

KONSTRUKTION VON VERBINDUNGSFLÄCHEN MITTELS TRIGONOMETRISCHER BINDEFUNKTIONEN

MARTA SZILVÁSI-NAGY

ABSTRACT. Surfaces generated by convex combination of three surfaces or two surfaces and two curves, respectively are presented. The blending functions are trigonometric functions inspired by the parametric equations of the circle and the sphere. The connection between the resulting surface and the input components along the boundaries of the parameter domain is investigated.

EINLEITUNG

Trigonometrische Bindefunktionen wurden von G. Bär in [1] und auch in der konvexen Kombination von Kreissegmenten für die Konstruktion krümmungstetiger Spline-Kurven in [3] angewendet. Wenn $\mathbf{c}_i^L(t)$ und $\mathbf{c}_i^R(t)$, $t \in [0, 1]$, $i = 1 \dots n$, zwei Kreissegmente mit gemeinsamen Endpunkten beschreiben, dann ist das Kurvenstück

$$\mathbf{r}_i(t) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\mathbf{c}_i^L(t) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\mathbf{c}_i^R(t), \quad t \in [0, 1], \quad i = 1 \dots n \quad (1)$$

ein Segment der Spline-Kurve, die diese Endpunkte interpoliert, und deren Krümmung im linken Endpunkt $t = 0$ (bzw. im rechten Endpunkt $t = 1$) mit der Krümmung des Kreises $\mathbf{c}_i^L(t)$ (bzw. $\mathbf{c}_i^R(t)$) übereinstimmt. Wenn $n + 2$ Punkte im Raum E^3 mit den Ortsvektoren \mathbf{p}_i ($i = 0 \dots n + 1$) gegeben sind, und der Kreissegment (im spez. Fall die Strecke) $\mathbf{c}_i^L(t)$ durch die Punkte \mathbf{p}_{i-1} , \mathbf{p}_i , \mathbf{p}_{i+1} und $\mathbf{c}_i^R(t)$ durch die Punkte \mathbf{p}_i , \mathbf{p}_{i+1} , \mathbf{p}_{i+2} bestimmt sind, dann führt die Definition (1) zu einer krümmungstetigen Spline-Kurve, die die Punkte \mathbf{p}_i ($i = 1 \dots n$) interpoliert.

Die Idee, diese Konstruktion auf Flächen zu übertragen, d.h. die konvexe Kombination von drei Flächen mit den trigonometrischen Koeffizienten $\cos^2 u \cos^2 v$, $\cos^2 u \sin^2 v$ und $\sin^2 u$ zu bilden, wurde von H. Stachel vorgeschlagen, und hat zu den folgenden Untersuchungen geführt.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 68U07.

KONVEXE KOMBINATION VON DREI FLÄCHEN

Es seien drei differenzierbare Flächenstücke $\mathbf{r}_1(u, v)$, $\mathbf{r}_2(u, v)$ und $\mathbf{r}_3(u, v)$ über dem Parametergebiet $[0, 1] \times [0, 1]$ gegeben so, dass

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial v} \neq \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

erfüllt ist. Wir betrachten die konvexe Kombination

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= \cos^2\left(u\frac{\pi}{2}\right) \cos^2\left(v\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{r}_1(u, v) + \cos^2\left(u\frac{\pi}{2}\right) \sin^2\left(v\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{r}_2(u, v) \\ &\quad + \sin^2\left(u\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{r}_3(u, v) \end{aligned}$$

dieser drei Flächen über dem Parametergebiet $[0, 1] \times [0, 1]$, und möchten erreichen, dass sich dieses Flächenstück an die Randkurven der Komponente anschließt. Zu diesem Zweck fügen wir eine Korrektionsfunktion $\mathbf{q}(u, v)$ hinzu. Nach der Einführung der Abkürzungen $\bar{u} = u\pi/2$, $\bar{v} = v\pi/2$ wird die Vektorfunktion der gesuchten Fläche in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= \cos^2 \bar{u} \cos^2 \bar{v} \mathbf{r}_1(u, v) + \cos^2 \bar{u} \sin^2 \bar{v} \mathbf{r}_2(u, v) + \sin^2 \bar{u} \mathbf{r}_3(u, v) \\ &\quad - \mathbf{q}(u, v), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \end{aligned} \quad (2)$$

geschrieben. Die Randkurven sind

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0, v) &= \cos^2 \bar{v} \mathbf{r}_1(0, v) + \sin^2 \bar{v} \mathbf{r}_2(0, v) - \mathbf{q}(0, v) \\ \mathbf{r}(1, v) &= \mathbf{r}_3(1, v) - \mathbf{q}(1, v) \\ \mathbf{r}(u, 0) &= \cos^2 \bar{u} \mathbf{r}_1(u, 0) + \sin^2 \bar{u} \mathbf{r}_3(u, 0) - \mathbf{q}(u, 0) \\ \mathbf{r}(u, 1) &= \cos^2 \bar{u} \mathbf{r}_2(u, 1) + \sin^2 \bar{u} \mathbf{r}_3(u, 1) - \mathbf{q}(u, 1) \end{aligned}$$

Aus den Anforderungen

$$\mathbf{r}(1, v) = \mathbf{r}_3(1, v), \quad \mathbf{r}(u, 0) = \mathbf{r}_1(u, 0), \quad \mathbf{r}(u, 1) = \mathbf{r}_2(u, 1)$$

folgt es, dass $\mathbf{q}(u, v)$ von den Randkurven der Komponente abhängt, allerdings sie ist aus den obigen Vektorgleichungen nicht direkt zu berechnen. Es ist leicht zu prüfen, dass die Funktion $\mathbf{r}(u, v)$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(u, v) &= [\mathbf{r}_3(u, 0) - \mathbf{r}_1(u, 0)] \sin^2 \bar{u} \cos^2 \bar{v} \\ &\quad + [\mathbf{r}_3(u, 1) - \mathbf{r}_2(u, 1)] \sin^2 \bar{u} \sin^2 \bar{v} \end{aligned} \quad (3)$$

die obigen Bedingungen erfüllt. Mit dieser Korrektionsfunktion ist die Fläche $\mathbf{r}(u, v)$ in (2) eindeutig bestimmt. Über die Randkurve $\mathbf{r}(0, v)$ können wir feststellen, dass sie wegen $\mathbf{r}(0, 0) = \mathbf{r}_1(0, 0)$ und $\mathbf{r}(0, 1) = \mathbf{r}_2(0, 1)$ je einen Eckpunkt der Pflaster $\mathbf{r}_1(u, v)$ und $\mathbf{r}_2(u, v)$ verbindet. Um die Überlappung von $\mathbf{r}(u, v)$ mit $\mathbf{r}_2(u, v)$ zu vermeiden, wählen wir für $\mathbf{r}_1(u, v)$ und $\mathbf{r}_2(u, v)$ dreiseitige Flächenstücke so, dass $\mathbf{r}_1(0, v) =$

$\mathbf{r}_2(0, v) = \mathbf{c}$ ein gemeinsamer singulärer Punkt dieser Flächenstücke ist. In diesem Fall gilt $\mathbf{r}(0, 0) = \mathbf{c}$ auch, und die in (2) und (3) definierte Fläche ist ebenfalls dreieitig, deren Randkurven mit je einer Randkurve der Komponente übereinstimmen (Bild 1).

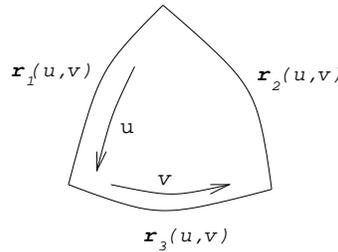


ABBILDUNG 1. Degeneriertes Viereck-Pflaster.

BEISPIELE

In dem ersten Beispiel ist $\mathbf{r}_1(u, v)$ eine Kegelfläche, $\mathbf{r}_2(u, v)$ ein ebenes Dreieck und $\mathbf{r}_3(u, v)$ eine elliptische Zylinderfläche (Bild 2). Die aus diesen Komponenten generierte Fläche passt längs der Randkurven zu den gegebenen Flächen. Betrachten wir die Erweiterungen der drei Flächen wie folgt:

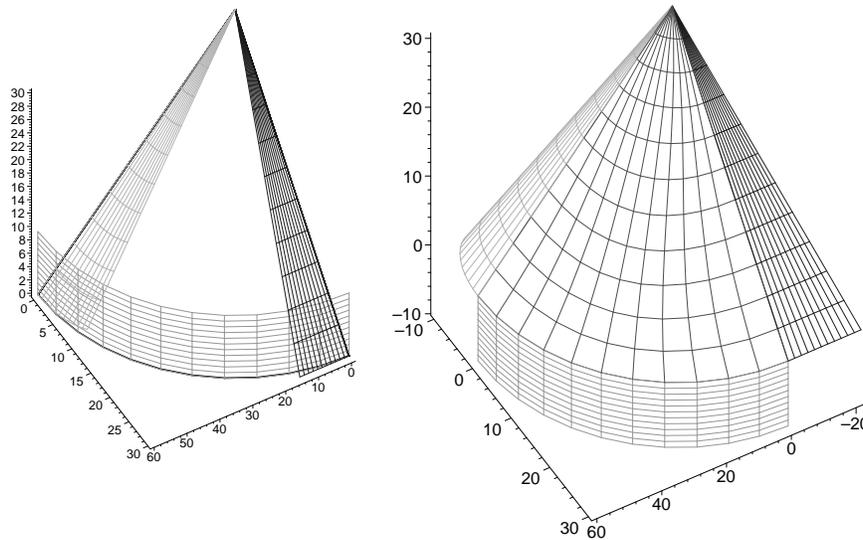
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(u, v), & \quad (u, v) \in [0, 1] \times [-1.5, 0], \\ \mathbf{r}_2(u, v), & \quad (u, v) \in [0, 1] \times [1, 2.5], \\ \mathbf{r}_3(u, v), & \quad (u, v) \in [1, 2] \times [0, 1], \end{aligned}$$

so bilden diese ein dreieckförmiges Loch. Das erzeugte Flächenstück $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ füllt dieses Loch aus (Bild 3). Längs der linken und rechten Randkurven schließen sich die Flächenstücke tangentialstetig aneinander, längs der dritten Randkurve $\mathbf{r}(1, v)$ sind aber die Tangentialebenen von $\mathbf{r}(u, v)$ und $\mathbf{r}_3(u, v)$ unterschiedlich.

Die Untersuchungen haben gezeigt, wenn die Parallelitätsbedingungen für die Tangenten der entsprechenden Randkurven in den Eckpunkten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u}(1, 0) \parallel \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial u}(1, 0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v}(1, 0) \parallel \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial v}(1, 0); \text{ bzw.} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u}(1, 1) \parallel \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial u}(1, 1) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}(1, 1) \parallel \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial v}(1, 1) \end{aligned}$$

erfüllt sind, dann ist der Übergang zwischen der Fläche $\mathbf{r}(u, v)$ und den benachbarten Flächen tangentialstetig (Bild 4).



LINKS: ABB. 2. Die drei Eingabe-Flächen.

RECHTS: ABB. 3. Die definierte Fläche und Erweiterungen der Eingabe-Flächen.

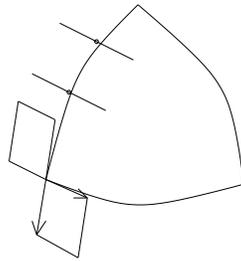
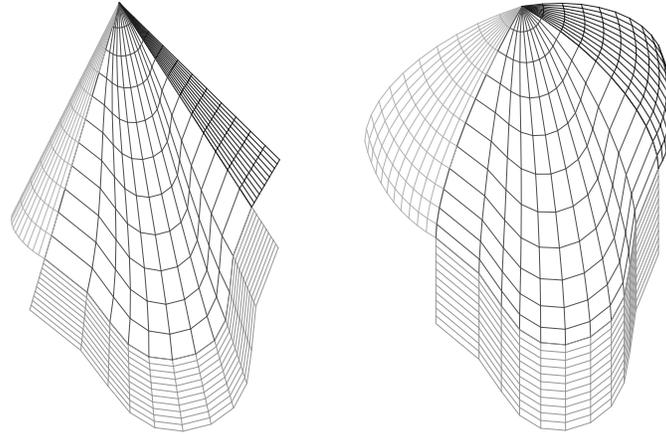


ABBILDUNG 4. Bedingung der Tangentialstetigkeit.

Im zweiten Beispiel genügt die Fläche $\mathbf{r}_3(u, v)$ diesen Bedingungen. Sie ist eine Kegelfläche mit einer Bézier Leitkurve fünften Grades. Längs aller drei Randkurven ist der Übergang jetzt tangentialstetig (Bild 5).

Im dritten Beispiel sind die gegebenen Flächen zwei Ellipsoiden und eine zylindrische Fläche (Bild 6). Hier schließen sich die Flächen aneinander ebenfalls tangentialstetig an. Im singulären Punkt sind die Tangenten der u -Parameterlinien alle horizontal, in diesem Sinne existiert eine gemeinsame Tangentialebene im gemeinsamen singulären Punkt.

Da die dreiseitigen Flächen in den CAD-Systemen als degenerierte vierseitige Flächen beschrieben sind, ist die dargestellte Konstruktion von praktischer Bedeutung.



LINKS: ABB. 5. Tangentialstetig verknüpfte Flächen.
 RECHTS: ABB. 6. Zwei Ellipsoide und eine zylindrische Fläche.

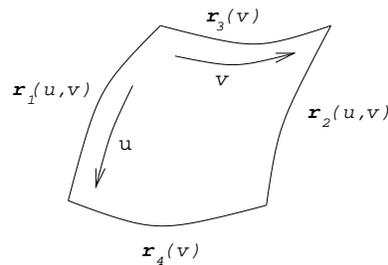


ABBILDUNG 7. Das Parametergebiet und die Eingabedaten.

KONVEXE KOMBINATION VON ZWEI FLÄCHEN UND ZWEI KURVEN

Es seien zwei differenzierbare Flächenstücke $\mathbf{r}_1(u, v)$ und $\mathbf{r}_2(u, v)$ über dem Parametergebiet $[0, 1] \times [0, 1]$ gegeben, die überall einen nichtverschwindenden Flächennormalen haben. Weiterhin seien $\mathbf{r}_3(v)$ und $\mathbf{r}_4(v)$, $v \in [0, 1]$ zwei differenzierbare Kurven, die je zwei Eckpunkte von $\mathbf{r}_1(u, v)$ und $\mathbf{r}_2(u, v)$ verbinden, d.h.

$$\mathbf{r}_3(0) = \mathbf{r}_1(0, 0), \quad \mathbf{r}_3(1) = \mathbf{r}_2(0, 1), \quad \mathbf{r}_4(0) = \mathbf{r}_1(1, 0), \quad \mathbf{r}_4(1) = \mathbf{r}_2(1, 1)$$

gelten, und überall eine nichtverschwindende Tangente haben (Bild 7).

Wir definieren ein Flächenstück $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ so, dass es die Randkurven $v = 0$ und $v = 1$ der Flächen $\mathbf{r}_1(u, v)$ und $\mathbf{r}_2(u, v)$ verbindet, d.h. die Bedingungen

$$\mathbf{r}(u, 0) = \mathbf{r}_1(u, 0) \quad \text{und} \quad \mathbf{r}(u, 1) = \mathbf{r}_2(u, 1), \quad u \in [0, 1]$$

erfüllt sind. Weiterhin soll es die zwei gegebenen Kurven längs der Ränder $u = 0$ und $u = 1$ interpolieren, d.h. auch die Bedingungen

$$\mathbf{r}(0, v) = \mathbf{r}_3(v) \quad \text{und} \quad \mathbf{r}(1, v) = \mathbf{r}_4(v), \quad v \in [0, 1]$$

erfüllt sind. Die gesuchte Fläche ist durch die Vektorfunktion

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) = & \cos^2 \bar{v} \mathbf{r}_1(u, v) + \sin^2 \bar{v} \mathbf{r}_2(u, v) \\ & + \cos^2 \bar{u} \mathbf{r}_3(v) + \sin^2 \bar{u} \mathbf{r}_4(v) - \mathbf{q}(u, v) \end{aligned} \quad (4)$$

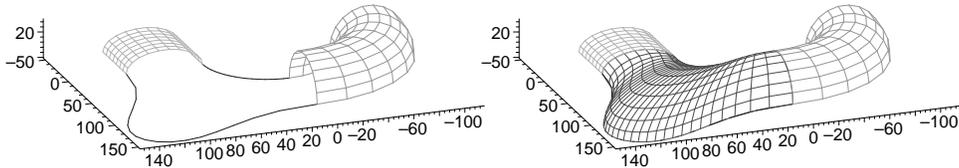
definiert, wo

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(u, v) = & [\cos^2 \bar{v} \mathbf{r}_1(0, v) + \sin^2 \bar{v} \mathbf{r}_2(0, v)] \cos^2 \bar{u} \\ & + [\cos^2 \bar{v} \mathbf{r}_1(1, v) + \sin^2 \bar{v} \mathbf{r}_2(1, v)] \sin^2 \bar{u}, \\ (u, v) \in & [0, 1] \times [0, 1], \quad \bar{u} = u \frac{\pi}{2}, \quad \bar{v} = v \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Die in (4) und (5) definierte Fläche genügt den Bedingungen, was leicht zu prüfen ist.

BEISPIELE

Im ersten Beispiel $\mathbf{r}_1(u, v)$ ist eine Zylinderfläche und $\mathbf{r}_2(u, v)$ ist ein Torus. Die gezeichneten Flächenstücke sind über den Parametergebieten $[0, 1] \times [-1, 0]$ bzw. $[0, 1] \times [1, 2]$ gezeichnet. Die Kurve $\mathbf{r}_3(v)$ ist eine Ellipse und $\mathbf{r}_4(v)$ ist eine Bézier Kurve fünften Grades (Bild 8a). Die definierte Verbindungsfläche füllt die Lücke zwischen $\mathbf{r}_1(u, v)$ und $\mathbf{r}_2(u, v)$ tangentialstetig aus, und interpoliert die vorgegebenen Randkurven $\mathbf{r}_3(v)$ und $\mathbf{r}_4(v)$ (Bild 8b).



LINKS: ABB. 8A. Die Erweiterungen der Eingabe-Flächen und die Eingabe-Kurven.

RECHTS: ABB. 8B. Die generierte Fläche mit den Eingabedaten.

Die Untersuchungen haben gezeigt, dass unter den Bedingungen

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v}(0, 0) = \frac{d\mathbf{r}_3}{dv}(0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v}(1, 0) = \frac{d\mathbf{r}_4}{dv}(0)$$

der Übergang zwischen $\mathbf{r}(u, v)$ und $\mathbf{r}_1(u, v)$ längs der Randkurve $v = 0$ tangentialstetig ist (Bild 9).

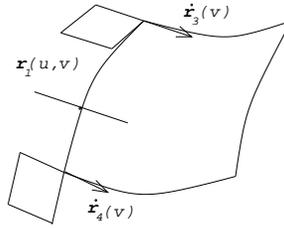


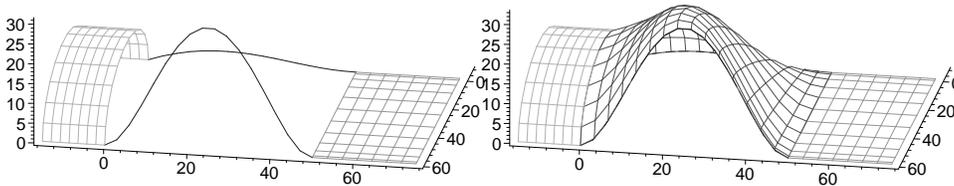
ABBILDUNG 9. Stetigkeitsbedingung.

Ähnlicherweise ist der Übergang zwischen $\mathbf{r}(u, v)$ und $\mathbf{r}_2(u, v)$ unter den Bedingungen

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}(1, 0) = \frac{d\mathbf{r}_3}{dv}(1) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}(1, 1) = \frac{d\mathbf{r}_4}{dv}(1)$$

tangentialstetig.

Im zweiten Beispiel ist die Fläche $\mathbf{r}_1(u, v)$ eine Zylinderfläche und $\mathbf{r}_2(u, v)$ ein ebenes Pflaster. Beide vorgegebenen Randkurven sind Bézier Kurven fünften Grades (Bild 10a). Die Verbindungsfläche ist im Bild 10b gezeigt.



LINKS: ABB. 10A. Eingabedaten.

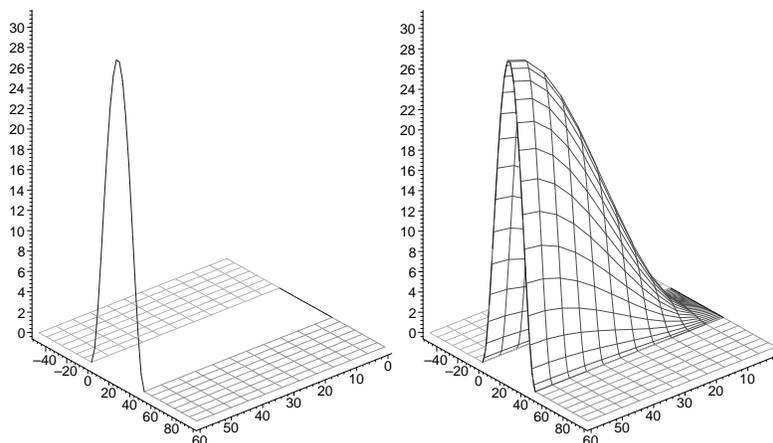
RECHTS: ABB. 10B. Verbindungsfläche.

Im dritten Beispiel sind zwei identische Flächenstücke in einer Ebene gegeben, deren Erweiterungen im Bild 11a gezeichnet sind. Die Kurve $\mathbf{r}_3(v)$ ist eine Strecke und die Kurve $\mathbf{r}_4(v)$ ist dieselbe Bézier Kurve wie im zweiten Beispiel. Die Verbindungsfläche schließt sich an beide ebenen Pflaster tangentialstetig an (Bild 11b).

Die Berechnungen und die Figuren wurden mit Maple VR5 erstellt.

ZUSAMMENFASSUNG

Zwei Flächenkonstruktionen sind präsentiert. In der einen wird die konvexe Kombination von drei Flächen mit einer Korrektionsfunktion gebildet, in der anderen sind die Komponente der Kombination zwei Flächen und zwei Kurven. Die verwendete Methode ist scheinbar ähnlich an die Konstruktion der Coons-schen Flächen [2]. Ein wesentlicher Unterschied besteht aber darin, dass hier die Fläche aus den über



LINKS: ABB. 11A. Ebene Pflaster und Randkurven.

RECHTS: ABB. 11B. Verbindungsfläche mit vorgeschriebenen Randkurven.

demselben Parametergebiet definierten Flächen kombiniert wird. In der Coons-schen Methode stehen im Gegensatz dazu Randkurven und andere, längs der Randkurven definierte Daten in der Kombination. Die konstruierten Flächen können für das Ausfüllen von Lücken und Löchern angewendet werden. Die trigonometrischen Bindefunktionen lassen sich in rationale Funktionen aufgrund der rationalen Parametrisierung des Kreises umwandeln (Bemerkung von G. Weiß).

Die weitere Forschung richtet sich auf die Untersuchung der Stetigkeitsprobleme und die Formänderungsmöglichkeiten durch Einführen geeigneter Formparameter (Bemerkung von G. Bär) aus.

LITERATUR

- [1] Bär, G., Parametrische Interpolation empirischer Raumkurven, *ZAMM* **57** (1977), 305–314.
- [2] Hoschek, J. und Lasser, D., Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung, 2. Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart 1992.
- [3] Szilvási-Nagy, M. und P. Vendel, T., Generating curves and swept surfaces by blended circles, *Computer Aided Design* **17** (2000), 197–206.

Marta Szilvási-Nagy
 Geometria Tanszék
 Budapesti Műszaki és Gazdaságtudomány Egyetem
 Egry József u. 1
 H-1521 Budapest
 email: szilvasi@math.bme.hu