Proceedings 25. Süddt. Differentialgeometrie-Kolloquium pp. 9–15

DIE ZENTROAFFINE FAMILIE VON RELATIVNORMALEN UND IHRE MINIMALFLÄCHEN

H. PABEL AND R. KEILBACH

1. Grundlagen

Untersuchungsgegenstand sind Hyperflächen des affinen Raumes, o.E. in C^∞-Parametrisierungen $x : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, die mit einer *Relativnormalen* ausgestattet sind, also einem transversalen C^∞-Vektorfeld $N : G \to \mathbb{R}^{n+1}$, so daß für tangentiale Vektorfelder X, Y Ableitungsgleichungen der üblichen Form

$$d_Y X = \nabla_Y X + h(X,Y) \cdot N, \qquad d_Y N = -S(Y) + 0 \cdot N$$

gelten; die Richtungsableitungen von N sollen also stets im Tangentialraum der Fläche liegen. Diese Ableitungsgleichungen definieren

- einen (symmetrischen) *N-Zusammenhang* ∇ ,
- eine (symmetrische) *quadratische Grundform* h
- (im folgenden stets als regulär vorausgesetzt) und
- einen *Shape-Operator* bzw. Weingarten-Endomorphismus S mit Gaußkrümmung $K = \det S$ und Mittlerer Krümmung $H = \frac{1}{n} \operatorname{tr} S$.

Weiter induziert die quadratische Form h einen *Levi-Civita-Zusammenhang* $\widehat{\nabla}$.

Jede solche Relativnormale N liefert zwei im allgemeinen verschiedene *Volumenformen*, die *N-Volumenform* $\omega := \det(x_1, \ldots, x_n, N)$ sowie die *h-Volumenform* $\omega_h := \pm\sqrt{|\det(h(x_i, x_j))|}$, wenn x_i die partielle Ableitung der Fläche nach dem i-ten Parameter bezeichnet. Die zugehörigen Volumina seien $V_N := \int_B \omega$ und $V_h := \int_B \omega_h$ mit einem geeigneten Bereich $B \subset G$.

Als (Relativ-) *Minimalflächen* bezeichnen wir solche Flächen, bei denen die 1. Variation von V_N bzw. V_h bezüglich Vergleichsflächen $x_t = x + t\,f\,N$ mit $f|_{\partial B} = 0$, $\operatorname{grad} f|_{\partial B} = 0$ verschwindet.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 53A15.

 ISBN 3-902233-00-1

Benutzt man die *euklidische Normale* N_e, so liefert das Verschwinden der 1. Variation wegen $\omega = \sqrt{\det \mathrm{I}}$ einmal die gewöhnlichen euklidischen Minimalflächen und wegen $\omega_h = \pm\sqrt{|\det \mathrm{II}|}$ auch die sogenannten Minimalflächen der 2. Grundform II.

Die Bedingung $\omega = \omega_h$ kennzeichnet gerade die *Blaschkesche Affinnormale* N_b der äquiaffinen Geometrie mit ihren Affinminimalflächen.

Im folgenden eine Rolle spielen wird noch die *Tschebyscheff-Form* T^*, definiert durch $T^*(X) = d_X \log|\frac{\omega}{\omega_h}|$, bzw. das *Tschebyscheff-Vektorfeld* $T = h^{-1}(T^*)$. Es mißt in gewisser Weise den Unterschied der beiden Volumenformen ω und ω_h, und in der äquiaffinen Geometrie gilt die „Apolaritäts"-Gleichung $T \equiv 0$.

Zwei Relativnormalen N und stehen in der Beziehung

$$\widetilde{N} = q \cdot N - Z_q$$

mit einer Stützfunktion q und einem tangentialen Verschiebungsvektor $Z_q = h^{-1}(dq)$ (d.h. es gilt $h(Z_q, Y) = d_Y q$). Untersucht man, wie sich die zugehörigen Volumenformen verhalten, so erhält man nach kurzer Rechnung die Gleichungen

$$\widetilde{\omega} = q \cdot \omega\,, \qquad \widetilde{\omega}_{\widetilde{h}} = q^{-n/2} \cdot \omega_h\ .$$

2. Die Manhartsche Familie von Relativnormalen und ihre Minimalflächen

Die euklidische Normale N_e und die Blaschkesche Affinnormale N_b lassen sich in eine Einparameterfamilie von Relativnormalen einbetten (siehe [7]). Ausgehend von der euklidischen Normalen kann man sie in der Form

$$N_\alpha = |K_e|^\alpha N_e - Z_\alpha = |K_e|^\alpha \left[\, N_e - \alpha\, h_e^{-1}(d \log |K_e|)\,\right] \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

mit der euklidischen Gaußkrümmung K_e und der euklidischen zweiten Grundform h_e darstellen. Die zugehörigen Volumenformen sind

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= \det(x_1, \ldots, x_n, N_\alpha) = |K_e|^\alpha\, \omega_e\,, \\ \omega_{h_\alpha} &= \pm\sqrt{|\det(h_\alpha(x_i, x_j))|} = |K_e|^{(1-n\alpha)/2}\, \omega_e \end{aligned}$$

und man stellt fest, daß sich jedes h_α-Volumen als $N_{\widetilde{\alpha}}$-Volumen bezüglich des Scharparameters $\widetilde{\alpha} = (1 - n\alpha)/2$ auffassen läßt.

Als weitere Spezialfälle erhält man noch die Normalen der 2. und 3. euklidischen Grundform. Die folgende Tabelle gibt eine Zusammenfassung:

α	N_α	ω_α	ω_{h_α}	
0	N_e	ω_e	$\omega_{h_e} = \lvert K_e\rvert^{1/2}\,\omega_e$	euklidische Normale
$\frac{1}{n+2}$	N_b	$\omega_b \quad =$	$\omega_{h_b} = \lvert K_e\rvert^{\frac{1}{n+2}}\,\omega_e$	Blaschkesche Affinn.
$1/2$	N_{II}	$\omega_{\mathrm{II}} = \lvert K_e\rvert^{1/2}\,\omega_e$	$\omega_{h_{\mathrm{II}}} = \lvert K_e\rvert^{\frac{1}{2}-\frac{n}{4}}\,\omega_e$	Normale d. 2. Grundf.
1	N_{III}	$\omega_{\mathrm{III}} = \lvert K_e\rvert\,\omega_e$	$\omega_{h_{\mathrm{III}}} = \lvert K_e\rvert^{\frac{1-n}{2}}\,\omega_e$	Normale d. 3. Grundf.

Aus der obigen Darstellung der Einparameterfamilie N_α ist noch folgende schöne geometrische Eigenschaft abzulesen: In einem festen Flächenpunkt liegen alle Scharnormalen in einer Ebene (siehe HEIL [3]).

Zur Bestimmung der *Minimalflächen* bezüglich der Volumina V_{N_α} und V_{h_α} (der Index α wird im folgenden unterdrückt) kann man die 1. Variation von $V_N = \int_B \omega$ bzw. $V_h = \int_B \omega_h$ bezüglich Vergleichsflächen $t \mapsto x_t = x + t\,f\,N$ mit $f|_{\partial B} = 0$, $\operatorname{grad} f|_{\partial B} = 0$ berechnen und erhält

$$\begin{aligned} V_N'(0) &= \int_B (\alpha - 1)\,n\,H\,f\,\omega \quad \text{bzw.} \\ V_h'(0) &= -\tfrac{1}{2}\int_B (\alpha n + 1)\,n\,(H - \operatorname{tr}\widehat{\nabla}T)\,f\,\omega_h \end{aligned}$$

mit der jeweiligen Mittleren Krümmung H und der kovarianten Ableitung des Tschebyscheff-Vektorfeldes T bezüglich des von der quadratischen Grundform h induzierten Levi-Civita-Zusammenhangs. Als Spezialfälle hat man:

(1) $\boldsymbol{\alpha = 0}$ (Euklidische Geometrie)

$$V_N'(0) = -\int_B n\,H\,f\,\omega$$

$$V_h'(0) = V_{\mathrm{II}}'(0) = -\tfrac{1}{2}\int_B n\,(H + \tfrac{1}{2n}\,\Delta \log|K|)\,f\,\omega_h$$

Die letzte Gleichung wurde schon von GLÄSSNER [2] 1974 für den Spezialfall $n = 2$ angegeben.

(2) $\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{n+2}}$ (Äquiaffine Geometrie)

$$V_N'(0) = V_h'(0) = \int_B (\alpha - 1)\,n\,H\,f\,\omega$$

(3) $\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{2}}$ (Geometrie der 2. euklidischen Grundform)

$$V_N'(0) = V_{\mathrm{II}}'(0) = -\tfrac{1}{2}\int_B n\,H\,f\,\omega$$

(In den beiden Darstellungen von $V_{\mathrm{II}}'(0)$ wird unter 1. die euklidische Mittlere Krümmung $H = H_e$, unter 3. die Mittlere Krümmung $H = H_{1/2}$ zum Parameter $\alpha = 1/2$ benutzt !)

(4) $\boldsymbol{\alpha = 1}$ (Geometrie der 3. euklidischen Grundform)

$V_N'(0) = 0$ (und auch $V_N''(0) = 0$)

Als Ergebnis läßt sich festhalten: *Alle Minimalflächen (hier als Flächen mit $V_N'(0) = 0$, also als Extremalen des N-Volumens) sind (für $\alpha \neq 1$) durch das Verschwinden der (jeweiligen) Mittleren Krümmung H gekennzeichnet.*

Auch die 2. Variation $V_N''(0)$ (und auch $V_h''(0)$) ließe sich angeben, liefert aber schon in der äquiaffinen Geometrie keine einheitlichen Aussagen über die Art des Extremums. (Calabi und andere sprechen dort sogar von „Affinmaximalflächen“, siehe etwa [1]

Als konkrete Beispiele für N-Minimalflächen ($n = 2$) können die Wendelfläche (Minimalfläche für jedes α) und die Thomsenflächen (Minimalflächen für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1/4$) genannt werden.

3. Die zentroaffine Familie von Relativnormalen und ihre Minimalflächen

Eine weitere bekannte Relativnormale ist die *zentroaffine Normale* $N_c := o - x$ bezüglich eines festen Ursprungs o. Bei ihrer Verwendung erhält man für den Weingartenendomorphismus $S = Id$, also für Gaußsche und Mittlere Krümmung $K = H \equiv 1$.

Nach einem Vorschlag von Wang 1994 (siehe [8]) sollte man wegen der 1. Variation $V_h'(0) = \frac{1}{2} \int_B n \operatorname{tr}(\widehat{\nabla} T)\, f\, \omega_h$ den Operator $\widetilde{S} := \widehat{\nabla} T$ als neuen Shape-Operator definieren und hätte dann die Kennzeichnung

$$x \text{ zentroaffine Minimalfläche (als Extremale des } h\text{-Volumens)}$$
$$\iff \widetilde{H} := \frac{1}{n} \operatorname{tr} \widetilde{S} = 0\ .$$

Dieses Vorgehen erscheint nicht plausibel, da $\operatorname{tr}(\widehat{\nabla} T)$ schon in der Manhartschen Familie nur als Korrekturterm zur Mittleren Krümmung bei der Bestimmung der V_h-Minimalflächen auftaucht. Hier soll ein anderer Zugang vorgestellt werden:

Aus konvexgeometrischen Untersuchungen ist eine Einparameterschar $p \mapsto V_{h_p}$ von Volumina bekannt, welche das zentroaffine (für $p = n + 1$) und das äquiaffine h-Volumen (für $p = 1$) enthält (siehe

LEICHTWEISS [5] S. 160). Es gilt

$$V_{h_p} = \int_B \left(\frac{|K_e|}{\langle N_e, N_c \rangle^{n+2}} \right)^{\frac{p}{n+1+p}} \omega_c \, .$$

Berechung der zugehörigen Relativnormalen liefert nach Elimination der euklidischen Hilfsgrößen K_e und N_e eine Einparameterschar der gleichen Form wie die Manhartsche Familie. Mit $\alpha = \frac{n+1-p}{n(n+1+p)}$ erhält man

$$N_\alpha = |\widetilde{K}_c|^\alpha \, N_c - Z_\alpha = |\widetilde{K}_c|^\alpha \, [\, N_c - \alpha \, h_c^{-1}(d \log |\widetilde{K}_c|) \,] \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

mit der Größe

$$\widetilde{K}_c = \frac{\det h_c(x_i, x_j)}{\det(x_1, \ldots, x_n . N_c)^2} = \pm \left(\frac{\omega_{h_c}}{\omega_c} \right)^2 ,$$

welche an die Stelle der euklidischen Gaußkrümmung K_e tritt. Diese ist zwar verschieden von der zentroaffinen Gaußkrümmung $K_c \equiv 1$, aber in der Manhartschen Familie gilt ebenfalls

$$K_e = \frac{\det \mathrm{II}}{\det \mathrm{I}} = \pm \left(\frac{\omega_{h_e}}{\omega_e} \right)^2 .$$

Für die zugehörigen Volumenformen erhält man wie oben

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= \det(x_1, \ldots, x_n, N_\alpha) = |\widetilde{K}_c|^\alpha \, \omega_c \, , \\ \omega_{h_\alpha} &= \pm \sqrt{|\det(h_\alpha(x_i, x_j))|} = |\widetilde{K}_c|^{(1-n\alpha)/2} \, \omega_c \end{aligned}$$

und Spezialfälle dieser zentroaffinen Familie sind folgender Tabelle zu entnehmen:

α	N_α	ω_α		ω_{h_α}	
0	N_c	ω_c		$\omega_{h_c} = \|\widetilde{K}_c\|^{1/2} \, \omega_c$	zentroaffine Normale
$\frac{1}{n+2}$	N_b	ω_b	$=$	$\omega_{h_b} = \|\widetilde{K}_c\|^{\frac{1}{n+2}} \, \omega_c$	Blaschkesche Affinnormale
1	N_1	$\omega_1 = \|\widetilde{K}_c\| \, \omega_c$		$\omega_{h_1} = \|\widetilde{K}_c\|^{\frac{1-n}{2}} \, \omega_c$	(Ausnahme-Normale)

Wieder liegen in einem festen Flächenpunkt alle Scharnormalen in einer Ebene. Diese schneidet die Ebene der Manhartschen Normalen in der Blaschkeschen Affinnormalen.

Zur Bestimmung der *Minimalflächen* bezüglich der Volumina V_{N_α} und V_{h_α} (der Index α wird im folgenden wieder unterdrückt) kann man die

1. Variation von $V_N = \int_B \omega$ bzw. $V_h = \int_B \omega_h$ jetzt wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} V_N'(0) &= \int_B [(\alpha-1)\, n\, H + (\alpha(n+2)-1)|\widetilde{K}_c|^\alpha]\, f\, \omega \quad \text{bzw.} \\ V_h'(0) &= -\frac{1}{2}\int_B [(\alpha n+1)\, n\,(H - \operatorname{tr}\widehat{\nabla}T) \\ &\qquad\qquad -(\alpha(n+2-1)\, n\, |\widetilde{K}_c|^\alpha]\, f\, \omega_h \end{aligned}$$

mit der jeweiligen Mittleren Krümmung H und der kovarianten Ableitung des Tschebyscheff-Vektorfeldes T wie in der Manhartschen Familie und zusätzlich mit Termen, die die oben eingeführte Größe $\widetilde{K}_c$ enthalten. Als Spezialfälle hat man hier:

(1) $\boldsymbol{\alpha = 0}$ (Zentroaffine Geometrie)

$V_N'(0) = -\int_B (n+1)\, f\, \omega \quad (\overset{i.a.}{\neq} 0)$

Zum zentroaffinen Volumen V_N gibt es also keine Minimalflächen.

$V_h'(0) = -\frac{1}{2}\int_B n \operatorname{tr}(\widehat{\nabla}T)\, f\, \omega_h$

Die Extremalen hierzu sind die zentroaffinen Minimalflächen im Sinne von Wang.

(2) $\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{n+2}}$ (Äquiaffine Geometrie)

$V_N'(0) = V_h'(0) = \int_B (\alpha-1)\, n\, H\, f\, \omega$

(3) $\boldsymbol{\alpha = 1}$ (Ausnahme-Geometrie)

$V_N'(0) = \int_B (n+1)\, |\widetilde{K}_c|\, f\, \omega \quad (\overset{i.a.}{\neq} 0)$

Auch in dieser Geometrie gibt es im allgemeinen keine Minimalflächen bezüglich des Volumens V_N. Sie spielt eine Sonderrolle, ebenso wie die Geometrie der dritten Grundform in der Manhartschen Familie, in der bezüglich des Volumens V_N alle Flächen Minimalflächen sind.

Auch die 2. Variation $V_N''(0)$ (und auch $V_h''(0)$) ließe sich wieder angeben, liefert aber in keinem der Fälle einheitlichen Aussagen über den Typ des Extremums.

Konkrete Beispiele für zentroaffine h-Minimalflächen ($n = 2$) sind die eigentlichen Affinsphären mit Zentrum o (bei ihnen verschwindet

T, also auch $\widehat{\nabla} T$). Flächen, die gleichzeitig zentroaffine und äquiaffine Minimalflächen sind, wurden von Liu 1996 bestimmt (siehe [6]); zu ihnen gehört unter anderen wieder die Wendelfläche. Weiteres über Minimalflächen aus der zentroaffinen Familie scheint nicht bekannt zu sein.

Literatur

[1] Calabi, E. : *Hypersurfaces with maximal affinely invariant area.* Amer. J. Math **104** (1982), 91-126.

[2] Glässner E. : *Über die Minimalflächen der zweiten Fundamentalform.* Monatsh. Math. **78** (1974), 193-214.

[3] Heil, E. : *Relative and affine normals.* Result. Math. **13** (1988), 240-254.

[4] Keilbach R. : *Minimalflächen und Björlingsches Problem in der Relativgeometrie.* Dissertation, Würzburg 2000.

[5] Leichtweiss, K. : *Affine geometry of convex bodies.* Barth, Leipzig 1998.

[6] Liu, H. : *Classification of surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *which are centroaffine-minimal and equiaffine-minimal.* Bull. Belg. Math. Soc. **3** (1996), 577-583.

[7] Manhart, F. : *Zur Differentialgeometrie der 2. Grundform.* Forschungszentrum Graz, Berichte 219 (1984), 221-226.

[8] Wang, Ch. : *Centroaffine minimal hypersurfaces in* $\mathbb{R}^{n+1}$. Geom. Dedicata **51** (1994), 63-74.

H. Pabel, R. Keilbach
Mathematisches Institut
der Universität Würzburg
Am Hubland
D-97074 Würzburg
email: pabel@mathematik.uni-wuerzburg.de