Proceedings 25. Süddt. Differentialgeometrie-Kolloquium pp. 17–30

ELEMENTARER ZUGANG ZU DEN TANGENTEN AN DIE EIGENSCHATTENGRENZEN KRUMMER FLÄCHEN

DANIEL LORDICK

Lichter und Schatten
enthüllen die Formen.

Le Corbusier, 1963:
Ausblick auf eine
Architektur, S. 38

Der Vortrag befasst sich mit meinem Promotionsthema. Naturgemäß kann hier nur der prinzipielle Lösungsansatz zur Sprache kommen, welcher in der Promotion in seiner konstruktiven Umsetzung vorgeführt wird. Dort werden Dreh-, Schieb- und Schraubflächen bezüglich der Tangenten an ihre Eigenschattengrenzen untersucht und durch Verallgemeinerungen ergänzt.

Themenstellung

Behandelt man die Eigenschattengrenze einer krummen Fläche ihrer Definition gemäß als Berührkurve, mündet das Aufsuchen der zugehörigen Tangenten in eine flächentheoretische Fragestellung, die gleichwohl konstruktiv gelöst werden kann. In Unkenntnis dieses Umweges über die konstruktive Differentialgeometrie gelang es mir, ausgehend von der Eigenschattengrenze des Torus bei Parallelbeleuchtung und durch Einsatz geeigneter Hilfsflächen, Eigenschattengrenzen als Schnittkurven zu begreifen. Der Vorteil liegt auf der Hand. Denn bei Schnittkurven kann die gesuchte Tangente als Schnittgerade zweier Tangentialebenen, also elementar, konstruiert werden.

Punktweise Konstruktion der Eigenschattengrenze einer krummen Fläche

Weil die Eigenschattengrenze e einer krummen Fläche Φ die Berührkurve von Lichtstrahlen ist, gilt: In jedem Punkt $P \in e$ ist der berührende Lichtstrahl l Flächentangente. Die Tangentialebene τ in P enthält

2000 *Mathematics Subject Classification.* 51N05.

  ISBN 3-902233-00-1

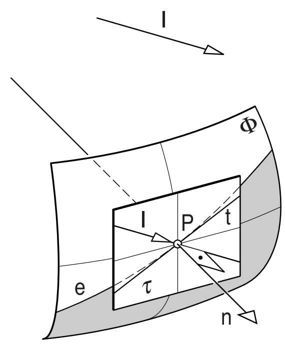


Abb. 1

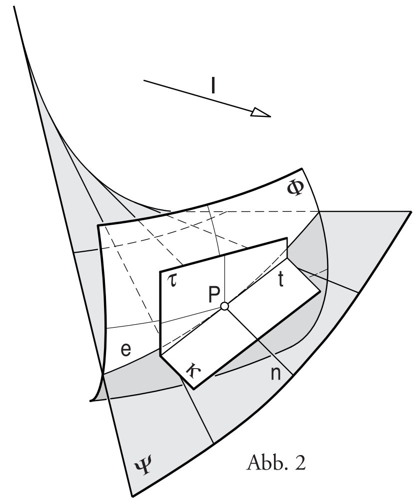


Abb. 2

somit l und die Lichtquelle. Die Eigenschattengrenze kann gefunden werden, indem man jene Punkte von Φ aufsucht, deren Tangentialebenen die Lichtquelle enthalten. Die punktweise Konstruktion der Eigenschattengrenze lässt sich in der Regel vereinfachen, wenn man beachtet, dass man mit den Tangentialebenen einer Fläche auch deren *Flächennormalen* beherrscht (Abb. 1). In einem Punkt $P \in e$ muss dabei die Flächennormale n zum berührenden Lichtstrahl l orthogonal sein.

Im Fall der Parallelbeleuchtung macht man sich leicht klar, dass alle Geraden, die zu den Lichtstrahlen orthogonal sind, in zueinander parallelen Normalebenen der Lichtstrahlen liegen.[1] Wir fassen das in

Satz 1. *Die Eigenschattengrenze einer Fläche bei Parallelbeleuchtung ist der Ort jener Flächenpunkte, in denen die Flächennormalen zu einer Normalebene der Lichtstrahlen parallel sind. Von dieser Überlegung ausgehend untersuchen wir die Eigenschattengrenzen krummer Flächen nicht als Berühr- sondern als Schnittkurven, indem wir uns spezieller Hilfsflächen bedienen.*

Begleitregelfläche der Eigenschattengrenze

Die Schar aller Flächennormalen einer Fläche Φ in den Punkten der Eigenschattengrenze e von Φ bildet eine *Regelfläche* Ψ, welche Φ in e (und unter Umständen weiteren Kurven) schneidet (Abb. 2). Folglich lässt sich die Konstruktion von Tangenten an e auf den elementaren Satz stützen:

[1]Die Normalen der Lichtstrahlen bei Parallelbeleuchtung erfüllen folglich einen planaren Komplex (vgl. [2], S. 5f).

Satz 2. *Sind in einem Punkt P der Schnittkurve c zweier Flächen die Tangentialebenen verschieden, so ist die Tangente von c in P die Schnittgerade dieser Ebenen.*[2]

Mit dem Ziel, eine konstruktiv leicht beherrschbare Regelfläche durch e zu erhalten, kann es sinnvoll sein, eine andere als die Normalenfläche längs e zu betrachten. Das zeigt sich zum Beispiel bei Zentralbeleuchtung des Torus und bei Schiebflächen. Wir berücksichtigen diese Fälle durch folgende allgemeine Bezeichnung:

Definition 1. *Eine durch Geraden erzeugte Hilfsfläche, die eine krumme Fläche längs ihrer Eigenschattengrenze schneidet, heißt Begleitregelfläche der Eigenschattengrenze.*[3].

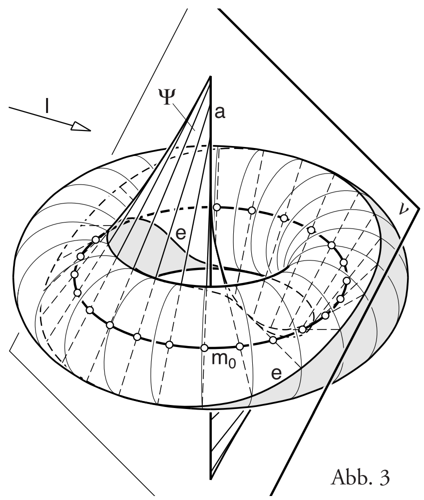


Abb. 3

Eigenschattengrenze des Torus bei Parallelbeleuchtung

Begleitregelfläche des Torus bei Parallelbeleuchtung

Die Flächennormalen eines Torus Φ in den Punkten der Eigenschattengrenze e erzeugen eine Regelfläche Ψ. Sie ist durch folgende Elemente festgelegt: Die Achse a des Torus ist Leitgerade, die Normalebene ν der Lichtstrahlen Richtebene und der Mittelkreis m_0 des Torus Leitkurve.[4]

Wir wollen das schiefe Konoid Ψ Begleitregelfläche der Eigenschattengrenze des Torus bei Parallelbeleuchtung nennen.

[2][1], S. 242.

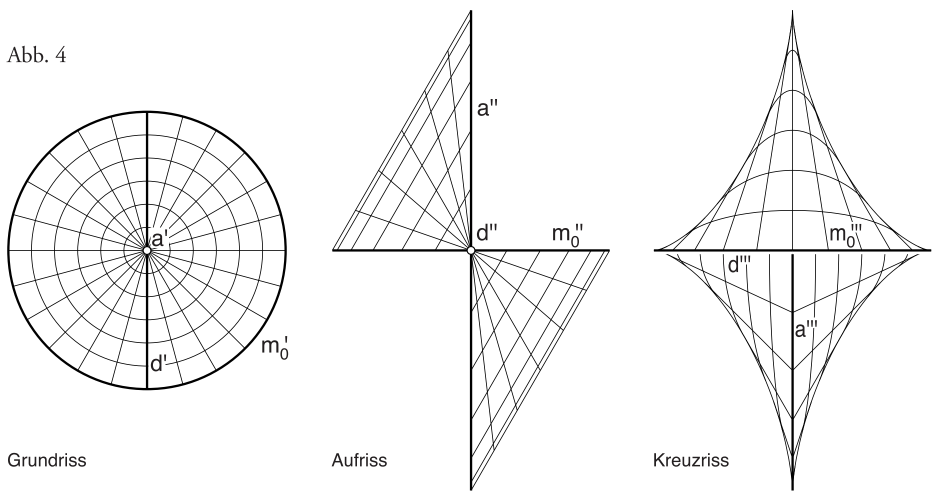
[3]Die Bezeichnung Begleitregelfläche geht auf K. Meirer zurück.

[4]Man kann Ψ auch als Schnitt der Normalenkongruenz des Torus mit dem planaren Komplex der Normalen der Lichtstrahlen auffassen. Eine Normalenkongruenz ist die Menge aller Normalen einer Fläche und derer Parallelflächen. Das zeigt auch, dass die Gestalt von Ψ vom Meridiankreisradius des Torus unabhängig ist.

Die Begleitregelfläche Ψ schneidet den Torus in e rechtwinklig. Die beiden Zweige von e sind Kurven auf Ψ mit der Eigenschaft, dass sie von der Leitkurve m_0 jeweils den selben konstanten Abstand haben, der dem Radius des Meridiankreises k von Φ entspricht. Die Zweige von e sind demzufolge Parallelkurven von m_0 auf Ψ[5] (Abb. 3).

Weil die Gestalt von Ψ allein durch den Mittelkreis und den Einfallswinkel der Lichtstrahlen festgelegt wird, ist es legitim, den Meridiankreisradius des Torus im Grenzfall mit null anzunehmen. Die zwei Mäntel des Berührzylinders der Lichtstrahlen an Φ vereinen sich dann zu einem schiefen Kreiszylinder durch m_0. Das zeigt, Ψ ist von der Gestalt einer Normalenfläche eines schiefen Kreiszylinders längs eines seiner Kreise. Die Begleitregelfläche ist vierten Grades und siebter STURMscher Art[6]. Ebenen durch die Doppelerzeugende d von Ψ schneiden Ψ nach zueinander projektiven Ellipsen, die sich im Hauptriss als konzentrische Kreise darstellen (Abb. 4).

Abb. 4



Tangenten an die Eigenschattengrenze des Torus mittels der Begleitregelfläche

Wir untersuchen nun im Meridianriss einen Ringtorus Φ, gegeben durch seinen Hauptmeridian k_0 und die Drehachse a, bezüglich seiner Eigenschattengrenze e. Es bedeutet keine Einschränkung der Aufgabe, wenn

[5]Vgl. [2], S. 56: “Irgend zwei orthogonale Trajektorien der Erzeugenden einer Regelfläche schneiden auf diesen gleiche Strecken ab.” Damit kann Ψ auch erzeugt werden, wenn man alle Geraden aufsucht, welche beide Zweige von e orthogonal schneiden.

[6]Vgl. [2], S. 269

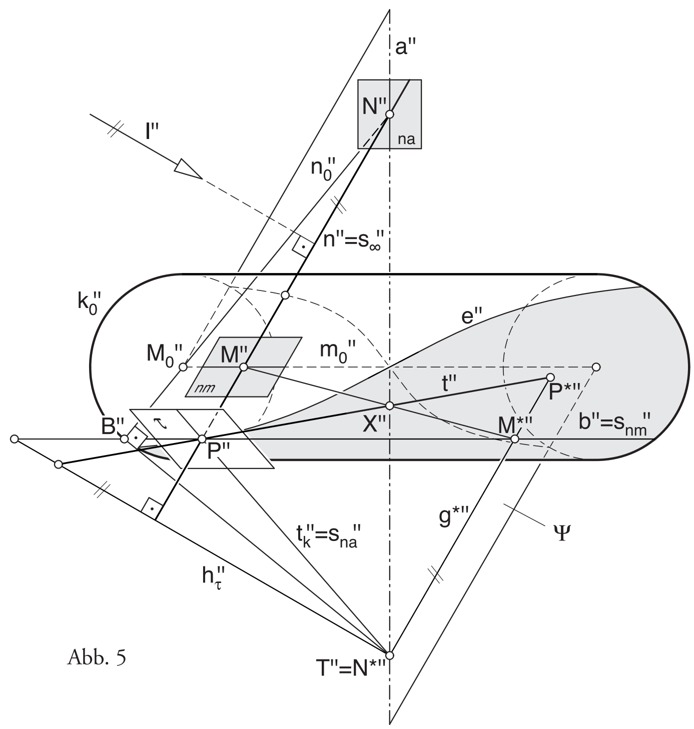


Abb. 5

wir die Lichtstrahlen l parallel zur Hauptmeridianebene μ_0 annehmen (Abb. 5).

Aus der Symmetrie der Drehflächen zu ihren Meridianebenen folgt: Die Eigenschattengrenze jeder Drehfläche ist symmetrisch zu jener Meridianebene, welche die Lichtquelle enthält. Es ist darum im gewählten Meridianriss ein doppelt überdecktes Bild e'' von e zu erwarten, das heißt jedem Bildpunkt von e'' entsprechen zwei Punkte von e. Dieser spezielle Meridianriss von e ist eine zweiteilige Kurve vierter Ordnung.

Fasst man die Eigenschattengrenze e des Torus Φ als Schnittkurve von Φ und der Begleitregelfläche Ψ auf, so ist die Tangente t an e in einem Punkt $P \in e$ die Schnittgerade der entsprechenden Tangentialebenen von Φ und Ψ. Als zeichentechnisch geschickt erweist sich hierbei, die Vervollständigung der *Berührkorrelation* zur Bestimmung der Tangentialebene κ_P von Ψ in P direkt in der Tangentialebene τ des Torus durchzuführen. Schließlich ist die Spur von κ_P in τ zugleich die gesuchte Tangente an die Eigenschattengrenze.

In drei Punkten der Erzeugenden n, der Flächennormalen in P, sind die Tangentialebenen von Ψ bekannt: Die Tangentialebene in $N = n \cap a$, aufgespannt durch n und die Leitgerade a, ist eine Meridianebene des Torus und schneidet folglich τ in der Meridiantangente t_k. Durch die Spitze T des Meridiantangentenkegels kann man t_k leicht zeichnen.[7] Die Tangentialebene in $M = n \cap m_0$ wird durch n und die Tangente an m_0 aufgespannt. Sie ist eine Tangentialebene des Normalenkegels Γ_b im Breitenkreis b von P und ihre Spur in τ die Breitenkreistangente t_b. Die Tangentialebene κ_∞ (asymptotische Ebene) im Fernpunkt von n schließlich ist parallel zur Richtebene ny. Die Spur s_∞ von κ_∞ fällt in der gewählten Aufstellung in den Meridianriss von n.

Will man nun die Berührkorrelation konoidaler Flächen anwenden,[8] so benötigt man eine Hilfsgerade $g^\star \parallel s_\infty$ in τ. Der Zeichenaufwand zur Übertragung des $TV(P, M, N)$ nach $TV(P^\star, M^\star, N^\star)$ auf $g^\star$ bleibt gering, wenn man $g^\star$ durch t annimmt. Dann ist $T = N^\star$ und $g^\star \cap t_b = M^\star$. Der Strahlenschnittpunkt $X'' = a'' \cap M''M^{\star\prime\prime}$ ist ein Punkt der gesuchten Tangente t an die Eigenschattengrenze von Φ in P, weil nach Strahlensatz mit $X \in \tau$ als Strahlenschnittpunkt $t \cap g^\star = P^\star$.

Lokale Betrachtung eines Punktes der Eigenschattengrenze

Die Punkte M und N sind die Hauptkrümmungsmittelpunkte von Φ in P und t_k und t_b die zugehörigen Krümmungstangenten. Weil außerdem für die lokale Betrachtung der Tangente an die Eigenschattengrenze e in einem Punkt $P \in e$ unbedeutend ist, ob e durch Zentral- oder Parallelbeleuchtung entsteht oder welcher Fläche die Hauptkrümmungen in P zugeordnet sind, lautet der allgemein gefasste Satz über die Tangenten an die Eigenschattengrenzen krummer Flächen, der sich aus der Betachtung der Begleitregelfläche des Torus ableitet lässt:

Satz 3. *In einem Punkt P der Eigenschattengrenze e einer krummen Fläche schneiden die Tangente t von e und die Krümmungstangenten t_1 und t_2 aus jeder in der Tangentialebene von P befindlichen und zum berührenden Lichtstrahl in P orthogonalen Geraden $g^\star$ mit $P \notin g^\star$ jenes Teilverhältnis aus, das dem Teilverhältnis von P und den Hauptkrümmungsmittelpunkten K_1 und K_2 auf der Flächennormalen n in P entspricht: Es ist mit $P^\star = g^\star \cap t$, $K_1^\star = g^\star \cap t_2$ und $K_2^\star = g^\star \cap t_1$ $TV(P, K_1, K_2) = TV(P^\star, K_1^\star, K_2^\star)$.*[9]

Schmiegebenen in den Scheitelpunkten der Eigenschattengrenze Für die Zeichnung von e'' ist die Angabe der Tangenten in den Rückkehrpunkten von e'' nützlich. Sie fallen in die Bilder der Schmiegebenen von e in den Scheiteln von e.

[7]Die Tangente an den Hauptmeridian k_0 in B =b$\cap k_0$ ($P \in b$) schneidet a in T.

[8]Vgl. [1], S. 356

[9]Man beachte aufmerksam, dass $K_1^\star$ auf der Krümmungstangente von K_2 liegt und $K_2^\star$ auf t_1.

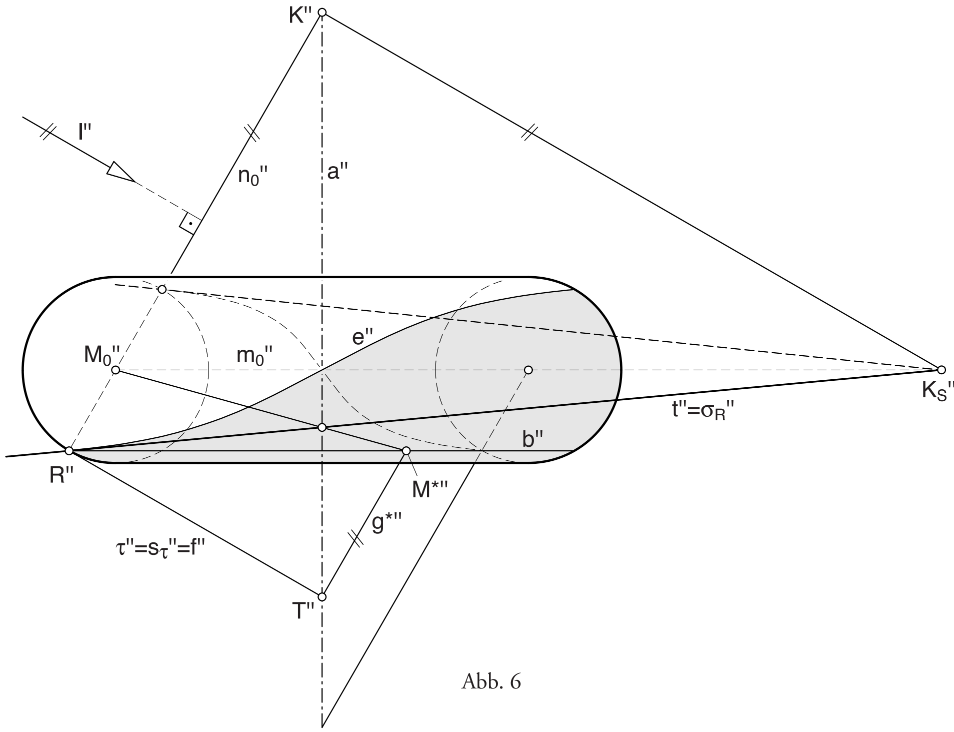


Abb. 6

Die Eigenschattengrenze e des Torus hat aufgrund der Symmetrie zu μ_0 eben dort Scheitelpunkte, die sich auf den Torsallinien n_0 der Begleitregelfläche Ψ befinden und sich in der gewählten Aufstellung als Rückkehrpunkte R'' des Bildes e'' von e darstellen. Obwohl die Scheiteltangenten von e projizierend sind, kann man, durch formale[10] Ausführung der Konstruktion für einen allgemeinen Punkt der Eigenschattengrenze, im Rückkehrpunkt R eine Tangente konstruieren. Diese stellt im Grenzübergang das projizierende Bild der Schmiegebene σ_R in R dar (Abb. 6).

Betrachtet man die Konstruktion näher, so erkennt man, dass aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke M_0'', K_S'', K'' und $R'', T'', M^{\star\prime\prime}$, unabhängig vom Meridiankreisradius des Torus, σ_R stets K_S enthält.

Satz 4. *Die Schmiegebene im Scheitelpunkt R der Eigenschattengrenze e eines Torus Φ bei Parallelbeleuchtung enthält den Schlagschatten des Schnittpunktes der Flächennormalen in R mit der Torusachse*[11] *auf der Mittelkreisebene von Φ.*

Tangente an die Eigenschattengrenze im Frontalpunkt

[10] Vgl. [4], S. 170

[11] Der Schnittpunkt K ist ein Kuspidalpunkt von Ψ.

Im gewählten Meridianriss mit $l \parallel \mu_0$ gestaltet sich die Konstruktion der Tangente t an e im Punkt D, dessen Tangentialebene eine Hauptebene ist, besonders einfach (Abb. 7):

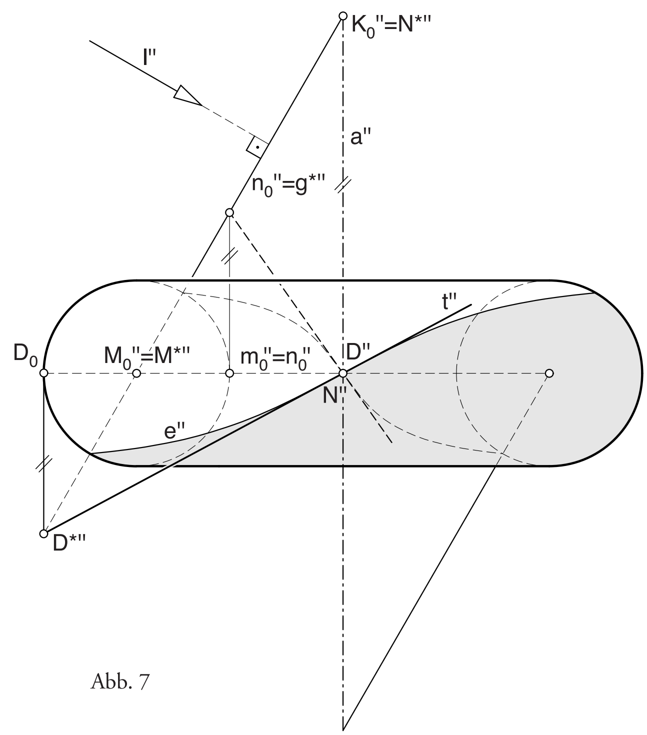


Abb. 7

In D ist die Flächennormale projizierend. Die Hauptmeridiannormale n_0 durch N zeigt das Teilverhältnis von D mit den zugehörigen Hauptkrümmungsmittelpunkten M und N durch das kongruente Teilverhältnis D_0, M_0, N an. Die Bilder der Krümmungstangenten t_k und t_b in D fallen mit den Bildern von a und n_0 zusammen. Man wählt die Hilfsgerade $g^\star \subset \tau$ so, dass $M^{\star\prime\prime} = g^{\star\prime\prime} \cap t_b^{\prime\prime} = M_0^{\prime\prime}$. Eine Parallele zu $a^{\prime\prime}$ in $D_0^{\prime\prime}$ schneidet $g^{\star\prime\prime}$ in $D^{\star\prime\prime}$, wobei $D^\star \in \tau_D$ ein Punkt der gesuchten Tangente t von e in D ist.

Das Bild $e^{\prime\prime}$ der Eigenschattengrenze hat $t^{\prime\prime}$ zur Wendetangente.

Schlussfolgerung für die konjugierten Durchmesser von Ellipse und Hyperbel

Konstruiert man die Tangente t an die Eigenschattengrenze e in einem Punkt $P \in e$, so erhält man die zum berührenden Lichtstrahl l *konjugierte Flächentangente* in P. Die Geraden l und t sind demnach ein Paar konjugierter Durchmesser der Indikatrix in P.

Entwickelt man aus den Hauptkrümmungsradien θ_k und θ_b in den Frontalpunkten des Torus Φ die längs Äquator bzw. Kehlkreis oskulierenden Drehquadriken,[12] so erhält man für den elliptischen Punkt P_e ein abgeplattetes Drehellipsoid mit dem Umriss u_e'' und für den hyperbolischen Punkt P_h ein einschaliges Drehhyperboloid mit dem Umriss u_h'' (Abb. 8). Die Ellipse u_e'' und die Hyperbel u_h'' haben die Bilder der Meridiankreise von Φ als Scheitelkrümmungskreise und sind zu den jeweiligen Indikatrizen in P_e bzw. P_h bezüglich der Konstanten θ_b kongruent.[13]

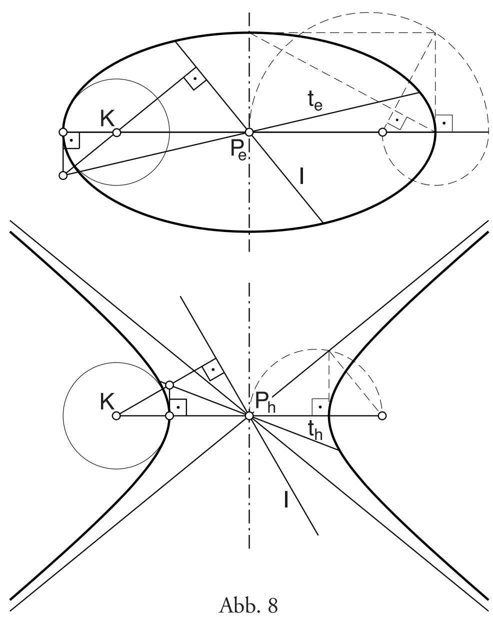


Abb. 8

Konstruiert man wie in Abb. 7 die zu einem Lichtstrahl l konjugierten Flächentangente t_e bzw. t_h in P_e bzw. P_h, führt das auf folgenden elementaren

Satz 5. *Die zu einer Durchmessergeraden l konjugierte Durchmessergerade einer Ellipse oder Hyperbel schneidet die durch einen Scheitelkrümmungsmittelpunkt gelegte Normale zu l in einem Punkt der zugehörigen Scheiteltangente.*

---

[12] Vgl. [1], S. 305 und [3]

[13] Die Hauptachsen von u_h'' bzw. u_h'' sind die jeweiligen Breitenkreisradien θ_b und die Nebenachsen $\sqrt{theta_b theta_k}$. Möglich Konstruktionen für $\sqrt{theta_b theta_k}$, sowie (umgekehrt) für die Scheitelkrümmungskreise aus den Tangentenrechtecken sind in Abb. 8 gestrichelt angegeben.

Dieser Satz ist zur Scheitelkrümmungskreiskonstruktion einer Ellipse aus dem Tangentenrechteck dual, weil die Diagonalen im Rechteck bekanntlich zueinander konjugierte Durchmesser der Ellipse sind. Ebenso sind die Asymptoten einer Hyperbel konjugierte Durchmesser derselben.

Normalriss des Torus

Wir unterwerfen den Torus Φ einer Normalprojektion mit zur Drehachse a geneigter Bildebene und nutzen die Verwandtschaft mit der Parallelbeleuchtung zur Gewinnung der Krümmungskreise des Umrisses u'''.

Die Normalrissebene π_3 ist zur Richtebene ν der Begleitregelfläche Ψ parallel. Die Erzeugenden von Ψ bilden sich folglich in wahrer Größe auf π_3 ab, und die Bilder der Erzeugenden schneiden das elliptische Bild m_0''' des Mittelkreises m_0 und den Umriss, der aus zwei Zweigen besteht, orthogonal.

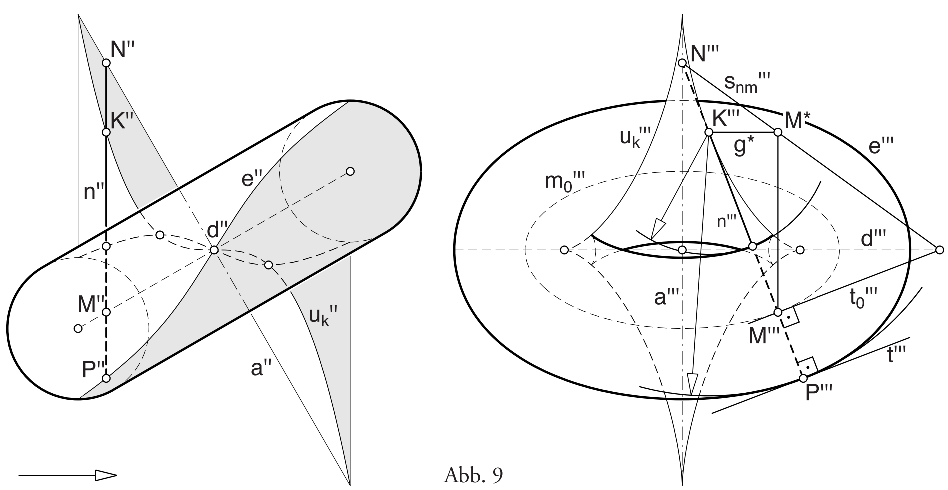


Abb. 9

Die Normalrisse der Erzeugenden sind die gemeinsamen Kurvennormalen von m_0''' und u''' und diese wiederum Parallelkurven. Der Normalriss u_k''' der Kontur u_k von Ψ (entspricht der Eigenschattengrenze von Ψ) ist die Hüllkurve der Normalrisse der Erzeugenden und damit die Evolute von m_0''' und u'''. Durch Anwendung der Berührkorrelation im Normalriss lassen sich, wie in Abb. 9 durchgeführt, die Krümmungsmittelpunkte des Umrisses konstruieren.[14]

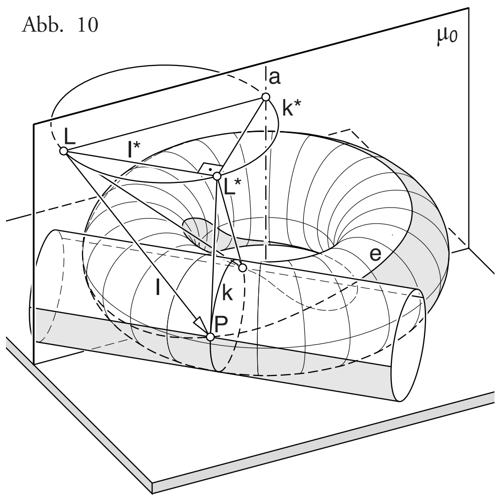
[14] Vgl. [1], S. 269 über das Teilverhältnis auf der Normalen in einem allgemeinen Punkt eines Kegelschnittes, das der Krümmungsmittelpunkt und die Schnittpunkte der Normalen mit den Kegelschnittachsen ausschneiden.

Eigenschattengrenze des Torus bei Zentralbeleuchtung

Annahme des Lichtpunktes, Aufnahmesituation

Für ein allgemeines und anschauliches Bild der Eigenschattengrenze e wird die punktförmige Lichtquelle L so gewählt, dass L weder auf der Torusachse a noch in seinem Inneren noch auf Φ selbst liegt. Außerdem soll die Lage in der Ebene ϕ des Mittelkreises m_0 ausgeschlossen werden. Die Meridianebene $\mu_0 = La$ ist Hauptmeridian eines Meridianrisses, in dem sich e als doppelt überdecktes Bild e'' zeigt.

Abb. 10



Punkte der Eigenschattengrenze des Torus bei Zentralbeleuchtung Zur punktweisen Konstruktion der Eigenschattengrenze e kann man die den Torus Φ längs seiner Meridiankreise berührenden Drehzylinder benutzen (Abb. 10).

Die Tangentialebenen in den Eigenschattengrenzen eines Drehzylinders schneiden einander in einer zur Drehachse des Berührzylinders parallelen Geraden $l^\star$ durch den Lichtpunkt L. Wenn L auf $l^\star$ wandert, erhält man stets dieselben Eigenschattengrenzen des Drehzylinders.

Wir betrachten nun einen Meridiankreis k von Φ. Die Schnittgerade $l^\star$ der Tangentialebenen in den Punkten $P_{1,2}$ der Eigenschattengrenze e auf k ist parallel zur Meridiankreisachse von k und $l^\star$ folglich orthogonal zur Meridianebene μ_k von k. Die Berührungspunkte $P_{1,2}$ der Tangentialebenen durch $l^\star$ $(tau_{1,2})$ lassen sich am einfachsten konstruieren, wenn man den Ersatzlichtpunkt $L^\star$ in μ_k benutzt. Das Verfahren ist zeichnerisch bequem, weil alle Ersatzlichtpunkte $L^\star$ für die Meridianebenen von Φ auf einem Kreis $k^\star$ (Kreis der Ersatzlichtpunkte) liegen, dessen Durchmesser der Abstand von l zu a ist.[15]

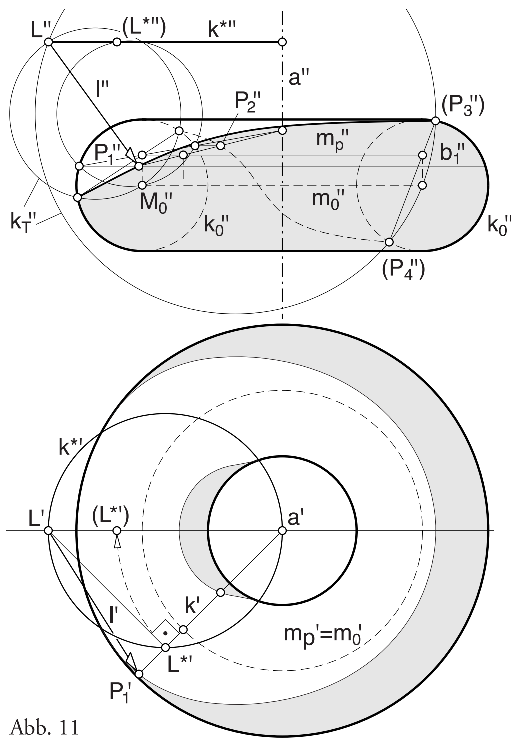


Abb. 11

Jedem Ersatzlichtpunkt $L^\star$ einer Meridianebene μ_k sind zwei Meridiankreise und somit vier Punkte von e zugeordnet. Abb. 11 zeigt die Konstruktion der Punkte P_{1-4} von e eines Meridians. Der Ersatzlichtpunkt $L^\star$ wird nach $(L^\star)$ in die Hauptebene μ_0 gedreht und die Berührungspunkte der Tangenten aus $(L^\star)$ an die Hauptmeridiankreise k_0 sind Punkte der Breitenkreise b_{1-4} von P_{1-4}.

Zur Ermittlung der Berührungspunkte können Thaleskreise k_T verwendet werden, deren Durchmesser die Lote aus dem Ersatzlichtpunkt auf m_0 sind.

[15]Dies ist der Fall, weil alle $L^\star$ auf in Parallelebene zur Ebene ϕ mit $m_0 \subset phi$ liegen ($l^\star \parallel t_0$) und alle $\angle LL^\star A$, mit A als Fußpunkt des Lotes auf a durch L, orthogonal sind (Thalessatz).

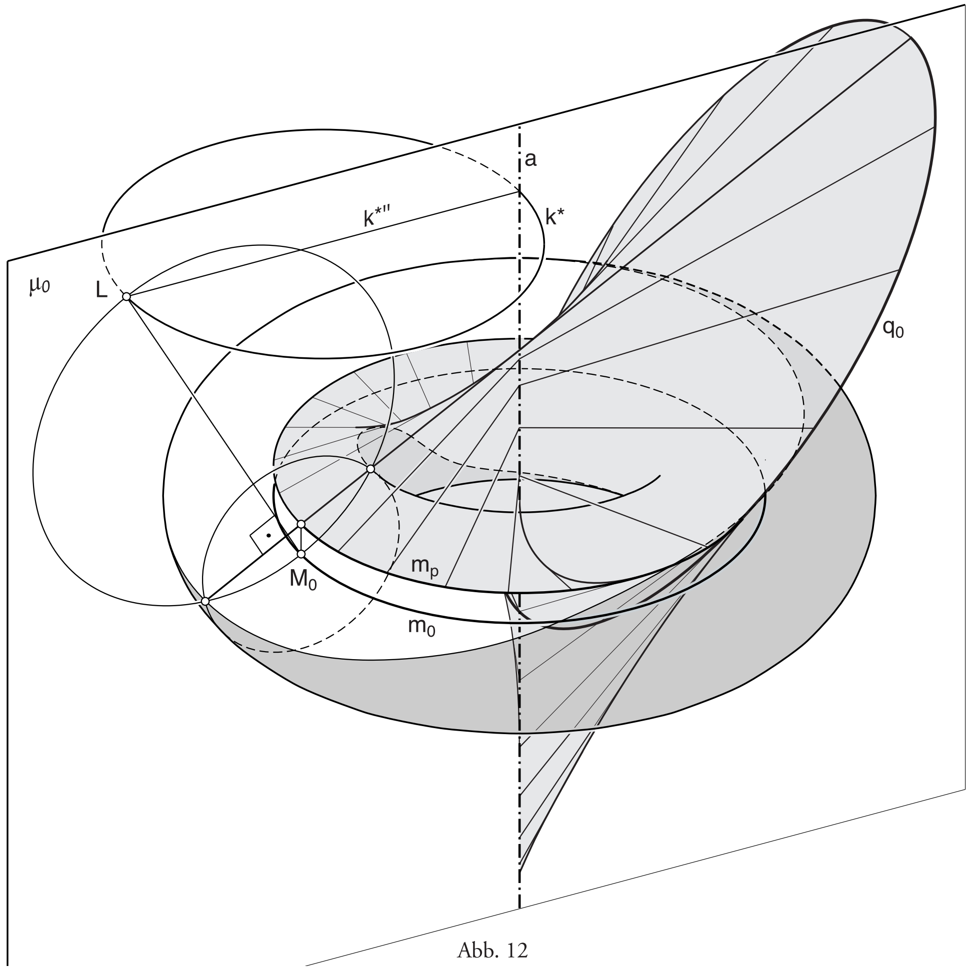


Abb. 12

Begleitregelfläche des Torus bei Zentralbeleuchtung

Zur Gewinnung einer Begleitregelfläche der Eigenschattengrenze des Torus Φ bei Zentralbeleuchtung werden wir uns nicht der Flächennormalen von Φ bedienen. Vielmehr nutzen wir, dass in jedem Meridiankreis k von Φ die Punkte P_1, P_2 von e auf der Polaren des Ersatzlichtpunktes $L^\star$ bezüglich k liegen. Diese Polaren bilden eine Begleitregelfläche Ψ, die durch folgende Elemente bestimmt ist (Abb. 12): Leitgerade ist die Drehachse a des Torus, Leitkreis ist ein Kreis m_p, der aus m_0 durch Verschiebung parallel zu a hervorgeht. Außerdem schneiden sich je zwei Erzeugende in einer elliptischen Doppelkurve q_0, deren Hauptriss zum Kreis $k^\star$ der Ersatzlichtpunkte kongruent ist. Die *Gestalt* von Ψ wird durch die Lage des Lichtpunktes L zum Mittelkreis m_0 und die Größe von m_0 bestimmt. Die *Lage* von Ψ variiert jedoch parallel zu a für Tori mit verschiedenen Meridiankreisradien.

Lässt man den Radius von Φ verschwinden, fällt der Polkreis m_p mit m_0 zusammen und man gelangt zu

Satz 6. *Die Begleitregelfläche eines Torus bei Zentralbeleuchtung hat die Gestalt der Normalenfläche des Lichtkegels durch den Mittelkreis m_0 längs m0. Die Fläche Φ entspricht also der Normalenfläche einer Quadrik längs eines Kreises derselben und ist von viertem Grad und fünfter* STURM*scher Art.*

Literatur

[1] BRAUNER H.: Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie, Springer-Verlag, Wien, New York 1986.

[2] MÜLLER, E., KRAMES, J. L.: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Band III, Konstruktive Behandlung der Regelflächen, Deuticke, Leipzig, Wien 1931.

[3] STACHEL, H.: Zum Umriss der Drehflächen, *Anz. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl.* **109** (1972), 236–243.

[4] WUNDERLICH, W.: Darstellende Geometrie I und II, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1966/67.

Daniel Lordick
Zionskirchstraße 33
D-10119 Berlin
email: Lordnfdc@mailszrz.zrz.tu-berlin.de