ÜBER DIE LÖSBARKEIT NICHTPARAMETRISCHER FAIRINGPROBLEME

ULRICH REIF

ZUSAMMENFASSUNG. Sei $\mathbf{s}$ der Graph einer Funktion $s : \Omega \to \mathbb{R}$ über dem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Die Güte von $\mathbf{s}$ kann durch Funktionale gemessen werden, die von den Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 und dem Flächeninhalt a von $\mathbf{s}$ abhängen. Wir betrachten hier genauer Funktionale vom Typ $F_{\psi,p}(s) := \int_\Omega (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^p n \, d\mu + \psi(a)$, wobei ψ eine nichtnegative unterhalbstetige Funktion ist, $n := (1 + \|\nabla s\|^2)^{1/2}$ und $1 < p < \infty$. Wir zeigen, dass es für eine gegebene Referenzfläche $s_0 \in H^{1,\infty}(\Omega)$ und eine beliebige Konstante $M > 0$ eine Funktion s gibt, die $F_{\psi,p}$ auf der Menge $\{s \in H^{2,2p}(\Omega) : \|s - s_0\|_{1,\infty} \le M\}$ minimiert. Die Menge der zulässigen Funktionen kann darüber hinaus auch durch weitere Nebenbedingungen eingeschränkt weren. Insbesondere kann die Interpolation von Punkt- und Gradientendaten gefordert werden.

1. Einleitung

Die ästhetische Qualität einer Freiformfläche ist ein Begriff, der sich einem Menschen intuitiv erschließt. Jedoch ist es eine nichttriviale Aufgabe, diese Eigenschaft in die Sprache der Mathematik zu übersetzen.

Geeignete Konzepte basieren auf geometrischen Invarianten, und insbesondere auf den Krümmungen der Fläche. Für eine gegebene Fläche $\mathbf{s}$ mit Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 ist beispielsweise die *Willmore-Energie* [4, 3, 2]

$$F_{\mathrm{W}}(\mathbf{s}) := \int_{\mathbf{s}} (\kappa_1 + \kappa_2)^2 \, d\mu(\mathbf{s}) \tag{1}$$

ein geometrisch sinnvolles Funktional, wobei $\mu(\mathbf{s})$ das Flächenmaß auf $\mathbf{s}$ bezeichnet. Über den Satz von Gauss-Bonnet ist damit die *totale Krümmung*

$$F_{\mathrm{T}} := \int_{\mathbf{s}} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \, d\mu(\mathbf{s}) \tag{2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 49J10, 65D10, 65D17.

 ISBN 3-902233-00-1

eng verknüpft. Sie dient als Prototyp für die Klasse der hier betrachteten Funktionale.

In diesem Report beweisen wir einen Existenzsatz für das *Fairingproblem*, wie es sich in zahlreichen Anwendungen stellt: Die Aufgabe besteht darin, zu einer gegebenen *Referenzfläche* $\mathbf{s}_0$ eine nahegelegene Fläche $\mathbf{s}^*$ mit optimierter Glattheit zu finden. Wir beschränken uns hier auf Flächen in nichtparametrischer Form, d.h. auf Flächen, die Graphen reellwertiger Funktionen über einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sind.

Die vorliegende Arbeit stellt eine Zusammenfassung der in [1] vorgestellten Ergebnisse dar.

2. Definitionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes, beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand und μ das Lebesguemaß auf Ω. Die Normen der Funktionenräume $L^p(\Omega)$ und $H^{n,p}(\Omega)$ werden mit $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_{n,p}$ bezeichnet. Im Folgenden identifizieren wir eine Funktion $s : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der durch ihren Graphen definierten Fläche. Für eine hinreichend glatte Funktion s bezeichnen wir die Hauptkrümmgen mit κ_1, κ_2 und den Flächeninhalt mit $a(s)$. Ferner sei $n := (1 + \|\nabla s\|^2)^{1/2}$.

Wir beginnnen mit der Definition einer Klasse von Glattheitsfunktionalen, die die totale Krümmung verallgemeinern.

Definition 2.1. *Sei $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ unterhalbstetig und $1 < p < \infty$. Dann ist das Glattheitsfunktional $F_{\psi,p} : H^{2,2p}(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch*

$$F_{\psi,p}(s) = \int_\Omega (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^p n \, d\mu + \psi(a(s)). \tag{3}$$

Nebenbedingungen können mittels einer stetigen Funktion

$$\Gamma : H^{2,2p}(\Omega) \to \mathbb{R} \tag{4}$$

beschrieben werden, indem man den Raum der zulässigen Funktionen auf die Menge

$$S_\Gamma := \{s \in H^{2,2p}(\Omega) : \Gamma(s) = 0\} \tag{5}$$

einschränkt.

Für die Referenzfläche setzen wir $s_0 \in H^{1,\infty}(\Omega)$ voraus. Zusätzlich zu den oben genannten Nebenbedingungen schränken wir den Raum der zulässigen Funktionen ein auf

$$S_{s_0}^M := \{s \in H^{2,2p}(\Omega) : \|s - s_0\|_{1,\infty} \le M\}, \quad M \in \mathbb{R}^+. \tag{6}$$

3. Eigenschaften des Funktionals

Wir beginnen mit einer expliziten Formel für $F_{\psi,p}$. Bezeichnen g und h die erste bzw. zweite Fundamentalform von s, dann sind die Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 die Eigenwerte von hg^{-1}. Also ist

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \big(\operatorname{trace}(hg^{-1})\big)^2 - 2\det(hg^{-1}). \tag{7}$$

Dieser Ausdruck ist eine Bilinearform in den zweiten partiellen Ableitungen $\delta := [s_{xx}, s_{xy}, s_{yy}]^T$ von s, da h linear von δ abhängt. Mit den Abkürzungen

$$s_1 := 1 + s_x^2, \quad s_2 := 1 + s_y^2, \quad s_3 := s_x s_y \tag{8}$$

und der Matrix

$$Q := n^{-6+1/p} \begin{bmatrix} s_2^2 & -2s_2s_3 & s_3^2 \\ -2s_2s_3 & 2n^2 + 4s_3^2 & -2s_1s_3 \\ s_3^2 & -2s_1s_3 & s_1^2 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

erhalten wir für den Integranden

$$\Phi_p(\delta, Q) := \langle \delta, Q\delta \rangle^p = (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^p n. \tag{10}$$

Im Rest dieses Abschnitts geben wir Abschätzungen für Φ_p und das Funktional

$$F_{0,p}(s) = \int_\Omega \Phi_p(\delta, Q)\, d\mu \tag{11}$$

an.

Lemma 3.1. *Alle Eigenwerte von Q liegen im Intervall $[1/(2n^6), 5]$, also*

$$\|\delta\|^2/(2n^6) \le \langle \delta, Q\delta \rangle \le 5\|\delta\|^2, \tag{12}$$

wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Beweis. Q ist positiv semidefinit, da $\langle \delta, Q\delta \rangle = (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) n^{1/p} \ge 0$. Die Beträge der Eigenwerte werden durch die Zeilensummennorm $\|\cdot\|_R$ von Q und Q^{-1} abgeschätzt. Mit $n^2 \ge \max\{1, s_1, s_2, 2|s_3|\}$ erhält man $\|Q\|_R \le 5n^{-2+1/p} \le 5$. Die Inverse von Q ist

$$Q^{-1} = n^{2-1/p} \begin{bmatrix} s_1^2 & s_1s_3 & s_3^2 \\ s_1s_3 & n^2/2 + s_3^2 & s_2s_3 \\ s_3^2 & s_2s_3 & s_2^2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

und ähnliche Abschätzungen liefern $\|Q^{-1}\|_R \le 2n^{6-1/p} \le 2n^6$. □

Lemma 3.2. *Die Funktion Φ_p ist konvex im ersten Argument, d.h.,*

$$\Phi_p(\delta', Q) - \Phi_p(\delta, Q) \ge D_\delta \Phi_p(\delta, Q)(\delta' - \delta) \tag{14}$$

für alle $\delta, \delta' \in \mathbb{R}^3$.

Beweis. Nach dem Satz von Taylor genügt es zu zeigen, dass die zweite Ableitung $D_\delta^2\Phi_p$ von Φ_p nach dem ersten Argument überall positiv semidefinit ist. Für beliebige $\delta, \Delta \in \mathbb{R}^3$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &D_\delta^2\Phi_p(\delta, Q)(\Delta, \Delta) = \\ &2p\langle\delta, Q\delta\rangle^{p-2}\big(2(p-1)\langle\delta, Q\Delta\rangle^2 + \langle\delta, Q\delta\rangle\langle\Delta, Q\Delta\rangle\big) \geq 0, \end{aligned} \tag{15}$$

da Q nach Lemma 3.1 positiv definit ist. □

Lemma 3.3. *Seien Q, Q' zwei Matrizen gemäß (9) und $C_p := 10^{p-1}p$. Dann gilt*

$$|\Phi_p(\delta, Q) - \Phi_p(\delta, Q')| \leq C_p\|\delta\|^{2p}\,\|Q - Q'\|_R. \tag{16}$$

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Abschätzung

$$|x^p - y^p| \leq p(x+y)^{p-1}\,|x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}_0^+ \tag{17}$$

und $\|Q + Q'\|_R \leq \|Q\|_R + \|Q'\|_R \leq 10$. □

Lemma 3.4. *Es gibt Konstanten $C_0, C_1 \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $s \in H^{2,2p}(\Omega)$ gilt*

$$C_0(1 + \|s\|_{1,\infty}^2)^{-3p}\|\delta\|_{2p}^{2p} \leq F_{0,p}(s) \leq C_1\|\delta\|_{2p}^{2p}. \tag{18}$$

Beweis. Aufgrund der Äquivalenz von Normen in $\mathbb{R}^3$ gibt es Konstanten $C_0', C_1' \in \mathbb{R}^+$ mit

$$C_0'\|\delta\|_{2p}^{2p} \leq \int_\Omega \|\delta\|^{2p}\,d\mu \leq C_1'\|\delta\|_{2p}^{2p}. \tag{19}$$

Die Funktion n ist beschränkt durch $\|n\|_\infty \leq (1 + \|s\|_{1,\infty}^2)^{1/2}$, also ist gemäß Lemma 3.1

$$2^{-p}(1 + \|s\|_{1,\infty}^2)^{-3p}\|\delta\|^{2p} \leq \Phi_p(\delta, Q) \leq 5^p\|\delta\|^{2p}. \tag{20}$$

Die Integration dieser Ungleichung führt nach Anwendung von (19) auf die Behauptung. □

4. Ein Existenzsatz

Theorem 4.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes, beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand, ψ eine nichtnegative unterhalbstetige Funktion und $1 < p < \infty$. Ferner sei $s_0 \in H^{1,\infty}(\Omega)$ ein Referenzfläche, $M \in \mathbb{R}^+$ eine Konstante und $\Gamma : H^{2,2p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann besitzt das Variationsproblem*

$$F_{\psi,p}(s) \to \min, \quad \|s - s_0\|_{1,\infty} \leq M, \quad \Gamma(s) = 0 \tag{21}$$

eine Lösung s^* in $H^{2,2p}(\Omega)$, falls die Menge der zulässigen Funktionen nicht leer ist.

Beweis. Die Menge der zulässigen Funktionen

$$S := S_\Gamma \cap S_{s_0}^M = \{s \in H^{2,2p}(\Omega) : \Gamma(s) = 0 \wedge \|s - s_0\|_{1,\infty} \leq M\} \quad (22)$$

ist abgeschlossen, da Γ und $\|\cdot\|_{1,\infty}$ stetig sind. Falls S leer ist, ist nichts zu zeigen. Anderenfalls gilt

$$F_{\inf} := \inf_{s\in S} F_{\psi,p}(s) \in \mathbb{R}_0^+, \quad (23)$$

da $F_{\psi,p}$ nichtnegativ ist. Sei $\{s^j \in S : j \in \mathbb{N}\}$ eine minimierende Folge in S,

$$\lim_{j\to\infty} F_{\psi,p}(s^j) = F_{\inf}. \quad (24)$$

Wegen $\|s - s_0\|_{1,\infty} \leq M$ ist die Folge $\{s^j\}$ in $H^{1,\infty}(\Omega)$ beschränkt durch

$$\|s^j\|_{1,\infty} \leq M + \|s_0\|_{1,\infty}. \quad (25)$$

Damit gilt

$$(1 + \|s^j\|_{1,\infty}^2)^{-3p} \geq \left(1 + (M + \|s_0\|_{1,\infty})^2\right)^{-3p} =: C_2. \quad (26)$$

Die konvergente Folge $\{F_{\psi,p}(s^j)\}$ ist beschränkt, $F_{\sup} := \sup_j F_{\psi,p}(s^j) \in \mathbb{R}_0^+$. Nun erhalten wir mit Lemma 3.4

$$F_{\sup} \geq F_{\psi,p}(s^j) \geq F_{0,p}(s^j) \geq C_0(1 + \|s^j\|_{1,\infty}^2)^{-3p}\|\delta^j\|_{2p}^{2p} \geq C_0C_2\|\delta^j\|_{2p}^{2p}. \quad (27)$$

Also ist

$$\|\delta^j\|_{2p}^{2p} \leq F_{\sup}C_0^{-1}C_2^{-1}. \quad (28)$$

Die letzte Abschätzung und (25) implizieren, dass die Folge $\{s^j\}$ in $H^{2,2p}(\Omega)$ beschränkt ist. Aufgrund der Reflexivität dieses Raums existiert eine schwach konvergente Teilfolge, die wir wieder mit $\{s^j\}$ bezeichnen,

$$s^j \rightharpoonup s^* \quad \text{schwach in} \quad H^{2,2p}(\Omega). \quad (29)$$

Da S abgeschlossen ist, erfüllt der Grenzwert s^* die Nebenbedingungen, also $s^* \in S$. Es bleibt zu zeigen, dass $F_{\psi,p}$ durch s^* minimiert wird, d.h., $F_{\psi,p}(s^*) = F_{\inf}$. Dazu betrachten wir die Differenz

$$\begin{aligned} F_{\psi,p}(s^j) - F_{\psi,p}(s^*) = &\int_\Omega \left(\Phi_p(\delta^j, Q^j) - \Phi_p(\delta^j, Q^*)\right) d\mu \\ &+ \int_\Omega \left(\Phi_p(\delta^j, Q^*) - \Phi_p(\delta^*, Q^*)\right) d\mu \\ &+ \left(\psi(a(s^j)) - \psi(a(s^*))\right) \end{aligned} \quad (30)$$

für $j \to \infty$. Die drei Summanden werden der Reihe nach diskutiert. Für den ersten Summanden erhalten wir mit Lemma 3.3 und den Gleichungen (28), (19)

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \big(\Phi_p(\delta^j, Q^j) - \Phi_p(\delta^j, Q^*)\big)\, d\mu\right| &\le C_p \int_\Omega \|\delta^j\|^{2p}\, \|Q^j - Q^*\|_R \, d\mu \\ &\le C_p \|Q^j - Q^*\|_\infty \int_\Omega \|\delta^j\|^{2p}\, d\mu \qquad (31) \\ &\le F_{\sup} C_p C_0' C_0^{-1} C_2^{-1} \|Q^j - Q^*\|_\infty,\end{aligned}$$

wobei die Norm der Matrix als die Summe der Normen ihrer Einträge zu verstehen ist. Schwache Konvergenz in $H^{2,2p}(\Omega)$ impliziert starke Konvergenz in $H^{1,\infty}(\Omega)$. Also konvergiert $\|Q^j - Q^*\|_\infty$ gegen Null und es gilt

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \big(\Phi_p(\delta^j, Q^j) - \Phi_p(\delta^j, Q^*)\big)\, d\mu = 0. \qquad (32)$$

Für den zweiten Summanden in (30) gilt mit Lemma 3.2

$$\int_\Omega \big(\Phi_p(\delta^j, Q^*) - \Phi_p(\delta^*, Q^*)\big)\, d\mu \ge \int_\Omega D_\delta \Phi_p(\delta^*, Q^*)(\delta^j - \delta^*)\, d\mu. \qquad (33)$$

Sei $q := 2p/(2p-1)$. Dann ist $D_\delta \Phi_p(\delta^*, Q^*) \in L^q(\Omega)$, wobei $L^q(\Omega)$ der Dualraum von $L^{2p}(\Omega)$ ist. Schwache Konvergenz von $\{s^j\}$ in $H^{2,2p}(\Omega)$ impliziert schwache Konvergenz von $\{\delta^j\}$ in $L^{2p}(\Omega)$. Folglich ist

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega D_\delta \Phi_p(\delta^*, Q^*)(\delta^j - \delta^*)\, d\mu = 0, \qquad (34)$$

und

$$\liminf_{j\to\infty} \int_\Omega \big(\Phi_p(\delta^j, Q^*) - \Phi_p(\delta^*, Q^*)\big)\, d\mu \ge 0. \qquad (35)$$

Für den dritten Summanden in (30) bedingt die starke Konvergenz von $\{s^j\}$ in $H^{1,\infty}(\Omega)$ die Konvergenz der Flächeninhalte, $\lim_{j\in\mathbb{N}} a(s^j) = a(s^*)$. Da ψ als unterhalbstetig vorausgesetzt wurde, erhalten wir

$$\liminf_{j\to\infty} \psi(a(s^j)) - \psi(a(s^*)) = 0. \qquad (36)$$

Schließlich ergibt sich durch die Kombination von (32), (35), and (36)

$$F_{\inf} = \liminf_{j\to\infty} F_{\psi,p}(s^j) \ge F_{\psi,p}(s^*) \ge F_{\inf}. \qquad (37)$$

Also ist $F_{\psi,p}(s^*) = F_{\inf}$ und damit s^* eine Lösung des Variationsproblems (21). $\square$

Literatur

[1] A. Kipp and U. Reif. On the existence of solutions to non-parametric fairing problems. *Journal on Mathematical Analysis and Applications*, 238:540–550, 1999.

[2] G. Preissler. *Möbius-Differentialgeometrie von Hyperflächen*. PhD thesis, Universität Stuttgart, 1996.

[3] L. Simon. Existence of Willmore surfaces. *Proc. Cen. Math. Anal. Aust. Nat. Univ.*, 3:187–216, 1986.

[4] T.J. Willmore. Note on embedded surfaces. *Analele Stiintifice ale Universitatii "al I Cuza" din Iasi (Sect. Ia)*, 11:493–496, 1965.

Ulrich Reif
Fachbereich Mathematik, TU Darmstadt
Schlossgartenstr. 7
D-64289 Darmstadt
email: reif@mathematik.tu-darmstadt.de