Proc. 33. Süddeutsches Differentialgeometriekolloquium
Wien, 23. Mai 2008
pp. 58 – 60
ISBN 978-3-902233-04-2

Konforme Breite in der Möbius-Geometrie

Eberhard Teufel

Kurzfassung: Die Breite eines konvexen Körpers in der euklidischen Ebene zu einer vorgegebenen Richtung ist der Abstand seiner zugehörigen parallelen Stützgeraden. Konvexe Körper konstanter Breite sind die wohlbekannten "Gleichdicke".

Dieser erweiterte Abstract beinhaltet gemeinsame Resultate mit R. Langevin (Dijon). Wir definieren eine konform invariante Breite für Paare von Kurven in der Möbius-Ebene. Wir charakterisieren insbesondere die Paare von Kurven konstanter konformer Breite.

In der Möbius-Ebene besitzt eine Kurve keine konform mit ihr verbundenen "Stützgeraden". Konform invariant mit der Kurve verbunden sind erst ihre Schmiegkreise. Jedoch gibt es für Kreise der Möbius-Ebene keine "Parallel-Relation". Zur einer Übertragung des Begriffs der "Breite" aus der euklidischen Geoemtrie in die Möbius-Geometrie erinnern wir den wohlbekannten Satz der euklidischen Geometrie: "Gleichdicke" sind charakterisiert durch die Eigenschaft der "Doppelnormalen", d.h. je zwei parallele Normalen sind gleich.

Wir betrachten nun in der Möbius-Ebene Paare regulär parametrisierter Kurven $X_1(t), X_2(t), t \in I$, deren Punkte paarweise durch Doppelnormalkreise $N(t)$ aufeinander bezogen sind, d.h. $X_1(t), X_2(t) \in N(t)$, $X_1'(t), X_2'(t) \perp N(t)$ $(t \in I, I$,Intervall in $\mathbb{R})$. In Gegenpunkten $X_1(t), X_2(t)$ nehmen wir die Schmiegkriese $osc_1(t), osc_2(t)$, und wir bezeichnen die "Distanz" zwischen $osc_1(t)$ und $osc_2(t)$ als *konforme Breite* $w_c(t)$. (Definition 1.)

Eine konform invariante Distanz zwischen zwei Kreisen C_1 und C_2 der euklidischen Ebene ist zum Beispiel durch die klassische "inversive Distanz"

$$w_c(C_1, C_2) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2 \times}$$

gegeben; hierbei sind r_1, r_2 die Radien von C_1, C_2 und d ist der euklidische Abstand der Mittelpunkte von C_1 und C_2 (H. S. M. Coxeter, 1966)

Im Folgenden betrachten wir speziell Kurvenpaare mit konstanter konformer Breite.

Beispiel: Triviales Beispiel sind zwei Kreise C_1, C_2, die ein Steiner-Büschel ($C_1 \cap C_2 =$ zwei Punkte) oder ein Poncelet-Büschel ($C_1 \cap C_2 = \emptyset$) aufspannen. Das assoziierte Büschel der gemeinsamen Orthogonalkreise gibt die Doppelnormalkreise des Kurvenpaares, und da die Schmiegkreise mit C_1 und C_2 zusammenfallen ist ihre konforme Breite trivialerweise konstant längs der Kurve.

Bemerkung: *K*urven konstanter euklidischer Breite ("Gleichdicke") haben im Allgemeinen nicht konstante konforme Breite.

Kurvenpaare $X_1(t), X_2(t)$ der Definition 1 kann man auch als Einhüllende einer Kreisschar $\Sigma(t)$ betrachten, wobei gilt $X_1(t), X_2(t) \in \Sigma(t)$, $X_1'(t)$, $X_2'(t)$ tangential $\Sigma(t)$, $t \in I$. Im Modell der Möbius-Ebene im Lorentz-Raum $\mathbb{R}_1^4$, realisiert als projektiver Abschluß des Lichtkegels, werden Kreise Σ der Möbius-Ebene repräsentiert durch Punkte σ auf der de Sitter-Späre Λ^3. Der Kreisschar $\Sigma(t)$ entspricht also eine Kurve $\sigma(t)$ auf der de Sitter-Sphäre Λ^3. Die Möbius-Gruppe ist in diesem Modell die Lorentz-Gruppe. Differentialgeometrische Invarianten in $\mathbb{R}_1^4$ sind demnach konforme Invarianten. Wir erhalten eine erste Charaktersisierung konstanter konformer Breite:

Theorem 1. *Sei $X_1(t), X_2(t), t \in I$, ein Paar regulär parametrisierter Kurven in der Möbius-Ebene, deren Punkte paarweise durch Doppelnormalkreise aufeinander bezogen sind. Sei $X_1(t), X_2(t)$ gegeben als Einhüllende einer Kreisfamilie $\Sigma(t)$. Angenommen die $\Sigma(t)$ repräsentierende Kurve $\sigma(t)$ auf der de-Sitter Sphäre Λ^3 ist eine Frenet-Kurve, dann gilt:*

Konforme Breite $w_c(t) = const.$ längs $X_1(t), X_2(t) \iff$ geodätische Krümmung $\kappa_g(t) = const.$ längs $\sigma(t)$.

Nun betrachten wir die konformen Bogenlängen τ_1, τ_2 auf den Kurven $X_1(t), X_2(t)$, die in dritter Differentiationsordnung mit ihnen verbunden sind. Wir bezeichnen als *osc-Kurve* einer Kurve der Möbius-Ebene die ihre Schmiegkreise repräsentierende Kurve auf der de Sitter-Sphäre. Wir erhalten eine zweite Charaktersisierung konstanter konformer Breite:

Theorem 2. *Sei $X_1(t), X_2(t), t \in I$, ein Paar regulär parametrisierter Kurven in der Möbius-Ebene ohne Scheitelpunkte, deren Punkte paarweise durch Doppelnormalkreise aufeinander bezogen sind. Angenommen ihre $osc - Kurven$ auf der de Sitter-Sphäre sind Frenet-Kurven, dann gilt:*

Konforme Breite $w_c(t) = const.$ längs $X_1(t), X_2(t) \Longleftrightarrow d\tau_1(t) = d\tau_2(t)$ längs $X_1(t), X_2(t)$.

Mit diesen beiden Hauptresultaten unserer Überlegungen folgen zum einen explizite nicht-triviale Beispiele für Kurvenpaare konstanter konformer Krümmung und zum anderen weitere Resultate, etwa:

Proposition 3. *Seien $X_1(t), X_2(t)$ und $X_1(t), X_3(t), t \in I$, verschiedene Paare von Kurven konstanter konformer Breite in der Möbius-Ebene, die eine gemeinsame Familie $N(t)$ von Doppelnormalkreisen besitzen. Dann sind X_1, X_2, X_3 Kreise oder Teile von Kreisen, die alle drei einem Steiner- oder einem Poncelet-Büschel angehören (vgl. Beispiel 1).*

Eberhard Teufel
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart
70550 Stuttgart, Germany
Teufel@mathematik.uni-stuttgart.de