D I S S E R T A T I O N

Die Konvergenz spezieller stochastischer Prozesse gegen die Brownsche Exkursion un deren lokale Zeit

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades

eines Doktors der technischen Wissenschaften

eingereicht an der Technischen Universität Wien

Technisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

von

Bernhard Gittenberger

Embelgasse 5-7/2/6, 1050 Wien

Matr.Nr. 8925428

geboren am 7.4.1971 in Wien

Wien, im April 1995

Kurzfassung

Bäume gehören zu einer Klasse von Graphen, die vielfältige Verwendung in der theoretischen Informatik, wie z. B. zur Beschreibung von Datenstrukturen und in weiterer Folge zur Analyse von Algorithmen, finden. Aufgrund dessen ist eine Vielzahl von Arbeiten entstanden, welche die Struktur von Bäumen untersuchen.

Eine wichtige Fragestellung in bezug auf Bäume ist die Frage nach dem Verhalten bestimmter Charakteristiken, wenn man die Baumgröße gegen unendlich wachsen läßt. Dabei interessieren häufig Verteilungseigenschaften dieser Größen, wenn man die Bäume gemäß einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung auswählt. Betrachten wir zum Beispiel den Traversierungsprozeß auf ebenen Wurzelbäumen, das ist das Durchlaufen der Kontur des Baumes von der Wurzel ausgehend. Wenn man den Abstand von der Wurzel während des Traversierens als Funktion aufzeichnet und eine Gleichverteilung auf der Menge aller Bäume derselben Größe vorgibt, so erhält man den Gitterpfad einer symmetrischen Irrfahrt, die – bei geeigneter Skalierung – für wachsende Baumgröße schwach gegen eine Brownschen Exkursion konvergiert.

David Aldous [1, 2, 3] untersuchte solche Grenzprozesse mit Hilfe sogenannter Kontinuumbäume, das sind Bäume mit unendlich vielen Knoten und infinitesimalen Kanten, die als Grenzwert von Folgen von geeignet skalierten Bäumen auftreten. Mit seiner Methode war es möglich, eine Reihe von ähnlich gearteten Grenzwertsätzen für allgemeine Baumfamilien zu beweisen. Bei speziellen Prozessen, den lokalen Prozessen, ist diese Methode zu schwach.

Einen ähnlichen Prozeß studieren Gutjahr und Pflug [16]. Sie betrachten den sogenannten Konturprozeß eines Baumes, d.i. eine „Traversierung der Blätter", und zeigen, daß dieser Prozeß für Binärbäume schwach gegen die Brownsche Exkursion konvergiert. Dabei werden exakte Formeln über die Blätter von Binärbäumen verwendet, um die benötigten Resultate herzuleiten. Eine Verallgemeinerung auf größere Baumfamilien ist auf diesem Weg nicht erreichbar, da sich nur für einige spezielle Baumfamilien exakte Formeln berechnen lassen.

Aufgrund ihrer rekursiven Struktur sind Bäume besonders für die Analyse mit Hilfe von erzeugenden Funktionen zugänglich. Dieser Ansatz wird hier benutzt, um die oben genannten Probleme zu lösen. Das erste Kapitel dient einerseits der Bereitstellung der im folgenden benötigten Methoden und Resultate und andererseits dazu, das mathematische Umfeld der behandelten Probleme ein wenig zu beleuchten. Es gliedert sich in drei Abschnitte: Der erste beschäftigt sich mit stochastischen Prozessen und deren Konvergenz. Als Vorlage dienten [4] und [20]. Im zweiten Abschnitt wird die Brownsche Exkursion und deren lokale Zeit behandelt. Als einfaches Beispiel für eine Anwendung der Konvergenztheorie des ersten Abschnitts wird die schwache Konvergenz der symmetrischen Irrfahrt gegen die Brownsche Bewegung gezeigt. Für eine detaillierte Behandlung der Brownschen Exkursion und deren lokaler Zeit sei auf [19, 20] verwiesen. Der letzte Abschnitt gibt einen kurzen Überblick der in dieser Arbeit benötigten Eigenschaften von Galton-Watson-Verzweigungsprozessen und präsentiert Verbindungen zu Zufallsbäumen, wobei [2, 17] als Quelle dienten.

Das zweite Kapitel beinhaltet die Ergebnisse dieser Arbeit. Es wird folgendes gezeigt:

- Der Konturprozeß konvergiert für einfach erzeugte Bäume schwach gegen die Brownsche Exkursion. Das stellt eine Erweiterung des Resultats von Gutjahr und Pflug auf eine wesentlich allgemeinere Baumfamilie dar. Um dieses Ergebnis zu erzielen, wird zunächst ein Vertauschungslemma bewiesen, das es ermöglicht, die Struktur der Bäume – und damit ihre erzeugende Funktion – zu verändern und gleichzeitig die Verteilungen der

betrachteten Zufallsvariablen, d.s. die Werte des Prozesses an endlich vielen Stellen, invariant zu lassen. Dadurch erreicht man eine wesentliche Vereinfachung der erzeugenden Funktionen, sodaß die schwache Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen hergeleitet werden kann. Abschnitt 2.2.3 enthält den Beweis der Straffheit, wodurch die schwache Konvergenz des Prozesses gegen die Brownsche Exkursion gezeigt ist.

- Der Traversierungsprozeß konvergiert schwach gegen die Brownsche Exkursion. Dieser Grenzwertsatz wurde von Aldous bewiesen. In dieser Arbeit wird ein neuer Beweis mittels erzeugender Funktionen gegeben. Die involvierten erzeugenden Funktionen sind von ähnlicher Gestalt wie jene des Konturprozesses. Deshalb verläuft der Beweis nahezu analog zum Konturprozeß.

- Der aus der Anzahl der Knoten im Niveau $\kappa\sqrt{n}$ (n ist die Größe des Baumes) gebildete Prozeß konvergiert für ebene Wurzelbäume schwach gegen die lokale Zeit der Brownschen Exkursion. Für allgemeine, einfach erzeugte Bäume konvergieren die endlichdimensionalen Verteilungen schwach gegen jene der lokalen Zeit. Ausgehend von einer Asymptotik der zugrundeliegenden erzeugenden Funktion wird eine Integraldarstellung der charakteristischen Funktionen der ein- und zweidimensionalen Verteilungen hergeleitet und daraus eine Rekursion für jene der endlichdimensionalen Verteilungen gewonnen. Abschnitt 2.3.2 liefert eine Darstellung der zweidimensionalen Dichte der lokalen Zeit und eine Methode zur Bestimmung der k-dimensionalen Dichten für jedes vorgegebene k. Der darauffolgende Abschnitt enthält den Beweis der Straffheit des auf ebenen Wurzelbäumen basierenden Prozesses.

- Der letzte Abschnitt behandelt den der Anzahl der Blätter im Niveau $\kappa\sqrt{n}$ zugeordneten Prozeß. Es wird gezeigt, daß auch dieser Prozeß für ebene Wurzelbäume schwach gegen die lokale Zeit der Brownschen Exkursion konvergiert. Ferner wird gezeigt, daß für einfach erzeugte Baumfamilien die schwache Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen gegeben ist.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Stochastische Prozesse und schwache Konvergenz

1.1.1 Stochastische Prozesse

Unter einem stochastischen Prozeß versteht man eine Familie von Zufallsvariablen $(X_t;\ t \in T)$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Stochastische Prozesse dienen der mathematischen Erfassung von zufälligen Ereignissen, welche eine zeitliche Entwicklung durchmachen, z.B. das Eintreffen von Personen in einer Warteschlange oder die Bewegung eines Moleküls in einer Flüssigkeit.

Es gibt im wesentlichen zwei Typen von stochastischen Prozessen: diskrete und kontinuierliche. Im letzteren Fall ist T ein reelles Intervall und man kann den Prozeß als Funktion $X(t)$ auffassen, die auch häufig als Pfad des Prozesses bezeichnet wird. Ein Beispiel für einen kontinuierlichen Prozeß ist die Brownsche Bewegung (manchmal auch Wienerprozeß genannt) $W_t,\ t \geq 0$. Sie ist durch die folgenden Eigenschaften definiert:

- Der Startpunkt liegt bei 0, d.h.

  $$P[W_0 = 0] = 1.$$

- Der Prozeß ist ein Markovprozeß, d.h. für

  $$0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$$

  sind die Größen

  $$W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

  unabhängig.

- Für $0 \leq s < t$ ist $W_t - W_s$ normalverteilt mit Mittel 0 und Varianz $t - s$.

Bemerkung: Es läßt sich zeigen, daß die Pfade der Brownschen Bewegung fast sicher stetig sind.

Im Fall der Brownschen Bewegung sind die Verteilungen zu jedem Zeitpunkt t bereits durch die Definition gegeben. Ferner ist die Abhängigkeit zwischen $X(s)$ und $X(t)$ sehr einfach zu beschreiben. Im allgemeinen gilt natürlich keine der beiden Eigenschaften. Deshalb werden stochastische Prozesse gewöhnlich durch ihre endlichdimensionalen Verteilungen beschrieben, d.s. die Verteilungen von $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$. Dadurch verliert man zwar Information und in der Folge die Eindeutigkeit des Prozesses, aber das kann durch Fordern von speziellen Eigenschaften des Prozesses wieder erreicht werden: In $C[0,1]$ beispielsweise bestimmen die endlichdimensionalen Verteilungen den Prozeß eindeutig.

1.1.2 Schwache Konvergenz und der Satz von Prohorov

Die Beschreibung von stochastischen Prozessen mit Hilfe ihrer endlichdimensionalen Verteilungen legt nahe, daß man die Konvergenz einer Folge von Prozessen gegen einen Grenzprozeß beweisen kann, indem man die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen zeigt. In dieser Arbeit sind insbesonders Prozesse mit Pfaden aus $C[0,a]$ oder $C[0,\infty)$ von Interesse. Betrachten wir daher den Raum $C[0,1]$ (man kann o.B.d.A. $a = 1$ annehmen, da alle Resultate direkt auf $C[0,a]$, a beliebig, übertragbar sind). Eine eine Abbildung X von einem Wahrscheinlichkeitsraum in $C[0,1]$, ausgestattet mit der Metrik

$$\rho(X,Y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |X(t) - Y(t)|, \tag{1.1}$$

heiße Zufallsfunktion.

Definition 1.1 *Seien P_n, $n \in \mathbf{N}$, und P Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem metrischen Raum S. P_n konvergiert schwach gegen P (in Zeichen: $P_n \xrightarrow{w} P$), wenn für alle beschränkten, stetigen Funktionen $f \in C(S)$ gilt:*

$$\int_S f\,dP_n \to \int_S f\,dP$$

Eine Folge von Zufallsfunktionen (-variablen) X_n konvergiert der Verteilung nach gegen eine Grenzfunktion (Zufallsvariable) X ($X_n \xrightarrow{d} X$), wenn die Verteilungen von X_n schwach gegen die Verteilungen von X konvergieren.

Bemerkung: In der obigen Definition kann der Begriff der Zufallsfunktion ebenfalls auf allgemeine metrische Räume ausgedehnt werden. Diese Arbeit benötigt jedoch die allgemeine Theorie nicht. Diese wird in [4] ausführlich behandelt.

Im Zusammenhang mit stochastischen Prozessen verwendet man auch häufig den Begriff der schwachen Konvergenz für Zufallsfunktionen. Wir werden uns der Einfachheit halber ebenfalls dieser Sprechweise bedienen.

Betrachten wir nun das folgende Beispiel: Seien die Wahrscheinlichkeitsmaße P_n auf $C[0,1]$ Einheitsmassen bei der Funktion

$$x_n(t) = \begin{cases} nt & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nt & \text{falls } \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{falls } \frac{2}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Seien nun X_n gemäß P_n verteilte Zufallsfunktionen. Man kann sich leicht überlegen, daß die endlichdimensionalen Verteilungen dieser Folge schwach gegen jene des Maßes P, das aus einer Einheitsmasse an der Nullfunktion besteht, konvergiert. Sei f eine auf $C[0,1]$ stetige

Funktion, die auf der Kreisscheibe $K(0, \frac{1}{2} - \varepsilon)$ mit der Nullfunktion als Mittelpunkt und Radius $\frac{1}{2} - \varepsilon$ identisch 1 ist und außerhalb von $K(0, \frac{1}{2})$ verschwindet. Dann gilt:

$$\int_{C[0,1]} f\, dP_n = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_{C[0,1]} f\, dP = 1$$

Daraus folgt, daß X_n nicht gegen $X \equiv 0$ konvergiert. Daher garantiert Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen nicht die Konvergenz des Prozesses.

Es ist leicht zu zeigen, daß eine Folge von Maßen P_n genau dann schwach gegen P konvergiert, wenn jede Teilfolge eine gegen P konvergente Teilfolge besitzt (der Beweis verläuft analog zu dem des entsprechenden Satzes für Folgen). Das führt zu folgender Definition:

Definition 1.2 *Eine Familie F von Maßen heißt relativ kompakt, wenn jede Folge von Elementen aus F eine konvergente Teilfolge besitzt.*

Damit haben wir den folgenden

Satz 1.1 *Seien P und P_n, $n \in \mathbf{N}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $C[0,1]$ und P_n sei darüberhinaus relativ kompakt. Ferner sei*

$$\begin{aligned} \pi_{t_1,\cdots,t_k}: \quad & C[0,1] \to R_k \\ & x(t) \mapsto (x(t_1), \ldots, x(t_k)) \end{aligned} \tag{1.2}$$

und die endlichdimensionalen Verteilungen $P_n \pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_k}$ konvergieren schwach gegen jene von P. Dann konvergiert P_n schwach gegen P.

Beweis: Jede Teilfolge $P_{n'}$ von P_n enthält eine Teilfolge $P_{n''}$, die schwach gegen eine Verteilung Q konvergiert. Wegen der Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen muß $P = Q$ gelten. Daher besitzt jede Teilfolge von P_n eine gegen P konvergente Teilfolge und das impliziert die schwache Konvergenz von P_n gegen P. ■

Offensichtlich ist relative Kompaktheit eine nicht gerade leicht zu handhabende Eigenschaft und daher für konkrete Konvergenzbeweise eher ungeeignet. Eine wesentlich einfacher zu zeigende Bedingung liefert der Satz von Prohorov. Zunächst jedoch eine

Definition 1.3 *Eine Familie F von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem metrischen Raum heißt straff, wenn für jedes positive ε eine kompakte Menge K existiert, sodaß für alle $P \in F$ $P(K) > 1 - \varepsilon$ gilt.*

Satz 1.2 (Satz von Prohorov) *In einem separablen und vollständigen metrischen Raum ist eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen genau dann relativ kompakt, wenn sie straff ist.*

Bemerkung: In allgemeinen metrischen Räumen folgt aus der relativen Kompaktheit nicht die Straffheit.

1.1.3 Schwache Konvergenz in C

Da $C[0,1]$ mit der Metrik (1.1) einen separablen und vollständigen metrischen Raum bildet, folgt aus dem Satz von Prohorov:

Satz 1.3 *P_n, $n \in \mathbf{N}$, und P seien Wahrscheinlichkeitsmaße auf $C[0,1]$. Dann konvergiert P_n schwach gegen P, falls die endlichdimensionalen Verteilungen von P_n schwach gegen jene von P konvergieren und die Folge $\{P_n\}$ straff ist.*

Um diesen Satz anwenden zu können benötigt man eine Charakterisierung der Straffheit in $C[0,1]$:

Definition 1.4 *Sei x eine Funktion aus $C[0,1]$. Dann ist der Stetigkeitsmodul von x gegeben durch*

$$w_x(\delta) = \sup_{|s-t|<\delta} |x(s) - x(t)|, \quad \text{für } 0 < \delta \leq 1.$$

Satz 1.4 *Eine Folge $\{P_n\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist genau dann straff, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- *Für jedes positive η existiert eine Konstante K, sodaß für alle $n \in \mathbf{N}$*

$$P_n[\{x : |x(0)| > K\}] \leq \eta \tag{1.3}$$

  erfüllt ist.

- *Für jedes positive ε und η existieren ein $\delta \in (0,1)$, und eine natürliche Zahl n_0, sodaß*

$$P_n[\{x : w_x(\delta) \geq \varepsilon\}] \leq \eta, \quad \text{für } n \geq n_0. \tag{1.4}$$

Eine hinreichende Bedingung für Straffheit liefert der folgende

Satz 1.5 *Die Folge $\{P_n\}$ ist straff, falls die erste Bedingung des vorigen Satzes erfüllt ist und ferner für jedes positive ε und η ein $\delta \in (0,1)$ und eine natürliche Zahl n_0 existieren, sodaß*

$$\frac{1}{\delta} P_n[\{x : \sup_{t \leq s \leq t+\delta} |x(s) - x(t)| \geq \varepsilon\}] \leq \eta, \quad \text{für } n \geq n_0 \text{ und für alle } t. \tag{1.5}$$

Mit Hilfe dieser beiden Sätze läßt sich eine hinreichende Bedingung für die Straffheit einer Folge von Zufallsfunktionen herleiten:

Satz 1.6 *Eine Folge $\{X_n\}$ von Zufallsfunktionen aus $C[0,1]$ ist straff, falls sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:*

- *Die Folge $\{X_n(0)\}$ ist straff.*
- *Es existieren Konstanten C, $\gamma \geq 0$ und $\alpha > 1$, sodaß*

$$P[|X_n(s) - X_n(t)| \geq \lambda] \leq C \frac{1}{\lambda^\gamma} |s-t|^\alpha, \tag{1.6}$$

  für alle $s, t \in [0,1]$, $n \in \mathbf{N}$, und alle positiven λ.

Bemerkung: Manchmal ist es einfacher, anstelle von (1.6) mit der etwas stärkeren Bedingung

$$\mathbf{E}|X_n(s) - X_n(t)|^\gamma \leq C|s-t|^\alpha, \tag{1.7}$$

zu arbeiten.

Insbesonders interessieren uns Prozesse der folgenden Bauart: Sei $S_n(k), n \in \mathbf{N}$, ein auf der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ definierter, diskreter stochastischer Prozeß, und der Prozeß $X_n(t), 0 \leq t \leq 1$ sei gegeben durch

$$X_n(t) = \frac{1-(t-j)}{\sqrt{n}} S(j) + \frac{t-j}{\sqrt{n}} S(j+1), \quad \text{für } \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n}. \tag{1.8}$$

Dann läßt sich das Straffheitskriterium von Satz 1.6 ein wenig vereinfachen:

Satz 1.7 *Seien $X_n, n \in \mathbf{N}$, Zufallsfunktionen, die (1.8) erfüllen. Dann ist $\{X_n\}$ straff, wenn $\{X_n(0)\}$ straff ist und Konstanten $C > 0$, $\gamma \geq \alpha > 1$ existieren, sodaß*

$$P\left[\left|X_n\left(\frac{i}{n}\right) - X_n\left(\frac{j}{n}\right)\right| \geq \lambda\right] \leq C\frac{1}{\lambda^\gamma}\left|\frac{i-j}{n}\right|^\alpha, \tag{1.9}$$

für alle $n \in \mathbf{N}$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, und alle positiven λ.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß die Ungleichung (1.6) des vorigen Satzes für alle $s, t \in [0,1]$ erfüllt ist. Dazu sei zunächst $s, t \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$. Da X_n auf diesem Intervall linear ist, gilt

$$|X_n(s) - X_n(t)| = \frac{|s-t|}{\frac{1}{n}}\left|X_n\left(\frac{i}{n}\right) - X_n\left(\frac{i+1}{n}\right)\right|$$

Daraus folgt wegen (1.9) und $\gamma \geq \alpha$

$$\begin{aligned} P[|X_n(s) - X_n(t)| \geq \lambda] &= P\left[\left|X_n\left(\frac{i}{n}\right) - X_n\left(\frac{i+1}{n}\right)\right| \geq \frac{\lambda}{n|s-t|}\right] \\ &\leq C\frac{n^{\gamma-\alpha}|s-t|^{\gamma-\alpha}}{\lambda^\gamma}|s-t|^\alpha \\ &\leq \frac{C}{\lambda^\gamma}|s-t|^\alpha \end{aligned}$$

und somit ist (1.6) erfüllt.

Sei nun $\frac{i}{n} \leq s < \frac{i+1}{n}$ und $\frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n}$ mit $i \neq j$. Dann gilt

$$|X_n(s) - X_n(t)| \leq \left|X_n(s) - X_n\left(\frac{i}{n}\right)\right| + \left|X_n\left(\frac{i}{n}\right) - X_n\left(\frac{j}{n}\right)\right| + \left|X_n\left(\frac{j}{n}\right) - X_n(t)\right|$$

und infolge dessen

$$\begin{aligned} P[|X_n(s) - X_n(t)| \geq \lambda] \leq P\Bigg[&\left|X_n(s) - X_n\left(\frac{i}{n}\right)\right| + \left|X_n\left(\frac{i}{n}\right) - X_n\left(\frac{j}{n}\right)\right| \\ &+ \left|X_n\left(\frac{j}{n}\right) - X_n(t)\right| \geq \lambda\Bigg]. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Es ist leicht zu sehen, daß für beliebige, positive Zufallsvariable X, Y, Z die Beziehung

$$\{\omega : X(\omega) + Y(\omega) + Z(\omega) \geq \lambda\} \subseteq \left\{\omega : X(\omega) \geq \frac{\lambda}{3}\right\} \cup \left\{\omega : Y(\omega) \geq \frac{\lambda}{3}\right\} \cup \left\{\omega : Z(\omega) \geq \frac{\lambda}{3}\right\}$$

gültig ist. Ferner gilt für $a, b, c \geq 0$ und $\beta \geq 1$

$$a^\beta + b^\beta + c^\beta \leq (a + b + c)^\beta.$$

Schließlich kann man die rechte Seite von (1.10) durch

$$\begin{aligned}
&P\left[\left|X_n(s) - X_n\left(\frac{i}{n}\right)\right| \geq \frac{\lambda}{3}\right] + P\left[\left|X_n\left(\frac{i}{n}\right) - X_n\left(\frac{j}{n}\right)\right| \geq \frac{\lambda}{3}\right] \\
&\quad + P\left[\left|X_n\left(\frac{j}{n}\right) - X_n(t)\right| \geq \frac{\lambda}{3}\right] \\
&\quad \leq \tilde{C}\frac{\left|s - \frac{i}{n}\right|^\alpha}{\lambda^\gamma} + \tilde{C}\frac{\left|\frac{i-j}{n}\right|^\alpha}{\lambda^\gamma} + \tilde{C}\frac{\left|\frac{j}{n} - t\right|^\alpha}{\lambda^\gamma} \\
&\quad \leq \frac{\tilde{C}}{\lambda^\gamma}|s - t|^\alpha
\end{aligned}$$

nach oben abschätzen. ■

Bemerkung: Mit Hilfe der Ungleichung

$$(a + b + c)^\beta \leq 3^{\beta-1}(a^\beta + b^\beta + c^\beta), \quad \text{für } a, b, c \geq 0 \text{ und } \beta \geq 1$$

läßt sich aus

$$\mathbf{E}\left|X_n\left(\frac{i}{n}\right) - X_n\left(\frac{j}{n}\right)\right|^\gamma \leq C\left|\frac{i-j}{n}\right|^\alpha$$

die Momentbedingung (1.7) herleiten.

Die Sätze dieses Abschnitts gelten unverändert auch für den Raum $C[0, a]$. Für den Raum $C[0, \infty)$ haben wir den folgenden

Satz 1.8 *Eine Folge $\{P_n\}$ aus $C[0, \infty)$ ist genau dann straff, wenn (1.3) gilt und für jedes $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ und $a > 0$*

$$P_n[\{x : w_x^a(\delta) \geq \varepsilon\}] \leq \eta, \quad \text{für } n \geq n_0, \tag{1.11}$$

wobei w_x^a den Stetigkeitsmodul w_x eingeschränkt auf $s, t \in [0, a]$ bezeichnet.

Als Folgerungen daraus erhält man die zu 1.4–1.7 analogen Sätze.

1.2 Die Brownsche Exkursion und deren lokale Zeit

1.2.1 Die Brownsche Exkursion

Sei $W(t)$ die im ersten Abschnitt definierte Brownsche Bewegung. Für $t > 0$ definieren wir

$$\tau_1(t) = \sup\{s | s \leq t \text{ und } W(s) = 0\}$$
$$\tau_2(t) = \inf\{s | s \geq t \text{ und } W(s) = 0\}$$

Aufgrund der Stetigkeit der Pfade einer Brownschen Bewegung und wegen $P[W(t) = 0] = 0$ gilt fast sicher

$$\tau_1(t) < t < \tau_2(t). \tag{1.12}$$

Den Prozeß in dem durch (1.12) definierten Intervall nennt man die Brownsche Exkursion. Die skalierte Exkursion ist durch

$$W^+(s) = \frac{|W(\tau_1(t) + s(\tau_2(t) - \tau_1(t))|}{\sqrt{\tau_2(t) - \tau_1(t)}} \tag{1.13}$$

definiert.

Die Brownsche Bewegung als Grenzwert der symmetrischen Irrfahrt

Eine symmetrische Irrfahrt ist ein diskreter stochastischer Prozeß $(S(n); n \in \mathbf{N})$ der folgenden Form:

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i,$$

wobei die Verteilung der Zufallsvariablen ξ_i durch

$$P[\xi_i = 1] = P[\xi_i = -1] = \frac{1}{2} \tag{1.14}$$

bestimmt ist. Definiert man den Prozeß $X_n(t)$ durch

$$X_n\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} S(i), \quad i \in \mathbf{N}, \tag{1.15}$$

und die Werte zwischen den Stützstellen durch lineare Interpolation, so erhält man eine skalierte symmetrische Irrfahrt. Will man von einem Prozeß die schwache Konvergenz gegen einen Markovprozeß (wie z.B. die Brownsche Bewegung) zeigen, so genügt es, – neben der Straffheit und der Markoveigenschaft – dies für die eindimensionalen Verteilungen und die Übergangswahrscheinlichkeiten zu tun. Offensichtlich ist (1.15) ein Markovprozeß. Die eindimensionale Dichte von X_n an der Stelle t ist

$$\begin{aligned} f_n(x) &= P\left[\frac{1}{\sqrt{n}} S(\lfloor tn \rfloor) = x\sqrt{n}\right] \\ &= 2^{-\lfloor tn \rfloor} \binom{\lfloor tn \rfloor}{\frac{\lfloor tn \rfloor + x\sqrt{n}}{2}}, \end{aligned}$$

wie man durch ein simples Abzählargument unmittelbar sieht. Unter Benützung der Asymptotik

$$\binom{2n}{n+x} = 2^{2n} \frac{e^{-x^2/n}}{\sqrt{\pi n}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{für } n \to \infty \text{ und } x = \mathcal{O}\left(\sqrt{n}\right) \tag{1.16}$$

erhält man eine Näherung der Dichte der Brownschen Bewegung. Mit Hilfe eines völlig analogen Abzählarguments kann die Übergangsdichte der Brownschen Bewegung approximiert werden. Da bei festen $b > a > 0$ (1.16) gleichmäßig für $x \in [a, b]$ ist, kann daraus die schwache Konvergenz der eindimensionalen Verteilungen und der Übergangswahrscheinlichkeiten gegen jene der Brownschen Bewegung gefolgert werden (z.B. durch Anwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz). Es bleibt nur mehr die Straffheit zu zeigen: Für $0 \leq k_1 < k_2 \leq Tn$ und $k = k_2 - k_1$ gilt

$$\begin{aligned}
P\left[\left|X_n\left(\frac{k_2}{n}\right) - X_n\left(\frac{k_1}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\sqrt{n}\right] &= \frac{1}{2^k} \sum_{|l| \geq \varepsilon\sqrt{n}} \binom{k}{\frac{k+l}{2}} \\
&\leq C \sum_{|l| \geq \varepsilon\sqrt{n}} e^{-\frac{l^2}{2k}} \\
&\leq C' e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{n}{k}} \\
&\leq \frac{C''}{\varepsilon^\gamma}\left(\frac{k}{n}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Die Straffheit folgt nun aus Satz 1.7. Damit ist gezeigt, daß die skalierte symmetrische Irrfahrt schwach gegen die Brownsche Bewegung konvergiert.

Bemerkung: Man kann auch unter schwächeren Voraussetzungen als (1.14) die Konvergenz gegen die Brownsche Bewegung zeigen: Es gilt nämlich

Satz 1.9 (Satz von Donsker) *Seien ξ_i unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable mit Mittel 0 und endlicher Varianz σ^2. Dann gilt für die durch (1.15) definierten Zufallsfunktionen:*

$$X_n \xrightarrow{w} \sigma W$$

Die Konvergenz der symmetrischen Irrfahrt gegen die Brownsche Bewegung kann für eine heuristische Bestimmung der endlichdimensionalen Verteilungen der Brownschen Exkursion verwendet werden: Gegeben sei eine symmetrische Irrfahrt $S(k)$ und ein Wert $t > 0$. Sei

$$\begin{aligned}
\nu_1(t) &= \sup\{s | s \leq t \text{ und } S(s) = 0\} \\
\nu_2(t) &= \inf\{s | s \geq t \text{ und } S(s) = 0\}
\end{aligned}$$

Bezeichne weiters $N[(a_1, b_1) \to (a_2, b_2)]$ die Anzahl der Pfade vom Punkt (a_1, b_1) zum Punkt (a_2, b_2) und $N^+[(a_1, b_1) \to (a_2, b_2)]$ die Anzahl jener Pfade, die die x-Achse höchstens am Rand berühren. Mit Hilfe des Spiegelungsprinzips (siehe [13]) kann gezeigt werden, daß für $0 < s < t < s + l$, $0 < k_1 < \ldots < k_m < 2ln$ und $v_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$, gilt

$$\begin{aligned}
&P[\nu_1(2tn) = 2sn, S(2sn + k_1) = v_1, \ldots, S(2sn + k_m) = v_m, \nu_2(2tn) = 2(s + l)n] \\
&\quad = \frac{2}{2^{2(s+l)n}} N[(0,0) \to (2ns, 0)] N^+[(2ns, 0) \to (k_1, v_1)] \\
&\qquad \times \prod_{i=2}^{m} N^+[(k_{i-1}, v_{i-1}) \to (k_i, v_i)] N^+[(k_m, v_m) \to (2n(s+l), 0)] \\
&\quad = \frac{2}{2^{2(s+l)n}} \binom{2sn}{sn} \binom{k_1}{\frac{k_1+v_1}{2}} \frac{v_1}{k_1} \prod_{i=2}^{m} \left[\binom{k_i - k_{i-1}}{\frac{k_i - k_{i-1} + v_i - v_{i-1}}{2}} - \binom{k_i - k_{i-1}}{\frac{k_i - k_{i-1} + v_i + v_{i-1}}{2}}\right] \\
&\qquad \times \binom{2nl - k_m}{\frac{2ln - k_m - v_m}{2}} \frac{v_m}{2ln - k_m}
\end{aligned}$$

Sei nun

$$k_i = 2nt_i \quad \text{und} \quad v_i = \sqrt{n} w_i$$

dann erhält man nach Anwendung von (1.16) den folgenden

Satz 1.10 *$\overline{W}(\bar{t}) = W(\tau_1(t)+\bar{t})$, $0 \leq \bar{t} \leq L(t)$, bezeichne die Brownsche Exkursion der Länge $L(t)$. Sei $m \geq 1$, $0 < \bar{t}_1 < \ldots < \bar{t}_m < l$, und $w_1, \ldots, w_m > 0$ beliebig. Dann ist für $s < t < s+l$ die Dichte $f_{t_1,\ldots,t_m}(s, w_1, \ldots, w_m, l)$ von $(\tau_1(t), \overline{W}(\bar{t}_1), \ldots, \overline{W}(\bar{t}_m), L(t))$ gegeben durch*

$$2 \cdot (2\pi)^{-(m+2)/2} \left[s\bar{t}_1^3 (l - \bar{t}_m)^3 \prod_{i=2}^{m} (\bar{t}_i - \bar{t}_{i-1}) \right]^{-1/2} w_1 w_m \exp\left(-\frac{w_1^2}{2\bar{t}_1} - \frac{w_m^2}{2(l - \bar{t}_m)} \right)$$
$$\times \prod_{i=2}^{m} \left(\exp\left(-\frac{(w_i - w_{i-1})^2}{2(\bar{t}_i - \bar{t}_{i-1})} \right) - \exp\left(-\frac{(w_i + w_{i-1})^2}{2(\bar{t}_i - \bar{t}_{i-1})} \right) \right) \tag{1.17}$$

Folgerung *Für $0 < s < t$, $0 < \bar{t}_1 < \ldots < \bar{t}_m < l$, und $w_1, \ldots, w_m > 0$ beliebig gilt*

$$\begin{aligned} &\frac{d^m}{dw_1 \cdots dw_m} P[W(t_1) \leq w_1, \ldots, W(t_m) \leq w_m | \tau_1(t) = s, L(t) = l] \\ &= 2\pi \sqrt{sl^3} f_{t_1,\ldots,t_m}(s, w_1, \ldots, w_m, l) \end{aligned}$$

Bemerkung: Eine mathematisch rigorose Herleitung dieses Satzes findet sich in Chung [6]. Der Beweis stützt sich auf die Theorie der Markovketten und elementare Eigenschaften der Brownschen Bewegung.

Mit Hilfe dieser Darstellung kann man zeigen, daß die Brownsche Exkursion ebenfalls ein Markovprozeß ist:

Lemma 1.1 ([16]) *Sei auf der Menge*

$$M = \{w_i \geq 0, i = 1, \ldots, m; |w_{i+1} - w_i| \leq \omega_i \leq w_{i+1} + w_i\}$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte der Form

$$g(w_1, \omega_1, \ldots, w_{m-1}, \omega_{m-1}, w_m) = C f_1(w_1) f_2(\omega_1) \cdots f_m(\omega_{m-1}) f_{m+1}(w_m) \tag{1.18}$$

gegeben. Dann hat die bedingte Randverteilung von w_m, gegeben $w_1, \ldots, w_{m-1}$, eine Dichte $\tilde{g}(w_m)$, die unabhängig von $w_1, \ldots, w_{m-2}$ ist.

Beweis: Die durch $w_1, \ldots, w_{m-1}$ gegebene bedingte Randdichte von $\omega_1, \ldots, \omega_{m-1}, w_m$ ist

$$\begin{aligned} \bar{g}(\omega_1, \ldots, \omega_{m-1}, w_m) = \Bigg(&\int_{\pi_{\omega_1} M} f_2(\omega_1) d\omega_1 \cdots \int_{\pi_{\omega_{m-1}} M} f_m(\omega_{m-1})\, d\omega_{m-1} \\ &\times \int_0^\infty \int_{|w_i + 1 - w_i|}^{w_{i+1} + w_i} f_m(\omega_{m-1}) f_{m+1}(w_m)\, d\omega_{m-1}\, dw_m \Bigg)^{-1} \\ &\times f_1(\omega_1) \cdots f_m(\omega_{m-1}) f_{m+1}(w_m) \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} \tilde{g}(w_m) &= \int \cdots \int \bar{g}(\omega_1, \ldots, \omega_{m-1}, w_m)\, d\omega_1 \cdots d\omega_{m-1} \\ &= \left(\int_0^\infty f_{m+1}(w_m) \int_{|w_i+1-w_i|}^{w_{i+1}+w_i} f_{m-1}(\omega_{m-1})\, d\omega_{m-1}\, dw_m \right)^{-1} \\ &\quad \times f_{m+1}(w_m) \int_{|w_i+1-w_i|}^{w_{i+1}+w_i} f_m(\omega_{m-1})\, d\omega_{m-1} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Die Faktoren des Produktes in (1.17) können in der Form

$$
\begin{aligned}
F_{i+1}(\omega_i) &= \left[\exp\left(-\frac{\omega_i^2}{2(\bar{t}_{i+1}-\bar{t}_i)}\right)\right]_{|w_{i+1}+w_i|}^{w_{i+1}+w_i} \\
&= \int\limits_{|w_{i+1}-w_i|}^{w_{i+1}+w_i} \frac{\omega_i}{\bar{t}_{i+1}-\bar{t}_i}\exp\left(-\frac{\omega_i^2}{2(\bar{t}_{i+1}-\bar{t}_i)}\right) d\omega_i
\end{aligned}
$$

geschrieben. Daraus folgt, daß (1.17) die Randverteilung einer Dichte der Form (1.18) mit

$$
\begin{aligned}
f_1(w_1) &= \frac{w_1}{\bar{t}_1^{3/2}}\exp\left(-\frac{w_1^2}{2\bar{t}_1}\right) \\
f_{i+1}(\omega_i) &= \frac{1}{\sqrt{\bar{t}_{i+1}-\bar{t}_i}}\frac{d}{d\omega_i}F_{i+1}(\omega_i) \\
f_m(w_m) &= \frac{w_m}{(l-\bar{t}_m)^{3/2}}\exp\left(-\frac{w_m^2}{2(l-\bar{t}_m)}\right)
\end{aligned}
$$

ist, was nach Lemma 1.1 die Markoveigenschaft impliziert.

Um die schwache Konvergenz gegen die Brownschen Exkursion zu beweisen, muß man also die schwache Konvergenz der eindimensionalen Verteilungen und der Übergangswahrscheinlichkeiten zeigen.[1] Die Dichten dieser beiden Wahrscheinlichkeiten (unter der Voraussetzung $l = 1$) können aus (1.17) durch einfache Rechnung gewonnen werden: Die eindimensionale Dichte an der Stelle $0 < t < 1$ ist die Dichte der Maxwellverteilung

$$
f_t(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^2 e^{-x^2/2t(1-t)}}{\sqrt{t^3(1-t)^3}}. \tag{1.19}
$$

Die Übergangsdichte für $0 < s < t < 1$ lautet

$$
f_{s,t}(y|x) = \frac{e^{-(y-x)^2/2(t-s)} - e^{-(y+x)^2/2(t-s)}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\left(\frac{1-s}{1-t}\right)^{3/2}\frac{ye^{-y^2/2(1-t)}}{xe^{-x^2/2(1-s)}}. \tag{1.20}
$$

1.2.2 Die lokale Zeit

Eine häufig betrachtete Größe im Zusammenhang mit stochastischen Prozessen ist die Belegungszeit

$$
B(A) = \int\limits_0^1 I_A(W(t))\,dt,
$$

d.h. die Zeit, die der Pfad des Prozesses auf der Menge A verbringt (I bezeichne die Indikatorfunktion). Um die Zeit, die der Prozeß in der Nähe eines Punktes verbringt, zu messen, reicht diese Definition nicht aus, da $I_s(W(t))$ eine Nullmenge ist und daher keine vernünftige

[1] Diese Aussage ist nur unter der Voraussetzung, daß die Folge von Prozessen, von der die Konvergenz gegen die Brownsche Exkursion gezeigt werden soll, aus Markovprozessen besteht, richtig. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so muß man trotz der Markoveigenschaft der Brownschen Exkursion die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen zeigen. Mit dieser Situation sind wir im nächsten Kapitel konfrontiert.

Aussage über die Verweildauer des Prozesses in der Nähe von s liefert. Deshalb führt man die lokale Zeit

$$l(s) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 I_{[s,s+\varepsilon]}(W(t))\, dt$$

ein. Es kann gezeigt werden, daß für die Brownsche Exkursion die lokale Zeit existiert, nicht identisch 0 und fast sicher stetig ist.

Die Dichte der lokalen Zeit

Knight [22] benutzte die folgenden Tatsachen, um die Dichte der lokalen Zeit einer Brownschen Exkursion zu berechnen: Die Brownsche Bewegung $W(t)$ mit den Nebenbedingungen $W(t) \geq 0$, $0 \leq t \leq 1$, und $W(0) = W(1) = \varepsilon$ für $\varepsilon \to 0$ konvergiert schwach gegen die Brownsche Exkursion (ein Beweis dazu findet sich in [8]). Ferner ist für $a_1, a_2 > 0$ und $0 < t_1 < t_2 < 1$ der Prozeß $W^+(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, unter der Bedingung $W^+(t_i) = a_i$ äquivalent zu $W(t)$ bedingt durch $W(t_i) = a_i$ und $W(t) > 0$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Daraus leitete er die folgende Darstellung der Dichte her:

$$f_\rho(x) = 2^{-1/2}\pi^{5/2}\rho^{-3} \int_0^1 f^* \left(\frac{\pi^2(1-t)}{2\rho^2} \right) h(t,x)\, dt \tag{1.21}$$

mit

$$f^*(z) = 4\sqrt{2}\pi^3 \sum_{k \geq 1} k^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{-k^2\pi^2/z}}{\sqrt{2\pi z^3}} \right) \quad \text{und}$$
$$h(t,x) = -\frac{1}{2\rho\sqrt{2\pi t}} \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} \left(x^i \frac{d^2}{dx^2} e^{-2\rho^2(x+i)^2/t} \right),$$

wobei unter $\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}$ der zu $\frac{d}{dx}$ inverse Operator zu verstehen ist. Hooghiemstra [18] zeigt mit Hilfe der Laplacetransformation, daß man aus (1.21) eine Integraldarstellung erhalten kann, die nach einer einfachen Variablensubstitution die folgende Gestalt hat:

$$f_\rho(x) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_\gamma \frac{-te^{-t}}{\sinh^2(\rho\sqrt{-2t})} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{-t}e^{\rho\sqrt{-2t}}}{\sinh(\rho\sqrt{-2t})} \right) dt, \tag{1.22}$$

wobei γ die Hankelkurve[2] $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ mit

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{t \,|\, |t| = 1 \text{ und } \Re t \leq 0\} \\ \gamma_2 &= \{t \,|\, \Im t = 1 \text{ und } \Re t \geq 0\} \\ \gamma_3 &= \overline{\gamma}_2 \end{aligned} \tag{1.23}$$

[2] Bekanntlich gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (-t)^{-\alpha} e^{-t}\, dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.$$

Dies ist die sogenannte Hankelsche Darstellung der Gammafunktion. Da die Integrationskurve γ in vielen Problemen der Kombinatorik auftreten, haben sich Sprechweisen wie „Hankelkurve“, „Hankelintegral“, usw. durchgesetzt und werden deshalb auch in dieser Arbeit verwendet.

ist. Diese Darstellung findet man auch in [7], wo mit Hilfe der Analyse von $M/M/1$-Warteschlangen die Laplacetransformationen der ein- und zweidimensionalen Dichten der lokalen und der Belegungszeit berechnet werden.

Mit Methoden aus der Theorie der Verzweigungsprozesse erhält man zwei weitere Darstellungen dieser Dichte: Die Ansätze von Kennedy [21] und Kolchin [23] ergeben

$$f_\rho(x) = \frac{x}{4} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2\rho^2}{8(1-t)}} g_{2\rho}\left(\frac{x}{2}, t\right) dt, \tag{1.24}$$

wobei die durch die Dichte $g_r(z,t)$ bestimmte Verteilung durch ihre charakteristische Funktion

$$\left[\frac{\sinh(r\sqrt{-2i\theta_2})}{r\sqrt{-2i\theta_2}} - i\theta_1 \left(\frac{\sinh(r\sqrt{-i\theta_2/2})}{r\sqrt{-i\theta_2/2}}\right)^2\right]^{-1}$$

gegeben ist, und Takács [25] berechnete mit Hilfe von erzeugenden Funktionen

$$f_\rho(x) = 2\sum_{j\geq 1}\sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} e^{-(x+2\rho j)^2/2} \frac{(-x)^k}{(k-1)!} H_{k+2}(x+2\rho j). \tag{1.25}$$

$H_k(z)$ sind die Hermitepolynome, definiert durch

$$H_k(z) = (-1)^k e^{z^2} \frac{d^k}{dz^k} e^{-z^2}.$$

1.3 Verzweigungsprozesse und Zufallsbäume

1.3.1 Galton-Watson-Prozesse

Betrachten wir eine Menge von Partikeln, von denen jedes nach einer festen Zeitspanne Nachkommen des gleichen Typs erzeugt. Sei die Anzahl der Partikel in der i-ten Generation mit Z_i bezeichnet. Dann gehen wir von den folgenden Voraussetzungen aus:

- Der Wert von Z_{n+1} hängt nur von Z_n ab, d.h. $(Z_i; i \geq 0)$ ist eine Markovkette.
- Die Partikel sind unabhängig voneinander, d.h. die Anzahl der Nachkommen eines Partikels hängt weder von den vorangegangenen Generationen noch von den Partikeln derselben Generation ab.

Einen stochastischen Prozeß $(Z_n; n \geq 0)$ der die obigen Eigenschaften besitzt, nennt man Galton-Watson-Verzweigungsprozeß. Sei $Z_0 = 1$ und $p_k = P[Z_1 = k]$. Dann ist die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von Z_1 gegeben durch

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} p_k z^k$$

und aufgrund der obigen Eigenschaften läßt sich daraus die erzeugende Funktion $f_n(z)$ von Z_n bestimmen:

$$\begin{aligned} f_0(z) &= z, \\ f_{n+1}(z) &= f(f_n(z)). \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar, daß $\mathbf{E}Z_n = f_n'(1) = f'(1)^n$ und damit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Z_n &\to 0 \quad \text{falls } f'(1) < 1 \\ \mathbf{E}Z_n &\to \infty \text{ falls } f'(1) > 1 \\ \mathbf{E}Z_n &= 1 \quad \text{falls } f'(1) = 1 \end{aligned}$$

Deshalb unterscheidet man in Abhängigkeit des Wertes von $f'(1)$ drei Klassen von Verzweigungsprozessen: subkritische ($f'(1) < 1$), superkritische ($f'(1) > 1$) und kritische ($f'(1) = 1$).

Unter der Aussterbewahrscheinlichkeit eines Verzweigungsprozesses versteht man

$$P[Z_n \to 0] = P[Z_n = 0, \text{ für } n \geq n_0].$$

Es ist leicht zu sehen, daß

$$P[Z_n \to 0] = \lim_{n\to\infty} f_n(0),$$

Daraus und aus der strikten Konvexität von $f(z)$ folgt:

Satz 1.11 *Die Aussterbewahrscheinlichkeit ist gleich der kleinsten positiven Lösung der Gleichung*

$$z = f(z).$$

Das impliziert, daß kritische und subkritische Prozesse mit Wahrscheinlichkeit 1 aussterben, während superkritische mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht aussterben.

1.3.2 Der Zusammenhang mit Zufallsbäumen

In diesem Abschnitt soll eine Verbindung zwischen Galton-Watson-Prozessen (mit einem Erzeuger) und speziellen Zufallsbäumen hergestellt werden. Offensichtlich bildet jeder Galton-Watson-Prozeß Z_n einen Baum, indem man einfach jeden Knoten mit seinem Erzeuger verbindet. Dieser Baum werde mit T bezeichnet. Wenn man Bäume einer festen Größe studieren möchte, so kann man einen Galton-Watson-Prozeß unter der Bedingung

$$\sum_{k\geq 0} Z_k = n$$

betrachten. Der Baum, der nach der obigen Vorgangsweise aus diesem Prozeß entsteht, heiße T_n. Ferner kann vorausgesetzt werden, daß der T zugeordnete Verzweigungsprozeß kritisch ist. Da die Transformation

$$P[Z_1 = i] = c\theta^i P[\hat{Z}_1 = i]$$

den bedingten Prozeß unverändert läßt, kann man, falls ein geeignetes θ existiert, Z_i in einen kritischen Prozeß überführen (bei subkritischen Prozessen beispielsweise ist das immer möglich). Die Wahrscheinlichkeit, daß $\sum_{k\geq 0} Z_k = n$, sinkt bei sub- und superkritischen Prozessen exponentiell, bei kritischen hingegen nur polynomiell. Deshalb erscheint für Zufallsbäume diese Wahl als die natürlichste.

Für jeden Knoten v in einem gegebenen Baum t sei $d(v)$ die Anzahl der Nachfolger des Knotens v (der um 1 verminderte Knotengrad von v) und $n_k(t)$ die Anzahl der Knoten in t, die genau k Nachfolger haben. Dann gilt

$$P[T = t] = \prod_{v\in t} p_{d(v)} = \prod_{k\geq 0} p_k^{n_k(t)}. \tag{1.26}$$

Die Verteilung von T_n ist durch die Tatsache, daß auf der Menge $F_n = \{t : |t| = n\}$ $P[T_n = t]$ proportional zu $P[T = t]$ ist, bestimmt.

Dieselbe Gewichtung der Bäume aus F_n erhält man auch ohne Galton-Watson-Prozesse, nämlich mittels einfach erzeugter Baumfamilien nach Meir und Moon [24]: Sei a_n die Summe der Gewichte aller Bäume der Größe n. Unter der erzeugenden Funktion der Baumfamilie versteht man die Potenzreihe

$$a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

Eine Baumfamilie heißt einfach erzeugt, falls sie rekursiv beschrieben werden kann. Das ist äquivalent dazu, daß die erzeugende Funktion eine Funktionalgleichung der Form

$$a(z) = z\varphi(a(z)), \tag{1.27}$$

wobei

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 0} \varphi_n x^n \tag{1.28}$$

mit $\varphi_n \geq 0$ und $\varphi_0 > 0$, erfüllt (Näheres dazu siehe Abschnitt 2.1). Daraus folgt, daß jeder Baum t mit

$$\prod_{k \geq 0} \varphi_k^{n_k(t)} \tag{1.29}$$

gewichtet wird. Sei $\tau > 0$ so gewählt, daß $\varphi(\tau) < \infty$, dann kann man einen Verzweigungsprozeß durch die Verteilung

$$P[Z_1 = k] = p_k = \frac{\varphi_k \tau^k}{\varphi(\tau)}$$

definieren. Jeder Prozeß dieser Art liefert dieselbe Verteilung für T_n (vgl. [21]). Ferner stimmen (1.26) und (1.29) bis auf den Faktor

$$\frac{\tau^{|t|-1}}{\varphi^{|t|}(\tau)}$$

überein, woraus folgt, daß bedingte Galton-Watson-Prozesse und einfach erzeugte, gleichverteilte Zufallsbäume äquivalent sind.

Die Voraussetzung, daß T ein kritischer Prozeß ist, übersetzt in die Sprache der Bäume, liefert die Bedingung

$$\tau\varphi'(\tau) = \varphi(\tau) \tag{1.30}$$

und für die bei der Analyse von Bäumen häufig auftretende Größe

$$\sigma^2 = \frac{\tau^2 \varphi''(\tau)}{\varphi(\tau)} \tag{1.31}$$

gewinnt man durch den Zusammenhang mit Verzweigungsprozessen die einfache Interpretation als Varianz von Z_1.

Beispiele

Bezeichne F eine Baumfamilie, in der die Bäume der Größe n gleichverteilt sind, und P die Verteilung des entsprechenden Verzweigungsprozesses. Dann gelten die folgenden Beziehungen:

Baumfamilie F	Verteilung P	Varianz σ^2
ebene Wurzelbäume	$p_k = 2^{-k-1}$	2
Binärbäume	$p_0 = p_2 = \frac{1}{2}$	1
t-äre Bäume	$p_0 = 1 - \frac{1}{t},\ p_t = \frac{1}{t}$	$t-1$
Unär-binäre Bäume	$p_0 = p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
nichtebene markierte Bäume (Cayleybäume)	$p_k = \frac{1}{ek!}$	1
Unär-binär, nichteben, markiert	$p_0 = \frac{1}{2+\sqrt{2}},\ p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}},\ p_2 = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$	$\frac{2}{2+\sqrt{2}}$

Kapitel 2

Konvergenz gegen Brownsche Exkursion und lokale Zeit

2.1 Problemstellung und Lösungsmethode

Gegeben sei ein Baum T mit n Knoten aus einer einfach erzeugten Baumfamilie. Sei T' der Baum, der entsteht, wenn man an einen vorgegebenen Knoten den Baum T anhängt. Definieren wir die beiden folgenden Funktionen: $l(k)$ sei die Anzahl der Knoten von T im Abstand k von der Wurzel. Die Funktion $x(i)$ sei der Abstand i-ten Knotens von der Wurzel in T', wenn die Knoten von T' auf folgende Weise durchlaufen werden: Startpunkt ist die Wurzel von T', d.h. $x(0) = 0$. Die Nachfolger eines Knotens v seien geordnet. Ist man bei v angelangt, so wählt man als nächsten Knoten den ersten (gemäß der gegebenen Ordnung) jener Nachfolger, die noch nicht passiert wurden. Falls das nicht möglich ist, so setzt man mit dem Vorgänger von v fort. Diese Prozedur nennt man auch Left-Order-Traversieren des Baumes T'.

Falls T ein zufällig gewählter Baum ist, sind die Funktionen $l(k)$ und $x(i)$ Zufallsvariable $L(k)$ und $X(i)$. Für nichtganzzahlige Argumente k und i setzen wir die beiden Funktionen durch lineare Interpolation fort. Definieren wir die entsprechenden skalierten Prozesse durch

$$l_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} L(t\sqrt{n}), \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} X(2nt), \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{2.2}$$

Es ist leicht zu sehen, daß für ebene Wurzelbäume $X(i)$ eine symmetrische Irrfahrt mit der Bedingung, daß die erste Nullstelle mit $i > 0$ bei $i = 2n$ liegt. Nach Abschnitt 1.2 folgt daraus, daß $X_n(t)$ schwach gegen die Brownsche Exkursion konvergiert. Der Satz von Donsker (1.9) legt die Vermutung nahe, daß $X_n(t)$ für alle einfach erzeugten Baumfamilien gegen die Brownsche Exkursion konvergiert. Diese Vermutung wurde von Aldous [2] mit Hilfe der von ihm entwickelten Kontinuumbäume (siehe [1, 3]) bewiesen:

$$X_n(t) \xrightarrow{w} \frac{2}{\sigma} W^+(t)$$

Eine Folgerung daraus ist

$$H_n(t) = \frac{1}{n} \int_0^{t\sqrt{n}} L(s)\, ds \xrightarrow{w} H\left(\frac{\sigma t}{2}\right), \tag{2.3}$$

mit

$$H(t) = \int_0^1 I_{[W^+(s) \le t]}\, dt.$$

Dieser Prozeß ist die Belegungszeit der Brownschen Exkursion auf der Menge $[0, t]$. Die Methoden aus [1, 3] erweisen sich aber als zu schwach, um den analogen Grenzwertsatz für den lokalen Prozeß zu zeigen, d.i.

$$l_n(t) \xrightarrow{w} \frac{\sigma}{2} l\left(\frac{\sigma t}{2}\right),$$

wobei $l(t)$ die lokale Zeit der Brownschen Exkursion bezeichnet.

Ein mit dem Traversierungsprozeß verwandter Prozeß ist der von Gutjahr und Pflug [16] untersuchte Konturprozeß. Sei $H_n(m)$ die Höhe des m-ten Blattes in einem Zufallsbaum T mit n Knoten, und für $x \notin \mathbf{N}_0$ sei $H_n(x)$ die durch lineare Interpolation gebildete Fortsetzung. Der skalierte Prozeß

$$\hat{X}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} H(tn), \quad 0 \le t \le 1, \tag{2.4}$$

heißt Konturprozeß des Baumes T. Der zu $l(t)$ analoge lokale Prozeß ist durch

$$\hat{l}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{L}(tn), \quad t \ge 0, \tag{2.5}$$

gegeben, wobei $\hat{L}(k)$ die Anzahl der Blätter im Abstand k zur Wurzel bezeichnet.

In [16] wurde gezeigt, daß $\hat{X}_n(t)$ für Binärbäume mit $2n$ Knoten gegen die Brownsche Exkursion konvergiert. Die dort verwendete Methode ist nicht auf allgemeine Bäume übertragbar, da einige Formeln involviert sind, die wesentlich auf der Binarität der untersuchten Bäume beruhen.

In dieser Arbeit verwenden wir den Zugang über erzeugende Funktionen, um die oben genannten Problemstellungen zu lösen. Wie anfangs erwähnt, betrachten wir nur einfach erzeugte Baumfamilien, das sind jene, deren erzeugende Funktion die Funktionalgleichung (1.27) erfüllt. Diese Funktionalgleichung ergibt sich aufgrund der kombinatorischen Interpretation: Betrachten wir als Beispiel die Familie der Binärbäume $\mathcal{B}$. Diese kann auf folgende Weise rekursiv beschrieben werden: Jeder Knoten hat entweder keinen oder zwei Nachfolger. Im letzteren Fall bilden die beiden Nachfolger wiederum Binärbäume. Stellt man die Knoten symbolisch durch $\circ$ dar, so erhält man für Binärbäume die symbolische Rekursion

$$\mathcal{B} = \{\circ\} \cup \{\circ\} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} \tag{2.6}$$

b_n sei die Anzahl der Binärbäume der Größe n und

$$B(z) = \sum_{n \ge 0} b_n z^n$$

die erzeugende Funktion von $\mathcal{B}$. Jedem Knoten $\circ$ entspricht in der erzeugenden Funktion der Term z. Ferner ist leicht zu sehen, daß sich beim Übergang zu erzeugenden Funktionen die

Operationen $\cup$ und $\times$ in Addition und Multiplikation übersetzen und somit die Rekursion (2.6) in die Funktionalgleichung

$$B(z) = z(1 + B^2(z)).$$

Bezeichne $\mathcal{A}$ eine einfach erzeugte Baumfamilie. Dann setzt sich jedes Element aus $\mathcal{A}$ aus Objekten der Form

$$\{\circ\} \times \mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A}$$

zusammen, wobei die i Faktoren $\mathcal{A}$ enthaltenden Objekte mit φ_i gewichtet werden. Deshalb läßt sich $\mathcal{A}$ durch die folgende symbolische Rekursion beschreiben:

$$\mathcal{A} = \varphi_0 \cdot \{\circ\} \ \cup\ \varphi_1 \cdot \{\circ\} \times \mathcal{A} \ \cup\ \varphi_2 \cdot \{\circ\} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \ \cup\ \cdots$$

Daraus folgt, daß die erzeugende Funktion dieser Baumfamilie die Funktionalgleichung (1.27) erfüllt.

Um die gewünschten Grenzwertsätze zu zeigen, stellen wir nach dem obigen Schema die erzeugende Funktion

$$a(z,u) = \sum_{n,k \geq 0} a_{nk} z^n u^k$$

der untersuchten Größe $\theta(T)$ auf. a_{nk} bezeichnet dabei die Anzahl der Bäume T mit n Knoten, die $\theta(T) = k$ erfüllen. $\theta(T)$ kann beispielsweise für die Anzahl der Knoten von T in einem festen Abstand d zur Wurzel stehen. Dann muß man zur Bestimmung der Funktionalgleichung für $a(z,u)$ die Knoten im Abstand d markieren. Die so entstandene Baumfamilie werde durch $\mathcal{C}$, ein markierter Knoten durch $\bullet$ symbolisiert. Bezeichne weiters Ψ den Operator

$$\Psi(\mathcal{X}) = \varphi_0 \cdot \{\circ\} \ \cup\ \varphi_1 \cdot \{\circ\} \times \mathcal{X} \ \cup\ \varphi_2 \cdot \{\circ\} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \ \cup\ \cdots$$

Die diesem Operator entsprechende Funktion ist $z\varphi(X(z))$, wobei $X(z)$ die erzeugende Funktion von $\mathcal{X}$ ist. Man kann man sich ferner leicht überlegen, daß

$$\mathcal{C} = \Psi^d(\{\bullet\} \times \mathcal{A})$$

Wegen der Entsprechung

$$\begin{aligned} \circ &\leftrightarrow z \\ \bullet &\leftrightarrow uz \end{aligned}$$

folgt daraus

$$a(z,u) = y_d(z, ua(z))$$

mit

$$\begin{aligned} y_0(z,u) &= u \\ y_{i+1}(z,u) &= z\varphi(y_i(z,u)), \quad i \geq 0. \end{aligned}$$

Für weitere Anwendungen dieser Markierungstechniken verweisen wir auf [12].

Die Verteilung von θ wird durch die Gleichung

$$P[\theta = k|\ |T| = n] = \frac{a_{nk}}{a_n}$$

beschrieben. Daraus kann zunächst nur ein lokaler Grenzwertsatz, d.h. eine Approximation der Dichte $f(t)$ der Grenzverteilung, gewonnen werden. Um den globalen (=schwachen) Grenzwertsatz zu zeigen, muß man die punktweise Konvergenz der Verteilung sicherstellen, d.h. man muß zeigen, daß

$$\sum_{k=a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} \frac{a_{nk}}{a_n} \to \int_a^b f(t)\,dt \tag{2.7}$$

für alle $0 < a < b$ gilt. Der Normierungsfaktor der Summationsgrenzen hängt natürlich von jenem Bereich ab, der zur Dichte von θ den Hauptbeitrag liefert. Für θ wie oben ist dieser Faktor $\sqrt{n}$, da die mittlere Höhe der Knoten proportional zu $\sqrt{n}$ ist. Ein Grenzwertsatz der Form (2.7) kann zum Beispiel erzielt werden, indem man zeigt, daß der Fehler

$$\left|\frac{a_{nk}}{a_n} - f\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)\right|, \quad n \to \infty$$

gleichmäßig für $a\sqrt{n} \le k \le b\sqrt{n}$ ist und anschließend den Satz von der dominierten Konvergenz anwendet.

Um a_{nk} und a_n zu berechnen, verwenden wir die Cauchysche Integralformel mit einem geeignet gewählten Integrationsweg: Da die Asymptotik der Koeffizienten der Potenzreihe einer Funktion vom Verhalten der Funktion in der Nähe der am Konvergenzkreis liegenden Singularitäten bestimmt ist, legt man einen Teil des Integrationsweges nahe an diese Singularitäten, den Rest wählt man so, daß der Beitrag zum gesamten Integral asymptotisch vernachlässigbar wird. Flajolet und Odlyzko [14] haben diese Idee benutzt, um den folgenden Satz zu zeigen:

Satz 2.1 *Sei $f(z)$ analytisch im Bereich*

$$\Delta = \{z | \, |z| \le z_0 + \eta, |arg(z - z_0)| \ge \vartheta\},$$

wobei z_0, η positive reelle Zahlen sind und $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$. Weiters sei eine reelle Zahl α mit $\alpha \notin \{0, 1, 2, \ldots\}$ gegeben. Dann gilt:

$$f(z) \sim \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\alpha} \text{ für } z \to z_0 \text{ in } \Delta \implies [z^n]f(z) \sim \frac{1}{z_0^n n^{\alpha+1}\Gamma(-\alpha)}, \tag{2.8}$$

wobei $[z^n]f(z)$ den Koeffizient von z^n in der Potenzreihe von $f(z)$, entwickelt um 0, bezeichnet. Analoge Formeln gelten für $\mathcal{O}$ und o anstelle von $\sim$.

Bemerkung: Dieser Satz setzt voraus, daß $f(z)$ in einen Bereich außerhalb des Konvergenzkreises analytisch fortsetzbar ist. Diese Forderung ist notwendig, um jenen Teil des Integrationsweges, der nicht in der Nähe der Singularität verläuft, so abschätzen zu können, daß er vernachlässigbar wird. Aus demselben Grund wird auch von den in dieser Arbeit auftretenden Funktionen die analytische Fortsetzbarkeit auf einen Bereich ähnlich zu Δ verlangt, was aber nur eine leichte Einschränkung für $\varphi(t)$ darstellt.

2.2 Der Konturprozeß

2.2.1 Die eindimensionale Verteilung

Sei F_{mn} die Menge der Bäume mit n Knoten und m Blättern. Weiters sei

$$a_{mn} = \sum_{T \in F_{mn}} \omega(T)$$

wobei $\omega(T)$ das in Abschnitt 1.3.2 definierte Gewicht

$$\omega(T) = \prod_{k\geq 0} \varphi_k^{n_k(t)}$$

des Baumes T ist. Die Bäume in F_{mn} erfüllen die symbolische Rekursion

$$\mathcal{Y} = \{\bullet\} \,\cup\, \{\circ\} \times \Phi(\mathcal{Y}),$$

wobei $\Phi(\mathcal{Y})$ der Operator

$$\Phi(\mathcal{X}) = \varphi_1 \cdot \{\circ\} \times \mathcal{X} \,\cup\, \varphi_2 \cdot \{\circ\} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \,\cup\, \cdots$$

ist. Die Φ entsprechende Funktion ist $\varphi(a(z)) - \varphi_0$. Daher genügt die erzeugende Funktion von a_{mn} der Funktionalgleichung

$$y(z,u) = \varphi_0 z(u-1) + z\varphi(y(z,u)) \tag{2.9}$$

und die Folge

$$\frac{a_{mn}}{a_n}, \quad a_n = [z^n]a(z)$$

einen zentralen Grenzwertsatz mit Mittel

$$\frac{1}{a_n}\sum_{m\geq 0} m a_{mn} = \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}n + \mathcal{O}(1) \tag{2.10}$$

und Varianz

$$\left(\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)} - \frac{\varphi_0^2}{\varphi(\tau)^2} - \frac{\varphi_0^2\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)^3\varphi''(\tau)}\right) n + \mathcal{O}(1)\,, \tag{2.11}$$

wobei τ die Lösung von (1.30) ist (siehe [9, 10]). Wenn man nun die Anzahl der Blätter n_T mit $\frac{1}{n}$ skaliert, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_T}{n} = \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}, \quad \text{fast sicher.} \tag{2.12}$$

Mit F_{kmn} werde die Menge aller Bäume der Größe n, deren m-tes Blatt die Höhe k hat, bezeichnet und mit a_{kmn} deren Gewicht

$$a_{kmn} = \sum_{T\in F_{kmn}} \omega(T).$$

Dann wird die Verteilung der Höhe des m-ten Blattes durch

$$P[H_n(m) = k] = \frac{a_{kmn}}{a_n}$$

bestimmt.

Die Funktion $y(z,u)$ spielt eine Schlüsselrolle in allen weiteren Berechnungen. Deshalb benötigen wir genauere Informationen über das lokale Verhalten dieser Funktion in der Nähe ihrer Singularitäten. Im folgenden sei vorausgesetzt, daß die in (1.27) und (1.28) definierte Funktion $\varphi(t)$ einen positiven Konvergenzradius $R > 0$ hat.

Lemma 2.1 ([10]) *Die Funktion $\varphi(t)$ erfülle $d = ggT\{i|\varphi_i > 0\} = 1$. Ferner existiere eine minimale positive Lösung $\tau < R$ der Gleichung $t\varphi'(t) = \varphi(t)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodaß in $|u-1| < \varepsilon$ eine eindeutige Lösung $z = f(u)$ mit $f(1) = \frac{1}{\varphi'(\tau)}$ existiert, für die $y(f(u), u)$ dem Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} y &= \varphi_0 z(u-1) + z\varphi(y) \\ 1 &= z\varphi'(y) \end{aligned} \tag{2.13}$$

genügt. Ferner ist $z = f(u)$ die einzige Singularität von $y(z,u)$ im Bereich $|z| \le z_0 + \varepsilon$, $\arg\left(1 - \frac{z}{f(u)}\right) \ne \pi$ ($z_0 = f(1)$), und $y(z,u)$ besitzt für $|z - f(u)| < \varepsilon$, $\arg\left(1 - \frac{z}{f(u)}\right) \ne \pi$ die lokale Darstellung

$$y(z,u) = g(z,u) - h(z,u)\sqrt{1 - \frac{z}{f(u)}} \tag{2.14}$$

mit analytischen Funktionen $g(z,u)$ und $h(z,u)$, die

$$g(z_0, 1) = \tau \quad und \quad h(z_0, 1) = \sqrt{\frac{2\varphi(\tau)}{\varphi''(\tau)}} \tag{2.15}$$

erfüllen. Für $d > 1$ existieren analoge Darstellungen in der Nähe von $f(u)\exp\left(j\frac{2\pi i}{d}\right)$, $0 \le j < d$.

Bemerkung: Um die Beweise technisch ein wenig zu vereinfachen, werden im folgenden alle Sätze nur für den Fall $d = 1$ formuliert (auch, wenn es nicht explizit erwähnt wird). Wenn $d > 1$, dann hat $y(z,u)$ mehrere Singularitäten am Konvergenzkreis, die alle von ähnlicher Gestalt sind. Deshalb verlaufen die Beweise für $d > 1$ analog zum Fall $d = 1$, und die Beschränkung auf letzteren Fall führt daher zu keinem Verlust an Allgemeinheit.

Folgerung *Für $d = 1$ gilt: Die Funktion $a(z)$ aus (1.27) hat am Konvergenzkreis genau eine Singularität, nämlich bei $z = z_0$. Lokal um $z = z_0$ besitzt sie die Darstellung*

$$a(z) = \tau - \frac{\tau\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{1 - \frac{z}{z_0}} + \mathcal{O}\left(\left|1 - \frac{z}{z_0}\right|^2\right). \tag{2.16}$$

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus $y(z,1) = a(z)$, (2.14), (2.15) und (1.31). ∎

Bemerkung: Sei $F(y,z,u) = \varphi_0 z(u-1) + z\varphi(y)$. Dann gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} F_{yy}(\tau, z_0, 1) &\ne 0 \\ F_z(\tau, z_0, 1) &\ne 0 \end{aligned}$$

Der Beweis des Lemmas benützt diese Eigenschaft und (2.13) zusammen mit dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz (siehe z.B. [15]), um die lokale Darstellung (2.14) herzuleiten. Da $F_u(\tau, z_0, 1)$ ebenfalls nicht verschwindet, können die Rollen von z und u vertauscht werden, und man erhält eine Darstellung der Form

$$y(z,u) = \tilde{g}(z,u) - \tilde{h}(z,u)\sqrt{1 - \frac{u}{\tilde{f}(z)}} \tag{2.17}$$

mit analytischen Funktionen $\tilde{g}(z,u)$, $\tilde{h}(z,u)$ und $\tilde{f}(z)$.

Sei

$$A_k(z,u) = \sum_{m,n\geq 0} a_{kmn} z^n u^m \tag{2.18}$$

Das folgende Lemma liefert eine Darstellung für $A_k(z,u)$. Der Beweis dient als Demonstration der Bestimmung von erzeugenden Funktionen von ähnlicher Gestalt wie $A_k(z,u)$.

Lemma 2.2 ([10]) *Die durch (2.18) definierte Funktion erfüllt die Gleichung*

$$A_k(z,u) = \varphi_0 u z^{k+1} \left(\frac{\varphi(y(z,u)) - \varphi(y(z,1))}{y(z,u) - y(z,1)} \right)^k \tag{2.19}$$

Beweis: Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion nach k: Offensichtlich ist

$$A_0(z,u) = \varphi_0 z u.$$

Um A_{k+1} zu bestimmen, betrachten wir einen Baum, dessen Wurzel Grad i hat. Dann befindet sich das m-te Blatt in einem der i Unterbäume T_i, zum Beispiel in T_{j+1}. Die $i-j-1$ Bäume rechts von T_{j+1} liefern zur erzeugenden Funktion jeweils den Beitrag $a(z) = y(z,1)$. Bei den Bäumen links von T_{j+1} erhöht jedes Blatt die Blattnummern in T_{j+1} um 1. Der Baum T_{j+1} entspricht dem Faktor $A_k(z,u)$. Daher trägt jeder dieser Bäume den Faktor $y(z,u)$ bei. Die Folgerung aus diesen Betrachtungen ist

$$\begin{aligned} A_{k+1}(z,u) &= z A_k(z,u) \sum_{i\geq 1} \varphi_i \sum_{j=0}^{i-1} y(z,u)^j y(z,1)^{i-1-j} \\ &= z A_k(z,u) \sum_{i\geq 1} \varphi_i \frac{y(z,u)^i - y(z,1)^i}{y(z,u) - y(z,1)} \\ &= z A_k(z,u) \frac{\varphi(y(z,u)) - \varphi(y(z,1))}{y(z,u) - y(z,1)} \end{aligned} \tag{2.20}$$

und daraus folgt (2.19). ■

Damit können die eindimensionalen Verteilungen berechnet werden: Unter Verwendung der Folgerung von Lemma 2.1 und (2.8) erhält man

$$a_n = \frac{\tau}{\sigma z_0^n \sqrt{2\pi n^3}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{2.21}$$

und daraus kann mit Hilfe der Lemmata 2.1 und 2.2 der folgende Satz hergeleitet werden:

Satz 2.2 ([10]) *Sei* $0 < \mu < 1$ *und* $x > 0$. *Gelte ferner* $m\frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0} = \mu n + o(n)$ *und* $k = x\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$ *für* $n \to \infty$. *Dann ist die Verteilung der Höhe des* m*-ten Blattes gegeben durch*

$$\sqrt{n}\frac{a_{kmn}}{a_n} = \frac{\sigma^3}{4\sqrt{2\pi}} \frac{x^2}{(\mu(1-\mu))^{3/2}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 x^2}{8\mu(1-\mu)}\right) + o(1), \quad n \to \infty, \tag{2.22}$$

gleichmäßig für $x \in [a,b]$ *mit* $0 < a < b$.

2.2.2 Die mehrdimensionalen Verteilungen

Vorbemerkungen

In [10] wird dieser Ansatz auf zwei Blätter verallgemeinert. Man erhält damit eine erzeugende Funktion $B_{k_1k_2}(z,u_1,u_2)$ von wesentlich komplizierterer Gestalt als A_k, sodaß für den allgemeinen Fall (p Blätter) nicht mehr handhabbare Ausdrücke zu erwarten sind. Es erweist sich als zweckmäßig, analog zu [16] eine zusätzliche Größe einzuführen: Sei $0 < m_1 < \ldots < m_p < \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}n$ und T ein Zufallsbaum der Größe n. Dann bezeichne W_i den „Abstand" zwischen dem m_i-ten und dem m_{i+1}-ten Blatt in T und K_i die Höhe des m_i-ten Blattes. Im folgenden wird die gemeinsame Verteilung von $(K_1, W_1, K_2, \ldots, W_{p-1}, K_p)$ berechnet, woraus man dann leicht jene von $(K_1, \ldots, K_p)$ bestimmen kann. Dazu führen wir die folgenden Bezeichnungsweisen ein: Sei

$$a_{kmln} = \sum_{|T| \in F_{kmn} \cap F_{ln}} \omega(T)$$

und die erzeugende Funktion davon

$$\bar{A}_k(z,u,v) = \sum_{n,m,l \geq 0} a_{kmln} z^n u^m v^l.$$

Ferner sei

$$\begin{aligned} \phi_1(z,u,v) &= z \sum_{i \geq 1} \varphi_i \sum_{j_1+j_2=i-1} y(z,u)^{j_1} y(z,v)^{j_2} \\ &= z \frac{\varphi(y(z,u)) - \varphi(y(z,v))}{y(z,u) - y(z,v)} \end{aligned} \tag{2.23}$$

und

$$\phi_2(z,u,v,w) = z \sum_{i \geq 2} \varphi_i \sum_{j_1+j_2+j_3=i-2} y(z,u)^{j_1} y(z,v)^{j_2} y(z,w)^{j_3} \tag{2.24}$$

Analog zum Beweis von Lemma 2.2 kann man zeigen, daß

$$\bar{A}_k(z,u,v) = \varphi_0 z u \phi_1(z,uv,v)^k. \tag{2.25}$$

Eine Vertauschbarkeitseigenschaft

Betrachten wir einen Baum T und die drei Blätter mit den Nummern m_1, m_2 und m_3. Die Wurzel von T und diese drei Blätter spannen einen Unterbaum T_0 von T auf: Von jedem dieser Blätter gibt es einen eindeutigen Weg $\pi(m_i)$, $i = 1,2,3$, zur Wurzel von T. Sei V_i jener Knoten aus $\pi(m_i) \cap \pi(m_{i+1})$, dessen Höhe maximal ist. Dann ist T_0 der Baum, der m_1, m_2, m_3, V_1, V_2 und die Wurzel von T als Knoten und die Verbindungswege in T zwischen diesen Knoten als Kanten besitzt. Sei l_i die Distanz (in T) von V_i zur Wurzel von T. Dann wird die Gestalt von T_0 durch l_1 und l_2 bestimmt. Weiters ist leicht zu sehen, daß

$$l_i = \frac{k_i + k_{i+1} - w_i}{2}$$

gilt.

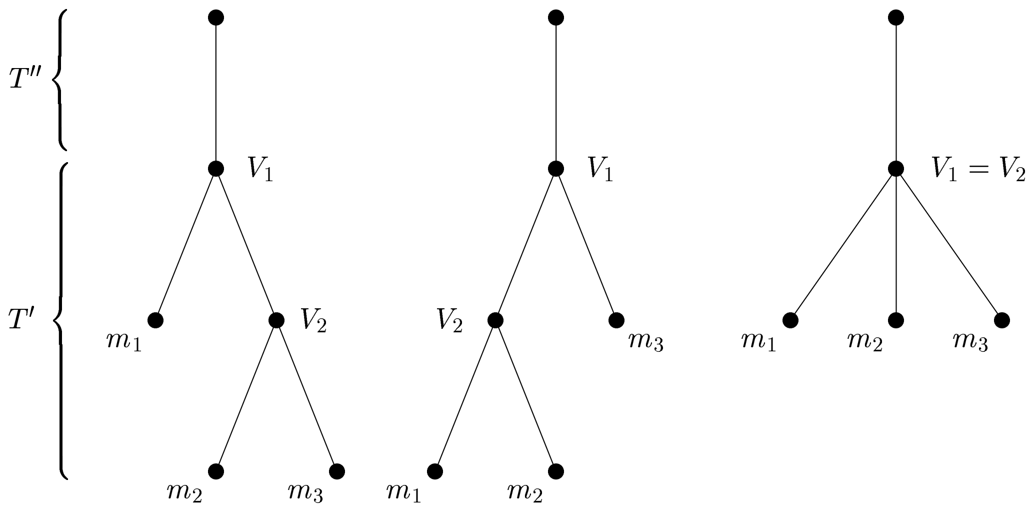


Abbildung 2.1: Die möglichen Formen des Baumes T_0

Das Gesamtgewicht aller Bäume der Größe n, die $H(m_i) = k_i$, wobei $k_1, k_2, k_3 > 0$, erfüllen, sei $b_{k_1 m_1 k_2 m_2 k_3 m_3 n}$. Sind w_1 und w_2 auch vorgegeben, so werde dieses Gewicht mit $b_{k_1 m_1 w_1 k_2 m_2 w_2 k_3 m_3 n}$ bezeichnet. Wir wollen nun die erzeugende Funktion

$$B_{k_1 w_1 k_2 w_2 k_3}(z, u_1, u_2, u_3) = \sum_{n, m_1, m_2 \geq 0} b_{k_1 m_1 w_1 k_2 m_2 w_2 k_3 m_3 n} z^n u_1^{m_1} u_2^{m_2} u_3^{m_3}$$

bestimmen. Dazu sei zunächst $l_1 < l_2$ (d.h. T_0 hat die Form in Abbildung 2.1 links). So ein Baum läßt sich dann in zwei Unterbäume zerlegen: den Baum T' mit Wurzel V_1 und den Rest T''. Um die erzeugende Funktion von T'' zu erhalten, muß in $\bar{A}_k(z, u, v)$ der dem m-ten Knoten entsprechende Anteil $\varphi_0 uz$ durch die T' entsprechende Funktion ersetzt werden. Letztere erhält man analog zum Beweis von Lemma 2.2: Insgesamt ergibt das

$$\begin{aligned} B_{k_1 w_1 k_2 w_2 k_3}(z, u_1, u_2, u_3) &= \phi_1(z, u_1 u_2 u_3, 1)^{l_1} \phi_2(z, u_1 u_2 u_3, u_2 u_3, 1) \bar{A}_{k_1 - l_1 - 1}(z, u_1, u_2 u_3) \\ &\quad \times \phi_1(z, u_2 u_3, 1)^{l_2 - l_1 - 1} \bar{A}_{k_2 - l_2 - 1}(z, u_2, u_3) \bar{A}_{k_3 - l_2 - 1}(z, u_3, 1) \\ &\quad \times \phi_2(z, u_2 u_3, u_3, 1) \\ &= \varphi_0^3 z^3 u_1 u_2 u_3 \phi_2(z, u_1 u_2 u_3, u_2 u_3, 1) \phi_2(z, u_2 u_3, u_3, 1) \\ &\quad \times \phi_1(z, u_1 u_2 u_3, 1)^{l_1} \phi_1(z, u_1 u_2 u_3, u_2 u_3)^{k_1 - l_1 - 1} \\ &\quad \times \phi_1(z, u_2 u_3, 1)^{l_2 - l_1 - 1} \phi_1(z, u_2 u_3, u_3)^{k_2 - l_2 - 1} \\ &\quad \times \phi_1(z, u_3, 1)^{k_3 - l_2 - 1} \end{aligned} \tag{2.26}$$

In analoger Weise erhält man die erzeugende Funktion für den Fall $l_1 > l_2$:

$$\begin{aligned} B_{k_1 w_1 k_2 w_2 k_3}(z, u_1, u_2, u_3) &= \varphi_0^3 z^3 u_1 u_2 u_3 \phi_2(z, u_1 u_2 u_3, u_3, 1) \phi_2(z, u_2 u_3, u_2 u_3, u_3) \\ &\quad \times \phi_1(z, u_1 u_2 u_3, 1)^{l_2} \phi_1(z, u_1 u_2 u_3, u_2 u_3)^{k_1 - l_1 - 1} \\ &\quad \times \phi_1(z, u_1 u_2 u_3, u_3)^{l_1 - l_2 - 1} \phi_1(z, u_2 u_3, u_3)^{k_2 - l_1 - 1} \\ &\quad \times \phi_1(z, u_3, 1)^{k_3 - l_2 - 1} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Die Bedingung $l_1 = l_2$ ist gleichbedeutend mit

$$k_1 + k_2 - w_1 = k_2 + k_3 - w_2.$$

Diese Gleichung bestimmt eine Hyperebene in $\mathbf{R}^5$, also eine Menge mit Lebesgue-Maß 0. Daher hat dieser Fall auf die Grenzverteilung keinen Einfluß, da diese stetig ist, und es wird aus diesem Grund nicht mehr näher darauf eingegangen.

Die gemeinsame Verteilung von $(K_1, W_1, K_2, W_2, K_3)$ hängt im wesentlichen vom lokalen Verhalten der involvierten erzeugenden Funktionen in der Nähe ihrer Singularitäten ab. Dies stellen die folgenden Lemmata bereit:

Lemma 2.3 *Sei $z = z_0(1 + \frac{t}{n})$ und $u = 1 + \frac{s}{m}$, wobei $\varepsilon < \frac{m}{n}\frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0} < 1 - \varepsilon$, für ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Ferner gelte $|t| \le \eta n$ und $|s| =\le \eta m$, wobei $\eta > 0$ hinreichend klein ist. Dann erfüllt die durch (2.9) definierte Funktion $y(z, u)$ für $n \to \infty$*

$$y(z,u) - \tau = -\sqrt{\frac{2\varphi(\tau)}{\varphi''(\tau)}}\sqrt{-\frac{t}{n} - \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}\frac{s}{m}} + \mathcal{O}\left(\frac{|s|}{m} + \frac{|t|}{n}\right) \tag{2.28}$$

Beweis: Wegen (2.14) haben wir

$$\begin{aligned} y(z,u) - \tau = &-\sqrt{\frac{2\varphi(\tau)}{\varphi''(\tau)}}\sqrt{1 - \frac{z}{f(1)} + \frac{zf'(1)}{f^2(1)}\frac{s}{m} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{|s|}{m}\right)^2\right)} \\ &\times \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{|s|}{m} + \frac{|t|}{n}\right)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{|s|}{m} + \frac{|t|}{n}\right) \end{aligned}$$

Aus (2.13) folgt, daß $y(u) = y(f(u), u)$ der Gleichung

$$F_y(f(u), u, y) \equiv 1,$$

mit $F(z, u, y) = \varphi_0 z(u-1) + z\varphi(y)$ genügt. Das impliziert

$$\begin{aligned} y'(u) &= F_z(f(u), u, y(u))f'(u) + F_u(f(u), u, y(u)) + F_y(f(u), u, y(u))y'(u) \\ &= F_z(f(u), u, y(u))f'(u) + F_u(f(u), u, y(u)) + y'(u) \end{aligned}$$

und

$$f'(u) = -\frac{F_u(f(u), u, y(u))}{F_z(f(u), u, y(u))}, \tag{2.29}$$

woraus man $f'(1) = -\frac{z_0\varphi_0}{\varphi(\tau)}$ ablesen kann. Damit ergibt sich

$$y(z,u) - \tau = -\sqrt{\frac{2\varphi(\tau)}{\varphi''(\tau)}}\sqrt{-\frac{t}{n} - \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}\frac{s}{m}}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{|s|}{m}\right)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{|s|}{m} + \frac{|t|}{n}\right)$$

und daraus folgt die Behauptung. ■

Lemma 2.4 *Sei $z = z_0(1 + \frac{t}{n})$ und $u_i = 1 + \frac{s_i}{m_i}$, $i = 1, 2, 3$, wobei $\varepsilon < \frac{m_i}{n}\frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0} < 1 - \varepsilon$, für ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Ferner gelte $|t| \le \eta n$ und $|s_i| =\le \eta m_i$, mit hinreichend kleinem $\eta > 0$. Dann* *besitzen $\phi_1(z,u_1,u_2)$ und $\phi_2(z,u_1,u_2,u_3)$ für $n \to \infty$ die folgenden lokalen Darstellungen:*

$$\phi_1(z,u_1,u_2) = 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{-\frac{t}{n} - \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}\frac{s_1}{m_1}} + \sqrt{-\frac{t}{n} - \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}\frac{s_2}{m_2}}\right)$$
$$+\mathcal{O}\left(\frac{|t|}{n} + \frac{|s_1|}{m_1} + \frac{|s_2|}{m_2}\right), \tag{2.30}$$
$$\phi_2(z,u_1,u_2,u_3) = \frac{z_0\varphi''(\tau)}{2} + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{|t|}{n} + \frac{|s_1|}{m_1} + \frac{|s_2|}{m_2} + \frac{|s_3|}{m_3}}\right), \tag{2.31}$$

wobei σ^2 durch (1.31) gegeben ist.

Beweis: Aus $z_0 = \frac{1}{\varphi'(\tau)}$ und der Taylorentwicklung von $\varphi(t)$ erhält man

$$z_0\frac{\varphi(\tau+t_1) - \varphi(\tau+t_2)}{\tau+t_1-(\tau+t_2)} = 1 + \frac{\tau\varphi''(\tau)}{2\varphi(\tau)}(t_1+t_2) + \mathcal{O}\left(|t_1|^2 + |t_2|^2\right)$$

Anwendung von Lemma 2.3 ergibt

$$t_1 = -\sqrt{\frac{2\varphi(\tau)}{\varphi''(\tau)}}\sqrt{-\frac{t}{n} - \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}\frac{s_1}{m_1}}$$
$$t_2 = -\sqrt{\frac{2\varphi(\tau)}{\varphi''(\tau)}}\sqrt{-\frac{t}{n} - \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}\frac{s_2}{m_2}}$$

und (2.23) liefert schließlich (2.30). Gleichung (2.31) folgt direkt aus (2.24): Es gilt

$$\phi_2(z_0,1,1,1) = \frac{z_0\varphi''(\tau)}{2}$$

und (2.31) folgt somit aus der Analytizität von ϕ_2. ■

Seien $k_i, i = 1,2,3$, und $w_j, j = 1,2$, proportional zu $\sqrt{n}$ und $m_i, i = 1,2,3$, erfüllen die Bedingung $\varepsilon < \frac{m_i}{n}\frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0} < 1 - \varepsilon$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Die Verteilung von $(K_1, W_1, K_2, W_2, K_3)$ wird durch

$$[z^n u_1^{m_1} u_2^{m_2} u_3^{m_3}]B_{k_1 w_1 k_2 w_2 k_3}(z,u_1,u_2,u_3)$$

bestimmt. Diesen Koeffizienten berechnen wir mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel, indem wir ein Hankelintegral um die Singularität der Funktion legen, dieses asymptotisch auswerten und den Rest abschätzen. Dazu benötigt man das lokale Verhalten der Funktion um $(z_0,1,1,1)$: Sei $z = z_0\left(1+\frac{t}{n}\right)$ und $u_i = 1 + \frac{s_i}{m_i}$, wobei t und s_i die Voraussetzungen von Lemma 2.4 erfüllen. Für die in Lemma 2.3 und 2.4 vorkommenden Wurzelausdrücke verwenden wir im folgenden die Abkürzung

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \sqrt{-\frac{t}{n} - \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}\left(\frac{s_{i_1}}{m_{i_1}} + \cdots + \frac{s_{i_k}}{m_{i_k}}\right)}$$
$$a = \sqrt{-\frac{t}{n}}$$

Mit Hilfe von Lemma 2.4 läßt sich nun unter Verwendung von (2.26) und (2.27), sowie $k_i - 1 \sim k_i$ und $l_i - 1 \sim l_i$ zeigen, daß $B_{k_1 w_1 k_2 w_2 k_3}(z, u_1, u_2, u_3)$ die lokale Darstellung

$$\frac{\varphi_0^3 z_0^5 \varphi''(\tau)^2}{4} \exp\Bigg(-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}(l_1(a_{123}+a) + (k_1 - l_1)(a_{123}+a_{23}) + (l_2 - l_1)(a_{23}+a)$$
$$+(k_2 - l_2)(a_{23}+a_3) + (k_3 - l_2)(a_3 + a))\Bigg)$$
$$\times\left(1 + \mathcal{O}\left(M\left(\frac{|t|}{n} + \frac{|s_1|}{m_1} + \frac{|s_2|}{m_2} + \frac{|s_3|}{m_3}\right)\right) + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{|t|}{n} + \frac{|s_1|}{m_1} + \frac{|s_2|}{m_2} + \frac{|s_3|}{m_3}}\right)\right)$$

für $l_1 < l_2$ bzw.

$$\frac{\varphi_0^3 z_0^5 \varphi''(\tau)^2}{4} \exp\Bigg(-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}(l_2(a_{123}+a) + (k_1 - l_1)(a_{123}+a_{23}) + (l_1 - l_2)(a_{123}+a_3)$$
$$+(k_2 - l_1)(a_{23}+a_3) + (k_3 - l_2)(a_3 + a))\Bigg)$$
$$\times\left(1 + \mathcal{O}\left(M\left(\frac{|t|}{n} + \frac{|s_1|}{m_1} + \frac{|s_2|}{m_2} + \frac{|s_3|}{m_3}\right)\right) + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{|t|}{n} + \frac{|s_1|}{m_1} + \frac{|s_2|}{m_2} + \frac{|s_3|}{m_3}}\right)\right)$$

für $l_1 > l_2$ besitzt, wobei $M = \max(k_1, k_2, k_3)$. Die Differenz der Exponenten beträgt

$$(l_1 - l_2)(a_{123} + a - a_{23} - a - a_{123} - a_3 + a_{23} + a_3) = 0.$$

Daraus folgt, daß man im anfangs beschriebenen Baum T_0 die Links-Rechts-Reihenfolge der Kanten nach Belieben vertauschen kann, da sich (nach korrekter Umnumerierung der l_i bzw. w_i) die Asymptotik, welche die Verteilung bestimmt, nicht ändert. Der Vorteil dieser Eigenschaft liegt darin, daß man einerseits nur die erzeugende Funktion für eine spezielle Gestalt von T_0 behandeln muß, andererseits die im allgemeinen unangenehmen Ausdrücke der Form $\min(l_i, l_j)$ und $\max(l_i, l_j)$ in der erzeugenden Funktion nicht mehr auftreten.

Offensichtlich lassen sich die obigen Überlegungen auch dann anwenden, wenn T_0 p Blätter besitzt. Damit haben wir

Lemma 2.5 *Sei $B_{k_1 w_1 \ldots k_{p-1} w_{p-1} k_p}(z, u_1 \ldots, u_p)$ die erzeugende Funktion von $(K_1, W_1, \ldots, K_{p-1}, W_{p-1}, K_p)$. Sei ferner $l_i \neq l_j$ für $i \neq j$ und $\mathcal{B}_p$ die Menge der Binärbäume mit p Blättern. Überdies gelte: $k_i, i = 1, \ldots, p$, und $w_j, j = 1, \ldots, p-1$, sind durch $C\sqrt{n}$ mit $C > 0$ beschränkt und $m_i, i = 1, \ldots, p$, ist proportional zu n. Dann gilt: Falls $z = z_0\left(1 + \frac{t}{n}\right)$ und $u_i = 1 + \frac{s_i}{m_i}$ mit $t = o(\sqrt{n})$ und $s_i = (\sqrt{n})$, so ist die Asymptotik von $B_{k_1 w_1 \ldots k_{p-1} w_{p-1} k_p}(z, u_1 \ldots, u_p), n \to \infty$, für alle $T_0 \in \mathcal{B}_p$ dieselbe, d.h. zur Bestimmung der Asymptotik kann die Links-Rechts-Reihenfolge in T_0 beliebig verändert werden.*

Die Verteilung von $(K_1, W_1, \ldots, K_{p-1}, W_{p-1}, K_p)$

Um die Verteilung von $(K_1, W_1, \ldots, K_{p-1}, W_{p-1}, K_p)$ zu berechnen, müssen wir die erzeugende Funktion $B(z, u_1, \ldots, u_p) = B_{k_1 w_1 \ldots k_{p-1} w_{p-1} k_p}(z, u_1 \ldots, u_p)$ aufstellen und dann, wie im vorangegangenen Abschnitt angedeutet, mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel den geforderten Koeffizienten bestimmen. Das Vertauschungslemma 2.5 des letzten Abschnitts gestattet uns, die Gestalt von T_0 frei zu wählen. Den Baum T_0 wählen wir so, daß $l_1 < l_2 < \ldots < l_{p-1}$

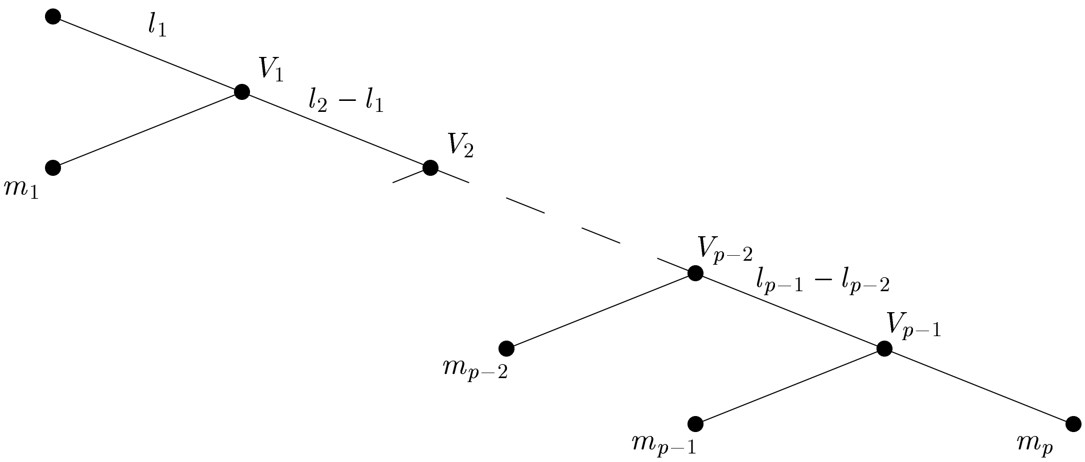


Abbildung 2.2: Die Wahl des Baumes T_0

erfüllt ist, das bedeutet, daß alle Pfade $\pi(m_i)$, $i = 1, \ldots, p-1$, direkt in den Pfad $\pi(m_p)$ münden. Dann entspricht jedem durch V_{i-1}, V_i und das m_i-te Blatt aufgespannten Teilbaum der Ausdruck

$$\phi_1(z, u_i \cdots u_p, 1)^{l_i - l_{i-1} - 1} \bar{A}_{k_i - l_i - 1}(z, u_i, u_{i+1} \cdots u_p),$$

der Beitrag der Verzweigungen in V_i ist $\phi_2(z, u_i \cdots u_p, u_{i+1} \cdots u_p)$ und der von V_{p-1} und dem m_p-ten Blatt aufgespannte Teilbaum liefert $\bar{A}_{k_p - l_{p-1} - 1}(z, u_p, 1)$. Faßt man alle Terme zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned} B(z, u_1, \ldots, u_p) = \varphi_0^p z^p u_1 \cdots u_p \prod_{i=1}^{p-1} \Big[& \phi_1(z, u_i \cdots u_p, u_{i+1} \cdots u_p)^{k_i - l_i - 1} \\ & \times \phi_1(z, u_i \cdots u_p, 1)^{l_i - l_{i-1} - 1} \phi_2(z, u_i \cdots u_p, u_{i+1} \cdots u_p) \Big] \\ & \times \phi_1(z, u_p, 1)^{k_p - l_{p-1} - 1}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

wobei per definitionem $l_0 = -1$ gelte. Sei wiederum $z = z_0 \left(1 + \frac{t}{n}\right)$ und $u_i = 1 + \frac{s_i}{m_i}$, sodaß die Voraussetzungen von Lemma 2.4 erfüllt sind. Dann erhält man für k_i und w_i proportional zu $\sqrt{n}$ lokal die Darstellung

$$\begin{aligned} B(z, u_1, \ldots, u_p) &= \varphi_0^p z_0^p \left(\frac{z_0 \varphi''(\tau)}{2} \right)^{p-1} \exp \left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i=1}^{p-1} ((k_i - l_i)(a_{i \cdots p} + a_{i+1, \cdots, p}) \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + (l_i - l_{i-1})(a_{i \cdots p} + a)) + (k_p - l_{p-1})(a_p + a) \right) \right) \\ &\qquad \times \left(1 + \mathcal{O}\left(M_p \left(\frac{|t|}{n} + \sum_{i=1}^{p} \frac{|s_i|}{m_i} \right) \right) + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{|t|}{n} + \sum_{i=1}^{p} \frac{|s_i|}{m_i}} \right) \right) \\ &= \varphi_0^p z_0^p \left(\frac{z_0 \varphi''(\tau)}{2} \right)^{p-1} \end{aligned}$$

$$\times \exp\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(a_{1\cdots p}k_1 + \sum_{i=1}^{p-1} a_{i+1,\ldots,p}w_i + ak_p\right)\right)$$
$$\times \left(1 + \mathcal{O}\left(M_p\left(\frac{|t|}{n} + \sum_{i=1}^{p}\frac{|s_i|}{m_i}\right)\right)\right), \tag{2.33}$$

wobei $M_p = \max_{1\le i\le p} k_i$. Nun können wir die Berechnung des Koeffizienten von $z^n u_1^{k_1}\cdots u_p^{k_p}$ in $B(z,u_1,\ldots,u_p)$ angehen:

Satz 2.3 *Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
[z^n u_1^{m_1}\cdots u_p^{m_p}]B = C_p' k_1 w_1\cdots w_{p-1}k_p &\\
\times\left[m_1(m_2-m_1)\cdots(m_p-m_{p-1})\left(n-\frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}m_p\right)\right]^{-3/2}&\\
\times \exp\left(-\frac{\sigma^2}{8}\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}\right.&\\
\times\left.\left(\frac{k_1^2}{m_1}+\sum_{i=2}^{p}\frac{w_{i-1}^2}{m_i-m_{i-1}}+\frac{k_p^2}{\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}n-m_p}\right)\right)&\\
\times\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), n\to\infty,&
\end{aligned}\tag{2.34}$$

gleichmäßig für $\frac{m_1}{n}\ge\varepsilon$, $\frac{m_{j+1}-m_j}{n}\ge\varepsilon$, $j=1,\ldots,p-1$, $\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}-\frac{m_p}{n}\le\varepsilon$ und $k_i=\mathcal{O}(\sqrt{n})$, $i=1,\ldots,p$, $w_j=\mathcal{O}(\sqrt{n})$, $j=1,\ldots,p-1$. Dabei ist

$$\begin{aligned}
C_p' &= \varphi_0^p z_0^{p-n}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^{p+1}\left(\frac{z_0\varphi''(\tau)}{2}\right)^{p-1}\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^{p+1}}\left(\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}\right)^{p/2}\\
&= z_0^{-n}\frac{\tau}{2^{p+1}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^{3p-1}\pi^{-(p+1)/2}\left(\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}\right)^{3p/2}.
\end{aligned}$$

Dividieren von (2.34) durch a_n ergibt den folgenden lokalen Grenzwertsatz:

Satz 2.4 *Sei $k_j=\kappa_j\sqrt{n}+o(\sqrt{n}), j=1,\ldots,p$, mit $\kappa_j>0$ und $w_j=\omega_j\sqrt{n}+o(\sqrt{n}), j=1,\ldots,p-1$, mit $|\kappa_{j+1}-\kappa_j|\le\omega_j\le\kappa_{j+1}+\kappa_j$. Weiters sei $\frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}m_j=\mu_j n+o(n)$, wobei $0<\mu_1<\ldots<\mu_p<1$. Dann ist die Dichte*

$$P[K_1=k_1,W_1=w_1,\ldots,K_{p-1}=k_p-1,W_{p-1}=w_{p-1},K_p=k_p]$$

der Verteilung von $(K_1,W_1,\ldots,K_{p-1},W_{p-1},K_p)$ für $n\to\infty$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
n^{(2p-1)/2}\frac{b_{k_1m_1w_1\cdots k_{p-1}m_{p-1}w_{p-1}k_pm_pn}}{a_n} &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^{p+1}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^{3p}k_1w_1\cdots w_{p-1}k_p\\
&\quad\times[\mu_1(\mu_2-\mu_1)\cdots(\mu_p-\mu_{p-1})(1-\mu_p)]^{-3/2}\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{\sigma^2}{8}\left(\frac{\kappa_1^2}{\mu_1}+\sum_{j=2}^{p}\frac{\omega_{j-1}^2}{\mu_j-\mu_{j-1}}+\frac{\kappa_p^2}{1-\mu_p}\right)\right)\\
&\quad+o(1)
\end{aligned}\tag{2.35}$$

Der Fehlerterm ist gleichmäßig für $\kappa_j\in[a_j,b_j]$ mit $b_j>a_j>0$ und $\kappa_{j+1}-\kappa_j>\varepsilon>0$ für $j=1,\ldots,p$.

Die endlichdimensionale Verteilung des Konturprozesses (2.4) an der Stelle $(\mu_1, \ldots, \mu_p)$ ist die Verteilung von $(K_1, \ldots, K_p)$ für die entsprechenden Blätter $m_1, \ldots, m_p$. Wegen der Gleichmäßigkeit des Fehlerterms ist dies die Randverteilung von $(\kappa_1, \ldots, \kappa_p)$ in (2.35). Diese Dichte hat offensichtlich die Gestalt (1.18) und daher folgt aus Lemma 1.1, daß der Grenzwert des Konturprozesses ein Markovprozeß ist. Für $p = 2$ ist die Randverteilung von (κ_1, κ_2) gegeben durch

$$n\frac{b_{k_1m_1k_2m_2n}}{a_n} = \frac{\sigma^4}{16\pi}\frac{\kappa_1\kappa_2}{\sqrt{(\mu_2-\mu_1)\mu_1^3(1-\mu_2)^3}}\exp\left(-\frac{\sigma^2\kappa_1^2}{8\mu_1} - \frac{\sigma^2\kappa_2^2}{8(1-\mu_2)}\right)$$
$$\times\left(\exp\left(-\frac{\sigma^2(\kappa_2-\kappa_1)^2}{8(\mu_2-\mu_1)} - \frac{\sigma^2(\kappa_2+\kappa_1)^2}{8(\mu_2-\mu_1)}\right)\right) + o(1) \qquad (2.36)$$

Aus (2.22) und (2.36) kann die Übergangswahrscheinlichkeit des Grenzprozesses berechnet werden. Vergleicht man das Ergebnis mit (1.19) und (1.20) so erhält man aufgrund der Gleichmäßigkeit der Fehler nach Anwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz

Satz 2.5 *Seien $0 < t_1 < \ldots < t_k < 1$ und $\pi_{t_1,\ldots,t_k}$ die Projektion (1.2). Dann erfüllt der in (2.4) definierte Konturprozeß $\hat{X}_n(t)$ den folgenden Grenzwertsatz:*

$$\pi_{t_1,\ldots,t_k}\left(\hat{X}_n\left(\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}t\right)\right) \xrightarrow{d} \pi_{t_1,\ldots,t_k}\left(\frac{2}{\sigma}W^+(t)\right)$$

Zum Beweis von Satz 2.3 benötigen wir noch das folgende

Lemma 2.6 *Sei γ die Hankelkurve (1.23). Dann gilt für $\lambda,\ \mu > 0$*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\lambda\sqrt{-t}-\mu t}\,dt = \frac{\lambda\mu^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\mu}\right). \qquad (2.37)$$

Beweis: Die Substitutionen $t = u^2$ und $\sqrt{\mu}u - \frac{i\lambda}{2\sqrt{\mu}} = v$ ergeben

$$\frac{\lambda\mu^{-\frac{3}{2}}}{2\pi}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\mu}\right)\int_{-\infty+i\lambda/2\mu}^{\infty+i\lambda/2\mu} e^{-v^2}\,dv$$

und das ist äquivalent zu (2.37). ■

Bemerkung: Schneidet man die Hankelkurve an der Stelle K ab, d.h. integriert man entlang der Kurve $\gamma \cap \{t|\Re t \leq K\}$, so ist (2.37) nur mehr asymptotisch korrekt. Der Fehler ist exponentiell klein, nämlich $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu}e^{-K\mu}\right)$.

Beweis von Satz 2.3: Bestimmung des Hauptterms

Zum Beweis des Satzes verwenden wir die Cauchysche Integralformel:

$$[z^n u_1^{k_1}\cdots u_p^{k_p}]B(z,u_1,\ldots,u_p) = \frac{1}{(2\pi i)^{p+1}}\int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_1}\cdots\int_{\Gamma_p}\frac{B(z,u_1,\ldots,u_p)}{z^{n+1}u_1^{m_1+1}\cdots u_p^{m_p+1}}\,dz\,du_1\cdots du_p. \qquad (2.38)$$

Als Integrationsweg für z wählen wir die Kurve $\Gamma_0 = \Gamma_{01} \cup \Gamma_{02} \cup \Gamma_{03} \cup \Gamma_{04}$ mit

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{01} &= \left\{ z = z_0 \left(1 + \frac{t}{n}\right) \middle| \Re t \le 0 \text{ und } |t| = 1 \right\} \\
\Gamma_{02} &= \left\{ z = z_0 \left(1 + \frac{t}{n}\right) \middle| \Im t = 1 \text{ und } 0 \le \Re t \le \log^2 n \right\} \\
\Gamma_{03} &= \overline{\Gamma}_{02} \\
\Gamma_{04} &= \left\{ z \middle| |z| = z_0 \left|1 + \frac{\log^2 n + i}{n}\right| \text{ und } \arg\left(1 + \frac{\log^2 n + i}{n}\right) \le |\arg(z)| \le \pi \right\}.
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Bei der Wahl der Integrationskurven für die anderen Variablen muß man beachten, daß sich, während t die Kurve Γ_0 durchläuft, die Lage der Singularität von B verändert. Die Kurven müssen so gewählt werden, daß sie den Weg der Singularität nicht kreuzen. Aus der lokalen Darstellung (2.33) erkennt man, daß die Singularität asymptotisch durch die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{t}{n} &= 0 \\
\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)} \frac{s_p}{m_p} + \frac{t}{n} &= 0 \\
\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)} \left(\frac{s_{p-1}}{m_{p-1}} + \frac{s_p}{m_p} \right) + \frac{t}{n} &= 0 \\
\vdots \qquad & \vdots \\
\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)} \left(\frac{s_1}{m_1} + \cdots + \frac{s_{p-1}}{m_{p-1}} + \frac{s_p}{m_p} \right) + \frac{t}{n} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

bestimmt ist. Daraus folgt, daß die Integrationswege für $u_1, \ldots, u_p$ folgendermaßen zu wählen sind: u_j durchläuft die Kurve $\Gamma_j = \Gamma_{j1} \cup \Gamma_{j2} \cup \Gamma_{j3} \cup \Gamma_{j4}$ mit

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{j1} = \Bigg\{ u_j = \left(1 + \frac{s_j}{m_j}\right) \Bigg| & \Re s_j \le -R_j(s_{j+1}, \cdots, s_p, t) \\
& \text{und } |s_j + R_j(s_{j+1}, \cdots, s_p, t) + I_j(s_{j+1}, \cdots, s_j, t) i| = 1 \Bigg\} \\
\Gamma_{j2} = \Bigg\{ u_j = \left(1 + \frac{s_j}{m_j}\right) \Bigg| & \Im s_j = -I_j(s_{j+1}, \cdots, s_p, t) + 1, \\
& -R_j(s_{j+1}, \cdots, s_p, t) \le \Re s_j \text{ und } |u_j| \le \left|1 + \frac{\log^2 m_j + i}{m_j}\right| \Bigg\} \\
\Gamma_{j3} = \Bigg\{ u_j = \left(1 + \frac{s_j}{m_j}\right) \Bigg| & \Im s_j = -I_j(s_{j+1}, \cdots, s_p, t) - 1, \\
& -R_j(s_{j+1}, \cdots, s_p, t) \le \Re s_j \text{ und } |u_j| \le \left|1 + \frac{\log^2 m_j + i}{m_j}\right| \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$\Gamma_{j4} = \left\{ u_j \,\middle|\, |u_j| = \left| 1 + \frac{\log^2 m_j + i}{m_j} \right| \text{ und } \arg u_j \in [-\pi, \arg z_{j3}] \cup [\arg z_{j2}, \pi] \right\},$$

wobei

$$R_j(s_{j+1}, \cdots, s_p, t) = \begin{cases} \max\left(0, \dfrac{\varphi(\tau)}{\varphi_0} \dfrac{m_p}{n} \Re t\right) & \text{falls } j = p \\ \max\left(0, \Re\left(\dfrac{\varphi(\tau)}{\varphi_0} \dfrac{t m_j}{n} + \dfrac{s_{j+1} m_j}{m_{j+1}} + \cdots + \dfrac{s_p m_j}{m_p}\right)\right) & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$I_j(s_{j+1}, \cdots, s_p, t) = \begin{cases} \max\left(n^{2/3}, \dfrac{\varphi(\tau)}{\varphi_0} \dfrac{m_p}{n} \Im t\right) & \text{falls } j = p \\ \max\left(n^{2/3}, \Im\left(\dfrac{\varphi(\tau)}{\varphi_0} \dfrac{t m_j}{n} + \dfrac{s_{j+1} m_j}{m_{j+1}} + \cdots + \dfrac{s_p m_j}{m_p}\right)\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

und z_{jk} die Punkte mit maximalem Betrag in Γ_{jk} bezeichnet.

Bemerkung: Die Funktionen R_j und I_j stellen sicher, daß die Hankelkurve mit der Singularität mitwandert. Da die Werte von t und s_j auf den Kreisbögen Γ_{04} und Γ_{j4} proportional zu n sind, ist die Maximumbedingung in der Definition von R_j und I_j aus technischen Gründen erforderlich, um ein Abdriften der Hankelkurve aus dem Inneren der durch Γ_{04} und Γ_{j4} beschriebenen Kreise zu verhindern. Es bleibt aber noch zu zeigen, daß die Einschränkung auf $n^{2/3}$ in I_j gerechtfertigt ist.

Studieren wir zu diesem Zweck den Weg, den die Singularität nimmt, wenn t und $s_{j+1}, \ldots, s_p$ die Hankelkurve verläßt und z auf den Kreisbogen übergeht. Es genügt, dies für t zu betrachten, denn der allgemeine Fall läßt sich völlig analog behandeln. Die Singularitäten von B hängen wegen (2.23), (2.24) und (2.32) eng mit denen von $y(z, u)$ zusammen. Für ein hinreichend kleines η gilt im Bereich $|z - z_0| < \eta$ dir lokale Darstellung (2.14). Daher ist die Singularität durch die Gleichung $z = f(u)$ bestimmt. $f(u)$ ist nach Lemma 2.1 analytisch und besitzt daher die Entwicklung

$$f(u) = f(1) + f'(1)(u-1) + \mathcal{O}\left((u-1)^2\right).$$

Ferner haben wir in dem betrachteten Bereich für z die Darstellung

$$z = z_0 \left| 1 + \frac{\log^2 n + i}{n} \right| e^{it/n}.$$

Mit $a = \left|1 + \frac{\log^2 n + i}{n}\right|$ nimmt $z = f(u)$ die Gestalt

$$a z_0 e^{it/n} = f(1) + f'(1)(u-1) + \mathcal{O}\left((u-1)^2\right)$$

an. Auflösen nach u und Einsetzen von $f(1) = z_0$ und $f'(1) = -z_0 \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}$ ergibt

$$\begin{aligned} u &\sim 1 + \frac{f(1) - a z_0 e^{it/n}}{f'(1)} \\ &= 1 + \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}\left(1 - a\cos\frac{t}{n} - a\sin\frac{t}{n}\right) \\ &= 1 + \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}\left(1 - a + \frac{a t^2}{2n^2} - ia\frac{t}{n} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{t}{n}\right)^3\right)\right). \end{aligned}$$

Wegen $1-a \sim \frac{\log^n}{n}$ gilt daher für $t \sim cn^{2/3}$

$$\Re u \sim 1 + c'n^{-2/3} \text{ und } \Im u \sim c''n^{-1/3}. \tag{2.41}$$

Daraus sieht man, daß für wachsende n die Singularität das Innere des Kreises $|u| = \left|1 + \frac{\log^2 m + i}{m}\right|, m \sim Cn$, relativ rasch verläßt, während der Imaginärteil durch $n^{-1/3}$ beschränkt ist. Deshalb ist die Wahl von $n^{2/3}$ als obere Schranke für $\Im s_j$ erlaubt.

Betrachten wir zunächst den Beitrag der Hankelintegrale. Mit Hilfe von (2.33), der Substitution $z = z_0\left(1+\frac{t}{n}\right)$, $u_j = 1 + \frac{s_j}{m_j}$ und den Asymptotiken

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n-1} &= e^{-t}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)\\ \left(1+\frac{s_j}{m_j}\right)^{-m_j-1} &= e^{-s_j}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{s_j^2}{m_j}\right)\right)\end{aligned}$$

erhält man aus (2.38) das Integral

$$\begin{aligned}\frac{C_p}{(2\pi i)^{p+1}} \quad &\int\limits_{\Gamma_0'}\int\limits_{\Gamma_1'}\cdots\int\limits_{\Gamma_p'} \exp\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(a_{1\cdots p}k_1 + \sum_{i=1}^{p-1} a_{i+1,\ldots,p}w_i + ak_p\right)\right.\\ &\left.-t-s_1-\cdots-s_p\right)\frac{ds_p}{m_p}\cdots\frac{ds_1}{m_1}\frac{dt}{n}\left(1+\mathcal{O}\left(M_p\left(\frac{1}{n}+\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{m_j}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

mit

$$C_p = \varphi_0^p z_0^{p-n}\left(\frac{z_0\varphi''(\tau)}{2}\right)^{p-1}$$

Das legt die Substitution

$$\begin{pmatrix} \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)m_p} & 0 \\ 0 & & 0 & \frac{1}{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)m_1} & \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)m_2} & \cdots & \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)m_p} & \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)m_2} & \cdots & \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)m_p} & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)m_p} & \frac{1}{n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_p \\ t\end{pmatrix}$$

nahe. Sei Z_j die j-te Zeile einer Matrix. Wenn man auf die obige Gleichung die Zeilenoperationen

$$\begin{aligned} Z_j &\to Z_j - Z_{j+1}, \quad j = 1,\ldots,p,\\ Z_j &\to m_j\frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}Z_j, \quad j=1,\ldots,p,\\ Z_{p+1} &\to nZ_{p+1}\end{aligned}$$

anwendet, so ergibt sich

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ s_p \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{m_1}{m_2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{m_2}{m_3} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 & -\frac{m_{p-1}}{m_p} & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & -\frac{\varphi(\tau)m_p}{\varphi_0 n} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ v_p \\ t \end{pmatrix}$$

und

$$\left| \frac{\partial(s_1, \dots, s_p, t)}{\partial(v_1, \dots, v_p, t)} \right| = 1.$$

Die Integrationswege transformieren sich zu Hankelintegralen γ_j der Form (1.23) mit der Einschränkung

$$\begin{aligned} \Re t &\le \log^2 n, \\ \Re v_j &\le \log^2 m_j. \end{aligned}$$

Daher liefert diese Substitution

$$\frac{C_p}{m_1 \cdots m_p n} \prod_{j=1}^{p} \int_{\gamma_j} e^{-\lambda_j \sqrt{-v_j} - \mu_j v_j} \, dv_j \int_{\gamma_0} e^{-\lambda_{p+1}\sqrt{-t} - \mu_{p+1} t} \, dt \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \tag{2.42}$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\sigma k_1}{\sqrt{2m_1}} \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}}, & & \mu_1 = 1, \\ \lambda_j &= \frac{\sigma w_{j-1}}{\sqrt{2m_j}} \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}}, \quad j = 2, \dots, p, & & \mu_j = 1 - \frac{m_{j-1}}{m_j}, \quad j = 2, \dots, p, \\ \lambda_{p+1} &= \frac{\sigma k_p}{\sqrt{2n}}, & & \mu_{p+1} = 1 - \frac{m_p}{n} \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.6 führt das Verlängern der Hankelkurven bis ins Unendliche zu einem exponentiell kleinen Fehler. Ferner wird im nächsten Abschnitt gezeigt, daß die verbleibenden Integrale asymptotisch vernachlässigbar sind. Daher kann nun die Dichte von $(K_1, W_1, \dots, K_{p-1}, W_{p-1}, K_p)$ mit Hilfe von Lemma 2.6 berechnet werden, und man erhält (2.34).

Abschätzung der Restintegrale

Im letzten Abschnitt haben wir den Beitrag von $(\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02} \cup \Gamma_{03}) \times \cdots \times (\Gamma_{p1} \cup \Gamma_{p2} \cup \Gamma_{p3})$ zum Cauchyintegral berechnet. Es müssen folglich noch die Integrale für den Fall, daß z oder mindestens ein u_j auf Γ_{04} bzw. Γ_{j4} liegt, asymptotisch abgeschätzt werden.

Bezeichne I_p das Integral (2.42). Falls $n \to \infty$, dann genügt I_p der Asymptotik

$$I_p = \mathcal{O}\left(z_0^{-n} n^{-p-1}\right). \tag{2.43}$$

Ferner gelten für $z \in \Gamma_{04}$ bzw. $u_j \in \Gamma_{j4}$ die Beziehungen

$$|z^{-n-1}| = \mathcal{O}\left(e^{-\log^2 n}\right) \text{ bzw. } |u_j^{-m_j-1}| = \mathcal{O}\left(e^{-\log^2 m_j}\right), \tag{2.44}$$

und daher ist im Restintegral eine dieser Abschätzungen gültig. Auf dem Integrationsweg ist $B(z, u_1, \ldots, u_p)$ analytisch und daher beschränkt durch eine Konstante C, die von $k_1, w_1, \ldots, k_{p-1}, w_{p-1}, k_p$ (und daher auch von n) abhängt. Auch die Länge des Integrationsweges ist ebenfalls beschränkt. Daher ist nur zu zeigen, daß die Konstante $C = C(n)$ für $n \to \infty$ hinreichend schwach anwächst.

Da sich $B(z, u_1, \ldots, u_p)$ im wesentlichen nur aus den Funktionen $\phi_1(z, u, v)$ und $\phi_2(z, u, v, w)$ zusammensetzt und letztere darüberhinaus nur zur ersten Potenz auftritt, genügt es, $\phi_1(z, u, v)$ zu studieren. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ liefert Lemma 2.6 im Bereich $\max(|z - z_0|, |u - 1|, |v - 1|) \leq \varepsilon$ die Darstellung (2.30). Betrachten wir daher zunächst den Ausdruck

$$A = 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{-\frac{t}{n}}$$

für $t \in \Gamma_0$ und $z_0|\frac{t}{n}| \leq \varepsilon$. Falls $t \in \Gamma_{01}$, dann gilt

$$-t = e^{i\psi}, \quad \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

und es folgt trivialerweise $|A| \leq 1$. Sei nun $t \in \Gamma_{02} \cup \Gamma_{03}$. Dann ist $t = r \pm i$ mit $0 \leq r \leq \log^2 n$ und daher

$$\sqrt{-\frac{t}{n}} = \frac{(1+r^2)^{1/4}}{\sqrt{n}} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{r}\right)\right)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\Re A &= 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\frac{(1+r^2)^{1/4}}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{r}\right) \\
-\Im A &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\frac{(1+r^2)^{1/4}}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{r}\right)
\end{aligned}$$

und mit Hilfe der trigonometrischen Identitäten

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \\
\cos^2\frac{x}{2} &= \frac{1+\cos x}{2} \\
\sin^2\frac{x}{2} &= \frac{1-\cos x}{2}
\end{aligned}$$

erhält man

$$|A|^2 = 1 - \sigma\frac{\sqrt{\sqrt{r^2+1} - r}}{\sqrt{n}} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\sqrt{r^2+1}}{n}$$

Der Term $\sqrt{r^2+1}$ vereinfacht sich zu $1 + \mathcal{O}\left(r^2\right)$ für kleine r und zu $r + \frac{1}{2r} + \mathcal{O}\left(r^{-3}\right)$ für große r. Daher gilt

$$|A|^2 = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{r}{\sqrt{n}}\right) + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n}\right) & \text{für kleine } r \\ 1 - \dfrac{\sigma}{\sqrt{2rn}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{r^5 n}}\right) + \mathcal{O}\left(\dfrac{\log^2 n}{n}\right) & \text{für große } r \end{cases}$$

Der letzte Fall ist $z \in \Gamma_{04}$. Hier gilt $\frac{z}{z_0} = ae^{i\psi/n}$ mit

$$a = \left|1 + \frac{\log^2 n + i}{n}\right|$$

und $\psi \leq \varepsilon n$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\sqrt{-\frac{t}{n}} = \sqrt{1 - ae^{i\psi/n}} &= \sqrt{1 - a\cos\frac{\psi}{n} - ia\sin\frac{\psi}{n}} \\ \sim \sqrt{1 - a - ia\frac{\psi}{n}} &\sim \sqrt{-\frac{\log^2 n}{n} - ia\frac{\psi}{n}}\end{aligned}$$

Dies ist von der Form $\frac{\sqrt{-a+bi}}{\sqrt{n}}$ und daher erhalten wir

$$\sqrt{-\frac{t}{n}} = \frac{(a^2+b^2)^{1/4}}{\sqrt{n}}\exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{b}{a}\right)\right).$$

Analog zum zweiten Fall läßt sich daraus die Ungleichung $|A| \leq 1$ herleiten.

Aufgrund der Wahl der Integrationskurven Γ_j sind die obigen Überlegungen bezüglich $\sqrt{-\frac{t}{n}}$ auch auf die Terme der Form

$$\sqrt{-\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}\left(\frac{s_j}{m_j} + \cdots + \frac{s_p}{m_p}\right) - \frac{t}{n}}$$

und Summen solcher Terme anwendbar. Somit gilt in der betrachteten ε-Umgebung der Singularität die Ungleichung

$$|\phi_1(z,u,v)| \leq 1. \tag{2.45}$$

Wenden wir uns nun den Fällen zu, wo eine der Integrationsvariablen die ε-Umgebung verläßt. Sei $z = z_0\left(1 + \frac{t}{n}\right)$, $u = 1 + \frac{s}{m}$ und $v = 1 + \frac{r}{l}$, wobei m und l proportional zu n sind und $\left|\frac{r}{l}\right| > \varepsilon$. Dann ist $\phi_1(z,u,v)$ aufgrund von (2.41) analytisch für $|u| \leq \left|1 + cm^{-1/3}\right|$ und $|z| \leq z_0\left|1 + c'n^{-1/3}\right|$ und daher beschränkt in diesem Bereich durch eine Konstante C. Da k_j und w_j proportional zu $\sqrt{n}$ sind, wächst C^{k_j} bzw. C^{w_j} wie $\mathcal{O}\left(e^{\sqrt{n}}\right)$. Andererseits können wir die Integrationswege auf $|u| = \left|1 + cm^{-1/3}\right|$ und $|z| = z_0\left|1 + c'n^{-1/3}\right|$ ausdehnen und erhalten damit

$$\begin{aligned}|z^{-n-1}| &= \mathcal{O}\left(z_0^{-n}\exp\left(-n^{2/3}\right)\right) \quad \text{und} \\ |u^{-m-1}| &= \mathcal{O}\left(\exp\left(-m^{2/3}\right)\right)\end{aligned}$$

Somit genügt das betrachtete Integral R_p der Asymptotik

$$R_p = \mathcal{O}\left(z_0^{-n}\exp\left(\sqrt{n} - n^{2/3}\right)\right) \tag{2.46}$$

Schließlich folgt aus den Gleichungen (2.43)–(2.46), daß die Restintegrale im Vergleich zu I_p exponentiell klein und infolge dessen asymptotisch vernachlässigbar sind.

2.2.3 Straffheit

Um den Beweis der schwachen Konvergenz des Konturprozesses gegen die Brownsche Exkursion zu vervollständigen, muß noch die Straffheit gezeigt werden. Dazu verwenden wir Satz 1.7: Da $P[\hat{X}_n(0) = 0] = 1$ ist die erste Bedingung trivialerweise erfüllt. Es bleibt zu zeigen, daß

$$P\left[\left|\hat{X}_n\left(\frac{i}{n}\right) - \hat{X}_n\left(\frac{j}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{K}{\varepsilon^\beta}\left|\frac{i-j}{n}\right|^\alpha \tag{2.47}$$

mit Konstanten $K > 0$, $\beta \geq \alpha > 1$ und unabhängig von n, i, j, ε erfüllt ist. Zunächst bestimmen wir die erzeugende Funktion $B_{k_1k_2}(z, u_1, u_2)$. Diese erhält man durch

$$\begin{aligned} B_{k_1k_2}(z,u_1,u_2) &= \sum_{w=|k_1-k_2|+2}^{k_1+k_2} B_{k_1wk_2}(z,u_1,u_2) \\ &= \varphi_0^p z^2 u_1u_2\phi_2(z,u_1u_2,u_2) \sum_{l=0}^{\min(k_1,k_2)-1} \phi_1(z,u_1u_2,1)^l \\ &\qquad \times \phi_1(z,u_1u_2,u_2)^{k_1-1-l}\phi_1(z,u_2,1)^{k_2-1-l} \\ &= \varphi_0^p z^2 u_1u_2\phi_2(z,u_1u_2,u_2)\phi_1(z,u_1u_2,u_2)^{k_1-1} \\ &\qquad \times \phi_1(z,u_2,1)^{k_2-1}\frac{1-q(z,u_1u_2,u_2)^{\min(k_1,k_2)}}{1-q(z,u_1u_2,u_2)}, \end{aligned}$$

wobei

$$q(z,u,v) = \frac{\phi_1(z,u,1)}{\phi_1(z,u,v)\phi_1(z,v,1)}.$$

Sei $\lambda = \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &P\left[\left|\hat{X}_n\left(\frac{\lfloor \mu_1 n\rfloor}{n}\right) - \hat{X}_n\left(\frac{\lfloor \mu_2 n\rfloor}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right] \\ &\quad = \frac{1}{a_n}[z^n u_1^{m_1} u_2^{m_2}] \sum_{\substack{k,l\geq 1 \\ |k-l|\geq\lfloor\varepsilon\sqrt{n}\rfloor}} B_{kl}(z,u_1,u_2) \end{aligned}$$

$B_{kl}(z, u_1, u_2)$ ist von der Form

$$\frac{1}{1-q}x^{k-1}y^{l-1}(1-q^{\min(k,l)}),$$

das bedeutet, daß der Ausdruck

$$\frac{1}{1-q}\sum_{\substack{k,l\geq 0 \\ |k-l|\geq\lfloor\varepsilon\sqrt{n}\rfloor}} x^k y^l + \frac{1}{1-q}\sum_{\substack{k,l\geq 0 \\ |k-l|\geq\lfloor\varepsilon\sqrt{n}\rfloor}} x^k y^l q^{\min(k,l)+1}$$

berechnet werden muß. Es gilt

$$S_1 = \sum_{k\geq\lfloor\varepsilon\sqrt{n}\rfloor} x^k \sum_{l<k-\lfloor\varepsilon\sqrt{n}\rfloor} y^l$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k \geq \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor} x^k \frac{1 - y^{k - \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor}}{1-y} \\
&= \frac{x^{\lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor}}{(1-x)(1-y)} - \frac{x^{\lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor}}{(1-xy)(1-y)} \\
&= \frac{x^{1+\lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor}}{(1-x)(1-xy)}
\end{aligned}
$$

In analoger Weise erhält man

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq k + \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor} x^k y^l &&= \frac{y^{\lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor}}{(1-y)(1-xy)} \\
S_3 &= q \sum_{k \geq \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor} \sum_{l < k - \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor} x^k (qy)^l &&= \frac{qx^{1+\lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor}}{(1-x)(1-xyq)} \\
S_4 &= q \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq k + \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor} (xq)^k y^l &&= \frac{qy^{\lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor}}{(1-y)(1-xyq)}.
\end{aligned}
$$

Zusammengefaßt ergibt das

$$
\frac{S_1 + S_2 - S_3 - S_4}{1-q} = \frac{x^{1+\lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor}}{(1-x)(1-xy)(1-xyq)} + \frac{y^{\lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor}}{(1-y)(1-xy)(1-xyq)}, \tag{2.48}
$$

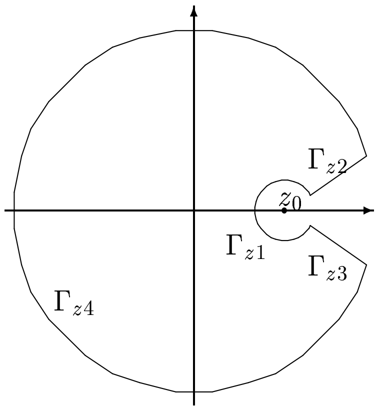
wobei

$$
\begin{aligned}
x &= \phi_1(z, u_1u_2, u_2) \\
y &= \phi_1(z, u_2, 1) \\
xyq &= \phi_1(z, u_1u_2, 1).
\end{aligned}
$$

Damit kann nun der Koeffizient $[z^n u_1^{m_1} u_2^{m_2}]$ von (2.48) abgeschätzt werden. Da (2.48) nur von z, u_1u_2, und u_2 abhängt, substituieren wir $u_1u_2 = u, u_2 = v$ und berechnen den Koeffizient $[z^n u^m v^l]$ mit $m = \mu n, l = \lambda n$. Diese Substitution hat darüberhinaus den Vorteil, daß wir mit der Variable v nun unser Augenmerk auf die Differenz $l = (i - j)$ aus der Straffheitsungleichung (2.47) legen, die letztendlich für den Straffheitsbeweis entscheidend ist. Da die Terme $S_1 - S_3$ und $S_2 - S_4$ von ähnlicher Gestalt sind, genügt es, jenen der beiden Ausdrücke zu betrachten, der komplizierter zu behandeln ist, d.i. $S_1 - S_3$. Zur Durchführung der Abschätzung verwenden wir wieder die Cauchysche Integralformel:

$$
\begin{aligned}
&[z^n u^m v^l](S_1 - S_3) \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{\Gamma_z} \int_{\Gamma_u} \int_{\Gamma_v} \frac{\phi_1(z,u,v)^k z^{-n-1} u^{-m-1} v^{-l-1} \, dv \, du \, dz}{(1 - \phi_1(z,u,v))(1 - \phi_1(z,u,v)\phi_1(z,v,1))(1 - \phi_1(z,u,1))}
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

mit $k = \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor$. Der Integrationsweg $\Gamma_z = \Gamma_{z1} \cup \Gamma_{z2} \cup \Gamma_{z3} \cup \Gamma_{z4}$ sei wie folgt gewählt:



$$
\begin{aligned}
\Gamma_{z1} &= \left\{ z = z_0 \left(1 + \frac{e^{it}}{n}\right) \middle| \alpha \le |t| \le \pi \right\} \\
\Gamma_{z2} &= \left\{ z = z_0 \left(1 + \frac{t}{n} e^{i\alpha}\right) \middle| 1 \le |t| \le \log^2 n \right\} \\
\Gamma_{z3} &= \overline{\Gamma}_{z2} \\
\Gamma_{z4} &= \left\{ z \middle| |z| = z_0 \left|1 + \frac{\log^2 n}{n} e^{i\alpha}\right|, \right. \\
&\qquad \left. \arg\left(1 + \frac{\log^2 n}{n} e^{i\alpha}\right) \le |\arg z| \le \pi \right\}
\end{aligned}
$$

Abbildung 2.3: Die Integrationskurve Γ_z

Falls z hinreichend nahe bei z_0 liegt, so ist die lokale Darstellung (2.17) gültig. In diesem Fall integrieren wir u und v entlang der analogen Kurve mit $\tilde{f}(z)$ aus (2.17) anstelle von z_0 und $\frac{s}{m}$ bzw. $\frac{r}{l}$ statt $\frac{t}{n}$, wobei m und l proportional zu n sind. Andernfalls wählen wir den Einheitskreis als Integrationsweg für u und v.

Lemma 2.7 *Sei* $f_n \ge 0$ *und*

$$F(z) = \sum_{n \ge 0} f_n z^n$$

eine in

$$\Delta = \{z \,|\, |z| \le 1 + \varepsilon, |arg(z-1)| \ge \alpha\},$$

$\varepsilon > 0$, *analytische Funktion, welche für* $z \in \Delta$ *die Ungleichung*

$$|F(z)| \le \left| e^{-c\sqrt{1-z}} \right|$$

mit $c > 0$ *erfüllt. Dann existiert ein* $c' > 0$, *sodaß*

$$[z^n]F(z)^k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n} \exp\left(-c' \frac{k}{\sqrt{n}}\right)\right) \tag{2.50}$$

gleichmäßig für $k \ge 0$.

Beweis: Für $z_0 = 1$ gilt

$$[z^n]F(z)^k = \int_{\Gamma_z} \frac{F(z)^k}{z^{n+1}}\, dz.$$

Sei zunächst $z \in \Gamma_{z1}$. Ferner bezeichne C_i im folgenden eine positive Konstante. Dann gilt offensichtlich

$$\Re\sqrt{1-z} \ge \frac{C_1}{\sqrt{n}} \tag{2.51}$$

und ferner $z^{-n-1} = \mathcal{O}(1)$. Die Integrationslänge ist $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ und daher gilt

$$\int_{\Gamma_{z1}} \frac{F(z)^k}{z^{n+1}}\, dz = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n} \exp\left(-C_2 \frac{k}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Sei nun $z \in \Gamma_{z2} \cup \Gamma_{z3}$. Dann ist $z = 1 + \frac{t}{n} e^{i\alpha}$. Ferner gilt

$$z^{-n-1} = \mathcal{O}\left(\exp\left(-te^{i\alpha}\right)\right).$$

Die Abschätzung (2.51) ist in diesem Bereich ebenfalls gültig. Um eine Abschätzung zu erhalten, verlängern wir den Integrationsweg auf den Bereich $0 \le t \le \infty$. Das liefert

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma_{z2}\cup\Gamma_{z3}} \frac{F(z)^k}{z^{n+1}}\,dz &\le \frac{C_3}{n}\int\limits_0^\infty \exp\left(-C_4\frac{k}{\sqrt{n}} - C_5 t\right)\,dt \\ &= \frac{C_3}{nC_5}\exp\left(-C_4\frac{k}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

Sei nun $z \in \Gamma_{z4}$. Es gilt weiterhin (2.51) und daher

$$|F(z)|^k \le \exp\left(-C_6\frac{k}{\sqrt{n}}\right)$$

Weiters haben wir

$$|z|^{-n-1} \sim e^{-\log^2 n} \le \frac{1}{n}$$

und daraus folgt

$$\int\limits_{\Gamma_{z4}} \frac{F(z)^k}{z^{n+1}}\,dz = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\exp\left(-C_6\frac{k}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

Wählt man nun $c' \le \min(C_2, C_4, C_6)$, so folgt (2.50). ■

Nun kann das Integral (2.49) abgeschätzt werden. Sei z zunächst in der Nähe von z_0. Für jene $u \in \Gamma_u$ und $v \in \Gamma_v$, für die die lokale Darstellung (2.17) gültig ist, gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{1-\frac{1}{\tilde f(z)}}\right| &\ge \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \left|\sqrt{1-\frac{u}{\tilde f(z)}}\right| &\ge \frac{1}{\sqrt{m}} \\ \left|\sqrt{1-\frac{v}{\tilde f(z)}}\right| &\ge \frac{1}{\sqrt{l}}\end{aligned}$$

und daher kann man den Nenner des Integranden folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}&|(1-\phi_1(z,u,v))(1-\phi_1(z,u,v)\phi_1(z,v,1))(1-\phi_1(z,u,1))| \\ &\quad = \bar{C}^3\left(\sqrt{1-\frac{u}{\tilde f(z)}}+\sqrt{1-\frac{v}{\tilde f(z)}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{u}{\tilde f(z)}}+\sqrt{1-\frac{1}{\tilde f(z)}}\right) \\ &\quad\quad \times\left(\sqrt{1-\frac{u}{\tilde f(z)}}+2\sqrt{1-\frac{v}{\tilde f(z)}}+\sqrt{1-\frac{1}{\tilde f(z)}}\right) \\ &\quad \ge \frac{C_1}{n^{3/2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{\mu}}+\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right),\end{aligned} \tag{2.52}$$

wobei $C = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{z_0 \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}}$ und λ, μ wie vorher. Es ist leicht zu sehen, daß diese Abschätzung auf dem gesamten Integrationsbereich richtig ist.

Falls u oder v nicht im Gültigkeitsbereich von (2.17) sind, so gilt für ein $\vartheta > 0$

$$|\phi_1(z,u,v)| \le 1 - \vartheta$$

Daraus und aus (2.17) folgt

$$\phi_1(z,u,v) = \mathcal{O}\left(\left|\exp\left(-C\left(\sqrt{1-\frac{u}{\tilde f(z)}} + \sqrt{1-\frac{v}{\tilde f(z)}}\right)\right)\right|\right)$$

und daher bleibt nach der Substitution $\bar u = \frac{u}{\tilde f(z)}$, $\bar v = \frac{v}{\tilde f(z)}$ nur mehr das Integral

$$\int \frac{|\tilde f(z)|^{-l-m}}{|z^{n+1}|} \iint \frac{\left|\exp\left(-C\left(\sqrt{1-\bar u} + \sqrt{1-\bar v}\right)\right)\right|^k |d\bar u\, d\bar v\, dz|}{|\bar u^{m+1} \bar v^{l+1}|} \tag{2.53}$$

abzuschätzen. Aus Lemma 2.7 folgt, daß das innere Doppelintegral eine obere Schranke der Form

$$\frac{C_7}{ml} \exp\left(-C_8\left(\frac{k}{\sqrt{m}} + \frac{k}{\sqrt{l}}\right)\right).$$

besitzt. Für das äußere Integral benötigen wir Informationen über $\tilde f$: Analog zur Herleitung von (2.29) erhält man $\tilde f'(1) = -\frac{\varphi(\tau)}{z_0\varphi_0}$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tilde f(z)} &= \frac{1}{\tilde f(z_0)} - \frac{\tilde f'(z_0)}{\tilde f(z_0)^2}(z - z_0) + \mathcal{O}\left((z-z_0)^2\right) \\
&= 1 + \frac{\varphi(\tau)}{z_0\varphi_0}(z - z_0) + \mathcal{O}\left((z-z_0)^2\right) \\
&= 1 + \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}\frac{e^{it}}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Andererseits haben wir $\frac{z}{z_0} = 1 + \frac{e^{it}}{n}$. Daher liefert das Integral über Γ_{z1} den Faktor $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n} z_0^n\right)$, falls $l + m \le \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)} n$, und wir haben

$$\int_{\Gamma_{z1}} \frac{|\tilde f(z)|^{-l-m}}{|z^{n+1}|}\, |dz| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n} z_0^n\right).$$

Sei nun $z \in \Gamma_{z2} \cup \Gamma_{z3}$, d.h. $z = z_0\left(1 + \frac{t}{n} e^{i\alpha}\right)$. Dann gilt

$$\frac{1}{\tilde f(z)} = 1 + \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}\frac{te^{i\alpha}}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\log^4 n}{n^2}\right)$$

und daher

$$\begin{aligned}
\tilde f(z)^{-m-l}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} &\sim \left(1 + \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}\frac{te^{i\alpha}}{n}\right)^{(\lambda+\mu)n}\left(1 + \frac{t}{n}e^{i\alpha}\right)^{-n} \\
&\sim \exp\left(\left(\frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}(\lambda+\mu) - 1\right) te^{i\alpha}\right).
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Für $\frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}(\lambda+\mu) \le 1-\eta$ mit $\eta > 0$ ergibt das

$$\left|\tilde{f}(z)\right|^{-m-l} \left|\frac{z}{z_0}\right|^{-n} = \mathcal{O}\left(\exp\left(-\eta t \cos\alpha\right)\right)$$

und daher

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma_{z2}\cup\Gamma_{z3}} \frac{|\tilde{f}(z)|^{-l-m}}{|z^{n+1}|}\,|dz| &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\eta t\cos\alpha\right)\,dt\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}z_0^n\right).\end{aligned}$$

Der letzte Fall ist $z \in \Gamma_{z4}$. Zunächst sei (z,u,v) in einer hinreichend kleinen δ-Umgebung U_δ der Singularität, sodaß die lokale Darstellung (2.17) noch gültig ist. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z) &= \tilde{f}(1) + \tilde{f}'(1)(z-z_0) + \mathcal{O}\left((z-z_0)^2\right) \\ &\sim 1 - \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}\left(\frac{z}{z_0}-1\right)\end{aligned} \tag{2.55}$$

Auf jenem Stück von Γ_{z4}, das in U_δ liegt, gilt $\frac{z}{z_0} = ae^{it/n}$ mit $a = \left|1+\frac{\log^2 n}{n}e^{i\alpha}\right|$ und $|t| \le \delta n$. Daraus folgt

$$\frac{z}{z_0} - 1 = a - 1 + \frac{iat}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{t^2}{n^2}\right)$$

und nach Einsetzen in (2.55) erhält man

$$|\tilde{f}(z)| \ge 1 - \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}\frac{\log^2 n}{n} + \frac{t}{n}$$

Für $\frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}(\lambda+\mu) \le 1-\eta$ gilt daher

$$\begin{aligned}|\tilde{f}(z)|^{-m-l}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} &\le |\tilde{f}(z)|^{-\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}n+\eta n}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} \\ &\le \exp\left(-\eta\frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}\log^2 n - \left(\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}-\eta\right)t\right)\end{aligned} \tag{2.56}$$

Das impliziert

$$\int\limits_{\Gamma_{z4}\cap U_\delta} \frac{|\tilde{f}(z)|^{-l-m}}{|z^{n+1}|}\,|dz| = \mathcal{O}\left(e^{-\log^2 n}\right).$$

Falls (z,u,v) außerhalb jener δ-Umgebung ist, in der $y(z,u)$ durch (2.17) dargestellt werden kann, so gilt

$$|\phi_1(z,u,v)| \le 1-\vartheta = e^{-C_9} \quad \text{mit } C_9 \ge C_9'\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

mit einem $\theta > 0$. Daher ist dieser Teil des Integrals im Vergleich zum Gesamtintegral vernachlässigbar klein.

Zusammenfassend haben wir: Falls $\lambda + \mu \leq \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)} - \eta$, d.h. $\hat{X}_n(t)$ nicht in der Nähe von $t = \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}$ betrachtet wird, dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left|[z^n u^m v^l](S_1 - S_3)\right| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Gamma_z}\int_{\Gamma_u}\int_{\Gamma_v} \left| \frac{\phi_1(z,u,v)^k z^{-n-1} u^{-m-1} v^{-l-1}\, dv\, du\, dz}{(1-\phi_1(z,u,v))(1-\phi_1(z,u,v)\phi_1(z,v,1))(1-\phi_1(z,u,1))} \right| \\
&\leq C \frac{z_0^n n^{3/2}}{nml} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)^{-1} \exp\left(-D \left(\frac{k}{\sqrt{m}} + \frac{k}{\sqrt{l}} \right) \right) \\
&\leq C \frac{z_0^n n^{-3/2}}{\varepsilon^4} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\mu}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 \exp\left(-D \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\mu}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.57}$$

mit $C, D > 0$. Zusammen mit (2.21) und $x^2 e^{-x} \leq \frac{c}{x^k}$, c hinreichend groß und $k > 0$, ergibt das für $0 < s, t < \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)} - \eta$ die Straffheitsbedingung

$$\begin{aligned}
P[|\hat{X}_n(s) - \hat{X}_n(t)| \geq \varepsilon] &\leq C \frac{1}{\varepsilon^6} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{|s-t|}} \right)^2 \exp\left(-D \frac{\varepsilon}{\sqrt{|s-t|}} \right) \\
&\leq \frac{C'}{\varepsilon^{12}} |s-t|^{3/2}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Der Prozeß $\hat{X}_n(t)$ in der Nähe von $t = \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}$

Im letzten Abschnitt war die Forderung $\lambda + \mu \leq \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)} - \eta$ notwendig, um für (2.54) und (2.56) die Größenordnungsabschätzung $\mathcal{O}\left(z_0^n \frac{1}{n}\right)$ zu garantieren. Im Fall $\lambda + \mu \geq \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)} - \eta$ genügt es daher, (2.54) und (2.56) zu untersuchen. Integriert man die beiden rechten Seiten nach t, so erhält man analog zur Herleitung von (2.57) die Abschätzung

$$\left|[z^n u^m v^l](S_1 - S_3)\right| \leq C \frac{z_0^n n^{3/2}}{\left(n - \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}(m+l)\right) ml} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)^{-1} \exp\left(-D \left(\frac{k}{\sqrt{m}} + \frac{k}{\sqrt{l}} \right) \right).$$

Falls $n - \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}(m+l) \geq \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0} l$, so folgt daraus die Straffheitsbedingung (2.58).

Sei nun $n - \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0}(m+l) \leq \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0} l$. Dann gilt

$$P\left[|\hat{X}_n(\mu) - \hat{X}_n(\mu_2)| \geq \varepsilon\right] \leq P\left[\hat{X}_n(\mu) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right] + P\left[\hat{X}_n(\mu_2) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right] \tag{2.59}$$

Falls

$$P\left[\hat{X}_n\left(\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)} - \delta\right) \geq \varepsilon\right] \leq \frac{C}{\varepsilon^\gamma} \delta^\alpha \tag{2.60}$$

mit $\gamma \geq \alpha > 1$, so folgt wegen

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)} - \mu - \lambda &\leq \lambda \quad \text{und} \\
\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)} - \mu &\leq 2(\lambda).
\end{aligned}$$

aus (2.59) die Straffheitsbedingung. Für $k = \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor$ gilt

$$\begin{aligned} P\left[\hat{X}_n\left(\frac{m}{n}\right) \geq \varepsilon\right] &= \frac{1}{a_n}[z^n u^m] \sum_{j \geq k} A_j(z,u) \\ &= \frac{\varphi_0}{a_n}[z^{n-1}u^{m-1}] \frac{\phi_1(z,u,1)^k}{1-\phi_1(z,u,1)} \end{aligned}$$

Um diesen Term abzuschätzen, verwenden wir die gleiche Integrationskurve wie im letzten Abschnitt und lokal die Substitution $\frac{u}{f(z)} = \bar{u}$. Dann erfüllt der Nenner wiederum

$$C\left(\sqrt{1-\frac{1}{f(z)}} + \sqrt{1-\bar{u}}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)$$

Weiters gilt

$$\int \left| e^{-k\sqrt{1-\bar{u}}} u^{-m} \right| |du| \leq C\frac{1}{m} \exp\left(-D\frac{k}{\sqrt{m}}\right) \tag{2.61}$$

und

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^n \sim \left(\frac{1}{f(z)}\right)^{n\varphi_0/\varphi(\tau)}.$$

Nach der Substitution $x = \frac{1}{f(z)}$ erhält man ein Integral der gleichen Bauart wie (2.61), und das führt schließlich zur Straffheitsbedingung

$$\begin{aligned} &\iint \left| e^{-k\sqrt{1-\bar{u}}} u^{-m} \right| \left| e^{-k\sqrt{1-x}} x^{-\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}n+m} \right| |du\, dx| \\ &\leq \frac{Ck^4 n^{-3/2}}{\varepsilon^4\left(\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}n - m\right)m} \exp\left(-D\left(\frac{k}{\sqrt{m}} + \frac{k}{\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}n - m}}\right)\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich

Satz 2.6 *Der Konturprozeß $\hat{X}_n(t)$ konvergiert schwach gegen die Brownsche Exkursion, d.h. für $t \in [0,1]$ gilt*

$$\hat{X}_n\left(\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}t\right) \xrightarrow{w} \frac{2}{\sigma}W^+(t)$$

2.2.4 Die Analogie zum Traversierungsprozeß

Beim Konturprozeß haben wir die Blätter der betrachteten Bäume markiert und so die erzeugende Funktion $y(z,u)$ erhalten. Zur Bestimmung der analogen erzeugenden Funktion für den Traversierungsprozeß muß daher wieder jeder Stützstelle des Pfades eine Markierung im entsprechenden Baum zugeordnet sein. Da beim Traversieren eines Baumes jeder Knoten genau zweimal passiert wird, erhalten wir auf diese Weise anstelle von $y(z,u)$ die erzeugende Funktion

$$\tilde{y}(z,u) = a(zu^2).$$

Aus (2.16) erhalten wir unmittelbar die lokale Darstellung

$$a(zu^2) \sim \tau - \sqrt{\frac{2\varphi(\tau)}{\varphi''(\tau)}}\sqrt{-\frac{t}{n} - \frac{2s}{m}} \tag{2.62}$$

für $z = z_0\left(1+\frac{t}{n}\right)$, $u = 1+\frac{s}{m}$ und $n, m \to \infty$ mit $m \sim cn, c > 0$. Betrachten wir nun die Menge aller Bäume, für die nach m Traversierungsschritten das Niveau 0 erreicht ist. Klarerweise muß dann $m = 0$ oder $m = 2n$ gelten. Daher gilt für die $A_k(z,u)$ (siehe (2.18)) entsprechende Funktion $\tilde{A}_k(z,u)$ die Beziehung

$$A_0(z,u) = z(a(z) + a(zu^2)).$$

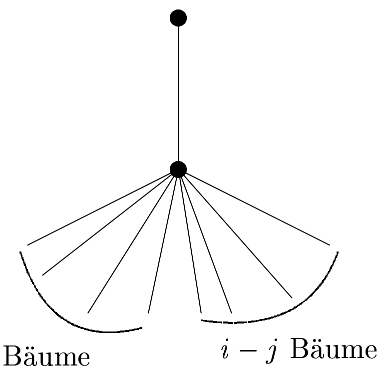


Abbildung 2.4

Da der Traversierungsprozeß nicht auf dem Baum T, sondern auf $T' = \{\circ\} \times T$ operiert, kann man eine zu (2.20) analoge Rekursion erst ab $k = 1$ anwenden, d.h. wir benötigen noch $\tilde{A}_1(z,u)$ zur vollständigen Beschreibung von $\tilde{A}_k(z,u)$. Dazu sei der Grad des Knotens auf Niveau 1 gleich $i+1$ (siehe Abb. 2.4). Offensichtlich erreicht der Pfad genau dann das Niveau 1, wenn j Bäume bereits traversiert wurden, während der $j+1$-te noch zur Gänze traversiert werden muß. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1(z,u) &= uz\sum_{i\ge 0}\varphi_i\sum_{j=0}^{i}\tilde{y}(z,u)^j\tilde{y}(z,u)^{i-j}\\ &= uz\frac{\tilde{y}(z,u)\varphi(\tilde{y}(z,u)) - \tilde{y}(z,1)\varphi(\tilde{y}(z,1))}{\tilde{y}(z,u)-\tilde{y}(z,1)}\end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Lemma 2.2 erhält man die folgende Rekursion:

$$\tilde{A}_{k+1}(z,u) = uz\tilde{A}_k(z,u)\tilde{\phi}_1(z,u,1)$$

mit

$$\tilde{\phi}_1(z,u,v) = uvz\frac{\varphi(\tilde{y}(z,u)) - \varphi(\tilde{y}(z,v))}{\tilde{y}(z,u)-\tilde{y}(z,v)}.$$

Somit haben wir

$$\tilde{A}_k(z,u) = (uz)^{k-1}\tilde{\phi}_1(z,u,1)^{k-1}\tilde{A}_1(z,u).$$

Wegen (2.62) und der Gestalt von $\tilde{\phi}_1(z,u,v)$ gelten die zu den in Lemma 2.3 und 2.4 analogen lokalen Darstellungen (der Faktor $\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}$ ist lediglich durch 2 zu ersetzen). Ferner läßt sich $\tilde{\phi}_2$ analog zu ϕ_2 definieren und wir erhalten für $\tilde{B}_{k_1w_1\cdots k_{p-1}w_{p-1}k_p}$ die Darstellung (2.32) (wiederum 2 anstelle von $\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}$). Das impliziert die Gültigkeit des Vertauschungslemmas 2.5 und somit erhalten wir das Analogon zu (2.35) als Verteilung von $(K_1, W_1, \ldots, K_{p-1}, W_{p-1}, K_p)$. Aufgrund der Ähnlichkeit der in diesem Abschnitt vorkommenden erzeugenden Funktionen mit denen aus dem letzten Abschnitt kann auch die Straffheit in völlig analoger Weise bewiesen werden. Deshalb erhalten wir schließlich:

Satz 2.7 *Der in (2.2) definierte Traversierungsprozeß $X_n(t)$ genügt dem folgenden Grenzwertsatz:*

$$X_n(t) \xrightarrow{w} \frac{2}{\sigma} W^+(t)$$

2.3 Die Anzahl der Knoten im Abstand $\kappa\sqrt{n}$ zur Wurzel

2.3.1 Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen

Sei F_{mn}^k die Menge der Bäume mit n Knoten, von denen genau m in Höhe k liegen. Das Gewicht dieser Bäume sei

$$a_{mn}^{(k)} = \sum_{T \in F_{mn}^k} \omega(T).$$

Die erzeugende Funktion dieser Baumfamilie ist daher $y_k(z, ua(z))$, wobei

$$\begin{aligned} y_0(z,u) &= u \\ y_{i+1}(z,u) &= z\varphi(y_i(z,u)), \quad i \geq 0. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum Konturprozeß ist es in diesem Fall günstiger, mit charakteristischen Funktionen zu arbeiten. Die charakteristische Funktion der Zufallsvariable $\frac{1}{\sqrt{n}}L(k)$ ist

$$\phi_{kn}(t) = \frac{1}{a_n}[z^n] y_k\left(z, e^{it/\sqrt{n}} a(z)\right). \tag{2.63}$$

Zur Bestimmung dieses Koeffizienten benötigt man wieder das lokale Verhalten der Funktion in der Nähe ihrer Singularitäten:

Lemma 2.8 ([11]) *Sei $z = z_0\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ und $\alpha = z\varphi'(a(z))$. Weiters gelte $|u - a(z)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ und $\frac{x}{n} \to 0$, sodaß $|\arg(-x)| < \pi$ und*

$$\left|1 - \sqrt{\frac{-x}{n}}\right| \leq 1 + \frac{C}{\sqrt{n}}. \tag{2.64}$$

Dann besitzt $y_k(z,u)$ die lokale Darstellung

$$y_k(z,u) = a(z) + \frac{(u-a(z))\alpha^k}{\frac{\sqrt{-x/n} + \sigma(\tau - u)/\tau\sqrt{2}}{2\sqrt{-x/n}} + \frac{\sqrt{-x/n} - \sigma(\tau-u)/\tau\sqrt{2}}{2\sqrt{-x/n}}\alpha^k + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{|x|}{n}}\right)}, \tag{2.65}$$

gleichmäßig für $k = \mathcal{O}\left(\sqrt{n}\right)$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 - z_0\sqrt{2\varphi(\tau)\varphi''(\tau)}\sqrt{-\frac{x}{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{|x|}{n}\right)\\ &= 1 - \sigma\sqrt{2}\sqrt{-\frac{x}{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{|x|}{n}\right).\end{aligned}$$

Die Bedingung (2.64) stellt sicher, daß $|\alpha| \le 1 + \frac{C_1}{\sqrt{n}}$. Sei $y_k(z,u) = a(z) + w_k$. Dann ist $w_0 = u - a(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, d.h. $|w_0| \le \frac{C_2}{\sqrt{n}}$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}y_{k+1}(z,u) &= z\varphi(y_k(z,u)) = z\varphi(a(z) + w_k)\\ &= a(z) + z\varphi'(a(z))w_k + \mathcal{O}\left(w_k^2\right)\\ &= a(z) + \alpha w_k + \mathcal{O}\left(w_k^2\right) \qquad (2.66)\end{aligned}$$

und $k \le C_3\sqrt{n}$. Wir werden nun zeigen, daß $w_k = \mathcal{O}\left(|w_0||\alpha|^k\right)$. Dazu beweisen wir zunächst $|w_k| \le |w_0|\left(1 + \frac{C_4}{\sqrt{n}}\right)^k$. Aus (2.66) folgt

$$\begin{aligned}|w_1| &\le |w_0|(|\alpha| + C_5|w_0|)\\ &\le |w_0|\left(1 + \frac{C_1 + C_2C_5}{\sqrt{n}}\right)\\ &\le |w_0|\left(1 + \frac{C_4}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}|w_{k+1}| &\le |w_k|(|\alpha| + C_5|w_k|)\\ &\le |w_0|\left(1 + \frac{C_4}{\sqrt{n}}\right)^k\left(1 + \frac{C_1}{\sqrt{n}} + \frac{C_2C_5}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{C_4}{\sqrt{n}}\right)^k\right)\\ &\le |w_0|\left(1 + \frac{C_4}{\sqrt{n}}\right)^k\left(1 + \left(C_1 + C_2C_5e^{C_3C_4}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\ &\le |w_0|\left(1 + \frac{C_4}{\sqrt{n}}\right)^{k+1}.\end{aligned}$$

Damit haben wir nun $|w_k| \le C_6|w_0|$ und unter der Voraussetzung $\alpha \ge \frac{1}{2}$ folgt

$$\begin{aligned}|w_{k+1}| &\le |\alpha||w_k|\left(1 + \frac{|w_k|}{|\alpha|}\right)\\ &\le |\alpha||w_k|\left(1 + \frac{C_2C_6}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

Somit erhalten wir eine erste Abschätzung für w_k, nämlich $w_k = \mathcal{O}\left(|\alpha|^k|w_0|\right)$. Eine Verbesserung der Asymptotik von w_k erreicht man mittels Übergehen zur reziproken Folge und „Bootstrapping“ (siehe [5]): Es gilt

$$w_{k+1} = \alpha w_k + \beta w_k^2 + \mathcal{O}\left(|w_k|^3\right)$$

mit $\beta\frac{z\varphi''(a(z))}{2}$. Sei $q_k = \frac{\alpha^k}{w_k}$, dann folgt daraus

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w_{k+1}} &= \frac{1}{\alpha w_k}\frac{1}{1+\beta w_k/\alpha + \mathcal{O}\left(|w_k|^2\right)} \\
&= \frac{1}{\alpha w_k} - \frac{\beta}{\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{|w_k|}{|\alpha|}\right) \\
q_{k+1} &= q_k - \beta\alpha^{k-1} + \mathcal{O}\left(|w_k||\alpha|^k\right)
\end{aligned}$$

und daher

$$q_k = \frac{1}{w_0} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} + \mathcal{O}\left(|w_0|\left|\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2}\right|\right).$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned}
w_0 &= u - a(z) = u - \tau + \frac{\tau\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{-\frac{x}{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{|x|}{n}\right) \\
\beta &= \frac{z_0\varphi''(\tau)}{2}\left(1+\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{|x|}{n}}\right)\right) = \frac{\sigma^2}{2\tau}\left(1+\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{|x|}{n}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Das liefert

$$-\frac{w_0\beta}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{\sigma^2}{2\tau}\frac{\tau - u - \frac{\tau\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{-x/n}}{\sigma\sqrt{-2x/n}} + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{|x|}{n}}\right)$$

und daraus folgt schließlich (2.65). ■

Mit Hilfe dieses Resultats werden wir jetzt den Grenzwert von (2.63) und die charakteristische Funktion $\phi_{\lambda\kappa}(s,t)$ der zweidimensionalen Grenzverteilung von $(X,Y) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}L(l), \frac{1}{\sqrt{n}}L(l+k)\right)$ berechnen. (X,Y) besitzt die charakteristische Funktion

$$\begin{aligned}
\phi_{lmn}(s,t) &= \frac{1}{a_n}[z^n]y_l\left(z, e^{is/\sqrt{n}}y_k\left(z, e^{it/\sqrt{n}}a(z)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i a_n}\int_\Gamma y_l\left(z, e^{is/\sqrt{n}}y_k\left(z, e^{it/\sqrt{n}}a(z)\right)\right)\frac{dz}{z^{n+1}} \\
&\sim \frac{\sigma\sqrt{n}}{i\tau\sqrt{2\pi}}\int_\Gamma y_l\left(z, e^{is/\sqrt{n}}y_k\left(z, e^{it/\sqrt{n}}a(z)\right)\right)\frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^{n+1}},
\end{aligned}$$

wobei $m = l+k$, $z = z_0\left(1+\frac{x}{n}\right)$ und Γ der aus einer Hankelkurve γ' und einem Kreisbogen Γ' bestehende Integrationsweg (siehe (2.39)). Sei α wie in Lemma 2.8 und weiters $u = e^{is/\sqrt{n}}$ und $v = e^{it/\sqrt{n}}$. Dann sind auf γ' offensichtlich die Voraussetzungen von Lemma 2.8 erfüllt (Die Bedingung (2.64) verifiziert man analog zur Abschätzung der Restintegrale im letzten Abschnitt) und daher gilt

$$y_l(z, uy_k(z, va(z))) = a(z) + R(u,v,z)$$

mit

$$R(u,v,z) = \frac{(uy_k - a(z))\alpha^l}{\frac{\sqrt{-\bar{x}} + \frac{\sigma}{\tau\sqrt{2}}(\tau - uy_k)}{2\sqrt{-\bar{x}}} - \frac{\sqrt{-\bar{x}} - \frac{\sigma}{\tau\sqrt{2}}(\tau - uy_k)}{2\sqrt{-\bar{x}}}\alpha^l + \mathcal{O}\left(\sqrt{|\bar{x}|}\right)},$$

wobei $\bar{x} = \frac{x}{n}$, und

$$y_k = y_k(z, va(z)) = a(z) + R_k(v, z)$$

wobei $R_k = R_k(v, z)$ analog zu $R(u, v, z)$ definiert ist. Eine elementare Umformung ergibt

$$R(u, v, z) = \frac{(a(z)(u-1) + uR_k)\alpha^l}{\frac{1}{2}\left(1 + \alpha^l + \frac{\sigma}{\tau\sqrt{-2\bar{x}}}(\tau - ua(z) - uR_k)(1-\alpha^l)\right) + \mathcal{O}\left(\sqrt{|\bar{x}|}\right)}$$

Seien s und t fest. Dann gelten für $l = \lambda\sqrt{n}$ und $n \to \infty$ die folgenden asymptotischen Entwicklungen:

$$\begin{aligned}
a(z)(u-1) &= \frac{is\tau}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{|x|}{n}}\right) \\
\alpha^l &= \exp\left(-2\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{-x}\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{|x|}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
\tau - ua(z) &= \tau(1-u) + \frac{u\tau\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{-\frac{x}{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{|x|}{n}\right) \\
&= -\frac{is\tau}{\sqrt{n}} + \frac{\tau\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{-\frac{x}{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{|x|}{n}\right)
\end{aligned}$$

Damit haben wir

$$R(u, v, z) \sim \frac{\tau}{\sqrt{n}} \frac{\exp\left(-\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{-x}\right)\left(is\tau + \frac{\sqrt{n}}{\tau}R_k\right)}{\sqrt{-x}\exp\left(\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{-x}\right) - \left(is\tau + \frac{\sqrt{n}}{\tau}R_k\right)\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sinh\left(\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{-x}\right)}. \tag{2.67}$$

In analoger Weise kann man zeigen, daß

$$R_k \sim \frac{\tau}{\sqrt{n}} \frac{it\sqrt{-x}\exp\left(-(\mu-\lambda)\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}\exp\left((\mu-\lambda)\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{-x}\right) - it\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sinh\left((\mu-\lambda)\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{-x}\right)}, \tag{2.68}$$

wobei $m = \mu\sqrt{n}$. Damit kann nun die gesuchte charakteristische Funktion hergeleitet werden:

Satz 2.8 *Sei $\phi_{\lambda\mu}(s,t) = \lim_{n\to\infty} \phi_{lmn}(s,t)$ die charakteristische Funktion der Grenzverteilung von $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}L(l), \frac{1}{\sqrt{n}}L(m)\right)$. Dann gilt*

$$\phi_{\lambda\mu}(s,t) = 1 + \frac{\sigma}{i\sqrt{2\pi}} \times$$

$$\int_\gamma \frac{\sqrt{-x}e^{-x-\lambda\sigma\sqrt{-x/2}}\left(is + \frac{it\sqrt{-x}e^{-(\mu-\lambda)\sigma\sqrt{-x/2}}}{\sqrt{-x}e^{(\mu-\lambda)\sigma\sqrt{-x/2}} - it\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sinh\left((\mu-\lambda)\sigma\sqrt{-\frac{x}{2}}\right)}\right)dx}{\sqrt{-x}e^{\lambda\sigma\sqrt{-x/2}} - \left(is + \frac{it\sqrt{-x}e^{-(\mu-\lambda)\sigma\sqrt{-x/2}}}{\sqrt{-x}e^{(\mu-\lambda)\sigma\sqrt{-x/2}} - it\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sinh\left((\mu-\lambda)\sigma\sqrt{-\frac{x}{2}}\right)}\right)\sinh\left(\lambda\sigma\sqrt{-\frac{x}{2}}\right)}, \tag{2.69}$$

wobei γ die Hankelkurve γ', verlängert bis ins Unendliche ist.

Beweis: Die Darstellung (2.69) läßt sich direkt aus (2.67) und (2.68) ablesen. Es bleibt noch zu zeigen, daß das Ersetzen von Γ' durch $\gamma \setminus \gamma'$ erlaubt ist. Da für $x = y \pm i$, $y > \log^2 n$, der Faktor e^{-x} das Integral dominiert, bewirkt das Verlängern von γ' nur einen exponentiell kleinen Fehler und ist somit vernachlässigbar.

Auf Γ' ist die Entwicklung

$$R(u,v,z) = a(z)\alpha^l \left(u - 1 + \alpha^k(v-1)u + \mathcal{O}\left((v-1)^2\right)\right) + \mathcal{O}\left(\left(u - 1 + \alpha^k(v-1)\right)^2\right)$$

immer noch gültig, da u und v nach wie vor nahe bei 1 sind. Daher haben wir

$$|R(u,v,z)| = \mathcal{O}\left(\max_{z\in\gamma'} |R(u,v,z)|\right)$$

und wegen $|z| \sim 1 + \frac{\log^2 n}{n}$ folgt die Abschätzung

$$\int_{\Gamma'} R(u,v,z)\frac{dz}{z^{n+1}} = \mathcal{O}\left(e^{-\log^2 n}\right).$$

Daraus folgt schließlich (2.69). ■

Folgerung *Sei* $l_i = \lambda_i\sqrt{n}, i = 1,\ldots,k$ *mit* $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k$. *Dann besitzt die Grenzverteilung von* $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}L(l_1),\ldots,\frac{1}{\sqrt{n}}L(l_k)\right)$ *für* $n \to \infty$ *die charakteristische Funktion*

$$\phi_{\lambda_1\ldots\lambda_k}(t_1,\ldots,t_k) = 1 + \frac{\sigma}{i\sqrt{2\pi}}\int_\gamma f_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}(x,t_1,\ldots,t_k)e^{-x}\,dx, \tag{2.70}$$

wobei

$$f_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}(x,t_1,\ldots,t_k) = \Psi_{\lambda_1}(x,t_1,\Psi_{\lambda_2-\lambda_1}(\ldots\Psi_{\lambda_{k-1}-\lambda_{k-2}}(x,t_{k-1},\Psi_{\lambda_k-\lambda_{k-1}}(x,t_k,0))\cdots)$$

mit

$$\Psi_\lambda(x,t,y) = \frac{\sqrt{-x}e^{-\lambda\sigma\sqrt{-x/2}}(it+y)}{\sqrt{-x}e^{\lambda\sigma\sqrt{-x/2}} - (it+y)\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sinh\left(\lambda\sigma\sqrt{-\frac{x}{2}}\right)}.$$

Beweis: (2.70) folgt direkt aus der Bauart von (2.69). ■

Für $k = 1$ und $k = 2$ stimmt (2.70) mit den entsprechenden charakteristischen Funktionen der lokalen Zeit überein (siehe [7]). Es ist daher zu erwarten, daß auch die höherdimensionalen Grenzverteilungen mit jenen der lokalen Zeit übereinstimmen. Um das zu zeigen, müssen wir einen Umweg über die Belegungszeiten gehen. Aus der Konvergenz des Traversierungsprozesses gegen die Brownsche Exkursion folgt die Konvergenz der Belegungszeit gegen jene der Brownschen Exkursion (siehe (2.3)). Das bedeutet, daß die charakteristische Funktion der Belegungszeit der Brownschen Exkursion aus der erzeugenden Funktion $y_k(z,u)$ berechnet werden kann. Sei $\Phi_{\lambda_1\cdots\lambda_p\kappa}(t_1,\ldots,t_p)$ die charakteristische Funktion der Belegungszeit der Menge $[\lambda_1,\lambda_1+\kappa]\cup\ldots\cup[\lambda_k,\lambda_k+\kappa]$. Dann gelten für $k = \kappa\sqrt{n}$ und $l_j = \lambda_j\sqrt{n}$ die beiden folgenden Beziehungen

$$\Phi_{\lambda_1\cdots\lambda_p\kappa}(t_1,\ldots,t_p) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}[z^n]\,y_{l_1}(z,y_k(u_1z,u_1y_{l_2}(\ldots,u_{p-1}y_{l_p}(z,y_k(u_pz,u_pa(z)))\cdots)$$

mit $u_j = e^{it_j/n}$ und

$$\phi_{\lambda_1\cdots\lambda_p}(t_1,\ldots,t_p) = \lim_{\kappa\to 0} \Phi_{\lambda_1\cdots\lambda_p\kappa}\left(\frac{t_1}{\kappa},\ldots,\frac{t_p}{\kappa}\right).$$

Für die konkrete Berechnung genügt es, den Spezialfall $\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$ zu betrachten. In diesem Fall hat die erzeugende Funktion eine explizite und damit wesentlich einfachere Form: Es gilt

$$y_k - y_k y_{k-1} - x = 0.$$

Die Substitution $y_k = \frac{A_k}{A_{k+1}}$ liefert die lineare Rekursion

$$-xA_{k+1} + A_k - A_{k-1} = 0$$

und daraus folgt

$$y_k(z,u) = z\frac{d_k(z) - ud_{k-1}(z)}{d_{k+1}(z) - ud_k(z)},$$

wobei

$$d_k(z) = \left(\frac{1+\sqrt{1-4z}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}\right)^k. \tag{2.71}$$

Zunächst wenden wir dies auf den Fall $p = 1$ an. Zur Vereinfachung der Notation führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{1-4z}, & \tilde{w} &= \sqrt{1-4uz}, \\ a &= \frac{1+w}{2}, & \tilde{a} &= \frac{1+\tilde{w}}{2}, \\ b &= \frac{1-w}{2}, & \tilde{b} &= \frac{1-\tilde{w}}{2}, \\ c &= \frac{b}{a}, & \tilde{c} &= \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Dann betrachten wir die Funktion $y_l(z, y_k(uz, ua(z)))$. Mit der obigen Bezeichnungsweise gilt offensichtlich $a(z) = b$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} uy_k(uz, ua(z)) &= uz\frac{d_k(uz) - ubd_{k-1}(uz)}{d_{k+1}(uz) - ubd_k(uz)} \\ &= \frac{uz}{\tilde{a}}\frac{\tilde{a}\left(1-\tilde{c}^k\right) - ub\left(1-\tilde{c}^{k-1}\right)}{\tilde{a}\left(1-\tilde{c}^{k+1}\right) - ub\left(1-\tilde{c}^k\right)} = \frac{uz}{\tilde{a}}B \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y_l(z, y_k) &= z\frac{d_l(z) - \frac{uz}{\tilde{a}}Bd_{l-1}(z)}{d_{l+1}(z) - \frac{uz}{\tilde{a}}Bd_l(z)} \\ &= \frac{z}{a}\frac{\tilde{a}\left(1-c^l\right) - ub\left(1-c^{l-1}\right)B}{\tilde{a}\left(1-c^{l+1}\right) - ub\left(1-c^l\right)B} \\ &= b\left(1 - \frac{c^{l-1}(1-c)\left(\tilde{a}c - ubB\right)}{\tilde{a} - ubB - c^l\left(\tilde{a}c - ubB\right)}\right) = b(1-R) \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$B = 1 - \bar{R} = 1 - \frac{\tilde{c}^{k-1}(1-\tilde{c})\left(\tilde{b} - ub\right)}{\tilde{a} - ub - \tilde{c}^k\left(\tilde{b} - ub\right)}$$
$$= 1 - \frac{\tilde{w}\tilde{b}^k\left(1 - ub/\tilde{b}\right)}{\tilde{a}^{k+1}(1 - ub/\tilde{a}) - \tilde{b}^{k+1}\left(1 - ub/\tilde{b}\right)}$$

Wir benötigen eine Asymptotik für $y_l(z, y_k(uz, ua(z)))$, wenn $z = z_0\left(1 + \frac{x}{n}\right)$, $x = o(\sqrt{n})$, und $u = e^{it/\sqrt{n}}$. Für diese Wahl von z und u gilt

$$1 - u\frac{b}{\tilde{b}} = 1 - \frac{1-w}{1-\tilde{w}} \sim \sqrt{-\frac{x}{n}} - \sqrt{\frac{-x-it}{n}}$$
$$1 - u\frac{b}{\tilde{a}} = 1 - \frac{1-w}{1+\tilde{w}} \sim \sqrt{-\frac{x}{n}} + \sqrt{\frac{-x-it}{n}}$$

und weiters

$$a^l \sim e^{\lambda\sqrt{-x}}, \qquad b^l \sim e^{\lambda\sqrt{-x}},$$
$$\tilde{a}^k \sim e^{\kappa\sqrt{-x-it}}, \quad \tilde{b}^k \sim e^{\kappa\sqrt{-x-it}}.$$

Daraus folgt

$$\bar{R} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2\sqrt{-x-it}\left(\sqrt{-x} - \sqrt{-x-it}\right)e^{-\kappa\sqrt{-x-it}}}{\left(\sqrt{-x} + \sqrt{-x-it}\right)e^{\kappa\sqrt{-x-it}} - \left(\sqrt{-x} - \sqrt{-x-it}\right)e^{-\kappa\sqrt{-x-it}}}.$$

Ferner haben wir

$$R = \frac{wb^l\left(\tilde{a}/a - u + u\bar{R}\right)}{a^{l+1}\left(\tilde{a}/a - ub/a + ub\bar{R}/a\right) - b^{l+1}\left(\tilde{a}/a - u + u\bar{R}\right)}.$$

Das läßt sich wegen

$$\frac{\tilde{a}}{a} - u = \frac{1+\tilde{w}}{1+w} - 1 \sim \sqrt{\frac{-x-it}{n}} - \sqrt{-\frac{x}{n}}$$
$$\frac{\tilde{a}}{a} - u\frac{b}{a} = \frac{1+\tilde{w}}{1+w} - \frac{1-w}{1+w} \sim \sqrt{\frac{-x-it}{n}} + \sqrt{-\frac{x}{n}}$$

umformen zu

$$R \sim \frac{2}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{-x}(\sqrt{-x-it} - \sqrt{-x} + \bar{R}\sqrt{n})e^{-\lambda\sqrt{-x}}}{(\sqrt{-x} + \sqrt{-x-it} + \bar{R}\sqrt{n})e^{\lambda\sqrt{-x}} - (\sqrt{-x} - \sqrt{-x-it} + \bar{R}\sqrt{n})e^{-\lambda\sqrt{-x}}} \tag{2.73}$$

Daraus folgt

$$\Phi_{\lambda\kappa}(t) = 1 + \frac{\sigma}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\gamma} \frac{Z(t,x)}{N(t,x)} e^{-x}\, dx,$$

wobei

$$\begin{aligned}
Z(t,x) &= \sqrt{-x}e^{-\lambda\sqrt{-x}}it\sinh\left(\kappa\sqrt{-x-it}\right)\\
N(t,x) &= \sqrt{-x(-x-it)}e^{\lambda\sqrt{-x}}\cosh\left(\kappa\sqrt{-x-it}\right) - xe^{\lambda\sqrt{-x}}\sinh\left(\kappa\sqrt{-x-it}\right)\\
&\qquad -it\sinh\left(\lambda\sqrt{-x}\right)\sinh\left(\kappa\sqrt{-x-it}\right).
\end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned}
\sinh\left(\kappa\sqrt{-x-\frac{it}{\kappa}}\right) &\sim \kappa\sqrt{-x-\frac{it}{\kappa}}, \quad \kappa\to 0\\
\cosh\left(\kappa\sqrt{-x-\frac{it}{\kappa}}\right) &\sim 1, \quad \kappa\to 0
\end{aligned}$$

erhält man schließlich

$$\lim_{\kappa\to 0}\Phi_{\lambda\kappa}\left(\frac{t}{\kappa}\right) = \phi_\lambda(t).$$

Sei nun $p=2$. Es gilt

$$y_l(z,y_k(u_1z,u_1y_m(z,y_k(u_2z,u_2a(z))))) = b(1-R_1) = b\left(1-\frac{c^{l-1}(1-c)\left(\tilde{a}c-u_1b\bar{B}\right)}{\tilde{a}-u_1b\bar{B}-c^l\left(\tilde{a}c-u_1b\bar{B}\right)}\right),$$

wobei man $\bar{B}$ aus B erhält, indem man b durch $b(1-R)$ und u durch u_1 ersetzt. $b(1-R)$ ist jener Ausdruck, der der Funktion $y_m(z,y_k(u_2z,u_2a(z)))$ entspricht, das bedeutet, daß

$$b(1-R) = b\left(1-\frac{c^{m-1}(1-c)\left(\tilde{\tilde{a}}c-u_2b\tilde{B}\right)}{\tilde{\tilde{a}}-u_2bB-c^l\left(\tilde{\tilde{a}}c-u_2b\tilde{B}\right)}\right).$$

$\tilde{B}$ unterscheidet sich dadurch von B, daß $\tilde{a},\tilde{b}$ und $\tilde{c}$ durch $\tilde{\tilde{a}},\tilde{\tilde{b}}$ und $\tilde{\tilde{c}}$ substituiert wurden. Die Größen $a,\tilde{a},\tilde{\tilde{a}},b,\ldots$ sind analog zu (2.72) definiert, wobei $\tilde{a},\tilde{b}$, etc. von u_1 und $\tilde{\tilde{a}},\tilde{\tilde{b}},\ldots$ von u_2 abhängen.

Zur Bestimmung der Asymptotik sei $z=z_0\left(1+\frac{x}{n}\right)$ $u_1=e^{is/n}$, $u_2=e^{it/n}$ und $\bar{B}=1-\hat{R}$ mit

$$\begin{aligned}
\hat{R} &= \frac{\tilde{w}\tilde{b}^k\left(1-u_1b/\tilde{b}+u_1bR/\tilde{b}\right)}{\tilde{a}^{k+1}\left(1-u_1b/\tilde{a}+u_1bR/\tilde{a}\right)-\tilde{b}^{k+1}\left(1-u_1b/\tilde{b}+u_1bR/\tilde{b}\right)}\\
&\sim \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{-x-is}\left(\sqrt{-x}-\sqrt{-x-is}+\sqrt{n}R\right)e^{-\kappa\sqrt{-x-is}}}{\left(\sqrt{-x}+\sqrt{n}R\right)\sinh\left(\kappa\sqrt{-x-is}\right)+\sqrt{-x-is}\cosh\left(\kappa\sqrt{-x-is}\right)}.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Ferner haben wir

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{wb^l\left(\tilde{a}/a-u_1+u_1\hat{R}\right)}{a^{l+1}\left(\tilde{a}/a-u_1b/a+u_1b\hat{R}/a\right)-b^{l+1}\left(\tilde{a}/a-u_1+u_1\hat{R}\right)}\\
&\sim \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{-x}\left(\sqrt{-x-is}-\sqrt{-x}+\sqrt{n}\hat{R}\right)e^{-\lambda\sqrt{-x}}}{\left(\sqrt{-x-is}+\sqrt{n}\hat{R}\right)\sinh\left(\lambda\sqrt{-x}\right)+\sqrt{-x}\cosh\left(\lambda\sqrt{-x}\right)}.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Zusammenfassen von (2.73) – (2.75) ergibt

$$\Phi_{\lambda\mu\kappa}(s,t) = 1 + \frac{\sigma}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\gamma} \frac{Z(s,t,x)}{N(s,t,x)} e^{-x}\, dx \tag{2.76}$$

mit

$$\begin{aligned} Z(x,s,t) &= \sqrt{-x}\left(\left(is+\sqrt{-x}R\right)\sinh\left(\kappa\sqrt{-x-is}\right)\right. \\ &\qquad \left. -\sqrt{-x-is}R\cosh\left(\kappa\sqrt{-x-is}\right)\right)e^{-\lambda\sqrt{-x}} \\ N(x,s,t) &= \left(\sqrt{-x-is}\left(\sqrt{-x}+R\right)\cosh\left(\kappa\sqrt{-x-is}\right)\right. \\ &\qquad \left. +\sqrt{-x-is}\sinh\left(\kappa\sqrt{-x-is}\right)\right)\sinh\left(\lambda\sqrt{-x}\right) \\ &\quad + \left(\sqrt{-x}\left(\sqrt{-x}+R\right)\sinh\left(\kappa\sqrt{-x-is}\right)\right. \\ &\qquad \left. +\sqrt{-x(-x-is)}\cosh\left(\kappa\sqrt{-x-is}\right)\right)\cosh\left(\lambda\sqrt{-x}\right). \end{aligned}$$

Ersetzt man nun s und t durch $\frac{s}{\kappa}$ und $\frac{t}{\kappa}$, so erhält man für $\kappa \to 0$ und $m = (\mu-\lambda)\sqrt{n}$ die Asymptotik

$$\frac{R}{\sqrt{-x-is/\kappa}} \sim \frac{it\sqrt{-x}e^{-(\mu-\lambda)\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x}e^{(\mu-\lambda)\sqrt{-x}} - it\sinh\left((\mu-\lambda)\sqrt{-x}\right)}. \tag{2.77}$$

Daraus folgt

$$\lim_{\kappa\to 0} \Phi_{\lambda_1\lambda_2\kappa}\left(\frac{s}{\kappa},\frac{t}{\kappa}\right) = \phi_{\lambda_1\lambda_2}(s,t). \tag{2.78}$$

Die Größen $Z(s,t,x)$ und $N(s,t,x)$ in (2.76) sowie die Asymptotik (2.77) zeigen die rekursive Struktur von $\Phi_{\lambda_1\cdots\lambda_p\kappa}(t_1,\ldots,t_p)$, woraus man (2.78) für beliebiges p beweisen kann. Damit haben wir schließlich den folgenden Satz:

Satz 2.9 *Seien $0 < t_1 < \ldots < t_k$ und $\pi_{t_1,\ldots,t_k}$ die Projektion (1.2). Dann erfüllt der in (2.1) definierte stochastische Prozeß $l_n(t)$ den folgenden Grenzwertsatz:*

$$\pi_{t_1,\ldots,t_k}(l_n(t)) \xrightarrow{d} \pi_{t_1,\ldots,t_k}\left(\frac{\sigma}{2}l\left(\frac{\sigma t}{2}\right)\right).$$

2.3.2 Die zweidimensionale Dichte der lokalen Zeit

In diesem Abschnitt leiten wir einen Ausdruck für die zweidimensionale Dichte der lokalen Zeit der Brownschen Exkursion her. Diese Dichte ist einerseits für sich interessant, andererseits werden wir die Ergebnisse dieses Abschnitts für den Straffheitsbeweis im nächsten Abschnitt benutzen. Darüberhinaus kann die hier benutzte Vorgangsweise zur Herleitung der zweidimensionalen Dichte auch auf den endlichdimensionalen Fall angewandt werden. Wir sind also in der Lage, die Dichte der endlichdimensionalen Verteilungen der lokalen Zeit im Prinzip zu berechnen.

Die zweidimensionale Dichte der lokalen Zeit der Brownschen Exkursion für die Niveaus $r = \rho\sqrt{n}$ und $r+h = (\rho+\theta)\sqrt{n}$ ist gegeben durch

$$\frac{4}{\sigma^2} f_{\frac{\sigma}{2}\rho,\frac{\sigma}{2}\theta}\left(\frac{2}{\sigma}\kappa,\frac{2}{\sigma}\lambda\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}[z^n u^k v^l]y_r(z,uy_h(z,va(z))), \tag{2.79}$$

wobei $k = \kappa\sqrt{n}$ und $l = \lambda\sqrt{n}$. Zur Berechnung der rechten Seite von (2.79) sei $y_r(z,u)$ die erzeugende Funktion der ebenen Wurzelbäume. Dieser Spezialfall hat den Vorteil, daß die Rekursion der erzeugenden Funktion $y_r(z,u)$ exakt lösbar ist. Mit $d_r = d_r(z)$ aus (2.71) gilt

$$\begin{aligned} y_r(z, uy_h(z,bv)) &= z\frac{d_r - uy_h d_{r-1}}{d_{r+1} - uy_h d_r} \\ &= z\frac{d_r - uy_h d_{r-1}}{d_{r+1}} \sum_{i\geq 0} \left(\frac{d_r}{d_{r+1}} y_h\right)^i u^i, \end{aligned}$$

wobei wir die Bezeichnungsweise (2.72) verwenden. Daraus folgt

$$\begin{aligned} [u^k]y_r(z, uy_h(z,bv)) &= z\left(\frac{d_r}{d_{r+1}}\left(\frac{d_r}{d_{r+1}}y_h\right)^k - y_h\frac{d_{r-1}}{d_r}\left(\frac{d_r}{d_{r+1}}y_h\right)^{k-1}\right) \\ &= z\left(\frac{d_r}{d_{r+1}} - \frac{d_{r-1}}{d_r}\right)\left(\frac{d_r}{d_{r+1}}y_h\right)^k. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} y_h &= z\frac{d_h - vbd_{h-1}}{d_{h+1} - vbd_h} \\ &= \frac{zd_h}{d_{h+1}}\left(1 - \frac{d_{h-1}}{d_h}bv\right)\left(1 - \frac{d_h}{d_{h+1}}bv\right)^{-1} \\ &= \frac{zd_h}{d_{h+1}}\left(1 + \left(\frac{d_h}{d_{h+1}} - \frac{d_{h-1}}{d_h}\right)\frac{bv}{1 - d_h/d_{h+1}bv}\right) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} [u^k v^l]y_r(z, uy_h(z,bv)) = [v^l]z&\left(1 - \frac{d_{r-1}d_{r+1}}{d_r^2}\right)\left(\frac{d_r}{d_{r+1}}\right)^{k+1}\left(\frac{zd_h}{d_{h+1}}\right)^k \\ &\times\left(1 + \frac{d_h}{d_{h+1}}\left(1 - \frac{d_{h-1}d_{h+1}}{d_h^2}\right)\frac{bv}{1 - bvd_h/d_{h+1}}\right)^k \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren des letzten Faktors liefert

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{d_h}{d_{h+1}}\right)^i\left(1 - \frac{d_{h-1}d_{h+1}}{d_h^2}\right)^i b^i v^i \sum_{j\geq 0}\binom{-i}{j}\left(\frac{d_h}{d_{h+1}}\right)^j b^j(-v)^j$$

und daher haben wir

$$\begin{aligned} [u^k v^l]y_r(z, uy_h(z,bv)) = z&\left(1 - \frac{d_{r-1}d_{r+1}}{d_r^2}\right)\left(\frac{d_r}{d_{r+1}}\right)^{k+1}\left(\frac{zd_h}{d_{h+1}}\right)^k\left(\frac{bd_h}{d_{h+1}}\right)^l \\ &\times\sum_{i=0}^{\min(k,l)-1}\binom{k}{i+1}\binom{l-1}{i}\left(1 - \frac{d_{h-1}d_{h+1}}{d_h^2}\right)^{i+1} \end{aligned} \qquad (2.80)$$

Um eine Darstellung der zweidimensionalen Dichte zu erhalten, muß im obigen Ausdruck der Koeffizient von z^n bestimmt werden. Dies liefert der folgende

Satz 2.10 *Sei $\kappa, \lambda, \rho, \theta > 0$. Weiters sei $k = \kappa\sqrt{n}$, $l = \lambda\sqrt{n}$, $r = \rho\sqrt{n}$ und $h = \theta\sqrt{n}$. Bezeichne $a_{nkl,rh}$ die Anzahl aller Bäume der Größe n, welche k Knoten auf dem Niveau r und l Knoten auf dem Niveau $r+h$ besitzen. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\frac{a_{nkl,rh}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}[u^k v^l z^n] y_r(z, uy_h(z, bv)) = \\
&= \frac{1}{i\sqrt{\pi}} \int_\gamma \frac{\kappa x^2}{\sinh^2(\theta\sqrt{-x}\,)\sinh^2(\rho\sqrt{-x}\,)} \exp\left(-\sqrt{-x}\left(\frac{\lambda e^{\theta\sqrt{-x}}}{\sinh(\theta\sqrt{-x}\,)}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{\kappa\sinh((\rho+\theta)\sqrt{-x})}{\sinh(\rho\sqrt{-x}\,)\sinh(\theta\sqrt{-x}\,)}\right)\right) \sum_{j\ge 0} \frac{(-\kappa\lambda x)^j}{j!(j+1)!\sinh^{2j}(\theta\sqrt{-x}\,)} e^{-x}\, dx,
\end{aligned} \tag{2.81}$$

wobei γ die Hankelkurve (1.23) ist.

Beweis: Wir benützen wie in Abschnitt 2.2.2 die Cauchysche Integralformel mit einer Hankelkurve und einem Kreisbogen als Integrationsweg (siehe (2.39)). Ferner verwenden wir die Substitution $z = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x}{n}\right)$ und weiterhin die Bezeichnungen (2.72). Wegen

$$d_h(z) = a^h - b^h$$

gilt

$$\begin{aligned}
1 - \frac{d_{h-1}d_{h+1}}{d_h^2} &= 1 - \frac{(a^{h-1}-b^{h-1})(a^{h+1}-b^{h+1})}{(a^h-b^h)^2} \\
&= \frac{a^{2h} - 2a^h b^h + b^{2h} - a^{2h} - b^{2h} + a^{h-1}b^{h-1}(a^2+b^2)}{(a^h-b^h)^2} \\
&= \frac{a^{h-1}b^{h-1}(a-b)^2}{(a^h-b^h)^2}
\end{aligned}$$

Einsetzen von

$$a^h \sim e^{\theta\sqrt{-x}} \quad \text{und} \quad b^h \sim e^{-\theta\sqrt{-x}} \tag{2.82}$$

und

$$a - b = w = \sqrt{-\frac{x}{n}} \tag{2.83}$$

ergibt

$$1 - \frac{d_{h-1}d_{h+1}}{d_h^2} \sim \frac{1}{n}\frac{-x}{\sinh^2(\theta\sqrt{-x}\,)}. \tag{2.84}$$

Ferner haben wir

$$\begin{aligned}
\frac{ad_h}{d_{h+1}} &= 1 - \frac{d_{h+1} - ad_h}{d_{h+1}} \\
&= 1 - \frac{(a-b)b^h}{a^{h+1} - b^{h+1}},
\end{aligned}$$

und in analoger Weise erhält man

$$\frac{bd_h}{d_{h+1}} = 1 - \frac{(a-b)a^h}{a^{h+1} - b^{h+1}}.$$

Unter Verwendung von (2.82) und (2.83) läßt sich dies umformen zu

$$\frac{ad_h}{d_{h+1}} \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{-x}e^{-\theta\sqrt{-x}}}{\sinh(\theta\sqrt{-x})}$$
$$\frac{bd_h}{d_{h+1}} \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{-x}e^{\theta\sqrt{-x}}}{\sinh(\theta\sqrt{-x})}$$

und daraus folgt wegen $ab = z$

$$\left(\frac{zd_h}{d_{h+1}}\right)^k \sim 2^{-k} \exp\left(-\frac{\kappa\sqrt{-x}\cosh(\theta\sqrt{-x})}{\sinh(\theta\sqrt{-x})}\right) \tag{2.85}$$
$$\left(\frac{bd_h}{d_{h+1}}\right)^l \sim \exp\left(-\frac{\lambda\sqrt{-x}e^{\theta\sqrt{-x}}}{\sinh(\theta\sqrt{-x})}\right) \tag{2.86}$$

Analog dazu zeigt man

$$\left(\frac{d_r}{d_{r+1}}\right)^{k+1} \sim 2^{k+1} \exp\left(-\frac{\kappa\sqrt{-x}\cosh(\rho\sqrt{-x})}{\sinh(\rho\sqrt{-x})}\right) \tag{2.87}$$

Zuletzt muß noch die Summe in (2.80) approximiert werden. Gelte $i = o\left(\sqrt{k}\right)$. Dann erhält man mit Hilfe der Stirlingschen Formel

$$\begin{aligned}\frac{k!}{(k-i)!} &= \frac{k^k}{(k-i)^{k-i}} e^{-i} \sqrt{\frac{k}{k-i}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k-i}\right)\right) \\ &= k^i \left(\frac{k}{k-i}\right)^{k-i} e^{-i} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{i}{k}\right)\right) \\ &= k^i e^{-i^2/2k} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{i}{k}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{i^3}{k^2}\right)\right)\end{aligned}$$

Damit bekommen wir für jedes $\varepsilon > 0$ die Asymptotik

$$\sum_{i \le n^{1/4-\varepsilon}} \binom{k}{i+1}\binom{l-1}{i}\left(1 - \frac{d_{h-1}d_{h+1}}{d_h^2}\right)^i \sim \sqrt{n} \sum_{i \le n^{1/4-\varepsilon}} \frac{\kappa^{i+1}}{(i+1)!}\frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{-x}{\sinh^2(\theta\sqrt{-x})}\right)^i \tag{2.88}$$

Den Rest der Summe schätzen wir absolut ab:

$$\left|\sum_{i \ge n^{1/4-\varepsilon}} \binom{k}{i+1}\binom{l-1}{i}\left(1 - \frac{d_{h-1}d_{h+1}}{d_h^2}\right)^i\right| \le \sqrt{n} \sum_{i \ge n^{1/4-\varepsilon}} \frac{\kappa^{i+1}}{i!}\frac{\lambda^i}{i!}\left|\frac{-x}{\sinh^2(\theta\sqrt{-x})}\right|^i \tag{2.89}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Summe der Form

$$\sum_{j \ge m} \frac{A^j}{(j!)^2}$$

mit $A > 0$. Aus der Stirlingschen Formel folgt

$$\frac{A^j}{j!} \le \left(\frac{Ae}{j}\right)^j = \exp\left(j(1 + \log A) - j\log j\right)$$

und daher

$$\left(\frac{A^{j/2}}{j!}\right)^2 \leq \exp\left(j(2+\log A) - 2j\log j\right) \tag{2.90}$$

Um damit zu einer Abschätzung der Summe zu gelangen, benötigen wir eine Aussage über die Größenordnung von

$$A = \left|\frac{\kappa\lambda z^{h-1}x}{\sinh^2\left(\theta\sqrt{-x}\right)}\right|.$$

Da $|z| \leq 1 + \frac{C\log^2 n}{n}$ und $h = \theta\sqrt{n}$, gilt $|z|^{h-1} = \mathcal{O}(1)$. κ und λ sind ebenfalls nur Konstanten. x durchläuft eine Hankelkurve und deshalb gilt $|x| \leq 2\log^2 n$. Der Term im Nenner erfüllt

$$|\sinh(r+si)|^2 = \sinh^2 r + \sin^2 s.$$

Für $-x = -c + i$, $c \leq \log^2 n$, gilt

$$|x| = \sqrt{1+c^2} \quad \text{und} \quad \arg x = \pi - \arctan\frac{1}{c}$$

und daraus folgt

$$\sqrt{-x} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+c^2}-c}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{1+c^2}+c}{2}}.$$

Für große c ist

$$\sqrt{1+c^2} - c \sim \frac{1}{2c}$$

und wegen $\sinh x \geq x$ für $x \geq 0$ erhalten wir

$$\left|\sinh^2\left(\theta\sqrt{-x}\right)\right|^{-1} = \mathcal{O}\left(\log^2 n\right)$$

und schließlich

$$A \leq C_1 \log^4 n.$$

Da in (2.90) $j \geq n^{1/4-\varepsilon}$ gilt, erfüllt der Exponent die Ungleichung

$$j(2+\log A) - 2j\log j \leq -C_2\log n$$

und daher gilt

$$\sum_{j\geq m}\frac{A^j}{(j!)^2} \leq \sum_{j\geq m}\left(\frac{1}{n^{C_2}}\right)^j = \mathcal{O}\left(e^{-C_2 m\log n}\right),$$

wobei $m = n^{1/4-\varepsilon}$. Die Summe (2.89) ist somit exponentiell klein und daher vernachlässigbar. Daher kann die approximierte Summe (2.88) durch den Reihenrest ergänzt werden. Sammelt man die Konstanten von (2.84)–(2.88) auf und berücksichtigt, daß $z \sim \frac{1}{4}$, so erhält man vor dem Integral den Faktor

$$\frac{4^{n-1}}{n^{5/2}\pi i a_n}.$$

Da

$$a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \sim \frac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi n^3}}$$

folgt daraus schließlich (2.81). ■

Um die zweidimensionale Dichte der lokalen Zeit vollständig zu bestimmen, müssen noch die diskreten Anteile berechnet werden: Für $x, y > 0$ ist $p_{xy} = P[l(\rho) = x, l(\rho+\theta) = y] = 0$. Setzen wir $x = y = 0$, so müssen wir zur Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit alle Pfade der Brownschen Exkursion, die das Niveau ρ nie erreichen, betrachten. Daher gilt offensichtlich $p_{00} > 0$. Daraus folgt, daß die Verteilungsfunktion im Ursprung eine Sprungstelle der Höhe p_{00} besitzt. Falls $x > 0$ und $y = 0$ ist, haben wir eine ähnliche Situation: Für jedes Intervall $[a, b]$ mit $b > a > 0$ gilt $P[l(\rho) \in [a, b], l(\rho+\theta) = 0] > 0$. Das bedeutet, daß die Verteilungsfunktion einen weiteren Sprung entlang der gesamten x-Achse hat. Die Höhen dieser Sprünge werden wir nun berechnen: Wir haben

$$[z^n u^k v^0] y_r(z, u y_h(z, vb)) = [z^n] z \left(1 - \frac{d_{r-1} d_{r+1}}{d_r^2}\right) \left(\frac{d_r}{d_{r+1}}\right)^{k+1} \left(\frac{z d_h}{d_{h+1}}\right)^k$$

Unter Einsatz der im Beweis des letzten Satzes hergeleiteten Asymptotiken erhalten wir

$$\begin{aligned}
&[z^n u^k v^0] y_r(z, u y_h(z, bv)) \\
&\quad \sim \frac{\sqrt{n}}{i\sqrt{\pi}} \int_\gamma \frac{-x e^{-x}}{\sinh^2(\rho\sqrt{-x})} \exp\left(-\sqrt{-x} \frac{\kappa \sinh((\rho+\theta)\sqrt{-x})}{\sinh(\rho\sqrt{-x}) \sinh(\theta\sqrt{-x})}\right) dx.
\end{aligned}$$

Durch Normierung mit $\sqrt{n}$ gewinnt man die Sprunghöhe entlang der x-Achse. In analoger Weise zeigt man

$$\begin{aligned}
[z^n u^0 v^0] y_r(z, u y_h(z, bv)) &= z \left(\frac{d_r}{d_{r+1}}\right) \\
&= \frac{n\sqrt{n}}{i\sqrt{\pi}} \int_\gamma \left(1 - \frac{\sqrt{-x}\cosh(\rho\sqrt{-x})}{\sqrt{n}\sinh(\rho\sqrt{-x})}\right) e^{-x}\, dx \\
&= -\frac{n}{i\sqrt{\pi}} \int_\gamma \frac{\sqrt{-x}\cosh(\rho\sqrt{-x})}{\sinh(\rho\sqrt{-x})} e^{-x}\, dx
\end{aligned}$$

und erhält nach Normierung mit n die Sprunghöhe im Ursprung. Für ebene Wurzelbäume ist $\sigma^2 = 2$, daher folgt aus (2.79)

Satz 2.11 *Die zweidimensionale Dichte der lokalen Zeit der Brownschen Exkursion auf den Niveaus ρ und $\rho + \theta$ ist gegeben durch*

$$\begin{aligned}
&f_{\rho,\theta}(\kappa, \lambda) \\
&= \frac{1}{i2\sqrt{2\pi}} \int_\gamma \frac{\kappa x^2}{\sinh^2\left(\theta\sqrt{-2x}\right)\sinh^2\left(\rho\sqrt{-2x}\right)} \exp\left(-\sqrt{-2x}\left(\frac{\lambda e^{\theta\sqrt{-2x}}}{\sinh\left(\theta\sqrt{-2x}\right)}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{\kappa\sinh\left((\rho+\theta)\sqrt{-2x}\right)}{\sinh\left(\rho\sqrt{-2x}\right)\sinh\left(\theta\sqrt{-2x}\right)}\right)\right) \sum_{j\ge 0} \frac{(-\kappa\lambda x)^j}{j!(j+1)!2^j \sinh^{2j}\left(\theta\sqrt{-2x}\right)} e^{-x}\, dx,
\end{aligned}$$

für $\kappa > 0$ und $\lambda \ge 0$. Entlang der Geraden $\kappa = 0$ besitzt die Verteilungsfunktion eine Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$\frac{1}{2i\sqrt{\pi}} \int_\gamma \frac{-x e^{-x}}{\sinh^2\left(\rho\sqrt{-2x}\right)} \exp\left(-\sqrt{\frac{-x}{2}} \frac{\kappa\sinh\left((\rho+\theta)\sqrt{-2x}\right)}{\sinh\left(\rho\sqrt{-2x}\right)\sinh\left(\theta\sqrt{-2x}\right)}\right) dx.$$

und im Ursprung einen Sprung der Höhe

$$-\frac{1}{2i\sqrt{\pi}}\int_{\gamma}\frac{\sqrt{-x}\cosh\left(\rho\sqrt{-2x}\right)}{\sinh\left(\rho\sqrt{-2x}\right)}e^{-x}\,dx.$$

2.3.3 Straffheit

Zum Beweis der Straffheit verwenden wir Satz 1.7. Wegen $l_n(0)=1$ ist die erste Voraussetzung offensichtlich erfüllt. Um zu zeigen, daß l_n auch der zweiten Voraussetzung genügt, benötigt man eine gleichmäßige Abschätzung der zweidimensionalen Dichte. Im allgemeinen Fall kann man jedoch die Gleichmäßigkeit nur in bestimmten Bereichen erzielen, sodaß wir uns in dieser Arbeit auf den Spezialfall der ebenen Wurzelbäume beschränken. Für diesen Fall können wir (2.80) benützen.

Um Satz 1.7 anwenden zu können, müssen wir

$$P[|l_n(\rho)-l_n(\rho+\theta)|\geq\varepsilon]=\sum_{\substack{k\geq 0,l>0\\|k-l|\geq\varepsilon_n}}\frac{a_{nkl,rh}}{a_n}+\sum_{k\geq\varepsilon_n}\frac{a_{nk0,rh}}{a_n}\leq C\frac{\theta^\alpha}{\varepsilon^\beta}\tag{2.91}$$

mit $\beta\geq\alpha>1$ und $\varepsilon_n=\lfloor\varepsilon\sqrt{n}\rfloor$ zeigen. Dazu integrieren wir $[u^kv^l]y_r(z,uy_h(z,bv))$ entlang des Kreises $|z|=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Diesen Kreis bezeichnen wir im folgenden mit Γ. Betrachten wir nun die einzelnen Faktoren in (2.80): Offensichtlich gilt

$$\frac{d_r}{d_{r+1}}=y_r(z,0)=[u^0]y_r(z,uz)$$

Daher ist dies die erzeugende Funktion aller Bäume, deren Höhe kleiner als r ist. Daraus folgt, daß die Funktion $\frac{d_r}{d_{r+1}}$ eine Potenzreihe mit nichtnegativen Koeffizienten ist und daher ihr Maximum auf dem Integrationsweg an der Stelle $z=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ annimmt. Infolge dessen ist $\frac{d_r}{d_{r+1}}-\frac{d_{r-1}}{d_r}$ die erzeugende Funktion der Bäume, deren Höhe genau $r-1$ beträgt, und nimmt daher ebenfalls das Maximum auf der positiven reellen Achse an. Deshalb kann (2.80) durch den Wert an der Stelle $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ abgeschätzt werden. Es stellt sich aber heraus, daß diese Abschätzung zu grob ist, um die Straffheitsbedingung zu garantieren. Das folgende Lemma wird zur Verschärfung der Abschätzung hilfreich sein:

Lemma 2.9 *Sei* $z=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\psi}$ *und* $|\psi|>\frac{1}{n}$. *Dann gilt*

$$\left|d_h\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\psi}\right)\right|\geq d_h\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)e^{ch\sqrt{\psi}},\tag{2.92}$$

wobei $c>0$ *eine Konstante ist.*

Beweis: Es ist leicht zu sehen, daß für $|\psi|>\frac{1}{n}$

$$|1-4z|\leq\frac{1}{n}+\phi\tag{2.93}$$

erfüllt ist. Das impliziert

$$\left|1-\sqrt{1-4z}\right|^h\leq 2^{-h}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^h\sim 2^{-h}e^{-h/\sqrt{n}}$$

und

$$\left|1+\sqrt{1-4z}\right|^h \le 2^{-h}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}+c\sqrt{\psi}\right)^h \sim 2^{-h}e^{h/\sqrt{n}+ch\sqrt{\psi}}.$$

Daher ist der letzte Term dominant, und aus

$$d_h\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \sim 2^{-h}\sinh\left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right)$$

folgt schließlich (2.92). ■

Bezeichne Γ' jenen Teil von Γ, für den $|\psi| < \frac{1}{n}$. Es gilt

$$1-\frac{d_{h-1}d_{h+1}}{d_h^2} = \frac{z^{h-1}(1-4z)}{d_h^2}.$$

Wegen (2.93) folgt daraus

$$\int_{\Gamma'}\left|1-\frac{d_{h-1}d_{h+1}}{d_h^2}\right| |dz| \le \frac{2}{n}\frac{\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^h - 1\frac{1}{n}}{d_h\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2}$$

$$\int_{\Gamma}\left|1-\frac{d_{h-1}d_{h+1}}{d_h^2}\right| |dz| \le \frac{\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^h - 1}{d_h\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2}\int_{\frac{1}{n}}^{2\pi}\psi e^{-2ch\sqrt{\psi}}\,d\psi.$$

Das Integral auf der rechten Seite schätzt man wie folgt ab:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{n}}^{2\pi}\psi e^{-2ch\sqrt{\psi}}\,d\psi &\le \int_{\frac{1}{n}}^{\infty}\psi e^{-2ch\sqrt{\psi}}\,d\psi\\ &\le \frac{1}{n^2}\int_1^\infty t\exp\left(-2\frac{h}{\sqrt{n}}c\sqrt{t}\right)\,dt\\ &\le \frac{C}{n^2}\left(\frac{n}{h^2}\right)^2 = \frac{C}{n^2\theta^4}\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß $\frac{a_{nkl,rh}}{a_n}$ durch den Wert von (2.80) an der Stelle $z=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ abgeschätzt werden kann:

$$\begin{aligned}\frac{a_{nkl,rh}}{a_n} &\le \frac{K}{n}\left(1+\frac{1}{\theta^4}\right)[u^kv^l]\left[y_r(z,uy_h(z,va(z)))\right]_{z=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)}\\ &\le \frac{\tilde{K}}{n}\frac{1}{\theta^4}[u^kv^l]\left[y_r(z,uy_h(z,va(z)))\right]_{z=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)}\end{aligned}$$

Nun approximiert man die rechte Seite wie im vorigen Abschnitt und erhält nach Anwendung der Eulerschen Summenformel

$$\begin{aligned}\sum_{k\ge\varepsilon_n}\sum_{l=1}^{k-\varepsilon_n}\frac{a_{nkl,rh}}{a_n} \le \frac{K'}{\theta^4}\int_\varepsilon^\infty\int_0^{\kappa-\varepsilon}&\frac{\kappa}{\sinh^2\theta\sinh^2\rho}\exp\left(-\frac{\lambda e^\theta}{\sinh\theta}\right.\\ &\left.+\frac{\kappa\sinh(\rho+\theta)}{\sinh\rho\sinh\theta}\right)\sum_{j\ge0}\frac{(\kappa\lambda)^j}{j!(j+1)!\sinh^{2j}\theta}\,d\lambda\,d\kappa \qquad (2.94)\end{aligned}$$

und

$$\sum_{k\geq\varepsilon_n}\frac{a_{nk0,rh}}{a_n}\leq\frac{K''}{\theta^4}\int_\varepsilon^\infty\frac{1}{\sinh^2\rho}\exp\left(-\frac{\kappa\sinh(\rho+\theta)}{\sinh\rho\sinh\theta}\right)\,d\kappa. \tag{2.95}$$

Der verbleibende Teil, die Summe

$$\sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq k+\varepsilon_n}\frac{a_{nkl,rh}}{a_n}, \tag{2.96}$$

liefert einen zu (2.94) analogen Term. Wertet man das Integral der rechten Seite von (2.95) aus und beachtet, daß aufgrund von Satz 1.8 die Straffheitsbedingung nur für beschränkte ρ und θ gezeigt werden muß, so erhält man

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^\infty\frac{1}{\sinh^2\rho}\exp\left(-\frac{\kappa\sinh(\rho+\theta)}{\sinh\rho\sinh\theta}\right)\,d\kappa &= \frac{\sinh\theta}{\sinh(\rho+\theta)\sinh\rho}\exp\left(-\varepsilon\frac{\sinh(\rho+\theta)}{\sinh\rho\sinh\theta}\right)\\ &\leq\frac{C}{\rho^2}\exp\left(-\varepsilon\left(\frac{1}{\sinh\rho}+\frac{1}{\sinh\theta}\right)\right)\\ &\leq C\frac{\sinh^\alpha\rho\sinh^\alpha\theta}{\rho^2\varepsilon^{2\alpha}}\leq C'\frac{\theta^\alpha}{\varepsilon^{2\alpha}}\end{aligned} \tag{2.97}$$

für alle $\alpha>0$, insbesondere für $\alpha>1$.

Wenden wir uns nun dem Ausdruck (2.94) zu. Benutzen wir die Abschätzungen $\sinh\theta\geq\theta$, $\cosh\theta\geq 1$ und

$$\sum_{j\geq 0}\frac{x^j}{j!(j+1)!}\leq e^{2\sqrt{x}},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}&\int_\varepsilon^\infty\int_0^{\kappa-\varepsilon}\frac{\kappa}{\theta^4\sinh^2\theta\sinh^2\rho}\exp\left(-\frac{\lambda e^\theta}{\sinh\theta}+\frac{\kappa\sinh(\rho+\theta)}{\sinh\rho\sinh\theta}\right)\sum_{j\geq 0}\frac{(\kappa\lambda)^j}{j!(j+1)!\sinh^{2j}\theta}\,d\lambda\,d\kappa\\ &\leq\int_\varepsilon^\infty\int_0^{\kappa-\varepsilon}\frac{\kappa}{\theta^4\sinh^2\theta\sinh^2\rho}\exp\left(-(\kappa+\lambda)\coth\theta-\lambda-\kappa\coth\theta+2\frac{\sqrt{\kappa\lambda}}{\sinh\theta}\right)\,d\lambda\,d\kappa\\ &\leq\int_\varepsilon^\infty\int_0^{\kappa-\varepsilon}\frac{\kappa}{\rho^2\theta^6}\exp\left(-\frac{\left(\sqrt{\kappa}-\sqrt{\lambda}\right)^2}{\sinh\theta}-\lambda-\frac{\kappa}{\sinh\rho}\right)\,d\lambda\,d\kappa\\ &\leq\int_\varepsilon^\infty\int_0^{\kappa-\varepsilon}\frac{\kappa}{\rho^2\theta^6}\exp\left(-\frac{\left(\sqrt{\kappa}-\sqrt{\lambda}\right)^2}{4\kappa\sinh\theta}+(\kappa-\lambda)-\kappa\left(1+\frac{1}{\sinh\theta}\right)\right)\,d\lambda\,d\kappa,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt

$$\sqrt{\kappa}-\sqrt{\lambda}=\frac{\kappa-\lambda}{\sqrt{\kappa}+\sqrt{\lambda}}\geq\frac{\kappa-\lambda}{2\sqrt{\kappa}}$$

benutzt wurde. Die Substitution $m=\kappa-\lambda$ und die Verwendung der Ungleichungen $\frac{m}{\varepsilon}\geq 1$ und $e^m\leq e^\kappa$ ergibt

$$\int_\varepsilon^\infty\int_0^{\kappa-\varepsilon}\frac{\kappa}{\rho^2\theta^6}\exp\left(-\frac{\left(\sqrt{\kappa}-\sqrt{\lambda}\right)^2}{4\kappa\sinh\theta}+(\kappa-\lambda)-\kappa\left(1+\frac{1}{\sinh\theta}\right)\right)\,d\lambda\,d\kappa$$

$$
= \int_\varepsilon^\infty \int_\varepsilon^\kappa \frac{\kappa}{\rho^2\theta^6} \exp\left(-\kappa\left(1+\frac{1}{\sinh\rho}\right) - \frac{m^2}{4\kappa\sinh\theta} + m\right) dm\, d\kappa
$$

$$
\leq \frac{1}{\rho^2\theta^6\varepsilon} \int_\varepsilon^\infty \kappa e^{-\kappa/\sinh\rho} \int_\varepsilon^\kappa m e^{-m^2/4\kappa\sinh\theta}\, dm\, d\kappa
$$

$$
= \frac{2\sinh\theta}{\rho^2\theta^6\varepsilon} \int_\varepsilon^\infty \kappa^2 \left(\exp\left(-\frac{\kappa}{\sinh\rho} - \frac{\varepsilon^2}{4\kappa\sinh\theta}\right) - \exp\left(-\kappa\left(\frac{1}{\sinh\rho} + \frac{1}{4\sinh\theta}\right)\right)\right) d\kappa
$$

$$
= \frac{2\sinh\theta}{\rho^2\theta^2\varepsilon} \int_\varepsilon^\infty \kappa^2 \exp\left(-\frac{\kappa}{\sinh\rho} - \frac{\varepsilon^2}{4\kappa\sinh\theta}\right) d\kappa
$$

Dieses Integral teilen wir auf in

$$
\left(\int_\varepsilon^L + \int_L^\infty\right) \kappa^2 \exp\left(-\frac{\kappa}{\sinh\rho} - \frac{\varepsilon^2}{4\kappa\sinh\theta}\right) d\kappa
$$

mit geeignet gewähltem L. Dann gilt

$$
\int_\varepsilon^L \leq \kappa^2 \exp\left(-\frac{\kappa}{\sinh\rho} - \frac{\varepsilon^2}{4\kappa\sinh\theta}\right) d\kappa \int_\varepsilon^\infty \kappa^2 \exp\left(-\frac{\kappa}{\sinh\rho} - \frac{\varepsilon^2}{4L\sinh\theta}\right) d\kappa
$$

$$
\leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4L\sinh\theta}\right) \int_0^\infty \kappa^2 \exp\left(-\frac{\kappa}{\sinh\rho}\right) d\kappa
$$

$$
= 2\sinh^3\rho \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4L\sinh\theta}\right)
$$

und

$$
\int_L^\infty \kappa^2 \exp\left(-\frac{\kappa}{\sinh\rho} - \frac{\varepsilon^2}{4\kappa\sinh\theta}\right) d\kappa \leq CL^2 \sinh\rho e^{-L/\sinh\rho},
$$

Mit einer Konstanten $C > 0$. Wie oben erwähnt, sind ρ und $\rho + \theta$ beschränkt, also gelte $\rho < \rho + \theta \leq M$. Sei weiters $N > \sqrt{M}$. Dann setzen wir $L = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} N$ und erhalten somit die Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\sum_{k \geq \varepsilon_n} \sum_{l=1}^{k-\varepsilon_n} \frac{a_{nkl,rh}}{a_n} &\leq \frac{4e^{4M}}{\varepsilon\theta^5} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4L\sinh\theta}\right) + \frac{CL^2 e^M \sinh\rho}{\rho^2\varepsilon\theta^5} \exp\left(-\frac{L}{\sinh\rho}\right) \\
&\leq \frac{C'}{\varepsilon\theta^5} \exp\left(-K'\frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}}\right) + \frac{C'' L^2 \sinh\rho}{\rho^2\varepsilon\theta^5} \exp\left(-\frac{L}{\sinh\rho}\right) \\
&\leq \tilde{C}' \frac{\theta^{\beta_1/2-5}}{\varepsilon^{\beta_1+1}} + \tilde{C}'' \frac{\theta^{\beta_2/2-6}(\sinh\rho)^{\beta_2-1}}{\varepsilon^{\beta_2-1}}
\end{aligned}
\tag{2.98}
$$

wobei $C', C'', K', \tilde{C}'$ und $\tilde{C}''$ geeignete positive Konstanten sind. Man kann sich leicht überlegen, daß auch (2.96) die Abschätzung (2.98) erfüllt. Daraus folgt: Setzt man $\beta_1 = 13$, $\beta_2 = 15$, in (2.97) $\alpha = 7$ und beachtet, daß für beschränkte θ und $\alpha > \beta$ die Beziehung

$$
\theta^\alpha \leq K\theta^\beta
$$

gilt, so erhält man für ein $C > 0$

$$\sum_{\substack{k\geq 0, l>0\\ |k-l|\geq \varepsilon_n}} \frac{a_{nkl,rh}}{a_n} + \sum_{k\geq \varepsilon_n} \frac{a_{nk0,rh}}{a_n} \leq C\frac{\theta^{3/2}}{\varepsilon^{14}}$$

Diese Ungleichung erfüllt die Forderung von (2.91) und damit ist die Straffheit bewiesen.

2.3.4 Die lokale Zeit des Konturprozesses

Die lokale Zeit des Konturprozesses ist jener Prozeß, der durch die Anzahl der Blätter auf einem gegebenen Niveau bestimmt wird. Es ist leicht ersichtlich, daß die diesem Prozeß entsprechende erzeugende Funktion durch

$$y_k(z, \varphi_0 z(u-1) + a(z))$$

gegeben ist. Zur Bestimmung der zweidimensionalen Dichte muß man mit

$$y_l(z, \varphi_0 z(u-1) + y_k(z, \varphi_0 z(v-1) + a(z)))$$

arbeiten. Anwendung von Lemma 2.8 liefert die Asymptotik

$$y_l(z, \varphi_0 z(u-1) + y_k(z, \varphi_0 z(v-1) + a(z))) = a(z) + R(u,v,z)$$

mit

$$R(u,v,z) = \frac{(\varphi_0 z(u-1) + R_k)\alpha^l}{\frac{1}{2}\left(1+\alpha^l + \frac{\sigma}{\tau\sqrt{-2\bar{x}}}(\tau - a(z) - \varphi_0 z(u-1) - R_k)(1-\alpha^l)\right) + \mathcal{O}\left(\sqrt{|\bar{x}|}\right)}$$

und eine analoge Darstellung für R_k. Aus (2.16) gewinnt man

$$\begin{aligned}\tau - a(z) - \varphi_0 z(u-1) &\sim \frac{\tau\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{-\frac{x}{n}} - \varphi_0 z_0 \frac{is}{\sqrt{n}}\\ &= \frac{\tau\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{-\frac{x}{n}} - \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}\frac{is\tau}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

was schließlich auf Asymptotiken analog zu (2.67) und (2.68) führt: Die charakteristische Funktion $\hat{\phi}_{\lambda\mu}(s,t)$ der zweidimensionalen Grenzverteilung genügt der Beziehung

$$\hat{\phi}_{\lambda\mu}(s,t) = \phi_{\lambda\mu}\left(\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}s, \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}t\right)$$

Der Straffheitsbeweis für die Familie der ebenen Wurzelbäume verläuft analog zum vorigen Abschnitt und deshalb erhalten wir

Satz 2.12 *Der Prozeß $\hat{l}_n(t)$ aus (2.5) konvergiert für ebene Wurzelbäume schwach gegen die lokale Zeit der Brownschen Exkursion, d.h. für $t \in [0,\infty)$ gilt*

$$\hat{l}_n(t) \xrightarrow{w} \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}\frac{\sigma}{2} l\left(\frac{\sigma}{2}t\right).$$

Für einfach erzeugte Bäume gilt

$$\pi_{t_1,\ldots,t_k}(l_n(t)) \xrightarrow{d} \pi_{t_1,\ldots,t_k}\left(\frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)}\frac{\sigma}{2} l\left(\frac{\sigma t}{2}\right)\right),$$

wobei π die Projektion (1.2) ist.

Literaturverzeichnis

[1] D. J. ALDOUS, The continuum random tree I, *Ann. Prob. 19,* (1991), 1-28.

[2] D. J. ALDOUS, The continuum random tree II: an overview, *Stochastic Analysis,* M. T. Barlow and N. H. Bingham, Eds., Cambridge University Press 1991, 23-70.

[3] D. J. ALDOUS, The continuum random tree III, *Ann. Prob. 21,* (1993), 248-289.

[4] P. BILLINGSLEY, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, New York, 1968.

[5] N. G. DE BRUIJN, *Asymptotic Methods in Analysis,* North Holland, 1958.

[6] K. L. CHUNG, Excursions in Brownian motion, *Ark. Mat. 14* (1976), 155-177.

[7] J. W. COHEN AND G. HOOGHIEMSTRA, Brownian excursion, the $M/M/1$ queue and their occupation times, *Mathematics of Operations Research 6,* 4 (1981), 608-629.

[8] R. T. DURRETT, D. L. IGLEHART AND D. R. MILLER, Weak convergence to Brownian meander and Brownian excursion, *Ann. Prob. 5,* (1977), 117-129.

[9] M. DRMOTA, Asymptotic distributions and a multivariate Darboux method in enumeration problems, *J. Comb. Theory, Ser. A, 67,* 2 (1994), 169-184.

[10] M. DRMOTA, The height distribution of leaves in rooted trees, *Discr. Math. Appl. 4,* (1994), 45-58 (übersetzt von *Diskretn. Mat. 6,* (1994), 67-82).

[11] M. DRMOTA AND P. KIRSCHENHOFER, On generalized independent subsets of trees, *Random Structures and Algorithms 2* (1991), 187-208.

[12] M. DRMOTA AND M. SORIA, Marking in combinatorial constructions and limiting distributions, *J. Theoretical Comp. Science*, im Erscheinen.

[13] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* Vol. II, John Wiley & Sons, New York, 1966.

[14] P. FLAJOLET AND A. M. ODLYZKO, Singularity analysis of generating functions, *SIAM J. on Discrete Math. 3,* 2 (1990), 216-240.

[15] H. GRAUERT, K. FRITZSCHE, *Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher,* Springer, Berlin, 1974.

[16] W. GUTJAHR AND G. CH. PFLUG, The asymptotic contour process of a binary tree is a Brownian excursion, *Stochastic Processes and their Applications 41* (1992), 69-89.

[17] T. E. HARRIS, *The Theory of Branching Processes,* Springer-Verlag, 1963.

[18] G. HOOGHIEMSTRA, On the explicit form of the density of Brownian excursion local time, *Proc. AMS 84* (1982), 127-130.

[19] K. ITÔ AND H. P. MCKEAN, JR., *Diffusion Processes and their Sample Paths,* Springer-Verlag, 1965.

[20] I. KARATZAS AND S. E. SHREVE, *Brownian Motion and Stochastic Calculus,* Springer-Verlag, New York, 1988.

[21] D. P. KENNEDY, The Galton-Watson process conditioned on the total progeny, *J. Appl. Prob. 12* (1975), 800-806.

[22] F. B. KNIGHT, On the excursion process of Brownian motion, *Trans. AMS 258* (1980), 77-86.

[23] V. F. KOLCHIN, *Random Mappings,* Optimization Software, New York, 1986.

[24] A. MEIR AND J. W. MOON, On the Altitude of Nodes in Random Trees, *Canadian Journal of Mathematics 30* (1978), 997-1015.

[25] L. TAKÁCS, Conditional limit theorems for branching processes, *J. Appl. Math. Stoch. Analysis 4,* 4 (1991), 263-292.