

WILLMORE-TORI UND ISOTHERME KRÜMMUNGSLINIEN-PARAMETRISIERUNG

GABI PREISSLER

U. Pinkall hat 1985 Willmore-Tori angegeben [7], die Urbilder in der dreidimensionalen Einheitssphäre S^3 unter der Hopf-Abbildung sind. Unter diesen Willmore-Hopf-Tori ist auch der minimale Clifford-Torus, der eine Minimalfläche in der S^3 ist, vertreten. Der minimale Clifford-Torus ist eine Isothermfläche: geeignete stereographische Projektionen dieses Torus liefern Drehtori mit Radienverhältnis $1 : \sqrt{2}$ im \mathbb{R}^3 . Es stellt sich nun die Frage, ob es noch weitere Willmore-Hopf-Tori gibt, die Isothermflächen sind.

Deshalb betrachten wir nun allgemeiner Hopf-Zylinder, und gehen der folgenden zentralen Frage nach:

Wann ist ein Hopf-Zylinder eine Isothermfläche?

Im Abschnitt 1 behandeln wir hierzu Isothermflächen und in den Abschnitten 2 und 3 die Hopf-Abbildung $S^3 \rightarrow S^2$, die auch durch Quaternionen beschrieben werden kann. Dies liefert im Abschnitt 4 einen angenehmen Kalkül für Hopf-Zylinder und Hopf-Tori, der von Pinkall ebenfalls in [7] angegeben wurde.

Die Antwort auf die zentrale Frage wird im Abschnitt 5 in Satz 10 gegeben. Dort werden die Kurven in der zweidimensionalen Einheits-sphäre S^2 charakterisiert, die solche Hopf-Zylinder liefern. Es stellt sich heraus, dass die geodätische Krümmung dieser Kurven der Tangens einer linearen Funktion ihrer Bogenlänge ist. Diese Kurven sind außerdem durch eine konstante Torsion ausgezeichnet (Satz 11). Im Abschnitt 6 wenden wir die Ergebnisse speziell auf Willmore-Hopf-Tori an, zu denen J. Langer und D. Singer wesentliche Vorarbeiten leisteten [5].

Die Fragen nach Isothermflächen bzw. Willmore-Flächen sind von Möbius-invarianter Natur, da isotherme Parameternetze, Krümmungslinien, Willmore-Funktionale invariant unter Möbius-Transformationen sind. Z.B. sind Möbius-Transformierte von Isothermflächen wieder Isothermflächen.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 53C42, 53A05.

1. ISOTHERMFLÄCHEN

Definition 1. Ein hinreichend oft differenzierbares, nabelpunktfreies Flächenstück heißt eine Isothermfläche, wenn es eine Krümmungslinien-Parametrisierung auf dem Flächenstück gibt, die isotherm ist.

Eine Parametrisierung auf einem Flächenstück heißt dabei isotherm, wenn die Komponenten der ersten Fundamentalform die Gestalt

$$g_{11} = g_{22} = \lambda, \quad g_{12} = 0$$

mit einer positiven Funktion λ besitzen.

Wird für das Flächenstück z.B. die Differenzierbarkeitsklasse C^2 vorausgesetzt, so existiert eine isotherme Parametrisierung auf einem Flächenstück (s. dazu [3]). Im Folgenden seien alle betrachteten Größen hinreichend oft differenzierbar.

Bei einem isothermen Parameterlinien-Netz liegt sozusagen ein Netz aus infinitesimal kleinen Netzquadraten vor. Weitere Eigenschaften von Isothermflächen sind in dem Buch von Blaschke ([1], S. 325 ff) zu finden.

Lemma 2. Auf einem Flächenstück gibt es eine isotherme Parametrisierung. \iff Es existieren Parameter (u, v) auf dem Flächenstück mit

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \ln \left(\frac{g_{11}}{g_{22}} \right) = 0 \quad \text{und} \quad g_{12} = 0. \quad (1)$$

Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass — neben $g_{12} = 0$ — positive Funktionen U und V existieren mit

$$\frac{g_{11}}{g_{22}} = \frac{U}{V}, \quad (2)$$

wobei U lediglich vom Parameter u , V lediglich vom Parameter v abhängig ist. Die Parameter u, v sind also im Quotienten von g_{11} und g_{22} separierbar.

Beweis. „ \implies (1)“: Nach einer Parametertransformation erhält man $g_{11} = g_{22} = \lambda$, $g_{12} = 0$. Damit ist (1) trivial erfüllt.

„(1) \implies (2)“: Nach Integration folgt $\ln \left(\frac{g_{11}}{g_{22}} \right) = \tilde{U} + \tilde{V}$ mit \tilde{U} bzw. \tilde{V} lediglich vom Parameter u bzw. v abhängig. Somit gilt $\frac{g_{11}}{g_{22}} = \frac{e^{\tilde{U}}}{e^{-\tilde{V}}}$ und u, v sind im Quotienten separiert.

„(1) \iff (2)“: klar.

„ \iff (1)“: Nach (2) gilt $\frac{g_{11}}{U} = \frac{g_{22}}{V} =: \lambda$ bzw. $g_{11} = \lambda U$ und $g_{22} = \lambda V$. Eine Parametertransformation auf neue Parameter (\tilde{u}, \tilde{v}) mit $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} = \sqrt{U}$, $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} = \sqrt{V}$ und $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} = 0 = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}$ liefert die isotherme Gestalt der neuen

Metrikkomponenten $\tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{22} = \lambda$, ohne das Bild der Parameterlinien selbst zu ändern. \square

Beispiele für Isothermflächen sind die Drehflächen im \mathbb{R}^3 (s. z.B. [4], S. 107 f), die Quadriken (vgl. [4], S. 226 ff) und die Flächen konstanter mittlerer Krümmung (s. z.B. [4], S. 297, oder [10] für spezielle Tori).

2. DIE HOPF-ABBILDUNG

Definition 3. Die kanonische Projektion $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ des zweidimensionalen komplexen Vektorraums \mathbb{C}^2 ohne den Nullvektor 0 auf die komplexe projektive Gerade $P^1(\mathbb{C})$ mit $(w, z) \mapsto [w, z]$ heißt Hopf-Abbildung.

Hierbei bezeichnet $[w, z]$ die homogenen Koordinaten von (w, z) , $w, z \in \mathbb{C}$.

Mittels der kanonischen Isometrie $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $a + ib = z \mapsto (a, b)$ kann man sich die dreidimensionale Einheitssphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ auch im \mathbb{C}^2 eingebettet denken. Somit lässt sich die Hopf-Abbildung auf die S^3 einschränken, wir bezeichnen sie mit π . Wir erhalten also eine Submersion $\pi : S^3 \rightarrow S^2$, da die S^2 diffeomorph zur Einpunkt-Kompaktifizierung $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ der Gaußschen-Zahlenebene \mathbb{C} ist, und $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ beschreibt vom affinen Standpunkt her kommend mit ∞ als Fernpunkt gerade $P^1(\mathbb{C})$. Ein solcher Diffeomorphismus ist z.B. die stereographische Projektion $\sigma : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ mit Zentrum $(-1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, wobei man sich $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ als erweiterte Äquatorebene der S^2 vorstellt. Die Abbildungsgleichungen von σ^{-1} lauten

$$\sigma^{-1}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \begin{pmatrix} -x^2 - y^2 + 1 \\ 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Eine Darstellung von π erhält man aus der Verkettung $S^3 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \xrightarrow{\sigma^{-1}} S^2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ mit

$$(w, z) \mapsto \frac{z}{w} = \frac{\bar{w}z}{|w|^2}$$

$$\xrightarrow{\sigma^{-1}} \frac{1}{|\bar{w}z|^2 + |w|^4} (-|\bar{w}z|^2 + |w|^4, 2|w|^2\bar{w}z) = (|w|^2 - |z|^2, 2\bar{w}z),$$

wobei $w, z \in \mathbb{C}$, $|w|^2 + |z|^2 = 1$ und $\|\pi(w, z)\| = 1$ gilt. π hat folgende Eigenschaften:

- $\pi(\lambda w, \lambda z) = \pi(w, z)$ mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dies ist direkt aus der Konstruktion von π klar.

- Das Urbild $\pi^{-1}(p)$ eines Punktes $p \in S^2$ ist ein Großkreis in der S^3 , der als *Hopf-Faser von p* bezeichnet wird. Er entsteht, wenn man den komplexen eindimensionalen bzw. den reellen zweidimensionalen Vektorraum $\{(\lambda w, \lambda z) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ mit der S^3 schneidet.

Somit haben wir ein 1-Sphären-Bündel mit Totalraum S^3 , Basisraum S^2 und Bündelprojektion π erhalten (vgl. auch [8]).

3. QUATERNIONEN

Für den Kalkül zur Darstellung von Hopf-Zylindern, der von Pinkall in [7] eingeführt wurde, werden Quaternionen benötigt. In diesem Abschnitt wollen wir Eigenschaften der Quaternionen auflisten, die wir später brauchen.

Definition 4. *Eine Quaternion ist eine Summe $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ mit Komponenten $q_m \in \mathbb{R}, m = 0, \dots, 3$, wobei i, j, k imaginäre Einheiten sind, für die eine Multiplikation untereinander wie folgt definiert ist:*

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1, & 1 \cdot i &= i \cdot 1 = i, & 1 \cdot j &= j \cdot 1 = j, & 1 \cdot k &= k \cdot 1 = k, \\ i \cdot i &= i^2 = j^2 = k^2 = -1 & \text{und} \\ i \cdot j &= -j \cdot i = k, & j \cdot k &= -k \cdot j = i, & k \cdot i &= -i \cdot k = j. \end{aligned}$$

Damit ist eine nicht-kommutative, aber assoziative Multiplikation zweier Quaternionen $r \cdot q$ mittels Rückführung auf obige Rechenregeln durch das Distributivgesetz zusammen mit der Addition definiert.

Außerdem kann eine Quaternion q als 2-Tupel komplexer Zahlen mittels $q = w + zj$ mit $w = q_0 + iq_1, z = q_2 + iq_3 \in \mathbb{C}$ beschrieben werden, damit ist der vierdimensionale \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{H} aller Quaternionen ein zweidimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum.

Definition 5. $\bar{q} := q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3 = \bar{w} - zj$ heißt die konjugierte Quaternion. Weiter führen wir die Bezeichnung $\tilde{q} := q_0 - iq_1 + jq_2 + kq_3 = \bar{w} + zj$ ein, sowie ein positiv definites Skalarprodukt auf \mathbb{H} durch

$$(r, q) := \frac{1}{2}(r\bar{q} + q\bar{r}) = \sum_{l=0}^3 r_l q_l \in \mathbb{R}$$

und eine Norm $\|q\| := \sqrt{(q, q)}$.

Zwei Quaternionen r, q heißen orthogonal, wenn $(r, q) = 0$ gilt.

Lemma 6. Für $r, q, \alpha \in \mathbb{H}$ gilt $\|rq\| = \|r\|\|q\|$ und $\tilde{r}\tilde{q} = \tilde{r}\tilde{q}$ und $(\alpha r, \alpha q) = (r, q) = \|\alpha\|^2(r, q)$.

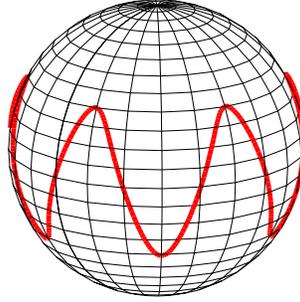


ABBILDUNG 1. Kurve p , gegeben durch $r = \arccos(\frac{1}{2} \sin 6\varphi)$ in geodätischen Polarkoordinaten (r, φ) bzgl. des Nordpols der S^2

$\{1, i, u, iu\}$ mit $u \in \text{lin}\{j, k\}$, $\|u\| = 1$, ist eine Orthonormalbasis in \mathbb{H} . (lin bedeutet die reelle lineare Hülle.)

Die S^3 wird im Folgenden als Menge der Einheitsquaternionen $S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$ betrachtet.

Eine S^2 ist der Schnitt der S^3 mit einem reellen dreidimensionalen Untervektorraum, wir nehmen hier $S^2 = S^3 \cap \text{lin}\{1, j, k\}$. Die Hopf-Abbildung π kann nun geschrieben werden als

$$\pi(q) = \tilde{q}q \quad \text{mit} \quad q = w + zj, \quad \|q\| = 1,$$

denn man berechnet:

$$\tilde{q}q = (\bar{w} + z\bar{j})(w + zj) = \bar{w}w + zjz\bar{j} + \bar{w}zj + zjw = |w|^2 - z\bar{z} + \bar{w}zj + z\bar{w}j = |w|^2 - |z|^2 + 2\bar{w}zj.$$

4. HOPF-ZYLINDER

Sei nun $p : [a, b] \rightarrow S^2$, $t \mapsto p(t)$, eine reguläre sphärische Kurve, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Wir wählen eine Kurve $y : [a, b] \rightarrow S^3$, $t \mapsto y(t)$, mit $\pi \circ y = p$. Dabei sei der Parameter t so gewählt, dass er der Bogenlängenparameter von y ist.

Definition 7. Die durch die Parametrisierung $x : [a, b] \times S^1 \rightarrow S^3$ mit $(t, \varphi) \mapsto e^{i\varphi} y(t)$ gegebene Fläche in der S^3 heißt der Hopf-Zylinder von p .

Ist die sphärische Kurve p geschlossen, d.h. $p(a) = p(b)$, so heißt der Hopf-Zylinder von p Hopf-Torus.

Ist p speziell ein Kreis, so heißt der Hopf-Torus von p Clifford-Torus.

Der Hopf-Torus ist eingebettet, wenn p eine einfach geschlossene Kurve ist. Die Abbildungen 1 und 2 zeigen eine geschlossene sphärische Kurve p und ein stereographisches Bild ihres Hopf-Torus in zwei Ansichten.

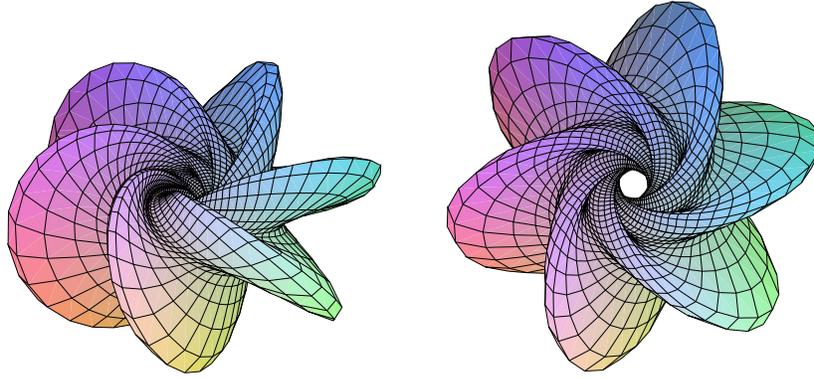


ABBILDUNG 2. Stereographisches Bild des Hopf-Torus von p aus Abb. 1

4.1. Begleitbein des Hopf-Zylinders. Die Kurve y kann speziell so gewählt werden, dass sie orthogonal zu den Hopf-Fasern ist, d.h. der Tangentenvektor y' von y nach t ist orthogonal zur partiellen Ableitung x_φ von x nach φ für alle φ . Die partiellen Ableitungen von x berechnen sich zu

$$x_t(t, \varphi) = e^{i\varphi} y'(t), \quad x_\varphi(t, \varphi) = e^{i\varphi} iy(t).$$

Da $x_\varphi \in \text{lin}\{y, iy\}$ und $y' \perp y$, ist $y' \in \{y, iy\}^\perp$. Daher existiert ein $u \in S^3 \cap \text{lin}\{j, k\}$ mit $y' = uy$ für jedes t . Man erhält nun nach Lemma 6 eine Orthonormalbasis in \mathbb{H}

$$\begin{aligned} x(t, \varphi) &= e^{i\varphi} y(t), \\ x_t(t, \varphi) &= e^{i\varphi} u(t)y(t), \\ x_\varphi(t, \varphi) &= e^{i\varphi} iy(t), \\ n(t, \varphi) &:= e^{i\varphi} iu(t)y(t). \end{aligned}$$

n ist das Normaleneinheitsvektorfeld des Hopf-Zylinders innerhalb der S^3 , $\{x, x_t, x_\varphi, n\}$ ist also ein Begleitbein des Hopf-Zylinders. Für die zugehörigen Metrikkomponenten hat man sofort

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da $(x_t, x_\varphi) = 0$, $\|x_\varphi\| = \|x_t\| = 1$. Hopf-Zylinder sind daher flach.

4.2. Die sphärische Kurve p . Für die sphärische Kurve p gilt $p' = 2\tilde{y}uy$ und daher $\|p'\| = 2$. Für den Bogenlängenparameter s von $p : [0, l] \rightarrow S^2$ folgt also $s = 2t$.

Lemma 8. Für die Krümmung κ und die Torsion τ einer sphärischen Kurve p als Raumkurve im \mathbb{R}^3 gilt

$$\kappa = \sqrt{\kappa_g^2 + 1}, \quad \tau = \frac{\frac{d}{ds}\kappa_g}{\kappa_g^2 + 1},$$

wobei κ_g die geodätische Krümmung von p in der S^2 und s der Bogenlängenparameter von p ist.

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ist klar mit $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$, wobei für die Normalkrümmung κ_n der S^2 natürlich $|\kappa_n| = 1$ gilt.

Der zweite Teil folgt daraus, dass das Begleitbein $\{\frac{dp}{ds}, S, p\}$ von p mit dem Seitenvektor $S := p \times \frac{dp}{ds}$ den Ableitungsgleichungen

$$\frac{d^2p}{ds^2} = \kappa_g S - p, \quad \frac{dS}{ds} = -\kappa_g \frac{dp}{ds}$$

genügt. Damit folgt

$$\tau = \frac{\det\left(\frac{dp}{ds}, \frac{d^2p}{ds^2}, \frac{d^3p}{ds^3}\right)}{\left\|\frac{dp}{ds} \times \frac{d^2p}{ds^2}\right\|^2} = \frac{\det\left(\frac{dp}{ds}, -p, \frac{d\kappa_g}{ds}S\right)}{\|\kappa_g p + S\|^2} = \frac{\frac{d}{ds}\kappa_g}{\kappa_g^2 + 1}.$$

□

Folgerung: Die Ableitungsgleichungen des Normalenvektors des Hopf-Zylinders lauten

$$\begin{aligned} n_t &= -2\kappa_g x_t - x_\varphi \\ n_\varphi &= -x_t. \end{aligned}$$

Beweis. Wegen $u' \perp u$ und $u, u' \in \text{lin}\{j, k\}$ gilt $u' = \|u'\|iu$. Die Norm $\|u'\|$ erhält man aus dem Vergleich der linken und rechten Seite der Gleichung $2\tilde{y}u'y - 4\tilde{y}y = p'' = 4\frac{d^2p}{ds^2} = 4(\kappa_g S - p)$, woraus erst $\tilde{y}u'y = 2\kappa_g S$, dann $\|u'\| = 2\kappa_g$ folgt. Der Seitenvektor S von p hat damit die Darstellung $S = \tilde{y}iuy$.

Man berechnet nun $n_t = e^{i\varphi}(iu'y + iuy') = e^{i\varphi}(2\kappa_g i i u y + i u y) = e^{i\varphi}(-2\kappa_g u y - i\|u\|^2 y) = -2\kappa_g x_t - x_\varphi$ mit Hilfe von $u' = 2\kappa_g i u$ und $\|u\| = 1$. □

Die 2. Fundamentalform und die Weingarten-Abbildung des Hopf-Zylinders sind damit gegeben durch

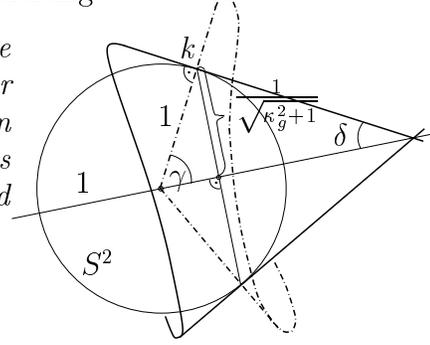
$$(h_{ik}) = (h_i^k) = \begin{pmatrix} 2\kappa_g & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit erhält man für die Hauptkrümmungen $\lambda_{1,2} = \kappa_g \pm \sqrt{\kappa_g^2 + 1} = \kappa_g \pm \kappa$, für die Hauptkrümmungsrichtungen $v_{1,2} = x_t + (-\kappa_g \pm \kappa)x_\varphi$ und für die mittlere Krümmung $H = \kappa_g$.

Es handelt sich um eine nabelpunktfreie Fläche ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), es existiert also lokal eine Krümmungslinien-Parametrisierung.

Lemma 9. *Sei p eine sphärische Kurve mit geodätischer Krümmung κ_g , sei $k(t)$ der Krümmungskreis von p an der Stelle t . Dann gilt für den halben Öffnungswinkel $\gamma(t)$ des Kegels mit Spitze im Sphärenmittelpunkt und Leitkreis $k(t)$ die Beziehung*

$$\cot \gamma(t) = \kappa_g(t) .$$



Bemerkung: Äquivalent dazu ist, dass für den halben Öffnungswinkel $\delta(t)$ des Berührkegels an die S^2 mit dem Leitkreis $k(t)$ gilt

$$\tan \delta(t) = \kappa_g(t) . \quad (3)$$

5. HOPF-ZYLINDER, DIE ISOTHERMFLÄCHEN SIND

Nun wollen wir den im Abschnitt 4 beschriebenen Zugang von Pinkall für Hopf-Zylinder auf Isothermflächen anwenden.

Sei der Hopf-Zylinder nun auf Krümmungslinien-Parameter (u, v) bezogen, d.h. wir haben eine Krümmungslinien-Parametrisierung $\tilde{x}(u, v) = x(t(u, v), \varphi(u, v))$ mit den partiellen Ableitungen proportional zu den Hauptkrümmungsrichtungen v_1, v_2

$$\begin{aligned} \tilde{x}_u &= \alpha(u, v)v_1 = \frac{\partial t}{\partial u}x_t + \frac{\partial \varphi}{\partial u}x_\varphi \\ \tilde{x}_v &= \beta(u, v)v_2 = \frac{\partial t}{\partial v}x_t + \frac{\partial \varphi}{\partial v}x_\varphi , \end{aligned}$$

wobei die Proportionalitätsfaktoren α, β nirgends Null sind. Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \alpha , \quad \frac{\partial t}{\partial v} = \beta \quad (4)$$

sowie

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \alpha(-\kappa_g + \kappa) , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\beta(\kappa_g + \kappa) . \quad (5)$$

Da lokal eine Krümmungslinien-Parametrisierung existiert, gelten die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial t}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial t}{\partial v} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right),$$

die, wenn man (4) und (5) einsetzt, äquivalent sind zu $(\kappa'_g := \frac{d\kappa_g}{dt}, \kappa' := \frac{d\kappa}{dt})$

$$\alpha_v = \beta_u \quad \text{und} \quad \beta_u(\kappa_g + \kappa) + (\kappa'_g + \kappa')\alpha\beta + \alpha_v(-\kappa_g + \kappa) + (-\kappa'_g + \kappa')\alpha\beta = 0.$$

Der zweite Teil lässt sich mit dem ersten äquivalent umformen, und man erhält

$$\alpha_v = \beta_u \quad \text{und} \quad \alpha_v\kappa + \kappa'\alpha\beta = 0. \quad (6)$$

Die Metrikkomponenten in Krümmungslinien-Parametern besitzen nun die Gestalt

$$\tilde{G} = (\tilde{g}_{ik}) = 2\kappa \begin{pmatrix} \alpha^2(\kappa - \kappa_g) & 0 \\ 0 & \beta^2(\kappa + \kappa_g) \end{pmatrix} \quad (7)$$

mit $\kappa_g = \kappa_g(t)$, $\kappa = \kappa(t)$ und $t = t(u, v)$.

Leiten wir den zweiten Teil von (6) partiell nach v ab, so bekommen wir

$$\alpha_{vv}\kappa + 2\alpha_v\beta\kappa' + \alpha\beta_v\kappa' + \alpha\beta^2\kappa'' = 0. \quad (8)$$

Wir zeigen nun den

Satz 10. *Unter den Hopf-Zylindern sind genau jene Flächen Isothermflächen, deren Bild unter der Hopf-Abbildung π eine sphärische Kurve $p : [0, l] \rightarrow S^2$ mit Bogenlängenparameter s in der S^2 ist mit geodätischer Krümmung*

$$\kappa_g(s) = \tan \left(\frac{c}{2}s + d \right) \quad \text{mit geeigneten Konstanten } c, d \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere sind die Clifford-Tori ($c = 0$) Hopf-Tori, die gleichzeitig auch Isothermflächen sind.

Beweis. Wenn κ' verschwindet, ist dort $\kappa = \text{konst.}$ und daraus folgt nach Lemma 8, dass $\kappa_g = \text{konst.}$ ist. p ist dann ein Kreis und die Behauptung ist mit $c = 0$ erfüllt.

Also können wir im Folgenden voraussetzen, dass wir ein Teilintervall finden, auf dem κ' überall nicht verschwindet.

Wir setzen \tilde{G} in die Bedingung (1) für Isothermflächen ein:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \ln \left(\frac{\tilde{g}_{11}}{\tilde{g}_{22}} \right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(2 \ln \alpha - 2 \ln \beta + \ln(\kappa - \kappa_g) - \ln(\kappa + \kappa_g) \right) \quad (\text{mit (7)}) \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \left(2 \frac{\alpha_v}{\alpha} - 2 \frac{\beta_v}{\beta} + \frac{(\kappa - \kappa_g)'}{\kappa - \kappa_g} - \frac{(\kappa + \kappa_g)'}{\kappa + \kappa_g} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \left(\beta \left(-2 \frac{\kappa'}{\kappa} + 2(\kappa_g \kappa' - \kappa'_g \kappa) \right) - 2 \frac{\beta_v}{\beta} \right) \quad (\text{mit } \kappa^2 - \kappa_g^2 = 1 \text{ und (6)}) \\
&= 2 \left(\beta_u \left(-\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa_g \kappa' - \kappa'_g \kappa \right) + \beta \alpha \left(-\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa_g \kappa' - \kappa'_g \kappa \right)' \right. \\
&\quad \left. - \frac{\beta_{uv} \beta - \beta_u \beta_v}{\beta^2} \right) \\
&= 2 \left(\alpha_v \left(-\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa_g \kappa' - \kappa'_g \kappa \right) - \alpha_v \frac{\kappa}{\kappa'} \left(-\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa_g \kappa' - \kappa'_g \kappa \right)' \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha_{vv} \beta - \alpha_v \beta_v}{\beta^2} \right) \quad (\text{mit (6)}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{2}{\beta^2 \kappa} \left(\alpha_v \beta^2 \kappa \left(-\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa_g \kappa' - \kappa'_g \kappa \right) - \alpha_v \beta^2 \frac{\kappa^2}{\kappa'} \left(-\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa_g \kappa' - \kappa'_g \kappa \right)' + \right. \\
&\quad \left. + \beta (2 \alpha_v \beta \kappa' + \alpha \beta_v \kappa' + \alpha \beta^2 \kappa'') + \alpha_v \beta_v \kappa \right) \quad (\text{mit (6), (8)}) \\
&= \frac{2}{\beta^2 \kappa} \left(\alpha_v \beta^2 \kappa \left(\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa_g \kappa' - \kappa'_g \kappa \right) \right. \\
&\quad \left. - \alpha_v \beta^2 \frac{\kappa^2}{\kappa'} \left(-\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa_g \kappa' - \kappa'_g \kappa \right)' + \left(-\alpha_v \beta^2 \frac{\kappa}{\kappa'} \right) \kappa'' \right) \quad (\text{mit (6)}) \\
&= \frac{2 \alpha_v}{\kappa \kappa'} \left(\kappa \kappa' \left(\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa_g \kappa' - \kappa'_g \kappa \right) - \kappa^2 \left(-\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa_g \kappa' - \kappa'_g \kappa \right)' - \kappa \kappa'' \right). \quad (9)
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen $\kappa' = \frac{\kappa_g \kappa'_g}{\kappa}$ (Ableitung einer Formel aus Lemma 8) sowie

$$\begin{aligned}
\kappa'' &= \frac{\kappa_g \kappa_g'' \kappa^2 + (\kappa'_g)^2}{\kappa^3} \quad \text{folgt} \\
(\kappa')^2 \kappa &= \frac{\kappa_g^2 (\kappa'_g)^2}{\kappa} \quad \text{und} \quad \kappa' \kappa^2 = \kappa_g \kappa'_g \kappa \quad (10)
\end{aligned}$$

und durch Ableiten erhält man

$$\left(-\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa_g \kappa' - \kappa'_g \kappa\right)' = -\frac{\kappa''}{\kappa} + \frac{(\kappa')^2}{\kappa^2} + \kappa_g \kappa'' - \kappa''_g \kappa. \quad (11)$$

Setzt man (11) in (9) ein und verwendet (10), so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_v \left((\kappa')^2 \kappa \kappa_g - \kappa'_g \kappa^2 \kappa' - \kappa_g \kappa'' \kappa^2 + \kappa''_g \kappa^3 \right) \\ &= \alpha_v \left(\frac{\kappa_g^3 (\kappa'_g)^2}{\kappa} - \kappa_g (\kappa'_g)^2 \kappa - \frac{\kappa_g}{\kappa} (\kappa_g \kappa''_g \kappa^2 + (\kappa'_g)^2) + \kappa''_g \kappa^3 \right) \\ &= \frac{\alpha_v}{\kappa} \left(\kappa_g^3 (\kappa'_g)^2 - \kappa_g (\kappa'_g)^2 \kappa^2 - \kappa_g^2 \kappa''_g \kappa^2 - \kappa_g (\kappa'_g)^2 + \kappa''_g \kappa^4 \right) \\ &= \frac{\alpha_v}{\kappa} \left(-2\kappa_g (\kappa'_g)^2 + \kappa''_g (1 + \kappa_g^2) \right) \quad (\text{mit mehrf. Anw. v. } \kappa^2 = 1 + \kappa_g^2) \\ &= \frac{\alpha_v (1 + \kappa_g^2)^2}{\kappa} \left(\frac{\kappa'_g}{1 + \kappa_g^2} \right)' \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $\alpha = \alpha(u)$ lediglich von u abhängig oder $\frac{\kappa'_g}{1 + \kappa_g^2} = c$ mit $c = \text{konst.} \in \mathbb{R}$ ist. Im ersten Fall bedeutet dies, dass mit (6) $\kappa_g = \text{konst.}$ ist, und p wie oben ein Kreis ist. Im zweiten Fall integriert man erneut und erhält

$$\kappa_g(t) = \tan(ct + d),$$

wobei $c, d \in \mathbb{R}$ geeignete Integrationskonstanten mit $|ct + d| < \frac{\pi}{2}$ sind und $s = 2t$ gilt. \square

5.1. Charakterisierungen der Kurve p aus Satz 10.

Satz 11. *Eine sphärische Kurve p aus Satz 10, die den Hopf-Zylindern, welche Isothermflächen sind, zugrunde liegt, zeichnet sich dadurch aus, dass sie konstante Torsion als Raumkurve besitzt. Für ihre Krümmung κ gilt dann:*

$$\kappa(s) = \frac{1}{\cos(\tau s + d)}.$$

Beweis. Dies folgt sofort aus Lemma 8 mit $2\tau = 2\frac{d\kappa_g/ds}{\kappa_g^2 + 1} = \frac{\kappa'_g}{\kappa_g^2 + 1} = c$ und $\kappa = \sqrt{\kappa_g^2 + 1}$, wenn die Beziehung aus Satz 10 eingesetzt wird mit $|\tau s + d| < \frac{\pi}{2}$. \square

Satz 12. *Die sphärische Kurve p aus Satz 10, die den Hopf-Zylindern, welche auch Isothermflächen sind, zugrunde liegt, ist dadurch gekennzeichnet, dass der halbe Öffnungswinkel der Berührkegel an ihre Krümmungskreise, linear von ihrer Bogenlänge abhängt.*

Beweis. Ein Vergleich von Satz 10 mit (3) liefert $\delta(s) = \frac{c}{2}s + d = \tau s + d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ geeignet. \square

Die Abbildung 3 zeigt den Klothoiden-ähnlichen Verlauf von p in S^2 für einige Werte von $c \neq 0$ und $d = 0$.

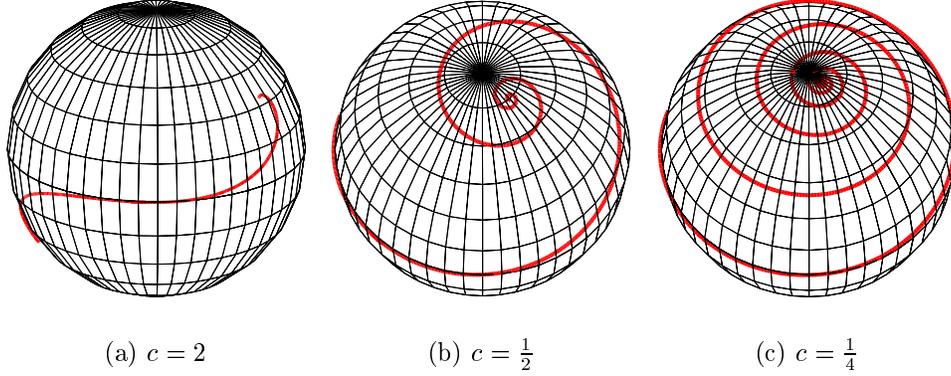


ABBILDUNG 3. Die sphärische Kurve p aus Satz 10 mit den Anfangsbedingungen: p berührt den Äquator für $s = 0$ und $\kappa_g(0) = 0$.

6. WILLMORE-HOPF-TORI

Sei M eine geschlossene orientierbare zweidimensionale Mannigfaltigkeit. *Willmore-Flächen* sind immertierte Flächen $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit euklidischer mittlerer Krümmung H und Volumenelement dO , die kritische Punkte des Funktionals

$$W(f, M) := \int_{f(M)} H^2 dO$$

sind (vgl. zur Übersicht [6] oder [9]). Dieses Variationsproblem ist Möbius-invariant (s. z.B. [13]).

Unter der Familie der Drehtori im \mathbb{R}^3 sind genau die Tori mit Radienverhältnis $1 : \sqrt{2}$ die Willmore-Flächen (vgl. [12]).

Wir interessieren uns hier aber für Tori in der Sphäre S^3 , die Willmore-Flächen sind. Deshalb müssen wir den Begriff der Willmore-Fläche auf Flächen in der S^3 verallgemeinern. Dies hat J. Weiner 1978 in [11] formuliert. Er definierte eine Willmore-Fläche in einem Raum konstanter Krümmung \tilde{K} wie folgt:

Definition 13. Sei M eine geschlossene orientierbare zweidimensionale Mannigfaltigkeit, Σ ein Raum mit konstanter Krümmung \tilde{K} . $f : M \rightarrow \Sigma$ heißt Willmore-Fläche, wenn f kritischer Punkt des Funktionals

$$\tilde{W}(f, M) := \int_{f(M)} (H^2 + \tilde{K}) d\tilde{O}$$

ist, wobei H die mittlere Krümmung und $d\tilde{O}$ das Volumenelement von $f(M)$ in Σ ist.

Speziell für Hopf-Tori gilt nun nach Pinkall [7] mit $\tilde{K} = 1$

$$\begin{aligned} \tilde{W}(f, M) &= \int_{f(M)} (H^2 + \tilde{K}) d\tilde{O} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{l}{2}} (\kappa_g^2(t) + 1) dt d\varphi \\ &= \pi \int_0^l (\kappa_g^2(s) + 1) ds = \pi \int_0^l \kappa^2(s) ds . \end{aligned}$$

Somit gilt für einfach geschlossene sphärische Kurven p :

$f(M)$ ist genau dann ein Willmore-Hopf-Torus, wenn p kritischer Punkt von $\oint (\kappa_g(s)^2 + 1) ds$ ist.

Diese Kurven p wurden 1987 von Langer und Singer [5] unter dem Namen *elastische Kurven* untersucht. Sie erhielten das folgende Ergebnis:

Satz 14. *Es gibt unendlich viele einfach geschlossene elastische Kurven p in der S^2 , und zwar die mit geodätischer Krümmung*

$$\kappa_g(s) = k_0 \operatorname{cn}\left(\frac{k_0 s}{2\omega}, \omega\right) ,$$

wobei die maximale geodätische Krümmung k_0 durch

$$k_0 = \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{1 - 2\omega^2}}$$

mit $\omega^2 \in [0, \frac{1}{2})$ gegeben ist, und cn der Cosinus amplitudinis (der Jacobische elliptische Cosinus) ist.

Bemerkung: Der Jacobische elliptische Cosinus entsteht durch

$$\operatorname{cn}(u, \omega) := \cos \phi(u, \omega)$$

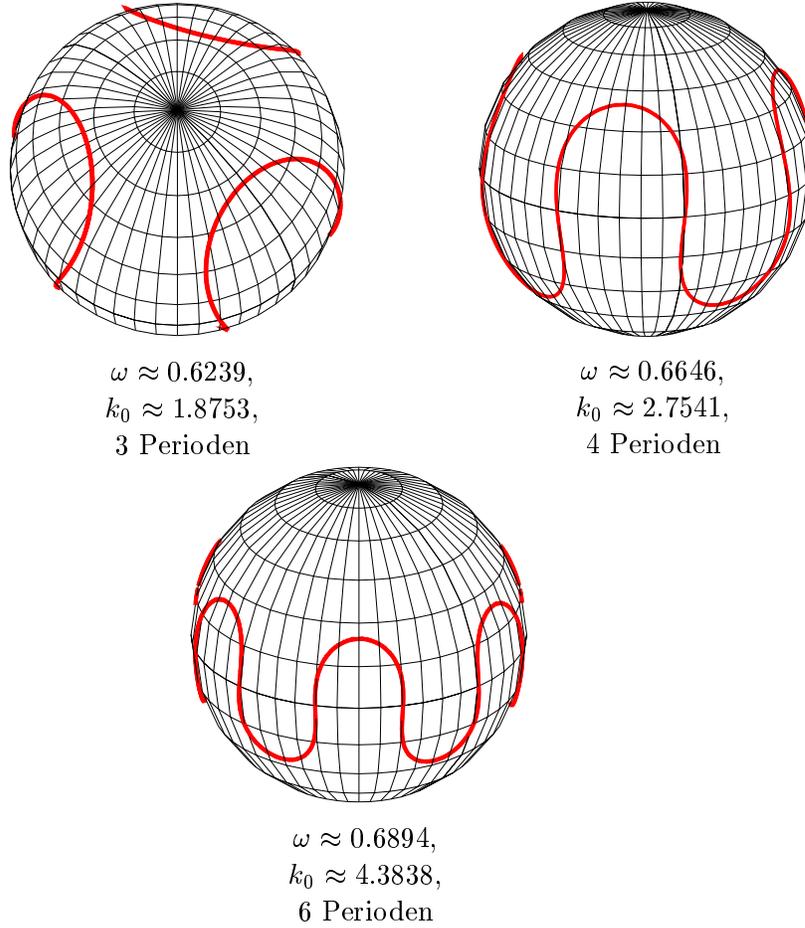


ABBILDUNG 4. Verschiedene geschlossene elastische Kurven p

mit $\phi(u, \omega)$ als Umkehrfunktion des elliptischen Integrals erster Gattung

$$u = F(\phi, \omega) = \int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 t}}, \quad \omega \in (0, 1).$$

$\text{cn}(-, \omega)$ ist eine gerade periodische Funktion mit Wertebereich $[-1, 1]$ und Periode $4K(\omega)$, wobei $K(\omega) := F(\frac{\pi}{2}, \omega)$ das vollständige elliptische Integral erster Gattung ist (s. z.B. [2]).

Die Abbildungen 4 und 5 zeigen geschlossene elastische sphärische Kurven für verschiedene Werte von ω und ein stereographisches Bild eines Hopf-Torus in zwei Ansichten für ein bestimmtes ω .

Ein Vergleich der Sätze 10 und 14 liefert die

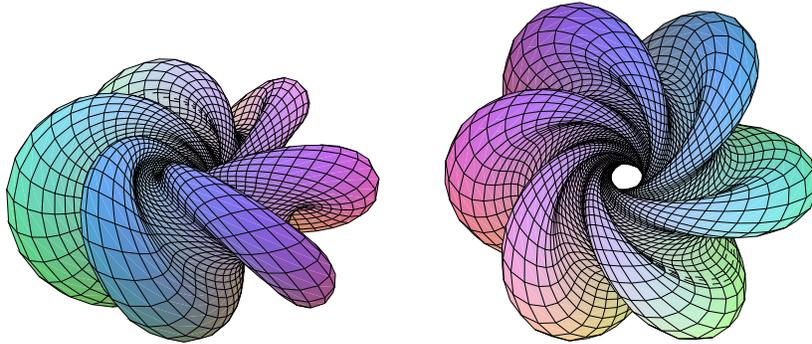


ABBILDUNG 5. Stereographisches Bild des Willmore-Hopf-Torus von p aus Abb. 4 mit 6 Perioden

Folgerung: *Unter den Willmore-Hopf-Tori ist lediglich der minimale Clifford-Torus eine Isothermfläche.*

Beweis. Die beiden Formeln für κ_g in den Sätzen 10 und 14 müssen übereinstimmen, dies ist nur für $\kappa_g = 0$, d.h. für p ein Großkreis, möglich. Also liegt ein spezieller Clifford-Torus vor. Ein Hopf-Torus besitzt aber die mittlere Krümmung $H = \kappa_g$. Damit folgt, dass unser Torus eine Minimalfläche in der S^3 ist, also ist es der minimale Clifford-Torus. \square

Die Abbildungen 1 bis 5 wurden mit dem Computeralgebra-System Maple erzeugt.

LITERATUR

- [1] Blaschke W., *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Bd. III, Springer, 1929.
- [2] Byrd, P.F., Friedman, M.D., *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer, 1971.
- [3] Chern, S., Hartman, P., Wintner, A., On Isothermic Coordinates, *Comment. Math. Helv.* **28** (1954), 301–309.
- [4] Eisenhart, L.P., *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Dover Publications, 1909.
- [5] Langer J., Singer D.A., Curve-Straightening in Riemannian Manifolds, *Ann. Global Anal. Geom.* **5**, No. 2 (1987), 133–150.
- [6] Pinkall, U., Sterling I., Willmore Surfaces, *Math. Intelligencer* **9**, No. 2 (1987), 38–43.
- [7] Pinkall, U., Hopf Tori in S^3 , *Invent. Math.* **81** (1985), S. 379–386.
- [8] Sharpe, R.W., *Differential Geometry*, Springer, 1997.
- [9] Sterling, I., Willmore Surfaces and Computers, *IMA Vol. Math. Appl.* **51** (1993), 131–136.
- [10] Walter, R., Explicit Examples to the H -Problem of Heinz Hopf, *Geom. Dedicata* **23** (1987), 187–213.

- [11] Weiner, J.L., On a Problem of Chen, Willmore et al, *Indiana Math. J.*, **27**, No. 1 (1978), 19–35.
- [12] Willmore, T.J., Note on Embedded Surfaces, *An. Şti. Univ. “Al. I. Cuza” Iaşi Sect. Ia Mat. (N.S.)* **11B** (1965), 493–496.
- [13] White, J.H., A Global Invariant of Conformal Mappings in Space, *Proc. Amer. Math. Soc.* **38**, No. 1 (1973), 162–164.

Gabi Preissler
Institut für Geometrie
Technische Universität Dresden
Zellescher Weg 12-14
D-01062 Dresden
email: preissler@math.tu-dresden.de