

# **33. Süddeutsches Differentialgeometriekolloquium**

Wien, 23. und 24. Mai 2008

Forschungsgruppe Differentialgeometrie und Geometrische Strukturen  
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie  
Technische Universität Wien

<http://www.geometrie.tuwien.ac.at/diffgeom-koll/>  
[[www.geometrie.tuwien.ac.at](http://www.geometrie.tuwien.ac.at)]

# 33. Süddeutsches Differentialgeometriekolloquium

Wien, am 23. und 24. Mai 2008

Programm für den 23. Mai

9.30 Eröffnung durch Hellmuth STACHEL		
9.40 - 10.10	Karl-Heinz BRAKHAGE	Numerische Verfahren zur Minimalflächenberechnung
10.10 - 10.40	Mike SCHERFNER	Towards a proof of the Chern-conjecture for isoparametric hypersurfaces in spheres
10.40 - 11.10	Yong HE	Die von Nodoiden verzweigten Flächen
11.10 - 11.30 Pause		
11.30 - 12.00	Johann HARTL	Noch einmal polynomiale Drehflächen
12.00 - 12.30	Martin PETERNELL	On Generalized LN-Surfaces in 4-Space
12.30 - 14.30 Mittagspause		
14.30 - 15.00	Ivan IZMESTIEV	On the rigidity of a class of non-convex polyhedra
15.00 - 15.30	Eberhard TEUFEL	Konforme Breite in der Möbius Geometrie
15.30 - 16.00	Horst MARTINI	Über eine Verallgemeinerung der Radon-Kurven
16.00 - 16.20 Pause		
16.20 - 16.50	Thomas SCHNEIDER	Anwendung lokaler geodätischer Abbildungen auf inzidenzgeometrische Probleme
16.50 - 17.20	Georg NAWRATIL	Main Theorem on Planar Parallel Manipulators with Cylindrical Singularity Surface
17.20 - 17.40	Hans HAVLICEK	Erinnerungen an Heinrich Brauner (1928 – 1990)
Heurigenbesuch		

# 33. Süddeutsches Differentialgeometriekolloquium

Wien, am 23. und 24. Mai 2008

Programm für den 24. Mai

10.00-12.00

Workshop Differentialgeometrie

## Ort

Technische Universität Wien  
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie  
Freihaus-Institutsgebäude  
Zeichensaal 3 (7. Stock, grüner Turm)  
Wiedner Hauptstraße 8–10  
1040 Wien

# Numerische Verfahren zur Minimalflächenberechnung

Karl-Heinz Brakhage  
brakhage@igpm.rwth-aachen.de

**RWTH Aachen**  
**Geometrie und Praktische Mathematik**  
**Templergraben 55**  
**D-52056 Aachen**

In vielen physikalisch technischen Anwendungen trifft man auf Minimalflächen. Die bekanntesten und am besten zu visualisierenden sind wohl die Seifenfilmflächen zu einer vorgegeben Berandung aus Draht. Die Form der Fläche wird dabei durch ihre Oberflächenspannung und somit auch durch die mittlere Krümmung bestimmt. Die lokale Minimierung einer Fläche entspricht der Nullstellenbestimmung der mittleren Krümmung. Daher lassen sich Minimalflächen numerisch mittels partieller Differentialgleichungen bestimmen, indem man eine geeignete krümmungsabhängige Flussfunktion ansetzt. D.h.: Man verformt die Fläche entsprechend ihrer mittleren Krümmung. In dem Vortrag soll ein solches Verfahren, das auf der sogenannten Level Set Methode basiert, vorgestellt und erläutert werden.

# Towards a proof of the Chern-conjecture for isoparametric hypersurfaces in spheres

Mike Scherfner

`scherfner@math.tu-berlin.de`

Inst. of Mathematics, Sekr. MA 8-3,  
Str. d. 17. Juni 136,  
10623 Berlin, Germany

One important problem in differential geometry is to investigate minimal hypersurfaces in space forms, and the particular problem stated below stimulated geometers during the last decades. We will be concerned with hypersurfaces of  $\mathbb{S}^{n+1}$ , which are called isoparametric of type  $g$  if they have  $g$  distinct constant principal curvatures with constant multiplicities. Such hypersurfaces with  $g \leq 3$  were classified by E. Cartan long ago.

In 1968 S.-S. Chern proposed the following:

**Chern conjecture:** Let  $M^n$ ,  $n \geq 2$ , be a closed minimal hypersurface of  $\mathbb{S}^{n+1}$  with constant scalar curvature, then  $M^n$  is isoparametric.

There have been many attempts in order to solve this conjecture, but without complete success. It has only been possible to prove special cases and we will list and comment some main results.

# Die von Nodoiden verzweigten Flächen

Yong He

he@mathematik.tu-darmstadt.de

**TU Darmstadt**  
**Schlossgartenstr. 7**  
**64289 Darmstadt**

Die Lawson-Korrespondenz beschreibt eine 1:1 Relation (bis auf Translation) zwischen  $H$ -Flächen (d.h. Flächen konstanter mittlerer Krümmung) in  $\mathbb{R}^3$  und Minimalflächen in der 3-Sphäre  $S^3$ . Dadurch erhalten wir eine Methode um neue  $H$ -Fläche in  $\mathbb{R}^3$  zu konstruieren. Von Karcher stammt die Idee, Randkurven der zu konstruierenden konjugierten Minimalflächen in  $S^3$  als Integralkurven rotierender Vektorfelder zu beschreiben. Solche Vektorfelder sind durch Hopf-Faserung in  $S^3$  gegeben. Mit dieser Methode können wir Minimalflächen in  $S^3$  konstruieren, dessen konjugierte  $H$ -Flächen von Nodoiden abzweigen. In dem Vortrag wird die Konstruktionsmethode sowie einige Resultate über die Existenz und Eindeutigkeit der neuen Flächen vorgestellt.

# Noch einmal polynomiale Drehflächen

Johann Hartl

hartl@ma.tum.de

Zentrum Mathematik M10  
Technische Universität München  
85747 Garching

Auf dem Differentialgeometrie-Kolloquium in Karlsruhe am 11. Juni 2004 zeigte ich, dass sich jede Drehfläche, die eine Parameterdarstellung besitzt, in der die Koordinatenfunktionen Polynome in den Parametern sind, eine polynomiale Parameterdarstellung der folgenden Gestalt besitzt:

$$\begin{bmatrix} x_1(t, u) \\ x_2(t, u) \\ x_3(t, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(t) + \frac{t_2}{p_1^2(t) + p_2^2(t)} ((p_1^2(t) - p_2^2(t))\bar{p}_1(t, t_2) + 2p_1(t)p_2(t)\bar{p}_2(t, t_2)) \\ p_2(t) + \frac{t_2}{p_1^2(t) + p_2^2(t)} (2p_1(t)p_2(t)\bar{p}_1(t, t_2) - (p_1^2(t) - p_2^2(t))\bar{p}_2(t, t_2)) \\ p_3(t + t_2) \end{bmatrix},$$

wobei

$$t_2 =: u \cdot (p_1^2(t) + p_2^2(t)),$$

und wobei die  $p_1, p_2, p_3$  beliebige Polynome in einer Veränderlichen sind und die  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$  Polynome in zwei Veränderlichen sind, die auf einfache Weise von  $p_1$  bzw.  $p_2$  abhängen.

In der anschließenden Diskussion kam die Frage auf, welche ebenen Kurven als Meridiane solcher Drehflächen vorkommen können. Auf diese Frage soll der Vortrag in Wien 2008 kurz eingehen.

# On Generalized LN-Surfaces in 4-Space

M. Peternell

`peternell@geometrie.tuwien.ac.at`

**Vienna University of Technology, Institute of Discrete Mathematics and  
Geometry, Wiedner Hauptstrasse 8-10/104, Vienna A-1040, Austria**

A class of two-dimensional rational surfaces  $F$  in  $\mathbb{R}^4$  is investigated, whose tangent planes satisfy the following property: For any three-space  $E$  in  $\mathbb{R}^4$  there exists a unique tangent plane  $T(u, v)$  of  $F$  which is parallel to  $E$ . For all possible varieties of tangent planes  $T(u, v)$  the corresponding families of surfaces in  $\mathbb{R}^4$  are constructed explicitly. Quadratically parameterized surfaces in  $\mathbb{R}^4$  occur as special cases. This construction generalizes the concept of LN-surfaces in  $\mathbb{R}^3$  to two-dimensional surfaces in  $\mathbb{R}^4$ . Further it is shown that these surfaces have similar properties concerning the convolution operation as LN-surfaces in  $\mathbb{R}^3$ .

# On the rigidity of a class of non-convex polyhedra

Ivan Izvestiev

izvestiev@math.tu-berlin.de

Institut für Mathematik, MA 8-3  
Technische Universität Berlin  
Straße des 17. Juni 136  
10623 Berlin, Germany

By a classical result of Cauchy and Dehn, every convex polyhedron is infinitesimally rigid. On the other hand, there are many examples of infinitesimally flexible non-convex polyhedra. One can ask under what conditions is a non-convex polyhedron infinitesimally rigid.

It is conjectured that a polyhedron  $P$  is infinitesimally rigid, if the following two conditions are satisfied:

1.  $P$  is *weakly convex*, that is the vertices of  $P$  are the vertices of its convex hull;
2.  $P$  is *decomposable*, that is  $P$  can be triangulated without additional vertices.

There are several partial results on this conjecture due to Schlenker and Connelly and Schlenker.

In this talk we outline a proof (from a joint work of Jean-Marc Schlenker and the speaker) of the infinitesimal rigidity of  $P$  under an additional assumption

3.  $P$  is *codecomposable*, that is the complement of  $P$  in its convex hull can be triangulated without additional vertices.

The proof relies on a result of independent interest concerning the Hilbert-Einstein function of a triangulated convex polyhedron. We determine the signature of the Hessian of this function with respect to deformations of the interior edges. In particular, if there are no interior vertices, then the Hessian is negative definite.

# Konforme Breite in der Möbius Geometrie

Eberhard Teufel

Teufel@mathematik.uni-stuttgart.de

**Fachbereich Mathematik,  
Universität Stuttgart,  
70550 Stuttgart, Germany**

Die Breite eines konvexen Körpers in der euklidischen Ebene zu einer vorgegebenen Richtung ist der Abstand seiner zugehörigen parallelen Stützgeraden. Konvexe Körper konstanter Breite sind die wohlbekannteren Gleichdicke.

Der Vortrag beinhaltet gemeinsame Resultate mit R. Langevin (Dijon): Wir definieren eine konform invariante Breite für Paare von Kurven in der Möbius Ebene. Wir charakterisieren insbesondere die Paare von Kurven konstanter konformer Breite.

# Über eine Verallgemeinerung der Radon-Kurven

Horst Martini

`martini@mathematik.tu-chemnitz.de`

**Fakultät für Mathematik,  
TU Chemnitz,  
D-09107 Chemnitz**

Die sogenannten “equiframed curves” sind zentralsymmetrische, konvexe und planare Kurven, die in jedem Punkt von einem umbeschriebenen Parallelogramm kleinsten Flächeninhalts berührt werden. Diese Kurven sind u.a. wichtig in der Funktionalanalysis. Sie wurden deshalb, mit ihren höherdimensionalen Analoga, 1991 von den Funktionalanalytikern Pelczynski und Szarek eingeführt.

Die Klasse der Radon-Kurven, sehr wichtig in Konvex- und Minkowski-Geometrie, stellt eine wichtige Unterklasse dar. Im Vortrag wird ein konstruktiver Zugang gezeigt, der von Radon-Kurven ausgeht, und es werden für beide Kurvenklassen charakteristische Eigenschaften vorgestellt, die den Unterschied deutlich machen und auch zeigen, dass (in einem gewissen Sinne) eine Dualität zwischen beiden Kurvenklassen besteht.

# Anwendungen lokaler geodätischer Abbildungen

Thomas Schneider

thomas.schneider@i-u.de

Mühlingstr. 29 Germany, Bruchsal  
D-69121 Heidelberg Campus 1  
D-76646 Bruchsal

Bekanntlich lassen Flächen konstanter Gauß-Krümmung *lokale geodätische Abbildungen*  $\lambda$  in die reelle euklidische Ebene zu, also lokale Diffeomorphismen, die Geodätische der Fläche auf Geraden bzw. Geradenstücke in der Ebene abbilden. Im Falle einer Rotationsfläche im  $\mathbb{R}^3$  mit konstanter positiver Gauß-Krümmung  $K$  kann eine derartige Abbildung  $\lambda$  sehr einfach als Komposition einer lokalen Isometrie auf die Sphäre mit Radius  $1/\sqrt{K}$  und der Zentralprojektion aus der Sphäre auf eine Ebene, die das Zentrum der Sphäre nicht enthält, gewonnen werden.

1. Wir können auf solchen Flächen Gebiete abgrenzen, die *lineare Räume* im Sinne der Inzidenzgeometrie sind, bei denen also zu je zwei voneinander verschiedenen Punkten genau eine Verbindungsgeodäte existiert. Mit Hilfe der geodätischen Abbildungen und ihrer Inversen übertragen sich inzidenzgeometrische Konstruktionen (z.B. Desarguesfiguren) von der reellen euklidischen Ebene auf die auf der Rotationsfläche realisierten linearen Räume.
2. Als Konsequenz des klassischen Satzes von Clairaut erhält man auf beliebigen Rotationsflächen im  $\mathbb{R}^3$  lokale Parametrisierungen von Geodätischen, die jedoch im Allgemeinen *nicht* global fortsetzbar sind. So ergeben sich etwa im Falle der *Spindelflächen* Definitionslücken der Clairaut-Parametrisierungen an den Umkehrpunkten der Geodätischen, die zwischen zwei Breitenkreisen oszillieren.

Geodätische Abbildungen  $\lambda$  von einer Spindelfläche in die Ebene erweisen sich auch in diesem Kontext als hilfreich: Durch Hochhebung von  $\lambda^{-1}$  in einer Überlagerung der Spindelfläche erhalten wir globale Parametrisierungen von Geodätischen. Auf dieser Grundlage gewinnen wir einen vollständiger Überblick über das globale Verhalten der Geodäten auf der Spindelfläche.

# **Main Theorem on Planar Parallel Manipulators with Cylindrical Singularity Surface**

Georg Nawratil

nawratil@geometrie.tuwien.ac.at

**Vienna University of Technology,  
Institute of Discrete Mathematics and Geometry,  
Wiedner Hauptstrasse 8-10/104, Vienna A-1040, Austria**

In this article we prove that there do not exist non-architecturally singular Stewart Gough Platforms with planar base and platform and no four anchor points collinear, whose singularity set for any orientation of the platform is a cylindrical surface with rulings parallel to a given fixed direction  $p$  in the space of translations.

# Erinnerungen an Heinrich Brauner (1928 – 1990)

Hans Havlicek

havlicek@geometrie.tuwien.ac.at

**Forschungsgruppe Differentialgeometrie und Geometrische Strukturen,  
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie,  
Wiedner Hauptstraße 8–10,  
A-1040 Wien, Österreich.**

Zur 80. Wiederkehr des Geburtstages von

O.Univ.Prof. Mag.rer.nat. Dr.phil. Dr.techn. Heinrich Brauner

sollen in diesem Vortrag Eigenschaften, Wesensmerkmale und Leistungen dieses österreichischen Geometers aufgezeigt werden. Dabei möchte ich zumindest ein wenig von dem vermitteln, was aus meiner Sicht das Besondere dieses außergewöhnlichen Wissenschaftlers und Menschen ausmachte.

## Teilnehmer

Name		Titel des Vortrags
Thomas Backmeister	Wien	
Gert Baer	Dresden	
Gerd Baron	Wien	
Bernhard Blaschitz	Wien	
Karl-Heinz Brakhage	Aachen	Numerische Verfahren zur Minimalflächenberechnung
Martins Bruveris	Wien	
Georg Glaeser	Wien	
David Gruber	Wien	
Johann Hartl	München	Noch einmal polynomiale Drehflächen
Hans Havlicek	Wien	Erinnerungen an Heinrich Brauner (1928 – 1990)
Yong He	Darmstadt	Die von Nodoiden verzweigten Flächen
Ivan Izmestiev	Berlin	On the rigidity of a class of non-convex polyhedra
Kristoffer Josefsson	Berlin	
Richard Koch	München	
Wolfgang Khnel	Stuttgart	
Friedrich Manhart	Wien	
Horst Martini	Chemnitz	Über eine Verallgemeinerung der Radon-Kurven
Sybille Mick	Graz	
Georg Nawratil	Wien	Main Theorem on Planar Parallel Manipulators with Cylindrical Singularity Surface
Boris Odehnal	Wien	
Peter Paukowitsch	Wien	
Martin Peternell	Wien	On generalized LN-Surfaces in 4-Space
Steffen Poppitz	Stuttgart	
Rolf Riesinger	Wien	
Mike Scherfner	Berlin	Towards a proof of the Chern-conjecture for isoparametric hypersurfaces in spheres
Thomas Schneider	Bruchsal	Anwendung lokaler geodätischer Abbildungen auf inzidenzgeometrische Probleme
Hellmuth Stachel	Wien	
Eberhard Teufel	Stuttgart	Konforme Breite in der Möbius Geometrie
Hermann Vogel	München	
Hans Vogler	Graz	
Gunter Weiß	Dresden	