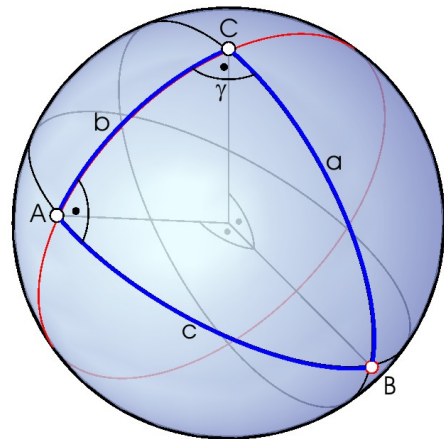


Abbildung 1.8.:

- 2.Fall: Nicht rechtseitiges Dreieck (d.h.:  $a \neq 90^\circ$  und  $b \neq 90^\circ$  und  $c \neq 90^\circ$ )  
Diskutiert man die möglichen Fälle bezüglich der Seitenlängen eines rechtwinkligen, nicht rechtseitigen Kugeldreiecks, so kommt man zu folgendem Ergebnis:

- Alle drei Seiten sind spitz (d.h.:  $< 90^\circ$ ).

Wir betrachten die Kugelecke  $MABC$  (siehe Abbildung 1.9(a)) und fällen von  $A$  aus das Lot  $\overline{AD}$  auf  $\overline{MC}$  und von  $D$  aus das Lot  $\overline{DE}$  auf  $\overline{MB}$ .  $\overline{AD}$  steht senkrecht auf der Ebene  $MBC$ .  $\overline{MB}$  verläuft also senkrecht sowohl zu  $\overline{AD}$  als auch zu  $\overline{DE}$ , also auch senkrecht zur Ebene  $ADE$ . Also gilt  $\angle AEM = 90^\circ$ . Damit ergibt sich bei  $|\overline{ME}| = x$  und  $|\overline{MD}| = y$  für

$$\cos(c) = \frac{|\overline{ME}|}{|\overline{MA}|} = \frac{x}{1}, \quad \cos(b) = \frac{|\overline{MD}|}{|\overline{MA}|} = \frac{y}{1}$$

und folglich

$$\cos(a) = \frac{x}{y} = \frac{\cos(c)}{\cos(b)}.$$

- Genau eine Seite ist spitz (sei  $b < 90^\circ$ ).

Ähnlich zum obigen Fall gilt (siehe Abbildung 1.9(b)) für

$$\cos(180 - c) = \frac{|\overline{ME}|}{|\overline{MA}|} = \frac{x}{1}, \quad \cos(b) = \frac{|\overline{MD}|}{|\overline{MA}|} = \frac{y}{1}$$

und folglich

$$\cos(180 - a) = \frac{x}{y} = \frac{\cos(180 - c)}{\cos(b)}.$$

Nachdem wir für  $\cos(180 - a) = -\cos(a)$  und für  $\cos(180 - c) = -\cos(c)$  setzen können gilt obige Behauptung.

- Genau zwei Seiten sind spitz.

Sind in einem Eulerschen Dreieck zwei Seiten spitz, so muss auch die dritte Seite spitz sein.

□

Weiters gilt nach Abbildung 1.9(a) für  $|\overline{ED}| = \cos(\beta) \cdot \sin(c)$  und für  $x = \cos(c)$ .

Somit erhalten wir im Dreieck  $MED$

$$\tan(a) = \frac{|\overline{ED}|}{x} = \frac{\cos(\beta) \cdot \sin(c)}{\cos(c)}$$

und weiter

$$\cos(\beta) = \frac{\tan(a)}{\tan(c)} = \cot(90 - a) \cdot \cot(c).$$

Dies ist eine der sogenannten 10 **Neperschen Gleichungen** die im folgenden Satz behandelt werden.

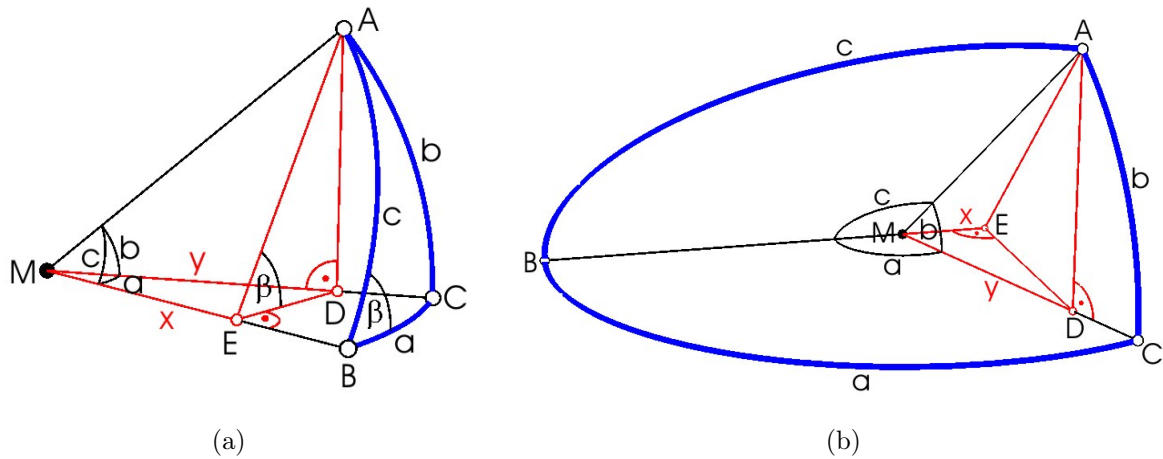


Abbildung 1.9.:

**Satz 1.2** (o.B.) (*Nepersche Regel*) Für ein Eulersches Dreieck mit einem rechten Winkel bei  $C$  gilt, wenn man für die Katheten  $a$  und  $b$  deren Komplemente (d.h. deren Ergänzungen zu  $90^\circ$ ) setzt:  
 Der Kosinus eines jeden Stückes ist  
 gleich dem Produkt der Kotangens-Werte der benachbarten Stücke und  
 gleich dem Produkt der Sinus-Werte der nicht benachbarten Stücke.  
 („benachbart“ heißt: in zyklisch angeordneter Reihenfolge  $a, b, \alpha, c, \beta$ )

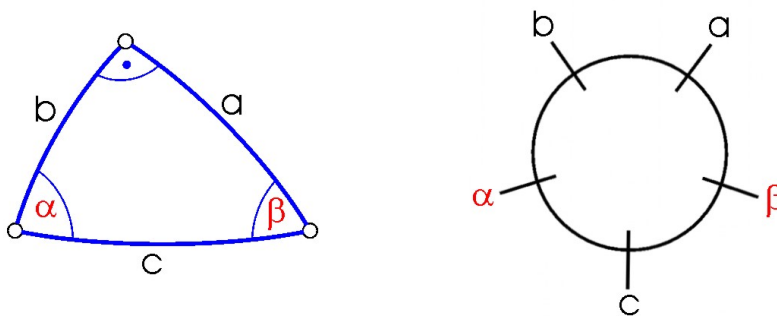


Abbildung 1.10.:

Wir erhalten somit folgende Gleichungen:

$$\cos(90 - b) = \cot(\alpha) \cdot \cot(90 - a) = \sin(c) \cdot \sin(\beta) \quad (1.1)$$

$$\cos(\alpha) = \cot(c) \cdot \cot(90 - b) = \sin(\beta) \cdot \sin(90 - a) \quad (1.2)$$

$$\cos(c) = \cot(\alpha) \cdot \cot(\beta) = \sin(90 - a) \cdot \sin(90 - b) \quad (1.3)$$

$$\cos(\beta) = \cot(c) \cdot \cot(90 - a) = \sin(\alpha) \cdot \sin(90 - b) \quad (1.4)$$

$$\cos(90 - a) = \cot(90 - b) \cdot \cot(\beta) = \sin(\alpha) \cdot \sin(c) \quad (1.5)$$

*Bemerkung:*

Nachdem wir für  $\sin(90 - a) = \cos(a)$  und für  $\sin(90 - b) = \cos(b)$  setzen können, folgt aus (1.3) unmittelbar der sphärische Pythagoras.

## 1.4.2. Formeln zur Berechnung von sphärischen Dreiecken

**Satz 1.3 (Seiten-Kosinussatz)** In einem Eulerschen Dreieck gilt:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(b) = \cos(a) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\beta)$$

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\gamma)$$

*Beweis:*

Abbildung 1.11 zeigt ein spitzwinkliges Kugeldreieck, das durch die „Höhe“  $h$  in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt wurde. Nach dem sphärischen Pythagoras (Satz 1.1) gilt

$$\cos(a) = \cos(h) \cdot \cos(p) \text{ und}$$

$$\cos(b) = \cos(h) \cdot \cos(q).$$

Elimination von  $\cos(h)$  liefert

$$\frac{\cos(a)}{\cos(p)} = \frac{\cos(b)}{\cos(q)},$$

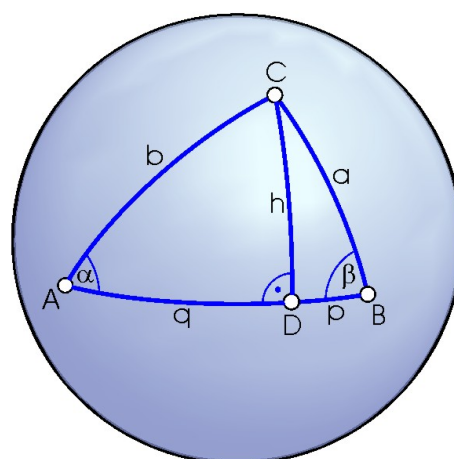


Abbildung 1.11.:

wobei für spitzwinklige Dreiecke stets  $a < 90^\circ$ ,  $b < 90^\circ$ ,  $p + q = c < 90^\circ$  und somit

$$\cos(q) \neq 0, \cos(p) \neq 0, \tan(b) \neq \infty$$

gilt.

Somit erhalten wir

$$\cos(a) = \frac{\cos(b)}{\cos(q)} \cdot \underbrace{\cos(c - q)}_p.$$

und weiter nach dem Additionstheorem (A.1) (siehe Anhang)

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \frac{\cos(b)}{\cos(q)} \cdot (\cos(c) \cdot \cos(q) + \sin(c) \cdot \sin(q)) \\ &= \cos(b) \cdot \cos(c) + \cos(b) \cdot \sin(c) \cdot \tan(q). \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2 ist

$$\cos(\alpha) = \cot(90 - q) \cdot \cot(b) = \tan(q) \cdot \cot(b)$$

und somit  $\tan(q) = \tan(b) \cdot \cos(\alpha)$ ,

und dies liefert

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \cos(b) \cdot \cos(c) + \cos(b) \cdot \sin(c) \cdot \tan(b) \cdot \cos(\alpha) \\ &= \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Durch zyklische Vertauschung erhält man analoge Formeln für  $\cos(b)$  und  $\cos(c)$ . (Ähnliche Überlegung für stumpfwinklige Dreiecke.)

□

**Satz 1.4 (Sinussatz)** In einem Eulerschen Dreieck gilt:

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)}$$

*Beweis:*

In Abbildung 1.11 gilt nach Satz 1.2

$$\cos(90 - h) = \sin(\alpha) \cdot \sin(b), \quad \cos(90 - h) = \sin(\beta) \cdot \sin(a).$$

Elimination von  $\cos(90 - h)$  liefert

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(b) = \sin(\beta) \cdot \sin(a)$$

und weiter

$$\frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)}. \quad (1.6)$$

Analog liefert Abbildung 1.12 nach Satz 1.2:

$$\cos(90 - h) = \sin(\gamma) \cdot \sin(b),$$

$$\cos(90 - h) = \sin(\beta) \cdot \sin(c).$$

Elimination von  $\cos(90 - h)$  liefert

$$\sin(\gamma) \cdot \sin(b) = \sin(\beta) \cdot \sin(c)$$

und weiter

$$\frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)}. \quad (1.7)$$

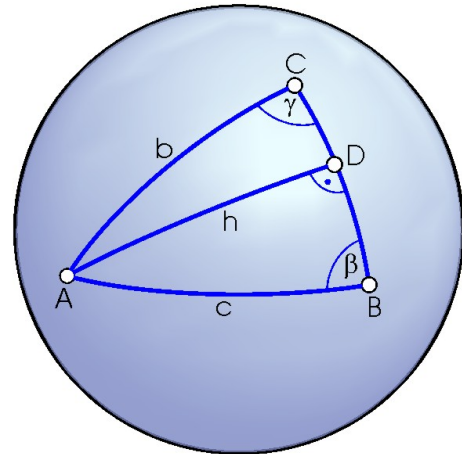


Abbildung 1.12.:

Aus (1.6) und (1.7) folgt die Behauptung.

□

## 1.5. Die gnomonische Projektion

Eine gnomonische Projektion entsteht, indem man eine Kugel vom Kugelmittelpunkt  $M$  aus auf die Tangentialebene  $\tau$  der Kugel in einem Punkt  $O$  projiziert (siehe Abbildung 1.13(a)). Die dabei entstehende Karte wird **Großkreiskarte** genannt, weil Großkreise der Kugel auf Geraden abgebildet werden. Dies ist in der Navigation von wichtiger Bedeutung, denn verbindet man auf einer Großkreiskarte zwei Punkte  $A'$  und  $B'$  durch eine Gerade, so ist diese Gerade das Bild des Großkreises  $\widehat{AB}$ .  $\widehat{AB}$  ist somit die kürzeste Verbindung der Punkte  $A$  und  $B$  auf der Sphäre (siehe Abbildung 1.13(b)).



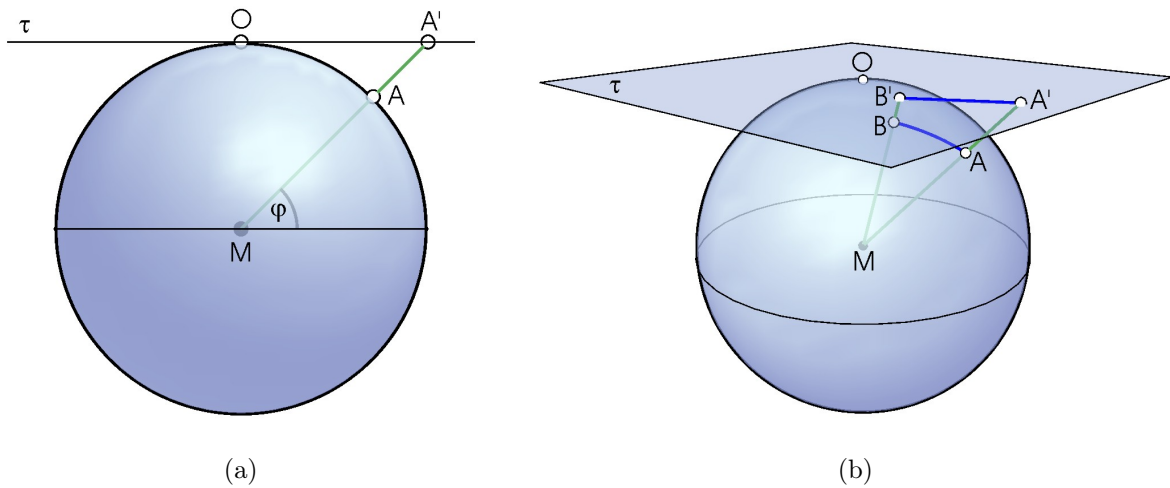


Abbildung 1.13.:

Fällt  $O$  mit einem der Pole der Erde zusammen, bezeichnet man die entstehende Karte als „polständig“, liegt  $O$  auf dem Äquator, als „äquatorständig“, sonst als „zwischenständig“. Bei einer polständigen Großkreiskarte werden die Breitenkreise auf konzentrische Kreise um  $O$  und die Längenkreise auf Geraden durch  $O$  abgebildet.

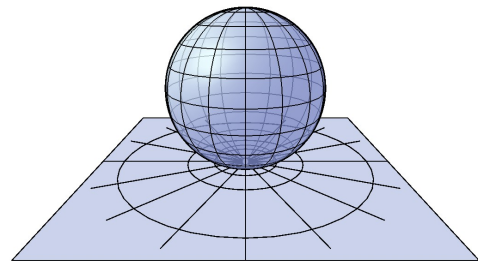


Abbildung 1.14.:

Die gnomonische Projektion ist weder winkel- noch flächentreu. Die Flächenverzerrung nimmt sehr stark zu, je kleiner  $\varphi$  wird (siehe Abbildung 1.13(a)). Wegen dieser Eigenschaft ist die Großkreiskarte (als Bild der Erdoberfläche) in der Geographie unbrauchbar.

## 2. Die sphärischen Kegelschnitte

### 2.1. Die sphärische Ellipse als Ortslinie

Vorerst wollen wir die Ellipse in der euklidischen Ebene definieren. Dabei verwenden wir die übliche *Brennpunktsdefinition*:

**Definition 2.1** Unter einer **Ellipse**  $k$  verstehen wir die Menge aller Punkte  $P$  einer Ebene  $\varepsilon$ , die von zwei festen Punkten  $S_1 \in \varepsilon$  und  $S_2 \in \varepsilon$ , den **Brennpunkten**, dieselbe Abstandssumme  $2a$  haben.

$$k = \left\{ P \in \varepsilon \mid \overline{PS_1} + \overline{PS_2} = 2a \right\}$$

Diese Definition erlaubt es uns die sogenannte **Gärtnerkonstruktion** der Ellipse durchzuführen, welche erstmals bei *ANTHEMIOS VON TRALLEIS* (?-534), dem Erbauer der Hagia Sophia in Konstantinopel, auftritt.

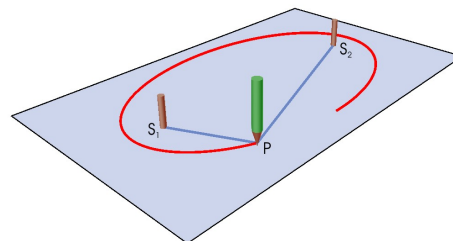


Abbildung 2.1.: **Animation 2**

Sei  $M$  der Mittelpunkt der Ellipse und  $e = \overline{MS_1} = \overline{MS_2}$  die *lineare Exzentrizität*, sowie  $a = \overline{MA} = \overline{MB}$  und  $b = \overline{MC} = \overline{MD}$  die halben Haupt bzw. Nebenachsenlängen, so gilt nach Definition 2.1

$$a^2 = b^2 + e^2. \quad (2.1)$$

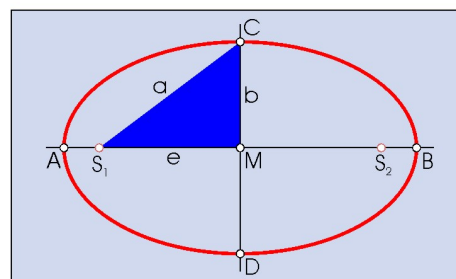


Abbildung 2.2.:

Analog zur Ellipse in der Ebene gilt folgende

**Definition 2.2** Unter einer *sphärischen Ellipse*  $k$  verstehen wir die Menge aller Punkte  $P$  einer Kugel  $\varkappa$ , die von zwei festen Punkten  $S_1 \in \varkappa$  und  $S_2 \in \varkappa$ , den **Brennpunkten**, dieselbe sphärische Abstandssumme  $2a$  haben.

$$k = \left\{ P \in \varkappa \mid \widehat{PS_1} + \widehat{PS_2} = 2a \right\}$$

Sei  $M$  der Mittelpunkt der sphärischen Ellipse und  $e = \widehat{MS_1} = \widehat{MS_2}$ , sowie  $a = \widehat{MA} = \widehat{MB}$  und  $b = \widehat{MC} = \widehat{MD}$  die halben Haupt bzw. Nebenachsenlängen, so gilt nach Definition 2.2 und Satz 1.1

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(e). \quad (2.2)$$

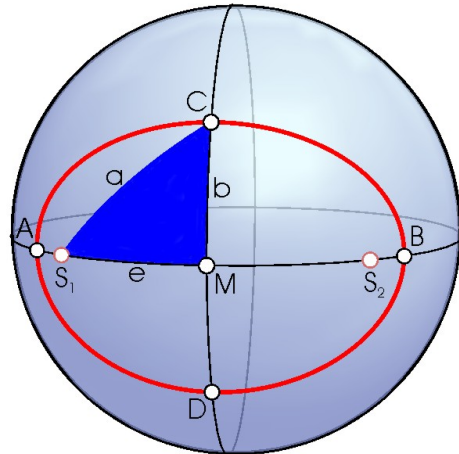


Abbildung 2.3.:

Abbildung 2.4 zeigt die „sphärische Version“ der Gärtnerkonstruktion. Nachdem der sphärische Abstand entlang von Großkreisbögen gemessen wird, müssen die Kreisbögen von  $S_1$  nach  $P$  und analog von  $S_2$  nach  $P$  Großkreisbögen sein.

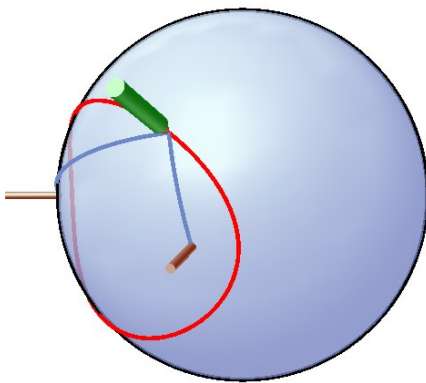


Abbildung 2.4.: **Animation 3**

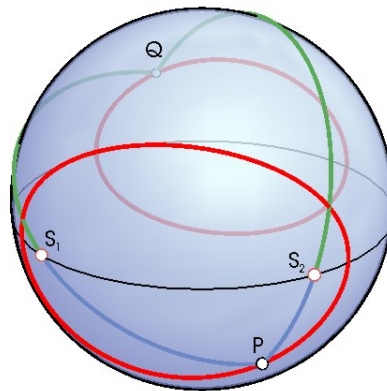


Abbildung 2.5.:

Großkreise welche nicht identisch sind, schneiden einander genau in zwei verschiedenen diametralen Punkten. Es gibt daher neben dem Schnittpunkt  $P$  noch einen weiteren

Schnittpunkt  $Q$ . Um nachzuweisen, dass sich die Menge aller Punkte  $Q$  ebenfalls auf einer sphärischen Ellipse befindet, müssen wir lediglich zeigen, dass die Summe der Abstände zu den Brennpunkten konstant ist. Aus  $|\widehat{S_1Q}| = 180 - |\widehat{S_1P}|$  und  $|\widehat{S_2Q}| = 180 - |\widehat{S_2P}|$  folgt:

$$|\widehat{S_1Q}| + |\widehat{S_2Q}| = 180 - |\widehat{S_1P}| + 180 - |\widehat{S_2P}| = 360 - \underbrace{(|\widehat{S_1P}| + |\widehat{S_2P}|)}_{2a} = 360 - 2a = \textit{konst.}$$

Ist im Folgenden eine sphärische Ellipse  $k$  zur Abstandssumme  $2a$  gegeben, so nennen wir

$$k^2 = \left\{ Q \in \varkappa \mid |\widehat{QS_1}| + |\widehat{QS_2}| = 360 - 2a \right\}$$

den **zweiten Ast** von  $k$ .

Abbildung 2.5 lässt vermuten, dass die beiden sphärischen Ellipsen  $k$  und  $k^2$  zentral-symmetrisch bezüglich des Mittelpunktes der Kugel zueinander liegen. Dies und noch weitere Eigenschaften werden in Kapitel 2.3 genauer behandelt.

## 2.2. Die sphärische Hyperbel als Ortslinie

Analog zur Hyperbel in der Ebene wird die sphärische Hyperbel definiert.

**Definition 2.3** *Unter einer **sphärischen Hyperbel**  $k$  verstehen wir die Menge aller Punkte  $P$  einer Kugel  $\varkappa$ , die von zwei festen Punkten  $S_1 \in \varkappa$  und  $S_2 \in \varkappa$ , den **Brennpunkten**, dieselbe sphärische Abstandsdifferenz  $2a$  haben.*

$$k = \left\{ P \in \varkappa \mid \left| |\widehat{PS_1}| - |\widehat{PS_2}| \right| = 2a \right\}$$

Dass auch die sphärischen Hyperbeln aus zwei Ästen bestehen, ist leicht einzusehen, denn nach Abbildung 2.6 gilt:

$$\left| |\widehat{S_1Q}| - |\widehat{S_2Q}| \right| = \underbrace{180 - |\widehat{S_1P}|}_{|\widehat{S_1Q}|} - \underbrace{\left( 180 - |\widehat{S_2P}| \right)}_{|\widehat{S_2Q}|} = \underbrace{\left| -|\widehat{S_1P}| + |\widehat{S_2P}| \right|}_{2a} = 2a$$

Weiters legt Abbildung 2.7 die Vermutung nahe, dass sphärische Hyperbeln gleichzeitig auch sphärische Ellipsen sein könnten.

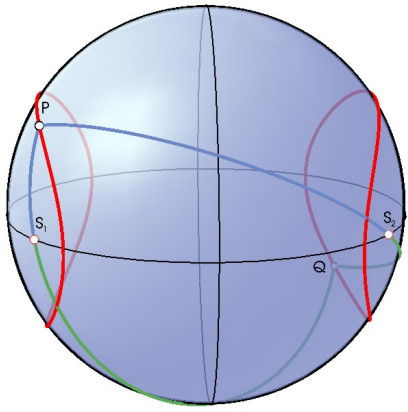


Abbildung 2.6.:

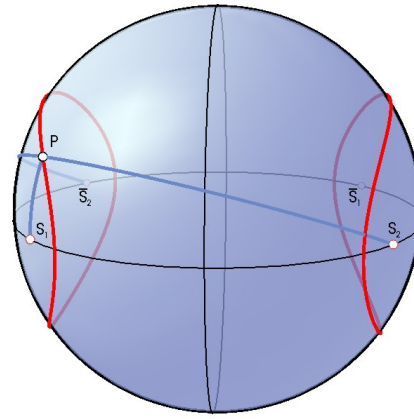


Abbildung 2.7.:

**Satz 2.1** *Eine sphärische Hyperbel mit der Abstandsdifferenz  $2a$  zu den Brennpunkten  $S_1$  und  $S_2$  ist gleichzeitig eine sphärische Ellipse mit der Abstandssumme  $180 - 2a$  oder  $180 + 2a$  zu den Brennpunkten  $S_1$  und  $\overline{S_2}$ , wobei  $\overline{S_2}$  zentralsymmetrisch bezüglich des Kugelmittelpunktes zu  $S_2$  liegt.*

*Beweis:*

Nachdem  $P$  ein Punkt einer sphärischen Hyperbel zu den Brennpunkten  $S_1$  und  $S_2$  ist, beträgt seine Abstandsdifferenz gleich  $2a$ . Für die Abstandssumme von  $P$  zu den Brennpunkten  $S_1$  und  $\overline{S_2}$  gilt daher (siehe Abbildung 2.7):

$$|\widehat{S_1P}| + |\widehat{\overline{S_2}P}| = |\widehat{S_1P}| + \underbrace{(180 - |\widehat{S_2P}|)}_{|\widehat{\overline{S_2}P}|} = 180 + \underbrace{|\widehat{S_1P}| - |\widehat{S_2P}|}_{|2a|} = 180 + 2a \text{ oder } 180 - 2a$$

Aus der konstanten Abstandssumme und Definition 2.2 folgt die Behauptung.

□

Auf der Sphäre ist demnach keine Unterscheidung zwischen Ellipse und Hyperbel möglich.

## 2.3. Die sphärischen Kegelschnitte analytisch

In diesem Abschnitt werden wir die Funktionsgleichungen (siehe Abschnitt 1.1) der sphärischen Hyperbeln und Ellipsen entwickeln, und anschließend den Verlauf dieser Kurven diskutieren.

Nach Definition 2.3 gilt für jeden beliebigen Punkt  $P(\lambda, \varphi)$  der sphärischen Hyperbel mit der Abstandsdifferenz  $2a$ :

$$\left| \widehat{S_1P} - \widehat{S_2P} \right| = 2a$$

Wenn wir nun  $\widehat{S_1P} = l_1$  und  $\widehat{S_2P} = l_2$  bezeichnen so gilt nach Satz 1.1

$$\text{im } \triangle S_1TP : \cos(l_1) = \cos(\lambda + e) \cdot \cos(\varphi)$$

$$\text{und im } \triangle S_2TP : \cos(l_2) = \cos(\lambda - e) \cdot \cos(\varphi).$$

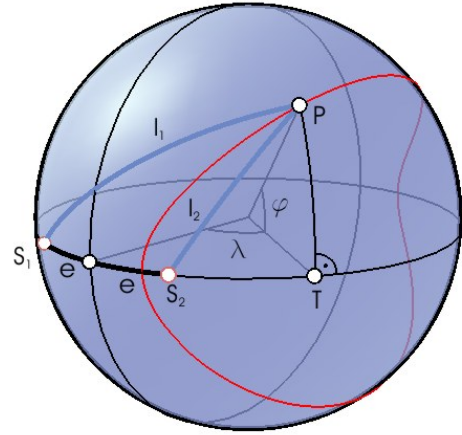


Abbildung 2.8.:

$$\cos(l_1) + \cos(l_2) = 2 \cdot \cos\left(\frac{l_1 + l_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{l_1 - l_2}{2}\right) = \cos(\varphi) \cdot [\cos(\lambda + e) + \cos(\lambda - e)],$$

und weiter nach (A.1)

$$\underbrace{\cos\left(\frac{l_1 + l_2}{2}\right)}_{a+l_2} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{l_1 - l_2}{2}\right)}_a = \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(e).$$

Setzen wir  $l_1 \geq l_2$ , also  $l_1 = 2a + l_2$ , so gilt nach (A.1)

$$[\cos(a) \cdot \cos(l_2) - \sin(a) \cdot \sin(l_2)] \cdot \cos(a) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(e)$$

und weiter

$$-\sin(l_2) = \frac{\cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(e)}{\cos(a) \cdot \sin(a)} - \frac{\cos(a) \cdot \cos(l_2)}{\sin(a)}.$$

Quadrieren und Beachtung von  $\sin^2(l_2) = 1 - \cos^2(l_2)$  liefert

$$1 = \frac{\cos^2(\varphi) \cos^2(\lambda) \cos^2(e)}{\cos^2(a) \sin^2(a)} - \frac{2 \cos(\varphi) \cos(\lambda) \cos(e) \cos(a) \cos(l_2)}{\cos(a) \sin^2(a)} + \frac{\cos^2(l_2)}{\sin^2(a)}.$$

Setzen wir für  $\cos(l_2) = \cos(\lambda - e) \cdot \cos(\varphi)$  so erhalten wir nach einigen weiteren Umformungen

$$1 = \frac{\cos^2(\varphi) \cos^2(\lambda) \cos^2(e) - \cos^2(\varphi) \cos^2(\lambda) \cos^2(e) \cos^2(a) + \cos^2(\varphi) \cos^2(a) \sin^2(\lambda) \sin^2(e)}{\cos^2(a) \sin^2(a)},$$

und schließlich

$$1 = \frac{\cos^2(\lambda) \cdot \cos^2(\varphi)}{\frac{\cos^2(a)}{\cos^2(e)}} + \frac{\sin^2(\lambda) \cdot \cos^2(\varphi)}{\frac{\sin^2(a)}{\sin^2(e)}} \text{ mit } a \leq e \leq 90^\circ \quad (2.3)$$

Entsprechendes ergibt sich für  $l_2 \leq l_1$ .

Setzen wir  $\frac{\sin(a)}{\sin(e)} = p$  und  $\frac{\cos(a)}{\cos(e)} = q$ , so erhält die **Funktionsgleichung der sphärischen Hyperbel** die Form

$$1 = \frac{\sin^2(\lambda) \cdot \cos^2(\varphi)}{p^2} + \frac{\cos^2(\lambda) \cdot \cos^2(\varphi)}{q^2}$$

und nach  $\varphi$  aufgelöst:

$$\cos^2(\varphi) = \frac{p^2 \cdot q^2}{q^2 + (p^2 - q^2) \cdot \cos^2(\lambda)} \text{ mit } p \leq 1 \text{ und } q \geq 1. \quad (2.4)$$

Wegen  $p \leq 1$  und  $q \geq 1$  ist der Zähler und der Nenner des Bruchs immer positiv, so dass die Wurzel aus der rechten Seite der Gleichung (2.4) immer gezogen werden kann. Nun können wir folgende Eigenschaften direkt aus (2.4) entnehmen:

- Ist der Punkt  $(\lambda, \varphi)$  Lösung, dann ist auch der Punkt  $(\lambda, -\varphi)$  Lösung. Die sphärische Hyperbel verläuft also symmetrisch zum Großkreis  $S_1S_2$
- Ist der Punkt  $(\lambda, \varphi)$  Lösung, dann sind auch die Punkte  $(-\lambda, \varphi)$ ,  $(180^\circ - \lambda, \varphi)$  und  $(\lambda - 180^\circ, \varphi)$  Lösungen. Die Trägerebenen des Nullmeridians,  $90^\circ$  Meridians und  $-90^\circ$  Meridians sind somit ebenfalls Symmetrieebenen.
- Die sphärische Hyperbel ist somit punktsymmetrisch zum Mittelpunkt  $O$  der Kugel (siehe Abbildung 2.9).

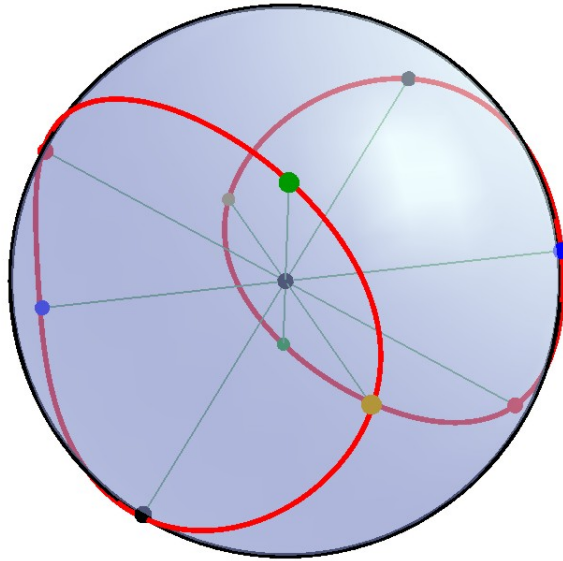


Abbildung 2.9.:

Um die Funktionsgleichung einer sphärischen Ellipse zu erhalten, müssen nach Satz 2.1 in (2.3) die Werte für  $\lambda$ ,  $a$  und  $e$  der Hyperbel ersetzt werden durch  $\lambda - 90$ ,  $90 - a$  und  $90 - e$  (siehe Abbildung 2.7). Die Funktionsgleichung der sphärischen Ellipse lautet daher (vergleiche mit (2.3)):

$$1 = \frac{\cos^2(\lambda) \cdot \cos^2(\varphi)}{\frac{\cos^2(a)}{\cos^2(e)}} + \frac{\sin^2(\lambda) \cdot \cos^2(\varphi)}{\frac{\sin^2(a)}{\sin^2(e)}} \text{ mit } a \geq e \geq 0^\circ$$

Die „Mittelpunktsgleichungen“ von sphärischer Hyperbel und sphärischer Ellipse sind also in dieser Form dieselben. Ein Sonderfall tritt ein, wenn  $a = e$  gilt. Dann liefert (2.3)

$$1 = \cos^2(\lambda) \cdot \cos^2(\varphi) + \sin^2(\lambda) \cdot \cos^2(\varphi) = \cos^2(\varphi) \cdot \underbrace{[\cos^2(\lambda) + \sin^2(\lambda)]}_1 = \cos^2(\varphi)$$

und damit  $\varphi = 0$  für beliebiges  $\lambda$ . Dies liefert den Äquator, welcher sowohl als entartete sphärische Ellipse als auch als entartete sphärische Hyperbel angesehen werden kann.

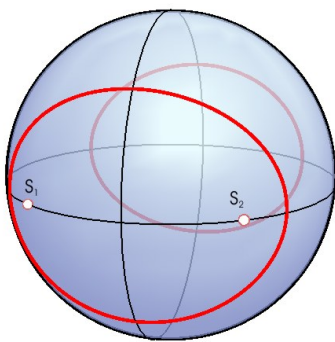
Die hier erhaltenen Ergebnisse werden im folgenden Satz zusammengefasst:



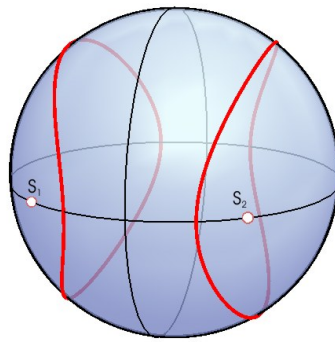
**Satz 2.2** Die Funktionsgleichung eines sphärischen Kegelschnittes zu den Brennpunkten  $S_1(-e, 0)$  und  $S_2(e, 0)$  und zur „Hauptachsenlänge“  $a$  lautet:

$$1 = \frac{\cos^2(\lambda) \cdot \cos^2(\varphi)}{\frac{\cos^2(a)}{\cos^2(e)}} + \frac{\sin^2(\lambda) \cdot \cos^2(\varphi)}{\frac{\sin^2(a)}{\sin^2(e)}}$$

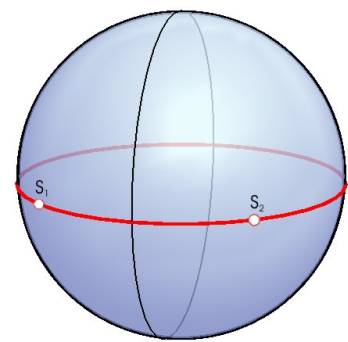
1. Für  $a \geq e$  liefert diese Gleichung eine Ellipse, für  $a \leq e$  eine Hyperbel.
2. Für  $a = e$  liefert diese Gleichung den Äquator.



(a)  $a \geq e$



(b)  $a \leq e$



(c)  $a = e$

Abbildung 2.10.:

## 2.4. Die sphärische Ellipse als Kegelschnitt

In Abschnitt 2.1 und 2.2 haben wir die Kegelschnitte sowohl in der Ebene als auch auf der Sphäre als Ortslinien definiert. Nachdem ein ebener Kegelschnitt auch als Schnittkurve eines quadratischen Kegels und einer Ebene aufgefasst werden kann, wird in diesem Kapitel versucht, die sphärischen Kegelschnitte, insbesondere die sphärische Ellipse, als Schnittkurve eines quadratischen Kegels und einer Sphäre zu erzeugen.

Im Folgenden werden wir also einen quadratischen Kegel mit der Einheitskugel zum Schnitt bringen.

Der Kegel wird mit seiner Symmetrieachse auf die x-Achse so in ein dreidimensionales rechtwinkliges Koordinatensystem gelegt, dass die Spitze im Nullpunkt liegt (siehe Abbildung 2.11). Die Gleichung dieses Kegels lautet nun

$$p \cdot y^2 + q \cdot z^2 - x^2 = 0.$$

Wenn wir diesen Kegel mit der lotrechten Ebene  $x = 1$  zum Schnitt bringen, erhalten wir

$$\frac{y^2}{\frac{1}{p}} + \frac{z^2}{\frac{1}{q}} = 1$$

was uns für

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{p}} = \tan(\alpha), \quad l_2 = \frac{1}{\sqrt{q}} = \tan(\beta)$$

liefert. Setzen wir für  $\frac{1}{p} = \tan^2(\alpha)$  und für  $\frac{1}{q} = \tan^2(\beta)$ , so ergibt sich

$$\frac{y^2}{\tan^2(\alpha)} + \frac{z^2}{\tan^2(\beta)} - x^2 = 0.$$

Bringt man diesen Kegel mit der Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  zum Schnitt, so erhalten wir bei Elimination von  $x$

$$\frac{y^2}{\sin^2(\alpha)} + \frac{z^2}{\sin^2(\beta)} = 1.$$

Dies ist die Gleichung eines Zylinders mit  $x$ -parallelen Erzeugenden. Der Schnitt einer Kugel mit einem quadratischen Kegel liefert demnach die gleiche Kurve wie der Schnitt derselben Kugel mit einem geeignet gewählten quadratischen Zylinder.

Nachdem jeder Punkt dieser Schnittkurve auf der Einheitskugel liegt, gilt für  $y = \cos(\varphi) \cdot \sin(\lambda)$  und für  $z = \sin(\varphi)$ , sodass für die Kurve

$$\frac{\sin^2(\lambda) \cdot \cos^2(\varphi)}{\sin^2(\alpha)} + \frac{\sin^2(\varphi)}{\sin^2(\beta)} = 1$$

gilt. Nachdem wir für

$$\sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi) \cdot (\sin^2(\lambda) + \cos^2(\lambda))$$

setzen können, ergibt sich nach einigen Umformungen

$$1 = \frac{\cos^2(\lambda) \cdot \cos^2(\varphi)}{\cos^2(\beta)} + \frac{\sin^2(\lambda) \cdot \cos^2(\varphi)}{\frac{\sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\beta)}{\cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha)}}. \quad (2.5)$$

Dies liefert nach Satz 2.2 für  $\alpha \geq e$  unter Beachtung von  $\cos(\alpha) = \cos(\beta) \cdot \cos(e)$  eine sphärische Ellipse zu den Hauptachsenlängen  $\alpha$  und  $\beta$  (siehe Abbildung 2.12).

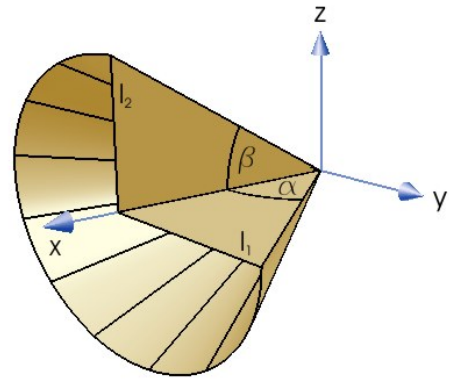


Abbildung 2.11.:

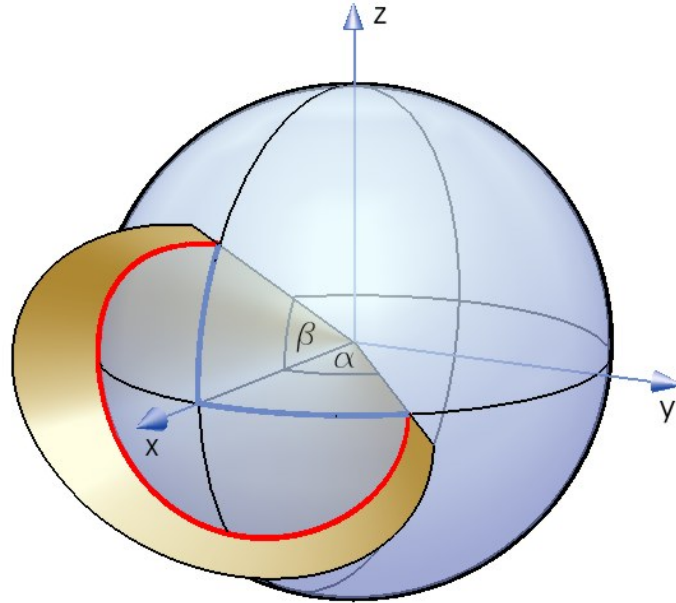


Abbildung 2.12.:

**Satz 2.3** Die Schnittfigur einer Kugel um  $O$  mit einem quadratischen Doppelkegel, dessen Spitze in  $O$  liegt und dessen halbe Öffnungswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  betragen, ist für  $\alpha \neq \beta$  eine sphärische Ellipse zu den Hauptachsenlängen  $\alpha$  und  $\beta$ .

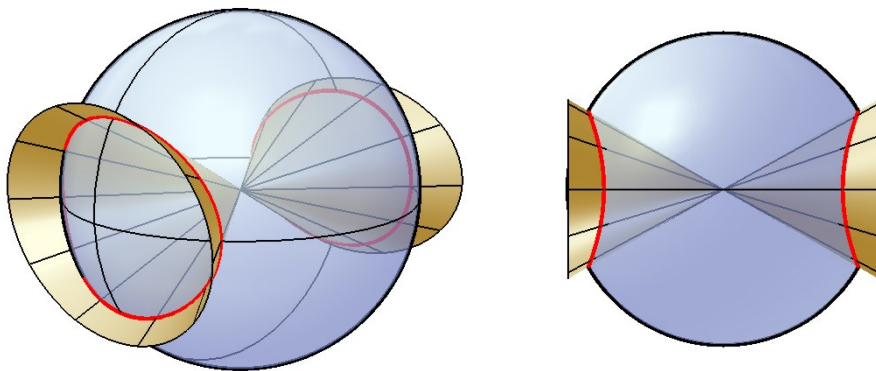


Abbildung 2.13.:

Aus Satz 2.3 folgt:

Gegeben sei eine Ellipse als ebene Raumkurve und eine Kugel mit Mittelpunkt  $O$ . Wird nun diese Ellipse aus  $O$  auf die Kugeloberfläche projiziert, so liefert das Bild dieser Projektion eine sphärische Ellipse oder als Sonderfall einen Kreis (siehe Kapitel 2.7). Ist zusätzlich die Trägerebene der Ellipse eine Tangentialebene der Kugel, so liegt eine **gnomonische Projektion** vor (siehe Kapitel 1.5). Mit Hilfe einer solchen gnomonischen Projektion werden wir nun versuchen, einige Zusammenhänge zwischen der Ebene und der Sphäre herzustellen.

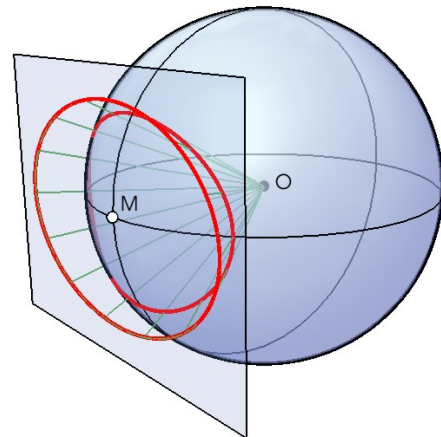


Abbildung 2.14.:

Vorerst aber wollen wir folgende Frage beantworten:

**Gegeben:** Sphärische Ellipse  $\bar{k}$  welche gnomonisch in die Ebene  $\varepsilon : x = 1$  abgebildet wird. Das Bild dieser Projektion sei die ebene Ellipse  $k$ .

**Frage:** Werden zusätzlich die Brennpunkte  $S_1, S_2$  von  $\bar{k}$  auf die Brennpunkte  $S_3, S_4$  von  $k$  abgebildet?

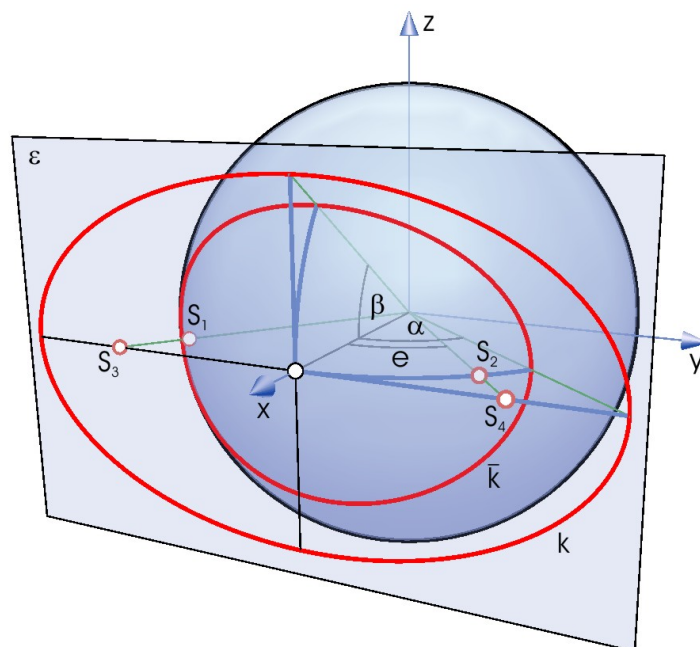


Abbildung 2.15.:

Wir starten mit der sphärischen Ellipse  $\bar{k}$  mit den halben Hauptachsenlängen  $\alpha$  und  $\beta$ , wobei nach Satz 2.3  $\alpha \neq \beta$  gelten muss. Für die Kugelkoordinaten der Brennpunkte von  $\bar{k}$  gilt somit  $S_1(-e/0)$  und  $S_2(e/0)$ , wobei nach (2.2) für

$$e = \arccos\left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}\right)$$

gelten muss. Nach Satz 2.3 gilt für die halben Hauptachsenlängen  $a$  und  $b$  von  $k$

$$a = \tan(\alpha), \quad b = \tan(\beta).$$

Die  $xyz$ -Koordinaten der Bilder von  $S_1$  und  $S_2$  lauten (siehe Abbildung 2.15)

$$S_3(1/\tan(e)/0), \quad S_4(1/\tan(e)/0)$$

wobei nach (2.1) gilt:

$$\tan(e) = \sqrt{\tan^2(\alpha) - \tan^2(\beta)}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\tan\left(\arccos\left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}\right)\right) = \sqrt{\tan^2(\alpha) - \tan^2(\beta)}$$

Umformen gemäß (A.3) liefert

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\beta)}}}{\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos^2(\alpha))}{\cos^2(\alpha)} - \frac{(1 - \cos^2(\beta))}{\cos^2(\beta)}}$$

und weiter

$$\frac{\sqrt{\cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)} = \frac{\sqrt{\cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}. \quad (2.6)$$

Setzen wir  $0 < \alpha < 90$  und  $0 < \beta < 90$  voraus, so liefert (2.6) als einzige Lösung

$$\alpha = \beta.$$

*Bemerkung:*

Für  $\alpha = \beta$  ist die sphärische Ellipse ein Kreis (siehe Kapitel 2.7). Die Brennpunkte von  $\bar{k}$  fallen mit dem Mittelpunkt von  $\bar{k}$  zusammen, und dieser Mittelpunkt wird bei der gegebenen gnomonischen Projektion auf sich abgebildet.

**Satz 2.4** Wird ein sphärischer Kegelschnitt  $\bar{k}$  mit den Brennpunkten  $S_1$  und  $S_2$  gnomonisch abgebildet, so gilt für das Bild  $k$  von  $\bar{k}$ :  
Die Bilder von  $S_1$  und  $S_2$  sind nicht die Brennpunkte von  $k$ .

## 2.5. Konstruktion von DE LA HIRE

Gleichwertig mit der Brennpunktdefinition ist die bereits *ARCHIMEDES* (287-212 v. Chr.) bekannte Eigenschaft zur Erzeugung einer Ellipse:

**Satz 2.5** (o.B.) Verkürzt oder verlängert man die zu einem Kreisdurchmesser normalen Halbsehnen eines Kreises in einem bestimmten Verhältnis, so liegen die neuen Sehnenendpunkte auf einer Ellipse.

Abbildung 2.16 zeigt eine Anwendung dieses Satzes, die als Konstruktion von DE LA HIRE bekannt ist. Dabei sind alle zur Hauptachse normalen Halbsehnen des Hauptscheitelkreises, wie zum Beispiel  $P_0P_x$  im Verhältnis  $\overline{CM} : \overline{C_0M} = b : a$  zu verkürzen. Dies erfolgt, indem man durch den Punkt  $P_0$  den Halbmesser  $MP_0$ , welcher den Nebenscheitelkreis in  $P_1$  schneidet, legt. Die Nebenachsennormale durch  $P_1$  schneidet die Halbsehne  $P_0P_x$  im Ellipsenpunkt  $P$ , weil für diesen gilt:

$$\overline{P_xP} : \overline{P_xP_0} = \overline{MP_1} : \overline{MP_0} = b : a$$

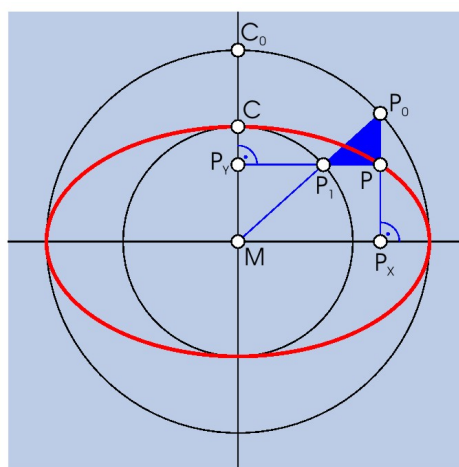


Abbildung 2.16.: **Animation 4**

Analog zur Ebene können wir die Konstruktion von DE LA HIRE auf die Sphäre übertragen, indem Strecken in der Ebene als Großkreise auf der Sphäre interpretiert werden.

**Die Konstruktion von DE LA HIRE** auf der Sphäre lautet folgend:

**Gegeben:** Hauptachsenlänge und Nebenachsenlänge

**Gesucht:** Sphärische Ellipse

1. Die Hauptachse wird auf dem Äquator und die Nebenachse auf dem Nullmeridian angenommen.
2. Konstruktion des Haupt- und Nebenscheitelkreises.
3. Ein beliebig gewählter Großkreis durch  $M$  schneidet den Hauptscheitelkreis in  $P_0$ , und den Nebenscheitelkreis in  $P_1$ .
4. Weiters legen wir einen Großkreis  $l$  durch  $P_0$ , wobei  $l$  die Hauptachse im Punkt  $P_X$  unter rechtem Winkel schneiden muss. Es gilt somit:  $\angle MP_X P_0 = 90^\circ$   
Analog gilt für den Großkreis  $g$  durch  $P_1$ :  $\angle MP_Y P_1 = 90^\circ$

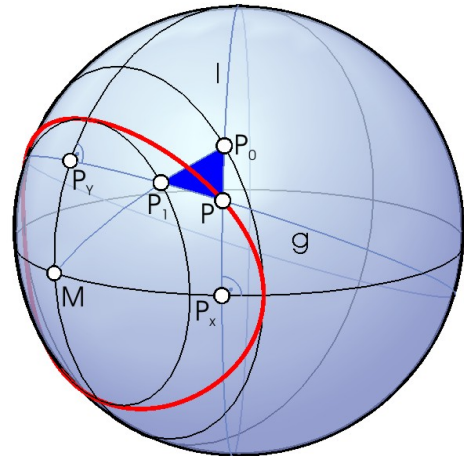


Abbildung 2.17.: **Animation 5**

5. **Behauptung:** Die Großkreise  $l$  und  $g$  schneiden einander im Ellipsenpunkt  $P$ .

*Beweis:*

Wir starten mit der Tangentialebene  $\varepsilon_M$  in  $M$ . In  $\varepsilon_M$  konstruieren wir eine Ellipse mit Hilfe der Konstruktion von DE LA HIRE.

Wenn wir nun die Ebene  $\varepsilon_M$ , insbesondere die Konstruktion von DE LA HIRE, auf die Kugeloberfläche projizieren, so wird der rechte Winkel bei  $P_X$  und  $P_Y$  wieder auf einen rechten Winkel abgebildet. Zusätzlich werden die Haupt- und Nebenscheitelkreise der ebenen Ellipse in die zugehörigen Haupt- und Nebenscheitelkreise der sphärischen Ellipse übergeführt. Weiters

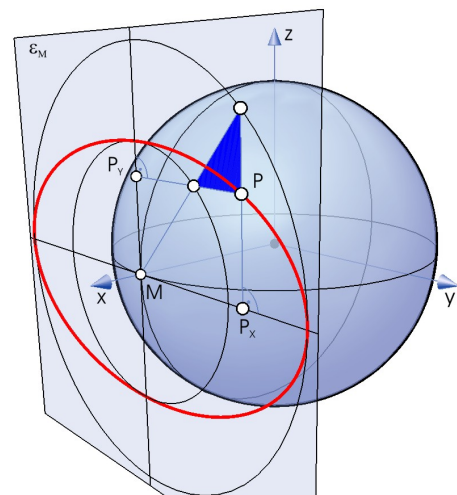


Abbildung 2.18.:

wird nach Satz 2.3 die Ellipse in  $\varepsilon_M$  auf eine sphärische Ellipse abgebildet, womit der Punkt  $P$  als Schnittpunkt der beiden Großkreise  $\widehat{P_X P_0}$  und  $\widehat{P_Y P_1}$  auf einer sphärischen Ellipse liegen muss.

□

Wird umgekehrt die sphärische Konstruktion von DE LA HIRE gnomonisch auf die Ebene  $\varepsilon_M$  projiziert, so liefert das Bild dieser Projektion die Konstruktion von DE LA HIRE in  $\varepsilon_M$ .

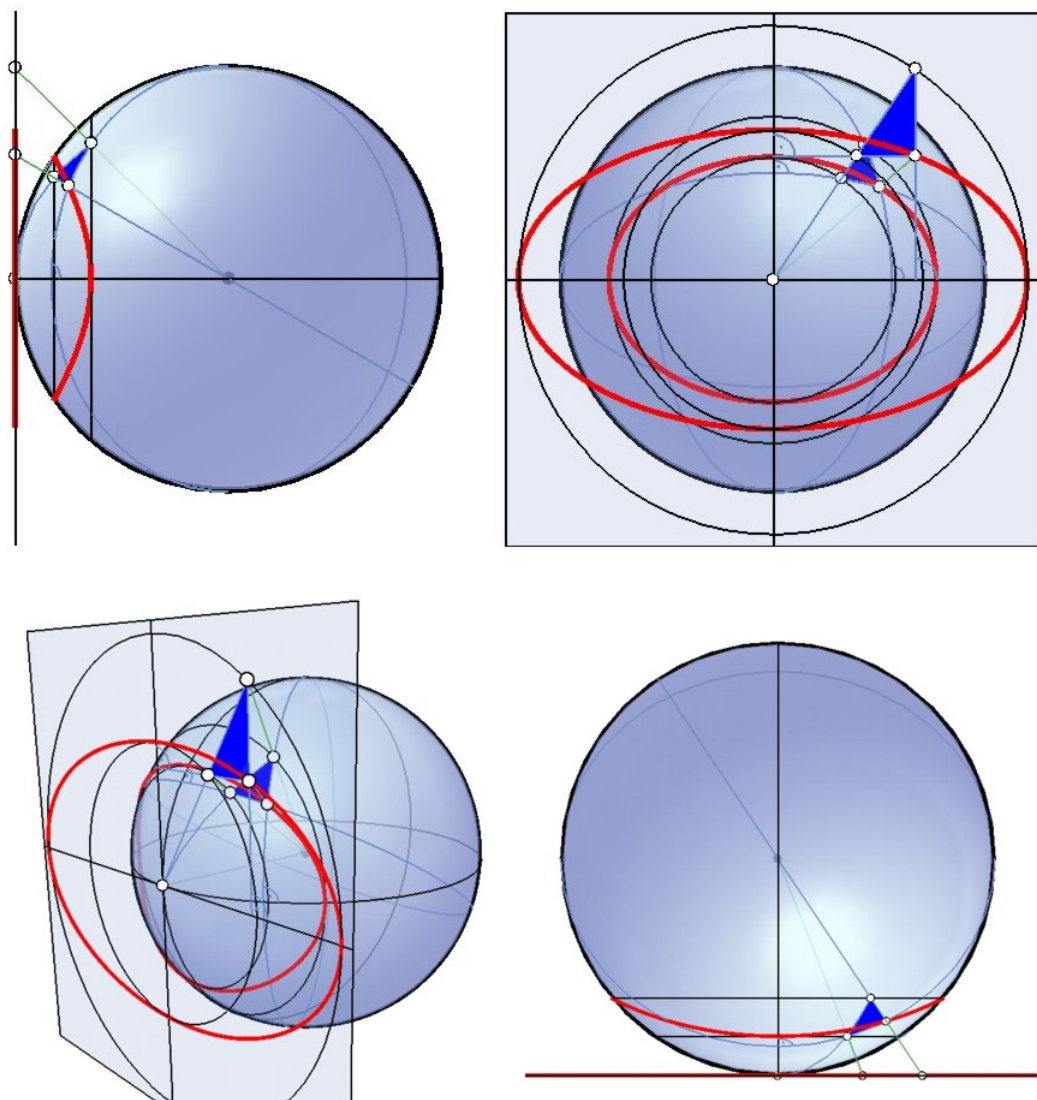


Abbildung 2.19.:



## 2.6. Projektive Erzeugung der Kegelschnitte

In Kapitel 2.1 und 2.2 wurde für die Definition der sphärischen Kegelschnitte eine Längeneinheit  $a$  benötigt. Die projektive Erzeugung der Kegelschnitte liefert eine Möglichkeit, die Kegelschnitte auf eine Weise zu erzeugen, die völlig ohne Maßbeziehungen auskommt. Erstmals taucht diese Erzeugung der Kegelschnitte bei *STEINER* und *CHASLES* auf, systematisch benutzt wird sie aber erst durch *Christian von STAUDT* (1798 – 1868).

### 2.6.1. Projektivitäten in der euklidischen Ebene

Unter einem Grundgebilde 1. Stufe verstehen wir entweder ein **Geradenbüschel** oder eine **Punktreihe**. Ein Geradenbüschel  $P(x)$  ist die Menge aller Geraden  $x$  durch einen Punkt  $P$ . Eine Punktreihe  $p(X)$  ist die Menge aller Punkte  $X$  einer Geraden  $p$  (siehe Abbildung 2.20).

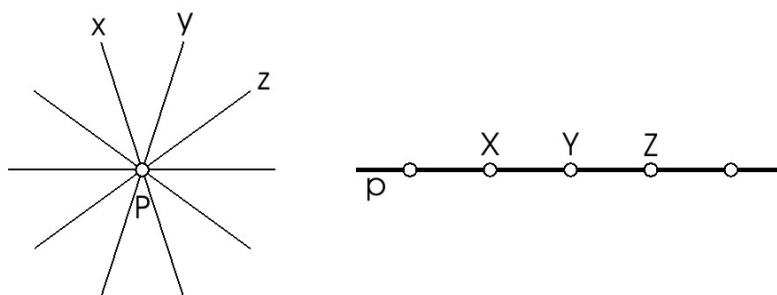


Abbildung 2.20.:

Eine Abbildung zwischen zwei Grundgebilden 1. Stufe wird **Perspektivität** genannt. Es ergeben sich 3 verschiedene Typen von Perspektivitäten.

- Typ a: Zuordnung zwischen Geradenbüschel  $P(x)$  und Punktreihe  $p(X)$ . Wir schreiben:

$$P(x) \overline{\overline{\wedge}} p(X)$$

- Typ b: Beziehung zwischen zwei Punktreihen  $p_1(X_1)$  und  $p_2(X_2)$ . Wir schreiben:

$$p_1(X_1) \overline{\overline{\wedge}} p_2(X_2) \text{ oder } p_1(X_1) \overline{\overline{\wedge}}^P p_2(X_2),$$

wobei die Verbindungsgerade entsprechender Punkte  $X_1$  und  $X_2$  stets durch den festen Punkt  $P$  geht.

- Typ c: Beziehung zwischen zwei Geradenbüschel  $S_1(x_1)$  und  $S_2(x_2)$ . Wir schreiben:

$$S_1(x_1) \overline{\overline{\wedge}} S_2(x_2) \text{ oder } S_1(x_1) \overline{\overline{\wedge}}^p S_2(x_2),$$

wobei die Schnittpunkte entsprechender Geraden  $x_1$  und  $x_2$  stets auf der Geraden  $p$  liegen.

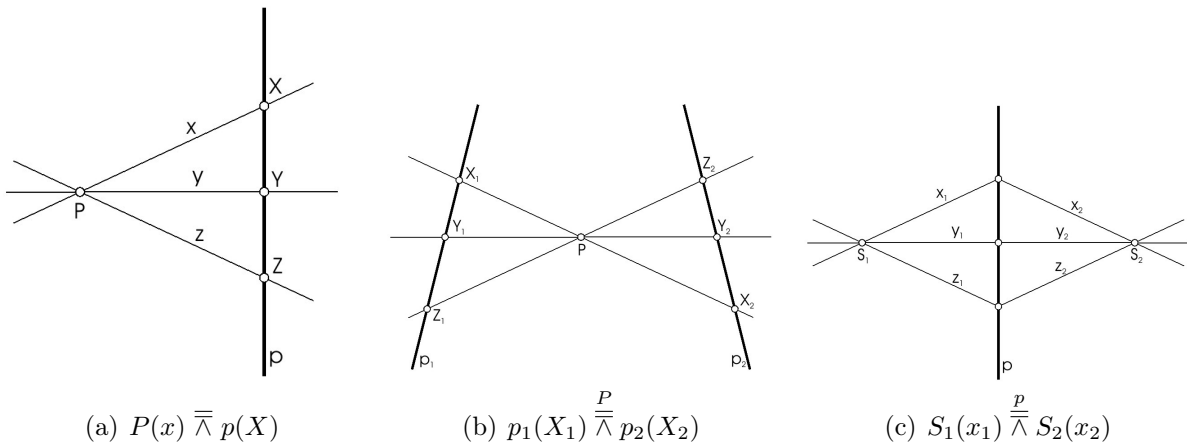


Abbildung 2.21.:

**Definition 2.4** Das Produkt beliebig vieler Perspektivitäten heißt **Projektivität**.

Sind zwei Punktreihen  $p_1(X_1)$  und  $p_2(X_2)$  durch eine Projektivität aufeinander bezogen, so heißen sie *projektiv verbunden*, und wir schreiben:  $p_1(X_1) \overline{\overline{\wedge}} p_2(X_2)$ . Analog gilt für zwei Geradenbüschel  $S_1(x_1)$  und  $S_2(x_2)$ :  $S_1(x_1) \overline{\overline{\wedge}} S_2(x_2)$ .

*Beispiel:*

Eine mögliche Projektivität zwischen zwei Geradenbüschel  $S_1(x_1)$  und  $S_4(x_4)$  kann folgend gegeben sein (siehe Abbildung 2.22):

$$S_1(x_1) \overline{\overline{\wedge}}^{p_1} S_2(x_2) \overline{\overline{\wedge}}^{p_2} S_3(x_3) \overline{\overline{\wedge}}^{p_3} S_4(x_4)$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{S_1(x_1) \overline{\overline{\wedge}} S_4(x_4)}$$

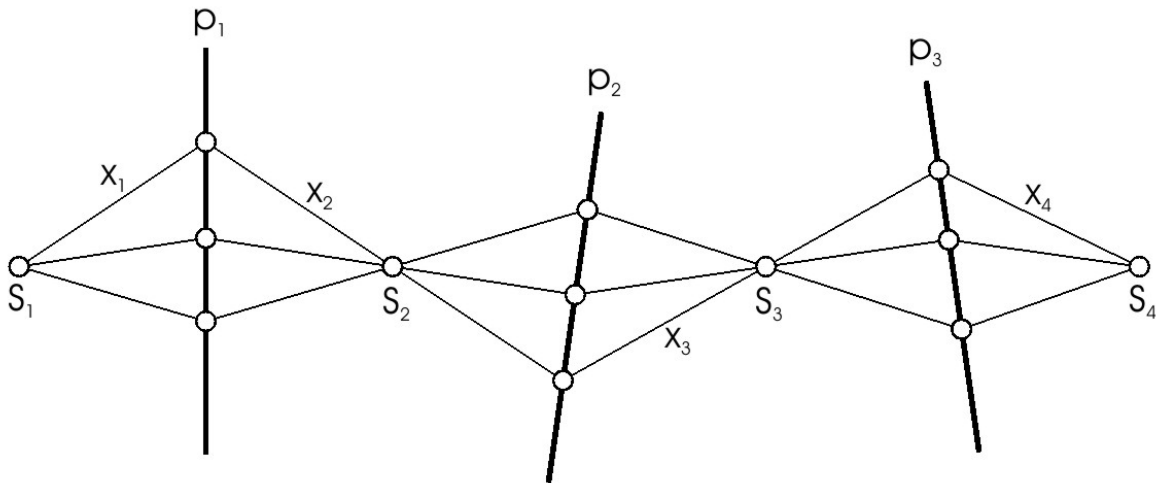


Abbildung 2.22.:

*Bemerkung:*

- Jede Perspektivität ist eine Projektivität.
- Man kann beweisen, dass das Produkt beliebig vieler Perspektivitäten auf ein Produkt zweier Perspektivitäten zurückgeführt werden kann. (**Verkürzungssatz für Projektivitäten**)
- Eine Projektivität ist eindeutig bestimmt, wenn drei Punkte (Geraden) der einen Punktreihe (Geradenbüschel) und die entsprechenden drei Punkte (Geraden) der anderen Punktreihe (Geradenbüschel) gegeben sind. (**Fundamentalsatz der projektiven Geometrie**)

### 2.6.2. Projektivitäten auf der Sphäre

Analog zur euklidischen Ebene definieren wir ein Geradenbüschel  $P(\hat{x})$  als die Menge aller Großkreise  $\hat{x}$  durch einen Punkt  $P$ , und eine Punktreihe  $\hat{p}(X)$  als die Menge aller Punkte  $X$  eines Großkreises  $\hat{p}$ .

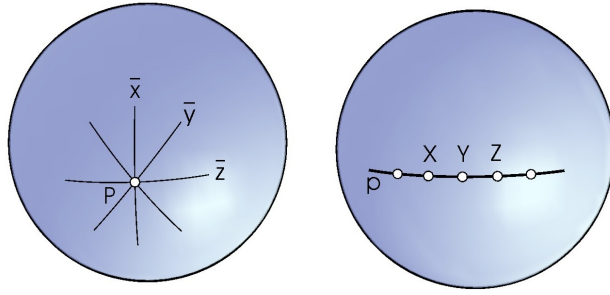


Abbildung 2.23.:

Wiederum erhalten wir 3 verschiedene Typen von „sphärischen“ Perspektivitäten:

- Typ a: Zuordnung zwischen Geradenbüschel  $P(\hat{x})$  und Punktreihe  $\hat{p}(X)$ . Wir schreiben:

$$P(\hat{x}) \overline{\wedge} \hat{p}(X)$$

- Typ b: Beziehung zwischen zwei Punktzeilen  $\hat{p}_1(X_1)$  und  $\hat{p}_2(X_2)$ . Wir schreiben:

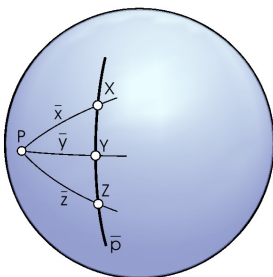
$$\hat{p}_1(X_1) \overline{\wedge} \hat{p}_2(X_2) \text{ oder } \hat{p}_1(X_1) \overset{P}{\overline{\wedge}} \hat{p}_2(X_2),$$

wobei der Großkreis durch entsprechende Punkte  $X_1$  und  $X_2$  stets durch den festen Punkt  $P$  geht.

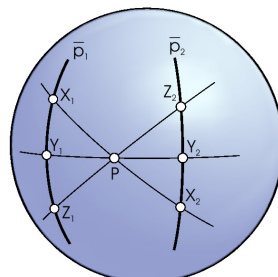
- Typ c: Beziehung zwischen zwei Geradenbüschel  $S_1(\hat{x}_1)$  und  $S_2(\hat{x}_2)$ . Wir schreiben:

$$S_1(\hat{x}_1) \overline{\wedge} S_2(\hat{x}_2) \text{ oder } S_1(\hat{x}_1) \overset{p}{\overline{\wedge}} S_2(\hat{x}_2),$$

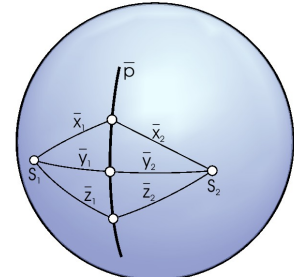
wobei die Schnittpunkte entsprechender „Geraden“ (Großkreise)  $\hat{x}_1$  und  $\hat{x}_2$  stets auf dem Großkreis  $\hat{p}$  liegen.



(a)  $P(\hat{x}) \overline{\wedge} \hat{p}(X)$



(b)  $\hat{p}_1(X_1) \overset{P}{\overline{\wedge}} \hat{p}_2(X_2)$



(c)  $S_1(\hat{x}_1) \overset{p}{\overline{\wedge}} S_2(\hat{x}_2)$

Abbildung 2.24.:

**Definition 2.5** Das Produkt beliebig vieler sphärischer Perspektivitäten heißt *sphärische Projektivität*.

*Bemerkung:*

Eine Projektivität in der Ebene kann durch gnomonische Projektion in eine sphärische Projektivität übergeführt werden.

### 2.6.3. Projektive Definition der Kegelschnitte

**Definition 2.6** Gegeben sei eine Projektivität  $\pi : S_1(x_1) \bar{\cap} S_2(x_2)$ . Ist  $\pi$  keine Perspektivität und  $S_1 \neq S_2$ , so heißt die Menge  $k = \{X | XIx_1, XIx_2, \text{ wobei } x_2 = \pi(x_1)\}$  „**Punktkegelschnitt**“.

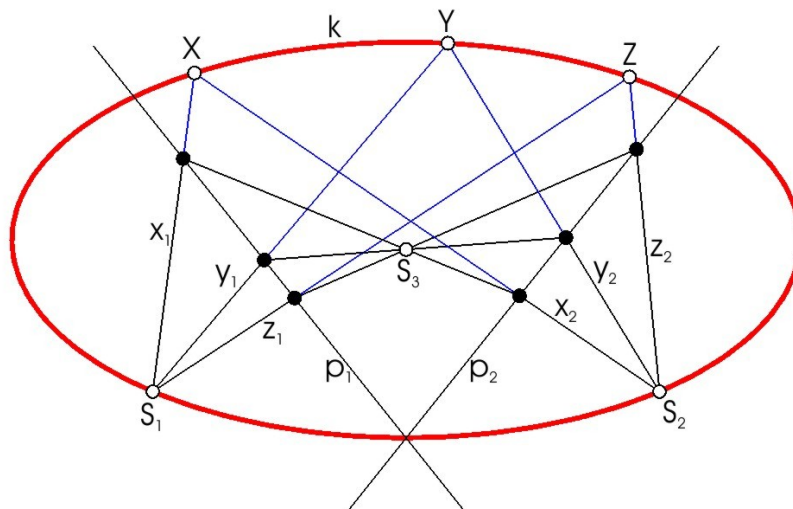


Abbildung 2.25.:

*Bemerkung:*

Ist  $K_E$  die Menge aller Kegelschnitte im Sinne der elementargeometrischen Brennpunktdefinition und  $K_P$  die Menge aller Punktkegelschnitte im Sinne der projektiven Definition, so gilt:

$$K_E = K_P$$

**Satz 2.6** Ein Punktkegelschnitt ist durch 5 Punkte, von denen keine 3 auf einer Geraden liegen, eindeutig bestimmt.

*Beweis:*

Seien  $S_1 \dots S_5$  die gegebenen Punkte. Man wählt zwei der fünf Punkte (zum Beispiel  $S_1$  und  $S_2$ ) als Büschelscheitel und verwendet die restlichen drei Punkte zur Definition der Projektivität  $\pi : S_1(x_1) \bar{\wedge} S_2(x_2)$ . Nach Definition 2.6 erzeugt  $\pi$  einen Punktkegelschnitt durch alle 5 Punkte. Nach dem Fundamentalsatz ist die Projektivität  $\pi$  und folglich der Kegelschnitt eindeutig bestimmt.

□

Analog zum Punktkegelschnitt in der Ebene können wir einen sphärischen Kegelschnitt wie folgt definieren:

**Definition 2.7** Gegeben sei eine sphärische Projektivität  $\pi : S_1(\hat{x}_1) \bar{\wedge} S_2(\hat{x}_2)$ . Ist  $\pi$  keine Perspektivität und  $S_1 \neq S_2$ , so heißt die Menge  $k = \{X | XI\hat{x}_1, XI\hat{x}_2, \text{ wobei } \hat{x}_2 = \pi(\hat{x}_1)\}$  „**sphärischer Punktkegelschnitt**“.

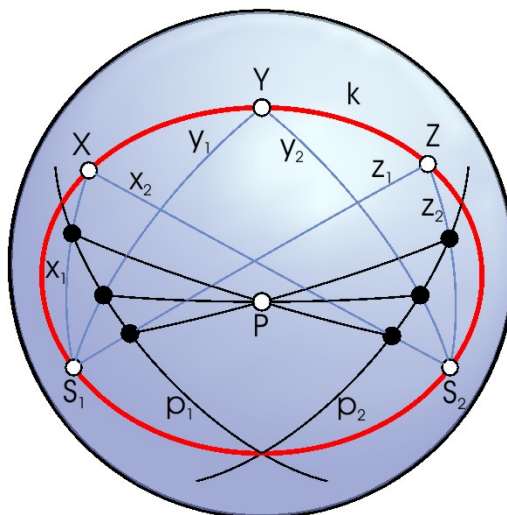


Abbildung 2.26.:

**Satz 2.7** Ein sphärischer Punktkegelschnitt ist durch 5 Punkte, von denen keine 3 auf einem Großkreis liegen, eindeutig bestimmt.

*Beweis:*

Seien  $S_1 \dots S_5$  die gegebenen Punkte. Wir projizieren  $S_1 \dots S_5$  gnomonisch auf die Ebene  $\varepsilon$ . In  $\varepsilon$  ist der Punktkegelschnitt  $k_\varepsilon$  nach Satz 2.6 eindeutig bestimmt. Das Urbild von  $k_\varepsilon$  unter der gnomonischen Projektion liefert nach Satz 2.3 den Kegelschnitt  $k$ .

□

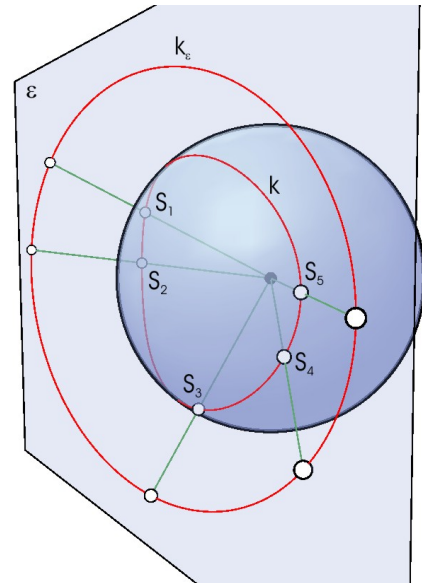


Abbildung 2.27.:

*Bemerkung:*

- Während ein **Linielement**  $(A, t_A)$  eines ebenen Kegelschnitts aus der Tangente  $t_A$  und dem zugehörigen Berührungspunkt  $A$  besteht, besteht ein Linielement  $(A, \hat{t}_A)$  eines sphärischen Kegelschnitts aus dem Großkreis  $\hat{t}_A$  und dem Berührungspunkt  $A$ .
- Wir haben bereits gezeigt dass Punktkegelschnitte durch 5 Punkte eindeutig bestimmt sind. Weiters sind ebene und sphärische Kegelschnitte durch

– 3 Punkte und 1 Linielement

– 1 Punkt und 2 Linielemente

eindeutig bestimmt.

## 2.6.4. Der Satz von Pascal

### Der Satz von Pascal in der euklidischen Ebene

**Satz 2.8** (o.B.)(*Satz von Pascal*) Seien 1...6 beliebige Punkte eines Punktkegelschnittes und

$$\overline{12} \cap \overline{45} = R$$

$$\overline{23} \cap \overline{56} = S$$

$$\overline{34} \cap \overline{61} = T$$

dann gilt:  $R$ ,  $S$  und  $T$  sind kollineare Punkte.

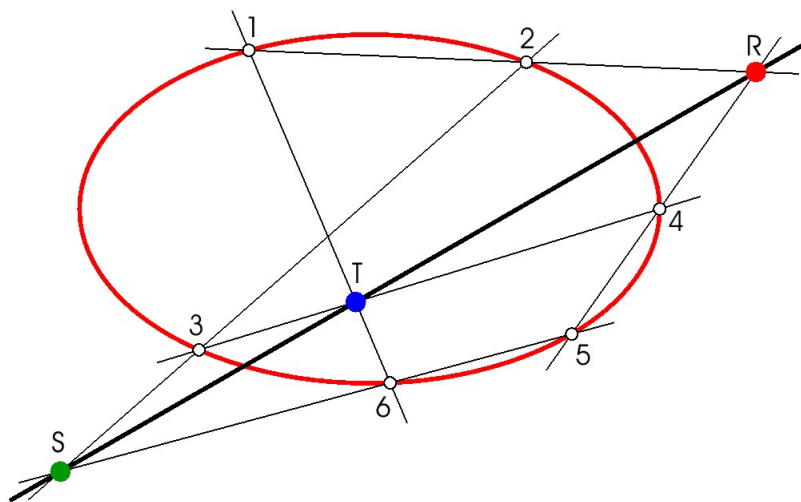


Abbildung 2.28.:

*Bemerkung:*

- Der Satz von Pascal gilt auch dann noch, wenn...
  - zwei Punkte zum Beispiel 1 und 2 zusammenfallen und statt der Verbindungsgerade die Tangente an den Punktkegelschnitt in  $1 = 2$  genommen wird (Siehe Abbildung 3.11 auf Seite 56).
  - zweimal zwei Punkte (1, 2) und (3, 4) zusammenfallen, sofern man statt der Verbindungsgeraden die entsprechenden Tangenten nimmt.



- dreimal zwei Punkte (1, 2) , (3, 4) und (5, 6) zusammenfallen, sofern man statt der Verbindungsgeraden die entsprechenden Tangenten nimmt.
- Liegen die Punkte  $R, S$  und  $T$  aus Satz 2.8 kollinear, so liegen die Punkte 1...6 auf einem Punktkegelschnitt (**Satz v. Pascal - Umkehrung**).

### Der Satz v. Pascal auf der Sphäre

**Satz 2.9 (Satz v. Pascal auf d. Sphäre)** Seien 1...6 beliebige Punkte eines sphärischen Punktkegelschnittes und

$$\widehat{12} \cap \widehat{45} = R \text{ und } R_1$$

$$\widehat{23} \cap \widehat{56} = S \text{ und } S_1$$

$$\widehat{34} \cap \widehat{61} = T \text{ und } T_1$$

dann gilt:  $R, S, T$  sowie  $R_1, S_1$  und  $T_1$  liegen auf einem Großkreis.

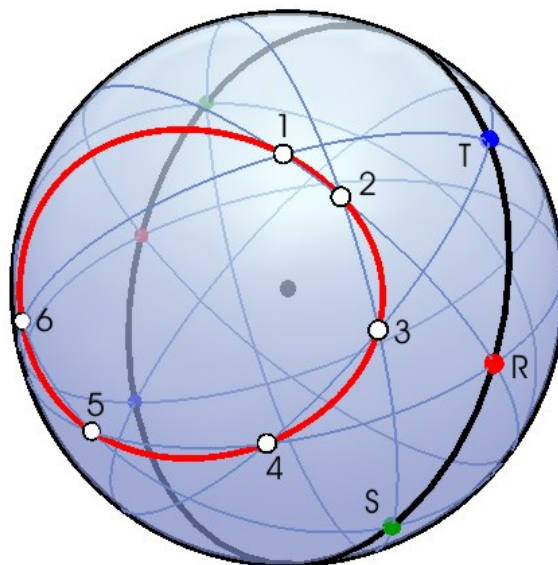


Abbildung 2.29.: Animation 6

*Beweis:*

Die gnomonische Projektion führt die sphärische Version von Pascal in die ebene Version über. Die Punktepaare  $(R, R_1)$ ,  $(S, S_1)$  und  $(T, T_1)$  liegen je zentralsymmetrisch bezüglich des Kugelmittelpunktes und folglich liegen alle 6 Punkte auf demselben Großkreis.

□

*Bemerkung:*

- Der sphärische Satz von Pascal gilt auch dann noch, wenn...
  - Fall a: zwei Punkte zum Beispiel 1 und 2 zusammenfallen und statt des Großkreises durch 1 und 2 der berührende Großkreis an den Punktkegelschnitt in  $1 = 2$  genommen wird.
  - Fall b: zweimal zwei Punkte  $(1, 2)$  und  $(3, 4)$  zusammenfallen, sofern man statt der Großkreise durch 1, 2 und 3, 4 die berührenden Großkreise an den Punktkegelschnitt in  $1 = 2$  und  $3 = 4$  nimmt.
  - Fall c: dreimal zwei Punkte  $(1, 2)$ ,  $(3, 4)$  und  $(5, 6)$  zusammenfallen, sofern man statt der Großkreise durch 1, 2 ; 3, 4 und 5, 6 die berührenden Großkreise an den Punktkegelschnitt in  $1 = 2$ ,  $3 = 4$  und  $5 = 6$  nimmt.

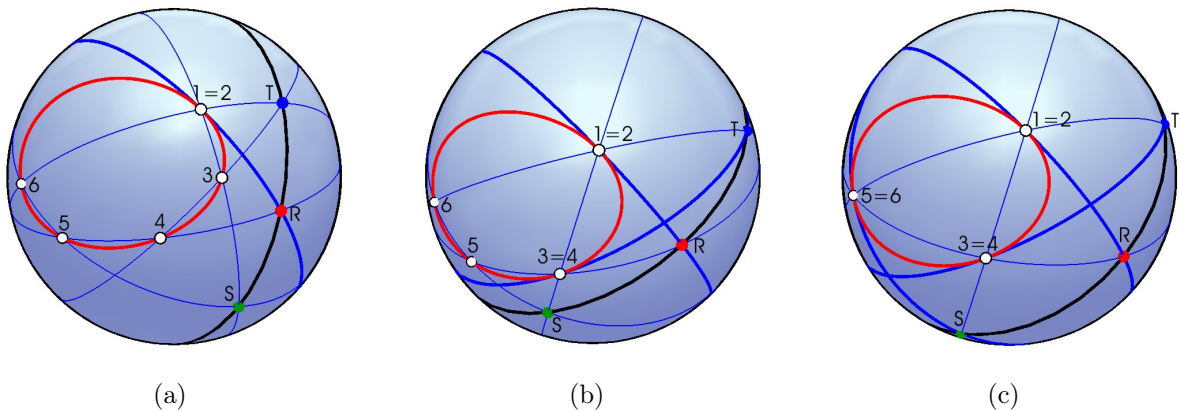


Abbildung 2.30.:

## 2.7. Kreise

**Definition 2.8** Unter einem **Kreis** verstehen wir die Menge aller Punkte  $P$  einer Ebene, die von einem festen Punkt  $M$ , dem **Mittelpunkt**, konstanten Abstand besitzen.

*Bemerkung:*

Zu jedem Kreis auf der Sphäre existieren zwei Mittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$ , und somit zwei Radien  $\alpha = \widehat{M_1P}$  und  $180 - \alpha = \widehat{M_2P}$ .

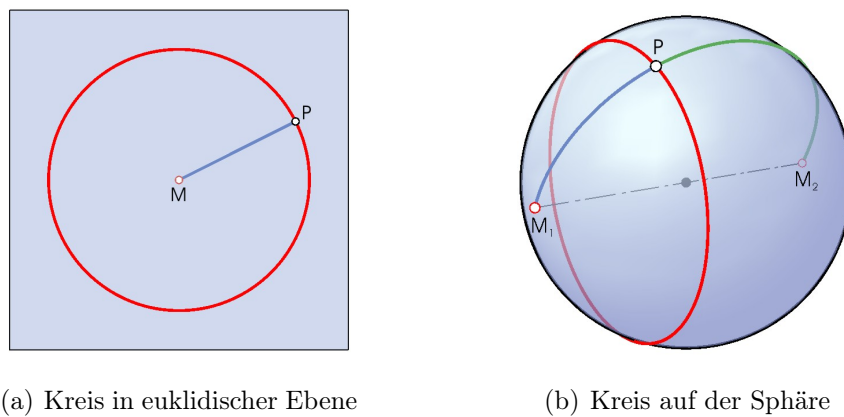


Abbildung 2.31.:

In Abschnitt 2.1 haben wir die Ellipse mit Hilfe der Brennpunktdefinition definiert. Als Sonderfall von Definition 2.1 betrachten wir:

$S_1 = S_2 = M : \Rightarrow \overline{S_1P} + \overline{S_2P} = 2 \cdot \overline{MP} = 2 \cdot a \Rightarrow \overline{MP} = a$ . Der Abstand aller Punkte  $P$  von einem festen Punkt  $M$  ist somit *konstant*  $= a$ , und wir erhalten nach Definition 2.8 einen Kreis.

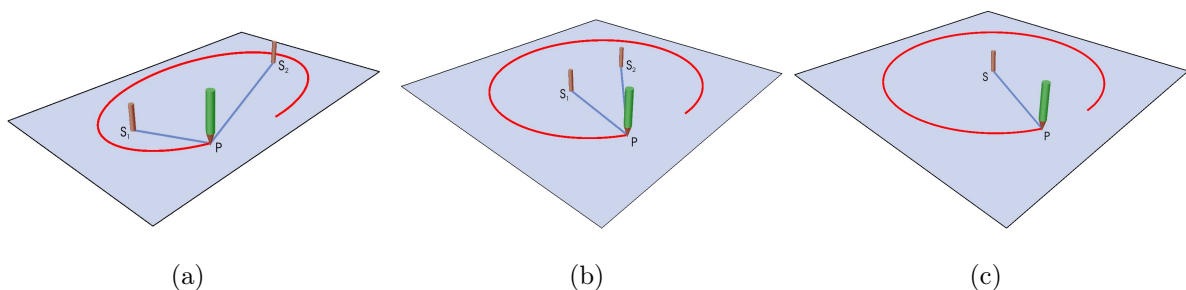


Abbildung 2.32.:

Analog gilt für die sphärische Ellipse:

Setzen wir in Definition 2.2:  $S_1 = S_2 = M$  so gilt ebenfalls  $|\widehat{MP}| = a$  und wir erhalten einen Kreis.

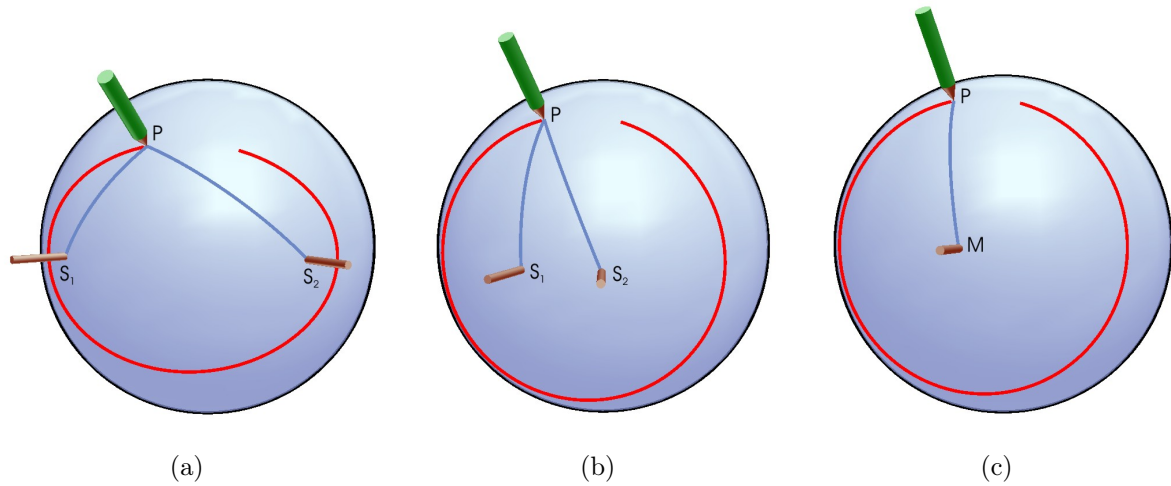


Abbildung 2.33.:

In Abschnitt 2.4 haben wir die sphärische Ellipse als Schnittkurve eines quadratischen Kegels  $py^2 + qz^2 - x^2 = 0$  und einer Sphäre erzeugt. Wie bereits in Satz 2.3 behandelt, ist diese Schnittkurve für  $\alpha \neq \beta$  eine sphärische Ellipse.

Ein Sonderfall liegt vor, wenn für die Koeffizienten des Kegels  $p = q$  gilt. Dann sind die halben Öffnungswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  des Kegels gleich und der quadratische Kegel ist ein Drehkegel. Als Schnittkurve ergibt sich somit ein Kreis.

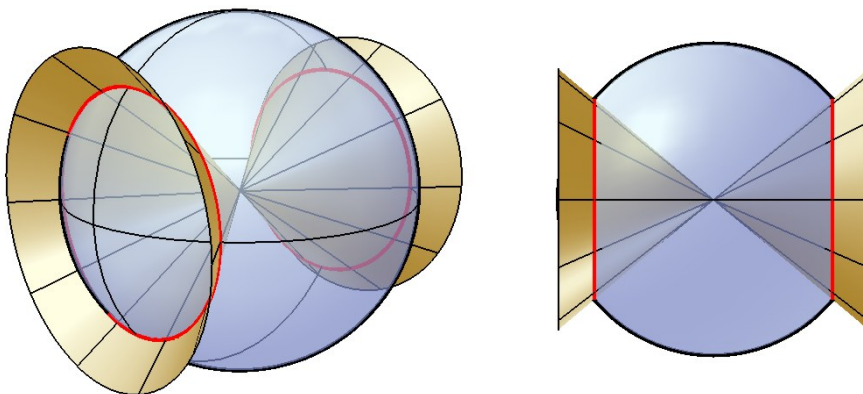


Abbildung 2.34.:

## 2.8. Leitkreis und Gegenpunkte

### 2.8.1. Die Leitkreise der ebenen Kegelschnitte

Wir versuchen folgendes Problem zu lösen:

**Gegeben:** Kreis  $l$  mit Mittelpunkt  $M$ , Punkt  $F$  wobei  $F \neq M$  und  $F \notin l$ .

**Gesucht:** Welche Kurve  $k$  bildet die Menge aller Punkte  $P$ , mit der Eigenschaft:

$$|\overline{PF}| = |\overline{Pl}|$$

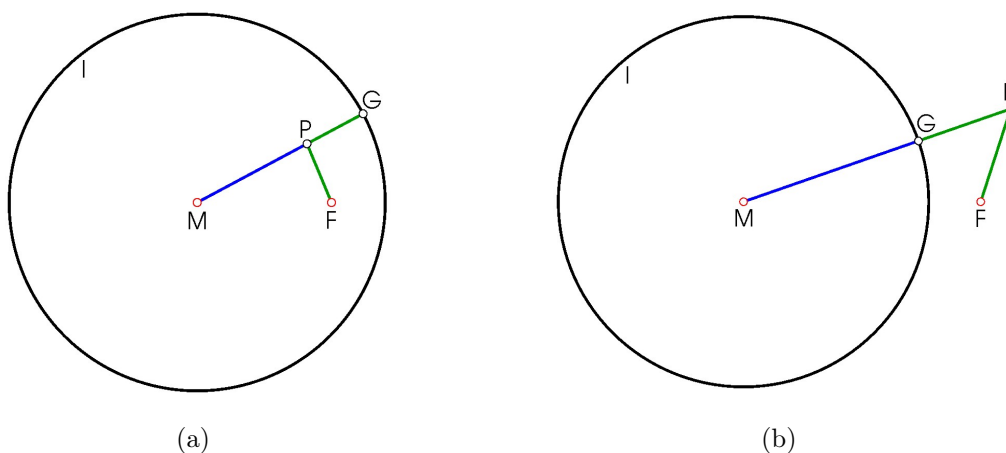


Abbildung 2.35.:

- Fall 1: Für einen beliebig gewählten Punkt  $G \in l$  gilt:  $|\overline{MG}| = r = konst.$  Liegt nun der feste Punkt  $F$  innerhalb des Kreises  $l$ , so gilt für jeden Punkt  $P \in \overline{MG}$

$$|\overline{MP}| + |\overline{PG}| = |\overline{MP}| + |\overline{FP}| = r = konst.$$

Nach Definition 2.1 ist die Kurve  $k$  eine Ellipse mit den Brennpunkten  $M$  und  $F$  zur Hauptachsenlänge  $r$ .

- Fall 2: Liegt  $F$  außerhalb des Kreises  $l$ , dann gilt

$$|\overline{MP}| - |\overline{PG}| = |\overline{MP}| - |\overline{FP}| = r = konst.$$

Somit ist  $k$  eine Hyperbel mit den Brennpunkten  $M$  und  $F$  zur Hauptachsenlänge  $r$ .

Der Kreis  $l$  wird *Leitkreis* und die Punkte  $G \in l$  werden *Gegenpunkte* genannt.

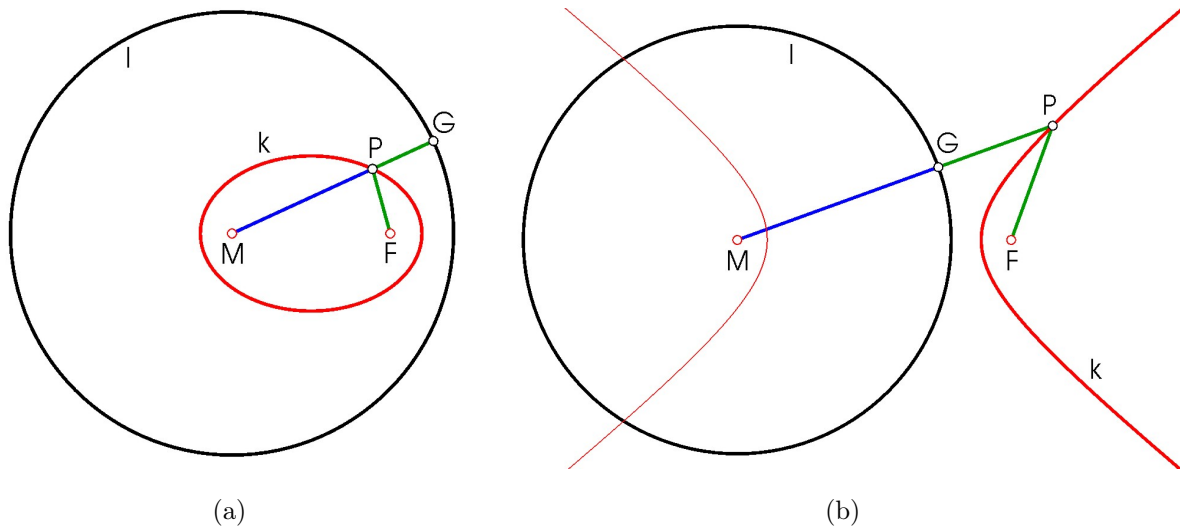


Abbildung 2.36.:

## 2.8.2. Die Leitkreise der sphärischen Kegelschnitte

Analog zur Ebene betrachten wir folgendes Problem:

**Gegeben:** Kreis  $l$  zu den Mittelpunkten  $M_1, M_2$  (siehe Definition 2.8), sowie ein fester Punkt  $F$  mit  $F \neq M_1 \neq M_2$  und  $F \notin l$ .

**Gesucht:** Welche Kurve  $k$  bildet die Menge aller Punkte  $P$ , mit der Eigenschaft:

$$|\widehat{PF}| = |\widehat{Pl}|$$

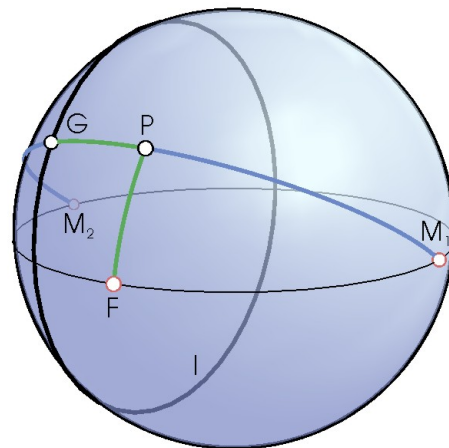


Abbildung 2.37.:

- Fall 1: Für einen beliebig gewählten Punkt  $G \in l$  gilt:  $|\widehat{M_1G}| = r = \text{konst.}$  Liegt nun der Punkt  $P$  auf dem Großkreis  $\widehat{M_1G}$  so gilt wegen  $|\widehat{PF}| = |\widehat{Pl}|$ :

$$|\widehat{M_1P}| + |\widehat{PG}| = |\widehat{M_1P}| + |\widehat{PF}| = r$$

Nach Definition 2.2 liegt somit die Kurve  $k$  auf einer sphärischen Ellipse mit den Brennpunkten  $F$  und  $M_1$  zur Hauptachsenlänge  $r$ .

- Fall 2: Nach Definition 2.8 gilt ebenso  $|\widehat{M_2G}| = 180 - r = \text{konst.}$ , und weiter

$$|\widehat{M_2P}| - |\widehat{PG}| = |\widehat{M_2P}| - |\widehat{PF}| = 180 - r.$$

Dies liefert für die Kurve  $k$  nach Definition 2.3 eine sphärische Hyperbel mit den Brennpunkten  $M_2$  und  $F$  zur Hauptachsenlänge  $180 - r$ .

Somit liegt die Kurve  $k$  einerseits auf einer sphärischen Ellipse zu den Brennpunkten  $F$  und  $M_1$  zur Hauptachsenlänge  $r$ , und andererseits auf einer sphärischen Hyperbel zu den Brennpunkten  $M_2$  und  $F$  zur Hauptachsenlänge  $180 - r$  (vergleiche mit Satz 2.1).

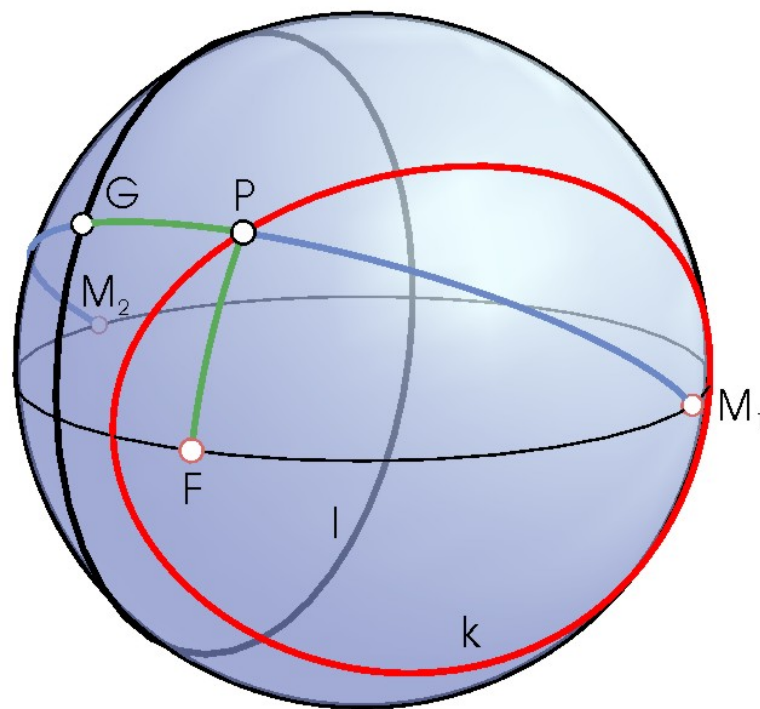


Abbildung 2.38.: Animation 7

# 3. Anwendungen

## 3.1. Funknavigation

Unter dem Begriff **Funknavigation** werden Verfahren zur Navigation zusammengefasst, die Radiowellen zur Positionsbestimmung nutzen. Die Funknavigation basiert im Allgemeinen auf festen Sendestationen, die Signale aussenden, mit deren Hilfe ein Empfänger seine Position bestimmen kann. Man unterscheidet zwischen **Peilverfahren** und **Hyperbelverfahren**.

### 3.1.1. Peilverfahren

Bei den Peilverfahren wird die Herkunftsrichtung eines Signals bestimmt. Dabei wird entweder das Signal vom Sender gerichtet abgestrahlt (**Fremdpeilung**) oder der Empfänger kann mittels einer geeigneten Antenne die Herkunftsrichtung bestimmen (**Eigenpeilung**). Kennt man die Richtungen zweier Sendestationen, so kann man daraus seine Position herleiten.

*Bemerkung:*

Kennt man die Position der Peilstellen  $P_1$  und  $P_2$ , und will man die Koordinaten von  $S$  bestimmen, so erhält man bei der Fremdpeilung die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  (siehe Abbildung 3.1(a)). Nun können die Koordinaten von  $S$  nach Abschnitt 1.4 berechnet werden. Diese Lösungsmethode wird **Vorwärtseinschnitt** genannt.

Kennt man wiederum die Position von  $P_1$  und  $P_2$ , und will man die Koordinaten von  $S$  durch Eigenpeilung bestimmen, so erhält man die Winkel  $\gamma$  und  $\delta$  (wobei  $N$  der Nordpol ist). Eine rechnerische Lösung wird in [1] (S 71-77) angegeben. Diese Lösungsmethode wird **Rückwärtseinschnitt** (siehe auch Kapitel 3.4.2) genannt.



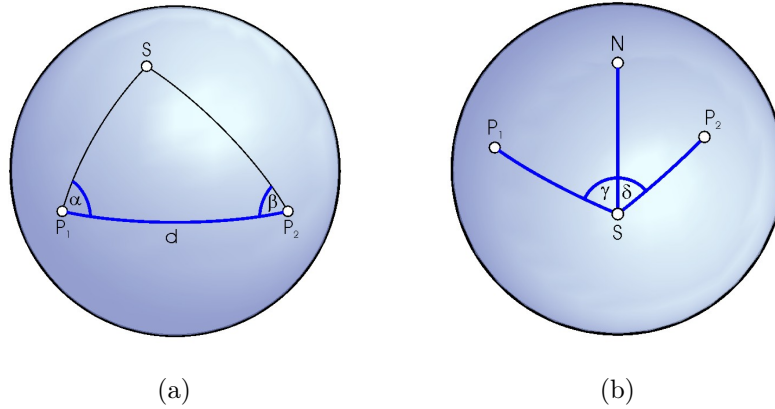


Abbildung 3.1.:

### 3.1.2. Hyperbelverfahren

Bei den Hyperbelverfahren senden mindestens drei Sendestationen zeitgleich jeweils ein Signal aus. Die Signale treffen beim Empfänger zeitlich versetzt ein. Aus dem Unterschied in den Signallaufzeiten kann der Empfänger seine Position relativ zu den Sendestationen ermitteln. Da die Position der Sendestationen bekannt ist, lässt sich daraus die geographische Position ableiten. Hyperbelverfahren basieren also nicht auf der Richtungsbestimmung, sondern einer Entfernungsbestimmung. Da sich aus den Signalen von nur zwei Sendestationen mehrere Möglichkeiten für die errechnete Position ergeben, die auf einer Hyperbel liegen (daher die Bezeichnung Hyperbelverfahren), benötigt man mindestens drei Stationen. Hyperbelverfahren werden in den Navigationssystemen *LORAN-C* [11], *Decca* [12] und *OMEGA* eingesetzt.

Im folgenden wird das *OMEGA* Navigationssystem genauer behandelt.

#### Das *OMEGA* Navigationssystem

*OMEGA* ist ein Eigenname und sollte andeuten, es handle sich um das (letzte) ultimative Navigationssystem. *OMEGA* ist ein vergleichsweise neues Navigationssystem. Das System ist durch die US Navy aufgebaut worden und wurde 1968 fertiggestellt. Im Gegensatz zu *Decca* und *LORAN-C* ist *OMEGA* weltweit verfügbar.

Der mathematische Hintergrund ist folgender:

Von zwei Sendern  $S_1$  und  $S_2$  werden frequenzgleiche und phasengleiche elektromagnetische Wellen abgestrahlt, die sich auf Großkreisen ausbreiten. Bei der Überlagerung der Wellenzüge treten Interferenzen auf. An allen Punkten der Erdoberfläche, in denen die Differenz der Abstände von  $S_1$  und  $S_2$  gleich ist, kann dann dieselbe Phasendifferenz der ankommenden Wellen beobachtet werden. Diese Punkte liegen nach

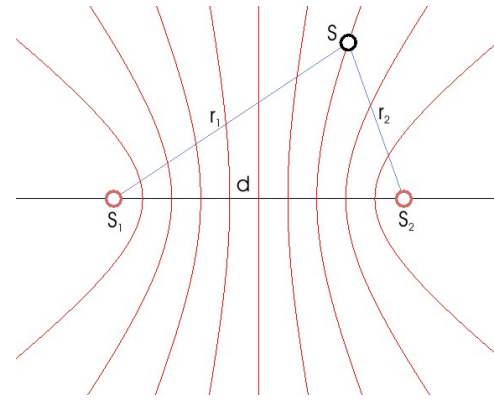


Abbildung 3.2.:

Definition 2.3 auf sphärischen Hyperbeln, deren Brennpunkte  $S_1$  und  $S_2$  sind (Abbildung 3.2 zeigt ein ebenes Analogon). Die Phasendifferenz 0 wird beispielsweise an allen Orten festgestellt, deren Entfernungs-differenz von  $S_1$  und  $S_2$   $|r_1 - r_2| = n \cdot \lambda$  ist, wobei  $r_1 = |\widehat{S_1 S}|$ ,  $r_2 = |\widehat{S_2 S}|$ ,  $\lambda$  die ausgestrahlte Wellenlänge und  $n = 0, 1, 2, 3 \dots$  bedeutet. Für jedes  $n \neq 0$  gibt es so zwei Hyperbeläste, auf denen die entsprechenden Orte liegen. Für  $n = 0$  liegen die Orte auf der Mittelsenkrechten zu  $\widehat{S_1 S_2}$ . Für alle anderen möglichen Phasendifferenzen  $\neq 0$ , also zwischen 0 und  $2\pi$ , liegen die entsprechenden Orte gleicher Phasendifferenz auf Hyperbeln, deren Äste zwischen denen zur Phasendifferenz 0 liegen. Wird der Abstand der Hyperbeläste für gleiche Phasendifferenz auf der Basis  $\widehat{S_1 S_2}$  gemessen, so ist dieser nur von der Wellenlänge  $\lambda$  abhängig. Für dieselbe Phasendifferenz ist beispielsweise  $d = \frac{\lambda}{2}$  der Abstand zwischen zwei benachbarten Hyperbelästen, denn die Abstandsdifferenzen zu  $S_1$  und  $S_2$  unterscheiden sich um  $\lambda = 2 \cdot d$ . Da die Sendefrequenz beim OMEGA-Verfahren extrem niedrig ist (10,4 kHz) und damit die Wellenlänge sehr groß ist ( $\lambda = 29,4 \text{ km}$ ), haben benachbarte Hyperbeläste für dieselbe Phasendifferenz auf der Basis einen Abstand von ca.  $\frac{\lambda}{2} = 15 \text{ km}$ .

Wird nun umgekehrt in einem Ort  $S$  eine bestimmte Phasendifferenz bezüglich des Sendepaares  $S_1$  und  $S_2$  festgestellt, so ist damit der dazugehörige Hyperbelast noch nicht eindeutig bestimmt, da mit der gemessenen Phasendifferenz nicht auch unmittelbar die Abstandsdifferenz bekannt ist. Um entscheiden zu können, auf welchem der Hyperbeläste zu der gemessenen Phasendifferenz man sich befindet, müssen zusätzliche Messungen oder Zählungen vorgenommen werden. So kann man z.B. beim Start

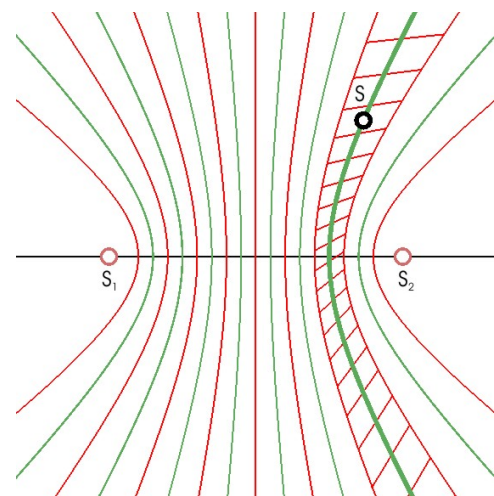


Abbildung 3.3.:

eines Schiffes (Flugzeugs), der ja in einem bekannten Ort stattfindet, beginnend, die Hyperbeläste zur Phasendifferenz 0 zählen, die bei der Fahrt überschritten werden. Aus einer Karte, auf der diese Hyperbeläste für jeden Sender des Omegasystems eingetragen sind, kann man dann jederzeit entnehmen, in welchem Hyperbelstreifen man sich befindet (siehe Abbildung 3.3).

Wendet man dasselbe Verfahren auf ein zweites Senderpaar  $S_3$  und  $S_4$  an, so erhält man zwei Hyperbelstreifen, die eine Fläche überdecken, auf der sich der Beobachtungsort  $S$  befindet. Die gemessenen Phasendifferenzen bezüglich der beiden Senderpaare legen dann zwei Hyperbeln fest, die einander in  $S$  schneiden (siehe Abbildung 3.4).

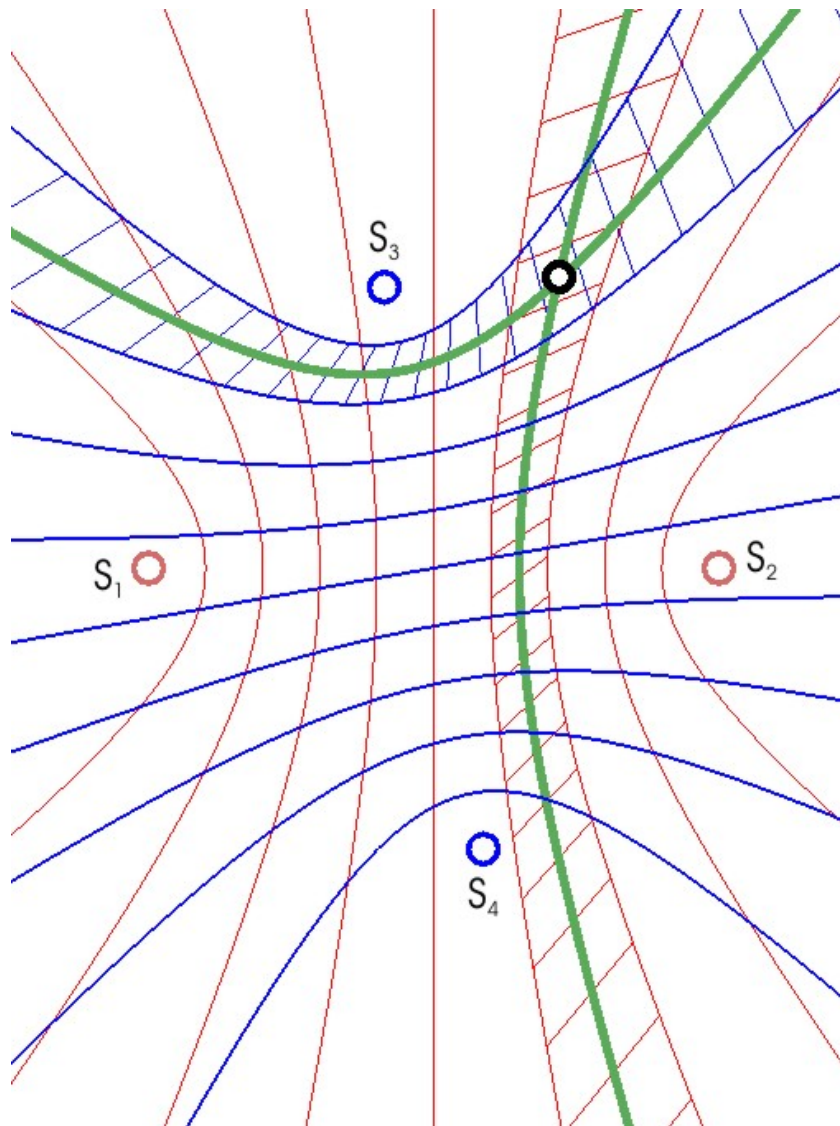


Abbildung 3.4.:

Aufgrund der großen Wellenlänge ist auch die Reichweite einer sicheren Signalerkennung extrem groß (*ca.* 11000 *km*), so dass die Basis zwischen zwei Sendestationen auch sehr groß gewählt werden kann (*ca.* 9000 *km* – 11000 *km*). Auf diese Weise kommt man mit acht Sendestationen auf der ganzen Erde aus.

Ihre Standorte sind:

A)	Omega-Norway	(13°E;66°N)
B)	Omega-Liberia	(11°W;6°N)
C)	Omega-Hawaii	(156°W;21°N)
D)	Omega-North Dakota	(98°W;46°N)
E)	Omega-Reunion	(55°E;21°S)
F)	Omega-Argentina	(65°W;43°S)
G)	Omega-Australia	(147°E;38°S)
H)	Omega-Japan	(129E;35°N)

Aufgrund der großen Reichweite können die Wellen einer Station auf etwa 75% der Erdoberfläche empfangen werden, so dass infolge der geschickten Verteilung der Omegastationen an jedem Ort der Erde die Signale von etwa 4 bis 6 Omegastationen zur Verfügung stehen. Damit können an jedem Ort 3 bis 5 voneinander unabhängige Standlinien bestimmt werden. Die geschickte Verteilung der Sender ermöglicht es auch, 2 bis 3 Standlinien auswählen zu können, die sich unter Winkeln zwischen 60° und 90° schneiden, so dass die Genauigkeit (2 – 4 *km*) der Ortsbestimmung dadurch erhöht wird.

Da durch das Satellitennavigation GPS eine sehr viel genauere Positionsbestimmung möglich wurde, die ebenfalls weltweit verfügbar ist, wurden die OMEGA-Sendestationen am 30. November 1997 abgeschaltet. In Russland wurde ein vergleichbares Funknavigationssystem mit der Bezeichnung *Alpha* errichtet, welches immer noch in Betrieb ist.

## 3.2. Lösen von Kegelschnittsaufgaben

Sind von einem Kreis 3 Punkte gegeben, so ist dieser Kreis eindeutig bestimmt. Um den Kreis allerdings „bequem“ konstruieren zu können benötigt man noch zusätzlich den Mittelpunkt und den Radius.

Ähnlich verhält es sich mit den Kegelschnitten. Sind von einem Kegelschnitt 5 Punkte gegeben, so ist dieser nach Satz 2.7 eindeutig bestimmt. Wenn wir nun noch weitere

Punkte dieses Kegelschnittes konstruieren wollen, so benötigen wir noch zusätzlich die Hauptachsen und Scheitel. Sind von einem Kegelschnitt die Hauptachsen und Scheitel bekannt, so ist dieser „bequem“, also mit Standardlösungen, zu konstruieren.

### 3.2.1. Aufgabe 1

**Gegeben:** 2 Linienelemente  $(\bar{A}, \bar{t}_A)$ ,  $(\bar{B}, \bar{t}_B)$  und ein Punkt  $\bar{C}$  eines sphärischen Kegelschnitts  $\bar{k}$ .

**Gesucht:** Hauptachsen und Scheitel

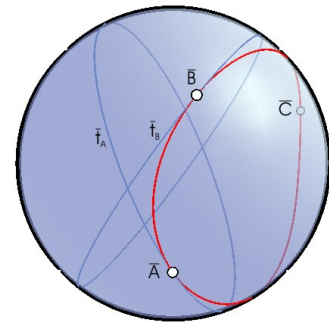


Abbildung 3.5.:

**Konstruktionsbeschreibung:**

Nach Satz 2.7 ist der sphärische Kegelschnitt eindeutig bestimmt.

1. Das Bild der gnomonischen Projektion  $\Gamma$  (siehe Abbildung 3.6) liefert nach Satz 2.3 ein analoges Problem in der Ebene  $\varepsilon$ . Wir müssen daher die Hauptachsen und Scheitel eines ebenen Kegelschnitts  $k$  aus zwei Linienelementen  $(A, t_A)$ ,  $(B, t_B)$  und  $C$  bestimmen.
2. Man ermittle einen Kreis  $k_0$ , der perspektiv kollinear auf  $k$  bezogen ist (siehe Abbildung 3.7).

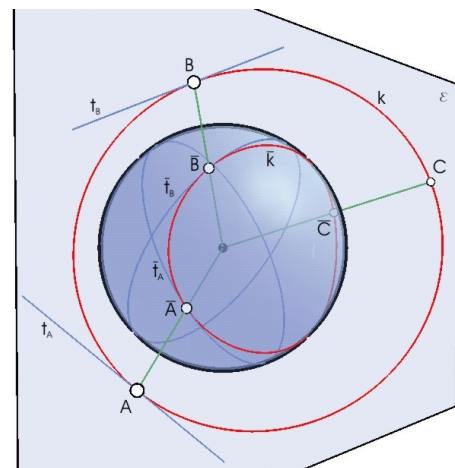


Abbildung 3.6.:

- a) Das Zentrum  $Z$  der Kollineation  $K$  wird als Schnittpunkt der beiden Tangenten  $t_A$  und  $t_B$  gewählt. Die Mitte  $M_0$  von  $k_0$  muss auf einer der beiden Winkelsymmetralen von  $t_A$  und  $t_B$  liegen.  $k_0$  soll  $A$  beinhalten, d.h.  $K(A) = A = A_0$ . Der Kreis  $k_0$  ist damit festgelegt (nach Auswahl einer der beiden Winkelsymmetralen). Die Kollineationsachse  $a$  enthält den Punkt  $A = A_0$  und den Punkt  $\overline{BC} \cap \overline{B_0C_0}$ .

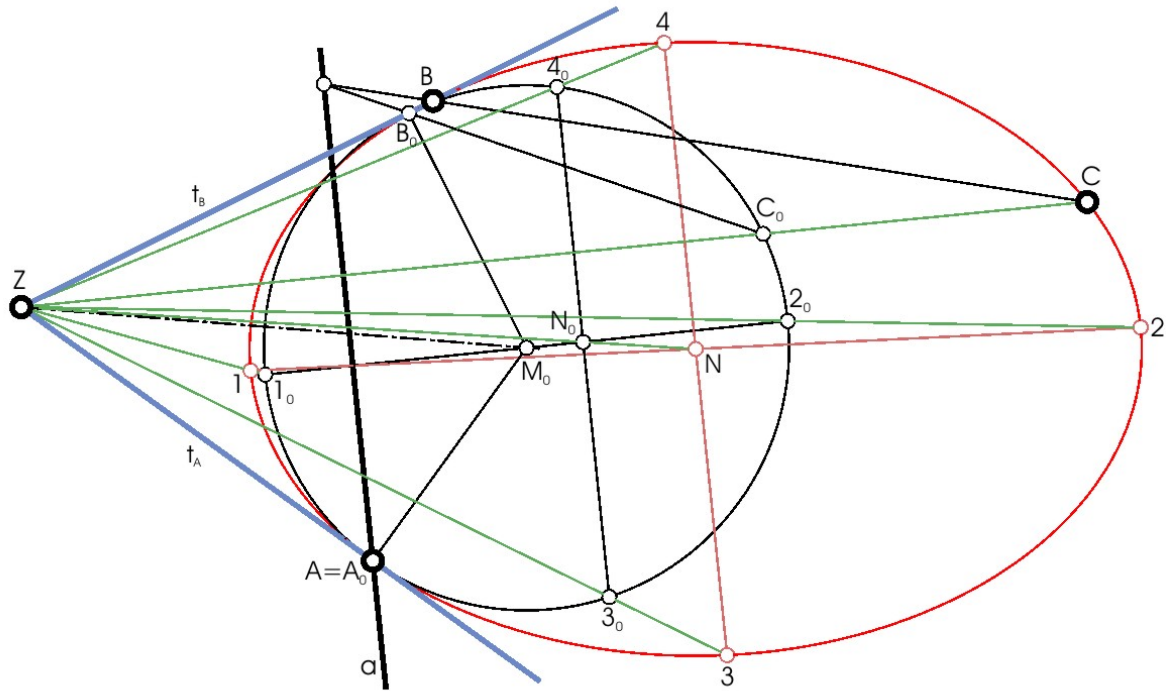


Abbildung 3.7.:

b) Konstruktion der konjugierten Durchmesser  $\overline{12}$  und  $\overline{34}$ .

Genau jener Durchmesser von  $k_0$  dessen Tangenten in den Endpunkten parallel zur Achse  $a$  sind, geht unter  $K$  wieder in einen Durchmesser des Bildkegelschnitts  $k$  über. Der Halbierungspunkt  $N$  vom Bilddurchmesser  $\overline{12}$  liefert den Mittelpunkt der ebenen Ellipse  $k$ . Der zweite konjugierte Durchmesser  $\overline{3_0 4_0}$  verläuft durch das Urbild von  $N$  und steht normal auf  $\overline{1_0 2_0}$ .

c) Die *RYTZsche* Achsenkonstruktion liefert die Scheitel und Hauptachsen von  $k$ .

3. Das Urbild von  $k$  unter  $\Gamma$  liefert  $\bar{k}$ .

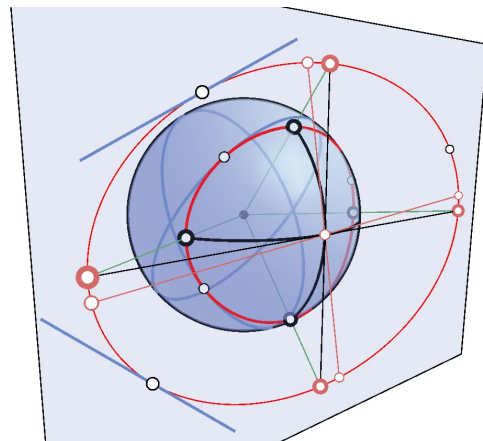


Abbildung 3.8.:

Ergebnisse aus der projektiven Geometrie (siehe Kapitel 2.6) finden zahlreiche Anwendungen beim Lösen von Kegelschnittsaufgaben. Der Satz von Pascal wird in folgender Kegelschnittsaufgabe seine Anwendung finden.

### 3.2.2. Aufgabe 2

**Gegeben:** 5 Punkte  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$  und  $\overline{E}$  eines sphärischen Kegelschnitts  $\overline{k}$ .

**Gesucht:** Hauptachsen und Scheitel

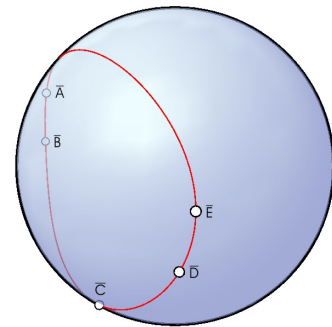


Abbildung 3.9.:

**Konstruktionsbeschreibung:**

1. Wie bei Aufgabe 1 liefert die gnomonische Projektion  $\Gamma$  (siehe Abbildung 3.10) das analoge Problem in der Ebene  $\varepsilon$ . Wir müssen daher einen ebenen Kegelschnitt  $k$  aus 5 Punkten  $A, B, C, D$  und  $E$  bestimmen.
2. Zuerst konstruieren wir die Tangenten  $t_A$  und  $t_B$  in den Punkten  $A$  und  $B$  (siehe Abbildung 3.11).

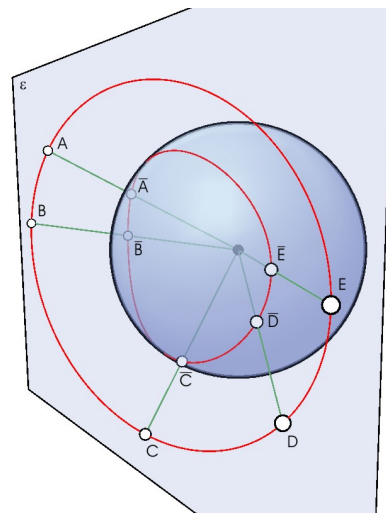


Abbildung 3.10.:

- a) Wir beschriften die Punkte mit  $A = 1 = 2$ ,  $B = 5$ ,  $C = 4$ ,  $D = 3$ ,  $E = 6$  und wenden danach auf die Punkte 1...6 den Satz von Pascal (siehe Abschnitt 2.8) an.
  - b) Analog bestimmen wir die Tangente  $t_B$  in  $B$ , indem wir  $B = 1 = 2$ ,  $A = 5$ ,  $C = 4$ ,  $D = 3$  und  $E = 6$  setzen.
3. Mit den Linienelementen  $(A, t_A)$ ,  $(B, t_b)$  und einem weiteren Punkt kann der Kegelschnitt wie in Aufgabe 1 gelöst werden.

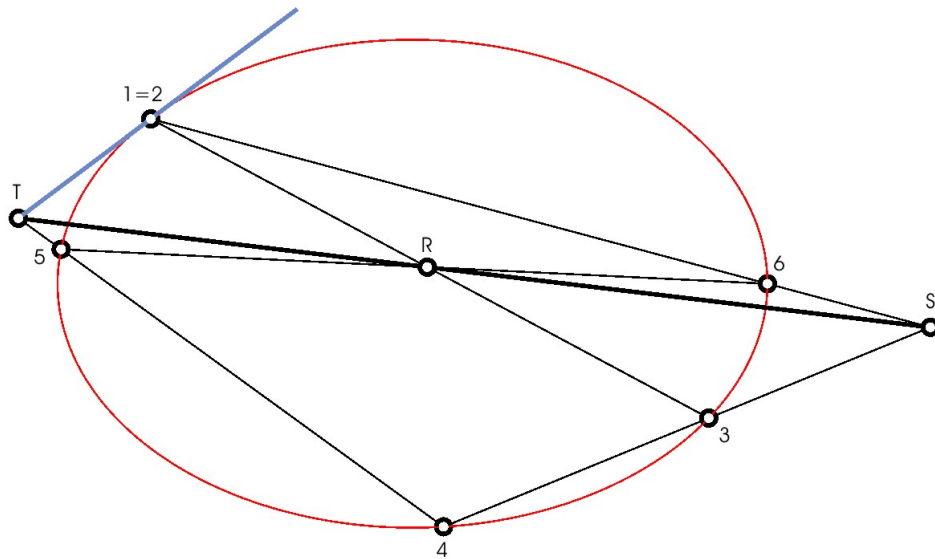


Abbildung 3.11.:

### 3.3. Der sphärische Peripheriewinkelsatz

#### 3.3.1. Der ebene Peripheriewinkelsatz

**Gegeben:** Zwei feste Punkte  $A, B$  und der Winkel  $\varphi$ .

**Gesucht:** Die Menge aller Punkte  $P$ , für die gilt:

$$\angle APB = \varphi = \text{konst.}$$

Wir setzen für  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$ ,  $\vec{p} = \vec{OP}$  und wählen das Koordinatensystem so, dass die  $x$ -Achse auf der Geraden  $\overline{AB}$  liegt.

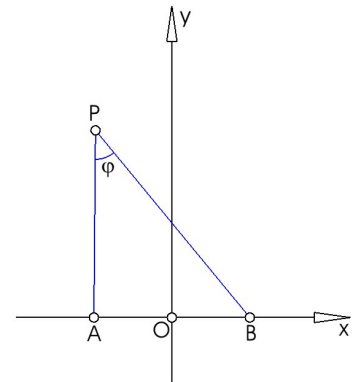


Abbildung 3.12.:

Nach (A.4) und Abbildung 3.12 genügen die Punkte  $P$  der Gleichung

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = \cos(\varphi) \cdot |\vec{p} - \vec{a}| \cdot |\vec{p} - \vec{b}| = \cos(\varphi) \sqrt{(\vec{p} - \vec{a})^2 (\vec{p} - \vec{b})^2}.$$

Nach dem Quadrieren erhalten wir

$$\left[ (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) \right]^2 = \cos^2(\varphi) \cdot (\vec{p} - \vec{a})^2 (\vec{p} - \vec{b})^2$$



Wir setzen  $0 < \varphi < \pi$  voraus und nach (A.5) erhalten wir

$$\left[ (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) \right]^2 = \cos^2(\varphi) \left[ \left[ (\vec{p} - \vec{a}) \times (\vec{p} - \vec{b}) \right]^2 + \left[ (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) \right]^2 \right]$$

und weiter

$$\left[ (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) \right]^2 (1 - \cos^2(\varphi)) = \cos^2(\varphi) \left[ (\vec{p} - \vec{a}) \times (\vec{p} - \vec{b}) \right]^2$$

womit wir schließlich

$$\left[ (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) \right] \sin(\varphi) = \pm \cos(\varphi) \left[ (\vec{p} - \vec{a}) \times (\vec{p} - \vec{b}) \right] \quad (3.1)$$

erhalten. Durch die Wahl

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} x + e \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x - e \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

geht (3.1) über in

$$(x^2 - e^2 + y^2) \sin(\varphi) = \pm y(x + e - x + e) \cos(\varphi) = \pm 2ey \cos(\varphi),$$

also

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \mp 2ey \cot(\varphi) &= e^2, \\ x^2 + (y \mp e \cot(\varphi))^2 &= e^2 + e^2 \cot^2(\varphi) \end{aligned}$$

und schließlich

$$x^2 + (y \mp e \cot(\varphi))^2 = \frac{e^2}{\sin^2(\varphi)}$$

und dies sind zwei Kreise mit den Mittelpunkten  $M_1(0, e \cot(\varphi))$  und  $M_2(0, -e \cot(\varphi))$  (siehe Abbildung 3.13).

*Bemerkung:*

- Sind zwei Punkte  $A$  und  $B$  gegeben, so nennen wir die Menge aller Punkte  $P$  mit  $\angle APB = \varphi = \text{konst.}$  eine **isoptische Kurve** zum Winkel  $\varphi$ .
- Für den Winkel  $\delta = \angle AM_1B$  gilt

$$\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{e}{e \cdot \cot(\varphi)} = \frac{1}{\cot(\varphi)} = \tan(\varphi),$$

und somit

$$\frac{\delta}{2} = \varphi.$$

- Ist zusätzlich  $\varphi = 90^\circ$  so gilt für die Mittelpunkte  $M_1 = M_2 = M(0, 0)$ . Die Strecke  $\overline{AB}$  ist somit ein Durchmesser des Kreises. Daraus folgt:  
Jeder Winkel in einem Halbkreis ist ein rechter Winkel (**Satz des THALES** (624-546 v. Chr.)).

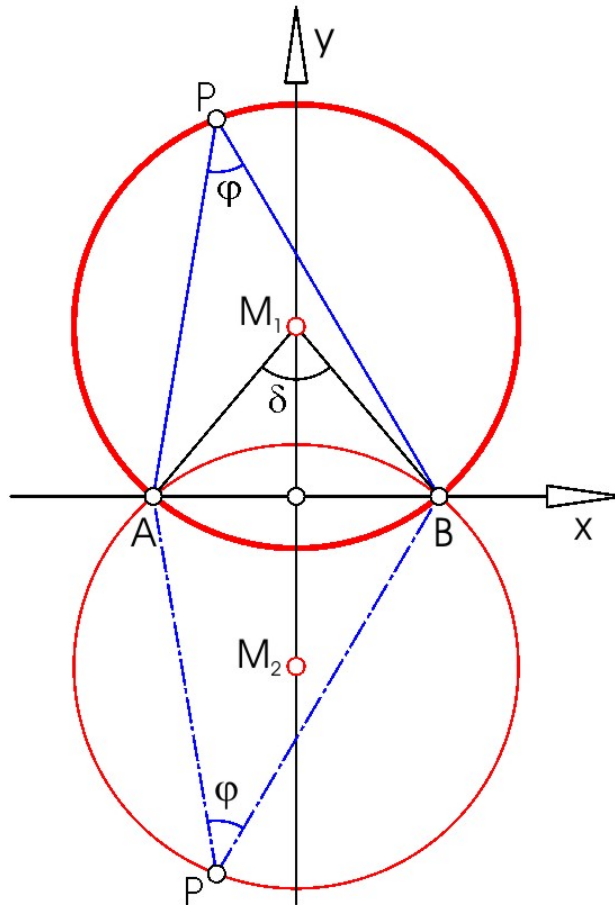


Abbildung 3.13.:

### 3.3.2. Der sphärische Peripheriewinkelsatz

**Gegeben:** Zwei feste Punkte  $A, B$  der Sphäre und der Winkel  $\varphi$ .

**Gesucht:** Die Menge aller Punkte  $P$  der Sphäre für die gilt:

$$\angle APB = \varphi = \text{konst.}$$

Wir setzen für  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$ ,  $\vec{p} = \vec{OP}$  und wählen die Punkte  $A$  und  $B$  auf dem Äquator.

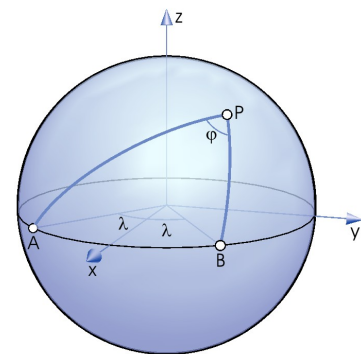


Abbildung 3.14.:

Soll die von den Vektoren  $\vec{p}$  und  $\vec{a}$  aufgespannte Ebene mit der Verbindungsebene von  $\vec{p}$  und  $\vec{b}$  den konstanten Winkel  $\varphi$  einschließen, so ist nach (A.4) im Fall linearer Unabhängigkeit von  $\{\vec{p}, \vec{a}\}$  und  $\{\vec{p}, \vec{b}\}$  die Gleichung

$$(\vec{p} \times \vec{a}) \cdot (\vec{p} \times \vec{b}) = \cos(\varphi) \cdot |\vec{p} \times \vec{a}| \cdot |\vec{p} \times \vec{b}| = \cos(\varphi) \sqrt{(\vec{p} \times \vec{a})^2 (\vec{p} \times \vec{b})^2}$$

kennzeichnend. Quadrieren liefert

$$\left[ (\vec{p} \times \vec{a}) \cdot (\vec{p} \times \vec{b}) \right]^2 = \cos^2(\varphi) \cdot (\vec{p} \times \vec{a})^2 (\vec{p} \times \vec{b})^2$$

Nach (A.5) gilt

$$(\vec{p} \times \vec{a})^2 (\vec{p} \times \vec{b})^2 = \left[ (\vec{p} \times \vec{a}) \times (\vec{p} \times \vec{b}) \right]^2 + \left[ (\vec{p} \times \vec{a}) \cdot (\vec{p} \times \vec{b}) \right]^2$$

wodurch wir für

$$\left[ (\vec{p} \times \vec{a}) \cdot (\vec{p} \times \vec{b}) \right]^2 (1 - \cos^2(\varphi)) = \cos^2(\varphi) \left[ (\vec{p} \times \vec{a}) \times (\vec{p} \times \vec{b}) \right]^2$$

und weiter nach (A.5) und (A.6)

$$\left[ (\vec{p} \cdot \vec{p})(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{p} \cdot \vec{a})(\vec{p} \cdot \vec{b}) \right]^2 = \cot^2(\varphi) \left[ \vec{a} \det(\vec{p} \vec{p} \vec{b}) - \vec{p} \det(\vec{a} \vec{p} \vec{b}) \right]^2$$

erhalten. Schließlich gilt

$$\left[ (\vec{p} \cdot \vec{p})(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{p} \cdot \vec{a})(\vec{p} \cdot \vec{b}) \right]^2 = \cot^2(\varphi) (\vec{p} \cdot \vec{p}) \left[ \det(\vec{a} \vec{b} \vec{p}) \right]^2$$

Die Wahl der Koordinaten

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) \\ -\sin(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) \\ \sin(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}$$

führt auf

$$\begin{aligned} & \left[ (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda)) - (x \cos(\lambda) - y \sin(\lambda))(x \cos(\lambda) + y \sin(\lambda)) \right]^2 = \\ & \cot^2(\varphi) (x^2 + y^2 + z^2) (2z \sin(\lambda) \cos(\lambda))^2 \end{aligned}$$

und weiter zu

$$\begin{aligned} \Phi : & \left[ -x^2 \sin^2(\lambda) + y^2 \cos^2(\lambda) + z^2(\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda)) \right]^2 - \\ & (2z \sin(\lambda) \cos(\lambda) \cot(\varphi))^2 (x^2 + y^2 + z^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Projiziert man diese Kurve aus dem Kugelmittelpunkt, so entsteht bei

- Fall 1:  $\cot(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$$-x^2 \sin^2(\lambda) + y^2 \cos^2(\lambda) + z^2(\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda)) = 0 \quad (3.3)$$

und dies ist ein quadratischer Kegel.

- Fall 2:  $\cot(\varphi) \neq 0$  ist  $\Phi$  ein irreduzibler Kegel 4. Ordnung mit der Gleichung (3.2).

*ad Fall 1:* ( $\cot \varphi = 0$ ) Der Schnitt eines quadratischen Kegels mit der Sphäre ist nach Satz 2.3 eine sphärische Ellipse. Um die Hauptachsenlängen der sphärischen Ellipse zu erhalten, müssen wir die halben Öffnungswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  des quadratischen Kegels bestimmen. Aus (3.3) erhalten wir

$$\frac{y^2}{\tan^2(\lambda)} + \frac{z^2}{\frac{\sin^2(\lambda)}{\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda)}} = x^2.$$

Wird dieser Kegel mit der lotrechten Ebene  $x = 1$  zum Schnitt gebracht, so erhalten wir

$$\frac{y^2}{\tan^2(\lambda)} + \frac{z^2}{\frac{\sin^2(\lambda)}{\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda)}} = 1$$

und dies ist eine Ellipse mit den Hauptachsenlängen

$$l_1 = \tan(\lambda), \quad l_2 = \sqrt{\frac{\sin^2(\lambda)}{\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda)}}.$$

Nach Abbildung 2.11 auf Seite 26 gilt daher für  $\alpha$  und  $\beta$ :

$$\tan(\alpha) = \frac{l_1}{1} = \tan(\lambda) \Rightarrow \alpha = \lambda$$

$$\tan(\beta) = \frac{l_2}{1} = \sqrt{\frac{\sin^2(\lambda)}{\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda)}} \Rightarrow \beta = \arctan\left(\sqrt{\frac{\sin^2(\lambda)}{\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda)}}\right)$$

Die Punkte  $A$  und  $B$  sind somit Scheitel der sphärischen Ellipse. In Abbildung 3.15 ist die sphärische isoptische Kurve zum Winkel  $\varphi$  als Schnitt der Sphäre mit dem Kegel  $\Phi$  dargestellt. Für den Winkel  $\varphi = \angle APB$  gilt stets:

$$\varphi = 90^\circ$$

Nachdem  $\Phi$  ein Doppelkegel ist, liefert der Schnitt mit der Sphäre nach Satz 2.3 beide Äste der sphärischen Ellipse (siehe Abbildung 3.16).

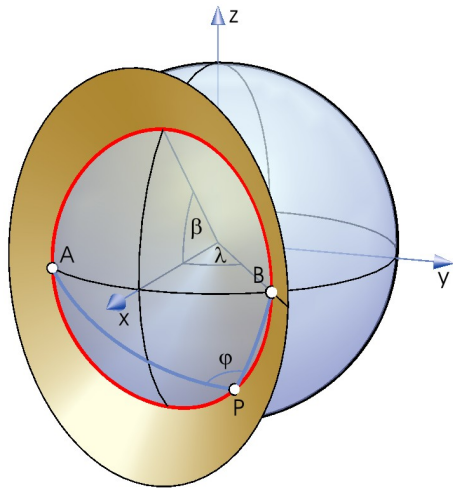


Abbildung 3.15.:

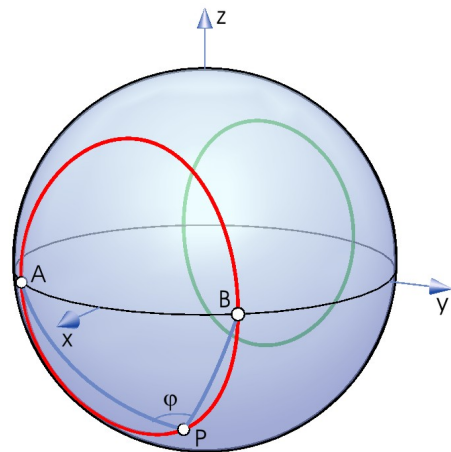


Abbildung 3.16.:

*Bemerkung:*

Das Analogon zum THALES-Kreis in der Ebene, ist auf der Sphäre ein sphärischer Kegelschnitt mit den Hauptscheiteln

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) \\ -\sin(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) \\ \sin(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und mit den halben Hauptachsenlängen

$$\alpha = \lambda \text{ und } \beta = \arctan \left( \sqrt{\frac{\sin^2(\lambda)}{\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda)}} \right).$$

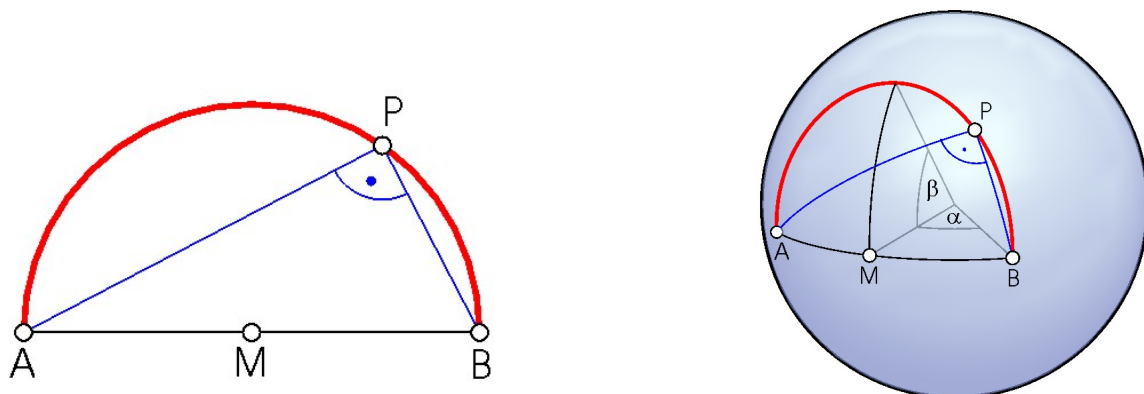


Abbildung 3.17.: **Animation 8:**

ad Fall 2: ( $\cot \varphi \neq 0$ ) Die Schnittkurve von  $\Phi$  mit der Sphäre  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  liefert nach Elimination der Variablen  $y$

$$\begin{aligned} & [-x^2 \sin^2(\lambda) + \cos^2(\lambda) - x^2 \cos^2(\lambda) - z^2 \cos^2(\lambda) + z^2(\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda))]^2 - \\ & (2z \sin(\lambda) \cos(\lambda) \cot(\varphi))^2 = 0 \end{aligned}$$

und weiter

$$[-x^2 + \cos^2(\lambda) - z^2 \sin^2(\lambda)]^2 = (2z \sin(\lambda) \cos(\lambda) \cot(\varphi))^2.$$

Die Quadratwurzel liefert

$$-x^2 + \cos^2(\lambda) - z^2 \sin^2(\lambda) = \pm 2z \sin(\lambda) \cos(\lambda) \cot(\varphi) \quad (3.4)$$

wodurch durch quadratisches Ergänzen

$$x^2 + (z \sin(\lambda) \mp \cos(\lambda) \cot(\varphi))^2 = \cos^2(\lambda) + \cos^2(\lambda) \cot^2(\varphi) = \frac{\cos^2(\lambda)}{\sin^2(\varphi)}$$

und schließlich

$$\Psi_{xz} : \frac{x^2}{\left(\frac{\cos(\lambda)}{\sin(\varphi)}\right)^2} + \frac{(z \mp \cot(\lambda) \cot(\varphi))^2}{\left(\frac{\cot(\lambda)}{\sin(\varphi)}\right)^2} = 1$$

entsteht.

Dies ist ein kreuzrissnormaler elliptischer Zylinder mit horizontaler Nebenachse in der Höhe  $z = h_{xz}$  und den Halbachsenlängen  $a_{xz}, b_{xz}$ .

$$\begin{aligned} h_{xz} &= \pm \cot(\lambda) \cot(\varphi) \\ a_{xz} &= \frac{\cot(\lambda)}{\sin(\varphi)} \\ b_{xz} &= \frac{\cos(\lambda)}{\sin(\varphi)} \end{aligned}$$

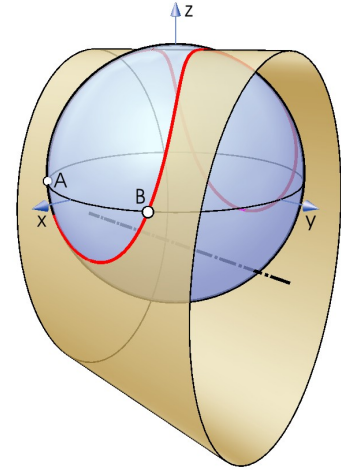


Abbildung 3.18.:

Eliminieren wir aus (3.2) die Variable  $x$ , so lautet der Aufriss wegen  $x^2 = 1 - y^2 - z^2$

$$\cos^2(\lambda) - 1 + z^2 + y^2 - z^2 \sin^2(\lambda) \pm 2z \sin(\lambda) \cos(\lambda) \cot(\varphi) = 0,$$

also

$$y^2 + z^2 \cos^2(\lambda) \pm 2z \sin(\lambda) \cos(\lambda) \cot(\varphi) = \sin^2(\lambda).$$

Durch quadratisches Ergänzen entsteht

$$y^2 + (z \cos(\lambda) \pm \sin(\lambda) \cot(\varphi))^2 = \sin^2(\lambda) + \sin^2(\lambda) \cot^2(\varphi) = \frac{\sin^2(\lambda)}{\sin^2(\varphi)}$$

und schließlich

$$\Psi_{yz} : \frac{y^2}{\left(\frac{\sin(\lambda)}{\sin(\varphi)}\right)^2} + \frac{(z \pm \tan(\lambda) \cot(\varphi))^2}{\left(\frac{\tan(\lambda)}{\sin(\varphi)}\right)^2} = 1.$$

Dies ist ein aufrissnormaler elliptischer Zylinder mit horizontaler Nebenachse in der Höhe  $z = h_{yz}$  und den Halbachsenlängen  $a_{yz}, b_{yz}$ .

$$\begin{aligned} h_{yz} &= \mp \tan(\lambda) \cot(\varphi) \\ a_{yz} &= \frac{\tan(\lambda)}{\sin(\varphi)} \\ b_{yz} &= \frac{\sin(\lambda)}{\sin(\varphi)} \end{aligned}$$

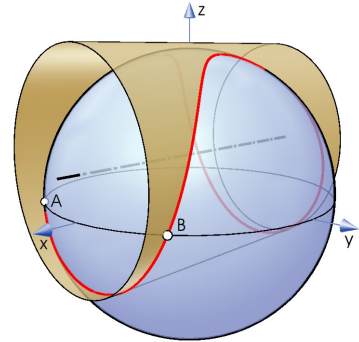


Abbildung 3.19.:

Die Schnittkurve des Kegels  $\Phi$  mit der Sphäre liegt somit auf einem Paar kreuzrissnormaler und einem Paar aufrissnormaler quadratischer Zylinder. Die sphärisch isoptische Kurve zerfällt dadurch in zwei Kurven 4. Ordnung die bezüglich der Äquatorebene  $z = 0$  symmetrisch liegen.

Abbildung 3.20 zeigt eine dieser Kurven zu  $\widehat{AB} = 2\lambda = 70^\circ$  und  $\varphi = 68^\circ$ . Nach Konstruktion gilt für alle Punkte  $P$ :

$$\angle APB = \varphi = 68^\circ$$

Abbildung 3.21 zeigt beide Komponenten der sphärischen isoptischen Kurve.

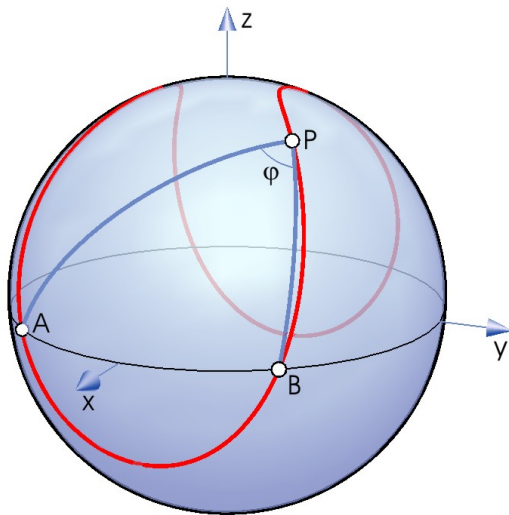


Abbildung 3.20.: **Animation 9**

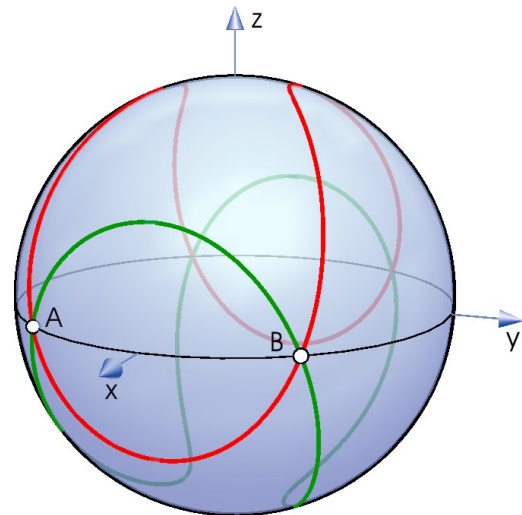


Abbildung 3.21.:

Bei  $\varphi = 2\lambda$  berühren die Zylinder  $\Psi_{xz}$  und  $\Psi_{yz}$  die Kugel. Jede Komponente der isoptischen Kurve hat einen Doppelpunkt  $D$  (siehe Abbildung 3.22). Ist zusätzlich  $\varphi = 2\lambda = \frac{\pi}{2}$  so zerfällt die isoptische Kurve (sphärischer Kegelschnitt) in zwei Großkreise.

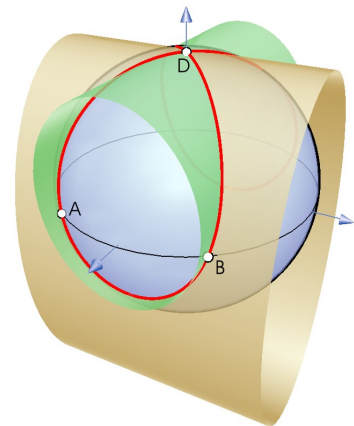


Abbildung 3.22.:

### 3.4. Der Rückwärtseinschnitt

Der Rückwärtseinschnitt ist eine Methode zur Bestimmung der Koordinaten eines Standortes  $T$ . Dabei steht man mit einem Theodolit auf einem Punkt  $T$  mit unbekanntem Koordinaten. Um diese Koordinaten nun zu bestimmen, visiert man drei Punkte  $A, B$  und  $C$  an, deren Koordinaten man - zum Beispiel nach Rückfrage bei einem Vermessungsamt - kennt. Jetzt werden allein die beiden Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  gemessen, wobei  $\alpha = \angle ATB$  und  $\beta = \angle BTC$  gilt. Im Gegensatz zu vielerlei anderen Verfahren aus dem Bereich der Vermessungskunde ist hier keine einzige Streckenmessung erforderlich.



### 3.4.1. Rückwärtseinschnitt in der Ebene

**Gegeben:** Drei Punkte  $A, B, C$  und die Winkel  $\alpha = \angle ATB$  und  $\beta = \angle BTC$ .

**Gesucht:** Der Standort des Punktes  $T$ .

Nachdem der Winkel  $\alpha = \angle ATB = konst.$  ist, kann der Punkt  $T$  nach Kapitel 3.3.1 nur auf dem Kreis  $k_1$  liegen. Wegen  $\beta = \angle BTC = konst.$  gilt analog  $T \in k_2$ . Der Punkt  $T$  kann somit als Schnittpunkt der beiden Kreise  $k_1$  und  $k_2$  ermittelt werden.

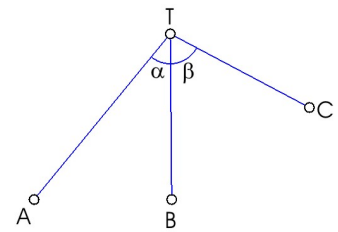


Abbildung 3.23.:

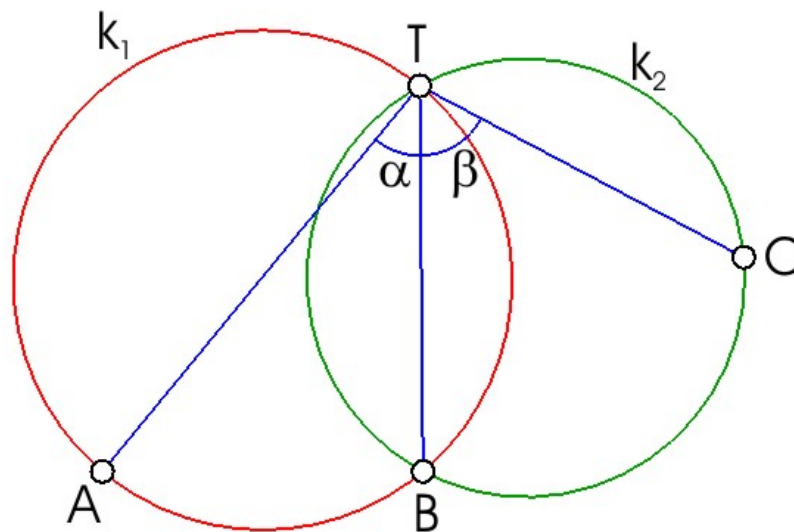


Abbildung 3.24.:

### 3.4.2. Rückwärtseinschnitt auf der Sphäre

**Gegeben:** Drei Punkte  $A, B, C$  und die Winkel  $\alpha = \angle ATB$  und  $\beta = \angle BTC$

**Gesucht:** Der Standort des Punktes  $T$ .

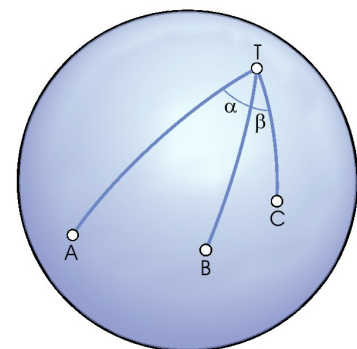


Abbildung 3.25.:

Nach Kapitel 3.3.2 existiert zu den Punkten  $A, B$  und zum Peripheriewinkel  $\alpha$  genau eine isoptische Kurve  $k_1$ . Analog gilt dies für die Punkte  $B, C$  und den Winkel  $\beta$ . Der gesuchte Punkt  $T$  kann somit wieder als Schnittpunkt der beiden isoptischen Kurven  $k_1$  und  $k_2$  ermittelt werden.

Abbildung 3.26 zeigt die beiden isoptischen Kurven  $k_1$  und  $k_2$  sowie  $T$  als Schnittpunkt der beiden Kurven (mehrere Lösungen möglich!).

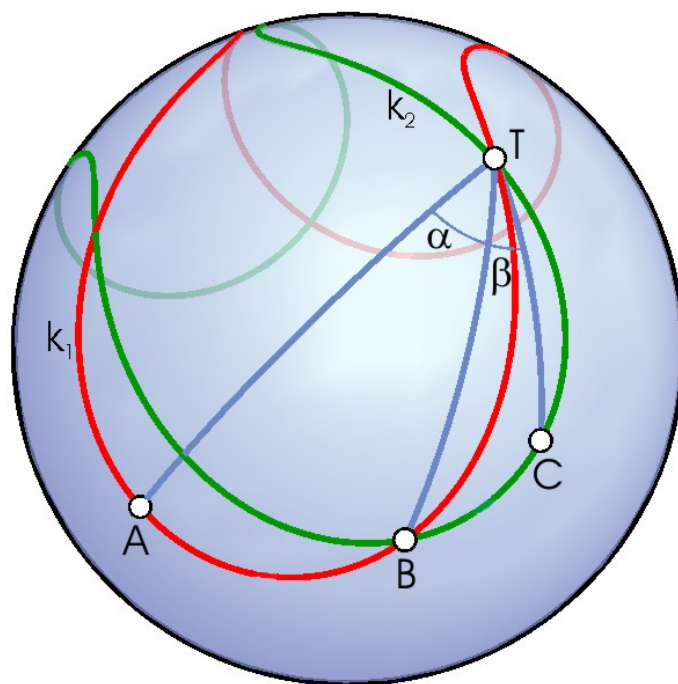


Abbildung 3.26.:

## 3.5. Satz von IVORY

### 3.5.1. Der Satz von IVORY in der Ebene

**Definition 3.1** *Mittelpunktskegelschnitte (Ellipse und Hyperbel) mit identischen Brennpunkten werden als **konfokale** Kegelschnitte bezeichnet.*

*Bemerkung:*

- Die Mittelpunktskegelschnitte haben (mit Ausnahme des Kreises) zwei Brennpunkte.
- Eine Ellipse (Hyperbel) schneidet eine konfokale Hyperbel (Ellipse) rechtwinkelig. Weiters gilt für konfokale Kegelschnitte folgender

**Satz 3.1 (Satz von Ivory)** (o.B.) *Im Netz konfokaler Kegelschnitte besitzt jedes Netzviereck (siehe Abbildung 3.27) zwei gleich lange Diagonalen.*

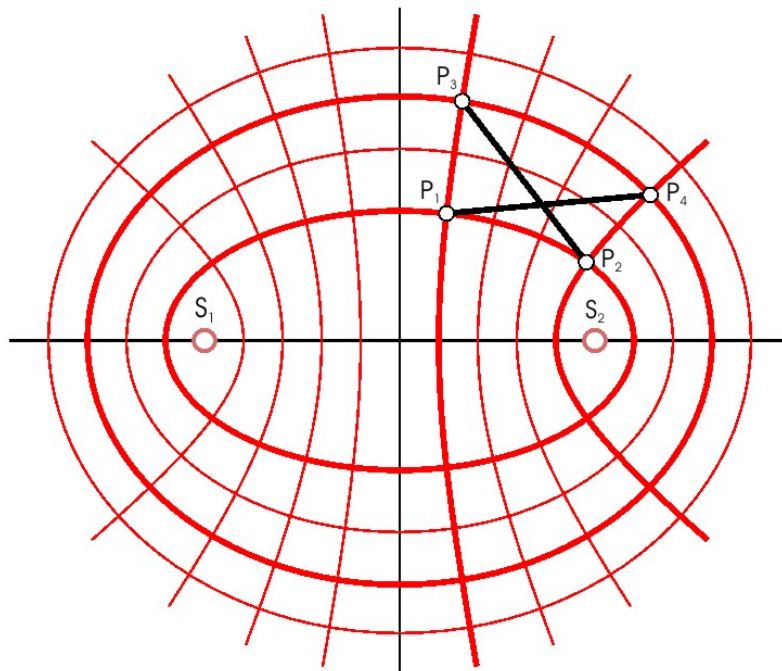


Abbildung 3.27.:

Wählen wir zum Beispiel das Viereck  $P_1, P_2, P_3, P_4$  so besagt der Satz von Ivory, dass für

$$|P_1P_4| = |P_2P_3|$$

gilt.

### 3.5.2. Der Satz von IVORY auf der Sphäre

In diesem Abschnitt versuchen wir zunächst das analoge Problem auf der Sphäre zu lösen.

**Gegeben:** 4 konfokale Kegelschnitte  $k_1, k_2, k_3$  und  $k_4$  mit den Hauptachsenlängen  $a_1 = 40, a_2 = 60, a_3 = 10, a_4 = 30$  und mit den Brennpunkten  $S_1(-35/0)$  und  $S_2(35/0)$ .

**Gesucht:** Die sphärischen Distanzen  $d_1 = |\widehat{P_1P_4}|$  und  $d_2 = |\widehat{P_2P_3}|$  (siehe Abbildung 3.28).

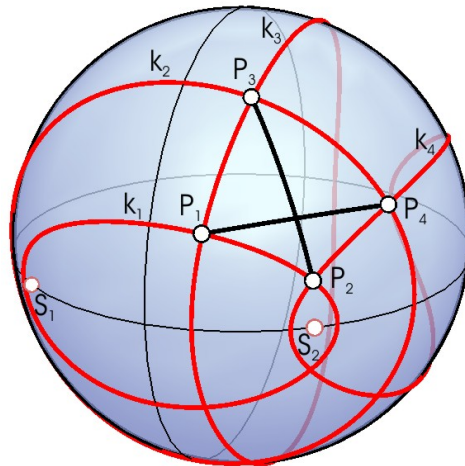


Abbildung 3.28.:

1. Laut Angabe ist  $e < a_1 < a_2$  und somit  $k_1$  und  $k_2$  nach Satz 2.2 eine sphärische Ellipse, und wegen  $e > a_4 > a_3$  ist  $k_3$  und  $k_4$  eine sphärische Hyperbel. Es existiert somit ein Netzviereck  $P_1P_2P_3P_4$ .
2. Zunächst ermitteln wir die Kugelkoordinaten des Punktes  $P_1$ .  $P_1$  ist der Schnitt der sphärischen Ellipse  $k_1$  und der sphärischen Hyperbel  $k_3$ . Nach (2.4) auf Seite 23 lautet die Funktionsgleichung von  $k_1$

$$\cos^2(\varphi) = \frac{p^2 \cdot q^2}{q^2 + (p^2 - q^2) \cdot \cos^2(\lambda)},$$

wobei für  $p = \frac{\sin(a_1)}{\sin(e)}$  und für  $q = \frac{\cos(a_1)}{\cos(e)}$  gilt.

Einsetzen von  $e = 35$  und  $a_1 = 40$  liefert

$$I : \cos^2(\varphi) = \frac{\left(\frac{\sin(40)}{\sin(35)}\right)^2 \cdot \left(\frac{\cos(40)}{\cos(35)}\right)^2}{\left(\frac{\cos(40)}{\cos(35)}\right)^2 + \left(\left(\frac{\sin(40)}{\sin(35)}\right)^2 - \left(\frac{\cos(40)}{\cos(35)}\right)^2\right) \cdot \cos^2(\lambda)}.$$

Analog gilt für  $k_3$

$$II : \cos^2(\varphi) = \frac{\left(\frac{\sin(10)}{\sin(35)}\right)^2 \cdot \left(\frac{\cos(10)}{\cos(35)}\right)^2}{\left(\frac{\cos(10)}{\cos(35)}\right)^2 + \left(\left(\frac{\sin(10)}{\sin(35)}\right)^2 - \left(\frac{\cos(10)}{\cos(35)}\right)^2\right) \cdot \cos^2(\lambda)}.$$

Die Gleichungen  $I$  und  $II$  liefern für  $\lambda$ :

$$\lambda_1 = -11.9, \lambda_2 = 11.9, \lambda_3 = 180 - 11.9, \lambda_4 = 180 + 11.9$$

Für den Punkt  $P_1$  wählen wir  $\lambda_2$  (siehe Abbildung 3.28), und  $\lambda_2$  liefert für  $\varphi$

$$\varphi_1 = 19.7, \quad \varphi_2 = -19.7$$

wobei für  $P_1$  nur der positive Wert von  $\varphi$  heranzuziehen ist. Die Kugelkoordinaten von  $P_1$  lauten somit:

$$P_1(\lambda/\varphi) = (11.9/19.7)$$

3. Analog werden die Kugelkoordinaten von  $P_2, P_3$  und  $P_4$  berechnet.

$$P_2(34.7/10.0), \quad P_3(23.6/49.0), \quad P_4(55.0/22.8)$$

4. Der sphärische Abstand  $d_1$  von  $P_1$  nach  $P_4$  wird nach Satz 1.3 auf Seite 14 berechnet.

$$\cos(d_1) = \cos(90-19.7) \cdot \cos(90-22.8) + \sin(90-19.7) \cdot \sin(90-22.8) \cdot \cos(55.0-11.9)$$

und schließlich

$$d_1 = 40.1$$

Für den Abstand  $d_2$  von  $P_2$  nach  $P_3$  gilt:

$$\cos(d_2) = \cos(90-10.0) \cdot \cos(90-49.0) + \sin(90-10.0) \cdot \sin(90-49.0) \cdot \cos(34.7-23.6)$$

und weiter

$$d_2 = 40.1 = d_1.$$

Somit gilt die Gleichheit der sphärischen Distanzen  $d_1$  und  $d_2$  für die speziell gewählten Kegelschnitte  $k_1 \dots k_4$ . Ohne Beweis sei jedoch bemerkt, dass die sphärische Version von Ivory für alle konfokale Kegelschnitte, welche ein Netzviereck bilden, gilt.

**Satz 3.2 (Sphärische Satz von Ivory) (o.B.)** *Im Netz konfokaler sphärischer Kegelschnitte besitzt jedes Netzviereck zwei gleich lange Diagonalen.*

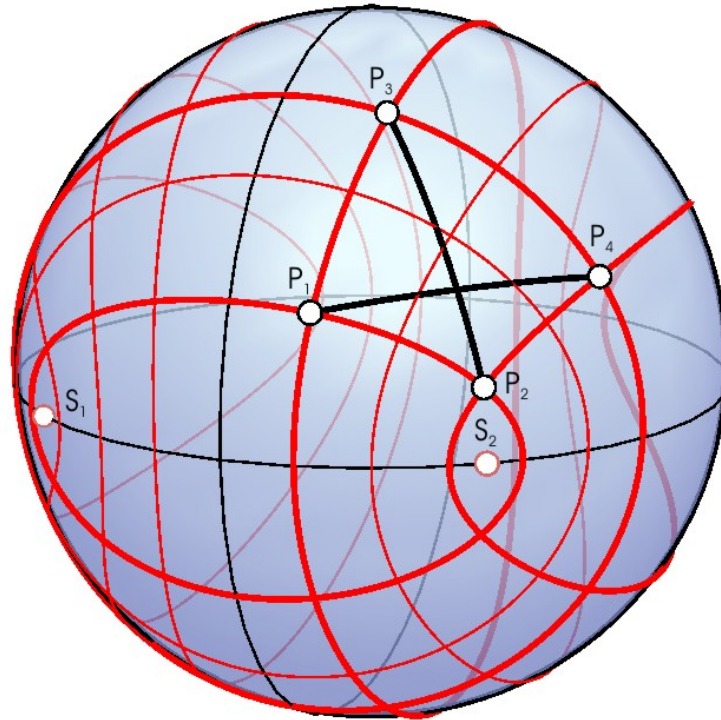


Abbildung 3.29.:

*Bemerkung:*

Dieses Ergebnis gilt nicht nur auf der Sphäre, sondern auch in hyperbolischen Räumen und allgemeiner in allen Räumen konstanter Krümmung (siehe [10]).

# A. Anhang:

## Goniometrische Formeln

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \quad (\text{A.1})$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (\text{A.2})$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)} \quad (\text{A.3})$$

## Vektorrechnung

Für den Winkel  $\varphi$  zwischen den beiden Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad (\text{A.4})$$

Kreuzprodukt zweier Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ .

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor  $\vec{q} := \vec{u} \times \vec{v}$  steht auf  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  normal.

Weiters gilt:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \quad (\text{A.5})$$

$$(\vec{r} \times \vec{s}) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{s} \det(\vec{r} \ \vec{u} \ \vec{v}) - \vec{r} \det(\vec{s} \ \vec{u} \ \vec{v}) \quad (\text{A.6})$$

# Literaturverzeichnis

- [1] BIGALKE, H.-G.; *Kugelgeometrie*, Otto Salle Verlag, Frankfurt am Main 1984
- [2] SCHUPP, H.; *Kegelschnitte*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1988
- [3] RIXECKER, H.; *Moderne Trigonometrie*, In: MU-Der Mathematikunterricht, 3/1984, 6-19
- [4] KOLLARS, K./MÜLLNER, R.; *Darstellende Geometrie 1* für Bautechnik u. Maschinenbau, hpt Verlag, Wien 1990
- [5] BIGALKE, H.-G.; *Funkortung nach dem Omega System - Sphärische Kegelschnitte*, In: MU-Der Mathematikunterricht, 3/1984, 48-57
- [6] STACHEL, H.; *Der sphärische Peripheriewinkelsatz*, TU Wien, 1998
- [7] GLAESER, G./STACHEL, H.; *Open Geometry*, Springer Verlag, New York 1999
- [8] LANG, J.; *Vorlesung zur Projektiven Geometrie 1*, TU Graz, 2000
- [9] GFRERRER, A.; *Übungen zur Projektiven Geometrie 1*, TU Graz, 2000
- [10] STACHEL, H./WALLNER, J.; *Ivory's Theorem in Hyperbolic Spaces*, In: Technical Report No. 107, Institut für Geometrie, TU Wien, 2003
- [11] Artikel *LORAN-C*. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.  
Bearbeitungsstand: 5. März 2006, 18:36 UTC. URL:  
<http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=LORAN-C&oldid=14317104>  
(Abgerufen: 7. März 2006, 10:01 UTC)
- [12] Artikel *Decca Navigation System*. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.  
Bearbeitungsstand: 28. Dezember 2005, 11:49 UTC. URL:  
[http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Decca\\_Navigation\\_System&oldid=12044019](http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Decca_Navigation_System&oldid=12044019)  
(Abgerufen: 7. März 2006, 10:02 UTC)



- [13] Artikel *OMEGA*. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.  
Bearbeitungsstand: 11. Februar 2006, 10:31 UTC. URL:  
<http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=OMEGA&oldid=13605093>  
(Abgerufen: 7. März 2006, 10:04 UTC)
- [14] *RAD Video Tools*. <http://www.smacker.com/default.htm> (7. März 2006)

# Abbildungsverzeichnis

1.1. Kugelkoordinaten . . . . .	6
1.2. Sphärischer Abstand . . . . .	7
1.3. Winkel zweier Großkreise . . . . .	8
1.4. Sphärisches Dreieck . . . . .	8
1.5. Angabestücke von Dreiecken . . . . .	9
1.6. <b>Animation 1:</b> Pappmodell . . . . .	10
1.7. Gegenbeispiel Pythagoras . . . . .	11
1.8. Beweis 1: Pythagoras . . . . .	11
1.9. Beweis 2: Pythagoras . . . . .	13
1.10. Nelpersche Regel . . . . .	13
1.11. Beweis: Seiten-Kosinussatz . . . . .	14
1.12. Beweis: Sinussatz . . . . .	16
1.13. Gnomonische Projektion . . . . .	17
1.14. Großkreiskarte . . . . .	17
2.1. <b>Animation 2:</b> Gärtnerkonstruktion der Ellipse . . . . .	18
2.2. Bezeichnungen der Ellipse . . . . .	18
2.3. Bezeichnungen der sphärischen Ellipse . . . . .	19
2.4. <b>Animation 3:</b> Gärtnerkonstruktion d. sphär. Ellipse . . . . .	19
2.5. „Äste“ der sphärischen Ellipse . . . . .	19
2.6. Sphärische Hyperbel . . . . .	21
2.7. Beweis: Hyperbel = Ellipse . . . . .	21
2.8. Kegelschnitte analytisch . . . . .	22
2.9. Symmetrie der Kegelschnitte . . . . .	24
2.10. Ellipse ( $a \geq e$ ), Hyperbel ( $a \leq e$ ), Äquator ( $a = e$ ) . . . . .	25
2.11. Kegel analytisch . . . . .	26

2.12. Kugel $\cap$ Kegel . . . . .	27
2.13. Kugel $\cap$ Doppelkegel . . . . .	27
2.14. gnomonische Projektion der Ellipse . . . . .	28
2.15. gnomonische Projektion der Brennpunkte . . . . .	28
2.16. <b>Animation 4:</b> DE LA HIRE . . . . .	30
2.17. <b>Animation 5:</b> DE LA HIRE auf der Sphäre . . . . .	31
2.18. Beweis: DE LA HIRE auf der Sphäre . . . . .	31
2.19. gnomonische Projektion von DE LA HIRE . . . . .	32
2.20. Grundgebilde 1. Stufe . . . . .	33
2.21. Perspektivitäten . . . . .	34
2.22. Projektivität . . . . .	35
2.23. Grundgebilde 1. Stufe auf der Sphäre . . . . .	36
2.24. Perspektivitäten auf der Sphäre . . . . .	36
2.25. Projektive Erzeugung der Ellipse . . . . .	37
2.26. Projektive Erzeugung der sphärischen Ellipse . . . . .	38
2.27. Beweis: 5 Punkte bestimmen einen Kegelschnitt . . . . .	39
2.28. Der Satz von Pascal . . . . .	40
2.29. <b>Animation 6:</b> Der Satz von Pascal auf der Sphäre . . . . .	41
2.30. Pascal, Sonderfälle . . . . .	42
2.31. Kreise . . . . .	43
2.32. Kreis als Sonderfall der Ellipse . . . . .	43
2.33. Kreis als Sonderfall der sphär. Ellipse . . . . .	44
2.34. Kugel $\cap$ Drehkegel . . . . .	44
2.35. Angabe: Leitkreis von Kegelschnitte . . . . .	45
2.36. Leitkreis von Ellipse und Hyperbel . . . . .	46
2.37. Angabe: Leitkreis sphär. Kegelschnitte . . . . .	46
2.38. <b>Animation 7:</b> Leitkreis der sphärischen Kegelschnitte . . . . .	47
3.1. Fremd - Eigenpeilung . . . . .	49
3.2. Omega - Hyperbeläste zur Phasendifferenz = 0 . . . . .	50
3.3. Omega - Hyperbelstreifen . . . . .	50
3.4. Omega - Lösung . . . . .	51
3.5. Angabe: Aufgabe 1 . . . . .	53
3.6. Lösung: Analoge Problem in Ebene . . . . .	53
3.7. Lösung: Kreis perspektiv kollinear zu Kegelschnitt . . . . .	54
3.8. Lösung: Rytzsche Achsenkonstruktion . . . . .	54

3.9. Angabe: Aufgabe 2 . . . . .	55
3.10. Lösung: Analoge Problem in Ebene . . . . .	55
3.11. Lösung: Tangenten an Kegelschnitt . . . . .	56
3.12. Angabe: Peripheriewinkel in Ebene . . . . .	56
3.13. Peripheriewinkelsatz in Ebene . . . . .	58
3.14. Angabe: Peripheriewinkel auf Sphäre . . . . .	58
3.15. Peripheriewinkel auf Sphäre zu $\varphi = 90$ . . . . .	61
3.16. Peripheriewinkel auf Sphäre zu $\varphi = 90$ , beide Komponenten . . . . .	61
3.17. <b>Animation 8:</b> Satz des THALES . . . . .	61
3.18. Peripheriewinkel auf Sphäre zu $\varphi \neq 90$ , Kreuzriss . . . . .	62
3.19. Peripheriewinkel auf Sphäre zu $\varphi \neq 90$ , Aufriss . . . . .	63
3.20. <b>Animation 9:</b> Peripheriewinkel auf Sphäre zu $\varphi \neq 90$ . . . . .	64
3.21. Peripheriewinkel auf Sphäre zu $\varphi \neq 90$ , beide Komponenten . . . . .	64
3.22. Peripheriewinkel auf Sphäre, Doppelpunkte . . . . .	64
3.23. Angabe: Rückwärtseinschnitt in der Ebene . . . . .	65
3.24. Rückwärtseinschnitt in der Ebene . . . . .	65
3.25. Angabe: Rückwärtseinschnitt auf der Sphäre . . . . .	65
3.26. Rückwärtseinschnitt auf der Sphäre . . . . .	66
3.27. Satz von Ivory in der Ebene . . . . .	67
3.28. Angabe: Ivory auf der Sphäre . . . . .	68
3.29. Sphärische Satz von Ivory . . . . .	70