
Gefördert von der Hochschuljubiläumsstiftung der Stadt Wien
Institut für Geometrie
TU Wien
Navigation auf der Erdoberfläche
Die Parabel in Physik und Geometrie
Moderne Architektur und Design
Klassische Geometrie
Spiegelungsgeometrie in der Technik
Die Kugel rollt
Kinematik und Getriebelehre
Geometrie in der Chemie
Malerei und Geometrie
Erstellt unter Leitung von Dr. Andreas Asperl, A.O.Prof.Dr. Peter Paukowitsch unter Mitarbeit von
Mag. Gerhard Schober, Mag. Harald Paulsen, Cornelia Steinmair. PC Programm: Hannes Kaufmann

Warum?

* Lehrplan
* Modern, attraktiv, anwendungsorientiert
* Arbeitsaufwand
* Öffentlichkeitsarbeit

Ziele

* gebrauchsfertige Aufgaben
  (Arbeitsblätter, Durchzeichnungen)
* fachliche Hintergrundinformation
* (rezensierte) Literaturliste
* Visualisierungssoftware

Verbreitung

* Winworddateien auf CD (Version 1 ab 3/98)
* HTML-Dateien für das Internet

Mitarbeiter

Projektleiter: Dr. Andreas ASPERL
A.O.Prof. Peter PAUKOWITSCH
Mag. Gerhard SCHOBER
Mag. Harald PAULSEN
Hannes KAUFMAMM
Cornelia STEINMAIR

Weitere Mitarbeiter gewünscht
aa@geometrie.tuwien.ac.at

Eine geometrische Interpretation der Ausgleichsrechnung

(Andreas ASPERL)

$$\begin{aligned} x \quad\;\; &= 0{,}2 \\ y &= 0{,}4 \\ x + y &= 0{,}9 \end{aligned}$$

Berücksichtige $r_1,\ r_2,\ r_3$ und erhalte die Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} x \quad\;\; - 0{,}2 &= r_1 \\ y - 0{,}4 &= r_2 \\ x + y - 0{,}9 &= r_3 \end{aligned}$$

Minimale Residuen:
a) die Summe der Beträge der Residuen
b) der Betrag des größten auftretenden Meßfehlers
c) die Summe der Quadrate der Meßfehler sei minimal.

<u>Geometrische Interpretation:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} . y - \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}.x + \mathbf{b}.\mathrm{y} - \mathbf{c} = \mathbf{r}$$

Numerische Lösung:

r normal **a**, also **r.a** = 0
r normal **b**, also **r.b** = 0

Anwenden auf die Aufgabe

$$0 = \mathbf{r}.\mathbf{a} = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.x + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.y - \begin{pmatrix}0{,}2\\0{,}4\\0{,}9\end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$0 = \mathbf{r}.\mathbf{b} = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.x + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.y - \begin{pmatrix}0{,}2\\0{,}4\\0{,}9\end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

liefert lineares Gleichungssystem in *x* und *y*:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 1{,}1 \\ x & + & 2y & = & 1{,}3 \end{array}$$

mit den Lösungen $x_0 = 0{,}3$ und $y_0 = 0{,}5$.

Methode des kleinsten maximalen Fehlers

Der größte auftretende Meßfehler soll minimal werden.

Geometrisch interpretiert bedeutet dies, jenen Punkt L der Ebene OAB zu finden, für den gilt: der Betrag der größten auftretenden Koordinatendifferenz $|x_L - x_C|$, $|y_L - y_C|$ und $|z_L - z_C|$ ist minimal.

Minimum im Sinne der Maximumnorm $\| \mathbf{x} \| := \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$
Ausgleichung nach TSCHEBYSCHEFF.

Ebene Situation:
Suche jenen Punkt L der Geraden g, für den gilt:
der Betrag der größten auftretenden Koordinaten-differenz $|x_L - x_C|$ und $|y_L - y_C|$ ist minimal.

Methode der kleinsten Meßfehlersumme

Summe der Beträge der auftretenden Meßfehler minimal

Geometrische Interpretation:
Suche jene(n) Punkt(e) L der Ebene OAB für den (die)

$$|x_L - x_C| + |y_L - y_C| + |z_L - z_C|$$

minimal wird.

Ebene Situation:
Suche jene(n) Punkt(e) L der Geraden g für den (die)

$$|x_L - x_C| + |y_L - y_C|$$

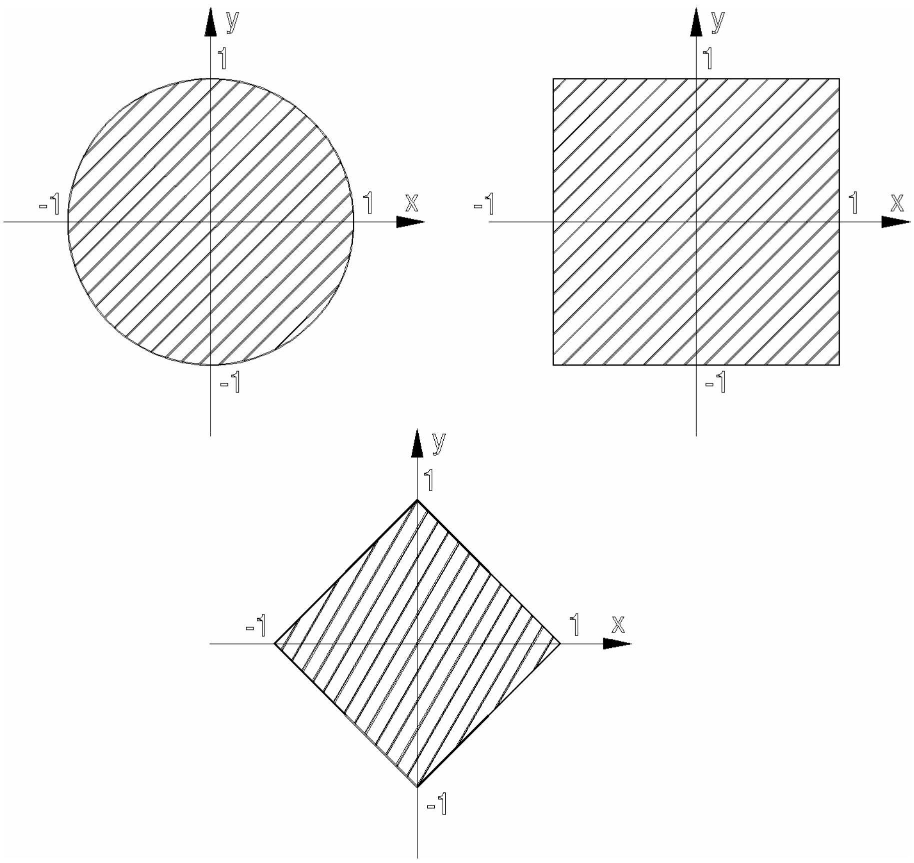
minimal wird.

Normen und Messen

Drei gleichwertige Problemstellungen - kürzester Vektor im Sinne einer Norm

„Visualisierung" der Normen:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max(|x|,|y|) \leq 1$$



$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x| + |y| \leq 1$$

Folgerung:
Im Sinne der L_1- Norm und der Maximumsnorm L_∞ können durchaus mehrere Lösungen möglich sein.

Ausblick:

* Die geometrische Fragestellung „Gerade, welche möglichst nahe an drei (*n*) Punkten vorbeiführt“ liefert ein nichtlineares Ausgleichsproblem (geometrische Interpretation ?)
* n Messungen m_i eines Geradenstücks x ergibt:

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$$

* Lage des Schwerpunkts S der Datenpunkte $P_i(x_i \,/\, y_i)$