Proc. 33. Süddeutsches Differentialgeometriekolloquium
Wien, 23. Mai 2008
pp. 61 – 65
ISBN 978-3-902233-04-2

Noch einmal polynomiale Drehflächen

Johann Hartl

Kurzfassung: Auf dem Differentialgeometrie-Kolloquium in Karlsruhe am 11. Juni 2004 zeigte ich, dass sich jede Drehfläche, die eine Parameterdarstellung besitzt, in der die Koordinatenfunktionen Polynome in den Parametern sind, eine polynomiale Parameterdarstellung der folgenden Gestalt besitzt:

$$\begin{bmatrix} x_1(t,u) \\ x_2(t,u) \\ x_3(t,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(t) + \frac{t_2}{p_1^2(t)+p_2^2(t)}((p_1^2(t) - p_2^2(t))\bar{p}_1(t,t_2) + 2p_1(t)p_2(t) \cdot \bar{p}_2(t,t_2)) \\ p_2(t) + \frac{t_2}{p_1^2(t)+p_2^2(t)}(2p_1(t)p_2(t)\bar{p}_1(t,t_2) - (p_1^2(t) - p_2^2(t)) \cdot \bar{p}_2(t,t_2)) \\ p_3(t+t_2) \end{bmatrix},$$

wobei

$$t_2 =: u \cdot (p_1^2(t) + p_2^2(t)),$$

und wobei die p_1, p_2, p_3 beliebige Polynome in einer Veränderlichen sind und die $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ Polynome in zwei Veränderlichen sind, die auf einfache Weise von p_1 bzw. p_2 abhängen.

In der anschließenden Diskussion kam die Frage auf, welche ebenen Kurven als Meridiane solcher Drehflächen vorkommen können. Auf diese Frage soll dieser Vortrag in Wien 2008 kurz eingehen. Er wird aber nur einen bescheidenen Beitrag leisten, der keine so allgemeine Aussage liefern wird wie der Vortrag in Karlsruhe.

Eine erzeugende Kurve einer polynomialen Drehfläche Δ sei gegeben durch eine polynomiale Parameterdarstellung, kurz aufgeschrieben:

$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix},$$

in der p_1, p_2, p_3 Polynome seien.

Will man singuläre Punkte vermeiden, so ist vorauszusetzen:

$$p_1^2(t) + p_2^2(t) > 0.$$

Ein Meridian von Δ in der x_2x_3-Ebene hat dann die Parameterdarstellung

$$\vec{m}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{p_1^2(t) + p_2^2(t)} \\ p_3(t) \end{pmatrix}.$$

Notwendig dafür, dass eine Kurve mit der Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}$$

mit einem Polynom p_3 und mit $x_2(t) > 0$ für alle t aus dem Parameterintervall auf die angegebene Weise aus einer polynomialen Parameterdarstellung einer Drehfläche entsteht, ist daher, dass x_2^2 ein Polynom ist und darüber hinaus, dass x_2^2 als Summe zweier Quadrate von Polynomen geschrieben werden kann.

Ist x_2^2 ein Polynom und $x_2^2(t) > 0$ sogar für alle $t \in \mathbb{R}$, so lässt sich leicht zeigen (wenn man weiß, wie es geht), dass x_2^2 sich stets als Summe zweier Polynome schreiben lässt. Diese Mitteilung verdanke ich Herrn Martin Peternell, der mich gleich nach dem Vortrag darauf ansprach.

Im folgenden sei nun $x_2^2(t) =: q(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit einem Polynom q. Dann ist notwendig der Grad von q gerade, also $\deg(q) = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Will man explizit q als Summe zweier Quadrate von Polynomen darstellen, so braucht man entweder die komplexen Nullstellen von q, die man für $n > 2$ nur noch numerisch bestimmen kann oder man macht den folgenden Ansatz:

$$q(t) =: a_{2n}t^{2n} + a_{2n-1}t^{2n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 =$$

$$= (b_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \ldots + b_1 t + b_0)^2 + (c_n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} (b_k b_l + c_k c_l) t^{k+l} = \sum_{m=0}^{2n} t^m \sum_{r=0}^{m} (b_r b_{m-r} + c_r c_{m-r})$$

mit $c_{n+1} = \ldots = c_{2n} = b_{n+1} = \ldots = b_{2n} = 0$.

Das führt auf folgende Bedingungen für die Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
b_n^2 + c_n^2 &= a_{2n}, \\
2b_n b_{n-1} + 2c_n c_{n-1} &= a_{2n-1}, \\
2b_n b_{n-2} + b_{n-1}^2 + 2c_n c_{n-2} + c_{n-1}^2 &= a_{2n-2}, \\
&\vdots \\
2b_0 b_2 + b_1^2 + 2c_0 c_2 + c_1^2 &= a_2, \\
2b_0 b_1 + 2c_0 c_1 &= a_1, \\
b_0^2 + c_0^2 &= a_0.
\end{aligned}$$

Wählt man b_n, c_n, b_0, c_0, so erhält man von oben her und von unten her sukzessive lineare Gleichungen. Die Pünktchen in der Mitte liefern Verträglichkeitsbedingungen.

Beispiel: Sei $q(t) = a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$. Dann erhält man die Bedingungen:

$$\begin{aligned}
b_2^2 + c_2^2 &= a_4, \\
2b_2 b_1 + 2c_2 c_1 &= a_3, \\
2b_2 b_0 + b_1^2 + 2c_2 c_0 + c_1^2 &= a_2, \\
2b_0 b_1 + 2c_0 c_1 &= a_1, \\
b_0^2 + c_0^2 &= a_0.
\end{aligned}$$

Mit dem Ansatz

$$b_2 = \sqrt{a_4}\cos u, \quad c_2 = \sqrt{a_4}\sin u,$$

$$b_0 = \sqrt{a_0}\cos v, \quad c_0 = \sqrt{a_0}\sin v$$

erhält man das lineare Gleichungssystem für b_1, c_1:

$$2b_2 b_1 + 2c_2 c_1 = a_3,$$

$$2b_0 b_1 + 2c_0 c_1 = a_1.$$

Die Koeffizientendeterminante dieses linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{vmatrix} 2b_2 & 2c_2 \\ 2b_0 & 2c_0 \end{vmatrix} = 4(b_2 c_0 - b_0 c_2) = 4\sqrt{a_0 a_4}(\cos u \sin v - \cos v \sin u) =$$

$$= 4\sqrt{a_0 a_4}\sin(v-u) =: D.$$

Der Einfachheit halber sei im folgenden $D \neq 0$ vorausgesetzt. Durch Wahl von u und v lässt sich dies sicher erreichen. Nach der Cramerschen Regel erhält man

$$b_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_3 & 2c_2 \\ a_1 & 2c_0 \end{vmatrix} = \frac{2}{D}(a_3c_0 - a_1c_2) = \frac{2}{D}(a_3\sqrt{a_0}\sin v - a_1\sqrt{a_4}\sin u)$$

$$b_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2b_2 & a_3 \\ 2b_0 & a_1 \end{vmatrix} = \frac{2}{D}(b_2a_1 - b_0a_3) \;= \frac{2}{D}(a_1\sqrt{a_4}\cos u - a_3\sqrt{a_0}\cos v).$$

Die Verträglichkeitsbedingung besagt:

$$2b_2b_0 + b_1^2 + 2c_2c_0 + c_1^2 = a_2.$$

Für die oben berechneten b_1 und b_2 gilt:

$$(b_1^2 + b_2^2)D^2 = 4(a_1^2a_4 + a_3^2a_0 - 2a_1a_3\sqrt{a_0a_4}(\sin u\sin v + \cos u\cos v)) =$$
$$= 4(a_1^2a_4 + a_3^2a_0 - 2a_1a_3\sqrt{a_0a_4}\cos(v-u))$$

Dieser Ausdruck müsste nach der Verträglichkeitsbedingung gleich sein dem Ausdruck

$$D^2(a_2 - 2b_0b_2 - 2c_0c_2) =$$
$$= 16a_0a_4\sin^2(v-u)\cdot(a_2 - 2\sqrt{a_0a_4}(\cos u\cos v + \sin u\sin v)) =$$
$$= 16a_0a_4\sin^2(v-u)\cdot(a_2 - 2\sqrt{a_0a_4}\cos(v-u)).$$

Da $\sin^2(v-u) = 1 - \cos^2(v-u)$, wird die Verträglichkeitsbedingung zu

$$a_1^2a_4 + a_3^2a_0 - 2a_1a_3\sqrt{a_0a_4}\cos(v-u) =$$
$$= 4a_0a_4\cdot(a_2 - 2\sqrt{a_0a_4}\cos(v-u)) - 4a_0a_4\cdot(a_2\cos^2(v-u) - 2\sqrt{a_0a_4}\cos^3(v-u)).$$

Anders aufgeschrieben erhält man einen Ausdruck mit einem Polynom dritten Grades in $\cos(v-u)$:

$$8\sqrt{a_0a_4}^3\cos^3(v-u) - 4a_0a_2a_4\cos^2(v-u) + 2\sqrt{a_0a_4}(a_1a_3 - 4a_0a_4)\cos(v-u) +$$
$$+4a_0a_2a_4 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 = 0$$

Hat man also eine Drehfläche Δ mit einem Meridian der Gestalt

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}$$

mit einem beliebigen Polynom p_3 gegeben und mit $x_2^2(t) = a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und will man eine polynomiale Darstellung von Δ erhalten, so ermittle man eine reelle Nullstelle λ_0 des Polynoms

$$f(\lambda) = 8\sqrt{a_0a_4}^3\lambda^3 - 4a_0a_2a_4\lambda^2 + 2\sqrt{a_0a_4}(a_1a_3 - 4a_0a_4)\lambda +$$
$$+4a_0a_2a_4 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2$$

mit $|\lambda_0| < 1$, wähle u und v so, dass $\cos(v-u) = \lambda_0$, gehe damit in den obigen Ansatz für b_2, c_2, b_0 und c_0 und berechne anschließend b_1 und c_1. Damit hat man die beiden Koordinatenpolynome

$$p_1(t) := b_2t^2 + b_1t + b_0,$$
$$p_2(t) := c_2t^2 + c_1t + c_0$$

gefunden. Bei der Wahl von v und u hat man dabei noch einen Freiheitsgrad, den man gegebenenfalls für Forderungen an die Flächendarstellung ausnutzen kann.

Johann Hartl
Zentrum Mathematik M10
Technische Universität München
85747 Garching, Germany
hartl@ma.tum.de