Was ist „Dynamische Geometrie“?

Die ***Position***, ***Größe*** *(und* ***Attribute***, *wie Farbe, Strichart, ...) eines Zeichnungselements werden relativ zu einem anderen Element definiert. Wird nun das Ausgangselement verändert, so ändert sich auch das assoziierte (vom Ausgangselement abhängige) Zeichnungselement.*

Beispiele * LAGEABHÄNGIGKEIT (INZIDENZEN)

VERKNÜPFEN VON ENDPUNKTEN

PUNKTE AN GERADEN FIXIEREN

* GEOMETRISCHE VERKNÜPFUNGEN

PARALLELE, NORMALE, ...
WINKELSYMMETRALE, ...
TANGENTE, ...

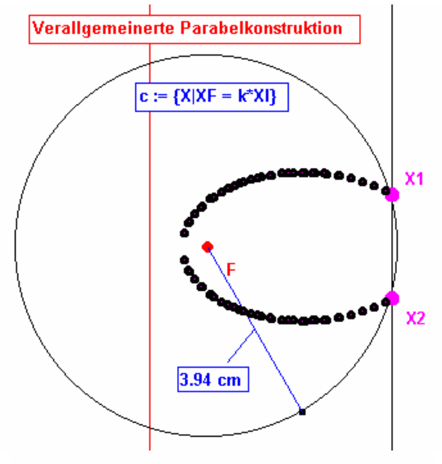
Einsatzmöglichkeiten im Unterricht

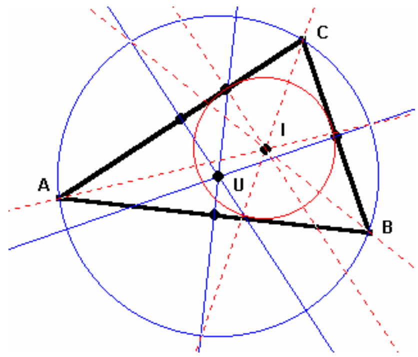
a) ***vorgefertigte Animationen*** *dienen zur* ***Visualisierung*** *geometrischer Sachverhalte*

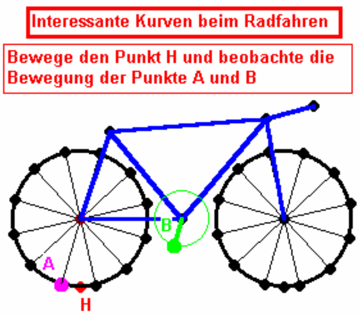
b) ***eigenständiges, koordinatenunabhängiges Zeichnen*** *bekannter geometrischer Konstruktionen festigt die geometrischen Grundkenntnisse*

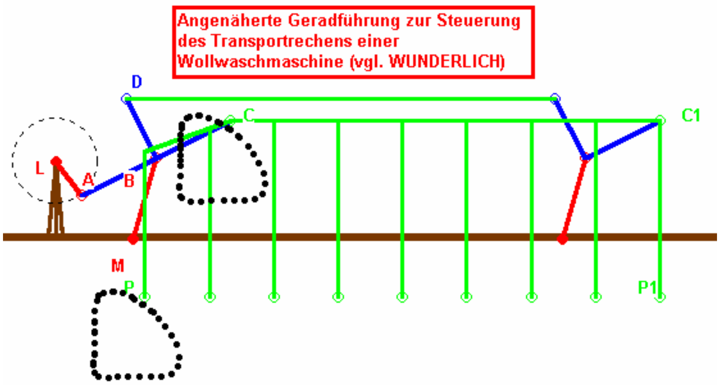
c) ***kinematische Vorgänge*** *können* ***visualisiert*** *(und damit besser verstanden) werden*

d) ***forschendes Entdecken*** *fördert die Kreativität und das mathematische Verständnis der Schüler*





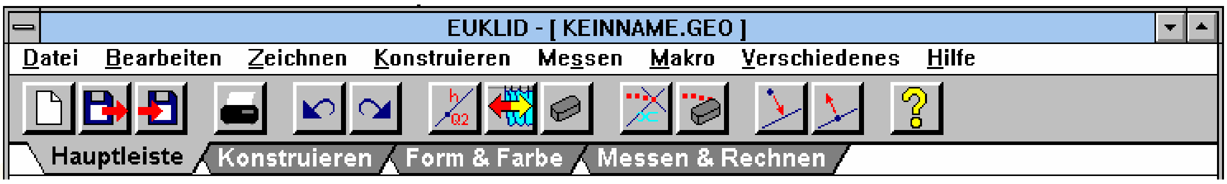




Einführung und Beschreibung der Arbeitsoberfläche

Das als Shareware vertriebene Softwarepaket EUKLID ist ein WINDOWS-Programm und setzt daher eine gewisse Kenntnis der wichtigsten WINDOWS-Eigenschaften (Behandlung von Fenstern, Pull-Down-Menüs, Icons und Buttons) voraus. EUKLID ist ein Zeichenprogramm, das dynamische Zeichnungen erstellt. Mit Hilfe der angebotenen Menübefehle oder durch Anklicken der entsprechenden Symbole der Werkzeugleiste können geometrische Objekte erstellt werden. Sind mehrere voneinander abhängige Objekte erzeugt worden (vgl. Variantenkonstruktion beim CAD2D-Paket), so kann die Zeichnung verändert werden, indem man ein Basisobjekt (Angabeelement) mit der Maus bewegt. Dabei wird die Lage aller von diesem Basisobjekt abhängigen Objekte automatisch aktualisiert.
Als besonders wertvoll für den Unterricht erweist sich die Möglichkeit, den umfangreichen Befehlsvorrat einzuschränken, indem man eine vom Standard abweichende Menükonfiguration wählt. So kann man als Lehrer(in) seine Schüler zwingen, die Konstruktion einer Streckensymmetralen mit Zirkel und Lineal durchzuführen, ohne den entsprechenden Mittelsenkrechten-Befehl zu verwenden.

DAS EUKLID-FENSTER:



In der **Titelzeile** am oberen Rand des Fensters befindet sich der Programmname, gefolgt vom Namen jener EUKLID-Datei (*.GEO), deren Daten gerade auf dem Bildschirm dargestellt sind. Falls das Zeichenblatt noch leer ist oder die aktuelle Zeichnung noch nie abgespeichert wurde, so heißt die Datei standardmäßig KEINNAME.GEO.
Unterhalb der Titelzeile erscheint das **Hauptmenü**; hinter jedem seiner Einträge befindet sich ein Pulldown-Menü.
Die unter dem Hauptmenü befindliche **Werkzeugleiste** bietet einen komfortablen und schnelleren Zugriff auf häufig gebrauchte Befehle; alle über diese Werkzeugleiste gewählten Operationen können natürlich auch über die Menüleiste angewählt werden. In der obigen Abbildung ist die Werkzeugleiste „Hauptleiste“ aktiviert; weitere Werkzeuge sind in den Kästen „Konstruieren“, „Form & Farbe“ und „Messen & Rechnen“ zusammengefasst.
Am unteren Rand des Fensters befindet sich die **Statuszeile**, in der stets eine Meldung über den aktuellen Zustand des Programms informiert. Wird ein Koordinatensystem angezeigt, dann erscheint rechts in der Statuszeile die aktuelle Cursorposition; wir werden aber fast ausschließlich koordinatenfrei (also ohne Koordinatensystem) arbeiten. Der Bereich zwischen der Werkzeugleiste und der Statuszeile stellt das eigentliche **Zeichenblatt** dar.

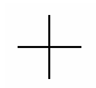
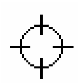
MAUSTASTEN:

Die **linke Maustaste** dient zur Anwahl von Menüpunkten und Werkzeugen aus der Werkzeugleiste sowie zum Skalieren und Verschieben des EUKLID-Fensters. Ein **Doppelklick** der linken Maustaste auf ein schon vorhandenes geometrisches Objekt öffnet ein Dialogfeld, in dem man diesem Objekt einen neuen Namen zuweisen kann. Ein Doppelklick auf einen Kommentartext ruft ein Editorfenster zum Bearbeiten des Textes auf.

Die **rechte Maustaste** dient zum Abbruch einer Aktion; sie entspricht damit der ‘ESC’-Taste. Ein **Doppelklick** der rechten Maustaste auf ein Objekt versteckt dieses Objekt, ohne es zu löschen.

Bemerkung: Konstruktionen, speziell Hilfslinien können unsichtbar gemacht werden, so dass nur die für das Verständnis wesentlichen Linien und Objekte am Zeichenblatt vorhanden sind.

Wie bei fast allen WINDOWS-Programmen üblich, verändert der Mauszeiger - dem aktuellen Programmzustand entsprechend - seine Form:

	**Pfeil:**	Menübefehle können angewählt und Auswahlen in Dialogboxen getroffen werden.
	**Fadenkreuz:**	Erscheint, wenn das Programm die Eingabe eines geometrischen Objekts erwartet.
	**Fadenkreuz mit Kreis:**	Erscheint, wenn der Cursor auf einem geometrischen Objekt steht, dessen Typ zur erwarteten Eingabe passt.
	**Zange:**	Form des Mauszeigers im Zugmodus.
	**Hand:**	Dient zur Veränderung der Positionen von Objektnamen und Maßangaben und zur Verschiebung der ganzen Zeichnung.

Erste Versuche mit EUKLID

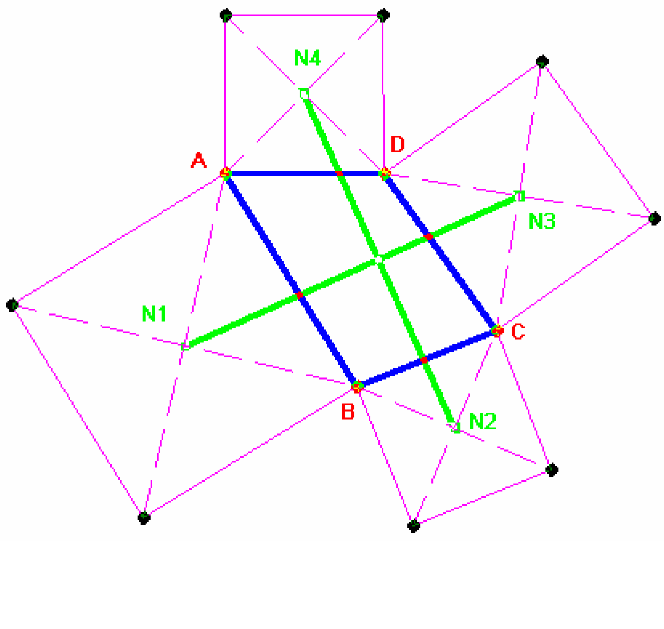
LADEN EINER VORGEFERTIGTEN ZEICHNUNG:

Wir laden die Zeichnung DREIECK.GEO entweder über das Pulldown-Menü **Datei - Laden** oder über nebenstehendes Symbol in der Werkzeugleiste. Man beachte, dass bei längerem Verweilen auf einem Symbol dessen Funktion angezeigt wird. Bewegen wir den Mauszeiger in die Nähe eines Eckpunktes des Angabedreiecks, so ändert dieser seine Form in eine Beißzange. Wir können nun bei gedrückter linker Maustaste das Ausgangsdreieck variieren. Wie beim CAD2D-Programm ändert sich die gesamte Konstruktion, hier allerdings nahezu simultan zur Mausbewegung.
Wir beschriften die Eckpunkte A, B und C (Doppelklick mit der linken Maustaste) und beachten, dass diese Punkte nun auch programmintern A, B und C heißen. Wird das Ausgangsdreieck wieder variiert, so verändert auch die Beschriftung der Eckpunkte ihre Lage. Zum besseren Positionieren der Beschriftung setzen wir den Cursor in die Nähe eines Textes - der Mauszeiger verändert seine Form zu einer Hand - die neue Position des Textes in Bezug auf den Angabepunkt kann nun festgelegt werden. Beobachte beim Variieren der Angabe, dass auch der in seiner Lage geänderte Text mitbewegt wird.
Wir verbergen abschließend Hilfslinien wie Strecken- und Winkelsymmetralen durch doppeltes Anklicken mit der rechten Maustaste, um nur mehr die wesentlichen Objekte am Zeichenblatt zu sehen.

Anhand dieser Zeichnung wollen wir untersuchen, welche Kurve der Umkreismittelpunkt durchläuft, wenn wir einen Eckpunkt beliebig bewegen. Dazu wählen wir das Werkzeug „Ortslinie aufzeichnen“ in der Hauptleiste (oder das Untermenü **Verschiedenes - Ortslinie aufzeichnen**), markieren den Umkreismittelpunkt (beachte die neue Form des Mauszeigers!) und erzeugen die Ortslinie des Umkreismittelpunktes durch Bewegen eines Eckpunktes.

Weitere bereits vorgefertigte Animationen (elektronische Arbeitsblätter) zeigen einige Einsatzmöglichkeiten von EUKLID im Unterricht auf (lade die Beispiele und führe die jeweiligen Arbeitsaufträge aus):

FORDER.GEO



Aufgabe: Auf den Seiten eines allgemeinen Vierecks *ABCD* setzen wir (nach außen) Quadrate auf. Anschließend werden die Mittelpunkte gegenüberliegender Quadrate verbunden.

Arbeitsauftrag: Beobachte die Strecken $\overline{N_1N_3}$ und $\overline{N_2N_4}$. Was fällt auf?

Lösung: Die zu beobachtenden Strecken sind bei allen Vierecken zueinander normal und gleich lang.

Hinweis: Länge der Strecken und Größe des Winkels anzeigen lassen.

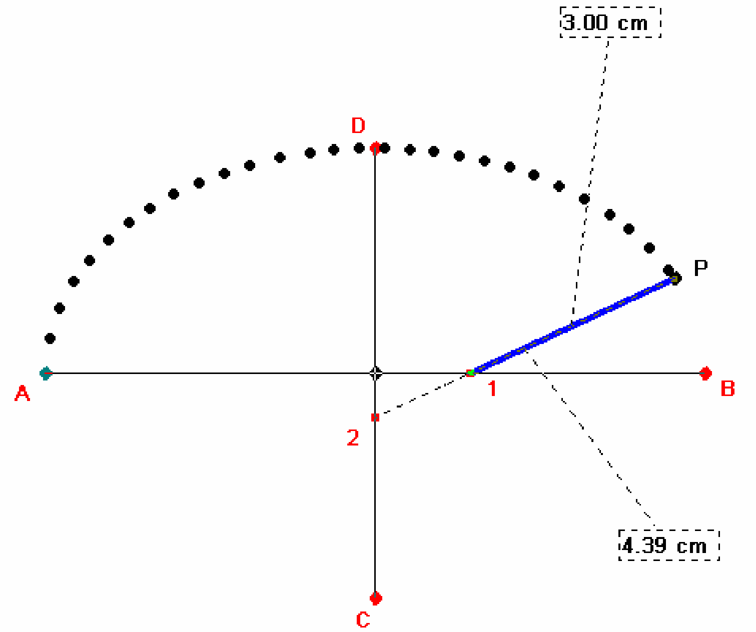
Weitere Untersuchungsmöglichkeiten:

a) Läßt man zwei benachbarte Eckpunkte des Vierecks zusammenfallen (z.B.: *A* mit *D*), so entsteht ein Dreieck *ABC* mit aufgesetzten Quadraten. Verbindet man nun den „doppelten“ Punkt *A*=*D* (dies ist ja gleichzeitig der Mittelpunkt eines degenerierten Quadrats) mit einem „freien“ Mittelpunkt (N_2), so gilt obiger Sachverhalt weiterhin.
*Hinweis: Um zwei Punkte exakt übereinander zu legen, werden diese mit dem Werkzeug **Punkt an den nächsten Gitterpunkt fixieren** in einen ganzzahligen Koordinatenpunkt gelegt.*

b) Läßt man noch die beiden anderen benachbarten Eckpunkte des Vierecks zusammenfallen (*B*=*C*), so erhält man die Strecke $\overline{AB}$. Wie hängen die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{N_1N_3}$ zusammen?

c) Verbindet man die Mittelpunkte der aufgesetzten Quadrate zu einem Viereck $N_1N_2N_3N_4$, so kann man untersuchen, für welchen Lagen der Punkte *ABCD* das Viereck $N_1N_2N_3N_4$ zu einem Quadrat wird.

ELLIPSE.GEO



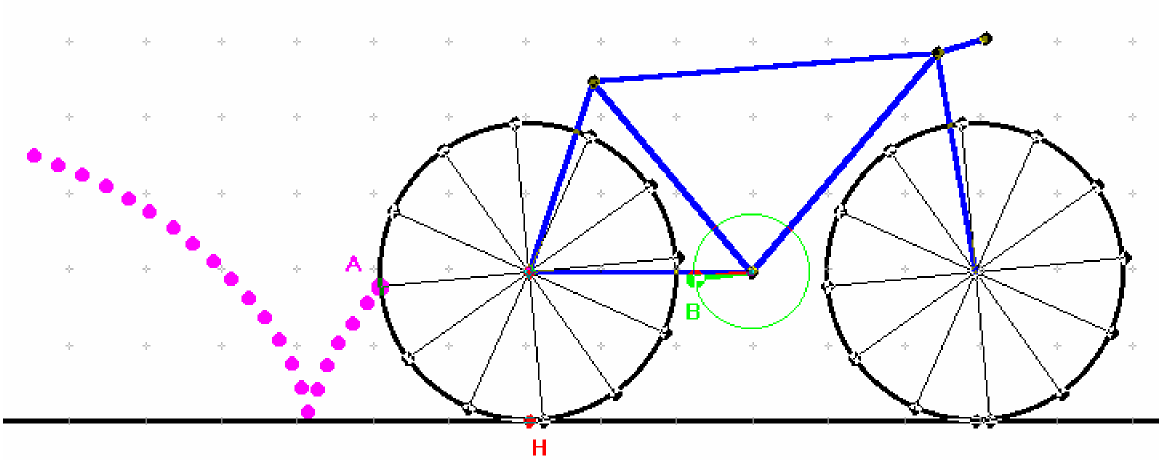
Arbeitsauftrag: Bewege den Punkt *1* auf der Geraden *AB* und beobachte die Bahnkurve des Punktes *P*.

Lösung: Der Punkt *P* durchläuft eine Ellipse mit den Hauptscheiteln *A*, *B* und den Nebenscheiteln *C*, *D*.

Hinweise:

- *Werkzeug **Ortslinie aufzeichnen** für die Bahnkurve von P verwenden!*
- *Im Kontrollfeld können die Längen der Haupt- und Nebenachsen verändert werden.*

FAHRRAD.GEO



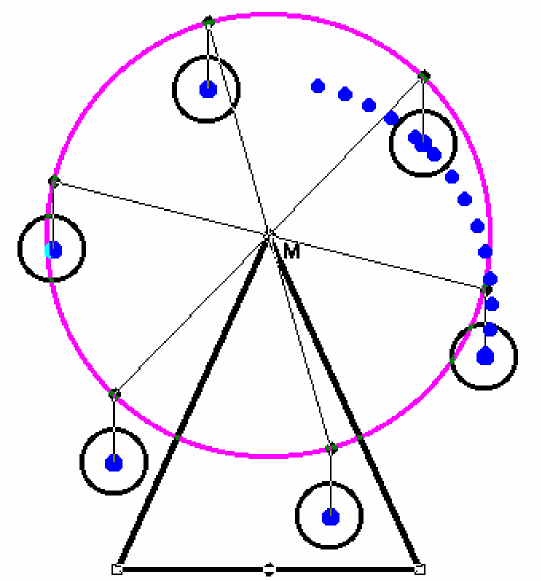
Arbeitsauftrag: Bewege den Punkt *H* auf der „Fahrbahn“ und beobachte die Bahnkurven eines Punktes *A* auf dem Fahradreifen bzw. eines Punktes *B* auf der Kurbel.

A durchläuft eine gespitzte Radlinie (Spitze in jenem Punkt, wo *A* die Fahrbahn trifft), während *B* eine gestreckte Radlinie durchläuft.

Hinweise:

- *Durch Änderung der Strecke r kann der Radius der Kurbel verändert werden; wird r dabei größer als der Radius des Fahradreifens gewählt, so erhält man als Bahnkurve von B eine verschlungene Radlinien.*
- *Die Größe des Fahrrads kann durch Änderung des „hinteren Radlagers“ variiert werden.*
- *Dieses Beispiel kann als Einstieg zur Konstruktion allgemeiner Radlinien dienen.*

WIEN.GEO



Arbeitsauftrag: Bewege den Punkt *H* im Kontrollfeld und beobachte die Bahnen der Gondeln (blaue Punkte) des Riesenrads. Um welche Kurven handelt es sich?

Lösung: Da die Aufhängepunkte eine Kreisbahn *k* durchlaufen, ist auch die Bahnkurve jedes Gondelpunktes ein zu *k* kongruenter Kreis.

Hinweis: Im Kontrollfeld können mittels H_1 die Höhe des Riesenrades, mittels H_2 der Radius von k, mittels H_3 die Länge der „Aufhängesysteme“ und mittels H_4 die Größe der Gondeln verändert werden.

EXTREM.GEO: Lösung eines Extremwertbeispiels mit EUKLID
Aufgabe: Unter allen Rechtecken mit gegebenem Umfang *u* suchen wir jenes mit größtem Flächeninhalt.

Arbeitsauftrag: Ziehe am Eckpunkt *B* und erzeuge damit alle Rechtecke mit festem Umfang *u*. Von allen erzeugten Rechtecken *ABCD* wird der Flächeninhalt - aus Platzgründen wird nur ein Fünftel der tatsächlichen Fläche verwendet - als Funktion der Länge in einem Graphen aufgezeichnet.
Wann ist der Flächeninhalt am größten?

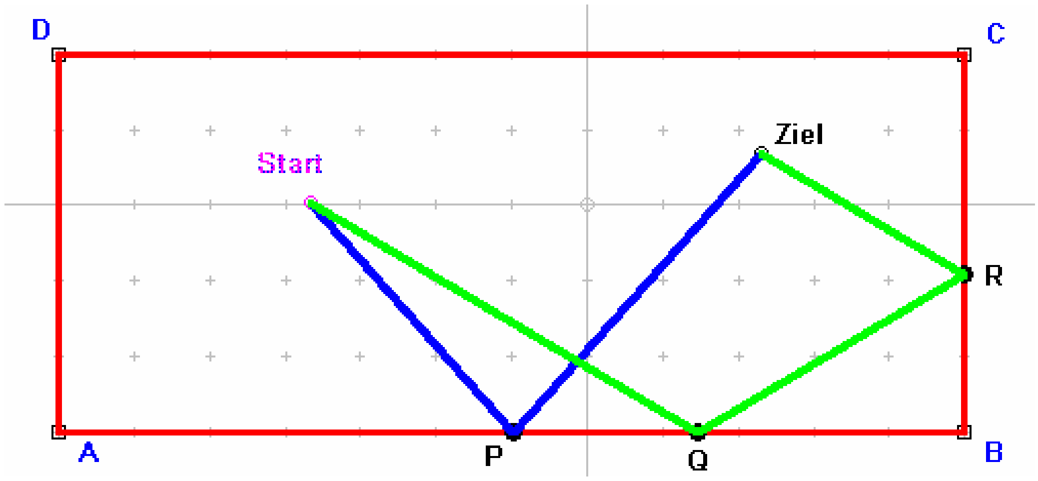
Lösung: Der Punkt „Flächeninhalt“ durchläuft eine Parabel; der größte Wert wird im Scheitel der Parabel (horizontale Tangente) erreicht. In dieser Stellung sind die Länge und die Breite des Rechtecks gleich lang.

Hinweis:

- *Bahnkurve des Punktes Flächeninhalt aufzeichnen*
- *Der Umfang kann durch Ziehen an den Endpunkten der Strecke u variert werden.*

Unser erstes Beispiel – das Billardspiel

Aufgabe: Die Bahn des Mittelpunktes einer Billardkugel soll auf einem viereckigen Billardtisch simuliert werden (BILLARD.GEO). Start und Zielpunkt sind variabel zu halten, weiters sind das Spiel über eine und über zwei Banden zu ermitteln.



Wir wählen aus dem Pulldown-Menü **Zeichnen** den Menüpunkt **N-Eck** und klicken mit der Maus die Eckpunkte eines beliebigen Vierecks an. Um das Viereck schließen zu können, klickt man entweder nochmals den als ersten eingegebenen Eckpunkt an (Mauscursor wechselt seine Form in ein Fadenkreuz mit Kreis) oder man führt auf dem letzten Eckpunkt statt einem einfachen Klick einen Doppelklick aus.
Bemerkung: Die Konstruktion von N-Ecken kann nicht über Werkzeugkästen und Icons durchgeführt werden.
Weiters zeichnen wir den Start- und Zielpunkt ein (unter Verwendung des Icons „Basispunkt“ im Werkzeugkasten „Konstruieren“).
Bemerkung: Durch Betätigen der ‘F3’-Taste oder der ‘W’-Taste kann die letzte Aktion, sofern dies möglich ist, wiederholt werden.
Nun beschriften wir die Eckpunkte des Vierecks sowie Start- und Zielpunkt der Billardbahn (Doppelklick mit der linken Maustaste) und ändern die Farben und Linienarten mittels des Werkzeugkastens „Form & Farbe“. Mittels „Spiegelpunkt“ ermitteln wir den an der Bande *AB* gespiegelten Zielpunkt. Dieser wird mit dem Startpunkt verbunden („Strecke zwischen 2 Punkten“) und der Schnittpunkt *P* mit der Bande *AB* wird markiert („Schnitt zweier Linien“). Nun kann die Bahnkurve Start - *P* - Ziel eingezeichnet werden („Strecke zwischen 2 Punkten“, eventuell ‘*W*’-Taste verwenden). Überflüssige Linien werden verdeckt, verschiedene Farben und Linienarten sollen verwendet werden.
Im Pulldown-Menü **Verschiedenes** wählen wir **Textbox einfügen**, worauf ein Textfenster erscheint, in das wir einen, die Aufgabe beschreibenden Text eingeben. Die Textbox kann anschließend beliebig am Zeichenblatt positioniert werden.
Will man nun einen rechteckigen, allerdings fixen Billardtisch verwenden, empfiehlt es sich im Werkzeugkasten „Messen & Rechnen“ das Werkzeug „Koordinatensystem ändern“ zur Anzeige eines kartesischen Koordinatensystems zu verwenden. Anschließend können die Eckpunkte des Vierecks über das Icon „Punkt an den nächsten Gitterpunkt fixieren“ fest ins Koordinatensystem gelegt werden (die Anzeige für die Punkte *A*, *B*, *C* und *D* ändert sich dabei).
Zusätzlich soll nun die Bahn der Billardkugel beim Spiel über zwei Banden eingezeichnet werden.

Weitere Übungsaufgaben: *(Figuren dazu befinden sich auf der Powerpointpräsentation!)*

1. Ein Quadrat *ABCD* soll einem Dreieck *PQR* so eingeschrieben werden, dass eine Seite (z.B. die Eckpunkte *AB*) auf der Basis *a* des Dreiecks und die beiden anderen Ecken des Quadrats auf den beiden Schenkeln *b* bzw. *c* liegen.

Lösungsvorschlag:

a) Dreieck zeichnen und die Ecken und Seiten beschriften
b) Punkt A auf der Basis PQ als „Punkt auf Linie“ wählen
c) Normale aus A auf die Basis a des Dreiecks zeichnen und den Schnittpunkt D mit der Seite PR bestimmen.
d) Kreis mit Mitte A durch den Punkt D zeichnen und mit der Basisstrecke a des Dreiecks schneiden; ein Schnittpunkt ist der Eckpunkt B des Quadrats
e) Quadrat vervollständigen:
- *Normale zu AB durch B bzw. Normale zu AD durch D zeichnen und schneiden oder*
- *Parallele zu AB durch D bzw. Parallele zu AD durch B zeichnen und schneiden oder*
- *C als Schnittpunkt zweier Kreise k_B (Mittelpunkt B, Kreispunkt A) und k_D (Mittelpunkt D, Kreispunkt A) ermitteln.*

Wird der Punkt A bewegt, so kann die richtige Lage von C vorerst durch Probieren ermittelt werden. Wird die Bahnkurve von C eingezeichnet, so erkennt man, dass es sich dabei um eine Gerade durch den Eckpunkt P des Dreiecks handelt (zentrische Ähnlichkeit!).
Lösungsdatei: DREIECK3.GEO

2. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck *ABC*, dessen Eckpunkte auf drei parallelen (bzw. kopunktalen oder beliebigen) Geraden *g*, *h* und *i* liegen.
Lösungsvorschlag für den allgemeinen Fall – beliebige Geraden:
a) Geraden durch je zwei Angabepunkte (damit können „alle“ Lagen dieser Geraden erzeugt werden) zeichnen und beschriften.
b) Punkt A auf der Geraden g und B auf h jeweils als „Punkt auf Linie“ wählen; die Strecke AB ist die Basis des gesuchten gleichseitigen Dreiecks.
c) Kongruente Kreise durch A (Kreispunkt B) und B (Kreispunkt A) zur Ermittlung des Eckpunkts C miteinander schneiden; zwei Lösungen C_1 und C_2.

Wird nun der Punkt A bewegt, so kann die richtige Lage von C_1 bzw. C_2 vorerst wiederum durch Probieren ermittelt werden. Werden dann die Bahnkurven von C_1 und C_2 aufgezeichnet, so erkennt man, dass die Bahnen von C_i durch Drehstreckung um B aus der Bahn von A (Gerade) entstehen; es gibt daher für jeden festen Punkt B auf h zwei Lösungen.
Lösungsdatei: DREIECK4.GEO

3. Auf welcher Linie bewegt sich der Höhenschnittpunkt *H* eines Dreiecks *ABC*, wenn der Punkt *C* des Dreiecks auf einer Parallelen *g* zur Seite *AB* bewegt wird?
Lösungsvorschlag:
a) Dreieck ABC zeichnen und beschriften.
b) Durch einen beliebigen Hilfspunkt P die Parallele g zu AB zeichnen und den Punkt C auf der Geraden g fixieren.
c) Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC - Normale zu AB durch C mit der Normalen zu AC durch B schneiden; Höhenschnittpunkt markieren und Hilfslinien verstecken.
d) Bahnkurve von H aufzeichnen.

Dass die Bahnkurve Teil einer Parabel ist, kann man über die Bestimmung einer Parabelgleichung

mit Hilfe der festgelegten Punkte A, B und der abgelesenen Koordinaten von H mit anschließendem "Drüberzeichnen" einer Ortslinie der berechneten Funktion erkennen.
Lösungsdatei: DREIECK5.GEO

4. Auf welcher Linie bewegt sich der Höhenschnittpunkt *H* eines Dreiecks *ABC*, wenn der Punkt *C* auf dem Umkreis des Dreiecks *ABC* geführt wird?
   Lösungsvorschlag:
   a) *Dreieck ABC zeichnen und beschriften.*
   b) *Umkreismittelpunkt U (mittels Streckensysmmetralen =Mittelsenkrechte) und Umkreis u einzeichnen.*
   c) *Auf dem Umkreis u einen beliebigen Punkt D wählen und vom Dreieck ABD den Höhenschnittpunkt konstruieren (Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABD - Normale zu AB durch D mit der Normalen zu AD durch B schneiden; Höhenschnittpunkt markieren und Hilfslinien verstecken).*
   d) *Bahnkurve von H bei Bewegung von D aufzeichnen.*

Die Bahnkurve von H ist ein zum Umkreis kongruenter Kreis (vgl. auch die Aufgabe über die Bierdeckel, sowie den Satz von MIQUEL)
Lösungsdatei: DREIECK6.GEO

Weitere Möglichkeiten, kreativ zu werden: Untersuche die Bahnen der übrigen merkwürdigen Punkte und führe dabei C auf beliebigen bzw. besonderen Kreisen (Inkreis, Neunpunktekreis).

5. Löse folgende Fragen durch Konstruieren: Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seiten eines allgemeinen Vierecks, so entsteht ein ....?
   Lösungsvorschlag:
   a) *Viereck ABCD zeichnen und beschriften.*
   b) *Mittelpunkte (M_1, ..., M_4) markieren und die benachbarten miteinander verbinden.*
   c) *Textbox mit der Lösung eintragen.*

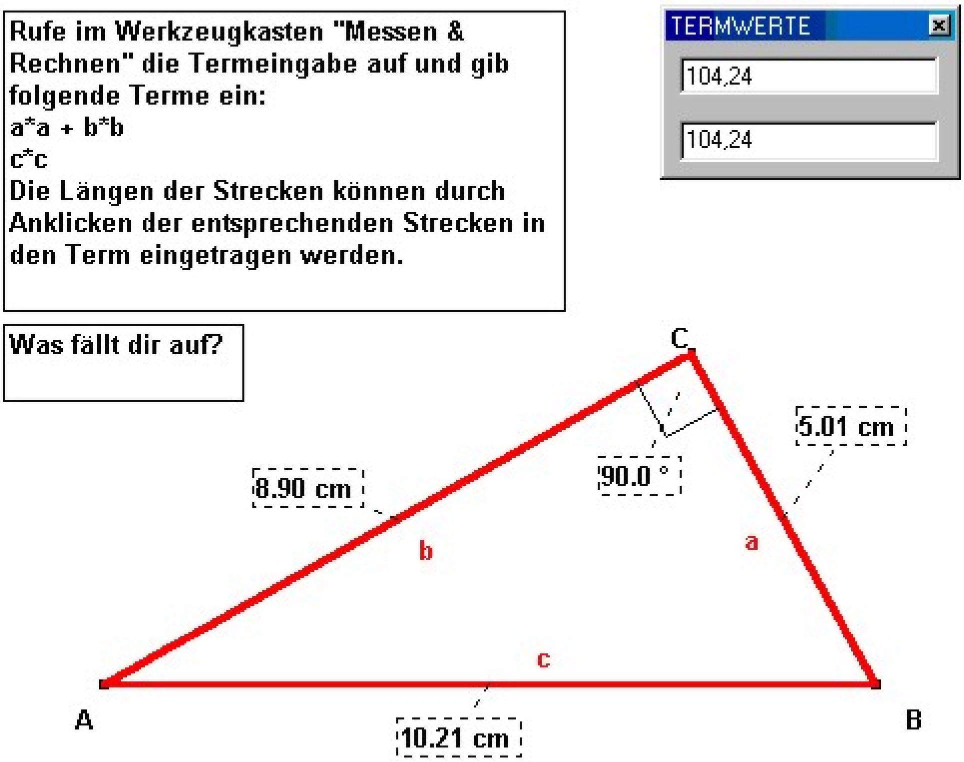
Die Eckpunkte liegen auf einem Parallelogramm; dies gilt sogar für räumliche (windschiefe) Vierseite.
Lösungsdatei: PARALLELOGRAMM.GEO

6. Satz von MIQUEL: Wähle auf den Seiten eines Dreiecks *ABC* jeweils einen Punkt und konstruiere jene Kreise, die durch je zwei Punkte auf den Dreiecksseiten und den dazwischen liegenden Eckpunkt festgelegt sind. Was fällt dir auf?
   Lösungsvorschlag:
   a) *Dreieck ABC zeichnen und beschriften.*
   b) *Zwischenpunkte P, Q und R beliebig auf den Seiten des Dreiecks wählen.*
   c) *Jeweils die Umkreise von PQA, QBR und RCP zeichnen (z.B. Umkreis von PQA: Streckensymmetralen (Mittelsenkrechten) von PQ bzw. PA miteinander schneiden; Kreis mit dem Schnittpunkt als Mittelpunkt durch Eckpunkt A zeichnen).*

Die drei Kreise schneiden einander in einem Punkt.
Lösungsdatei: MIQUEL.GEO

Aufgaben mit dem „Taschenrechner“

Aufgabe: Der Satz von PYTHAGORAS (PYTHAG.GEO) ist zu illustrieren.

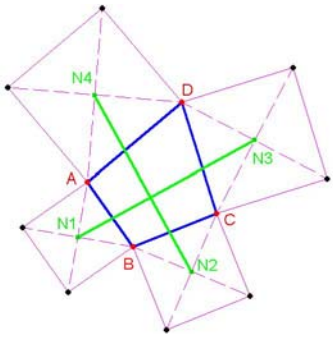


Wir konstruieren zuerst ein rechtwinkeliges Dreieck unter Ausnutzung des Satzes von THALES. Nachdem wir eine beliebige Strecke als Hypotenuse des Dreiecks gezeichnet haben (Beschriftung der Endpunkte mit *A* und *B*), wird der Mittelpunkt dieser Strecke entweder durch Anklicken beider Endpunkte oder durch Auswählen jener Strecke, deren Mittelpunkt man sucht, erzeugt. Der THALES-Kreis wird nun als „Kreis durch Mittelpunkt und Kreispunkt“ gezeichnet und darauf ein Punkt *C* („Punkt auf einer Linie“) gewählt. Man beachte, dass dieser Punkt frei auf dem Kreis beweglich ist (Unterschied zu CAD2D). Das rechtwinkelige Dreieck *ABC* wird nun in einer anderen Farbe ausgeführt und die nicht mehr benötigten Hilfslinien und Hilfspunkte werden verborgen. Mit dem Werkzeug „Winkel messen“ im Werkzeugkasten „Messen & Rechnen“ wird der Winkel bei *C* abgemessen und als rechter Winkel markiert. Außerdem messen wir die Längen der Dreiecksseiten und zeigen diese an.

Bemerkung: EUKLID kennt neben dem Abstand zweier Punkte, dem Abstand eines Punktes von einer Geraden und dem Abstand zweier paralleler Geraden auch die Abstände von Punkten oder Geraden zu einem Kreis sowie den Abstand zweier Kreise.

Nun gestalten wir in einem Textfenster noch eine Arbeitsanleitung: Die „Termeingabe“ im Werkzeugkasten „Messen & Rechnen“ soll benutzt werden, um den Pythagoräischen Lehrsatz zu verifizieren. In einem Dialogfenster können zwei beliebige mathematische Terme (a*a + b* b, c*c) eingegeben und anschließend angezeigt werden. Alle Objekte der Zeichnung können dabei als Teile der Terme (anklicken!) fungieren.

Aufgabe: Setze auf die Seiten eines allgemeinen Vierecks *ABCD* Quadrate (nach außen) auf und verbinde gegenüberliegende Mittelpunkte. Was fällt dir auf? (FORDER.GEO)

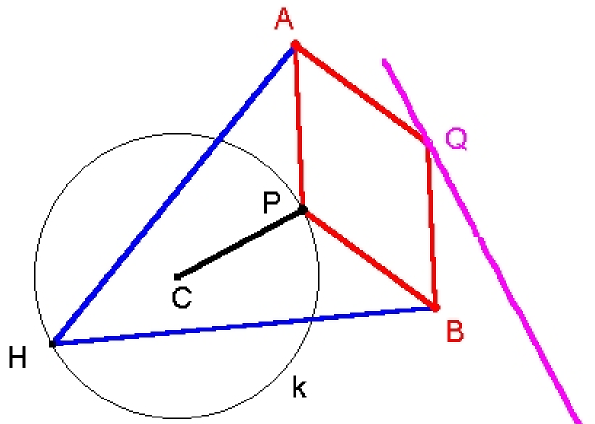


Wir beginnen mit dem Zeichnen eines Vierecks *ABCD* und beschriften die Eckpunkte. Auf die Seiten dieses Vierecks setzen wir nun Quadrate auf und konstruieren deren Diagonalen. Anschließend verbinden wir gegenüberliegende Mittelpunkte M_1 mit M_3 bzw. M_2 mit M_4.
Durch Abmessen dieser Strecken und des Winkels (den die beiden Strecken einschließen) können wir leicht die richtige Vermutung erraten.

Die beiden Strecken sind gleich lang und der markierte Winkel beträgt 90°; dieser Sachverhalt gilt auch noch, wenn zwei Angabepunkte zusammenrücken (z.B.: A=B; dies erreicht man, indem man beide Punkte auf ganzzahligen Koordinaten fixiert), wenn also aus dem Viereck ein Dreieck wird. Auch bei der Degeneration des Vierecks in eine Strecke gilt noch immer die Streckengleichheit (zwei Mittelpunkte werden zu Eckpunkten!) und der rechte Winkel bleibt erhalten.

Weitere interessante Fragestellungen ergeben sich, wenn man untersucht, wie sich die Form des Vierecks *ABCD* auf die Gestalt des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ „durchdrückt".

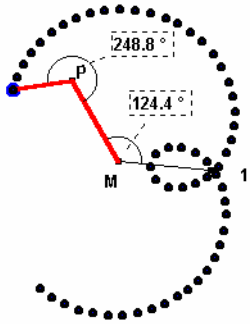
Aufgabe: Im Verlauf der Industriellen Revolution richtete sich mit der Entwicklung der Dampfkraft und vieler komplexer Maschinen das Interesse der Techniker auf die Übertragung kreisförmiger Bewegungen in geradlinige Bewegung.
Illustriere die Geradführung nach PEAUCELLIER. (KINEMAT1.GEO)



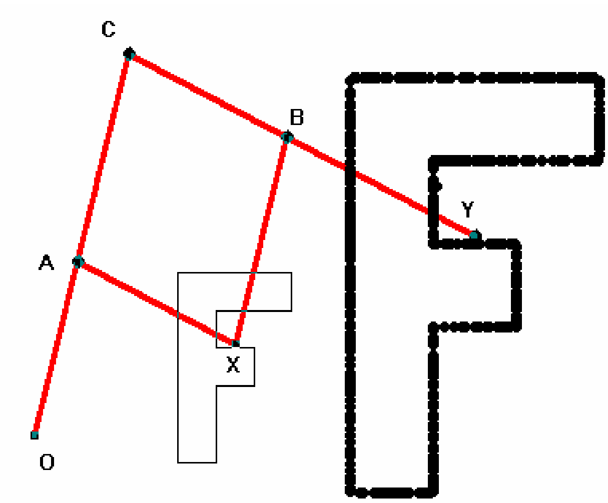
Wir wählen zwei unabhängige Basispunkte *H*, *C* und einen frei beweglichen Punkt *P* auf dem Kreis *k*[Mittelpunkt *C*, $r = \overline{HC}$]. Die Punkte *A* und *B* sind jeweils von *P* bzw. *H* gleich weit entfernt (Abstände r_P bzw. r_H). Wir zeichnen daher zwei Strecken r_P bzw. r_H und messen deren Längen ab. Die Punkte *A* und *B* können dann als Schnittpunkte zweier Kreise mit den Mittelpunkten *H* bzw. *P* ermittelt werden. Wird das Dreieck *APB* nun zu einer Raute *APBQ* erweitert (Parallele zeichnen), so durchläuft der Punkt *Q* eine Gerade, sofern *P* auf dem Kreis *k* bewegt wird.

Aufgabe: Rotiert ein Punkt *Q* um einen Punkt *P*, der wiederum um einen festen Punkt *M* rotiert, so beschreibt *Q* eine Radlinie (RAD1.GEO).

Wir beginnen mit dem Rastkreis; dazu konstruieren wir einen variablen Kreis [Mittelpunkt *M*, Kreispunkt *1*] und wählen auf diesem einen Punkt *P*. Nun messen wir den Winkel $\alpha = \angle 1MP$ ab und konstruieren eine Gerade *g*, welche mit der Strecke $\overline{PM}$ einen Winkel von $\beta = k\alpha$ (z.B.: *k* = 2) einschließt („Gerade in bestimmten Winkel“; im Dialogfeld den gewünschten Wert eingeben). Der gesuchte Punkt kann nun als Schnittpunkt dieser Hilfsgeraden mit einem in *P* zentrierten Kreis gefunden werden.



Aufgabe: Zur Vergrößerung bzw. Verkleinerung von ebenen Figuren verwendet man häufig ein mit „Storchenschnabel“ bezeichnetes Gelenksparallelogramm *AXBC*, welches in einem festen Punkt *O* drehbar gelagert ist. Wird der Punkt *X* dann längs einer Figur bewegt, so beschreibt der Farbstift im Punkt *Y* eine zur Ausgangsfigur zentrisch ähnliche Figur. Dieser Mechanismus wurde um 1630 vom Jesuitenpater Ch. SCHEINER erfunden (Entdecker der Sonnenflecken).



Um den Vergrößerungsfaktor *k* variabel zu halten, beginnen wir mit einem Kontrollfeld (Rechteck auf Koordinatenpunkte fixiert), in dem wir zwei Punkte beliebig annehmen; die dadurch festgelegte Strecke *k* bestimmt den Vergrößerungsfaktor (Länge abmessen!). Da wir weiters Figuren beliebiger Größe zeichnen wollen, benötigen wir eine weitere (variable) Länge $d = \overline{OA}$, die ebenfalls im Kontrollfeld festgelegt werden soll (zwei Punkte; Abstand messen).
Die Punkte *O* und X können nun frei gewählt werden. Da die Punkte *OAX* ein gleichschenkeliges Dreieck mit der Schenkellänge *d* bilden, kann *A* als Schnittpunkt zweier kongruenter Kreise bestimmt werden. Auf der Geraden *OA* liegt der Punkt *C* mit $\overline{OC} = k * \overline{OA} = k * d$ (Schnittpunkt mit einem Kreis – Mitte *O* – Radius *k***d*).
Der Punkt *B* wird als vierter Eckpunkt des Parallelogramms *XACB* und *Y* als Schnittpunkt der Geraden *OX* und *CB* konstruiert. Nun werden nur noch die Hilfskreise und Hilfsgeraden verdeckt und notwendige Stäbe (als Strecken) eingetragen.

Verwenden von Makros

Für verschiedene Konstruktionen ist es zweckmäßig, mehrere häufig vorkommende Konstruktionsschritte zu einem Makro zusammenzufassen. Der allgemeine Ablauf zur Erstellung eines Makros wird vorerst allgemein vorgestellt:
(1) Nach dem Anwählen des Menübefehls „Makros - Neues Makro erstellen“ erscheint in der linken oberen Ecke des Zeichenblattes ein Fenster, in welches die Startobjekte des Makros eingegeben werden. Sollte beim Markieren der Startobjekte ein Mausklick nicht eindeutig einem Objekt zuzuordnen sein, wird eine Auswahlbox gezeigt, in der die Namen aller in Frage kommenden Objekte aufgelistet sind; das gewünschte Objekt ist aus dieser Liste zu wählen.
(2) Nach der Eingabe der Startobjekte verändert sich der Kopftext des kleinen Fensters und die Zielobjekte des Makros werden eingegeben.
Sollte ein Zielobjekt markiert werden, welches sich nicht aus den markierten Anfangsobjekten ableiten läßt, so wird die Makroerstellung nach einer Fehlermeldung abgebrochen.
(3) Abschließend wird ein Name für das Makro sowie (optional) ein erklärenden Hilfetext eingegeben. Der hier eingetragene Name wird nach der erfolgreichen Erstellung des Makros als neuer Eintrag am Ende des Makro-Menüs angefügt. Der eingegebene Hilfetext wird später immer dann angezeigt werden, wenn Hilfe zu einem Makroeintrag im Makromenü angefordert wird.

Aufgabe: Erstelle ein Makro für die Aufgabe „Tangenten aus einem Punkt *P* an einen Kreis *k*“.

Wir starten mit den Angabeelementen: Punkt *P*, Kreismitte *M* und ein beliebiger Hilfspunkt *H*, der den Radius des Kreises festlegt. Nach der Konstruktion des Kreises *k* wird über der Strecke *MP* der Thaleskreis errichtet und mit dem Kreis *k* geschnitten. Die Schnittpunkte S_1 und S_2 sind die Berührpunkte der gesuchten Tangenten t_1 und t_2.
Wir wählen den Menüpunkt „Makros - Neues Makro erstellen“ und klicken der Reihe nach den Punkt *P*, die Mitte *M* und den Hilfspunkt *H* als Startobjekte an (Achtung auf die Reihenfolge!). Als Zielobjekte wählen wir die Tangenten t_1 und t_2 aus und bezeichnen das Makro mit einem sinnvollen Namen (z.B.: Tangenten).
Wurde unser Makro erfolgreich erstellt, so können wir es gleich austesten:
Dazu zeichnen wir drei beliebige Punkte *1*, *2* und *3*. Mit *2* als Mitte und *3* als Kreispunkt wird nun ein Kreis k_1 konstruiert. Wählen wir nun aus dem Menü „Makros“ das soeben erstellte Makro „Tangenten“ aus und klicken der Reihe nach *1*, *2* und *3* an, so werden die Tangenten von *1* aus an den Kreis k_1 gelegt.
Dieses Makro kann natürlich auch gespeichert werden, so dass es für künftige Arbeiten zur Verfügung steht.

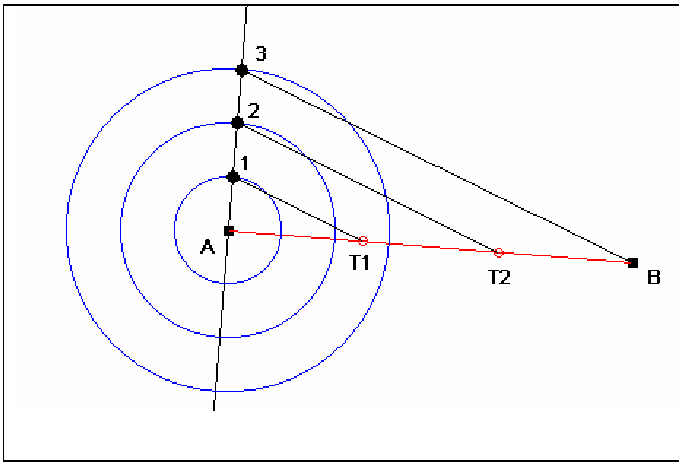
Aufgabe: Erstelle ein Makro für die Aufgabe „Kreisspiegelung“.

Wir wenden uns nochmals der obigen Aufgabe zu und erweitern unsere Zeichnung durch die Strecke $\overline{S_1S_2}$. Der Schnittpunkt *P‘* der Strecke $\overline{S_1S_2}$ mit der Durchmessergeraden *PM* wird der zu *P* inverse Punkt bezüglich *k* genannt.
Als Startobjekte für das Makro „Inversion“ wählen wir wie vorhin die Punkte *P*, *M* und *H*; als Zielobjekt tritt nur der Punkt *P‘* auf.
Nach dem Testen des Makros (vgl. vorige Aufgabe) wollen wir gemeinsam Eigenschaften der Inversion erarbeiten:

a) Abbildung eines Kreises: ....
b) Abbildung einer Geraden: ....

Aufgabe: Teilt man die Seiten eines Dreiecks in je drei gleiche Teile und verbindet die

Teilungspunkte mit den gegenüberliegenden Ecken, so entsteht ein Sechseck, dessen Flächeninhalt mit dem Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks in Beziehung steht. Wie lautet dieser Zusammenhang?



Wir erstellen vorerst das Makro TEIL3, indem wir eine beliebige Strecke zeichnen, und in einem Endpunkt eine orthogonale Hilfsgerade und drei konzentrische Kreise mit den Radien 1, 2 und 3 konstruieren. Nun werden die Schnittpunkte der Kreise mit der Hilfsgeraden markiert und der Strahlensatz angewandt. Als Startobjekte für unser Makro wählen wir die Strecke $\overline{AB}$ und deren Endpunkte; als Zielobjekte definieren wir die Teilungspunkte *T1* und *T2*. Wir speichern das Makro unter TEIL3, und fertigen eine sinnvolle Beschreibung an.

Nun wenden wir das Makro TEIL3 auf ein beliebiges Dreieck an, konstruieren oben beschriebenes Sechseck und berechnen jeweils die Flächeninhalte (Messen, Termeingabe).

Vorschläge für weitere Anwendungsbeispiele

Ebene Geometrie:

1) Die Gärtnerkonstruktion der Ellipse samt Tangentenkonstruktion (Tangente als Winkelsymmetrale der Brennstrahlen) ist zu illustrieren.
2) Unter Ausnutzung der Stechzirkelkonstruktion kann eine Hyperbel erzeugt werden. Weiters ist die Eigenschaft einer Hyperbel, daß die Abschnitte zwischen Hyperbelpunkten und Asymptoten auf jeder Geraden jeweils gleich lang sind, zu zeigen.
3) Die EULER-sche Gerade eines Dreiecks und der FEUERBACH-sche Neunpunktekreis sind zu konstruieren.

Darstellende Geometrie:

4) Das Bild eines Dreiecks (Vierecks) unter einer perspektiven Kollineation ist zu zeichnen.
5) Die Konstruktion von PROKLUS (DE LA HIRE) ist zu illustrieren.
6) Der Zentralriss eines Quaders soll variantengerecht erstellt werden.
7) Ein Kreis *k* und sein perspektiv kollineares Bild sind zu erzeugen.

Kinematik:

8) Ein Punkt *P* eines Kreis *k*, der auf einer Geraden abrollt, ist zu konstruieren (Zykloide).

Projektive Geometrie:

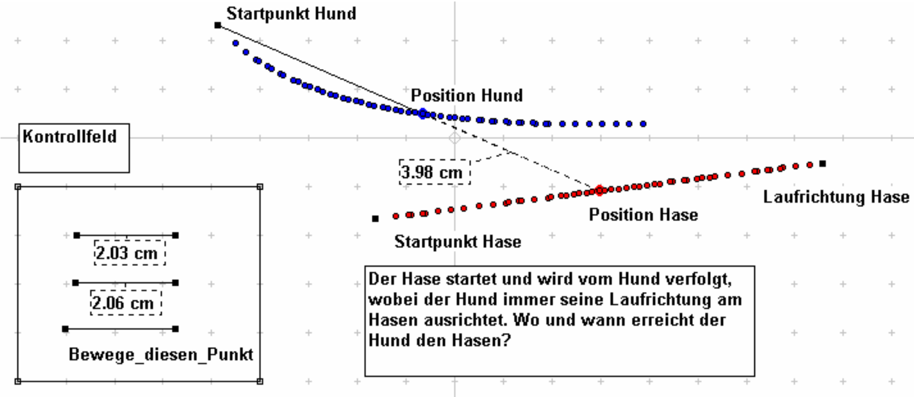
9) Illustriere den Satz von Pascal und erzeuge damit einen beliebigen Kegelschnitt durch Punkte.

Allgemeine Beispiele

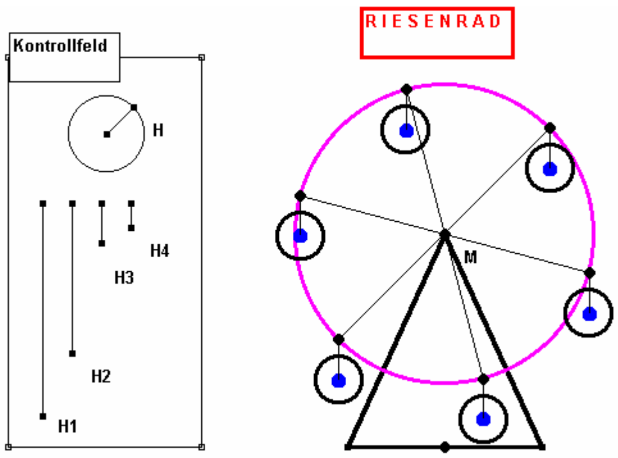
10) Man erstelle ein Makro, welches in ein gegebenes Quadrat ein eingeschriebenes, verdrehtes Quadrat zeichnet, und gestalte damit ein Muster.

Beispiele samt Bildern

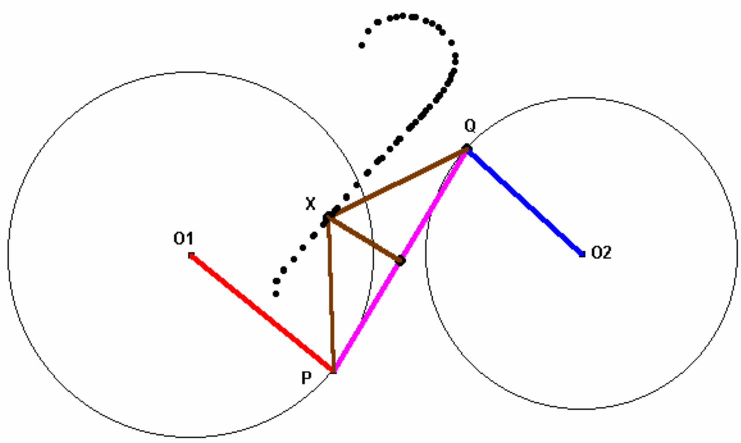
1) **Verfolgungsprobleme**: Ein Hund verfolgt einen Hasen, wobei dieser geradlinig (auf einer Kreisbahn) flüchtet. Kann der Hund den Hasen einholen?



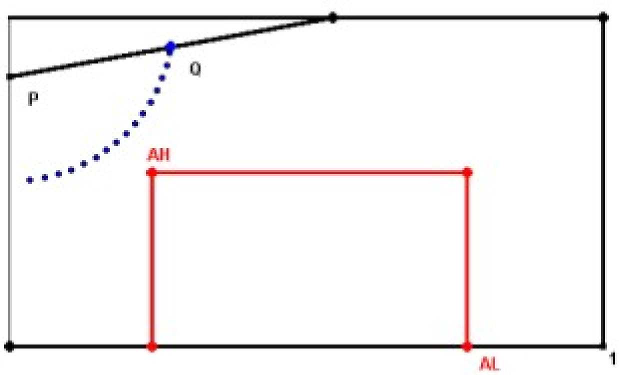
2) **Riesenrad**: Untersuche die Bahnkurven der Gondeln eines Riesenrades.



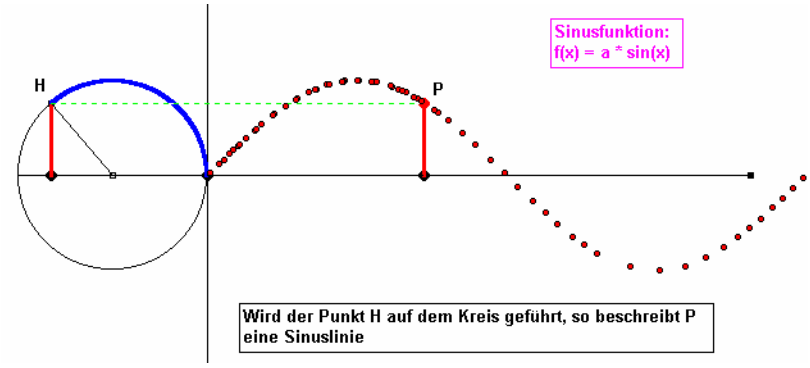
3) **Koppelgetriebe**: Durchlaufen die Punkte *P* und *Q* Kreise und wird der Punkt *X* starr mit der Koppel *PQ* verbunden, so läuft *X* auf einer sogenannten Koppelkurve.



4) **Garagentor** und Schließmechanismus:



5) **Sinuslinie**: Illustriere die Entstehung einer Sinuslinie



6) **Satz von PAPPOS-PASCAL**: Wählt man sechs Punkte *123456* auf einem Kegelschnitt, so liegen die Schnittpunkte der Geraden *12* mit *45*, *23* mit *56* und *34* mit *61* auf einer Geraden; dies kann zur Konstruktion eines Kegelschnitts aus fünf Punkten verwendet werden.