

Abbildungsmethoden der Konstruktiven Geometrie

O.Univ.Prof. DDr. Heinrich Brauner

Vorlesung im Studienjahr 1976/77

Ausgearbeitet von Univ.Ass. Dr. Gunter Weiß

1. Institut für Geometrie  
Technische Universität Wien

Inhaltsverzeichnis

§0 Grundlegende Begriffsbildungen

0.1 Der Abbildungsbegriff ..... 1

0.2 Proj. Inzidenzebene, proj. Inzidenzraum .... 2

0.3 Das analytische Modell für  $\pi_{pp}$  ( $\Pi_{pp}$ ) .... 6

0.4 Affine Inzidenzebene, affiner Inzidenzraum ..... 12

0.5 Die euklidische Ebene  $\pi_e$  ..... 13

0.6 Polaritäten einer proj. Ebene  $\pi(K)$ ..... 17

0.7 Der euklidische Raum  $\Pi_e(\mathbb{R})$  ..... 24

§1 Lineare Abbildungen der konstr. Geometrie

1.1 Abbildung aus  $\Pi$  in eine proj. Ebene  $\pi'$  .. 29

1.2 Lineare Abbildung aus dem proj. Ebenenraum . 38

1.3 Axonometrie ..... 40

1.4 Lineare Abb.  $\varphi_a$  aus einem affinen Punktraum  $\Pi_a$  in eine proj. Punktebene ..... 50

1.5 Lineare Abb. aus dem euklid. Punktraum .. 54

§2 Lineare Zweibildersysteme

2.1 ..... 66

2.2 Lagenaufgaben im proj. Punktraum ..... 72

2.3 Rekonstruktion ..... 78

2.4 Koinzidenzgeraden, Koinzidenzpunkte ..... 83

2.5 Spezielle lin. Zweibildersysteme ..... 89

2.6 Lin. Zweibildersysteme im affinen Raum .... 91

2.7 Zweibildersysteme im euklid. Raum  $\Pi_e$  ..... 94

2.8 Maßaufgaben des  $\Pi_e$  (bzw.  $\Pi_{e,d}$ ) im lin. Z.B.-System ..... 105

2.9 Spezielle lin. Zweibildersysteme ..... 109

§3 Lineare Zweispurensysteme

3.1 ..... 127

3.2 Lagenaufgaben in einem lin. Zweispurensystem ..... 132

3.3 Rekonstruktion ..... 134

3.4 Koinzidenzgeraden und -ebenen..... 136

3.5 Projektion eines lin. Z.S.S. (vgl. 2.5)..... 139

3.6	Lineare Zweispurensysteme im affinen Raum ...	140
3.7	Lineare Zweispurensysteme im euklid.Raum ..	141
3.8	Das Spur- Fluchtspurprinzip als spezielles lin. Z.S.S. ....	147
§4	Zyklographie	
4.1	Grundlegende Begriffsbildungen .....	153
4.2	Zyklographie als Übertragungsprinzip .....	163
4.3	Die Zykkelkugel .....	
4.4	c-Geometrie (vgl.O.7) .....	181
4.5	Die Gruppen $GO(\mathbb{T}_{pe})$ , $O(\mathbb{T}_{pe})$ .....	191
4.6	Zyklographisches Bild einer c-Spiegelung (LAGUERRE-Spiegelung) .....	200
4.7	Ebene LAGUERRE-Geometrie .....	205
4.8	Euklidische Kreisebene .....	215

0.1      Der Abbildungsbegriff

Gegeben seien 2 Mengen:     $M = \emptyset \dots$  "Definitionsmenge"  
                                   $N \quad \dots$  "Bildmenge"

Werden gewisse Elemente aus  $M$  in eindeutiger Weise je einem Element von  $N$  zugewiesen, so spricht man von einer "Abbildung aus  $M$  in  $N$ " (symbolisch  $\varphi: M \rightarrow N$ ).

Die Teilmenge  $D(\varphi) \subset M$ , für welche  $\varphi$  erklärt ist, heißt "Definitionsbereich von  $\varphi$ ".

Ist speziell  $D(\varphi) = M$ , so heißt  $\varphi$  "globale Abbildung". (Abb. von  $M$  in  $N$ ).

Jene Elemente von  $M$ , für welche  $\varphi$  nicht erklärt ist, bilden die "Ausnahmemenge"  $\Sigma = M \setminus D(\varphi) = M - D(\varphi)$

Jene Teilmenge  $im\varphi \subset N$ , deren Elemente als  $\varphi$ -Bilder auftreten, heißt "Bildbereich" ("Image") von  $\varphi$ .

Spezielle Abbildungen:

(I) Eine Abbild.  $\varphi$ , für die gilt:

$$x_1, x_2 \neq, \in D(\varphi) \implies x_1\varphi \neq x_2\varphi \quad (x_1\varphi, x_2\varphi \in N)$$

heißt "injektive Abbildung".

(II) Ist  $im\varphi = N$ , so heißt  $\varphi$  "surjektive Abbildung".

(III) Ist  $\varphi$  globale Abb.  $\wedge$  injektiv  $\wedge$  surjektiv, so heißt "bijektive Abbildung".

$\varphi$  bijektiv: Zu jedem  $x \in M$  gehört ein eindeutiges  $x\varphi \in N$ ;  
global jedes  $y \in N$  ist Bild genau eines  $x \in M$ , (d.h.  $x\varphi = y$ )  
surjektiv Abbild. injektiv

Der Begriff der  $\varphi$ -Faser

$y \in N$ ;       $\{ x \in M \mid x\varphi = y \} =: y\varphi^{-1} \subset M$  heißt "Faser von  $y$  bei der Abbildung  $\varphi$  (" $\varphi$ -Faser von  $y$ ").

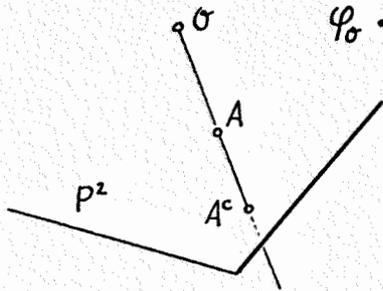
Bemerkung:  $y\varphi^{-1}$  kann auch die leere Menge sein und dies ist genau dann der Fall, wenn  $y \in N \setminus im\varphi$ .  
 $y\varphi^{-1}$  ist i.a. nicht einelementige Teilmenge von  $M$ , daher ist  $\varphi^{-1}$  i.a. keine Abbildung aus  $N$  in  $M$ .  $\emptyset$  kann als Bild auftreten,  $\emptyset$  ist aber kein Element von  $M$ .  $\varphi^{-1}$  ist eine Abb.  $N \rightarrow M$ , falls  $\varphi$  bijektiv ist.

Wir betrachten die Menge aller  $\varphi$ -Fasern:

Die Menge aller Teilmengen von  $M$  heißt "Potenzmenge"  $\tilde{M}$  von  $M$ .  
 Damit gilt:  $\varphi^{-1}$  ist eine globale Abbildung aus  $N$  in  $\tilde{M}$ .

Sprechweise: Die Abb.  $\varphi: M \rightarrow N$  fasert den Urraum  $M$  und diese Fasern bestimmen eine Abb.  $\varphi^{-1}$  aus  $N$  in die Potenzmenge von  $M$ .

Beispiel: M sei der proj. dreidim. Raum  $P^3$  ( $P^3 \neq \emptyset$ )  
 N .. proj. Ebene  $P^2 \subset P^3$   
 $\varphi_\sigma$  .. Projektion aus einem Punkt  $\sigma \notin P^2$



$$\varphi_\sigma: M \rightarrow N$$

$$A \neq \sigma, A \in P^3 \rightarrow A\varphi_\sigma = : A^c$$

$$\Sigma = \{\sigma\}; D(\varphi_\sigma) = P^3 \setminus \{\sigma\} \dots \text{"punktierter } P^3 \text{"}$$

Der Definitionsbereich der Zentralprojektion ist der im Augpunkt punktierte projektive Raum. Die Zentralprojektion von  $P^3$  ist daher nicht global.

$\text{im } \varphi_\sigma = P^2 \implies$  Die Zentralprojektion ist surjektiv.

$A_1, A_2 \neq \sigma, \in P^3 \setminus \Sigma : A_1^c \neq A_2^c ?$

Wir bestimmen die  $\varphi$ -Faser eines Punktes  $A^c \in P^2$ :

$A^c \varphi_\sigma^{-1} \subset M$  ist die Menge aller Punkte  $\in P^3$  mit dem Bild  $A^c$ , also ein in  $\sigma$  punktiertes Sehstrahl.

Der Sehstrahl enthält mehr als einen Punkt  $\implies \varphi_\sigma$  ist nicht injektiv.

$\implies \varphi_\sigma: P^3 \rightarrow P^2$  ist eine nichtglobale, surjektive, nichtinjektive Abbildung.

Bemerkungen

- a) Statt  $\varphi: M \rightarrow N$ ,  $\varphi$  surjektiv, spricht man von einer Abbildung  $\varphi$  aus M auf N
- b)  $\varphi$  ist bloß dann definiert, wenn M und N vorgegeben sind.  
 Z.B.  $M=P^3, N=P^2, \varphi_\sigma \dots$  Proj. aus  $\sigma$  auf  $P^2 \subset P^3 \implies \varphi_\sigma$  ist nicht global.  
 $M=P^3 \setminus \{\sigma\}, N=P^2, \varphi_\sigma$  wie oben  $\implies \varphi_\sigma$  ist global.

Das Produkt von Abbildungen:

$\varphi: M \rightarrow N$  mit  $\text{im } \varphi \subset N$   
 $\psi: N \rightarrow R$  mit  $D(\psi) \subset N$  } Es sei  $\text{im } \varphi \cap D(\psi) =: D_1 \neq \emptyset$

Dann ist eine Abb.  $\varphi\psi: M \rightarrow R$  erklärt durch "schrittweises Ausführen" von  $\varphi$  und  $\psi$ , d.h.

$\forall x \in D(\varphi\psi) = \{x \mid x\varphi \in D_1 \neq \emptyset\}$  gilt:  $x(\varphi\psi) = (x\varphi)\psi \dots$  assoziativ.

(In der Analysis ist die Schreibweise  $(\psi \circ \varphi)(x)$  statt  $x(\varphi\psi)$  gebräuchlich.  $\downarrow$ ).

Die "Beschränkung" einer Abbildung  $\varphi$ :

$\varphi: M \rightarrow N$  angewandt auf Teilmenge  $M_1 \subset M$  mit  $M_1 \cap D(\varphi) \neq \emptyset$  heißt "Beschränkung von  $\varphi$  auf  $M_1$ ", symbolisch  $\varphi|_{M_1}$ .

0.2 Proj. Inzidenzebene, proj. Inzidenzraum

Proj. Inzidenzebene  $\pi$ :

Geg: 2 Mengen  $\mathcal{K}, \mathcal{G}$ ; eine Relation  $I$  zwischen den Elementen dieser Mengen ( $I$  .. "Inzidenzrelation"), z.B.  $A \in \mathcal{K}, a \in \mathcal{G} : A I a$ .

Für  $\mathbb{I}$  mögen folgende Gesetze (Axiome) gelten:

- $i_1: A, B | \neq, \in \mathcal{P} : \exists^* a \in \mathcal{G}$  mit  $A|a \wedge B|a$   
 ( $a=AB$  ... eindeutige Verbindungsgerade)  
 $i_2: a, b | \neq, \in \mathcal{G} : \exists^* A \in \mathcal{P}$  mit  $A|a \wedge A|b$   
 ( $A=ab$  ... eindeutiger Schnittpunkt)

Weiters gelte das "Existenzaxiom"

$e: \exists$  ein Viereck; d.h.  $\exists$  4 Punkte  $\in \mathcal{P} \wedge$  nie 3 davon kollinear.

$\implies \pi := \{ \mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathbb{I} \mid i_1, i_2, e \}$  ... proj. Inzidenzebene.

Beispiel: Das "Minimalmodell" (7 Punkte, 7 Geraden) ist eine proj. Inzidenzebene.

In der Projektiven Geometrie zeigt man die Gültigkeit des "ebenen Dualitätsprinzips"  $D_E$ .

$\{ A \in \mathcal{P} \mid A|a \in \mathcal{G}, a \text{ fest} \} =: \mathcal{P}_a \subset \mathcal{P}$  heißt "Punktreihe".

Es gilt (Proj. Geom.): Jede Punktreihe enthält mindestens 3 Punkte.

Interpretiert man die Geraden  $a$  von  $\pi$  als Punktreihen  $\mathcal{P}_a$  und die Inzidenzrelation  $\mathbb{I}$  als gewöhnliche Enthaltenseinsrelation  $\subseteq$ , dann heißt

$$\{ \mathcal{P}, \mathcal{P}_a \subset \mathcal{P} \mid i_1, i_2, e \text{ mit } \mathbb{I} \rightarrow \subseteq (A|a \rightarrow A \in \mathcal{P}_a) \}$$

"projektive Inzidenzpunktebene".

$D_E$ -dual:  $\{ a \in \mathcal{G} \mid a|A \in \mathcal{P}, A \text{ fest} \} =: \mathcal{G}_A \subset \mathcal{G}$  heißt "Geradenbüschel".

Es gilt (Proj. Geom.): Jedes Geradenbüschel enthält mindestens 3 Geraden.

Die strukturierte Menge

$$\{ \mathcal{G}, \mathcal{G}_A \subset \mathcal{G} \mid i_1, i_2, e \text{ mit } \mathbb{I} \rightarrow \subseteq (a|A \rightarrow a \in \mathcal{G}_A) \}$$

heißt "projektive Inzidenzgeradenebene".

### Proj. Inzidenzraum $\Pi$

Geg.: 3 Mengen  $\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E}$ , eine "Inzidenzrelation"  $\mathbb{I}$  zwischen Elementen dieser Mengen (z.B.  $A \in \mathcal{P}, a \in \mathcal{G}, \alpha \in \mathcal{E} : A|a, A|\alpha \dots$ ) mit folgenden Eigenschaften ("Inzidenzaxiomen"):

$I_1 = i_1$  ( $\exists$  eindeutige Verbindungsgerade zweier Pkte.)

$I_2: A \in \mathcal{P}, a \in \mathcal{G}, A|a : \exists^* \alpha \in \mathcal{E}$  mit  $A|\alpha \wedge a|\alpha$   
 ( $\alpha = aA$  .. eindeut. Verbindungsebene)

$I_3: a \in \mathcal{G}, \alpha \in \mathcal{E}, a|\alpha : \exists^* A \in \mathcal{P}$  mit  $A|a \wedge A|\alpha$   
 ( $A = a\alpha$  .. eindeut. Spurpunkt)

$I_4: A|a \wedge a|\alpha \implies A|\alpha$

Weiters gelte das "Existenzaxiom".

$E: \exists$  ein räumliches Fünfeck; d.h. sind 5= Punkte, wovon nie vier komplanar sind.

Die geometrische Struktur  $\Pi := \{ \mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E}, \mathbb{I} \mid I_1, I_2, I_3, I_4, E \}$  heißt "ein projektiver Inzidenzraum".

Beispiel: Das "Minimalmodell" mit 15 Punkten, 15 Ebenen, 35 Gerade ist ein (endlicher) proj. Inzidenzraum.

In  $\Pi$  gilt das räumliche Dualitätsprinzip  $D$  (vgl. Proj. Geom.)

$\mathcal{P}_a := \{ P \in \mathcal{P} \mid P|a \in \mathcal{G}, a \text{ fest} \}$  heißt "Punktreihe".  
 ( $\mathcal{P}_a$  enthält mindestens 3 Punkte).

dual:

$\mathcal{E}_a := \{ \alpha \in \mathcal{E} \mid \alpha|a \in \mathcal{G}, a \text{ fest} \}$  heißt "Ebenenbüschel".  
 ( $\mathcal{E}_a$  enthält mindestens 3 Ebenen)

} Grundgebilde  
 1. Stufe in

$\mathcal{K}_\alpha := \{P \in \mathcal{P} \mid P \perp \alpha \in \mathcal{E}, \alpha \text{ fest}\}$  heißt "Punktfeld"  
 (  $\mathcal{K}_\alpha$  enthält mindestens ein Viereck )  
 dual:  
 $\mathcal{E}_A := \{\alpha \in \mathcal{E} \mid \alpha \perp A \in \mathcal{K}, A \text{ fest}\}$  heißt "Ebenenbündel"  
 (  $\mathcal{E}_A$  enthält mindestens ein Vierflach )

Grundgebil  
2. Stufe in

$\Rightarrow \Pi$  gestattet zwei duale Interpretationen als  
 "proj. Inzidenzpunktraum" und als "proj. Inzidenzebenenraum",  
 wenn man von

$\mathcal{K}$  ..... bzw.  $\mathcal{E}$   
 $\mathcal{K}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha / \subset \mathcal{K}$  ..... bzw.  $\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\alpha / \subset \mathcal{E}$   
 Geraden bzw. Ebenen, ..... bzw. Geraden bzw. Punkte  
 und die Inzidenz  $I$  das gewöhnliche Enthaltensein  $\epsilon$  bedeuten.  
 (z.B.  $A \perp \alpha \rightarrow A \in \mathcal{K}_\alpha$  u.s.w.) ..... (z.B.  $A \perp \alpha \rightarrow \alpha \in \mathcal{E}_A$  usw)

Bemerkung: Jede Ebene in einem proj. Inzidenzraum ist eine proj. Inzidenzebene.

Der Isomorphiebegriff

Definition: Gegeben sind zwei proj. Inzidenzebenen  $\pi_1, \pi_2$  (Inzidenzräume  $\Pi_1, \Pi_2$  ).  
 Eine Abb.  $\alpha: \pi_1 \rightarrow \pi_2$  ( bzw.  $\alpha: \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$  ) mit den Eigenschaften:  
 (I)  $\alpha: (\mathcal{K}_i \in \Pi_1) \rightarrow (\mathcal{K}_j \in \Pi_2)$  ( bzw.  $\mathcal{K}_j \in \Pi_j$  ) ... bijektiv  
 (II) kollineare Punkte  $\in \pi_1$  ( $\Pi_1$ )  $\xrightarrow{\alpha}$  koll. Punkte  $\in \pi_2$  ( $\Pi_2$ )  
 heißt "Kollineation".

Beh.: Die Kollineationen sind genau die Isomorphismen der Inzidenzstrukturen von  $\pi_1$  auf  $\pi_2$  ( bzw.  $\Pi_1$  auf  $\Pi_2$  ); d.h.  $\alpha$  induziert eine bijektive Abbildung von  $\mathcal{G}_1$  auf  $\mathcal{G}_2$  ( $\mathcal{E}_1$  auf  $\mathcal{E}_2$  und  $I_1 \rightarrow I_2$  ).  
 (Beweis siehe Proj. Geometrie).

Eine Kollineation von  $\pi$  ( $\Pi$ ) auf sich heißt "Autokollineation". Die Menge der Autokoll. von  $\pi$  ( $\Pi$ ) bildet eine Gruppe, die mit  $PGL(\pi)$  ( $PGL(\Pi)$ ) bezeichnet wird. (Vgl. Proj. Geom.)

Spezielle Autokollineationen sind die "perspektive Koll."  $\alpha$  :  
 Eine Koll.  $\alpha: \pi \rightarrow \pi$  heißt persp. Koll.  $\iff \exists$  Fixpunktreihe ("Achse")  
 Ein Punkt  $F \in \mathcal{K}$  ist "Fixpunkt"  $\iff F\alpha = F$   
 Eine Koll.  $\alpha: \pi \rightarrow \pi$  heißt persp. Koll.  $\iff \exists$  

Es gilt: Jede persp. Koll. ist eine "Zentralkollineation" und umgekehrt.  
 Eine "Zentralkollineation"  $\alpha$  besitzt einen ausgezeichneten Fixpunkt  $F=Z=Z\alpha$  so, daß stets Ursprung und Bildpunkt mit  $Z$  kollinear sind. ( $Z$  ... "Zentrum" von  $\alpha$ )

"Homologie": Eine Zentralkollineation  $\alpha$  heißt Homologie, wenn ihr Zentrum nicht mit der Achse inzidiert. (Speziell:  $\alpha$  ist die Identität)

"Elation": Eine Zentralkollineation  $\alpha$  heißt Elation, wenn ihr Zentrum mit der Achse inzidiert oder wenn  $\alpha$  die Identität ist.  
 (Elation="parabolische Zentralkollineation")

Die Existenz nichttrivialer Zentralkollineationen:  
 Geg.:  $Z (=Z\alpha)$ , Achse,  $P, P_\alpha \in \mathcal{K}$  mit  $\{P, P_\alpha, Z\}$  kollinear,  
 $P, P_\alpha \notin Z$  ;  $P, P_\alpha \notin$  Achse  
 Dann gilt (Proj. Geom.): Im proj. Inzidenzraum  $\Pi$  } zu obiger Angabe stets eine Zentralkollineation.

In einer proj. Inzidenzebene  $\pi$  zu obiger Angabe eine Zentralkollineation genau dann, wenn  $\pi$  eine DESARGUES-Ebene ( $\pi_{De}$ ) ist. (Z.B.: In einer MOULTON-Ebene gilt der Satz von DESARGUES (kurz  $De$ ) nicht! In  $\pi$  ist  $De$  eine Folge aus den Axiomen  $I_j, E.$ )  
 Jede Ebene in  $\pi$  ist eine  $De$ -Ebene; genau die  $De$ -Ebenen lassen sich in  $\pi$  einbetten.

Definition: Eine Autokollineation  $\alpha$  heißt "projektiv"  $\Leftrightarrow \alpha$  ist Produkt von endlich vielen Zentralkollineationen.

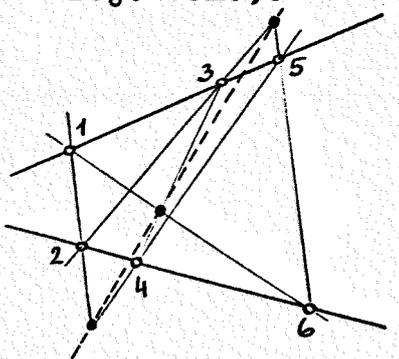
Die Existenz von proj. Autokollineationen:

$$\alpha: \pi_{De} \rightarrow \pi'_{De} = \pi_{De} \quad \text{bzw.} \quad \alpha: \pi \rightarrow \pi' = \pi$$

Gegeben: 2 Vierecke  $\{A, B, C, D\}$  und  $\{A', B', C', D'\}$  bzw. zwei räumliche Fünfecke, also 2 "Fundamentalfiguren";

dann gibt es mindestens eine projektive Kollineation  $\alpha$ , die die beschrifteten Vierecke bzw. die beschrifteten Fünfecke ineinander überführt (Beweis siehe Proj. Geom.).

Wodurch sind Ebenen (Räume) ausgezeichnet, in denen zu zwei Fundamentalfiguren genau eine proj. Koll. gehört?



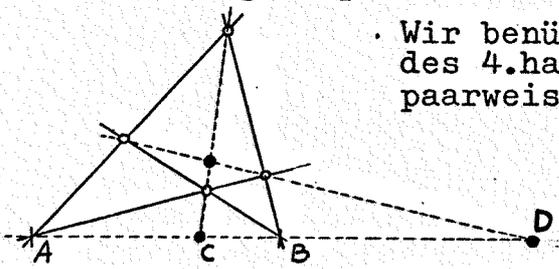
Proj. Geom.: Das Kriterium für "genau" ist die Gültigkeit des Satzes von PAPPUS-PASCAL (kurz PP): Liegen in einer proj. Inzidenzebene 6 Punkte abwechselnd auf 2  $\neq$  Geraden (und keiner in deren Schnittpunkt), dann sind die Schnittpunkte der Verbindungen 12.45, 23.56, 34.61 kollinear.

Weiters gilt der Satz von HESSENBERG: Gilt in einer proj. Inzidenzebene  $\pi$  der Satz PP ( $\pi =: \pi_{PP}$ ), so ist  $\pi_{PP}$  DESARGUESsch ( $\pi_{PP} \Rightarrow \pi_{De}$ ); die Umkehrung ist falsch!

$\Rightarrow$  Unter Vs.  $\pi_{PP}(\pi_{PP})$  bestimmen 2 Fundamentalfiguren genau eine proj. Kollineation.

Die Menge aller proj. Koll. einer  $\pi_{PP}$  (bzw. eines  $\pi_{PP}$ ) bilden eine Untergruppe der Gruppe  $P\Gamma L(\pi_{PP})$  bzw.  $P\Gamma L(\pi_{PP})$ , welche man mit  $PGL(\pi_{PP})$  (bzw.  $PGL(\pi_{PP})$ ) bezeichnet und "projektive Gruppe" nennt.

Definition: Eine projektive Inzidenzebene  $\pi$  heißt FANO-Ebene  $\pi_F$   $\Leftrightarrow$  jedes vollst. Viereck in  $\pi_F$  hat die Eigenschaft, daß die drei Diagonalpunkte nicht kollinear sind.



Wir benützen das vollst. Viereck zur Definition des 4. harmonischen Punktes D zu 3 kollinearen, paarweise  $\neq$  Punkten (symb.  $H(A, B, C, D)$ ).

Es gilt: In einer Nicht-FANO-Ebene  $\pi$  ist H nicht sinnvoll. Ist  $\pi$  FANO-Ebene und DESARGUESsche ( $\pi =: \pi_{F, De}$ ), dann ist durch H ein eindeutiger 4. harmonischer Punkt  $D \neq A, B, C$  bestimmt. (Wegen  $\pi_{PP} \Rightarrow \pi_{De}$  gilt obige Aussage auch in  $\pi_{F, PP}$ ).

Zur Konstruktion von H wurden bloß Inzidenzen in einem vollständigen Vierseit in  $\pi_{F, PP}$  benützt  $\Rightarrow$  H ist invariant gegenüber  $P\Gamma L(\pi_{F, PP})$ .

Bemerkung: Geg.  $\mathcal{P}(\Pi)$ , 2 Grundgebilde 1. Stufe in  $\mathcal{P}(\Pi)$ .  
 "Perspektive Abbildung eines Grundgebildes 1. Stufe auf ein Grundgebilde 1. Stufe" liegt genau dann vor, falls alle Paare (Urelement, Bildelement) mit Grundelementen eines festen Grundgebildes 1. Stufe  $\subset \mathcal{P}(\Pi)$  inzidieren.

Es gilt (Proj. Geom.): Alle Grundgebilde gleicher Stufe sind gleichmächtig.

⇒ Obige persp. Abb. ist eine Bijektion.

Eine proj. Abbildung eines Grundgeb. 1. St. auf ein Grundgeb. 1. St. ist das Produkt von endlich vielen persp. Abb. und daher eine Bijektion.

Eine beliebige Kollineation  $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} (\alpha: \Pi \rightarrow \Pi)$  ist genau dann projektiv, falls die Beschränkung von  $\alpha$  auf ein beliebiges Grundgebilde 1. Stufe  $\subset \mathcal{P}(\Pi)$  projektiv ist.

Geg:  $\mathcal{P}_e(\Pi)$ , Gesucht: Angabe der proj. Abb. eines Grundgebildes 1. St. auf ein zweites.

Es gilt der Fundamentalsatz FS (Proj. Geom.): Zu 3 ( $\neq$ ) Elementen des Ur- und Bildgebildes 1. Stufe  $\exists$  mindestens eine proj. Abb., die diese 3 (beschrifteten) Elemente koppelt;  $\exists^*$  eine proj. Abb.  $\iff$  in  $\mathcal{P}(\Pi)$  gilt PP.

### 0.3 Das "analytische Modell" für $\pi_{PP}(\Pi_{PP})$

Geg.:  $K$  .. (kommutativer) Körper,  $V$  .. Vektorraum über  $K$  mit  $\dim V = 3$  bzw. 4.

Es gilt: Je zwei Vektorräume gleicher (endlicher) Dimension über dem gleichen Grundkörper sind isomorph.

Konstruktion des arithmetischen n-dim. Vektorraumes über  $K$ :

$$K^n := \underbrace{K \times \dots \times K}_{n\text{-mal}}, \quad K^n := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in K \right\}$$

Elemente  $\in K^n$  : geordnete n-tupel

In der Menge  $K^n$  sei zusätzlich eine Addition und Multiplikation mit Skalaren erklärt:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$a(x_1, \dots, x_n) := (ax_1, \dots, ax_n) \quad a \in K$$

Damit besitzt  $K^n$  Vektorraumstruktur und wird (als Vektorraum) mit  $\mathbb{K}^n$  bezeichnet.

Es gilt: Ist  $V$  eine belieb. Vektorraum über  $K$  mit  $\dim V = n$ , dann ist  $V \cong \mathbb{K}^n$ .

Zu einem arithmet. Vektorraum  $\mathbb{K}^{n+1}$  läßt sich ein  $n$ -dimens. projektiver "Koordinatenraum"  $P^n(K)$  auf folgende Weise konstruieren:

Ein "Punkt"  $X \in P^n(K)$  werde mit einem eindimensionalen Unterraum des  $\mathbb{K}^{n+1}$  identifiziert.  $(x_1, \dots, x_{n+1}) =: \varphi \in \mathbb{K}^{n+1}, x_j \in K,$   
 $\Rightarrow X \triangleq [\varphi] \subset \mathbb{K}^{n+1}$  mit  $[\varphi] = \{\eta \mid \eta = \rho \varphi \wedge \rho \in K\}$  ..lin.Hülle.  
 Es gilt also:  $X \in P^n(K) \triangleq \{(x_1, \dots, x_{n+1}) = \rho(x_1, \dots, x_{n+1}), \forall \rho \in K,$   
 was die Schreibweise  $X = (x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}) \neq (0 : \dots : 0)$  rechtfertigt.

Geg.:  $P^2(K)$  ... proj. Koordinaten-  
ebene über  $K$

"Pkt."  $X \in P^2(K) \Rightarrow X = (x_1 : x_2 : x_3) \neq (0 : 0 : 0)$

"Gerade"  $a = [a_1 : a_2 : a_3] = [0 : 0 : 0]$

$I: X \mid a \Leftrightarrow a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$

Diese Inzidenzstruktur erfüllt  $I_1, I_2$ .

Es gilt  $e$ , denn  $\} 4$  Pkte.  
 $(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1),$   
 $(1:1:1)$ , welche  $e$  erfüllen.

Weiters gilt  $PP (\Rightarrow De) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow P^2(K)$  ist ein Modell für  $\mathbb{P}_{PP}$ .

$P^3(K)$  ... proj. Koordinaten-  
raum über  $K$

"Pkt."  $X \in P^3(K) \Rightarrow X = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \neq (0 : 0 : 0 : 0)$

"Ebene"  $\alpha = [a_1 : a_2 : a_3 : a_4] \neq [0 : 0 : 0 : 0]$

$I: X \mid \alpha \Leftrightarrow a_1 x_1 + \dots + a_4 x_4 = 0$

"Gerade" (Punktreihe)  $a \triangleq$   
zweidim. Unterraum von  $K^4$ .

$I: X \mid a \Rightarrow X \in Pa$   
 $a \mid \alpha \Rightarrow A \mid \alpha \quad \forall A \in Pa$

Diese Inzidenzstruktur erfüllt  $I_1, \dots, I_4, E$ . Weiters gilt  $PP \Rightarrow$   
 $P^3(K)$  ist ein Modell für  $\mathbb{P}_{PP}$ .

Es gilt umgekehrt der

1. Hauptsatz der Proj. Geometrie: Die proj. Inzidenzebene bzw. die proj. Inzidenzräume, in denen  $PP$  gilt, sind bis auf Isomorphismen genau die proj. Koordinatenebenen bzw. -räume über einem kommutativen Körper. Dieser Körper ist zum Körper der Geometrie isomorph.

Beweisskizze (vgl. Proj. Geom.):

a) Bestimmung des Körpers  $K$  der Geometrie ("Algebraisierung")  
 Geg.:  $\mathbb{P}_{PP}, \mathbb{P}_{PP}$ ; Gerade  $a \in \mathcal{O}$  aufgefaßt als Punktreihe  $\mathcal{P}_a$ .

Wir punktieren  $\mathcal{P}_a$  in einem bel. Punkt  $U \in \mathcal{P}_a : \mathcal{P}_a \setminus \{U\}$ .  
 In  $\mathcal{P}_a \setminus \{U\}$   $\exists$  sicher noch mindestens 2  $\neq$   
 Punkte  $O, E$ .

Bei Auszeichnung dieses Punktepaares  $O, E$  als Nullpunkt bzw. Einheitspunkt läßt sich in  $\mathcal{P}_a \setminus \{U\}$  eine Addition und Multiplikation so geeignet definieren, daß  $\{\mathcal{P}_a \setminus \{U\}, \text{Add.}, \text{Mult.} \mid O, E\} =: K$  die Struktur eines kommutativen Körpers hat.

$K$  ist unabhängig von der Auswahl von  $\mathcal{P}_a, U, O, E$  und ist bis auf Isomorphismen durch die geometrische Struktur  $\mathbb{P}_{PP}$  ( $\mathbb{P}_{PP}$ ) eindeutig festgelegt.

b) Koordinatisierung  $\mu$  von  $\mathcal{P}_a \setminus \{U\}$   
 Geg.: ein belieb. Zahlkörper  $Z \cong K$ ;  $0, E, X \in \mathcal{P}_a \setminus \{U\}$

"Koordinatisierung"  $\mu: K \rightarrow Z$  so, daß

$0^\mu = 0 \dots$  Nullelement von  $Z$ ,

$E^\mu = 1 \dots$  Einselement von  $Z$ ,

$X^\mu = x \in Z \dots$  "inhomogene proj. Koordinate von  $X$  im proj. Koord. System  $\{0, E; U\}$  bzgl. der Koordinatisierung  $\mu$ .

Durch das Koord. System ist die Zuordnung "Punkt  $\mapsto$  Zahl" i.a. nicht eindeutig bestimmt (und zwar genau dann nicht, falls  $Z$  nichttriviale Automorphismen gestattet).

Bemerkung a): Ist in  $\mathbb{P}(\mathbb{P}_{De})$  der Satz PP nicht erfüllt, dann ist  $K = Z$  nicht kommutativ ("Schiefkörper").

b) Ist in  $\mathbb{P} De$  nicht gültig, dann ist  $K \cong Z$  ein "Ternärkörper" (kein Körper!).

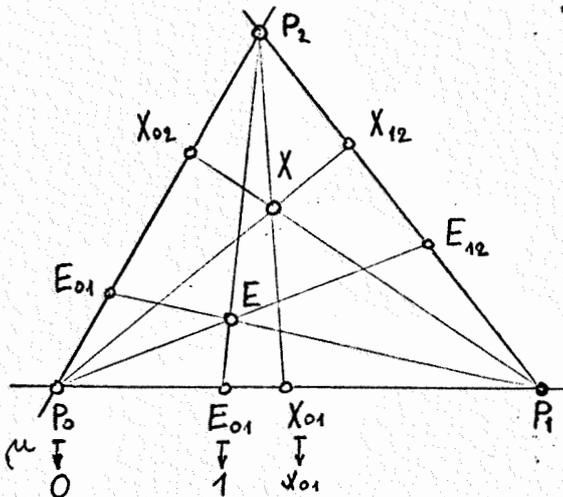
c) Gilt in  $\mathbb{P}(\mathbb{P})$  der Satz von FANO  $\rightarrow$  Char  $K \neq 2$ .

( $K$  mit Char  $K = 2 : = \{0, 1\} \Rightarrow 1+1 = 0$ ).

Geom. Konstruktion einer Koordinatisierung  $\mu^*$  in  $\mathbb{P}_{PP}$ .

D.h. geom. Festlegung des Isomorphismus  $\mathbb{P}_{PP} \cong P^2(K)$  durch  $\mu^*: \mathbb{P}_{PP} \rightarrow P^2(K)$ .  $\mu^*$  heißt ein Koordinatensystem in  $\mathbb{P}_{PP}$ .

Gegeben sei ein Viereck  $P_0, P_1, P_2, E$  in  $\mathbb{P}_{PP}$  ( $\mathbb{P}$  nach  $e$ ). ("Fundamentalfigur"  $P_j$  .. Grundpunkte,  $E$  .. Einheitspunkt).



Wir projizieren  $E$  aus den Grundpunkten auf die Gegenseiten:  $\Rightarrow$

$EP_j \cdot P_k P_l = : E_{kl}$  ( $\mathbb{P}$  wegen  $i_2, e$ )

$P_0, E_{01}, P_1$  sind paarweise  $\neq$  und bestimmen ein projektives Koord. System auf  $\mathcal{P}_{P_0 P_1}$ . Mit  $P_0$  als Nullpunkt,  $E_{01}$  als Einheitspunkt ist eine Algebraisierung  $\mu: \mathcal{P}_{P_0 P_1} \setminus \{P_1\} \rightarrow K$  bis auf Isomorphismen von  $K$  eindeutig festgelegt. I.f. wählen wir eine Algebraisierung  $\mu$  fest aus:

$\Rightarrow X_{01} \in \mathcal{P}_{P_0 P_1} \setminus \{P_1\} : \Rightarrow X_{01}^\mu =: x_{01} \in K$  eindeutig.

Unter Verwendung der festen Algebraisierung  $\mu$  definieren wir eine Koordinatisierung  $\mu^*: \mathbb{P}_{PP} \rightarrow P^2(K)$  in mehreren Schritten:

Schritt 1:  $X = X_{01} \in \mathcal{P}_{P_0 P_1} \setminus \{P_1\} \subset \mathbb{P}_{PP} \Rightarrow X_{01}^\mu =: (x_0 : x_1 : 0) \in P^2(K)$   
 mit  $x_0 \neq 0 \wedge \frac{x_1}{x_0} = x_{01} = X_{01}^\mu (\Rightarrow X_{01}^\mu$  ist eindeutig!

Speziell für  $P_0, E_{01}$  folgt aus dieser Definition:

$$\begin{aligned} P_0^\mu = 0 = \frac{x_1}{x_0} &\Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow P_0^\mu = (x_0 : 0 : 0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mit } x_0 \neq 0 \\ \text{(oBdA. } x_0 = 1) \end{array} \right. \\ E_{01}^\mu = 1 = \frac{x_1}{x_0} &\Rightarrow x_1 = x_0 \neq 0 \Rightarrow E_{01}^\mu = (1 : 1 : 0) \end{aligned}$$

Schritt 2:  $X = P_1 \dots P_1^\mu =: (0 : 1 : 0)$

Schritt 3:  $X = X_{12} \in \mathcal{P}_{P_1 P_2} \setminus \{P_2\} \in \mathbb{P}_{PP} : PP \Leftrightarrow FS \Rightarrow \mathbb{P}^*$  Projektivität  $\alpha_{12}: \mathcal{P}_{P_1 P_2} \rightarrow \mathcal{P}_{P_0 P_1}$  mit  $P_1 \mapsto P_1, P_2 \mapsto P_0, E_{12} \mapsto E_{01}$ .

Def.:  $X_{12}\mu^* := (0 : x_1 : x_2)$  mit  $x_2 \neq 0 \wedge \frac{x_1}{x_2} = \lambda_{12} \alpha_{12} \mu \in K$ .

Speziell für  $P_2, E_{12}$  liefert diese Vorschrift:

$$\begin{aligned} P_2 \alpha_{12} \mu = P_0 \mu = 0 &\implies P_2 \mu^* = (0 : 0 : 1) \\ E_{12} \alpha_{12} \mu = E_{01} \mu = 1 &\implies E_{12} \mu^* = (0 : 1 : 1) \\ P_1 \mu^* &\text{ vgl. Schritt 2.} \end{aligned}$$

Schritt 4:  $X = X_{02} \in \mathcal{P}_{P_0 P_2} \setminus \{P_2\}$  .  $PP \implies \mathcal{J}^*$  Projektivität

$$\alpha_{02}: \mathcal{P}_{P_0 P_2} \rightarrow \mathcal{P}_{P_0 P_1} \quad \text{mit } P_0 \mapsto P_0, P_2 \mapsto P_1, E_{02} \mapsto E_{01}.$$

Def.:  $X_{02}\mu^* := (x_0 : 0 : x_2)$  mit  $x_0 \neq 0 \wedge \frac{x_2}{x_0} = \lambda_{02} \alpha_{02} \mu \in K$

Speziell für  $P_0, E_{02}$  ergibt sich:

$$P_0 \alpha_{02} \mu = P_0 \mu = 0 \implies P_0 \mu^* = (1 : 0 : 0) \quad \text{in Übereinstimmung mit Schritt 1.}$$

$$E_{02} \mu^* = (1 : 0 : 1); P_2 \mu^* \text{ vgl. Schritt 3.}$$

Schritt 5:  $X \in \mathcal{T}_{PP}$  sei allgemein, d.h.  $X \neq P_j, X \neq X_{jk}$ .

Wir projizieren  $X$  aus den Fundamentalpunkten  $P_j$  auf die Gegenseiten  $P_k P_l$ :  $XP_j, P_k P_l = : X_{kl}$ , dann gilt für  $X_{kl}$ :

$$\begin{aligned} X_{01} \mu^* &= (\mu_0 : \mu_1 : 0) \quad (\text{vgl. Schritt 1}) \quad \text{wegen } X \notin P_j P_k \implies u_0 \cdot u_1 \neq 0 \\ X_{12} \mu^* &= (0 : \nu_1 : \nu_2) \quad (\text{vgl. Schritt 3}) \quad \text{mit } \nu_1 \cdot \nu_2 \neq 0 \\ X_{02} \mu^* &= (\omega_0 : 0 : \omega_2) \quad (\text{vgl. Schritt 4}) \quad \text{mit } \omega_0 \cdot \omega_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Nun gilt der Satz von CEVA (vgl. Proj. Geom.):  $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\omega_2}{\omega_0} \cdot \frac{\mu_0}{\mu_1}$ ,

d.h.  $X_{12}$  ist durch  $X_{01}$  und  $X_{02}$  mitbestimmt.

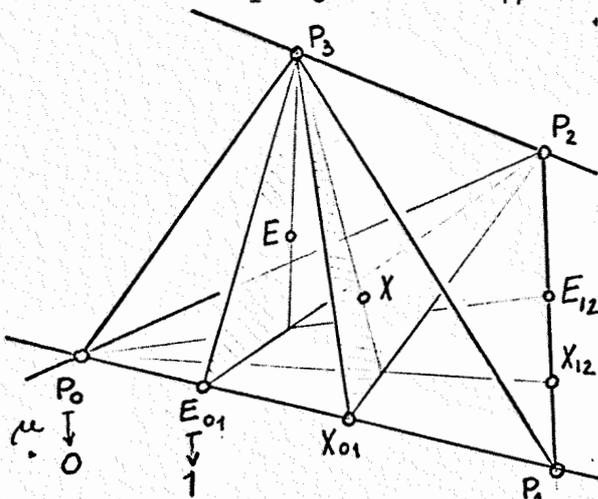
Man definiert damit  $X\mu^*$  auf folgende Weise:

$$X\mu^* := (x_0 : x_1 : x_2) \quad \text{mit } \frac{x_1}{x_0} = \frac{\mu_1}{\mu_0} \quad \text{und} \quad \frac{x_2}{x_0} = \frac{\nu_2}{\omega_0}.$$

Speziell für  $E$  folgt  $E\mu^* = (1 : 1 : 1)$ .

Mit diesen Festsetzungen ist  $\mu^*$  ein Isomorphismus von  $\mathcal{T}_{PP}$  auf  $P^2(K)$ , wobei eine Punktreihe durch eine homogene Linearform dargestellt wird, deren homogenes Koeffiziententripel "proj. Geradenkoordinaten" heißt, und die Inzidenz in  $P^2(K)$  das Erfülltsein einer Bilinearform zwischen Punkt- und Geradenkoordinaten bedeutet.

Analog: Geom. Konstruktion einer Koordinatisierung  $\mu^*$  im proj. Raum  $\mathcal{T}_{PP}$ .



Wir wählen eine Fundamentalfigur in  $\mathcal{T}_{PP}$ :  $P_0, P_1, P_2, P_3, E$ .

Wir projizieren  $E$  und  $X$  (bel.  $\in \mathcal{T}_{PP}$ ) aus den Kanten des Fundamentaltetraeders auf die jeweils windschiefe Kante.

$$\begin{aligned} \text{Z.B. } E P_2 P_3 \cdot P_0 P_1 &= E_{01} \\ X P_2 P_3 \cdot P_0 P_1 &= X_{01} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Die Algebraisierung  $\mu: \mathcal{P}_{P_0 P_1} \setminus \{P_1\} \rightarrow K$  werde fest gewählt.

Wegen  $PP \mathcal{J}^*$  Projektivität  $\alpha_{12}: \mathcal{P}_{P_1 P_2} \rightarrow \mathcal{P}_{P_0 P_1}$  mit  $P_1$  fest,  $P_2 \mapsto P_0$ ,  $E_{12} \mapsto E_{01}$ .  $\forall$  Kanten  $P_i P_k$ , welche

$P_0 P_1$  treffen,  $\mathcal{J}^* \alpha_{jk}$  so, daß der gemeinsame Punkt von  $P_i P_k$  und  $P_0 P_1$  fest bleibt.  
Für die Kante  $P_2 P_3$  verwendet man z.B. die Kante  $P_1 P_2$  für einen Zwischenschritt:  $\beta: \mathcal{P}_{P_2 P_3} \rightarrow \mathcal{P}_{P_1 P_2}$  mit  $P_2$  fest,  $P_3 \mapsto P_1$ ,  $E_{23} \mapsto E_{12}$ . Dann ist  $\beta \cdot \alpha_{12}$  eine Projektivität von  $\mathcal{P}_{P_2 P_3}$  auf  $\mathcal{P}_{P_0 P_1}$ .

In jeder Tetraederebene gilt für  $X_{jk} \in \mathcal{P}_{P_i, P_k} \setminus \{P_k\}$  der Satz von CEVA.  $\implies$

Def.:  $X_{\mu^*} := (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \neq (0:0:0:0) \in P^3(K)$

Speziell:  $P_0 \mu^* = (1:0:0:0)$ ,  $P_1 \mu^* = (0:1:0:0)$ ,  
 $P_2 \mu^* = (0:0:1:0)$ ,  $P_3 \mu^* = (0:0:0:1)$ ,  
 $E \mu^* = (1:1:1:1)$ .

Bemerkung 1): Die Konstruktion von  $\mu^*$  heißt "Einführung eines proj.) Koordinatensystems in  $\mathcal{T}_{PP}$  ( $\mathbb{T}_{PP}$ ). Bei fest gewählter Fundamentalfigur  $\{P_i, E\}$  und fest gewählter Algebraisierung  $\mu^*$  ist die Konstruktion der Koordinatisierung  $\mu^*$  eindeutig und  $\mathcal{F}_{PP}$  ( $\mathbb{T}_{PP}$ ) ist durch  $\mu^*$  analytisch beschreibbar.

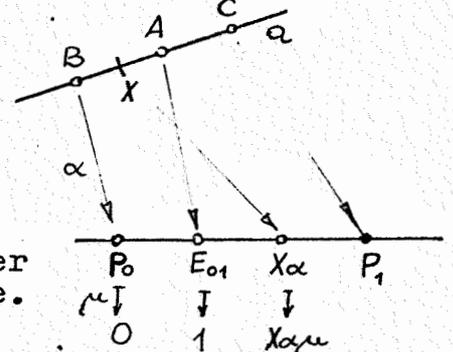
Bemerkung 2): Sei  $\mathcal{P}_a$  eine beliebige Punktreihe in  $\mathcal{T}_{PP}$  bzw.  $\mathbb{T}_{PP}$ ,  $\mu$  eine feste Algebraisierung von  $\mathcal{P}_{P_0, P_1}$  und seien  $A, B, C \in \mathcal{P}_a$  paarweise  $\neq$ . Wegen PP  $\mathcal{J}^*$  Projektivität  $\alpha: \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_{P_0, P_1}$  mit  $A \rightarrow E_{01}$ ,  $B \rightarrow P_0$ ,  $C \rightarrow P_1$ .

Wir definieren  $\forall X \in \mathcal{P}_a \setminus \{C\}$  das "Doppelverhältnis von X bezügl. A, B, C" durch:

$$DV(XABC) := X_{\alpha\mu} \in K$$

$$\text{Zusatzdef.: } DV(CABC) := \infty.$$

$\implies$  Die Verhältnisse  $\frac{u_0}{u_1}, \frac{v_2}{v_1}, \frac{w_2}{w_0}$  etc. im Satz von CEVA sind nach dieser Definition gewisse Doppelverhältnisse.



Es gilt: Eine Abbildung eines Grundgebildes 1. Stufe in ein Grundgeb. 1. Stufe ist genau dann projektiv, wenn sie bijektiv und DV-treu ist.

Eine Kollineation ist genau dann projektiv, wenn ihre Beschränkung auf eine einzige Punktreihe DV-treu ist.

Bemerkung 3): Proj. abgeschlossene Anschauungsebene(-raum).

Proj. Geom: Unter Benützung der üblichen Inzidenzaussagen für Fernelemente ist die proj. abgeschl. Anschauungsebene (-raum) ein Modell für eine proj. Inzidenzebene (-raum). Dabei benützt man außerdem: Die Menge der Punkte einer Punktreihe im Sinne der Elementargeometrie ist bijektiv zu  $R$  ( $\implies R$  ist Körper der proj. abg. Ansch. ebene (-raum)).

$\implies$  Die proj. abgeschl. Ansch. -ebene (-raum) ist eine Struktur  $\mathcal{T}(R), \mathbb{T}(R)$ , wobei aufgrund des 1. Hauptsatzes der P.G. mit gegebenem Körper  $R$  gilt: Die proj. abg. Ansch. -ebene (-raum) ist bis auf (unwesentliche) Isomophien genau die reelle proj. Inzidenzebene  $\mathcal{T}(R)$  bzw. -raum  $\mathbb{T}(R)$ .

Anmerkungen:  $\alpha$ ) Die Ansch. -ebene (-raum) ist ein Modell für  $\mathcal{T}(R), \mathbb{T}(R)$  nur dann, falls die eigentlichen Punkte, Geraden (Ebenen) mit den Fernelementen als gleichwertig angesehen sind.

$\beta$ ) Wegen  $R$  kommutativ gilt:  $\mathcal{T}(R) = \mathcal{T}_{PP}(R)$ ,  
 $(\mathbb{T}(R) = \mathbb{T}_{PP}(R))$ .

In einer proj. Inzidenzebene gilt der Satz von HESSENBERG:  $PP \implies De$ .  $\implies$  In  $\mathcal{T}(R)$  ist  $De$  erfüllt.

In  $\mathbb{T}(R)$  ist  $De$  trivial,  $PP$  gilt wegen  $R$  kommutativ.

Nach dem 1. Hauptsatz ist  $\pi_{PP}(\Pi_{PP})$  isomorph zu  $P^2(K), P^3(K)$  und daher algebraisierbar. (K ... kommutativer Körper). Daher ist jede geometrische Begriffsbildung ins analytische Modell übertragbar.

Z.B.: Übertragung des Begriffs "proj. Kollineation" (=analytische Beschreibung der proj. Kollineationen):

Es gilt der 2. Hauptsatz der P.G.:

Die Gruppe  $PGL(\pi_{PP}) (PGL(\Pi_{PP}))$  ist isomorph zur Gruppe  $PGL(3, K) (PGL(4, K))$ , wobei gilt:  $PGL(i, K)$  ( $i=3$  bzw.  $4$ ) ist die Menge der homogenen, regulären, linearen Transformationen in  $3$  ( $4$ ) Variablen über  $K$ .

$\Rightarrow (*) \quad x'_j = \sum_{k=0}^{2(3)} a_{jk} x_k \quad (j=0, \dots, 2(3))$  mit  $a_{jk}, x_k, x'_j \in K$  und  $\det(a_{jk}) \neq 0$  ist die analytische Darstellung einer proj. Kollineation in  $P^2(K) (P^3(K))$ .

Der 2. Hauptsatz besagt also: Die proj. Kollineationen sind genau jene Punktabbildungen die sich im analytischen Modell in der Form (\*) schreiben.

Bemerkung a): Die hier angegebene Formulierung des 2. Hauptsatzes ist eigentlich ein Sonderfall des 2. Hauptsatzes der Proj. Geom.: Die Gruppe der Kollineationen  $P\Gamma L(\pi_{PP})$ ,  $P\Gamma L(\Pi_{PP})$  ist isomorph zur Gruppe der homogenen, regulären, semilinearen Transformationen

$(**) \quad x'_j = \sum_{k=0}^{2(3)} a_{jk} \cdot (x_k \sigma) \quad (j=0, \dots, 2(3)), a_{jk}, x_k, x'_j \in K, \det(a_{jk}) \neq 0$  und  $\sigma \dots$  Automorphismus von  $K$  ist die analytische Darstellung einer Kollineation.

Z.B.:  $K = \mathbb{C} : \sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $z \sigma = \bar{z} \Rightarrow$

$\alpha$  beschrieben durch  $x'_j = \sum_{k=0}^{2(3)} a_{jk} \bar{x}_k$  ist eine nicht proj. Kollineation (sie heißt "Antikollineation"); denn  $\alpha$  ist bijektiv und linear, also eine Kollineation, aber nicht DV-treu:

$$DV(XABC) = a \xrightarrow{\alpha} \bar{a}.$$

( $\sigma$  mit  $z \sigma = \bar{z}$  ist der einzige bekannte nichttriviale Automorphismus von  $\mathbb{C}$ . Jedoch } "mehr" nichttriviale Autom. von  $\mathbb{C}$  als reelle Zahlen).

Z.B.:  $K = \mathbb{R}$ :  $\mathbb{R}$  gestattet bloß den trivialen Autom.  $\sigma = \text{id}$ .  
 $\Rightarrow$  Über  $\mathbb{R}$  ist jede Kollineation projektiv, also  $P\Gamma L(i, \mathbb{R}) = PGL(i, \mathbb{R}) \quad i=3$  bzw.  $4$ .

Es gilt dann der Satz von STAUDT: Im Reellen ist eine bijektive Abb. eines Grundgebildes 1. Stufe auf ein Grundgebilde 1. Stufe, welche harmonische Lage erhält, automatisch projektiv, also DV-treu.

Bemerkung: b): Algebraisierung  $\mu$ : Die Punkte einer "affinen" Geraden (d.i. eine punktierte proj. Gerade) werden bijektiv auf den Grundkörper  $K$  bezogen.  $\mu$  ist eindeutig bis auf Automorphismen von  $K$ ; zu festem  $\mu$  gehört eine eindeutige Koordinatisierung  $\mu^*$ .

$K=R$  : Der Isomorphismus  $\mu$  zwischen der Punktmenge einer affinen Geraden und  $R$  ist eindeutig.  $\Rightarrow$ . Die projektive Skala über  $R$  ist eindeutig.

Bemerkung c): Ein Beispiel einer algebraischen Fragestellung mit geometrischer Bedeutung liefert der

Satz von WEDDERBURN: Jeder endliche Körper  $K$  ist kommutativ.

Durch  $K$  nicht kommutativ wird eine De-Ebene algebraisiert (vgl. Bemerk. 1). Daraus folgt der geometrische Satz:

Jede endliche proj. DESARGUES-Ebene ist eine PAPPUS-Ebene. (Für diesen Satz ] bis jetzt kein rein geometrischer Beweis).

#### 0.4 Affine Inzidenzebene, affiner Inzidenzraum

Geg.: proj. Inzidenzebene(-raum)  $\pi, \Pi$ :

$$\pi = \{ \mathcal{P}, \mathcal{G}, I \mid i_1, i_2, e \}$$

Wir zeichnen eine Gerade  $u \in \mathcal{G}$  aus. u... "Ferngerade",  $\mathcal{P}_u$ ... "Fernpunktreihe".

Dann heißt die Struktur

$$\pi_a := \{ \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_u, \mathcal{G} \setminus \{u\}, I \mid i_1, i_2 \text{ gelten in } \pi \}$$

eine "affine Inzidenzebene".  $\pi_a$  ist eine "geschlitzte" proj. Inzidenzebene.

Analog in  $\Pi$ :  $\omega \in \mathcal{E}$ ... "Fernebene",  $\mathcal{P}_\omega$ ... Feld,  $\mathcal{G}_\omega$ ... Geradenmenge in  $\omega$ ;

dann heißt die Struktur

$$\Pi_a := \{ \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_\omega, \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_\omega, \mathcal{E} \setminus \{\omega\}; I \mid I_1, \dots, I_4, E \text{ gelten in } \Pi \}$$

ein "affiner Inzidenzraum".

Folg. 1: Jede Punktreihe in  $\pi_a(\pi_a)$  ist eine punktierte proj. Gerade.

In  $\pi_a(\pi_a)$  ist eine weitere binäre Relation, das "Parallelsein" erklärt:

$$a \parallel b \ (\in \pi_a) \iff (a \cap \omega) = (b \cap \omega) \text{ in } \Pi \quad ( \parallel \text{ ist RST-Relation) }$$

$$a \parallel \alpha \ (\in \pi_a) \iff (a \cap \omega) \perp (\alpha \cap \omega) \text{ in } \Pi$$

$$\alpha \parallel \beta \ (\in \pi_a) \iff (\alpha \cap \omega) = (\beta \cap \omega) \text{ in } \Pi \quad ( \parallel \text{ ist RST-Relation) }$$

(Dabei werden die Grundelemente in  $\pi_a$  und in  $\Pi$  gleich bezeichnet !)

Folg. 2: Eine proj. Koordinatisierung  $\mu^*$  heißt "affine" Koordinatisierung genau dann, wenn die Fernebene  $\omega$  Koordinatenebene mit der Gleichung  $x_0 = 0$  ist.

$$\text{D.h. } X \in \pi_a \iff X_{\mu^*} = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \neq (0 : 0 : 0 : 0) \wedge x_0 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{o.B.d.A.: } x_0 = 1 \Rightarrow X_{\mu^*} = (1 : x_1 : x_2 : x_3) =: (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \dots$$

... "inhomogene affine Koord. des eigentlichen Punktes  $X$  im Koordinatensystem  $\mu^*$ ".

$\Rightarrow \{ \text{Punkte } X \in \pi_a \}$  ist durch  $\mu^*$  bijektiv auf  $\{(x_1, x_2, x_3)\} = \mathbb{K}^3$  bezogen. Mit  $(0, 0, 0) = 0_{\mu^*}$ ,  $0$ ... Koord.-Ursprung,  $(x_1, x_2, x_3) =: \mathcal{X}$  rechtfertigt dies die elementare Vektorrechnung in  $\pi_a$ :  $\vec{OX} = \mathcal{X}$

Folg. 3: "proj. Affinitäten" in  $\Pi_a$

Definition: Eine Abb.  $\alpha_a: \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{P}^1$  heißt "Affinität", wenn gilt:  $\exists$  eine Kollineation  $\alpha: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  mit  $\alpha_a = \alpha|_{\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{P}^1}$ .  $\alpha_a$  heißt "proj. Affinität"  $\iff \alpha$  ist proj. Kollineation.

Kennzeichen einer proj. Affinität (Vs.  $\Pi_{PP}$ ):

$\alpha$  proj.  $\iff$  ist DV-treu.  $\implies$  In  $\Pi_{a,PP} := \Pi_a \subset \Pi_{PP}$  ist DV(XABC) mit  $C \in \omega$  definiert als TV(XAB).

Somit gilt: In einem affinen PP-Raum  $\Pi_{a,PP}$  ist eine Affinität genau dann projektiv, wenn sie TV-treu (teilverhältnistreu) ist.

Satz von STAUDT: Im Reellen ist jede Affinität TV-treu, also projektiv.

Analytische Beschreibung einer proj. Affinität  $\alpha_a$ :

$$\alpha_a : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x'_1, x'_2, x'_3) \text{ mit } x'_j = a_j + \sum_{k=1}^{2(3)} a_{jk} x_k, \\ x_k, x'_j, a_j, a_{jk} \in K, \det(a_{jk}) \neq 0$$

Die Menge aller proj. Affinitäten bildet hinsichtlich der Operation des "Hintereinanderausführens" eine Gruppe, die sogenannte "affine Gruppe"  $GA(\mathbb{P}^2)$  bzw.  $GA(\Pi_a)$ ; die Menge der inhomogenen, regulären, linearen Transformationen in  $2(3)$  Veränderlichen über  $K$  heißt "inhomogene Gruppe  $GL(2(3), K)$ ".

Es gilt: Jede proj. Affinität ist durch eine inhom., reg., lin. Transf. im analyt. Modell beschreibbar; umgekehrt beschreibt jede solche analyt. vorgegebene Transformation eine affine Abbildung.

Die Angabe einer proj. Affinität  $\alpha_a$  einer affinen PP-Ebene bzw. eines affinen PP-Raumes auf eine 2. affine PP-Ebene (PP-Raum) erfolgt durch zugeordnete Dreiecke (Tetraeder). (Gilt PP nicht, dann  $\exists$  zu zugeordneten Fundamentalfiguren mindestens ein  $\alpha_a$ ; PP leistet die Eindeutigkeit von  $\alpha_a$ ).

Spezielle Affinitäten  $\alpha_a$ :

Ist  $\alpha_a$  die Beschränkung einer Elation mit den Ferngeraden  $u$  (Fernebene  $\omega$ ) als Achse, dann (und nur dann) heißt  $\alpha_a$  "Translation".

0.5 Die euklidische Ebene  $\Pi_e$

Geg. ist eine reelle affine Ebene:  $\mathbb{P}_a(\mathbb{R})$  ( $\implies$  PP, De gilt); sei  $u$  die Ferngerade von  $\mathbb{P}_a(\mathbb{R})$  in der proj. Erweiterung und sei auf  $u$  zusätzlich eine elliptische Punktinvolution  $\epsilon_u$  gegeben. ( $\epsilon_u$  heißt "absolute Involution").

$\epsilon_u$  ist Involution heißt:  $\epsilon_u^2 = \iota \dots$  Identität. ( $\epsilon_u \neq \iota$ )

$\epsilon_u \dots$  elliptisch heißt:  $\exists$  keine Fixpunkte über  $\mathbb{R}$ .

Sprechweise: Sind  $a, b$  zwei affine Geraden  $A_u, B_u$  ihre eindeutigen

Fernpunkte in der proj. Erweiterung, dann heißt "a orthog. b"  
 $(a \perp b) \Leftrightarrow A_u, B_u$  sind in der absoluten Involution gekoppelt  
 $(A_u = B_u \varepsilon_u)$ .

Definition: Eine reelle affine Ebene heißt euklidisch, wenn auf ihrer Ferngeraden eine absolute (elliptische) Involution gegeben ist; d.h.  $\exists$  ein Orthogonalitätsbegriff.

Folg. 1: Die elementargeom. Ebene ist ein Modell für eine euklid. Ebene.

In der Proj. Geom. zeigt man: Jede abstrakte euklid. Ebene ist isomorph zur Anschauungsebene in dem Sinn, daß im abstrakten Sinn orthogonale Geradenpaare elementargeometrisch-orthogonalen Paaren zugeordnet werden.

Folg. 2:  $R \subset \mathbb{C}$ : Die über R elliptische Involution  $\varepsilon_u$  auf u ist über  $\mathbb{C}$  hyperbolisch, hat also zwei (stets getrennte) Fixpunkte I, J. Diese Fixpunkte über  $\mathbb{C}$  von  $\varepsilon_u$  heißen "absolute Punkte" ("Kreispunkte").

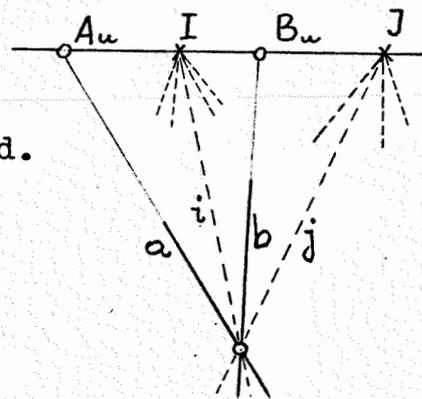
Eine Involution ist durch ihre Fixpunkte bestimmt.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Eine reelle affine Ebene ist als euklidische Ebene dadurch ausgezeichnet, daß auf ihrer Ferngeraden zwei Punkte über  $\mathbb{C}$  als absolute Punkte ausgezeichnet sind.

Da in einer hyp. Involution die Paare zugeordneter Punkte harmonisch zu den Fixpunkten liegen, kann der Orthogonalitätsbegriff in  $\mathbb{P}_e(R \subset \mathbb{C})$  auch so gefaßt werden:

$$a \perp b \Leftrightarrow DV(A_u B_u I J) = -1$$

Über  $\mathbb{C}$ : Die durch I oder J hindurchgehenden eigentlichen Geraden heißen "isotrope" Geraden.



Winkeldefinition: In der abstrakten euklid. Ebene sei  $\sphericalangle ab = \frac{1}{2i} \log DV(A_u B_u I J) = \frac{1}{2i} \log DV(a b i j)$

(In der Anschauungsebene ist dies eine beweisbare Formel = Formel von LAGUERRE.)

Numeriert man I und J um, so folgt:

$$DV(\dots) \rightarrow \frac{1}{DV(\dots)} \Rightarrow \log DV(\dots) \rightarrow -\log DV(\dots) \Rightarrow \sphericalangle ab \rightarrow -\sphericalangle ab$$

$\Rightarrow$  Die euklid. Ebene ist in kanonischer Weise orientierbar. Die Auswahl einer Orientierung bedeutet Auswahl über einer Reihenfolge der abs. Punkte.

Folg. 3: Spezielle Affinitäten: "Ähnlichkeiten"

In einer euklid. Ebene  $\mathbb{P}_e(R)$  sind gewissen Affinitäten als "Ähnlichkeiten" ausgezeichnet; und zwar gilt

Definition: Eine lin. Abb.  $\alpha$  von  $\mathbb{P}_e(R)$  auf sich heißt "Ähnlichkeit"  $\Leftrightarrow$  (1)  $\alpha$  ist Affinität (d.h.  $\exists$  eine Kollineation  $\varkappa: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  mit  $\alpha = \varkappa|_{\mathbb{P}_e}$  ( $\Rightarrow \varkappa|_u: u \rightarrow u$ ))  
 (2)  $\varkappa|_u$  kommutiert mit der absoluten Involution  $\varepsilon_u$ :  $\varkappa|_u \cdot \varepsilon_u = \varepsilon_u \cdot \varkappa|_u$

Bemerkung: (2)  $\implies$  :  $\varepsilon_u = \varkappa|u \cdot \varepsilon_u \cdot (\varkappa|u)^{-1}$

Die Fernpunkte bleiben nach  $\varkappa$  in  $\varepsilon_u$  gekoppelt; es gehen also orthogonale Geraden wieder in orthogonale über.

$\implies$  Eine Ähnlichkeit ist eine Affinität, bei der Orthogonalität erhalten bleibt.

Es gilt: Gehen bei einer Affinität in  $\mathcal{T}_e$  zwei wesentlich  $\neq$  rechte Winkel in zwei ebensolche über, dann ist sie notwendig eine Ähnlichkeit.

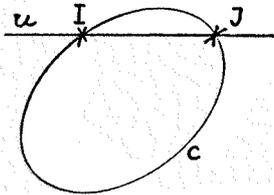
Der Kreisbegriff:

Zunächst: Ein Kegelschnitt  $c \subset \mathcal{T}(R)$  heißt "Mittelpunktskegelschnitt in  $\mathcal{T}_\alpha(R) \iff u$  ist nicht Tangente von  $c$ .

In  $\mathcal{T}(R)$  gilt: Das Polarsystem von  $c$  induziert auf jeder Nicht-Tangente von  $c$  die Involution konjugierter Punkte bezügl.  $c$ .

$\implies$  In  $\mathcal{T}_e(R)$ : Ein Kreis ist ein Mittelpunktskegelschnitt in  $\mathcal{T}_e$ , dessen Polarsystem auf  $u$  eine Involution  $kj$ . Punkte induziert, welche mit der gegebenen abs. Involution  $\varepsilon_u$  übereinstimmt.

$\implies$  In  $\mathcal{T}_e(R \subset \mathbb{C})$ : Die Fixpunkte von  $\varepsilon_u$  sind die Fixpunkte der Involution  $kj$ . Punkte, also die Schnittpunkte des Kreises mit  $u$ .



$\implies$  Definition: Ein Mittelpunktskegelschnitt in der reellen euklidischen Ebene heißt "Kreis", wenn er in der komplexen Erweiterung die beiden abs. Punkte enthält.

$\implies$  Neuerliche Kennzeichnung der Ähnlichkeit:

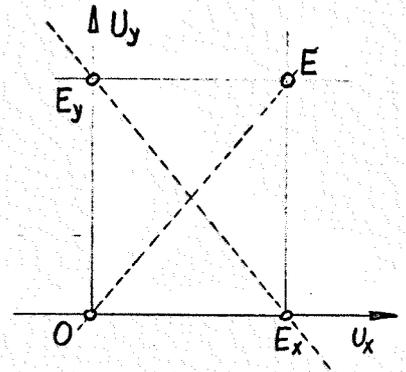
Eine Affinität in  $\mathcal{T}_e(R)$  ist eine Ähnlichkeit, wenn ein einziger Kreis in einen Kreis übergeht.

Analytische Beschreibung einer Ähnlichkeit:

Beschreibung nur dann speziell, falls ausgezeichnete Koordinatensysteme zugrunde liegen!

"Normalkoordinaten": Koordinatenachsen orthogonal,  $OE_x E E_y \dots$  "Einheitsrechteck".

In  $\mathcal{T}_e$  : Ein Rechteck heißt "Quadrat"  $\iff$  wenn die Diagonalen orthogonal sind.



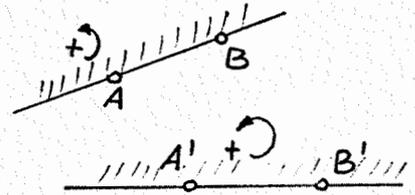
$\implies$  "Kartesische Koordinaten": Ein Normalkoordinatensystem mit einem Einheitsquadrat heißt ein "kartesisches Koordinatensystem".

Mit einem kart.K.S. gilt:

$\alpha: (x_1, x_2) \longrightarrow (x'_1, x'_2)$  ist eine Ähnlichkeit  $\iff$

$$\iff \begin{cases} x'_j = a_j + \sum_{k=1}^2 a_{jk} x_k \wedge (a_{jk}) = \lambda (\alpha_{jk}) \text{ mit } \lambda \in R \setminus \{0\} \wedge \\ \wedge (\alpha_{jk}) \text{ ist orthogonale Matrix. } (j=1,2; a_j, \alpha_{jk} \in R) \end{cases}$$

$\{\alpha \mid \alpha \text{ Ähnlichkeit}\}$  heißt "Ähnlichkeitsgruppe"  $GO(\mathcal{T}_e)$   
 $\{\alpha^+ \in GO(\mathcal{T}_e) \mid I\alpha^+ = I, J\alpha^+ = J\} =: GO^+(\mathcal{T}_e) \subset GO(\mathcal{T}_e) \dots$  Gruppe der "gleichsinnigen" Ähnlichkeiten (orientierungstreu!).  
 Die Menge der gegensinnigen Ähnlichkeiten ( $I \rightleftharpoons J$ ) bilden keine Gruppe!



Festlegung einer Ähnlichkeit  
 Geg.  $A \neq B \mid \in \mathcal{T}_e, A' \neq B' \mid \in \mathcal{T}_e$ , Drehsinn,  
 $\Rightarrow \exists^*$  Ähnlichkeit  $\alpha$  vom verlangten Sinn mit  $A' = A\alpha, B' = B\alpha$ .

Folg. 4: "Längenmessung"  $d$  in  $\mathcal{T}_e$

( $d$  bewirkt eine zusätzliche Struktur in  $\mathcal{T}_e$ ).

Definition: Eine "Längenmessung"  $d$  ist eine Abbildung.

$$d: \mathcal{T}_e \times \mathcal{T}_e \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$A, B \mid \in \mathcal{T}_e, (A, B) \longmapsto d(A, B) =: \overline{AB} \geq 0$$

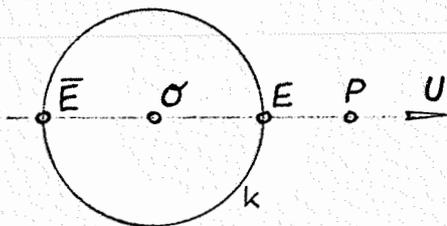
mit folgenden Eigenschaften:

(1)  $d$  ist "translationsinvariant".

d.h.:  $\forall A, B \mid \in \mathcal{T}_e, \forall \tau$  ( $\tau \dots$  Translation) gilt:  
 $d(A, B) = d(A\tau, B\tau)$ .

$\Rightarrow$  Man braucht bloß Strecken betrachten, die von einem festen Punkt  $\mathcal{O}$  ausgehen.

(2) Sei  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_e$  fest gegeben. Ges.:  $\overline{\mathcal{O}P}$ ,  $P \in \mathcal{T}_e$ .  
 dazu: "Eichkreis"  $k$  mit der Mitte  $\mathcal{O}$ ; mit  $k$  soll gelten:



(a)  $P = \mathcal{O} \Rightarrow \overline{\mathcal{O}P} = 0$

(b)  $P \neq \mathcal{O} \Rightarrow \overline{\mathcal{O}P}$  schneidet  $k$  in zwei Punkten  $E, \bar{E}$ . Dann sei

$$\overline{\mathcal{O}P} := |DV(PEOU)| = |TV(PEO)| = |TV(P\bar{E}O)|$$

(Vertauschung  $E \rightarrow \bar{E} \Rightarrow TV \rightarrow -TV \Rightarrow |TV| \rightarrow |TV|$  fest).  
 $P \in k : \Rightarrow \overline{\mathcal{O}P} = 1$ ; daher heißt  $k$  "Einheitskreis"

Definition:  $\exists$  in einer Ähnlichkeit  $\alpha: \mathcal{T}_e(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{T}_e(\mathcal{R})$   
 ein Punktepaar  $A, B \mid \in \mathcal{T}_e, A \neq B$ , mit  $\overline{AB} = A\alpha B\alpha$ , dann heißt  $\alpha$  "kongruente Abbildung".

$\Rightarrow \alpha$  ist generell längentreu.

Den beiden Typen von Ähnlichkeiten zufolge  $\exists$  zwei Typen von kongruenten Abbildungen:

- die gleichsinnigen kongr. Abb. ("Bewegungen") und
- die gegensinnigen kongr. Abb.

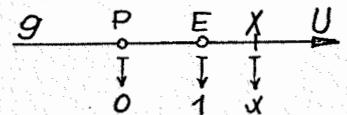
Die kongr. Abb. bilden eine Gruppe, die Gruppe  $\mathcal{O}(\mathcal{T}_e)$ , die zugehörige Geometrie ist die Elementargeometrie.

Speziell:  $\{ \alpha \mid \alpha \dots \text{Bewegung} \}$  bildet eine Gruppe, die Untergruppe  $O^+(\mathbb{R}_e)$  von  $O(\mathbb{R}_e)$ .

Speziell: Bewegungen mit einem eigentlichen Fixpunkt heißen "Drehungen".

Die Angabe einer kongruenten Abbildung erfolgt durch ein "orientiertes Linienelement"\*) und dessen orientiertes Bild-Linienelement und den "Sinn" der kongr. Abb. Dann  $\exists$ \* kongruente Transformation vom vorgegebenen Sinn, die die orientierten Linienelemente zuordnet.

\*) Unter einem orientierten Linienelement versteht man einen Punkt  $P$  und eine mit ihm inzidente "Halbgerade". Dabei ist eine Halbgerade diejenige Punktmenge einer Geraden  $g$ , die nach Wahl eines Koordinatensystems auf  $g$  festgelegt wird durch  $x \geq 0$  ( $x \in K = \mathbb{R}$ )



Analytische Beschreibung einer kongruenten Abbildung  $\alpha$  in kartesischen Koordinatensystemen:

Eine kongr. Abb.  $\alpha$  ist eine Ähnlichkeit, die durch eine orthogonale Matrix beschrieben wird; d.h.

$\alpha \dots (a_{jk}) = \lambda(\alpha_{jk}), \lambda \neq 0, (\alpha_{jk})$  orthogonal, ist genau dann kongr. Abb., wenn gilt  $\lambda = 1$ .

Wir haben somit aus der axiomatisch gefaßten proj. Ebene durch Aufprägen zusätzlicher Strukturen das "projektive Modell der Elementargeometrie" gewonnen.

(Auch andere Wege gangbar: z.B. direkte Axiomatisierung der Elementargeometrie, vgl. HILBERT).

Bemerkung: Die komplexe Erweiterung der elementargeometrischen Ebene heißt "kompl.euklid.Ebene"  $\mathbb{R}_e(\mathbb{C})$ .

$\mathbb{R}_e(\mathbb{R})$  ist ein metrischer Raum (z.B. gilt die Dreiecksungleichung).

$\mathbb{R}_e(\mathbb{C})$  ist dagegen ein ametrischer Raum (z.B. Strecken auf isotropen Geraden  $i, j$  in  $\mathbb{R}_{e,d}(\mathbb{C})$  haben der Länge  $0$ ).

$\Rightarrow i, j \in \mathbb{R}_e(\mathbb{C}) \dots$  "isotrope Gerade" ist Begriff der Ähnlkts.-geometrie).

$\Rightarrow i, j \in \mathbb{R}_{e,d}(\mathbb{C}) \dots$  "Minimalgeraden"  $\dots$  Begriff der Bewegungsgeometrie.

Geg.:  $\pi(K)$ ,  $K$  kommutativ ( $\Rightarrow$  PP),  $\text{char. } K \neq 2$  ( $\Rightarrow$  FANO)

Definition: Eine "Polarität" ist eine Abbildung  $\pi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$   
(  $X \in \mathcal{P} \mapsto X\pi \in \mathcal{G}$  ) mit folgenden Eigenschaften:  
(I)  $\pi$  ist global  
(II)  $X \perp Y\pi \Rightarrow Y \perp X\pi \quad \forall X, Y \in \mathcal{P}$

Folg.1: Eine "Korrelation"  $\delta: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$  mit  $\delta$  global ist durch die folgenden Eigenschaften gekennzeichnet:  
(I)  $\delta$  ist eine Bijektion ( $\Rightarrow \delta$  global)  
(II) kollineare Punkte  $\xrightarrow{\delta}$  kopunktuale Geraden.

Speziell: "projektive Korrelation"  $\delta: \Leftrightarrow \delta$  ist Korrelation und die Beschränkung von  $\delta$  auf eine Punktreihe ist projektiv.

Aus (II) folgt: Punktreihen  $\mathcal{P}_a$  werden durch  $\delta$  auf Geradenbüschel  $\mathcal{G}_A$  abgebildet.  $\rightarrow$  Mit  $\delta$  ist in kanonischer Weise eine Abbildung der Geraden des 1. Feldes auf Punkte des 2. Feldes mitgeliefert, welche kopunktuale Geraden in kollineare Punkte abbildet. Diese mit  $\delta$  gekoppelte Abbildung wird gleichfalls mit  $\delta$  bezeichnet.

Speziell: "involutorische" Korrelation:  $\delta^2 = \iota$

Es gilt (Proj. Geom.): Die Polaritäten sind genau die involutorischen Korrelationen.

(Speziell: "projektive Polarität"  $\pi \Leftrightarrow$  die Beschränkung von  $\pi$  auf eine Punktreihe ist eine Projektivität).

Der Begriff des "Poldreiecks":

Geg.  $\{A, B, C \mid \in \mathcal{P}\}$  nicht kollinear,  $\delta$  belieb. proj. Korrelation  $\Rightarrow \{A\delta, B\delta, C\delta\}$  bilden ein Dreieck ( $A\delta, B\delta, C\delta$  sind nicht kopunktal !)

Ein Dreieck in  $\pi(K)$  heißt "Poldreieck"  $\Leftrightarrow$  wenn jede Ecke als  $\delta$ -Bild die Gegenseite besitzt.

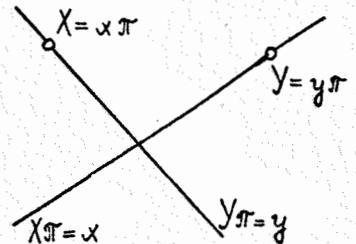
Es gilt (Proj. Geom.): Die Existenz von Poldreiecken ist kennzeichnend für proj. Polaritäten. (Besitzt eine proj. Korrel. ein Poldreieck, so ist sie eine proj. Polarität und umgekehrt).

Die Angabe einer projektiven Polarität  $\pi$  erfolgt durch ein Poldreieck und ein "fremdes" Paar (P...Pol,  $P\pi$  ...Polare), (d.h.  $P \notin$  Seite,  $P\pi \notin$  Ecke des Poldreiecks).

Anmerkung:  $K = R \Rightarrow$  Jede Polarität  $\pi$  in  $\mathcal{P}(R)$  ist automatisch projektiv.

Folg. 2 : Geg.: proj.Polarität  $\pi$  .

Dann gilt:  $X \perp Y\pi \Rightarrow Y \perp X\pi$  .  
 $x \perp y\pi \Rightarrow y \perp x\pi$  .



$\Rightarrow$  Sprechweise:  $X$  fest  $\Rightarrow X\pi$  fest ,  
 $Y$  mit  $Y \perp X\pi$  heißt "konjugiert zu  $X$  in  $\pi$ ".  
 (  $x$  fest  $\Rightarrow x\pi$  fest ,  $y$  mit  $y \perp x\pi$  heißt  
 "kj. zu  $x$  in  $\pi$ ". )

Damit kann die Definition der proj.Polarität  $\pi$  auch so erfolgen:  $\pi$  ist eine proj.Korrelation, in der die Konjugiertheit eine symmetrische Relation ist.

Ein Punkt  $X$  heißt "selbstkonj.", Eine Gerade  $x$  heißt "selbstkonj.", wenn gilt:  $X \perp X\pi$  . wenn gilt:  $x \perp x\pi$  .

Für eine Polarität gilt (Proj.Geom.):

Durch jeden <sup>selbstkj.</sup> Punkt  $X$  geht genau eine selbstkonjugierte Gerade.

Jede selbstkonj.Gerade  $x$  inzidiert mit genau einem selbstkonjugierten Punkt.

Für eine proj.Polarität  $\pi$  gilt (Proj-Geom.):

Ist  $x$  nicht selbstkonjugiert, dann bilden die Paare conj.Punkte auf  $x$  eine Involution.

Ist  $X$  nicht selbstkonjugiert, dann bilden die Paare conj. Geraden durch  $X$  eine Involution.

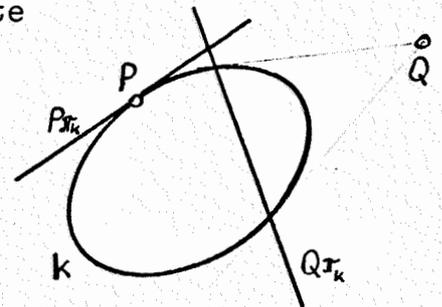
Definition: Eine proj.Polarität  $\pi$  heißt "hyperbolisch"  $\Leftrightarrow \exists$  ein selbstkonj.Punkt;  $\pi$  heißt "elliptisch"  $\Leftrightarrow \exists$  kein selbstkonj.Punkt.

Für hyp.proj.Polaritäten gilt (Proj.Geom.): Jede hyp.proj. Polarität  $\pi$  ist identisch mit dem Polarsystem  $\pi_k$  eines Kegelschnittes  $k$  , wobei seine Punkte genau die selbstkj. Punkte, seine Tangenten genau die selbstkj.Geraden von  $k$  sind.

Definition: Das Polarsystem  $\pi_k: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U}$  eines Kegelschnittes  $k$  ist durch folgende Forderungen gekennzeichnet:

(I)  $\forall P \in k$  gilt:  $P\pi_k$  ist die Tangente in  $P$  an  $k$ .

(II)  $\forall Q \notin k$   $\exists^*$  harmonische Homologie mit Zentrum  $Q$ , welche  $k$  fest läßt. Die Achse dieser automorphen harm. Homologie von  $k$  mit Zentrum  $Q$  heißt "Polare"  $Q\pi_k$ .



Ist  $K$  ein belieb. kommutativer Körper ( $\text{char. } K \neq 2$ ), dann  $\exists$  in  $\pi(K)$  Kegelschnitte  $\Rightarrow \exists$  Polarsysteme  $\Rightarrow \exists$  hyperbolische proj. Polaritäten.

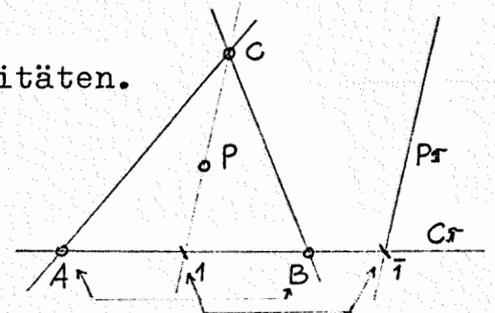
Elliptische Polaritäten  $\exists$  nicht in jeder proj. Ebene  $\pi(K)$  (die Existenz von ellipt. Polaritäten ist eine Körpereigenschaft).

Z.B.:  $K = \mathbb{C} \Rightarrow \exists$  keine elliptischen Polaritäten  $\pi$  !

Dies kann so gezeigt werden:  $g \in \mathcal{U}$  selbstkj.  $\Rightarrow \exists$  selbstkj. Punkt  $\Rightarrow \pi$  ist hyperbolisch; ist  $g$  nicht selbstkj., so  $\exists$  auf  $g$  eine über  $\mathbb{C}$  sicher hyperbolische Involution kj. Punkte  $\Rightarrow \exists$  Fixpunkte, also selbstkj. Punkte  $\Rightarrow \pi$  ist hyperbolisch.

z.B.:  $K = \mathbb{R} \Rightarrow \exists$  elliptische Polaritäten.

Wir stellen die Angabe so, daß auf jeder Seite des gegebenen Poldreiecks  $ABC$  die Involution kj. Punkte elliptisch ist (andernfalls  $\exists$  ein selbstkj. Punkt auf einer der Seiten des Poldreiecks).



Dazu gilt (Proj. Geom.): "Trennen" einander zwei Punktepaare, auf einer Geraden, dann (und nur dann) ist die durch diese Paare bestimmte Involution elliptisch.

Eine Angabe mit der gewünschten Eigenschaft ist möglich (vgl. Figur). Mit  $\bar{1} = PC \cdot C\pi$ ,  $\bar{1} = P\pi \cdot C\pi$  muß z.B. gelten:  $(A, B)$  trennt  $(1, \bar{1})$ . ( $\Rightarrow$  Für  $A\pi, B\pi$  analog).

Beh.:  $\exists$  auf keiner Poldreieckseite ein selbstkj. Punkt, (vgl. Angabe), dann  $\exists$  in ganz  $\pi(\mathbb{R})$  kein selbstkj. Punkt und die durch die zulässige Angabe bestimmte Polarität ist elliptisch.

• Beweis (indirekt): Vs.  $\pi$  hat einen selbstkj. Punkt  $\Rightarrow \pi$  ist hyperb.  $\Rightarrow \pi$  ist Polarsystem eines Kegelschnittes  $k$ , für den  $ABC$  ein Poldreieck ist. Für einen Kegelschnitt  $k$  in  $\pi(\mathbb{R})$  gilt aber: Für jedes Poldreieck von  $k$  ist die Involution kj. Punkte bezüglich  $k$  auf genau zwei Seiten hyperbolisch, auf genau einer Seite elliptisch.  $\Rightarrow$  Widerspruch zur Angabe: auf jeder Seite  $A\pi, B\pi, C\pi$  ist die Involution kj. Punkte elliptisch.

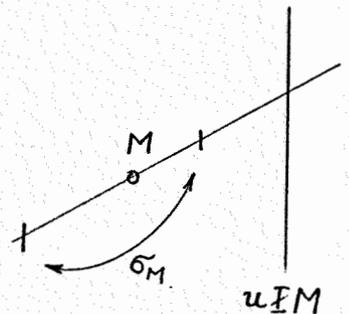
$R \subset \mathbb{C}$  : ellipt. Polarität über  $R \rightarrow$  hyperbol. Polarität über  $\mathbb{C}$  .  
 Die über  $\mathbb{C}$  hyperbolische Polarität ist Polarsystem eines nullteiligen Kegelschnittes  $k \subset \pi(R \subset \mathbb{C})$  .

Folg. 3 : Proj. Polaritäten in der affinen Ebene  $\pi_a(K)$

Z.B.: Ist die Ferngerade  $u$  selbstkonjugiert in  $\pi$  dann  $\exists$  ein selbstkj. Punkt  $\Rightarrow \pi$  ist eine hyp. Polarität, also Polarsystem eines Kegelschnittes  $k$  mit der Tangente  $u \Rightarrow k$  ist eine Parabel.

Sei  $u$  nicht selbstkj. in  $\pi$  : Dann  $\exists M \in \pi_a(K)$  mit  $M\pi = u$  .  $M$  heißt "Mittelpunkt" von  $\pi$  .

Anmerkung: Die Bezeichnung "Mittelpunkt" rührt von folgender Eigenschaft von  $M$  :  
 Ist  $\sigma_M$  die harmonische Homologie  $(M, u)$  (d.h.  $\sigma_M$  ist eine zentrische Spiegelung an  $M$  in  $\pi_a(K)$ ), dann gilt:  $\sigma_M$  kommutiert mit  $\pi$  ( $\sigma_M \cdot \pi = \pi \cdot \sigma_M$ ); d.h. die Polarität  $\pi$  gestattet Spiegelung an  $M$  .



Speziell:  $K = R$  ,  $\pi$  elliptische Polarität in  $\pi_a(R)$  ,  
 $\Rightarrow \pi$  ist nicht Polarsystem einer Parabel ( $u$  sicher nicht selbstkj.)  $\Rightarrow \exists M \in \pi_a(R)$  ,  $\sigma_M$  und  $\pi \sigma_M : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  ist wieder Polarität.

In der Proj. Geom. zeigt man:  $\pi \sigma_M = : \pi^r$  ist eine hyperb. Polarität, also Polarsystem eines Kegelschnittes  $k^r$ .  
 $k^r$  heißt "reeller Vertreter" des nullteiligen Kegelschnittes  $k$  , welcher durch  $\pi$  in  $\pi_a(\mathbb{C})$  bestimmt ist.

Wegen  $\pi \sigma_M = \pi^r$  sind  $k$  und  $k^r$  konzentrisch (Mittelpunkt  $M$ ) und besitzen die gleiche Involution  $kj$ .  
 Durchmesser ( $u$  bleibt bei  $\sigma_M$  fest  $\Rightarrow$  auf  $u$  stimmt die Involution  $kj$ . Punkte bezüglich  $\pi$  überein mit der Inv.  $kj$ . Pkte bezügl.  $\pi^r$ ).

Sprechweise:  $\pi$  heißt "Antipolarität von  $k^r$ ".  
 Zu jeder Ellipse  $k^r$  gehört eine Antipolarität  $\pi$ , mit  $\pi = \pi^r \sigma_M$  . (Dabei ist  $\pi^r$  das Polarsystem von  $k^r$ ,  $\sigma_M$  die zentrische Spiegelung am Mittelpunkt  $M$  von  $k^r$ .)

Bemerkung: Die Kopplung zwischen einem nullteiligen Kegelschnitt  $k$  und seinem reellen Vertretern  $k^r$  ist affin invariant. Der Zusammenhang stützt sich auf die Ermittlung des Mittelpunktes  $M$  von  $k$  (affiner Begriff) und die Spiegelung an  $M$  (affiner Begriff).



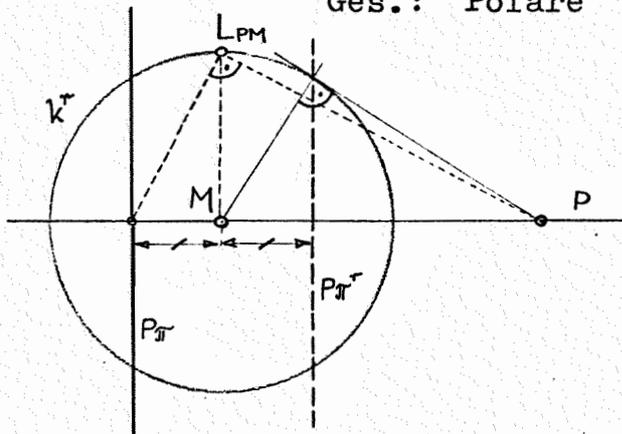
Geg.: abs. Involution  $\varepsilon_u$  auf  $u$ , Polarität  $\pi$  in  $\mathfrak{R}_e(\mathbb{R})$ ;  $\pi$  mit  $u$  nicht selbstkj. induziert auf  $u$  eine Involution kj. Punkte.

Speziell: Diese Involution kj. Punkte auf  $u$  bezügl.  $\pi$  stimmt überein mit der abs. Invol.  $\varepsilon_u$  (ist daher notwendig elliptisch).

Wir unterscheiden dann 2 Fälle:

- α) Ist  $\pi$  eine hyperb. Polarität, dann ist  $\pi$  das Polarsystem eines Kreises.
- β) Ist  $\pi$  eine ellipt. Polarität, dann ist  $\pi$  über  $\mathbb{C}$  das Polarsystem eines nullteiligen Kreises.  
( $\Rightarrow$  ist dann identisch mit der Antipolarität eines einteiligen Kreises, da  $u$  bei  $\sigma_M$  punktweise fest bleibt).

Aufgabe 2: Geg.: ellipt. Polarität  $\pi$ , reeller Vertreter  $k^\pi$   
Ges.: Polare  $P\pi$  zu  $P$ .



Man konstruiert zuerst die Polare von  $P$  bezüglich  $\pi^\pi : \Rightarrow P\pi^\pi$ ;  $P\pi^\pi \sigma_M = P\pi$

$\Rightarrow$  elementargeometrische Konstruktion "Rechtwinkelhaken" mit dem auf  $k^\pi$  liegenden LAGUERRE-Punkt  $L_{PM}$  von  $PM$  mit  $M \dots$  Zentralpunkt der Invol. kj. Punkte auf  $PM$ .

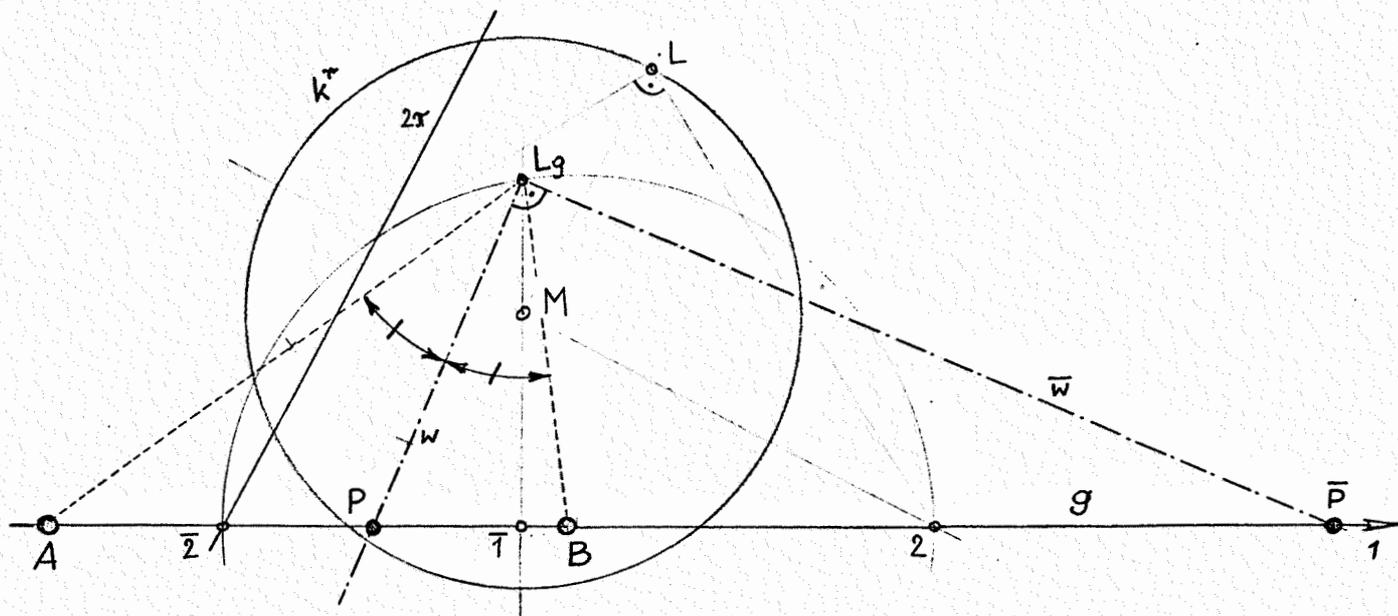
Damit läßt sich die Vervollständigung für beliebige ellipt. Polaritäten  $\pi$  lösen:

Man sucht den reellen Vertreter  $c^\pi$  des nullteiligen Kernkegelschnittes  $c$  von  $\pi$ . Durch eine affine Transformation  $\alpha$  wird  $c^\pi$  in einen Kreis  $k^\pi = c^\pi \alpha$  abgebildet, die Vervollständigungsaufgabe für  $\pi \alpha$  gelöst und abschließend  $\alpha^{-1}$  angewendet.

Ist  $k^\pi$  ein Kreis, so gilt ferner:  $MP \perp P\pi \Rightarrow M$  ist Höhenschnittpunkt jedes Poldreiecks von  $\pi$  oder  $\pi^\pi$ . Für jedes Poldreieck bezügl. eines nullteiligen Kreises ist  $M$  Innenpunkt  $\Rightarrow$  jedes Poldreieck ist spitzwinkelig.

Aufgabe 3: Geg.:  $\pi \dots$  ellipt. Polarität, reeller Vertreter  $k^\pi$  ist Kreis ( $\pi = \pi^\pi \sigma_M$ ); Gerade  $g, A, B \mid I g, \neq$ .  
Ges.: Punktepaare  $(P, \bar{P}) \in g$ , die (I) harmonisch zu  $A, B$ ,  
(II) kj. sind in  $\pi$ .

Da  $g$  reell  $\Rightarrow g$  ist nicht selbstkj.  $\Rightarrow$  (II) ist sinnvoll.



Lösungsweg: Vervollständigung der Invol.kj.Punkte auf  $g$ .

1...Fernpunkt von  $g$ ,  $\bar{1}M \perp g \Rightarrow \bar{1}$  kj. zu 1

2 belieb.  $\in g \Rightarrow 2\pi$  .. Antipolare von 2 bezgl.  $k^r$   
(vgl. Aufgabe 2)  $\Rightarrow \bar{2} = 2\pi.g$  ist kj. zu 2

$(1, \bar{1}), (2, \bar{2})$  trennen einander  $\Rightarrow \exists$  LAGUERRE-Punkt  $L_g$   
(vgl. Aufgabe 1)

Man sucht nun jenes Rechtwinkelpaar mit Scheitel  $L_g$ , das zu den Strahlen  $AL_g, BL_g$  harmonisch liegt; das sind aber die eindeutigen Winkelsymmetralen  $w, \bar{w}$  von  $\sphericalangle AL_g B$ .  $\Rightarrow g.w = P, g.\bar{w} = \bar{P}$ ;  $(PP)$  ist das eindeutige Lösungspaar.

### 0.7      Der euklidische Raum $\mathbb{T}_e(\mathbb{R})$

$\mathbb{T}_e(\mathbb{R})$  ist ein reeller affiner Raum  $\mathbb{T}_\alpha(\mathbb{R}) = \mathbb{T}(\mathbb{R}) \setminus \{\omega\}$  mit einer zusätzlichen Struktur, welche den Orthogonalitätsbegriff definiert.

Sei in  $\omega$  eine beliebige elliptische Polarität  $\pi_\omega$  als absolute Polarität gegeben. Dann heißt  $\{\mathbb{T}_\alpha(\mathbb{R}) \text{ mit } \pi_\omega\}$  ein "euklid. Raum".

Durch  $\pi_\omega$  wird die Orthogonalität in  $\mathbb{T}_e(\mathbb{R})$  definiert.

$a \perp \alpha \iff A_u \pi_\omega = a_u$  ... Ferngerade von  $\alpha$

$a \perp b \iff A_u$  kj. zu  $B_u$  in  $\pi_\omega$

$\alpha \perp \beta \iff a_u$  kj. zu  $b_u$  in  $\pi_\omega$ .

Folg. 1 : Der Anschauungsraum mit dem elementaren Orthogonalitätsbegriff ist ein Beispiel für einen euklid. Raum.

Es gilt schärfer (Proj. Geom.): Jeder euklid. Raum ist zum Anschauungsraum isomorph, so daß gilt: sind zwei Elemente des abstrakten euklid. Raumes orthogonal, so sind deren Bilder im Anschauungsraum orthogonal.

Folg. 2 : Sei  $\alpha$  eine belieb. Ebene in  $\mathbb{T}_e$  (d.h.  $\alpha \neq \omega$ )

$\Rightarrow \alpha \cdot \omega = a_\omega$  ist nicht selbstkj. in  $\pi_\omega \Rightarrow$  auf  $a_\omega$  wird durch  $\pi_\omega$  eine elliptische Involution kj. Punkte induziert.

$\Rightarrow$  Jede Ebene in  $\mathbb{T}_e$  trägt in kanonischer Weise eine euklid. Metrik.

Bemerkung:  $Rc\mathbb{C} \Rightarrow$  Winkelmessung in jeder Ebene  $c\mathbb{T}_e$  mit der Formel von LAGUERRE  $\Rightarrow$  Winkelmessung zwischen Geraden in  $\mathbb{T}_e(Rc\mathbb{C})$  (=komplexer euklid. Raum).

Zusätzlich:  $\sphericalangle a\alpha = 90^\circ - \sphericalangle a n_\alpha$  ( $n_\alpha \perp \alpha$ )

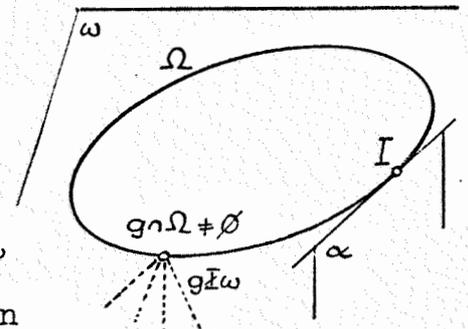
$$\sphericalangle \alpha\beta = \sphericalangle n_\alpha n_\beta$$

Über  $\mathbb{C}$  ist  $\pi_\omega$  das Polarsystem eines Kegelschnittes  $\Omega$  ( $\Omega$  .."absoluter Kegelschnitt")

Eine Gerade  $g \in \mathbb{T}_e(Rc\mathbb{C})$ , welche  $\Omega$  trifft, heißt "isotrope Gerade".

Eine Ebene  $\alpha \in \mathbb{T}_e(Rc\mathbb{C})$ , deren Ferngerade  $\alpha \cdot \omega$   $\Omega$  berührt, heißt "isotrope Ebene".

Die in einer isotropen Ebene durch  $\pi_\omega$  induzierte Geometrie heißt "ebene isotrope Geometrie" und ist verschieden von der in einer reellen Ebene induzierten, euklidischen Geometrie! (Das "Absolutgebilde" einer isotropen Ebene ist ein Linienelement  $(I, \alpha \cdot \omega)$ )



Folg. 3 : Ähnlichkeiten in  $\mathbb{T}_e(R)$

Eine Ähnlichkeit  $\alpha: \mathbb{T}_e(R) \rightarrow \mathbb{T}_e(R)$  ist eine Affinität  $\alpha_a: \mathbb{T}_e(R) \rightarrow \mathbb{T}_e(R)$ , für welche gilt: die  $\alpha_a$  bestimmende Kollineation  $\alpha$

( $\alpha|_{\mathbb{T}_e} = \alpha_a$ ) hat die Eigenschaft, daß  $\alpha|_\omega$  mit  $\pi_\omega$  kommutiert, ( $\alpha|_\omega \cdot \pi_\omega = \pi_\omega \cdot \alpha|_\omega$ );

d.h., eine Ähnlichkeit ist eine "orthogonalinvariante" Affinität.

Festlegung einer Ähnlichkeit:

$\pi_\omega$  ist festgelegt durch ein Poldreieck und einmal Pol-Polare in  $\omega$ .  $\Rightarrow$  Poldreieck in  $\omega \rightarrow$  orthogonales Dreieck in  $\mathbb{T}_e$ , Pol-Polare in  $\omega \rightarrow$  Ebene, zu ihrer normale Gerade.

→ Eine Affinität ist genau dann eine Ähnlichkeit, wenn sie ein orthogonales Dreieck in ein orthogonales Dreieck und einmal Ebene mit normaler Gerade in Ebene mit normaler Gerade überführt.

"Kugel" in  $\mathbb{T}_e(\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$  :

Eine Kugel ist eine Mittelpunktsquadratik in  $\mathbb{T}_e(\mathbb{R}) \subset \mathbb{T}(\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$  (d.h.  $\omega$  ist nicht Tangentialebene) die über  $\mathbb{C}$  die Fernebene  $\omega$  in dem absoluten Kegelschnitt  $\Omega$  schneidet. (→  $\Omega$  ... "abs. Kugelkreis").

Zur Definition der Kugel in  $\mathbb{T}_e(\mathbb{R}) \subset \mathbb{T}(\mathbb{R})$  ist der Begriff "Spurpolarität" erforderlich:

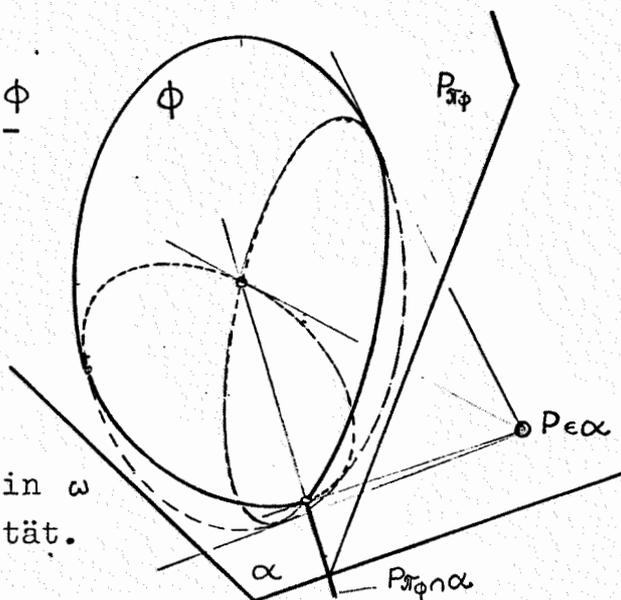
Das Polarsystem  $\pi_\phi$  einer Quadrik  $\phi$  induziert in jeder Nichttangentialebene  $\alpha$  eine Polarität  $\pi_{\phi|\alpha}$  :

$$\forall P \in \alpha \text{ gilt: } P \pi_{\phi|\alpha} = P \pi_\phi \cap \alpha .$$

$\pi_{\phi|\alpha}$  heißt "Spurpolarität in  $\alpha$  bezügl.  $\phi$ ".

Damit gilt:

Eine Mittelpunktsquadratik  $\phi \subset \mathbb{T}_e(\mathbb{R})$  heißt Kugel  $\Leftrightarrow$  die Spurpolarität in  $\omega$  bezügl.  $\phi$  ist die absolute Polarität.



→ Eine Affinität ist Ähnlichkeit genau dann, wenn sie eine Kugel in eine Kugel überführt.

$\{ \alpha; \cdot | \alpha \dots \text{Ähnl.} \} = : GO(\mathbb{T}_e) \dots$  "Ähnlichkeitsgruppe".

Wie  $GO(\mathbb{R}_e)$ , so ist auch  $GO(\mathbb{T}_e)$  in zwei Klassen zerlegbar.

Während aber in  $\mathbb{R}_e$  die Klassifizierung der Ähnlichkeiten durch eine Nummerierung der abs. Punkte bedingt wird, stammt die Einteilung der Ähnlichkeiten in  $\mathbb{T}_e$  bereits von einer Klassenzerlegung der Kollineationen im reellen proj. Raum.

Es gilt nämlich:  $\mathbb{T}(\mathbb{R})$  ist orientierbar (im Gegensatz zu  $\pi(\mathbb{R})$ ) !

Z.B.  $\alpha: \mathbb{T}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{T}(\mathbb{R}) \quad x_j' = \sum_0^3 a_{jk} x_k \quad a_{jk} \in \mathbb{R}, \det(a_{jk}) \neq 0$

→ zwei Fälle:  $\det(a_{jk}) > 0$ ,  $\det(a_{jk}) < 0$ .

Dabei gilt:  $\text{sgn det}(a_{jk})$  ist basisunabhängig !

Z.B.  $x_k \rightarrow x'_k = -x_k$ ,  $(a_{jk})$  hat gerade Spaltenzahl  $\Rightarrow$   
 $\text{sgn det.}$  fest.

$\Rightarrow$   $\text{PGL}(\mathbb{T}(\mathbb{R}))$  zerlegbar in zwei Klassen:

$\alpha$  mit  $\text{det}(a_{jk}) > 0$  ... gleichsinnige Koll.

$\alpha$  mit  $\text{det}(a_{jk}) < 0$  ... gegensinnige Koll.

Damit folgt für  $\text{GO}(\mathbb{T}_e)$  :

Ähnlichkeit  $\alpha$  heißt "gleichsinnig" bzw. " $\alpha \in \text{GO}^+(\mathbb{T}_e)$ "  $\Leftrightarrow$   
 die zugehörige Kollineation  $\alpha$  ist gleichsinnig;  
 andernfalls heißt  $\alpha$  "ungleichsinnig".

Analytische Beschreibung der Ähnlichkeit :

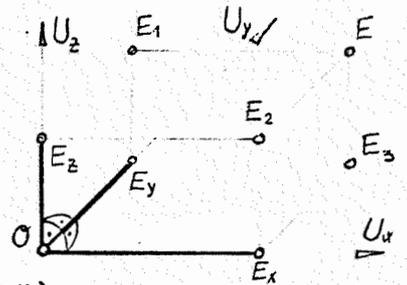
$\alpha$  beschrieben in speziellen affinen Koord.System:  $\dots = 0$

$\alpha$  ist Affinität  $\Rightarrow x'_j = a_j + \sum_{k=1}^3 a_{jk} x_k$  ( $j=1,2,3$ )

$\Rightarrow$  "Ähnlichkeit" hat bloß in speziellen "Normalkoordinatensystemen" eine besondere Bauart.

"Norm.K.S." = inhomogenes affines K.S.  
 mit paarweise orthogonalen Achsen.  
 Die Einheitspunkte  $E_x, E_y, E_z$  bestimmen  
 den "Einheitsquader" des Norm.K.S.

"Kartes. K.S." = Norm.K.S. mit:  
 Einheitsquader ist ein  
 Würfel. ("Einheitswürfel")



(Dabei gilt: Ein Quader ist ein Würfel  $\Leftrightarrow$  2 nicht  
 parallele Seitenflächen sind Quadrate. "Quadrat" ist ein  
 Begriff der Ähnlichkeitsgeom.  $\Rightarrow$  Würfel ist Begriff der  
 Ähnlichkeitsgeometrie).

$\Rightarrow \alpha$  beschrieben in kartes. K.S.:  $(a_{jk}) = \lambda(\alpha_{jk})$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$   
 und  $(\alpha_{jk})$  ist orthogonale Matrix.

Folg. 4 : Längenmessung  $d$  in  $\mathbb{T}_e(\mathbb{R})$ .

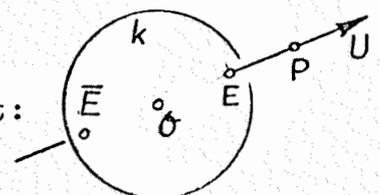
"Längenmessung"  $d: \mathbb{T}_e \times \mathbb{T}_e \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  wobei gilt:  
 $(A, B) \mapsto d(A, B) =: \overline{AB}$

(I)  $d$  ist translationsinvariant.

$\Rightarrow$  vergleiche "Strecken", die von einem Punkt  $\sigma$   
 ausgehen.

(II)  $d(\sigma, \sigma) = 0$

$\sigma \neq P$  : Zur Definition von  $d(\sigma P)$   
 "Eichkugel"  $k$  mit Mitte  $\sigma$  benützt:  
 ( $\sigma \dots$  Pol von  $\omega$  bezügl.  $k$ )



$\mathcal{OP} \cap k = \{E, \bar{E}\}$  (Existenz ist eine Eigenschaft des Körpers  $R$ )

$$d(\mathcal{OP}) := |DV(\text{PEOU})| = |TV(\text{PEO})|$$

(sinnvoll, da:  $E \rightarrow \bar{E} \Rightarrow TV \rightarrow -TV \Rightarrow |TV| \rightarrow |TV|$ )

$\Rightarrow P \in k : d(\mathcal{OP}) = 1 \Rightarrow k..$  "Einheitskugel".

$\mathbb{T}_e(R \subset \mathbb{C})$  mit Längenmessung  $d$  von  $\mathbb{T}_e(R) :$

Jede Strecke auf einer isotropen Geraden  $g$  hat die Länge 0 .

$\Rightarrow g$  in  $\mathbb{T}_{e,d}(R \subset \mathbb{C})$  heißt "Minimalgerade".

$\Rightarrow \mathbb{T}_{e,d}(R \subset \mathbb{C})$  ist kein metrischer Raum !

"kongruente Abbildung"  $\alpha$  in  $\mathbb{T}_{e,d}(R) :$

$\alpha$  heißt "kongr. Abb."  $\iff \alpha$  ist Ähnlichkeit  $\wedge$  für ein

Punktepaar  $A, B (\neq) \in \mathbb{T}_{e,d}(R)$  gilt:  $d(A, B) = d(A\alpha, B\alpha)$ .

(Es gilt dann, vgl. Proj. Geom.:  $d(X, Y) = d(X\alpha, Y\alpha) \quad \forall X, Y \in \mathbb{T}_{e,d}$ )

$\alpha$  heißt  $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichsinnig} \\ \text{gegensinnig} \end{array} \right.$  kongruent  $\iff \alpha$  ist  $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichs.} \\ \text{gegens.} \end{array} \right.$  Ähnlichkeit

$\{\alpha; \cdot | \alpha \dots \text{kongr. Abb.}\} = : \mathcal{O}(\mathbb{T}_{e,d})$  ..Gruppe der kongr. Transf.

$\{\alpha | \alpha \text{ gleichs. kongr. Abb.}\} = : \mathcal{O}^+(\mathbb{T}_{e,d}) \subset \mathcal{O}(\mathbb{T}_{e,d})$  .."Bewegungsgruppe",  $\alpha \in \mathcal{O}^+(\mathbb{T}_{e,d})$  heißt "Bewegung".

spezielle Bewegungen

$\alpha \in \mathcal{O}^+(\mathbb{T}_{e,d}) \wedge \exists A \in \mathbb{T}_{e,d}$  mit  $A = A\alpha$  ;  $\alpha$  heißt "Drehung"

Es gilt (Proj. Geom.): Jede Drehung ist eine "axiale Drehung", d.h.:  $\exists$  ein eigentlicher Fixpunkt, dann  $\exists$  eine Fixgerade. (vgl. Satz von EULER: Jede Bündelbewegung ist eine Bündeldrehung).

Analyt. Beschreibung einer kongruenten Abb. in kart. K.S.:

Ähnlichkeit  $\alpha$  ist "Kongruenz"  $\iff (\alpha_{jk}) = (\alpha_{jk})$  ..orth. Matrix.

Ergebnis: Wir haben das proj. Modell des elementaren euklid. Raumes durch fortschreitendes Spezialisieren des proj. Raumes gewonnen.

Es bleibt zu zeigen: Das so konstruierte proj. Modell ist isomorph zu dem von D. HILBERT axiomatisch definierten Raum der Elementargeometrie.

§ 1 Lineare Abbildungen der konstruktiven Geometrie

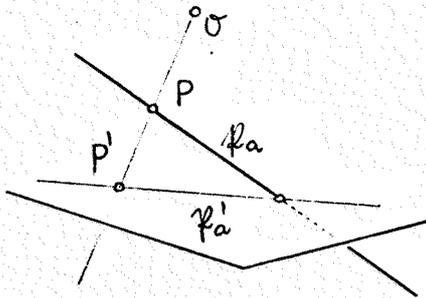
1.1 Abbildung aus  $\Pi$  in eine proj. Ebene  $\pi'$

Abb.  $\varphi$  mit: Definitionsmenge  $D(\varphi) \subset \Pi$  ( $\Pi$  belieb. proj. Raum)  
 Bildmenge  $\text{im } \varphi \in \pi'$  ( $\pi'$  belieb. proj. Ebene)

Wann heißt  $\varphi$  "lineare Abbildung" ?

Zunächst: Motivation der Definition einer lin. Abb. durch folgende Beispiele.

Beispiel 1:  $\varphi$ ... Projektion (vgl. 0.1) :  $\varphi: \Pi \rightarrow \pi'$  ( $\pi' \subset \Pi$ )  
 Zentrum  $\sigma$



$\varphi$  ist nicht global ( $\exists$  Ausnahmemenge  $\Sigma = \{0\} = \emptyset$ ).

$\varphi$  ist surjektiv (im  $\varphi = \pi'$ ).

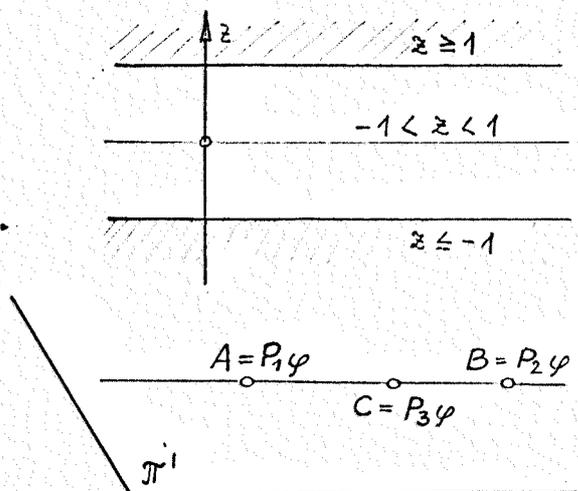
$\varphi$  ist nicht injektiv (Fasern sind die in  $\sigma$  punktierten Sehstrahlen).

i.a. Punktreihe  $K_a \xrightarrow{\varphi} \text{Punktreihe } K'_a$ , bzw. :  
 koll. Punkte ( $\neq \sigma$ )  $\mapsto$  koll. Punkte  $\subset \pi'$

(Dabei müssen die Bildpunkte nicht notwendig verschieden sein, d.h. auch Sehstrahlen werden miterfaßt.)

Die Eigenschaft "koll. Punkte  $\xrightarrow{\varphi}$  koll. Punkte" reicht jedoch zur Definition von "linear" nicht aus, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 2: Geg. proj. abgeschl. Anschauungsraum  $\Pi$ ,  
 Ausnahmemenge  $\Sigma = \omega$ .



Jeder Punkt  $P \in \Pi$  liegt genau in einer dieser 3 Schichten.

Wir definieren eine Abb.  $\varphi: \Pi \rightarrow \pi'$  so:

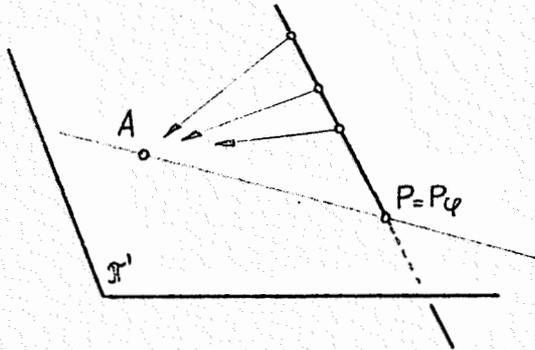
$\forall P$  mit  $z_P \geq 1 \Rightarrow P_1 \varphi = A \in \pi'$   
 fest

$\forall P$  mit  $-1 < z < 1 \Rightarrow P_2 \varphi = B \in \pi'$   
 fest

$\forall P$  mit  $z \leq -1 \Rightarrow P_3 \varphi = C \in \pi'$  mit  
 $C \in AB$  ( $\exists C$ )  $C$   
 fest.

$\Rightarrow$  "koll. Punkte  $\xrightarrow{\varphi}$  koll. Punkte" ist trivial erfüllt.

Beispiel 3 : Geg. proj. abgeschl. Anschauungsraum  $\Pi$



Wir definieren eine Abb.  $\varphi: \Pi \rightarrow \pi'$  so:

$\forall P \in \pi'$  soll gelten:  $P = P\varphi$

( $\pi'$  bleibt punktweise fest)

$\forall P \in \Pi \setminus \pi'$  soll gelten:  $P\varphi = A \in \pi'$  fest.

$\Rightarrow \varphi$  ist global und surjektiv, "koll. Punkte  $\xrightarrow{\varphi}$  koll. Punkte" ist trivial erfüllt.

Die Definition einer linearen Abbildung

Geg.:  $\Pi \dots$  proj. Inzidenzpunktraum  $\mathcal{K}$ ;  
 $\pi'$  proj. Inzidenzpunktebene  $\mathcal{K}'$ ;  
 Abb.  $\varphi$  aus  $\mathcal{K}$  in  $\mathcal{K}'$  mit Ausnahmemenge  $\Sigma \subset \mathcal{K}$ .

Erweiterung von  $\varphi$  zu einer globalen Abb.  $\varphi_0$ :

Wir adjungieren  $\mathcal{K}'$  die leere Menge  $\emptyset \subset \mathcal{K}$  als Element ( $\mathcal{K}' \cup \{\emptyset\} = \mathcal{K}'_0$ ) und erklären eine Abb.  $\varphi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'_0$  durch

$$A\varphi_0 = A\varphi \quad \text{für } A \in \mathcal{K} \setminus \Sigma$$

$$A\varphi_0 = \emptyset \quad (\in \mathcal{K}'_0) \quad \text{für } A \in \Sigma$$

$\varphi_0$  ist damit eine globale Abbildung.

Bezeichnung:

Geg.:  $\pi' ; A', B' \in \mathcal{K}'$  ;

Es sei definiert:  $A' + B' := \mathcal{K}'_{A'B'}$   $\forall A' \neq B' \wedge A', B' \in \mathcal{K}'$

$A' + A' := A'$   $\forall A' \in \mathcal{K}'$

$A' + \emptyset := \emptyset + A' = A'$   $\forall A' \in \mathcal{K}'$

Definition:

Eine Abbildung  $\varphi$  aus  $\mathcal{K}$  in  $\mathcal{K}'$  heißt linear  $\iff$   
 $\iff$  (I)  $\text{im } \varphi$  enthält mindestens 2 ( $\neq$ ) Punkte  
 (II)  $A, B \in \mathcal{K}$ ,  $A \neq B$  mit  $\varphi_0(\mathcal{K}_{AB}) = A\varphi_0 + B\varphi_0$

Folg. 1 : Enthält eine Punktreihe  $\mathcal{P}_{AB}$  zwei verschiedene Ausnahmepunkte, so enthält sie keinen Nichtausnahmepunkt.

Beweis:  $A \neq B, A, B \in \Sigma$  ;  $\mathcal{P}_{AB} \Rightarrow$   
 $\varphi_0(\mathcal{P}_{AB}) = A\varphi_0 + B\varphi_0 = \emptyset \Rightarrow \forall X \in \mathcal{P}_{AB}$  gilt  $X\varphi_0 = \emptyset$

Bemerkung: Aus Folg. 1 folgt : Die Ausnahmemenge  $\Sigma$  ist im proj. Unterraum von  $\mathbb{P}$ .

Zum Beweis diskutieren wir alle Möglichkeiten für  $\Sigma$  :

$\alpha)$   $\Sigma = \emptyset, \Sigma = \{A\}$  (genau 1 Punkt)  $\Rightarrow$  Unterraum

$\beta)$   $\exists 2 \neq$  Punkte  $\in \Sigma \Rightarrow \Sigma$  ist mindestens eine Punktreihe (vgl. Folg. 1).

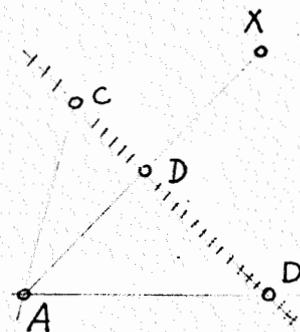
$\gamma)$   $\exists 3$  Punkte  $A, B, C \in \Sigma$ , die ein Dreieck bilden.  $\Rightarrow$

$\mathcal{P}_{BC} \subset \Sigma$ . Sei  $X \neq A$  ein Punkt der

Ebene  $ABC$ , dann  $\exists D = \mathcal{P}_{AX} \cap \mathcal{P}_{BC}$ ,

also  $D \in \Sigma$ ;  $\xrightarrow{F.1)} \mathcal{P}_{AX} \in \Sigma$  ;  $\Rightarrow$

das Feld  $\mathcal{P}_{ABC} \subset \Sigma$  ;  $\Sigma$  ist mindestens ein Punktfeld.



$\delta)$   $\exists 4$  Punkte  $A, B, C, D \in \Sigma$ , die ein Tetraeder bilden.  $\Rightarrow$

$\mathcal{P}_{BCD} \subset \Sigma$ . Ist  $X \neq A$  ein belieb. Pkt.  $\in \mathcal{P}$

dann  $\exists E = \mathcal{P}_{AX} \cap \mathcal{P}_{BCD}$ , also  $E \in \Sigma$  ;  $\Rightarrow$

$\mathcal{P}_{AX}$  mit  $A, X \in \Sigma$ ,  $(A \neq X)$ , liegt in  $\Sigma$

$\Rightarrow \Sigma = \mathcal{P} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{P}$  gilt  $A\varphi_0 = \emptyset$ ,

also  $\text{im } \varphi = \emptyset$  im Widerspruch zu (1):

$\text{im } \varphi$  enthält 2 ( $\neq$ ) Pkte.

$\Rightarrow$  Fall  $\delta)$  ist daher nicht möglich.

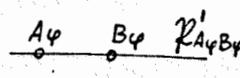
Ergebnis:  $\Sigma = \emptyset$  oder  $\{Z\}$  oder  $\mathcal{P}_Z$  oder  $\mathcal{P}_\zeta$ , also Unterraum.

Folg. 2 : Enthält eine Punktreihe genau einen Ausnahmepunkt, so besitzen alle Nicht-Ausnahmepunkte dasselbe Bild.

Beweis:  $A \in \Sigma, B \notin \Sigma, \Rightarrow A \neq B, \mathcal{P}_{AB}$

$$\varphi_0(\mathcal{P}_{AB}) = \underbrace{A\varphi_0}_{=\emptyset} + \underbrace{B\varphi_0}_{=B\varphi} = B\varphi \dots \text{fest} \Rightarrow \forall X \in \mathcal{P}_{AB} \wedge X \notin \Sigma \Rightarrow X\varphi = B\varphi$$

Folg. 3 : Besitzt eine Punktreihe  $\mathcal{P}_{AB}$  keinen Ausnahmepunkt und haben zwei  $\neq$  ihrer Punkte  $A, B$  verschiedene Bilder  $A\varphi, B\varphi$ , dann ist die Beschränkung der Abb.  $\varphi$  auf  $\mathcal{P}_{AB}$  surjektiv auf  $A\varphi + B\varphi$ .

Beweis: Nach Vs. ist  $\mathcal{K}_{AB} \cap \Sigma$  und  $A\varphi \neq B\varphi$ .  
 $\Rightarrow A\varphi + B\varphi$  ist eine Punktreihe  $(\mathcal{K}'_{A\varphi B\varphi} \subset \mathcal{K}')$    
 $\Rightarrow (\mathcal{K}_{AB})\varphi_0 = (\mathcal{K}_{AB})\varphi$  (da:  $\nexists$  Ausnahmepunkt in  $\mathcal{K}_{AB}$ )  
 $\stackrel{(II)}{\Rightarrow} (\mathcal{K}_{AB})\varphi = A\varphi_0 + B\varphi_0 = A\varphi + B\varphi = \mathcal{K}'_{A\varphi B\varphi}$ .  
 Nach (II) ist also das  $\varphi$ -Bild der Punktreihe  $\mathcal{K}_{AB}$  die ganze Punktreihe  $\mathcal{K}'_{A\varphi B\varphi}$ , also ist  $\varphi|_{\mathcal{K}_{AB}}$  surjektiv.

Folg. 4: Haben zwei  $\neq$  Punkte  $A, B$ , die nicht der Ausnahmemeenge  $\Sigma$  angehören, verschiedene Bilder  $A\varphi, B\varphi$  ( $A\varphi \neq B\varphi$ ), dann gilt:  $\mathcal{K}_{AB} \cap \Sigma = \emptyset$

Beweis:  $\varphi_0(\mathcal{K}_{AB}) = A\varphi_0 + B\varphi_0 = A\varphi + B\varphi = \mathcal{K}'_{A\varphi B\varphi}$  (ganze Punktreihe)  
 Sei nun  $\mathcal{K}_{AB} \cap \Sigma \neq \emptyset$  (indirekte Beweis-Annahme);  
 dann ist  $\mathcal{K}_{AB} \cap \Sigma$  genau 1 Punkt  $S$  (wegen Folg. 1 und  $A \notin \Sigma$ ).  $\Rightarrow S \neq A, \mathcal{K}_{AB} = \mathcal{K}_{AS}$ .  
 $\Rightarrow \varphi_0(\mathcal{K}_{AS}) = \underbrace{A\varphi_0}_{=A\varphi} + \underbrace{S\varphi_0}_{=\emptyset} = A\varphi$ , also ein fester Punkt, im Widerspruch zu  $\varphi_0(\mathcal{K}_{AS}) = \mathcal{K}'_{A\varphi B\varphi}$ .

Bemerkung: Aus Folg. 4 und Folg. 3 folgt:

Unter den Vs:  $A, B \in \mathcal{K} \setminus \Sigma, A \neq B, A\varphi \neq B\varphi$  gilt:

$\varphi|_{\mathcal{K}_{AB}}$  ist surjektiv auf  $A\varphi + B\varphi$ ;

denn: Folg. 4 liegen genau obige Vs. zugrunde.

Damit sind die Vs. zu Folg. 3 erfüllt, also ist  $\varphi|_{\mathcal{K}_{AB}}$  surjektiv.

Folg. 5: Beh.:  $\text{im } \varphi$  ist entweder eine Punktreihe  $\mathcal{K}'$  oder  $\mathcal{K}'$ !

Beweis: Mit (I)  $\exists A', B' \in \text{im } \varphi, A' \neq B'$

Zu  $A' \exists A \in \mathcal{K} \setminus \Sigma$  mit  $A\varphi = A'$ .  
 Zu  $B' \exists B \in \mathcal{K} \setminus \Sigma$  mit  $B\varphi = B'$ .  
 Dabei ist  $A \neq B$ ;

denn:  $A=B \Rightarrow A$  hat zwei  $\neq$   $\varphi$ -Bilder im Widerspruch zum Abbildungsbegriff.

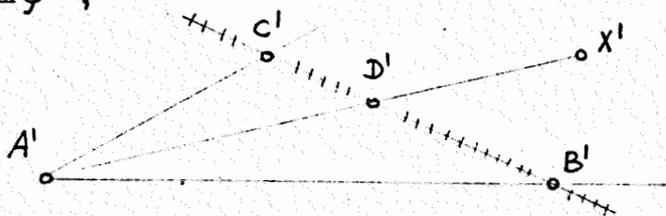
Mit  $A \neq B \exists \mathcal{K}_{AB}$  und nach Vs.  $A, B \notin \Sigma (A\varphi=A') \neq (B\varphi=B')$ .

Das sind genau die Vs. zu Folg. 4, Bem., also gilt:

$\varphi|_{\mathcal{K}_{AB}}$  ist surjektiv auf  $A\varphi + B\varphi = \mathcal{K}'_{A'B'}$  ..Punktreihe.

$\Rightarrow$  Sind  $A', B'$  irgend zwei  $\neq$  Punkte aus  $\text{im } \varphi$ , dann treten alle Punkte der Verbindungsgeraden  $\mathcal{K}'_{A'B'}$  als Bilder auf.  $\Rightarrow$   $\text{im } \varphi$  ist mindestens eine Punktreihe.

$\Rightarrow$  Bilder irgend 3 Punkte  $A' B' C'$  aus  $\text{im } \varphi$  ein Dreieck, dann gilt:  $\mathcal{K}'_{B'C'} \subset \text{im } \varphi$ ;



$$\begin{aligned} \forall X' \in \mathcal{R}' , X' \neq A' &\implies \exists D' = \mathcal{R}'_{A'X'} \cap \mathcal{R}'_{B'C'} \wedge \\ \wedge D' \neq A' ; A' , D' &\in \text{im } \varphi \implies \\ \mathcal{R}'_{A'X'} \in \text{im } \varphi &\implies \text{im } \varphi = \mathcal{R}' \end{aligned}$$

Ergebnis:  $\text{im } \varphi$  ist entweder eine Punktreihe oder das ganze Punktfeld.

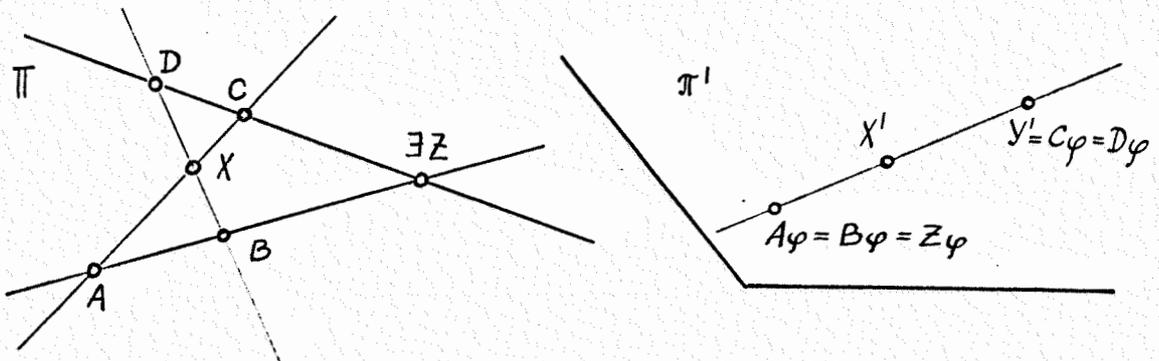
(  $\text{im } \varphi \neq \emptyset$  ,  $\text{im } \varphi \neq \{A'\}$  wegen (1) ).

Folg. 6 : Vs.:  $A, B \in \mathcal{R} \setminus \Sigma$  ;  $A \neq B$  ; ( $\implies \exists \mathcal{R}_{AB}$ ) ;  $\mathcal{R}_{AB} \cap \Sigma = \emptyset$

Beh.:  $\varphi|_{\mathcal{R}_{AB}}$  ist injektiv.

Beweis:  $\exists \varphi$ -Bilder  $A\varphi$  ,  $B\varphi$  ; zu zeigen:  $A\varphi \neq B\varphi$  .

indirekte Beweis-Annahme:  $\exists A, B \in \mathcal{R}_{AB}$  ,  $A \neq B$  , mit  $A\varphi = B\varphi$



Aus (1) folgt :  $\exists X' \in \text{im } \varphi \wedge X' \neq A\varphi = B\varphi$

$\implies \exists X \in \mathcal{R} \setminus \Sigma$  mit  $X\varphi = X'$ .

Wegen  $\varphi_0(\mathcal{R}_{AB}) = A\varphi$  fest und  $X' = A\varphi$  gilt :  $X \notin \mathcal{R}_{AB}$  .

$\implies \exists \mathcal{R}_{AX}$  ,  $\mathcal{R}_{BX}$  ... weitere Punktreihen in  $\Pi$ .

Wegen  $A \neq X \wedge A\varphi \neq X'$  (also  $A, X \notin \Sigma$ ) gilt nach

Folg. 4:

$$\mathcal{R}_{AX} \cap \Sigma = \emptyset .$$

Analog:  $B \neq X \wedge B\varphi \neq X' \xrightarrow{\text{F.4)}} : \mathcal{R}_{BX} \cap \Sigma = \emptyset$

Nach Folg. 3 ist dann  $\varphi|_{\mathcal{R}_{AX}}$  und  $\varphi|_{\mathcal{R}_{BX}}$  surjektiv.

Nach Folg. 5 sind alle Punkte von  $\mathcal{R}'_{A\varphi X'}$  (bzw.  $\mathcal{R}'_{B\varphi X'}$ ) aus  $\text{im } \varphi$  (mit  $\mathcal{R}'_{A\varphi X'} = \mathcal{R}'_{B\varphi X'}$ ).

In einer proj. Inzidenzebene besteht jede Punktreihe aus mindestens 3 paarw.  $\neq$  Punkten, also muB hier gelten:

$$\exists Y' \in \mathcal{R}'_{A\varphi X'} \text{ mit } Y' \neq |A\varphi, X\varphi$$

Da  $\varphi|_{\mathcal{R}_{AX}}$  surjektiv ist,  $\exists C \in \mathcal{R}_{AX}$  mit  $C\varphi = Y' \in \mathcal{R}'_{A\varphi X'}$

Analog :  $\varphi|_{\mathcal{R}_{BX}}$  surjektiv  $\implies \exists D \in \mathcal{R}_{BX}$  mit  $D\varphi = Y' \in \mathcal{R}'_{A\varphi X'} = \mathcal{R}'_{B\varphi X'}$

Dabei gilt :  $C \neq |A, X$  ,  $D \neq |B, X$ ;

denn : aus  $C = A$  folgt , A hat 2  $\neq$  Bilder, Wid. zu  $\varphi$  ist Abb. (Analog f#ur die #ubrigen F#alle).

Weiters ist  $C \neq D$  ; (d.h.  $\exists \mathcal{R}_{CD}$ ) ;

denn:  $C=D$  ist nur so m#oglich, daB  $C=D=X$  (Wid. zu  $C \neq X$  ,  $D \neq X$  ).

$\mathcal{R}_{AX}, \mathcal{R}_{BX}$  spannen eine Ebene auf. In dieser Ebene sind  $\mathcal{R}_{AB}, \mathcal{R}_{CD}$  zwei  $\neq$  Punktreihen.  $\implies \exists^* Z$  mit  $Z = \mathcal{R}_{AB} \cap \mathcal{R}_{CD}$ .

Dabei gilt:  $Z \notin \Sigma$  wegen  $Z \in \mathcal{R}_{AB} \wedge \mathcal{R}_{AB} \cap \Sigma = \emptyset$   
 $\implies Z\varphi_0 = Z\varphi$ .

$Z \in \mathcal{R}_{AB} \implies Z\varphi \in A\varphi + B\varphi = A\varphi$  (nach Vs.)

$Z \in \mathcal{R}_{CD} \implies Z\varphi \in C\varphi + D\varphi = Y'$  (nach Konstruktion)

$\implies$  wegen  $A\varphi \neq Y'$ :  $Z$  hat 2  $\neq$  Bilder im Widerspr. zu  $\varphi \dots$  Abb.

$\implies$  Beweisannahme ist falsch.

$\implies$  A, B mit obigen Vs. müssen verschiedene Bilder haben, also ist  $\varphi|_{\mathcal{R}_{AB}}$  injektiv.

Bemerkung a): Aus Folg. 6 und Folg. 3 folgt unter den Vs.:  $A, B \in \mathcal{R} \setminus \Sigma$ ,  $A \neq B$  ( $\implies \exists \mathcal{R}_{AB}$ ),  $\mathcal{R}_{AB} \cap \Sigma = \emptyset$ :

$\varphi|_{\mathcal{R}_{AB}}$  ist bijektiv;

denn:  $\mathcal{R}_{AB} \cap \Sigma = \emptyset \xrightarrow{F.6}$   $\varphi|_{\mathcal{R}_{AB}}$  injektiv,

( $\forall X, Y \in \mathcal{R}_{AB}$  mit  $X \neq Y$  gilt:  $X\varphi \neq Y\varphi$ , also insbesondere  $A\varphi \neq B\varphi$ .)

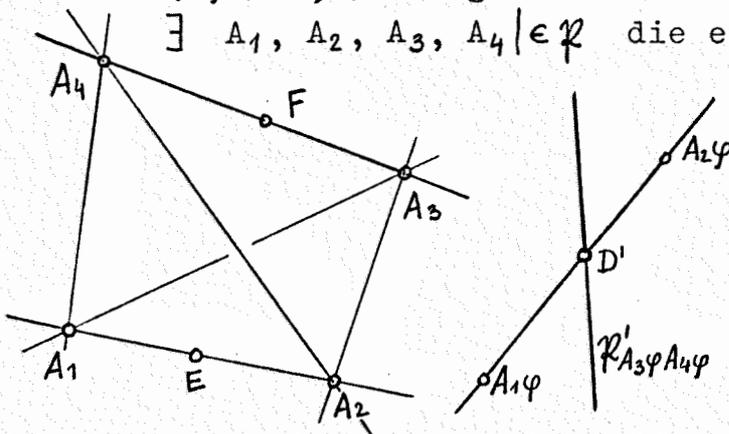
$A\varphi = B\varphi$  und obige Vs.  $\xrightarrow{F.3}$   $\varphi|_{\mathcal{R}_{AB}}$  ist surjektiv.

Bemerkung b): Beh.:  $\Sigma \neq \emptyset$

Beweis: Sei  $\Sigma = \emptyset \implies A \neq B$ ,  $\mathcal{R}_{AB} \cap \Sigma = \emptyset \xrightarrow{F.6}$

$\varphi|_{\mathcal{R}_{AB}}$  injektiv mit  $A, B$  belieb.  $\in \mathcal{R} \implies \varphi$  ist injektiv ( $A\varphi \neq B\varphi$ ) und global.

$\exists A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathcal{R}$  die ein Tetraeder bilden.



$\implies \exists A_j\varphi$ , paarweise  $\neq$ .

$A_1, A_2 \implies \varphi|_{\mathcal{R}_{A_1A_2}}$  surjektiv

$A_3, A_4 \implies \varphi|_{\mathcal{R}_{A_3A_4}}$  surjektiv.

$\exists (A_1\varphi + A_2\varphi) = \mathcal{R}'_{A_1\varphi A_2\varphi}, (A_3\varphi + A_4\varphi) = \mathcal{R}'_{A_3\varphi A_4\varphi}$

$\implies \exists$  mindestens ein Schnittpunkt  $D' = \mathcal{R}'_{A_1\varphi A_2\varphi} \cap \mathcal{R}'_{A_3\varphi A_4\varphi}$

und wegen  $\varphi|_{\mathcal{R}_{A_iA_j}}$  surjektiv  $\exists E \in \mathcal{R}_{A_1A_2}$

mit  $E\varphi = D'$ ,  $F \in \mathcal{R}_{A_2A_4}$  mit  $F\varphi = D'$ .

Dabei ist sicher  $E \neq F$ , da  $\mathcal{R}_{A_1A_2}, \mathcal{R}_{A_3A_4}$  windschief  $\implies$

Widerspruch zur Injektivität von  $\varphi$ :  $E\varphi = F\varphi = D'$ . Also

ist die Ausnahme  $\Sigma = \emptyset$  falsch.

Folg. 7 : Die Fasern der linearen Abb.  $\varphi$  :

$\{ X \in \mathcal{P} \mid X\varphi = P' \in \text{im } \varphi \text{ fest} \}$  heißt  $\varphi$ -Faser von  $X$   
(vgl. 0.1)

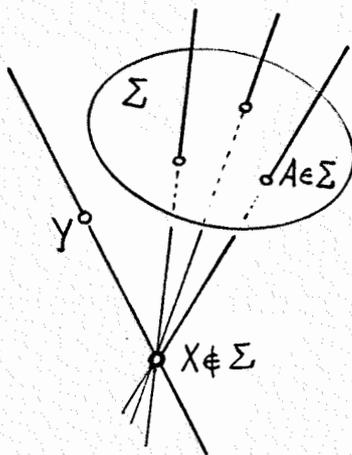
Zu jed.  $X' \in \text{im } \varphi \exists$  mindestens im  $X \in \mathcal{P}$  mit  $X\varphi = X'$ ;  
 $X$  ist sicher kein Ausnahmepunkt.

$\Sigma = \emptyset$  nach Folg. 6 Bem. b) , also  $\exists A \in \Sigma$  .

$\Rightarrow X \notin A, \exists \mathcal{P}_{AX}$  .

$\mathcal{P}_{AX}$  hat mit  $\Sigma$  den Punkt  $A$  gemeinsam und wegen Folg. 1 keinen weiteren (andernfalls wäre  $\mathcal{P}_{AX} \subset \Sigma$  , also auch  $X \in \Sigma$  !)

Nach Folg. 2 haben dann alle Nicht-Ausnahmepunkte von  $\mathcal{P}_{AX}$  das selbe Bild.  $\Rightarrow \mathcal{P}_{AX} \setminus \{A\} \subset \varphi$ -Faser von  $X$  .



Wiederholt man diese Konstruktion  $\forall A \in \Sigma$  ,  
d.h. bildet man die Verbindungs-Punkt-reihen  
 $\mathcal{P}_{AX}$  mit  $A$  durchläuft  $\Sigma$  , so entsteht  
der "Verbindungsraum von  $X$  mit  $\Sigma$  " .

$\Rightarrow \varphi$ -Faser von  $X \notin \Sigma$  enthält sicher den  
Verbindungsraum von  $X$  mit  $\Sigma$  geschlitz  
längs  $\Sigma$  .

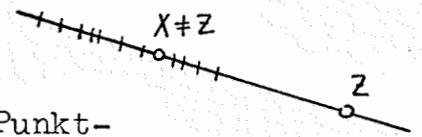
Beh.:  $\varphi$ -Faser von  $X = (\text{Verb.raum von } X$   
mit  $\Sigma)$  .

Beweis (indir.) : Sei  $Y$  ein Punkt mit  
 $Y\varphi = X'$  und  $Y \notin (\text{Verb.raum } X, \Sigma) \setminus \Sigma$  ;  
dann ist  $\mathcal{P}_{XY} \cap \Sigma = \emptyset$  (andernfalls  $Y \notin$

$(X, \Sigma) \setminus \Sigma$  ). Nach Folg. 6 wird  $\mathcal{P}_{XY}$  injektiv abgebildet:  
 $X \neq Y \Rightarrow X\varphi \neq Y\varphi$  im Widerspr. zur Vs.

Diskussion:

Fall 1 :  $\Sigma = \{Z\}$  ( $Z\varphi = \emptyset$ )



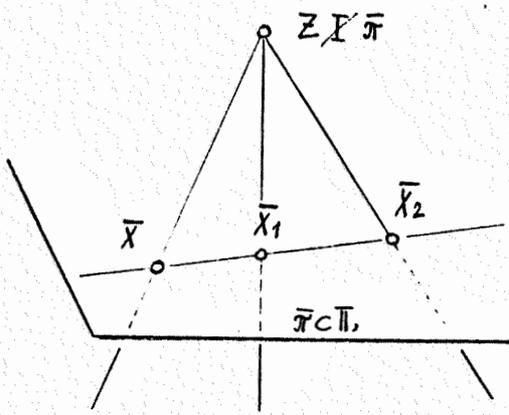
$\Rightarrow$  Die  $\varphi$ -Fasern sind "projizierende" Punkt-  
reihen durch  $Z$  , ("Sehstrahlen"), sie bilden  
das Faserbündel  $Z$  .

Alle Punkte auf einem Sehstrahl  $\neq Z$  (und nur solche)  
besitzen gleiches Bild.

Beh.:  $\varphi$  ist kollinear zu einer Projektion.

Beweis: Es gilt allgemein: Die Fasermenge einer belieb.  
Abb. ist bijektiv zu ihrem Bildbereich.

In unserem Fall folgt daraus:  $\text{im } \varphi = \mathcal{P}'$



Wir schneiden das  $\varphi$ -Faserbündel  $Z$  mit einer Ebene  $\bar{\pi}$  nicht durch  $Z$  ( $\bar{\pi} \subset \pi$ ).

Dann gilt sicher: Die  $\varphi$ -Fasermenge ist bijektiv zum Punktfeld  $\mathcal{R}_{\bar{\pi}} \subset \mathcal{R}$ , wenn jeder  $\varphi$ -Faser ihr Schnittpunkt mit  $\bar{\pi}$  zugewiesen wird.

D.h.: Das Punktfeld  $\mathcal{R}_{\bar{\pi}}$  möge durch Projektion  $\psi$  von  $\pi$  aus  $Z$  auf  $\bar{\pi}$  entstehen.

Es ist zu zeigen (vgl. Beh.):  $\exists \alpha: \mathcal{R}_{\bar{\pi}} \rightarrow \text{im } \varphi = \mathcal{R}' \wedge \alpha$  ist Kollineation, es sind also die Eigenschaften einer Kollineation, nämlich:

- (1) die Bijektivität und
- (2) die Invarianz kollinear Lage von Punkten, nachzuprüfen.

Es gilt:  $\mathcal{R}_{\bar{\pi}}$  bijektiv  $\{\varphi\text{-Faser}\}$  bijektiv  $\text{im } \varphi = \mathcal{R}' \Rightarrow$  (1).

Sind  $X, X_1, X_2$  kollinear in  $\bar{\pi} \Rightarrow X, X_1, X_2$  koll. in  $\pi$

$X \neq X_1 \Rightarrow \exists \mathcal{R}_{XX_1} \subset \mathcal{R}_{\bar{\pi}} \Rightarrow \mathcal{R}_{XX_1} \cap \Sigma (= \{Z\}) = \emptyset \Rightarrow \varphi(\mathcal{R}_{XX_1})$  bijektiv auf eine Punktreihe  $X\varphi + X_1\varphi$  abgebildet.

Mit  $X_2 \in \mathcal{R}_{X_1 X_2}$  folgt nach (II):  $X_2\varphi \in \mathcal{R}'_{X_1\varphi X_1\varphi}$ , also gilt auch (2).

$\Rightarrow \exists$  Koll.  $\alpha: \mathcal{R}_{\bar{\pi}} \rightarrow \mathcal{R}'$  ( $\alpha$  nicht notwendig eindeutig!)

$\Rightarrow \varphi = \alpha \circ \psi$ ; d.h.  $\varphi$  ist kollinear zur Projektion  $\psi$ .

Bemerkung zu Fall 1:

$\bar{\pi} \subset \pi$  ist notwendig De-Ebene  $\Rightarrow \pi'$  ist De-Ebene (Dies wird also allein durch die Bedingungen (I), (II) einer linearen Abb.  $\varphi$  erzwungen).

Weiters gilt:  $\bar{\pi}$  und  $\pi'$  sind durch Kollin.  $\alpha$  gekoppelt (also isomorph). Mit dem 2. Haupts. der Proj. Geom. folgt daraus:  $\bar{\pi}$  und  $\pi'$  gehören zum gleichen Grundkörper. Wegen  $\bar{\pi} \subset \pi$  gilt: der Körper von  $\bar{\pi}$  ist gleich dem von  $\pi$ ; also haben  $\pi$  und  $\pi'$  notwendig gleiche Grundkörper. (Dies folgt gleichfalls zwingend aus (I) und (II) !)

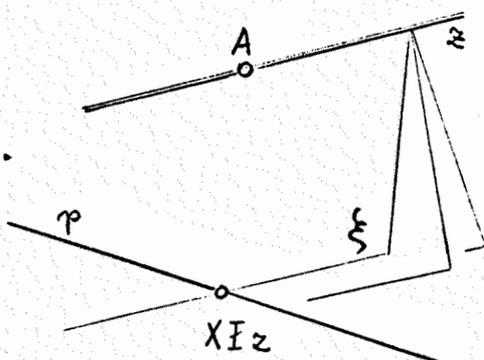
Fall 2:  $\Sigma$  ist eine Punktreihe  $\mathcal{R}_z$  ( $\forall Z \in \mathcal{R}_z$  gilt:  $Z\varphi = \emptyset$ )

$X \notin z \Rightarrow \exists \xi = X.z.$

$\Rightarrow \varphi$ -Faser von  $X$  ist  $\mathcal{R}_z \setminus \mathcal{R}_z$   
 $\Rightarrow \{\varphi\text{-Faser}\} =$  Punktfeldbüschel um  $z$  geschlitzt längs  $z$ .

$\Rightarrow \text{im } \varphi$  bijektiv  $\{\varphi\text{-Faser}\} =$  Ebenenbüschel persp. Punktreihe  $\mathcal{R}_p$  mit

$\mathcal{R}_p \cap \mathcal{R}_z = \emptyset.$



→  $im\varphi$  ist bijektiv zu einer Punktreihe.

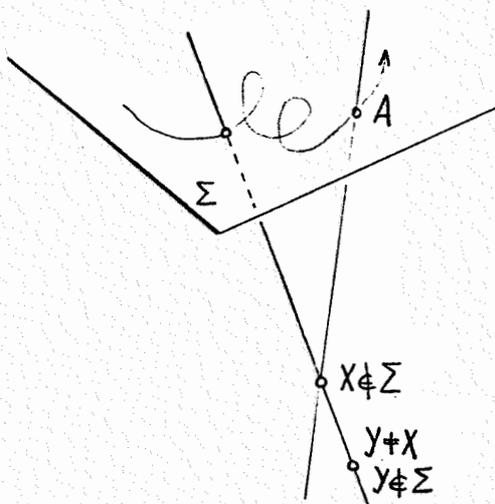
Wegen Forderung (II) ⇒  $im\varphi$  ist selbst Punktreihe  $\subset \mathbb{P}$ .

Definition: Bei einer lin. Abb.  $\varphi$  im Fall 2 ist  $im\varphi$  bijektiv zu einer Punktreihe aus  $\mathbb{P}$ . Diese ist nach 0.3 bijektiv zu  $K \cup \{\infty\}$ , sodaß jeder Punkt eindeutig durch eine "Zahl" aus  $K \cup \{\infty\}$  kotiert werden kann.  $im\varphi$  ist daher bijektiv zu einer Kotierung.

Analog: Kotierte Projektion des  $\mathbb{P}_e$  ist ein Grundriß mit metrisch spezieller Kotierung (Zahlenmenge =  $\mathbb{R}$ ).

Bemerkung:  $\varphi$  ist i.a. bloß bijektiv zu einer Kotierung, nicht projektiv zu einer Punktreihe  $\subset \mathbb{P}$ ; ist speziell  $K$  kommutativ und  $\exists K'$  zu  $\mathbb{P}'$  mit  $K=K'$  und  $\exists \alpha: K \cup \{\infty\} \rightarrow K' \cup \{\infty\}$  mit  $\alpha \dots$  lineare Bijektion, d.h.  $u \in K \mapsto u' = u + c$ ,  $c = konst.$ , dann gilt zusätzlich:  $\varphi$  projektiv.

Fall 3:  $\Sigma$  ist ein Punktfeld.



⇒  $X \notin \Sigma$ ; Verbindungsraum  $X \cdot \Sigma$  ist der Gesamtraum  $\mathbb{P}$ .  
 ⇒  $\exists^*$   $\varphi$ -Faser, nämlich  $\emptyset$ ,  
 ⇒  $im\varphi$  besteht aus einem Punkt allein, im Widerspruch zur Forderung (I):  
 $im\varphi$  besteht aus mindestens 2  $\neq$  Punkten. ⇒ Fall 3 ist nicht möglich.

Satz 1: Eine lineare Abbildung aus einem proj. Punktraum in eine proj. Bildebene ist entweder kollinear zu

einer Projektion oder bijektiv zu einer Kotierung.

Im ersten Fall ist die Bildebene notwendig DESARGUESsch und gehört zum gleichen Körper, wie der Unterraum.

Bemerkung zu Fall 1: Die Kollineation  $\alpha: \mathbb{P}(C\mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{P}' = im\varphi$  ist i.a. keine proj. Kollineation!

Vs. für  $\alpha$  projektiv:  $\alpha$  wird beschrieben durch

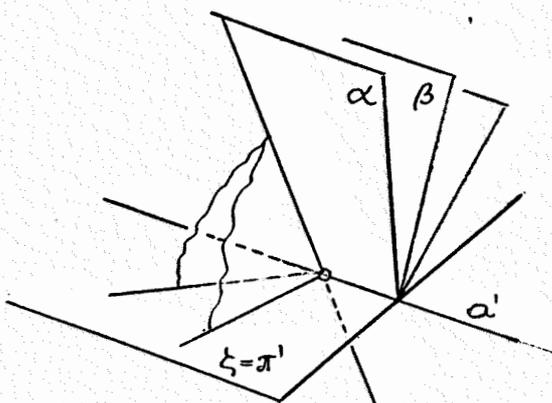
$$x'_j = \sum_{k=0}^3 a_{jk} (x_k \cdot \epsilon) \quad \text{mit} \quad \epsilon \dots \text{ identisch Automorph. von } K \quad (K \dots \text{Körper von } \mathbb{P})$$

Ergebnis: Im wesentlichen ist jede nichttriviale lineare Abbildung der konstruktiven Geometrie eine Projektion.

1.2 Lineare Abbildung aus dem proj. Ebenenraum

Geg.: proj. Ebenenraum  $\mathcal{E} \subset \Pi$  (D-dual zu  $\mathcal{K} \subset \Pi$ )  
 proj. Geradenebene  $\mathcal{G}' \subset \Pi'$  (d-dual zu  $\mathcal{K}' \subset \Pi'$ )  
 Abb.  $\varphi$  mit  $D(\varphi) (\neq \emptyset) \subset \mathcal{E}$ , im  $\varphi \subset \mathcal{G}'$

Beispiel: "Spurenprinzip"  $\varphi^* : \pi' \text{ in } \Pi \text{ eingebettet.}$



$$\alpha \in \mathcal{E}, \alpha \neq \xi \mapsto a' = \alpha \cdot \xi$$

$\varphi^*$  ist nicht global!  $\exists \Sigma^* = \{\xi\} \neq \emptyset$

$\varphi^*$  surjektiv: jede Gerade  $a \in \mathcal{G}'$  ist Spur

$\varphi^*$  nicht injektiv: Ebenen  $\neq \xi$  des Bündels um  $a'$  mit  $a' \in \mathcal{G}'$  haben  $a'$  als Bild  $\Rightarrow$  Fasern sind Ebenenbündel um die Spuren in  $\pi'$  geschnitten längs  $\xi$ .

$\Rightarrow$  Die Fasermengen des Spurenprinzipes und der Projektion sind D-dual.  
 Weiters gilt: kollineare Ebenen  $\xrightarrow{\varphi^*}$  kopunktuale Geraden.

Definition einer linearen Abbildung  $\varphi^* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}'$ :

Erweiterung von  $\varphi^*$  zu einer globalen Abbildung  $\varphi_0^*$ :

$$\varphi_0^* \text{ mit } \begin{aligned} \alpha \varphi_0^* &= \alpha \varphi^* & \forall \alpha \in \mathcal{E} \setminus \Sigma^* \\ \alpha \varphi_0^* &= \emptyset & \forall \alpha \in \Sigma^* \end{aligned}$$

Damit  $\varphi_0^* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}'_0$  global mit  $\mathcal{G}'_0 = \mathcal{G}' \cup \{\emptyset\}$   
 (analog zu 1.1).

Bezeichnung:

Geg.  $\pi'; a', b' \in \mathcal{G}'_0$

Es sei definiert  $a' + b' := \mathcal{G}'_{a'b'}$  für  $a', b' \in \mathcal{G}'$  mit  $a' \neq b'$   
 $a' + a' := a'$  für  $a' \in \mathcal{G}'$   
 $a' + \emptyset = \emptyset + a' = : a'$  für  $a' \in \mathcal{G}'_0$

Definition:

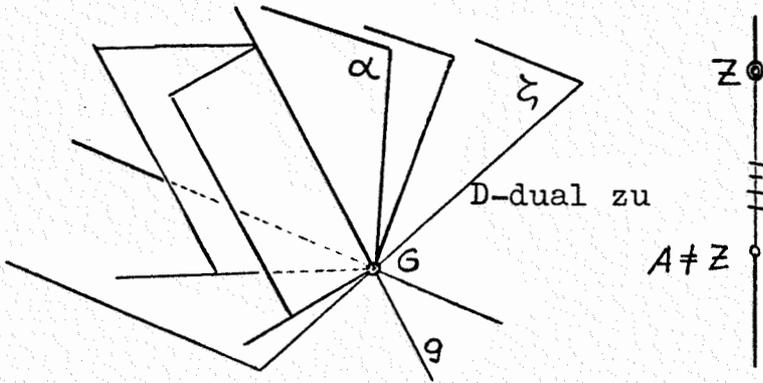
Eine Abbildung  $\varphi^*$  aus  $\mathcal{E}$  in  $\mathcal{G}'$  heißt linear  $\iff$

$\iff$  (I\*) im  $\varphi^*$  enthält mindestens 2  $\neq$  Geraden

(II\*)  $\alpha, \beta \in \mathcal{E}, \alpha \neq \beta : \varphi_0^*(\mathcal{E}_{\alpha\beta}) = \alpha \varphi_0^* + \beta \varphi_0^*$

Damit sind die Folgerungen 1) bis 7) aus 1.1 direkt übertragbar.  $\Rightarrow \Sigma^*$  ist Ebene  $\xi$  oder ein Ebenenbündel.

Fall 1:  $\Sigma^*$  ist eine Ebene  $\xi$



Es gilt:  $\varphi^*$ -Faser = Ebenenbündel  $\xi_{\alpha} \setminus \{\xi\}$   
 $\Rightarrow \{\varphi^*$ -Faser $\}$  bijektiv zu  $\xi'$ .  
Beh.: Spurfeld  $\bar{\xi} \subset \xi$ , kollinear zu  $\xi'$ , d.h.  $\exists \alpha: \bar{\xi} \rightarrow \xi'$  und  $\alpha$  ist Kollineation.

Beweis:  $\bar{\xi}$  bijektiv  $\xi'$

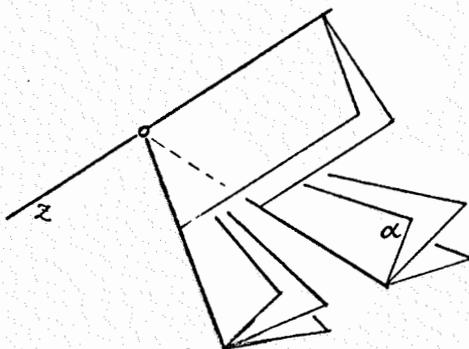
noch zu zeigen: kopunktales Geraden  $\subset \bar{\xi} \xrightarrow{\alpha} \text{kopktl. Ger. } \subset \xi'$

Wir wählen zu 3 kopunktalen Geraden in  $\xi$  eine Gerade  $g$  durch deren Schnittpunkt  $G$  ( $g \notin \xi$ ).  $g$  ist Träger eines zum Spurenbüschel perspektiven Ebenenbüschels, welches frei von Ausnahmeebenen ist ( $\xi \notin \xi_g$ ).  $\Rightarrow \varphi_0^*(\xi_g) = \varphi^*(\xi_g)$  und wird daher nach  $(\Pi^*)$  bijektiv auf ein Geradenbüschel aus  $\xi'$  abgebildet.

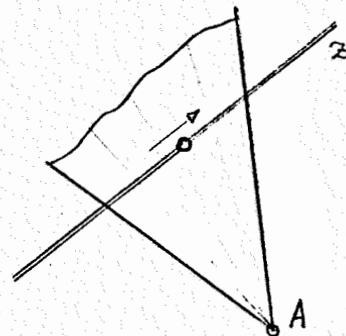
$\Rightarrow$  im  $\varphi^*$  ist kollinear zum Spurfeld  $\xi \Rightarrow$

$\Rightarrow$  im  $\varphi^*$  ist De-Ebene und gehört zum gleichen Körper wie  $\xi$ , nämlich zum Körper von  $\mathbb{T}$ .

Fall 2:  $\Sigma^*$  ist ein Ebenenbüschel  $\xi_2$



D-dual zu



Es gilt:  $\varphi^*$ -Faser = Ebenenbündel in einem Punkt von  $z$  geschnitten längs Ausnahmeebenen  $\xi_2$

$\Rightarrow$  im  $\varphi^*$  bijektiv zu  $\{\varphi^*$ -Faser $\}$  bijektiv zur Punktreihe  $z \Rightarrow$  im  $\varphi^*$  bijektiv zu  $\mathcal{R}_z$ , also  $\varphi^*$  bijektiv zu "Kotierung".

$\Rightarrow$  im  $\varphi^*$  = Geradenbüschel  $\subset \xi'$

Satz 2 : Eine lin. Abbildung aus einem proj. Ebenenraum in eine proj. Geradenebene ist entweder kollinear zum Spurenfeld in  $\Sigma^*$  oder bijektiv zu einer Kotierung. Im ersten Fall ist die Bildebene notwendig DESARGUESsch und gehört zum gleichen Körper wie der Urraum.

Bemerkung: Bei Deutung des Spurenprinzipes als Abbildung von Geraden aus  $\mathbb{T}$  geht die Dualität zur Projektion verloren. Während außerdem das Spurenprinzip im wesentlichen die "allgemeinste" lineare Abb. aus dem Ebenenraum ist, ist das Spurenprinzip nur ein sehr spezielles Beispiel einer lin. Abb. aus dem Geradenraum in ein Geradenfeld. (Die allgemeinste lin. Abbildung aus dem Geradenraum in eine proj. Ebene heißt ECKHART-REHBOCKsche Abb.)

### 1.3 Axonometrie

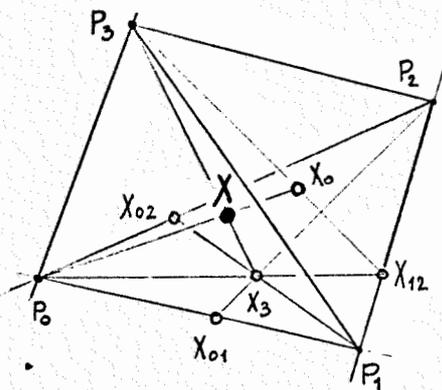
Geg.  $\mathbb{T}_{PP}(\mathcal{P}) \dots$  PP-Punktraum ( $\Leftrightarrow$ ] Körper  $K$  zu  $\mathbb{T}_{PP}$ ,  $K$  kommutativ), 0.3:  $\Rightarrow$  Jeder PP-Raum ist koordinatisierbar; die Koordinatisierung ist durch ein Koordinatensystem festgelegt.

Koord. System:  $\{P_0, \dots, P_3, E\}$ , nie 4 Punkte komplanar.

Die Koordinatisierung ist erst durch Algebraisierung einer Kante (etwa  $\mathcal{P}_{P_0P_1}$ ) eindeutig bestimmt:  $P_0 \mu = 0$ ,  $P_1 \mu = \infty$ ,  $E_{01} \mu = 1$  mit  $E_{01} \dots$  Projektion von  $E$  aus  $P_2 P_3$  auf  $P_0 P_1$ .

Jeder Punkt  $X \in \mathbb{T}_{PP}$  wird durch homogenes  
 Quadrupel  $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \neq (0:0:0:0)$  ( $x \in K$ )  
 dargestellt.

Definition: Das "Koordinatenfünfzehneck" eines allgemeinen Punktes  $X$  (d.h.  $X \notin$  Koord.ebene, also  $x_0 \neq 0$ ) ist



folgende Punktmenge:

$$\{P_0, P_1, P_2, P_3, X\} \cup \{X_0, X_1, X_2, X_3\} \cup \{X_{01}, X_{02}, X_{03}, X_{12}, X_{23}, X_{31}\}.$$

Dabei bedeutet  $X_j$  die Proj. von  $X$  aus  $P_j$  auf die gegenüberliegende Koordinatenebene und  $X_{jk}$  die Projektion von  $X$  auf  $P_j P_k$  aus der zu  $P_j P_k$  windschiefen Kante.

Bemerkung a): Mit  $X_{jk} \in P_j P_k$ ,  $E_{jk} \in P_j P_k$  gilt nach 0.3: Für  $X \dots (x_0 : \dots : x_3)$  allgemein ist  $\frac{x_i}{x_k} \neq \frac{0}{0}$  gleich dem Doppelverhältnis  $DV(X_{jk} E_{jk} P_j P_k)$ . (Wegen  $PP \Rightarrow DV$ )

Bemerkung b): Die 15 Punkte des Koord.-15-Eckes von X sind nicht unabhängig !

Beh.: Für X allgemein gilt: X ist festgelegt durch  $P_0, P_1, P_2, P_3$  (..Fundamentaltetraeder) und ein Tripel  $X_{jk}, X_{jl}, X_{jm}$  ( $j, k, l, m \in \{0, \dots, 3\}$ ). ( $X$  allgemein  $\Leftrightarrow P_j, X_{kl} \neq \emptyset$ ).  $\{P_0, \dots, P_3, X_{jk}, X_{jl}, X_{jm}\}$  heißt "Koordinatensiebeneck" von X .

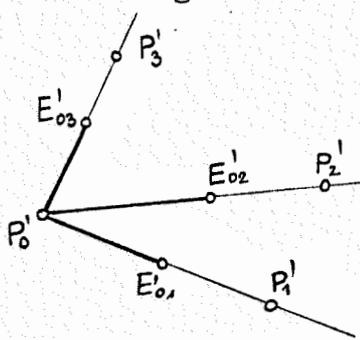
Beweis: Falls X durch ein Koord.-siebeneck bestimmt ist, sind die Koord. von X bestimmt und die restlichen 8 Punkte können ergänzt werden.

Z.B.  $X_{01}, X_{02}, X_{03}$  gegeben.

$$\begin{matrix} X_1 \\ \downarrow \\ X_0 \end{matrix}, \begin{matrix} X_2 \\ \downarrow \\ X_0 \end{matrix}, \begin{matrix} X_3 \\ \downarrow \\ X_0 \end{matrix} \Rightarrow ]^* (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \dots \text{Koordin. von X .}$$

Wir wollen im folgenden  $\Pi_{PP}$  linear auf eine Ebene  $\pi'$  abbilden. Nach Satz 1 ist dann  $\pi'$  notwendig als PAPPUS-Ebene über dem zu  $\Pi_{PP}$  gehörigen komm. Körper K anzunehmen. Wir geben dazu umgekehrt eine Abbildungsvorschrift  $\alpha: \Pi_{PP} \rightarrow \pi'$  an und zeigen, daß  $\alpha$  unter der Vs.  $\pi' = \pi'_{PP}$  eine lineare Abbildung ist.

Definition: Bilden in  $\pi'_{PP}$  vier Punkte  $P'_0, P'_1, P'_2, P'_3$  ein Viereck und sind  $E'_{jk}, E'_{jl}, E'_{jm}$  ( $j, k, l, m \in \{0, \dots, 3\}$ ) paarweise verschiedene Punkte mit  $E'_{jk} \in P'_j P'_k \wedge E'_{jk} \neq P'_j, P'_k$ , dann liegt der "allgemeine Fall" vor. Das Siebeneck



$\{P'_i, E'_{jk}, E'_{jl}, E'_{jm}\}$  ( $i, j, k, l, m \in \{0, \dots, 3\}$ ) heißt "lineares (ebenes) axonometrisches Siebeneck". (vgl. Figur  $j=0, E_{01}, E_{02}, E_{03}$ )

Definition: Das "axonometrische Bild eines Punktes  $X \in \Pi_{PP}(K)$  bezogen auf ein proj. Koordinatensystem in  $\Pi_{PP}$ " (kurz "Axonometrie" bezügl. eines axonom. Siebenecks im allgem. Fall):

Für  $X \in \Pi_{PP}$  möge gelten: (1)  $X_{jk} \in P_j P_k$  mit  $X_{jk} \dots \frac{x_j}{x_k}$  ( $j, k$  so, daß  $\frac{x_j}{x_k} \neq 0$ ) wird der Punkt  $X'_{jk} \in P'_j P'_k$  mit  $DV(X'_{jk}, E'_{jk}, P'_j, P'_k) = \frac{x_j}{x_k}$  zugewiesen. ( $\Rightarrow$  Die Punkte  $P'_j$  und  $E'_{jk}$  von  $\pi'_{PP}$  sind den Ecken  $P_j$  des Fundamentaltetraeders bzw. den Einheitspunkten  $E_{jk}$  auf dessen Kanten in  $\Pi_{PP}$  zugewiesen).

(2) Die Vervollständigung des axonometrischen Bildes des Koordinaten-15-Eckes von X geschieht "linear" (d.h. unter Benützung der Eigenschaften

einer linearen Abbildung).

Ist die Axonometrie eine Abbildung ?

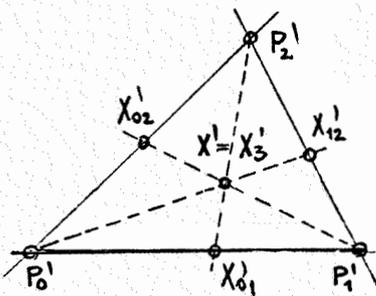
Wenn ja, dann muß für jeden Punkt  $X \in \mathbb{P}^2$  gelten:  
Entweder  $X'$  ( $X'$ ... axonom. Bild von  $X$ ) ist ein-  
deutig, oder  $X$  hat kein axonom. Bild ( $X$  ist  
ein Ausnahmepunkt).

Zur Beantwortung der Frage ist eine Fallunterscheidung  
erforderlich:

$\alpha)$   $X = P_j \Rightarrow X' = P'_j$  eindeutig

$\beta)$   $X \in P_j P_k$ , o.B.d.A.  $j=0, k=1$   $X = X_{01} \dots (x_0 : x_1 : 0 : 0) \neq$   
 $(0 : 0 : 0 : 0) \Rightarrow \frac{x_1}{x_0} \neq \frac{0}{0}, \Rightarrow X'_{01} = X'$  eindeutig

$\gamma)$   $X \in P_0 P_1 P_2$  (o.B.d.A.)  $\Rightarrow X = X_3$  (vgl. Koord.-15-Eck)



$x_3 = 0, X_3 \dots (x_0 : x_1 : x_2 : 0)$  mit  $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \neq 0$ ,  
sonst liegt Fall  $\alpha)$  oder  $\beta)$  vor.

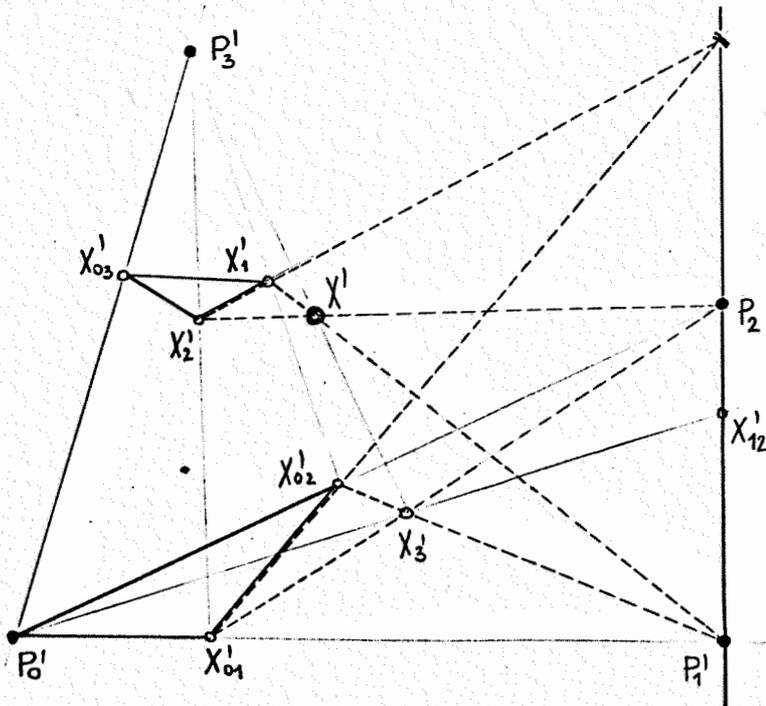
Dann ist  $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0} \mid \neq 0$

und nach 0.3, Satz von CEVA, gilt:

$$\frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2}{x_0} \Rightarrow X' = X'_3 \text{ eindeutig.}$$

$\delta)$   $X$  allgemein  $\Rightarrow (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$  mit  $\frac{x_3}{x_0} \neq 0$ .

Benütze z.B. das Koordinaten-7-Eck  $\{P'_j, X_{01}, X_{02}, X_{03}\} \Rightarrow X'_{01}, X'_{02},$   
 $X'_{03}$  eindeutig nach



$\beta)$ . Die Vervoll-  
ständigung (2) lie-  
fert  $X'$ .

Wir haben zu zeigen:

$X'$  ist von der Aus-  
wahl des Tripels  
 $X_{ik} X_{jl} X_{jm}$  und der  
Art der Vervollstän-  
digung unabhängig.

In  $\mathbb{P}^2$  gilt: Die  
Tripel  $X, X_1, P_1; X, X_2,$   
 $P_2; X, X_3, P_3$  sind kol-  
linear. Nach  $\gamma)$

ist  $X'_1, X'_2, X'_3$  durch  $X'_{01}, X'_{02}, X'_{03}$  eind. festgelegt.

Nach Vorschrift (2) sind dann  $X', X_1', P_1'$ ;  $X', X_2', P_2'$ ;  $X', X_3', P_3'$  kollinear. Durch  $X_1', P_1'$ ,  $X_2', P_2'$  ist  $X'$  bestimmt. Wir haben zu zeigen:  $X' = (X_1', P_1') \cdot (X_2', P_2')$  inzidiert mit  $X_3', P_3'$ .

Beweis: Die Dreiecke  $P_0', X_{01}', X_{02}'$  und  $X_{03}', X_2', X_1'$  sind perspektiv mit Zentrum  $P_3'$ .  $\Rightarrow$  (Wegen  $\pi_{PP}' \Rightarrow \pi_{De}'$ )  $\exists^*$  DESARGUES-Achse, nämlich  $P_1'P_2'$ , (denn  $(P_0'X_{01}')(X_{03}'X_2') = P_1'$ ,  $(P_0'X_{02}')(X_{03}'X_1') = P_2'$ )  $\Rightarrow (X_{01}'X_{02}')(X_2'X_{03}') \perp P_1'P_2'$ .

Damit gilt: Die Dreiecke  $X_{01}', X_3', X_{02}'$  und  $X_2'X'X_1'$  sind axial perspektiv mit der Achse  $P_1'P_2'$ , (denn: laut Vs.  $X_2', X', P_2'$  kollinear,  $X_{01}', X_3', P_2'$  koll. nach  $\beta$ ), u.s.w.)  $\Rightarrow$  Nach der Umkehrung des Satzes von DESARGUES  $\exists^*$  Perspektivitätszentrum  $(X_{01}'X_2') \cdot (X_{02}'X_1') = P_3' \Rightarrow P_3' \perp X_3'X'$ .

$\Rightarrow$  Bei fest gewähltem Tripel  $X_{ik}', X_{ie}', X_{im}'$  ist das axonometrische Bild  $X'$  von  $X$  unabhängig vom Koordinatenweg eindeutig bestimmt.

Wir haben noch zu zeigen:  $X'$  ist auch unabhängig von der Auswahl des Tripels  $X_{jk}', X_{je}', X_{jm}'$ . Z.B. Geg.  $X_{10}', X_{12}', X_{13}' \Rightarrow X_{02}'; X_{03}'$  gehören nach CEVA zum Bild des aus Angabe konstruierten Koord.-15-Ecks.

(Vgl.  $\beta$ )  $\Rightarrow X'$  durch  $X_{10}' = X_{01}', X_{02}', X_{03}'$  nach oben eindeutig bestimmt.

Ergebnis: Wenn  $X$  ( $X$  allgemein) in der Axonometrie  $\alpha$  ein Punkt  $X' \in \pi_{PP}'$  zugewiesen wird, so ist dieser eindeutig.  $\Rightarrow$  Die Axonometrie  $\alpha$  ist eine Abbildung.

Folg. 1: Wir bestimmen die Ausnahmemenge  $\Sigma \subset \pi_{PP}'$  der Axonometrie  $\alpha$ .

Beh.:  $\exists^*$  Ausnahmepunkt:

Beweis: a)  $Z \in \Sigma \Rightarrow Z \neq P_j$  (vgl. Falluntersch.  $\alpha$ )  $\Rightarrow$

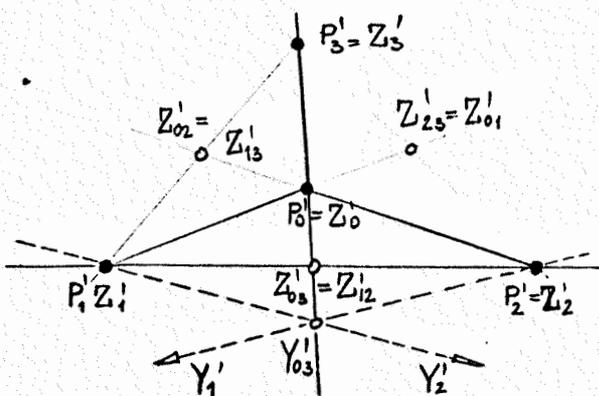
$\Rightarrow \exists Z_j$  eindeutig  $\Rightarrow Z_j$  nach Falluntersch.  $\beta, \delta$ ) wohlbestimmt.

Sei  $Z$  mit  $Z_j = P_j$  ( $j=0,1,2,3$ ).

$\Rightarrow P_j Z_j$  nicht erklärt  $\Rightarrow Z'$

nicht erklärt  $\Rightarrow Z \in \Sigma$ .

$(P_3 Z_1) \cdot (P_0 P_2) = Z_{02} \Rightarrow (P_3 Z_1) \cdot (P_0 P_2') = Z_{02}'$  (wohlbestimmt)  
 $(P_2 Z_1) \cdot (P_0 P_3) = Z_{03} \Rightarrow Z_{03}'$   
 $(P_0 Z_1) \cdot (P_2 P_3) = Z_{23} \Rightarrow Z_{23}'$



Weiters ist  $(P_2 Z_3) \cdot (P_0 P_1) = Z_{01} \Rightarrow Z_{01}' = Z_{23}'$   
 $(P_0 Z_3) \cdot (P_1 P_2) = Z_{12} \Rightarrow Z_{12}' = Z_{03}'$   
 $(P_0 Z_2) \cdot (P_1 P_3) = Z_{13} \Rightarrow Z_{13}' = Z_{02}'$

$\Rightarrow Z_{01}', Z_{02}', Z_{03}'$  wohlbestimmt. Zu  $Z_{01}'$  gehört  $DV(\dots) = \frac{z_1}{z_0} \neq 0, \infty$ ,  
 $Z_{02}' \dots \frac{z_2}{z_0} \neq 0, \infty$ ;  $Z_{03}' \dots \frac{z_3}{z_0} \neq 0, \infty \Rightarrow \exists$  eindeutiges  
 homogenes Quadrupel  $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ , welches genau  
 einen Punkt  $Z \in \Pi_{PP}$  beschreibt, mit  $Z \in \Sigma$ .

b) Sei  $Y \neq Z$  ein weiterer Punkt aus  $\Sigma$ ;

$Y \dots (y_0 : y_1 : y_2 : y_3) \neq (z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \Rightarrow$  wenigstens ein  $\frac{y_j}{y_0} \neq \frac{z_j}{z_0}$ ;

z.B.  $\frac{z_3}{z_0} \neq \frac{y_3}{y_0} (\neq \frac{0}{0}) \Rightarrow Y_{03} \neq Z_{03} \Rightarrow Y_{03}' \neq Z_{03}'$ .

( $Y_{03}'$  auf Koord. Achse durch DV  
 eindeutig bestimmt). Mit Hilfe  
 des Koord.-15-Ecks folgt daraus:

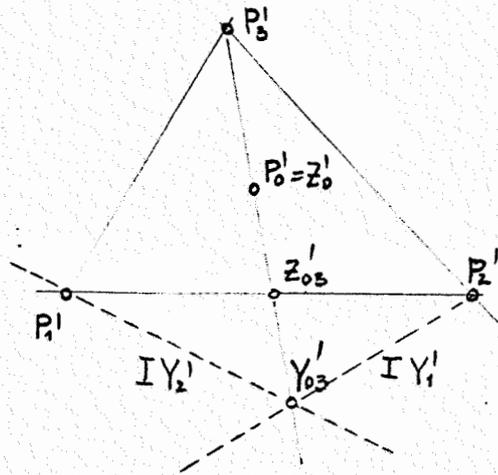
$Y_{03}', P_0', P_3'$  kollinear  $\Rightarrow Y_{03}' \in P_0' P_3'$

$Y_1', Y_{03}', P_1'$  kollinear  $\Rightarrow Y_1' \neq P_1'$

$Y_2', Y_{03}', P_2'$  kollinear  $\Rightarrow Y_2' \neq P_2'$

$Y' = (Y_1' P_1') \cdot (Y_2' P_2')$

$Y'$  ist bestimmt, falls  $(Y_1' P_1') \neq (Y_2' P_2')$ .



Gleichheit gilt genau dann, wenn  $Y_2' = P_1' \wedge Y_1' = P_2'$ .

In diesem Fall folgt aber mit Hilfe des Koord.-15-Ecks:

$Y_{02}' = (P_2' Y_1') \cdot (P_0' P_2') \Rightarrow Y_{02}' = Y_1' = P_2'$

$Y_{13}' = (P_0' Y_2') \cdot (P_1' P_3') \Rightarrow Y_{13}' = Y_2' = P_1'$

Dann ist aber  $\frac{y_3}{y_1} = DV(Y_{13}, E_{13}, P_1, P_3) = DV(Y_{13}', E_{13}', P_1', P_3') = 0 (\Rightarrow y_3 = 0)$

und  $\frac{y_0}{y_2} = DV(Y_{02}, E_{02}, P_2, P_0) = DV(Y_{02}', E_{02}', P_2', P_0') = 0 (\Rightarrow y_0 = 0)$

also ist  $\frac{y_3}{y_0} = \frac{0}{0}$  im Widerspruch zur Vs.

$\Rightarrow Y_1' P_1' = Y_2' P_2'$  ist nicht möglich  $\Rightarrow Y'$  ist ein-

deutig bestimmt, also ist  $Y \notin \Sigma$ , im Widerspruch zur  
 Annahme.

$\Rightarrow \exists^*$  Ausnahmepunkt  $Z$ , ( $\Sigma = \{Z\}$ ), wobei gilt:

Die axonometrischen Bilder der Projektion von  $Z$  aus  
 den Koordinatenecken auf die Gegebene stimmen überein  
 mit den axonometrischen Bildern dieser Ecken.

Folg. 2 : Jede Axonometrie im allgemeinen Fall ist kollinear zu einer Projektion, also eine lineare Abb.

$\pi^1$  als projektive Ebene vorausgesetzt  $\Rightarrow \exists 4 \neq$  Bildpunkte, also sicher 2.

$\Rightarrow$  (I) ist erfüllt.

(II) :  $X \in \mathcal{P}_{AB}$  mit  $A \neq B$ ,  $A, B, X \notin \Sigma$ ,  
zu zeigen :  $X' \in A' + B'$

Beweis von (II) :  $g = AB$ ,  $\mathcal{P}_g$ ;  $\mathcal{P}_g$  kann höchstens 2 Ecken des Fundamentaltetraeders enthalten,  $\Rightarrow \exists$  sicher 2 Ecken, etwa  $P_2, P_3$ , mit  $P_2 \notin g, P_3 \notin g$ .

$\Rightarrow X \in \mathcal{P}_{AB} : \exists X_2, \exists X_3 ; X \notin \Sigma \Rightarrow \exists X'_2, \exists X'_3$

$X = \lambda A + \mu B$ , d.h.  $x_j = \lambda a_j + \mu b_j$  ( $j=0,3$ ) mit  $\lambda, \mu \in K$  ( $\lambda, \mu$ )  $\neq$  (0,0) und  $A..(a_j)$ ,  $B..(b_j)$ ,  $X..(x_j)$ .  
Dabei beschreibt  $(\lambda:\mu)$  ein gewisses Doppelverhältnis:  $\lambda:\mu \dots$  "proj.Reihenkoordinaten".

Z.B.:  $X_3$  in  $x_3 = 0 : \Rightarrow$  die ersten Koord. von  $X$  u.  $X_3$  stimmen überein:

$$x_0 = \lambda a_0 + \mu b_0$$

$$x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1$$

$$x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2$$

$(x_i) \dots$  Koord. von  $X_3$  in der Ebene  $P_0, P_1, P_2$  bezügl. des Koord.Systems  $\{P_0, P_1, P_2; E_3\}$

Im vorliegenden allgemeinen Fall bilden die Punkte  $P_0^1, P_1^1, P_2^1, E_3^1$  ein ebenes proj. Koordinatensystem in  $\pi^1$ .

$X_3^1$  besitzt nun in diesem Koordinatensystem die gleichen Koordinaten, wie  $X_3$  in  $\{P_0, P_1, P_2; E_3\} \Rightarrow X_3^1$  ist eindeutig festgelegt.

Durchläuft  $X$  die Punktreihe  $\mathcal{P}_g \Rightarrow X_3$  durchläuft  $A_3 + B_3 \Rightarrow X_3^1$  durchläuft  $A_3^1 + B_3^1$  wobei gilt:

Für  $X_3$  bzw.  $X_3^1$  mit  $x_0 = \lambda a_0 + \mu b_0$  und  $\text{Rg.} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} = 1$  ( $\neq 0$ )  
 $x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2$

gilt:  $X_3^1 = A_3^1 = B_3^1 \Rightarrow g_3^1$  ist ein einziger Punkt.

Für  $X_3$  bzw.  $X_3^1$  mit  $\text{Rg} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} = 2$  gilt:  $A_3^1 \neq B_3^1 \Rightarrow$

$X_3^1$  durchläuft eine Reihe  $\Rightarrow g_3^1$  ist eine Gerade.

Wegen  $(\lambda:\mu) \dots$  DV  $\Rightarrow$  Punktreihe  $\mathcal{P}_g$  ist projektiv zur Bildpunktreihe  $\mathcal{P}_g^1$  ( $\Pi$  und  $\pi^1$  gehören nach Vs. zum gleichen kommut. Körper  $K$ ).

Analog zu  $g_3'$  wird  $g_2'$  konstruiert:  $X_2$  in  $x_2 = 0$  durchläuft  $A_2 + B_2$ ,  $X_2$  und  $X$  stimmen in den Koordinaten  $x_0; x_1, x$  überein:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \lambda a_0 + \mu b_0 \\ x_1 &= \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x_3 &= \lambda a_3 + \mu b_3 \end{aligned} \right\} x_j (j=0,1,3) \dots \text{Koord. von } X_2 \text{ in } P_0 P_1 P_2 \text{ bezügl. } \{P_0, P_1, P_3; E_2\}.$$

Im allgemeinen Fall ist  $\{P_0, P_1, P_3; E_2\}$  ein ebenes proj. Koord. System in  $\pi'$ ; in Bezug auf dieses System haben  $X_2$  und  $X_2'$  gleiche Koordinaten:  $\Rightarrow X_2'$  eindeutig in  $\pi'$ .

Ist nun  $\text{Rg.} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \end{pmatrix} = 1$  (sicher  $\neq 0$ ), so ist  $A_2 = B_2 \Rightarrow A_2' = B_2'$  und  $X_2$  bzw.  $X_2'$  mit  $x_j = \lambda a_j + \mu b_j$  ( $j=0,1,3$ ) stimmt mit  $A_3$  (bzw.  $A_3'$ ) überein.  $\Rightarrow g_2'$  ist ein Punkt.

Ist  $\text{Rg} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \end{pmatrix} = 2$ , so ist  $A_2 \neq B_2 \wedge A_2' \neq B_2' \Rightarrow X_2$  bzw.  $X_2'$  durchläuft eine Reihe  $\Rightarrow g_2'$  ist eine Gerade, wobei gilt:  $\mathcal{P}_g$  ist projektiv zur Bildpunktreihe  $\mathcal{P}_{g_2}'$ .

Wir haben nun gezeigt:  $X \in A+B \Rightarrow X_2' \in A_2' + B_2' \wedge X_3' \in A_3' + B_3'$

Noch zu zeigen:  $X' \in A' + B'$ .

Dazu ist eine Fallunterscheidung erforderlich.

$\alpha)$  Seien  $g_2', g_3'$  Gerade: Dann gilt wegen  $g \pi g_2' \wedge$

$$\wedge g \pi g_3': g_2' \pi g_3'$$

Setzen wir zusätzlich voraus:

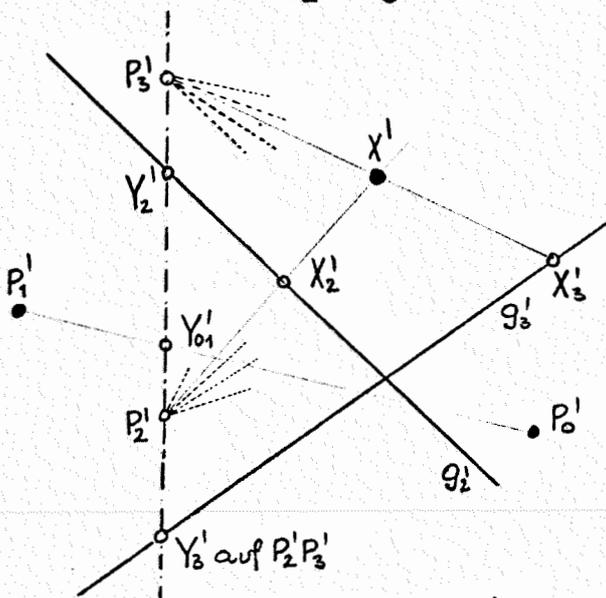
$$g_2' \not\perp P_2' \wedge g_3' \not\perp P_3' !$$

Damit folgt mittels Inzidenzen im Koord.-15-Eck:

$$\left. \begin{aligned} X_3', P_3', X_1' &\text{ kollinear} \\ X_2', P_2', X_1' &\text{ kollinear} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_1' = \underbrace{P_3' X_3'}_{\neq i.a.} \cdot \underbrace{P_2' X_2'}_{\neq i.a.} \text{ nach } V_6.$$

$$(P_3' X_3' = P_2' X_2' \Leftrightarrow P_2', P_3', X_2', X_3' \text{ kollinear})$$



Wir projizieren  $\mathcal{P}_{g_3}'$  bzw.  $\mathcal{P}_{g_2}'$  aus  $P_3'$  bzw.  $P_2'$ ; dann sind wegen  $g_3' \pi g_2'$  die Büschel  $P_3', P_2'$  projektiv.

Es gilt sogar:  $P_3' \bar{\pi} P_2'$  (genau dann nämlich ist das Erzeugnis von  $P_3'$  und  $P_2'$  eine Gerade  $g'$ ).

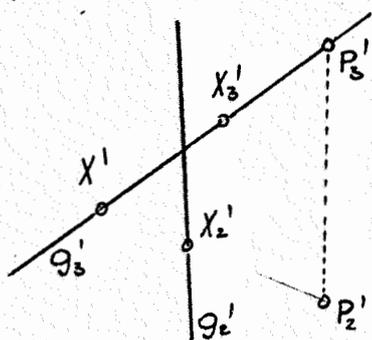
Der gemeinsame Büschelstrahl  $P_2' P_3'$  muß also selbstentsprechend sein und dies folgt aus Inzidenzen im Koord.-15-Eck so: Sei  $Y \in \mathcal{P}_{AB}$  so, daß  $Y_3'$  ( $\in g_3'$ ) mit dem gemeinsamen Büschelstrahl  $P_2' P_3'$  inzidiert.

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} Y_{01}' &= (P_0' P_1') \cdot (P_2' Y_3') \Rightarrow Y_{01}', P_2', Y_3' \text{ kollinear} \\ Y_{01}' &= (P_0' P_1') \cdot (P_3' Y_2') \Rightarrow Y_{01}', P_3', Y_2' \text{ kollinear} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow Y_2', Y_3', P_2', P_3' \text{ kollinear} \Rightarrow P_2' P_3' \text{ ist selbstentsprechend} \\
 & \Rightarrow P_2' \neq P_3' \Rightarrow \text{Erzeugnis ist eine Reihe } \mathcal{P}_g' .
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Konstruktionsvorschrift der Axonometrie erzwingt bei obigen Vs. für Y mit  $Y_3' = g_3' \cdot P_2' P_3'$  die Inzidenz von  $Y_2'$  mit  $P_2' P_3'$ ; eine Angabe der Art:  $Y_3' = g \cdot P_2' P_3'$ ,  $Y_2' \dots$  beliebig  $\in g_3'$  ist daher nicht möglich.

Wir haben zum Beweis des obigen Sachverhaltes den FS. der proj. Geom. in  $\pi'$  benützt. (FS gilt wegen  $\pi' = \pi_{PP}$ ). Weiters gilt:  $Y' \in (P_2' P_3')$  ist unter Ausnützung einer zusätzlichen Inzidenz, etwa  $Y' I g'$ , eindeutig festgelegt.

$\beta)$  Seien  $g_2', g_3'$  Gerade mit  $g_3' \perp P_3' \wedge g_2' \not\perp P_2'$ .

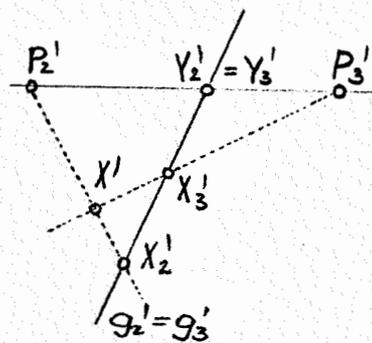


Für  $X \in g$  gilt:  $X' I g_3'$  (vgl. Figur).  
 $\Rightarrow X'$  durchläuft  $g_3'$ , also ist  $g' = g_3'$  eine Gerade.

Dabei folgt für Y mit  $Y_3' = P_3'$ :  $Y' I g_3'$   
 $Y' I Y_2' P_2'$ , also  $Y'$  eindeutig festgelegt.

Somit gilt:  $X' \in A' + B'$ .

$\gamma)$  Sei  $g_2' = g_3' \wedge g_j' \not\perp P_j'$ ,  $g_j' \dots$  Gerade.

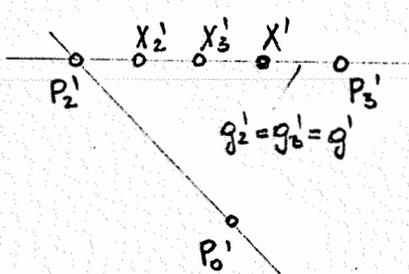


$g_2' \neq g_3' \Rightarrow g_2' \neq g_3' \Rightarrow P_2'(X_2') \neq P_3'(X_3')$ ,

Beh.:  $\neq$ ; denn:

$Y_2' = P_2' P_3' \cdot g_2' \Rightarrow Y_3' = Y_2'$  (Beweis analog zu  $\alpha$ ).  $\Rightarrow P_2' P_3'$  selbstentsprechend.

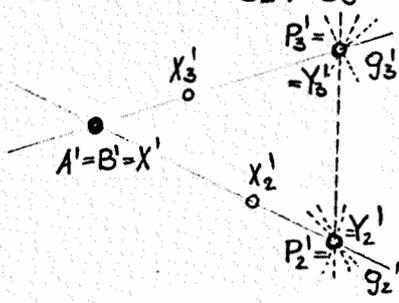
$\delta)$  Sei  $g_2' = g_3' \wedge P_2', P_3' \perp g_2'$ ,  $g_2' \dots$  Gerade



Zusätzl. Vs:  $g \not\perp P_2'$  ( $\Rightarrow$  der triviale Fall  $g = P_2' P_3'$  ist damit ausgeschlossen).

$\Rightarrow g \perp P_2' P_3' \wedge$  die Ebene  $g(P_2' P_3')$  enthält den Ausnahmepunkt Z.  $\Rightarrow g' = g_2'$  oder  $g'$  ist ein fester Punkt aus  $g_2'$ , also  $X' \in A' + B'$ .

ε) Seien  $g_2^1, g_3^1$  Gerade mit  $g_j^1 \perp P_j^1$ .



Für  $X \in \mathcal{P}_g$  mit  $X_j \neq P_j^1$  gilt:

$$X' = g_2^1 \cdot g_3^1$$

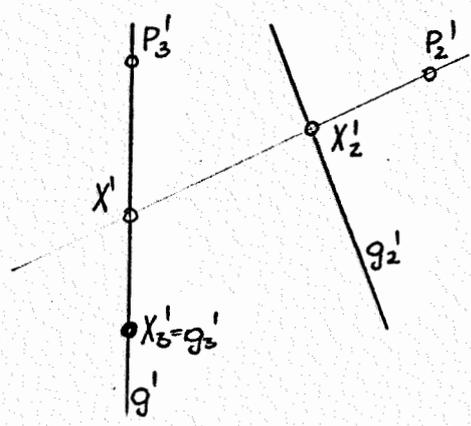
Für  $Y \in g$  mit  $Y_2 = P_2^1 \Rightarrow Y_3 = P_3^1$  (nach Bem. zu  $\alpha$ )  $\Rightarrow Y = Z$ ..Ausnahmepunkt.

Damit gilt:  $\forall X \in \mathcal{P}_g \setminus \{Y\}$  ist

$$X' = g_2^1 \cdot g_3^1, \text{ also auch für } A, B \neq Z$$

folgt  $A' = B' = X' \Rightarrow \mathcal{P}_g' = A' + B' = A' \Rightarrow g'$  ist ein Punkt.

φ) Z.B.  $g_3^1 \dots$  ein Punkt,  $g_3^1 \neq P_3^1$ ;  $g_2^1 \dots$  Gerade,  $g_2^1 \perp P_2^1$



$g' = X_3^1 \cdot P_3^1$  ( $X_3^1 \neq P_3^1$ ) vgl. Figur; also ist  $g'$  eine Punktreihe.

In allen weiteren Fällen gilt wie bisher ebenfalls:

$$\mathcal{P}_g' = A' + B'$$

Damit ist (II) gezeigt und die Axonometrie im allgemeinen Fall ist daher eine lineare Abbildung.

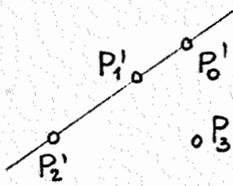
Satz 3 : Eine durch ein allgemeines ebenes axonometrisches Siebeneck bestimmte Axonometrie ist eine lin. Abbildung aus dem proj. PAPPUS-Raum auf eine proj. PAPPUS-Ebene zum gleichen Körper mit genau einem Ausnahmepunkt und ist daher kollinear zu einer Projektion. Der Ausnahmepunkt ist dadurch bestimmt, daß die axonometrischen Bilder seiner Projektion aus den Ecken des Koordinatentetraeders auf die gegenüberliegende Koordinatenebene in die axonometrischen Bildpunkte dieser Ecken fallen.

Bemerkung a): Wir haben bis jetzt bloß den Fall eines allgemeinen ebenen axonometrischen Siebenecks behandelt, also folgende Angabe:  $P_0^1, P_1^1, P_2^1, P_3^1$ ;  $E_{jk}^1, E_{je}^1, E_{jn}^1$  ( $\neq$ ) mit  $E_{rt}^1 \perp P_r^1 P_t^1$  und  $E_{rt}^1 \neq P_r^1, P_t^1$ ;  $P_j \neq$ , nicht kollinear.

Spezielle ebene axonometrische Siebenecke:

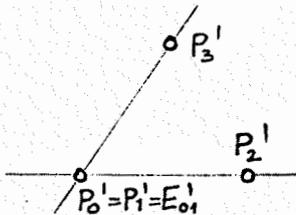
Wir untersuchen bloß solche Ausartungen des Siebenecks, für die sich im Sinne von Satz 3 die zugehörige Axonometrie Kollineation als Projektion ergibt.  $\Rightarrow P_j^1$  ( $j=0..3$ ) sind sicher nicht alle kollinear.

α) 3 Punkte, etwa  $P_0', P_1', P_2'$  sind kollinear und pw.  $\neq$ .  
 ( $\Rightarrow P_3' \notin P_0'P_1'$ ). Diese Angabe ist genau dann ver-



träglich mit Satz 3, wenn der Ausnahmepunkt  $Z$  von  $\alpha$  in der Ebene  $P_0P_1P_2$  allgemein angenommen wird und  $E_{jk}' E_{j\ell}' E_{jm}'$  beliebig mit  $E_{rt}' \perp P_r' P_t'$ ,  $E_{rt}' \perp P_r' P_t'$  vorgegeben sind.

β)  $P_3' \neq P_0' = P_1' \neq P_2' \neq P_3'$ . Diese Angabe ist verträglich mit Satz 3, wenn  $Z \perp P_0P_1$  angenommen wird.



$\Rightarrow E_{01}' = P_0' = P_1' \Rightarrow E_{01}'$  bedeutet in diesem Fall keine zusätzliche Angabe; das 7-Eck ist also durch  $P_j'$  und  $E_{jk}', E_{j\ell}', E_{jm}' \neq E_{01}'$  festzulegen, damit die zugehörige Axonometrie eine lineare Abb. ist.

δ) Die obigen Fälle α) und β) sind die einzig möglichen speziellen Angabemöglichkeiten für ein axonom. Siebeneck; denn:

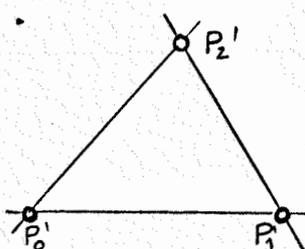
Ist  $P_0' = P_1' \neq P_2' = P_3' \Rightarrow P_3'$  sicher kollinear  $\Rightarrow \alpha$  sicher nicht koll. zu einer Projektion. (Es gäbe in diesem Fall windschiefe Sehstrahlen).

Ist  $P_0' = P_1' = P_2' \neq P_3' \Rightarrow P_3'$  sicher kollinear. Die Ebene  $P_0P_1P_2$  wird auf einen Punkt abgebildet (bei Kotierung möglich, aber nie bei Projektion).  $\Rightarrow$  Satz 3 ist nicht erfüllt.

Es gilt also

Satz 4: Eine Axonometrie bezüglich eines speziellen ebenen axonometrischen Siebenecks ist kollinear zu einer Projektion, wenn entweder von den vier Punkten  $P_j'$  höchstens einmal zwei zusammenfallen oder drei  $\neq$  Punkte kollinear sind. Dabei sind die Punkte  $E_{jk}'$  so vorzugeben, daß keiner auf einer projiz. Kante liegen.

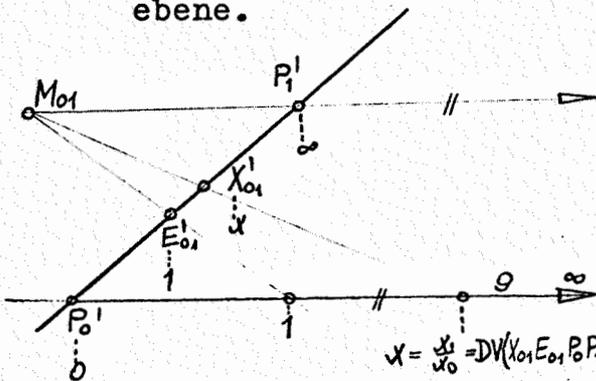
Bemerkung b): Bisher wurden Axonometrien mit  $Z$  allgemein behandelt. ( )  
 Sei nun etwa  $Z = P_3 \Rightarrow P_3$  hat kein Bild.



$X \neq Z$ : Sehstrahl  $XZ, \Rightarrow X_3 \in XZ \Rightarrow \forall Y \in XZ \setminus Z$  gilt:  $Y' = X' \Rightarrow X_3' = X'$

Die zur Axonom.  $\alpha$  gehör. Projektion von  $\Pi$  erfolgt aus der Ecke  $P_3$  auf die Gegenebene  $\bar{\pi} = P_0P_1P_2 \Rightarrow X_3'$  durch Eintragen der DV in Koordinatensystem  $\{P_0', P_1', P_2'; E_3'\}$  von  $\pi'$ .

Bemerkung c) : Speziell  $K=R$  ,  $\pi'$  elementare Anschauungs-  
ebene.



Übertragen des Doppelverhältnisses  
 $\frac{x_j}{x_k} = DV(X_{jk}, E_{jk}, P_j, P_k)$  auf die  
Koordinatenachse  $P_j'P_k'$  in  $\pi'$  mit  
Hilfe des "Meßpunktes"  $M_{jk}$  :  
z.B. Meßpunkt  $M_{01}$  zu  $P_0'P_1'$  :  
 $DV(P_0, E_{01}, P_0, P_1) = 0 \Rightarrow P_0' \dots 0$   
 $DV(E_{01}, E_{01}, P_0, P_1) = 1 \Rightarrow E_{01}' \dots 1$   
 $DV(P_1, E_{01}, P_0, P_1) = \infty \text{ laut Def.} \Rightarrow P_1' \dots \infty$

Man legt durch  $P_0'$  einen beliebigen Zahlstrahl  $g$  mit dem  
Nullpunkt in  $P_0'$  . ( $g$  ist isomorph zu  $R$  ). Die Reihe  
 $P_0'P_1'$  ist dann sicher perspektiv zum Zahlstrahl  $g$  , also  
] ein Zentrum  $M_{01}$  mit  $M_{01} \perp E_{01}'1$  ,  $M_{01} \perp P_1'\infty$  ( $P_1'\infty \parallel g$  ).  
 $\Rightarrow X_{01}' = P_0'P_1' \cdot M_{01}X_{01}'$

Nach Anwendung dieser Konstruktion auf mindestens 3  
Koordinatenachsen  $P_j'P_k'$  läßt sich das Koordinaten-15-Eck  
von  $X$  ergänzen.

#### 1.4 Lineare Abb. $\varphi_a$ aus einem affinen Punktraum $\Pi_a$ in eine proj. Punktebene.

Vgl. 0.3.: Jeder affine Raum läßt sich in einen proj. Raum  
gleicher Dimension einbetten.

$$\Pi_a \dots \text{Punktmenge } \mathcal{K}^a, \Rightarrow \Pi \dots \mathcal{K} = \mathcal{K}^a \cup \mathcal{K}^\infty$$

##### Definition:

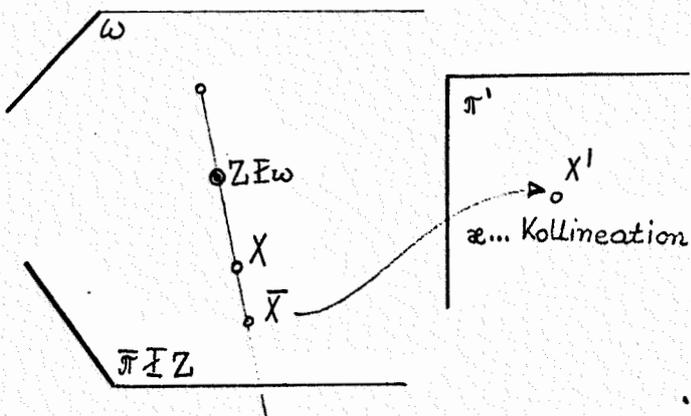
Eine Abb.  $\varphi_a$  aus der Punktmenge  $\mathcal{K}^a$  eines affinen Raumes  
in die Punktmenge  $\mathcal{K}'$  einer proj. Ebene  $\pi'$  heißt linear, wenn  
es eine lin. Abb.  $\varphi$  aus der Punktmenge  $\mathcal{K}$  des proj. Punkt-  
raumes  $\mathcal{K}^a \cup \mathcal{K}^\infty$  in die Punktmenge  $\mathcal{K}'$  von  $\pi'$  gibt mit  
 $\varphi_a = \varphi|_{\mathcal{K}^a}$  .

Fall 1 :  $\varphi$  bijektiv zu einer Kotierung  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \varphi_a$  bijektiv zu einer Kotierung ( $K$  bzw.  $K \cup \{\infty\}$  ).

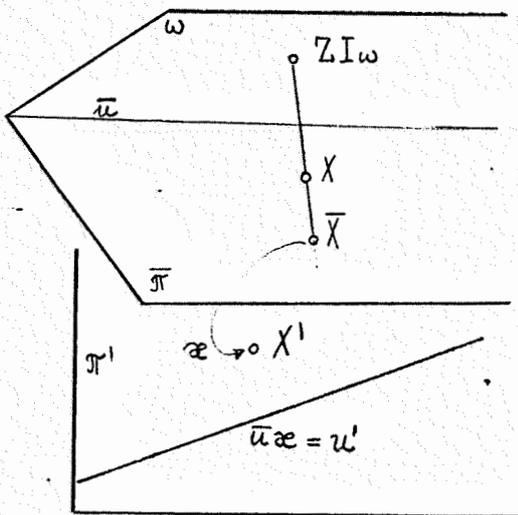
Fall 2 :  $\varphi$  kollinear zu einer Projektion  $\Rightarrow ]^* Z$   
 $\Rightarrow 2$  Unterfälle:

$\alpha) Z \perp \omega$

Jeder Punkt von  $\pi'$  ist Bildpunkt.  $\Rightarrow \varphi_a$  ist surjektive



Abbildung, kollinear zu einer Projektion. Dabei ist das  $\varphi$ -Bild eines Ferndreiecks ein Dreieck in  $\pi'$ .



$\beta) Z \nparallel \omega$  : Die Fernebene  $\omega$  ist

projizierend.

Die Ferngerade  $\bar{u}$  von  $\bar{\pi}$  trägt keinen Punkt  $\bar{X}$  als Ergebnis einer Proj. eines Punktes  $X \in \mathcal{P}^a$  aus dem Zentrum  $Z$ .  $\Rightarrow \varphi_a: \mathcal{P}^a \rightarrow \mathcal{P}'$  ist nicht surjektiv!

Zu  $\varphi_a$  gehört eine lin. Abb.  $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  mit  $\varphi = \alpha \circ \psi$  mit  $\psi: \bar{\pi} \rightarrow \bar{\pi}$  ...

Projektion und  $\alpha: \bar{\pi} \rightarrow \pi'$  ... Kollineation.

In dieser Erweiterung wird  $\omega \bar{\pi} = \bar{u}$  auf  $u' = u\alpha \in \pi'$  abgebildet. Schlitzt

man nun  $\pi'$  längs  $u'$  und beschränkt  $\varphi$  (und  $\alpha$ ) auf  $\mathcal{P}^a$ , dann ist die Beschränkung  $\varphi_a$  eine surjektive Abbildung auf die affine Ebene  $\mathcal{P}' \setminus \{P_{u'}\}$  und  $\alpha: \bar{\pi} \rightarrow \pi'$  ist eine Affinität.

Wegen  $\psi|_{\mathcal{P}^a}$  ... Parallelprojektion gilt somit:

$\varphi_a$  ist eine surjektive Abbildung auf die affine Ebene und das Ergebnis dieser Abbildung ist affin zu einer Parallelprojektion.

Anmerkung: Ist  $\pi'$  eine affine Ebene mit der Ferngeraden  $v'$  und ist  $\bar{u}\alpha = u' \neq v'$  dann ist  $\pi'$  bloß kollinear zu einer Parallelprojektion.

Satz 5: Ist  $\varphi_a = \varphi|_{\mathcal{P}^a}$  eine lin. Abbildung aus dem affinen Punktraum und ist  $\varphi$  kollinear zu einer Projektion, so ist das Bildfeld kollinear zu einer Zentralprojektion,

wenn drei nicht kollineare Fernpunkte bei  $\varphi$  nicht kollineare Bilder haben.

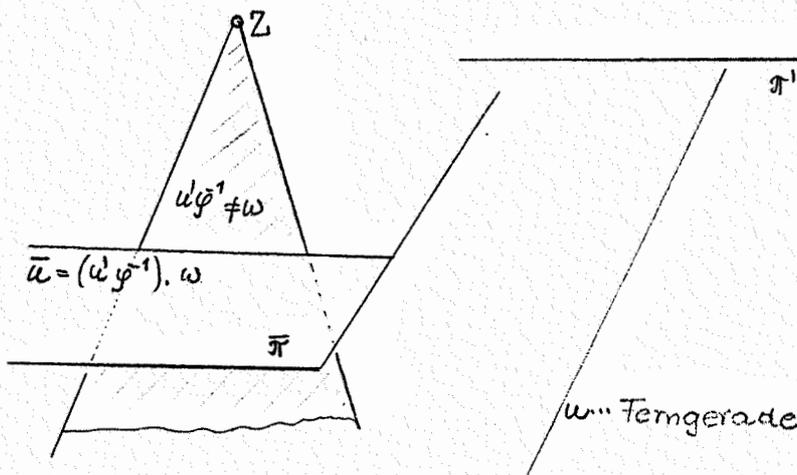
Besitzen dagegen 3 nichtkollineare Fernpunkte bei  $\varphi$  kollineare Bildpunkte, dann ist das Bildfeld  $\pi'$  kollinear zu einer Parallelprojektion.

Wählt man im letzten Fall die Bildgerade der projizierenden Fernebene als Ferngerade von  $\pi'$ , so ist das affine Bildfeld affin zu einer Parallelprojektion.

Bemerkung: Wir haben gezeigt: Für  $Z \notin \omega$  ist  $\varphi_a$  kollinear zu einer Zentralprojektion. Diese Aussage läßt sich verschärfen!

Beh.: Für  $Z \notin \omega$  ist  $\varphi_a$  affin zu einer bestimmten Zentralprojektion  $\psi_0$ .

Beweis: Der Ausnahmepunkt  $Z$  ist sicher Zentrum dieser Proj.  $\psi_0$ ; wir müssen also  $\pi$  geeignet wählen.



Zur Ferngeraden  $u'$  von  $\pi'$  gehört die  $\varphi$ -Faser  $u' \varphi^{-1}$  (d.i.  $\{ P \in \Pi \mid P' \in u' \}$ ). Sei  $\bar{u} = (u' \varphi^{-1}) \cdot \omega$  und werde  $\bar{\pi}$  durch  $\bar{u}$  gewählt. Dann ist  $\alpha: \bar{\pi} \rightarrow \pi'$  so beschaffen, daß  $\bar{u} \alpha = u'$ ;  $\alpha$  ist also eine fern-

punkt-treue Kollineation, also ist  $\alpha|_{\bar{\pi} \setminus \bar{u}}$  eine Affinität.

Es gilt damit: Zu jedem von  $\omega$  verschiedenen  $\bar{\pi}$  durch  $\bar{u}$   $\exists$  eine fernpunkt-treue Kollineation.

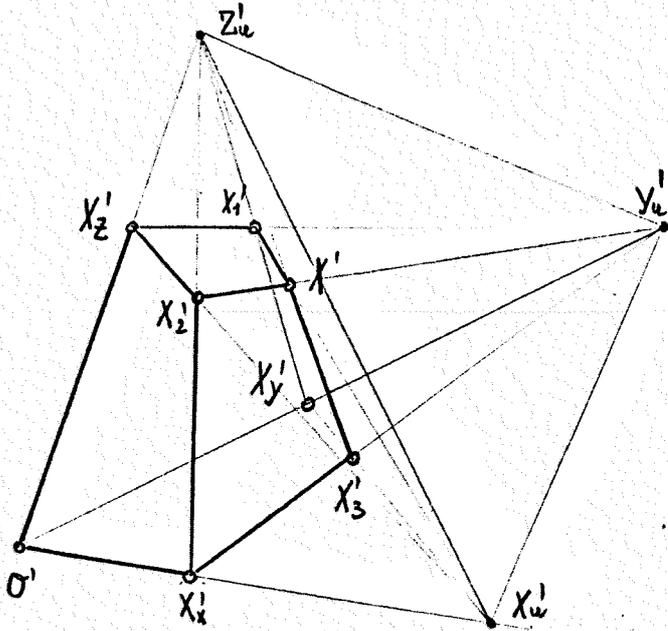
Anwendung von Satz 5 auf eine axonometrische Abbildung aus einem affinen Raum:

Gegeben: affines Koord.-System gemäß 0.4:  $\omega \dots x_0 = 0$ .

Die Grundpunkte  $P_0, P_1, P_2, P_3$  sollen i.f. mit  $\mathcal{O}, X_u, Y_u, Z_u$  bezeichnet werden.

In  $\pi'$  gelte statt  $P_0', P_1', P_2', P_3'; E_{jk}' E_{jc}', E_{jm}'$  mit  $j=0$  die Bezeichnung  $\mathcal{O}', X_u', Y_u', Z_u'; E_{01}' =: E_x', E_{02}' =: E_y', E_{03}' =: E_z'$ .

Wir haben festgestellt, daß das Ergebnis bei  $\varphi_a$  affin zu gewissen Zentralprojektionen ist (unter Vs.:  $\{O', X'_u, Y'_u, Z'_u\}$  ist ein Viereck in  $\Pi$ ).



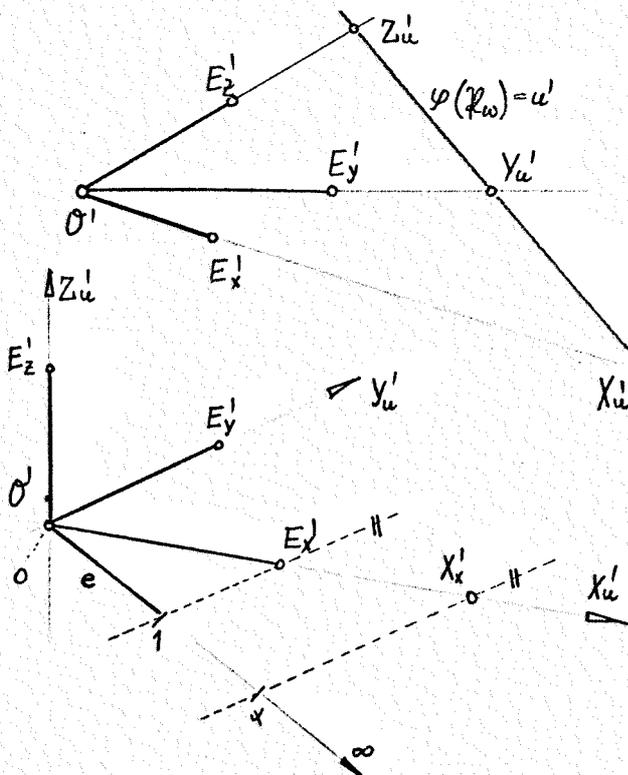
Sei  $X$  (d.h.  $X$ ). Aus dem Koord.-15-Eck von  $X$  in  $\Pi$  entsteht durch Weglassen der in  $\Pi$  liegenden Punkte  $X, Y, Z$ ;  $X, X, X$  das "affine Koordinatenachseck" ("Koordinatenparallelefläche"). Aus diesem lassen sich alle Koordinaten von  $X$  gewinnen:

$$\left. \begin{aligned} X_{01} &=: X_x \neq X_u \\ X_{02} &=: X_y \neq Y_u \\ X_{03} &=: X_z + Z_u \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{X_1}{X_0} =: x = DV(X_{01}, E_{01}, P_0, P_1) = DV(X_x, E_x, O, X_u) = TV(X_x, E_x, O) \\ &= DV(X'_x, E'_x, O', X'_u) \text{ laut Def. von } \alpha \\ &\Rightarrow X'_x. \text{ (Analog für } X'_y, X'_z \text{)}. \end{aligned}$$

Sonderfälle:

Sei  $X'_u, Y'_u, Z'_u$  kollinear (d.h.  $Z \in \omega$ ),  $\pi'$  sei eine affine Ebene mit der Ferngeraden  $u'$ .



Dann ist nach Satz 5 das Ergebnis der Abb.  $\varphi$  sicher kollinear zu einer Parallelprojektion. Gilt außerdem:  $u' = \varphi(\omega)$ , dann ist das Ergebnis bei  $\varphi$  sogar affin zu einer Parallelprojektion.

In diesem Fall erfolgt die Angabe der Axonometrie  $\varphi_a$  durch ein "ebenes Dreibein"  $\{O', E'_x, E'_y, E'_z\}$  (unter Zugrundelegung eines Parallelkoordinatensystems in  $\Pi$ ).

Z.B.:  $\pi'$ ... proj.abgeschl.Anschauungsebene,  $u'$ ... Ferngerade von  $\pi'$  .

Die Konstruktion von  $X' \dots x = DV(X'_x, E'_x, \sigma', X'_u) = TV(X'_x, E'_x, \sigma')$  kann durch Teilverhältnisübertragung mittels Zahlstrahl erfolgen. (vgl.Figur).

1.5 Lineare Abb. aus dem euklid.Punktraum  $\mathbb{P}^e$

( $\mathbb{P}^e$ ... Punktmenge von  $\mathbb{P}_\alpha(\mathbb{R})$  mit: in der proj.Erweiterung  $\mathbb{P}$  in der Fernebene  $\omega$  eine absolute (elliptische) Polarität  $\pi_\omega$  ; vgl.O.7).

Vs: Die Bildebene  $\pi'$  sei zunächst eine projektive Ebene.

Definition: Eine Abb. aus  $\mathbb{P}_e$  heiÙe "linear", wenn sie im Sinne von Satz 5 eine lin.Abbildung  $\varphi_a$  aus dem zu  $\mathbb{T}_e$  gehöri-gen affinen Punktraum  $\mathbb{P}^a$  ist.

Da  $\varphi_a$  Beschränkung einer lin.Abb.  $\varphi$  aus dem proj.abgeschlossenen euklid.Raum  $\mathbb{T}_e$  , also im wesentl. eine Projektion ist, und daher  $\mathbb{T}_e$  und  $\pi'$  gleichen Grundkörper besitzen, muß hier gelten:  $\pi'$  ist eine reelle proj.Ebene (  $\pi'(\mathbb{R})$  ).

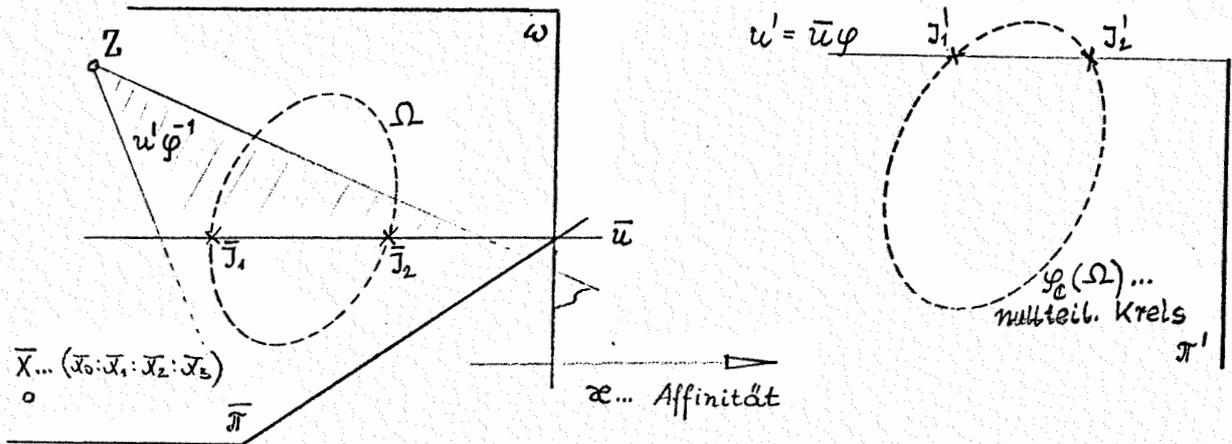
Vs.:  $\pi'$  sei eine proj. abgeschlossene euklid.Ebene  $\pi'_e$  . Wir fragen nach den Bedingungen, unter welchen die lin.Abb.  $\varphi_a: \mathbb{T}_e \rightarrow \pi'_e$  ähnlich zu einer Projektion ist.

Fall 1 :  $Z \notin \omega$  .  $\Rightarrow \varphi_a$  ist sicher affin zu gewissen Zentralprojektionen. Nur unter diesen ist nach solchen Zentralproj. zu suchen, zu denen  $\varphi_a$  ähnlich ist.

1.Weg : Algebraischer Abschluß  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  ; wir erweitern den Definitionsbereich von  $\varphi$  auf  $\mathbb{T}_e(\mathbb{C})$ :

Dazu: Erweiterung der Zentralprojektion  $\psi \rightarrow \psi_c: \mathbb{T}(\mathbb{C}) \rightarrow \bar{\mathbb{T}}(\mathbb{C})$   
Erweiterung der Kollineation  $x \rightarrow x_c: x'_j = \sum_{\substack{i,j,k \\ \in \mathbb{R}}} a_{ijk} \bar{x}_k$  .

$\alpha$  ist Ähnlichkeit  $\Leftrightarrow \alpha_c$  bildet die abs. Punkte  $\bar{J}_1, \bar{J}_2$  von  $\bar{\pi}$  ab auf die abs. Punkte  $J'_1, J'_2$  von  $\pi'$  ! Ist dies der Fall, dann führt  $\varphi_c = \psi_c \circ \alpha_c$  den abs. Kegelschnitt  $\Omega$  von  $\pi_e$  in einen nullteiligen Kreis  $\varphi_c(\Omega)$  in  $\pi'$  über.  
 (  $J'_1, J'_2 \mid I \varphi_c(\Omega)$  )



2. Weg : Zu  $\Omega$  gehört die absolute Polarität  $\pi_\omega$ , zu  $\varphi_c(\Omega)$  gehört das  $\varphi$ -Bild dieser abs. Polarität  $\pi'_\omega$ .

Somit gilt: Zu  $\varphi_c$  gehört eine Ähnlichkeit  $\alpha \Leftrightarrow$  das  $\varphi_c$ -Bild der abs. Polarität ist das Polarsystem eines nullteiligen Kreises in der euklid. Ebene  $\pi'_e$ .

Auf  $\bar{u}$  wird durch  $\pi_\omega$  die absolute Involution  $k_j$ . Punkte induziert. Stimmt das  $\alpha$ -Bild dieser abs. Inv. auf  $\bar{u}$  mit der auf  $u'$  in  $\pi'_e$  gegebenen abs. Involution überein, dann ist das Ergebnis bei  $\varphi_c$  ähnlich zu einer Zentralprojektion.

Anmerkung: Für  $\bar{\pi}$  aus dem Büschel  $\bar{u}(\bar{\pi}) \setminus \{\omega\}$  ergibt sich keine Einschränkung, (wir haben bloß  $\bar{u}$  und die abs. Inv. auf  $\bar{u}$  verwendet) !  $\Rightarrow$  I.a. ist  $\alpha$  keine Ähnlichkeit und diese Eigenschaft von  $\alpha$  kann durch eine allgemeine vollständige Angabe der lin. Abb.  $\varphi_c$  nicht erzwungen werden.

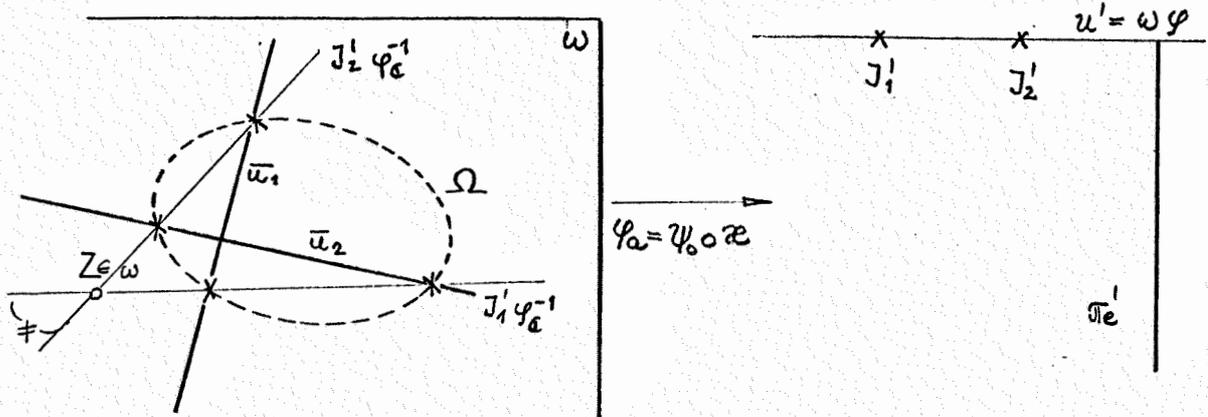
Fall 2 :  $Z \mid \omega \Rightarrow \varphi_c$  unter Umständen affin zu einer Parallelprojektion  $\psi$  (und zwar dann, wenn  $\varphi(\varphi_\omega) = u'$ ... Ferngerade von  $\pi'$ ).

Vs.:  $\pi'$  sei eine proj. abgeschl. euklid. Ebene  $\pi'_e$ .

Beh.:  $\exists \psi_0: \pi_e \rightarrow \pi'_e$  so, daß  $\alpha: \pi_e \rightarrow \pi'_e$  ... Ähnlichkeit (dabei ist  $\varphi_c = \psi_0 \circ \alpha$ ).

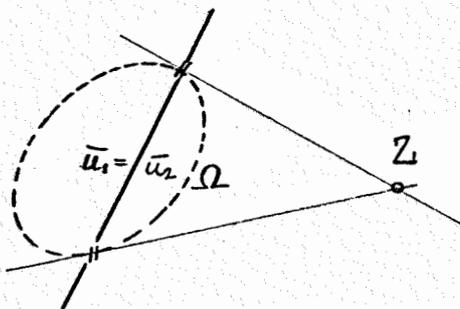
Beweis: Wir erweitern  $\varphi$  ins Komplexe:  $\varphi_c$ ;  $\Rightarrow$

Auf  $u'$   $\exists$   $J_1', J_2'$  ... abs. Punkte von  $\pi_e'$ ;  $J_1', J_2'$  sind kj. imaginär  $\Rightarrow$  die zugehörigen  $\varphi_e$ -Fasern  $J_1' \varphi_e^{-1}, J_2' \varphi_e^{-1}$  sind ein Paar kj. imaginären (also sicher  $\neq$ ) Geraden in  $\omega$ .



In  $\omega$ :  $Z$  reell, daher  $Z \notin \Omega \Rightarrow \Omega \cap (J_j' \varphi_e^{-1}) = \{4 \text{ Punkte}\}$ . Diese Schnittpunkte bilden i.a. 2 Paare kj. imaginärer Punkte (vg. Proj. Geom.)  $\Rightarrow \exists$  genau 2 reelle Verbindungsgeraden  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ . Wir benützen nun  $\bar{u}_1$  oder  $\bar{u}_2$  als Ferngerade einer reellen Ebene  $\bar{\pi}_j$  ( $j=1$  oder  $2$ ), dann führt  $\alpha$  die abs. Punkte von  $\bar{\pi}_j$  über in die abs. Punkte  $J_1', J_2'$  von  $\pi_e'$ ; also ist die Parallelprojektion  $\psi_0: \bar{\pi}_e \rightarrow \bar{\pi}_j$  ( $j=1$  oder  $2$ ) ähnlich zu  $\varphi_\alpha: \bar{\pi}_e \rightarrow \pi_e'$ .

Ergebnis: Wählt man  $\bar{\pi}$  aus einer von i.a. 2 bestimmten Stellungen aus, dann ist  $\varphi_\alpha$  ähnlich zu einer Parallelprojektion.



Speziell: Sind  $J_1' \varphi_e^{-1}, J_2' \varphi_e^{-1}$  zwei Tangenten von  $\Omega$ , so ist  $\bar{u}_1 \equiv \bar{u}_2$  ( $\Rightarrow Z$  ist notwendig der abs. Pol von  $\bar{u}_1$ ) und  $\exists^*$  eine Ebenenstellung, aus welcher  $\bar{\pi}$  auszuwählen ist.  $\Rightarrow \varphi_\alpha$  ist ähnlich zu einer Normalprojektion.

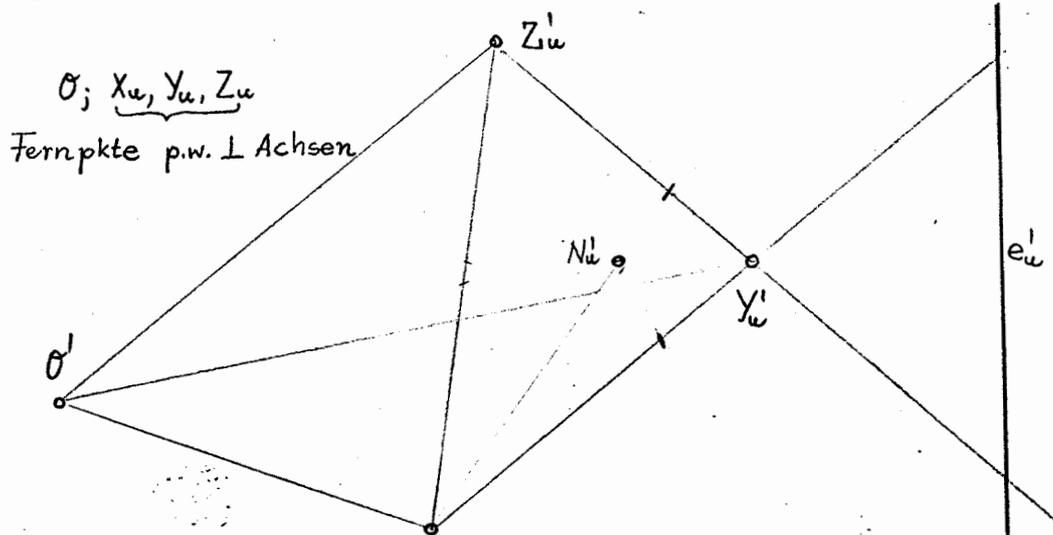
( $\exists$  2  $\neq$  Ebenenstellungen, dann ist  $\varphi_\alpha$  ähnlich zu einem Schrägriß).

Satz 6 : Besitzen bei einer linearen Abb.  $\varphi_a = \varphi / \mathcal{K}^e$  in eine euklid. Ebene  $\pi'$  drei nicht kollineare Fernpunkte bei  $\varphi$  nicht kollineare Bildpunkte, so ist  $\varphi_a$  genau dann ähnlich zu einer Zentralprojektion, wenn das Bild der absoluten Polarität  $\pi_\omega$  in  $\pi$  das Polarsystem eines nullteiligen Kreises in  $\pi'$  ist.

Ist dagegen  $\varphi_a$  affin zu einer Parallelprojektion, so ist  $\varphi_a$  immer auch ähnlich zu einer gewissen Parallelprojektion, wobei die Stellung der Bildebene  $\bar{\pi}$  der Parallelproj. bei Schrägriß zweideutig und bei Normalriß eindeutig bestimmt ist.

Anwendung von Satz 6 auf die Axonometrie  $\alpha_e$  aus  $\pi_e$  in eine proj. Ebene  $\pi'$  mit euklid. Metrik.

Gegeben: Kartes. Koord.-System in  $\pi_e$  (vgl. 0.7)

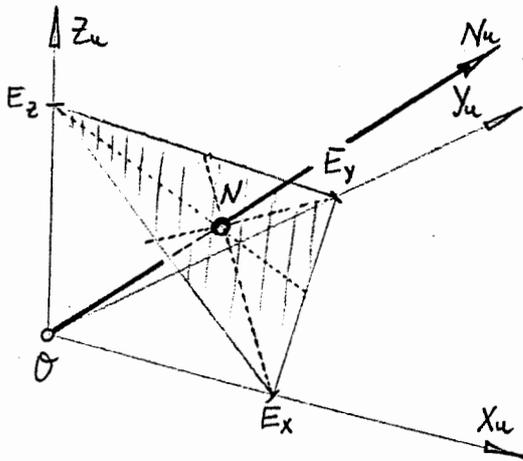


Fall 1:  $\alpha_e$  ähnlich zu Zentralprojektion ( $Z\mathcal{F}\omega$ )  $\Leftrightarrow$  wenn  $\alpha_e(\pi_\omega)$  in der komplexen Erweiterung das Polarsystem eines nullteiligen Kreises in  $\pi'$  ist.  $\Rightarrow$  Wir suchen daher die Bildpolarität von  $\pi_\omega$ .

Vgl. 0.6 : Eine Polarität ist festgelegt durch ein Poldreieck und einmal Pol - Polarare.

$\{X_u, Y_u, Z_u\}$ ... Poldreieck von  $\Omega \Rightarrow X'_u, Y'_u, Z'_u$  bilden ein Dreieck ("Fluchtpunkt-Dreieck"), nämlich das Poldreieck für die Bildpolarität.

Wir benötigen noch ein Paar Pol-Polare:



Dazu benützen wir die Ebene  $E_x E_y E_z$  ("Einheitsebene"  $\varepsilon$ ). Der Lotfußpunkt  $N$  aus  $O$  auf  $\varepsilon$  ist der Schwerpunkt des (gleichs.) Dreiecks  $\Delta E_x E_y E_z$ .

$\Delta E_x E_y E_z$ .

$\Rightarrow N$  ist der "Dreieckspol" der Ferngeraden  $e_u$  von  $\varepsilon$  bezügl.

$\Delta E_x E_y E_z$ , (vgl. Proj. Geom.).

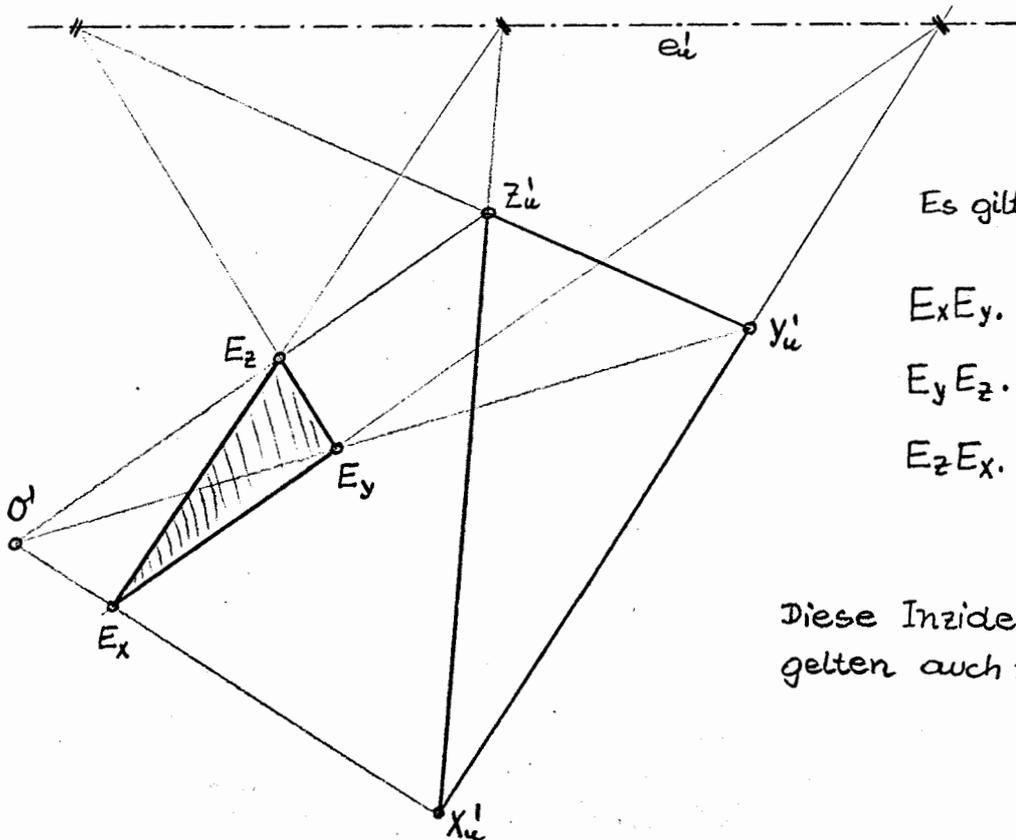
Wir projizieren  $\varepsilon$  aus  $O$  in die Fernebene  $\omega$ :

$\Rightarrow E_x \rightarrow X_u, E_y \rightarrow Y_u, E_z \rightarrow Z_u, e_u$  bleibt fest,  $N \mapsto N_u$ ; dabei ist  $N_u$  Dreieckspol von  $e_u$  bezügl.  $\Delta X_u Y_u Z_u$ .

Wegen  $ON \perp \varepsilon$  sind  $N_u$  und  $e_u$  abs. polar;  $N_u \perp$  mit keiner Seite von  $\Delta X_u Y_u Z_u$ ,  $e_u \perp$  mit keiner Ecke.

$\Rightarrow N_u, e_u$  sind ein zuläss. Paar Pol-Polare  $\Rightarrow N'_u, e'_u$  vervollständigt die Angabe der Bildpolarität.

Konstruktion von  $e'_u, N'_u$  bei nicht ausgeartetem axonometrischen Angabe-7-Eck: (Zunächst:  $E'_x, E'_y, E'_z$  nicht kollinear).



Es gilt:

$E_x E_y \cdot Y_u X_u \perp e_u$

$E_y E_z \cdot X_u Z_u \perp e_u$

$E_z E_x \cdot Z_u X_u \perp e_u$

Diese Inzidenzen gelten auch in  $\pi$ !

Daraus folgt:  $e_u'$  ist die DESARGUES-Achse der Dreiecke  
 $\Delta X_u' Y_u' Z_u'$  und  $\Delta E_x' E_y' E_z'$  !

Speziell:  $E_x', E_y', E_z'$  kollinear  $\implies \mathcal{E}$  ist projizierend  $\implies$   
 $\implies e_u' = E_x' E_y'$  .

$N_u'$  ist Dreieckspol von  $e_u' \implies$  . Durch  $X_u', Y_u', Z_u'$  ;  $N_u', e_u'$  ist  
 $\alpha(\mathcal{P}\omega)$  bestimmt.

Fall 2 :  $Z I \omega$  ;  $\alpha(\mathcal{P}\omega) = u'$ ... Ferngerade von  $\mathcal{P}'$  .

In diesem Fall ist  $\alpha_a$  stets affin zu einer Parallelprojektion, aber auch stets ähnlich zu gewissen Parallelprojektionen (vgl. Satz 6).

Satz 7 : Eine axonometrische Abbildung aus einem euklid.

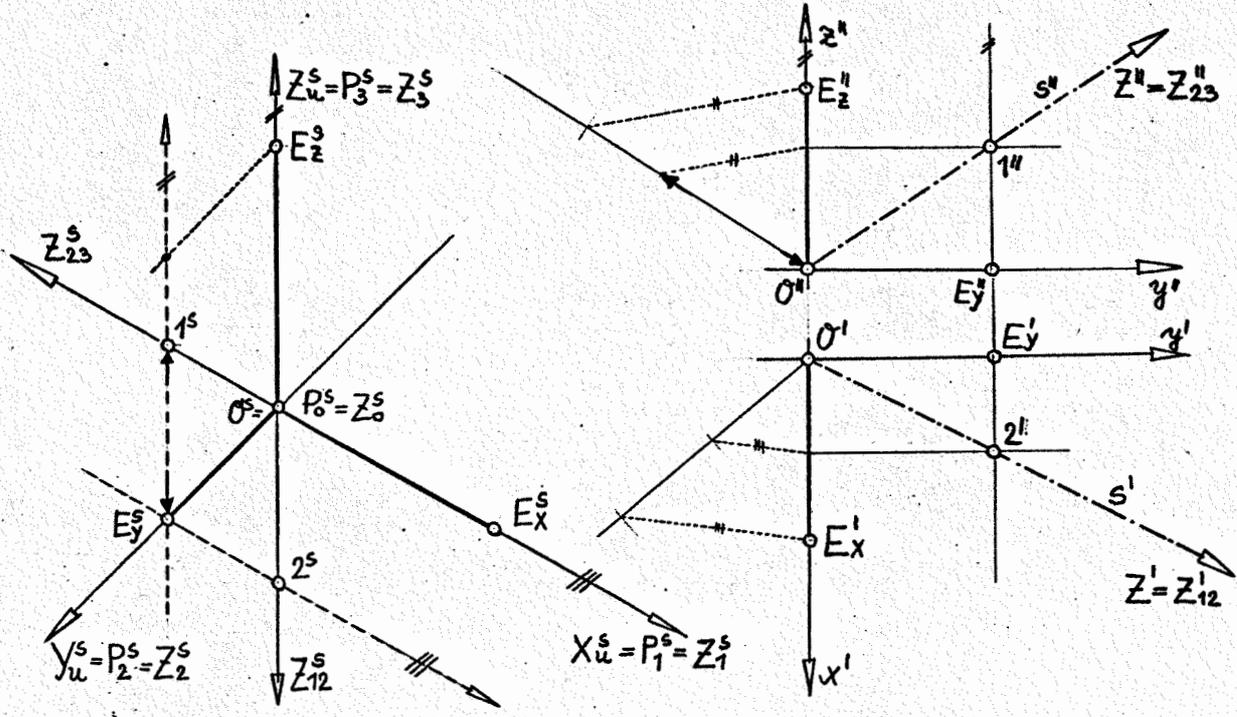
Punktraum in eine reelle projektive Ebene  $\mathcal{P}'$  bei der ein Fluchtpunkt-Dreieck existiert, ist genau dann ähnlich zu einer Zentralprojektion, wenn die Polarität in  $\mathcal{P}'$  bestimmt durch das Fluchtpunkt-Dreieck als Poldreieck und dem Bild der Ferngeraden  $e_u$  der Einheitsebene mit ihrem Dreieckspol bezüglich des Fluchtpunkt-Dreiecks als einmal Polare - Pol das Polarsystem eines nullteiligen Kreises in  $\mathcal{P}'$  ist.

Eine Axonometrie mit 3 kollinearen Achsenfluchtpunkten, welche auf der Ferngeraden von  $\mathcal{P}'$  liegen, ist stets ähnlich zu einer gewissen Parallelprojektion; für allgemeine Axonometrie ist die Stellung der Bildebene zweideutig, für normale Axonometrie ist sie eindeutig (vgl. Satz von POHLKE).

Bemerkung a) : Rekonstruktion der Sehstrahlrichtung und der Bildebenenstellung aus dem axonometrischen Bild.

Vs.  $Z I \omega$  ;  $\mathcal{P}' =: \mathcal{P}^s$  proj. Anschauungsebene, wobei die Ferngerade  $u^s$  von  $\mathcal{P}^s$  das axonometrische Bild  $\alpha(\omega)$  von  $\omega$  ist. ( $\implies \alpha$  sicher affin zu einer  $\parallel$ -Projektion, vgl. Satz 5).

$\Pi_e$  sei bezogen auf ein kartes. Koord. System.



Rekonstruktion von Z :

Für den Ausnahmepunkt Z gilt nach Satz 3 :

Z| $\omega$  laut Vs., also ist  $Z_0 = Z = \dots$  und der Aufriß  $Z'' = Z_0''$

von Z ist identisch mit  $Z_{23} = Z_{23}''$  .

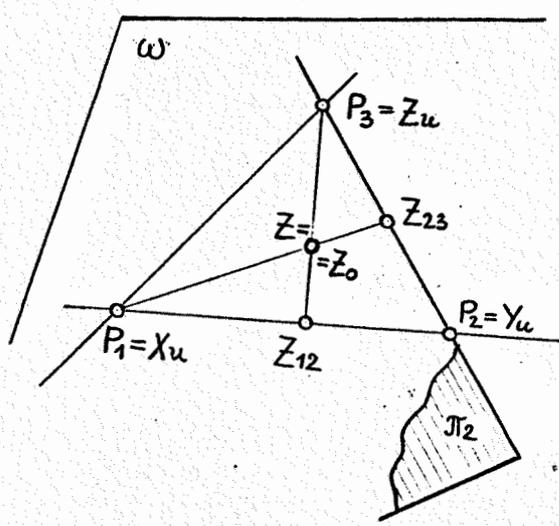
$Z_{23} = (Z_0 P_1) \cdot (P_2 P_3) \Rightarrow Z_{23}^s \Rightarrow$  mittels Teilverh.-Übertragung (vgl. Figur):  $Z_{23}'' = Z''$

Für den Grundriß Z' von Z gilt analog:

$Z' = Z_0' = Z_{12}' = Z_{12}$

$Z_{12} = (Z_0 P_3) \cdot (P_1 P_2) \Rightarrow Z_{12}^s \Rightarrow$  mittels Teilverh.Übertragung:  $Z_{12}' (= Z')$  .

Damit gilt: Die geg. Axonometrie  $\alpha$  ist affin zur Parallelprojektion in Richtung  $s = OZ$  auf eine belieb. Ebene  $\pi \subset \pi_e$  .

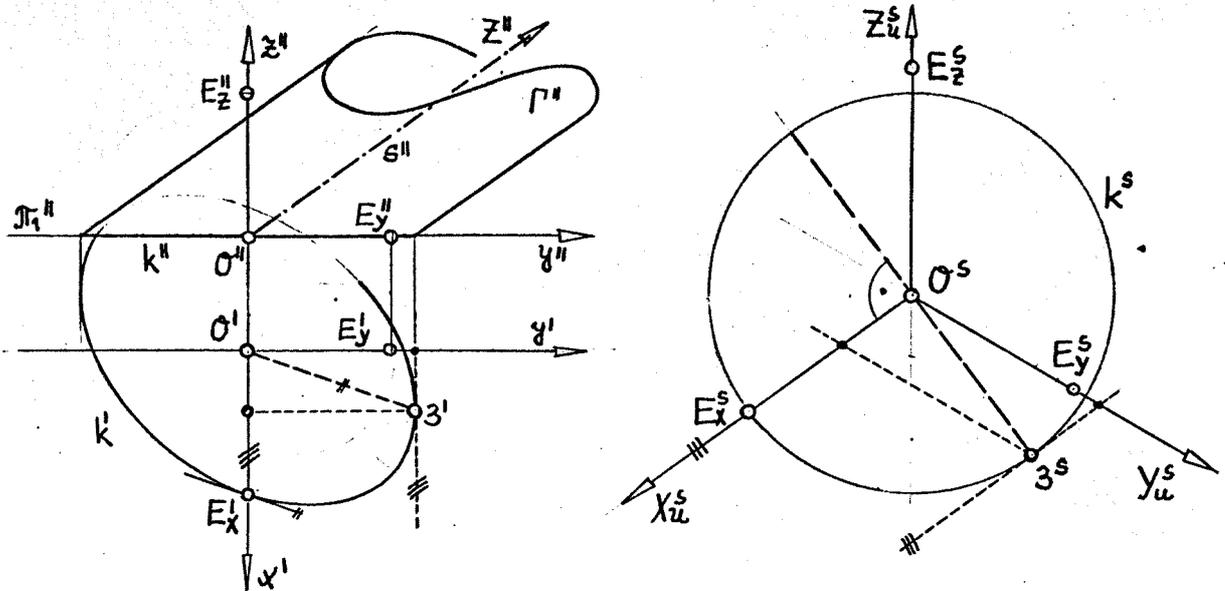


Rekonstruktion von  $\pi$  so, daß  $\alpha$  ähnlich zur //Proj. auf  $\pi$  :

Wir benützen zunächst eine Koordinatenebene als Hilfs-Bildebene (etwa  $\pi_1$  , falls  $s = OZ \not\parallel \pi_1$  ).

Nach Satz 5 ist  $\alpha$  sicher affin zur Proj. auf  $\pi_1$  .

Wir wählen nun in  $\pi^s$  einen Kreis  $k^s$  nun  $O^s$  (etwa durch  $E_x^s$ ) als  $\alpha$ -Bild einer Ellipse  $k$  in  $\pi_1$  .

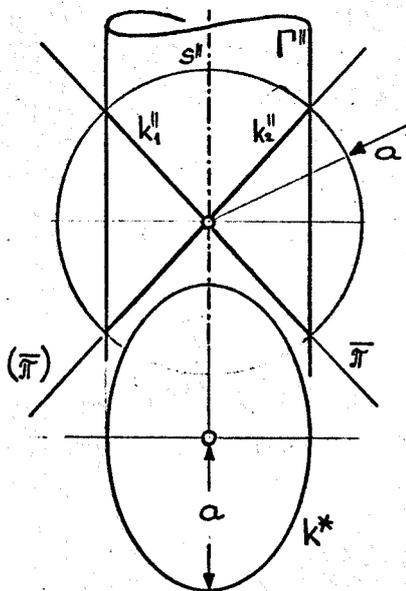


Zur Rekonstruktion von  $k \subset \pi_1$  wird ein  $h$  Durchmesserpaar (z.B.  $O^s E_x^s, O^s 3^s$ ) von  $k^s$  in den Grundriß übertragen  $\Rightarrow k' = k$ .

Legt man durch  $k$  einen Zylinder  $\Gamma$ , dessen Erzeugenden Sehstrahlrichtung besitzen, dann ist der Kreis  $k^s$  das axonometrische Bild jedes ebenen Schnittes von  $\Gamma$  der nicht  $\parallel s$  ist. Wählt man nun  $\bar{\pi}$  als eine der Kreisschnittebenen von  $\Gamma$ , dann ist  $\alpha$  sogar ähnlich zur  $\parallel$ -Proj. auf  $\bar{\pi}$ .

Konstruktion der Kreisschnittebenen von  $\Gamma$ :

O.B.d.A. kann angenommen werden, daß  $k \subset \pi_1$  kein Kreis ist; (andernfalls ist  $\alpha$  schon ähnlich zum  $\parallel$ -Riß auf  $\pi_1$ ). In diesem Fall konstruiert man einen Normalschnitt  $k^*$  von  $\Gamma$ . Ist  $k^*$  ein Kreis, dann ist  $\Gamma$  ein Drehzylinder und  $\bar{\pi}^*$  Kreisschnittebenenstellung (nämlich die zu  $k^*$  gehörige);  $\alpha$  ist dann eine normale Axonometrie.



Ist  $k^*$  eine Ellipse, dann gewinnt man Kreisschnitte von  $\Gamma$ , wenn man  $\Gamma$  mit jener Kugel schneidet, die  $\Gamma$  in den Hauptscheiteln von  $k^*$  berührt. (Die Schnittkurve 4.Ord.  $c^{(4)}$  zerfällt dann nämlich in zwei auf der betref. Kugel liegende Kegelschnitte, also Kreise  $k_1, k_2$ ). Die bezüglich der Hauptsymmetrieebene von  $\Gamma$  symmetrischen Ebenen von  $k_1, k_2$  (vgl. Figur) geben die gesuchten Stellungen von  $\bar{\pi}$  an, für welche die

// -Proj. in Richtung  $s$  ähnlich ist zur Axonometrie  $\alpha$ .

Bemerkung b): (Vgl. Anwendung von Satz 6, Fall 1)

Geg.: euklid. Raum  $\mathbb{P}_e$ ,  $\alpha$  ... axonometrische Abbildung;  
 $\pi^c =: \pi^c$  ... proj. Anschauungsebene,  $\mathcal{K}^c$  ... Punktmenge  
von  $\pi^c$ .

Vs.:  $Z \notin \omega \implies X_u^c, Y_u^c, Z_u^c$  ... "Fluchtdreieck" (nicht alle Ecken  
notwendig eigentlich).

$\alpha$  ist sicher affin zu einer Projektion aus dem Ausnahme-  
punkt  $Z$  und unter Umständen sogar ähnlich zu einer  
Projektion; nämlich dann, wenn die Polarität, welche durch  
das Fluchtdreieck als Poldreieck und durch  $e_u^c$  mit  $e_u = \omega \cdot \varepsilon$   
( $\varepsilon$  ... Einheitsebene) und  $N\varepsilon$  (Dreieckspol von  $e_u^c$  bezügl. des  
Fluchtdreiecks) als Polare-Pol bestimmt ist, Polarsystem eines  
nullteiligen Kreises ist.

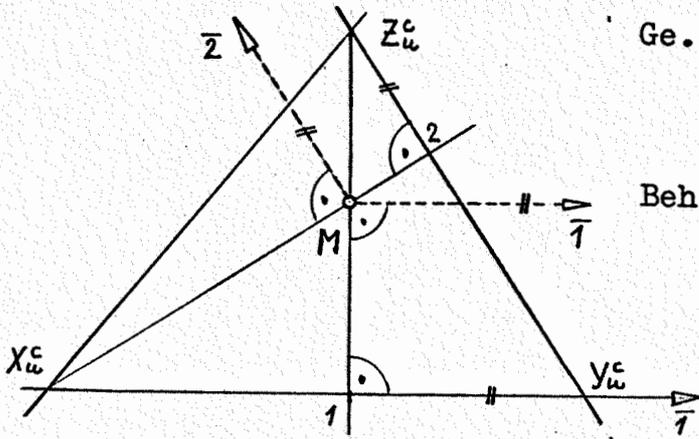
Wir stellen nun die Frage nach den frei wählbaren Angabe-  
elementen des axonometrischen 7-Eckes, so daß nach Ver-  
vollständigung dieses 7-Eckes die zugehörige Axonometrie  
ähnlich zu einer Zentralprojektion ist.

Dazu gilt:

Satz 8: Kennt man  $\mathcal{O}^c = P_0^c$ , das Fluchtdreieck und das Bild  
eines Einheitpunktes auf einer nichtprojizierenden Kante  
und ist das Fluchtdreieck spitzwinkelig, so können die  
restlichen beiden Einheitpunkt-Bilder so ergänzt werden, daß  
die Axonometrie ähnlich zu einer Zentralprojektion ist.  
(Es existieren i.a. vier Lösungen für die Ebene  $\bar{\pi}$  der  
Projektion).

Zwischenbem.: In 0.6 wurde gezeigt: Jedes Poldreieck eines  
nullteiligen Kreises ist spitzwinkelig. (Die Einschränkung  
der Angabe des Fluchtdreiecks auf spitzwinkelige Dreiecke  
ist daher eine notwendige Voraussetzung für "ähnliche".)  
Außerdem gilt (vgl. 0.6, Folg. 4): Der Mittelpunkt  $M$  des  
Polarsystems eines nullteiligen Kreises ist stets der Höhen-  
schnittpunkt jedes Poldreiecks.

Davon gilt auch die Umkehrung:



Ge.: Polarität  $\pi$  ; spitzwinkel. Poldreieck, dessen Höhenschnittpunkt M der Mittelpunkt von  $\pi$  ist.

Beh.:  $\pi$  ist damit das Polarsystem eines nullteiligen Kreises.

Zu zeigen: "nullteilig" :

Für ein einziges Poldreieck müssen die Involutionen kj.Punkte auf allen drei Seiten elliptisch sein; d.h. auf jeder Seite müssen einander die Paare der Involution trennen.

Z.B. auf  $X_u^c Y_u^c$  :  $(X_u^c, Y_u^c)$  trennt  $(1, \bar{1})$  mit 1... Zentralpunkt  $(1 = (M Z_u^c). (X_u^c Y_u^c))$  und  $\Delta X_u^c Y_u^c Z_u^c$  spitzwinkelig.

Zu zeigen: "Kreis":

Die Invol. auf der Ferngeraden  $u^c$  von  $\pi^c$  muß die absolute sein, also muß die Involution kj.Durchmesser die Rechtwinkelinvolution sein; ( $\bar{\bar{}}$  also sicher zwei Rechtwinkelpaare).

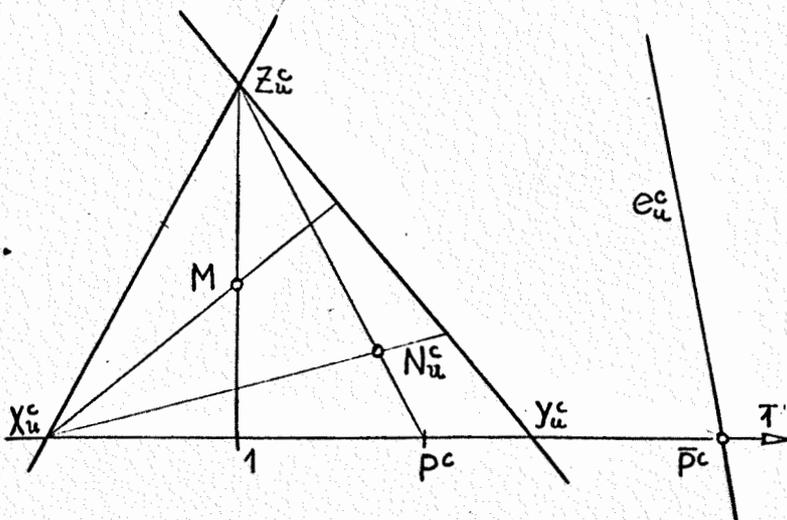
Hier gilt:  $(M1, M\bar{1})$ ,  $(M2, M\bar{2})$  sind zwei Rechtwinkelpaare (vgl.Figur), also ist die Invol. kj.Durchmesser die Rechtwinkelinvolution.

⇒ Polarsysteme von nullteiligen Kreisen sind gekennzeichnet als Polaritäten, deren Mittelpunkt der Höhenschnittpunkt eines spitzwinkligen Poldreiecks ist.

Beweis von Satz 8:

Auf Grund der Zwischenbemerkung gilt: Durch das (spitzwinkelige) Fluchtdreieck allein ist ein Polarsystem eines nullteiligen Kreises bestimmt. (Der Höhenschnittpunkt ist automatisch der Mittelpunkt dieser Polarität).

In diese Polarität muß  $e_u^c$  und  $N_u^c$  als einmal Polare - Pol passen.



Für  $N_u^c$ ,  $e_u^c$  gilt also einerseits:

$H(X_u^c, Y_u^c; P^c, \bar{P}^c)$  mit  $P^c = (N_u^c Z_u^c)(X_u^c Y_u^c)$ ;  $\bar{P}^c = e_u^c \cdot (X_u^c Y_u^c)$  (da  $N_u^c$  Dreieckspol von  $e_u^c$  ist).

Andererseits ist  $(P^c, \bar{P}^c)$  auch ein Paar der Invol.

kj. Punkte auf  $X_u^c Y_u^c$  ;

denn:  $e_u^c \dots$  Ferngerade der Einheitsebene  $\varepsilon$  ;

$N_u^c \dots$  Normalenfernpunkt der Einheitsebene  $\varepsilon$  ,

$\implies$  Punktreihe  $e_u$  abs.kj. zu  $N_u^c \implies$  Punktreihe  $N_u^c Z_u^c$

abs.kj. zu  $\bar{P}$  (vgl. Figur)  $\implies P, \bar{P}$  sind abs.kjg. !

$\implies (P^c, \bar{P}^c)$  sind ein Paar der ellipt. Invol. auf  $X_u^c Y_u^c$  .

$\implies$  0.6 Aufgabe 3 mit  $X_u^c$  statt A ,  $Y_u^c$  statt B .

$\implies \exists^* (P^c, \bar{P}^c)$ .

Wir wiederholen diese Konstruktion für eine zweite Seite des Fluchtdreiecks:  $\exists^* (Q^c, \bar{Q}^c)$ .

(Für die 3. Seite ist die Konstruktion von  $(R^c, \bar{R}^c)$  nicht mehr nötig; da wegen der Eigenschaften der Dreieckspolaren  $P^c, \bar{P}^c, Q^c, \bar{Q}^c, R^c, \bar{R}^c$  die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden müssen).

$P^c, \bar{P}^c, Q^c, \bar{Q}^c$  haben vier Verbindungsgeraden, die als mögliche Bilder  $e_u^c$  von  $e_u$  fungieren können.

Wählt man eine Lösung  $e_u^c$  aus, (wobei  $N_u^c$  dann als

Dreieckspol zu  $e_u^c$  bezügl.  $\triangle X_u^c Y_u^c Z_u^c$  zu ergänzen ist),

dann ist  $\triangle X_u^c Y_u^c Z_u^c \sigma^c$ -perspektiv  $\triangle E_x^c E_y^c E_z^c$  mit der Desarguesachse  $e_u$  .

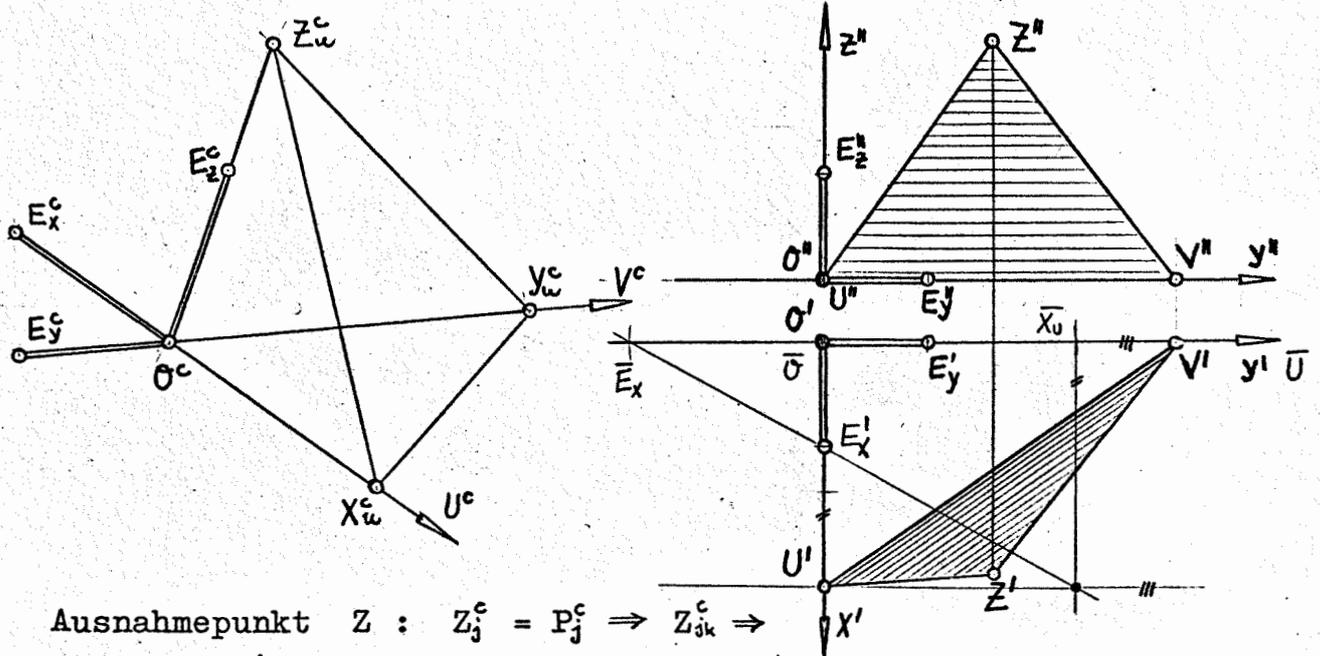
Ist nun (neben  $\sigma^c$ ) z.B.  $E_x^c$  gegeben (wobei die  $x$ -Achse nicht projizierend sein soll), dann legt  $X_u^c, E_x^c$  genau eine Homologie  $\alpha(O^c, e_u^c)$  fest, mit deren Hilfe  $E_y^c = Y_u^c \alpha$  und  $E_z^c = Z_u^c \alpha$  gefunden werden können.

(Im Sonderfall  $E_x^c \perp e_u^c \implies E_y^c, E_z^c \perp e_u^c$  ).

Bemerkung c): Rekonstruktion des Zentrums und der Bildebene in Bem. b) behandelten Fall.

(D.h. das geg. axonometrische 7-Eck erfüllt die Vorausss. dafür, daß die zugehörige Axonometrie  $\alpha$  ähnlich ist zu einer Zentralprojektion).

$\Pi_e$  sei bezogen auf ein kartes. Koord.-System:



Ausnahmepunkt  $Z : Z_j^c = P_j^c \Rightarrow Z_{ijk}^c \Rightarrow (z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \Rightarrow Z'', Z'$  durch Doppelverhältnisübertragung (wie Bem.a) ).

$\bar{\Pi}$  : Unter den gegebenen Vs. muß  $\bar{\Pi}$  so gewählt werden, daß  $\alpha$  affin zur Zentralproj. auf  $\bar{\Pi}$  ist. ( $\alpha$  ist dann automatisch ähnlich zu dieser Projektion, da das Bild der abs. Polarität das Polarsystem eines nullteiligen Kreises ist und daher die absoluten Punkte der Ferngeraden  $u^c$  von  $\Pi^c$  automatisch von den abs. Punkten der Ferngeraden  $\bar{u}$  von  $\bar{\Pi}$  stammen).

$\Rightarrow U^c \dots$  Fernpunkt von  $O^c X_u^c$ ,  $V^c \dots$  Fernpunkt von  $O^c Y_u^c$  ;

$\Rightarrow U'$  mittels DV ( $U^c, O^c, E_x^c, X_u^c$ ) = TV( $U', O', E'$ )

( $V'$  analog.)  $\Rightarrow U, V$  .

$\Rightarrow$  Die Ebene  $\bar{\Pi}$  ist sicher  $\parallel$  zu  $ZUV$  ; d.h.  $ZUV$  ist "Verschwindungsebene" ( $\Rightarrow U, V \dots$  Verschwindungspunkte  $\Rightarrow U^c, V^c \dots$  Fernpunkte).

Also ist  $\bar{u} \alpha = u^c$  und  $\alpha$  somit affin zur Proj. aus  $Z$  auf  $\bar{\Pi}$  .

Da für die Einheitsebenen (und damit für die Einheitspunkte) vier Lösungen möglich sind, ] vier Lösungen für  $\bar{\Pi}$  .

§ 2      Lineare Zweibildersysteme

2.1      Geg.     $\Pi(K)$  ;  $\mathcal{K} \subset \Pi(K)$  ;  $\mathcal{K}'$  ...Punktmenge einer projektiven Bildebene  $\pi'$  .

Nach Satz 1 gilt: Jede lin. Abb. aus  $\mathcal{K}$  in  $\mathcal{K}'$  ist koll. zu einer Projektion oder bijektiv zu Kotierung, also nie injektiv.

Durch Verwendung von zwei wesentlich "verschiedenen" lin. Abbildungen  $\varphi_1: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$  und  $\varphi_2: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'' = \mathcal{K}'$  läßt sich zu jedem "allgemeinen" Bildpunktpaar der Raumpunkt eindeutig rekonstruieren. (I.f. seien Kotierungen ausgeschlossen).

Es soll gelten:

$\varphi_1$  sei kollinear zur Proj.  $\xi_1: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_{\bar{\pi}}$  aus  $Z_1$  auf  $\bar{\pi}$  ( $Z_1 \notin \bar{\pi}$ )  
d.h.  $\exists \alpha_1: \mathcal{K}_{\bar{\pi}} \rightarrow \mathcal{K}'$  , sodaß  $\varphi_1 = \xi_1 \cdot \alpha_1$  .

( $\Rightarrow \pi'$  ist notwendig De-Ebene zum Körper  $K$  von  $\Pi$  .)

$\varphi_2$  sei kollinear zur Proj.  $\xi_2: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_{\bar{\pi}}$  aus  $Z_2$  auf  $\bar{\pi}$  ( $Z_2 \notin \bar{\pi}$ );  
d.h.  $\exists \alpha_2: \mathcal{K}_{\bar{\pi}} \rightarrow \mathcal{K}'' = \mathcal{K}'$  , sodaß  $\varphi_2 = \xi_2 \cdot \alpha_2$  .

Damit folgt für  $X \in \mathcal{K} \setminus \{Z_1, Z_2\}$  :

$$X \mapsto X_{\varphi_1} =: X' \quad \text{mit} \quad X\xi_1 =: \bar{X} \quad , \quad \bar{X}\alpha_1 = X'$$

$$X \mapsto X_{\varphi_2} =: X'' \quad \text{mit} \quad X\xi_2 =: \bar{X} \quad , \quad \bar{X}\alpha_2 = X''$$

Über  $\xi_1$  und  $\xi_2$  treffen wir vier Voraussetzungen, die i.f. stillschweigend gelten sollen.

Vs. (I) :     $Z_1 \neq Z_2$

Andernfalls wären die Fasern von  $\varphi_1$  u.  $\varphi_2$  gleich und eine injektive Abbildung von  $\mathcal{K}$  nicht möglich.

Beh.: Die Ausnahmepunkte  $Z_1, Z_2$  sind genau dann verschieden, falls  $\mathcal{K}'$  und  $\mathcal{K}''$  wesentlich verschieden sind, d.h.

$\mathcal{K}'(X')$  und  $\mathcal{K}''(X'')$  nicht kollinear.

Beweis: a)  $Z_1 = Z_2 \Rightarrow \bar{\pi}, \bar{\pi}$  sind persp.kollinear  $\Rightarrow$   
 $\mathcal{K}'(X')$  kollinear  $\bar{\pi}$   $\bar{\pi}$ -koll.  $\bar{\pi}$  kollinear  $\mathcal{K}''(X'')$   
|----- kollinear -----|

b)  $\mathcal{K}'(X')$  koll.  $\mathcal{K}''(X'')$  (Vs.)

Beide Felder stammen von lin. Abb.  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  aus  $\mathcal{K}$  .

"kollinear" heißt:  $\exists$  Bijektion  $\beta: \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}''$  , sodaß zu jedem  $X' \in \mathcal{K}'$   $\exists^*$   $X''$  mit  $X'' = X'\beta$  .

$\Rightarrow$  Zu jedem  $X \in \mathcal{P} \setminus \{Z_1\}$   $\exists^*$   $X'$  und  $X'\beta = X''$ ; d.h., jeder Punkt  $X$ , der für  $\varphi_1$  nicht Ausnahmepunkt ist, ist auch für  $\varphi_2$  nicht Ausnahmepunkt. Einzig möglicher Ausnahmepunkt für  $\varphi_2$  ist  $Z_1$ .

Andererseits ist  $\varphi_2$  lin. Abb. und besitzt daher genau einen Ausnahmepunkt  $Z_2 \Rightarrow Z_1 = Z_2$ .

(I)  $\Rightarrow \exists Z_1, Z_2 =: \mathcal{O} \dots$  "Doppelsehstrahl" (oder "Kernachse").

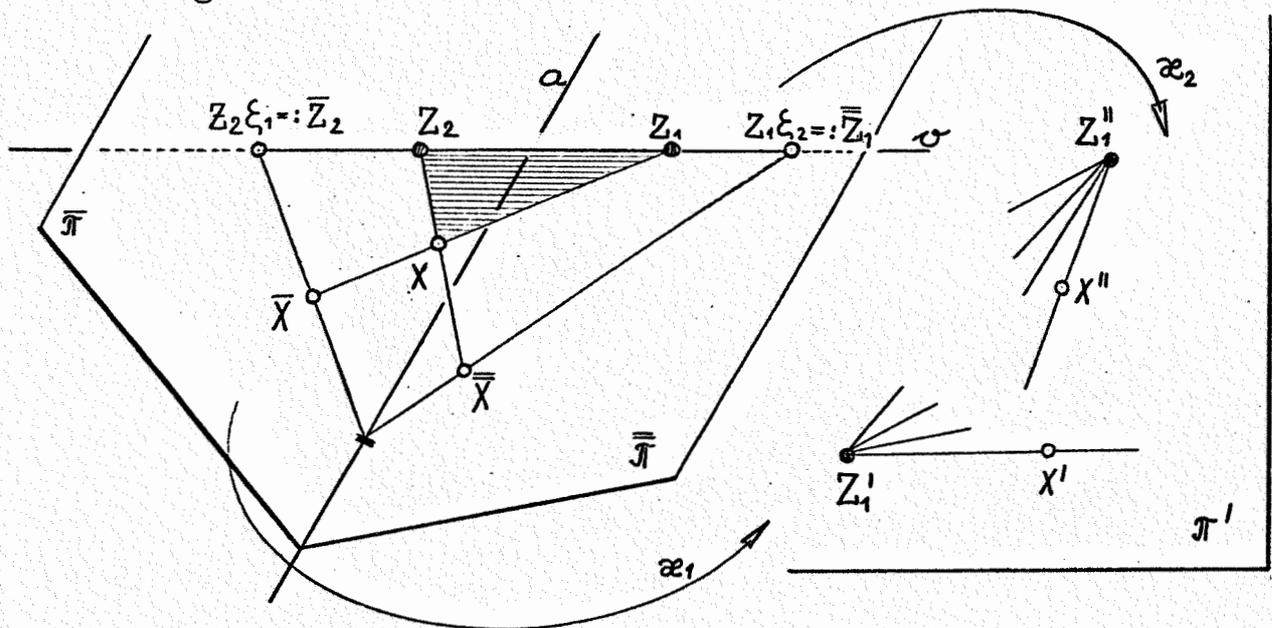
Vs. (II) : Die zwischengeschalteten Projektionsebenen  $\bar{\pi}$  und  $\bar{\bar{\pi}}$  sollen verschieden sein.

(Es gilt notwendig:  $Z_1 \notin \bar{\pi}$ ,  $Z_2 \notin \bar{\bar{\pi}}$ ).

(II)  $\Rightarrow \exists \bar{\pi}, \bar{\bar{\pi}} =: a \dots$  "Grundschnitt".

Vs. (III) :  $\mathcal{O}$  sei windschief zu  $a$ .

Damit gilt dann:



$X$  "allgemein":  $\Rightarrow (Z_1 X) \cdot \bar{\pi} = \bar{X}$ ,  $(Z_2 X) \cdot \bar{\bar{\pi}} = \bar{\bar{X}}$ ;

Zusätzlich muß gelten:  $(\bar{Z}_2 \bar{X}) \cdot (\bar{Z}_1 \bar{\bar{X}}) = 1 \text{ I } a$ .

$\bar{\pi} \cap \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 X$   $\bar{\bar{\pi}} \cap \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 X$

$\Rightarrow$  Die Bilder  $\bar{X}$ ,  $\bar{\bar{X}}$  von  $X$  von  $X$  in  $\bar{\pi}, \bar{\bar{\pi}}$  liegen "geordnet":

$$(\mathcal{G}_{\bar{Z}_2} \text{ in } \bar{\pi}) \stackrel{a}{\bar{\pi}} (\mathcal{G}_{\bar{Z}_1} \text{ in } \bar{\bar{\pi}})$$

( $\mathcal{O}_{\bar{z}_2}, \mathcal{O}_{\bar{z}_1}$  heißen "Kernbüschel",  $\bar{z}_2, \bar{z}_1$  heißen "Kernpunkte").

$\Rightarrow \forall X \in \mathcal{O}$  gilt:  $\bar{X}, \bar{\bar{X}}$  liegen auf Kernstrahlen, die einander in einer Perspektivität (mit der Kernachse als Perspektivitätsachse) zugeordnet sind.

In  $\pi' = \pi''$  :  $\mathcal{O}'_{z'_2}, \mathcal{O}''_{z''_1}$  .. "Ordnungsbüschel",  
 $z'_2, z''_1$  .. "Ordnungspunkte".

Die Ordnungsbüschel stammen von perspektiven Büscheln, von denen jedes einer bestimmten Kollineation unterworfen wurden.

$\Rightarrow$  Die Ordnungsbüschel sind bijektiv gekoppelt (i.a. nicht projektiv) !

Bemerkung a): Um geometrisch sinnvolle Ergebnisse zu erzielen, ist der Körper  $K$  von  $\Pi$  (und  $\pi'$ ) zu spezialisieren.

Vs. (4) :  $\text{Aut}(K) = \{\text{id}\}$

Vs.(1) : Die Kollineationen  $\alpha_1: \bar{\pi} \rightarrow \pi', \alpha_2: \bar{\pi} \rightarrow \pi'$  sollen projektive Kollineationen sein.

Dies ist z.B. dann erfüllt, wenn  $K$  bloß den trivialen Automorphismus gestattet.

(Beispiele:  $K=\mathbb{R}, K=\mathbb{Q}$ , nicht aber  $K=\mathbb{C}$ )

Damit sind die von den perspektiven Kernbüscheln stammenden Ordnungsbüschel  $\mathcal{O}''_{z''_1}, \mathcal{O}'_{z'_2}$  nicht nur bijektiv, sondern projektiv.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \beta: \mathcal{O}'_{z'_2} \rightarrow \mathcal{O}''_{z''_1}, \beta$  .. "Ordnungsprojektivität".

Vs.(2) :  $\mathcal{O}'_{z'_2} \cap \mathcal{O}''_{z''_1}$  sollen i.a. einen Kegelschnitt erzeugen. Da nur in PP-Ebenen ein vernünftiger Kegelschnittsbegriff existiert, sei  $K$  kommutativ vorausgesetzt.

Z.B. sind alle Vs. für  $K=\mathbb{R}$  erfüllt,  $\Rightarrow$  z.B. die proj. Anschauungsebene ist eine mögliche Bildebene  $\pi'$ .

Bemerkung b): "Hauptraumfigur"

$\{Z_1, Z_2; \bar{\pi}, \bar{\pi}'\}$  mit den Vs. (I)-(III) (also  $Z_1 \neq Z_2, \bar{\pi} \neq \bar{\pi}', Z_1 Z_2$  windschief  $\bar{\pi}, \bar{\pi}', \bar{\pi}' \not\subset Z_1, \bar{\pi} \not\subset Z_2$ ) heißt "(zulässige) Hauptraumfigur".

Bemerkung c): "Hauptbildfigur"

$\{Z_2', Z_1'; \beta: \mathcal{O}_{Z_2'} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_1'}\} \subset \pi'$  heißt "Hauptbildfigur".

Wir unterscheiden vier wesentlich verschiedene Typen von Hauptbildfiguren.

1. Typus:  $Z_2' \neq Z_1''$ ,  $\beta$  ist eine Projektivität, nicht Perspektivität.  
Das Erzeugnis der Ordnungsbüschel ist der "Ordnungskegelschnitt" durch  $Z_1'$  und  $Z_2'$ .
2. Typus:  $Z_2' = Z_1''$ ,  $\beta$  ist eine Perspektivität  $\implies$  ]"Ordnungsachse".
3. Typus:  $Z_2' = Z_1''$ ,  $\beta$  ist eine Projektivität  $\neq \iota$ .
4. Typus:  $Z_2' = Z_1''$ ,  $\beta = \iota$

Zwischenbemerkung:

Geg.:  $\varphi_1: M \rightarrow N$ ,  $\varphi_2: M \rightarrow N$ ;

$(\varphi_1, \varphi_2)$  ... Symbol für eine Abb. ("Paarabbildung"), die wie folgt erklärt ist:

$$(\varphi_1, \varphi_2): M \rightarrow N \times N \quad \text{mit:} \quad X \in \underbrace{D(\varphi_1) \cap D(\varphi_2)}_{\subset M, \neq \emptyset} \mapsto X(\varphi_1, \varphi_2) := (X_{\varphi_1}, X_{\varphi_2})$$

Dies benützen wir zu folgender

Definition: "lineares Zweibildersystem"

Geg.:  $\Pi(K)$  ... proj. Raum,  $\mathcal{P}$  ... Punktmenge von  $\Pi(K)$

$\pi'(K)$  ... proj. Ebene,  $\mathcal{P}' = \mathcal{P}''$  ... Punktmenge von  $\pi'$

Seien  $\varphi_1: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  und  $\varphi_2: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}''$  zwei wesentlich  $\neq$  lineare Abb. auf die Punktmenge  $\mathcal{P}'$  bzw.  $\mathcal{P}''$  von  $\pi'$ ;

dann heißt die Paarabbild.  $(\varphi_1, \varphi_2): \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$  mit  $D(\varphi_1, \varphi_2) = \mathcal{P} \setminus \{Z_1, Z_2\}$  ein "lineares Zweibildersystem", wenn gilt:

(I)  $\varphi_1, \varphi_2$  erfüllen die Vs. (I)-(III),

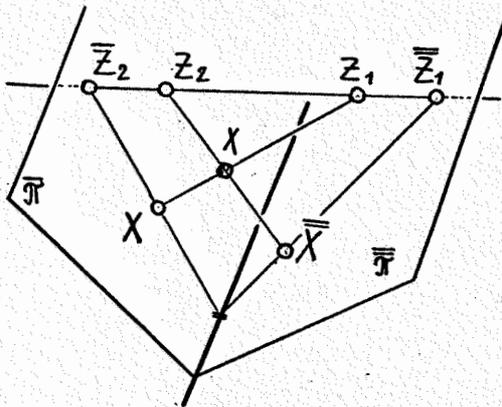
(II)  $K$  erfüllt die Vs. (1)  $\wedge$  (2).

Eigenschaften eines linearen Zweibildersystems:

- 1) Wir fragen nach Punktmenge  $\subset D(\varphi_1, \varphi_2)$ , für welche  $(\varphi_1, \varphi_2)$  injektiv ist.

Beh.:  $(\varphi_1, \varphi_2)$  ist injektiv auf der Punktmenge  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0$  ( $\mathcal{K}_0$  Kernstrahl).

Beweis:  $\forall X \notin \mathcal{K}_0 \Rightarrow \exists^*$  Punktepaar  $X', X''$



$\Rightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$  ist in  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0$  global.

Sei  $Y \neq X, Y \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0 \Rightarrow$  mindestens eine Proj. von  $Y$  und  $X$  ist verschieden. ( $\exists$  sicher  $\neq$  Fasern)  $\Rightarrow (\bar{Y}, \bar{Y}) \neq (\bar{X}, \bar{X}) \Rightarrow (X', X'') \neq (Y', Y'')$ .

$\Rightarrow$  Zu  $\neq$  Punkten aus  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0$   $\exists$  eindeutige,  $\neq$  Bildpaare.

Sei  $X \in \mathcal{K}_0 \wedge X \neq Z_1, Z_2$ , da sonst eine der Abb.  $\varphi_1, \varphi_2$  und damit  $(\varphi_1, \varphi_2)$  nicht

erklärt ist:

$\bar{X} = \bar{Z}_2, \bar{X} = \bar{Z}_1 \Rightarrow \forall X \in \mathcal{K}_0 \setminus \{Z_1, Z_2\}$  gilt:  $X' = Z'_2, X'' = Z''_1$ .

$\Rightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$  injektiv im längs des Doppelsehstrahles  $\mathcal{K}$  geschlitzten Raum  $\Pi(K)$ .

Bemerkung: Für  $X \notin \mathcal{K}_0$  ist stets  $\bar{X} \neq \bar{Z}_2, \bar{X} = \bar{Z}_1 \Rightarrow$

$X\varphi_1 = X' \neq Z'_2, X\varphi_2 = X'' \neq Z''_1$ .

Die Bildebene  $\pi'$  ist gelocht in  $Z'_2, Z''_1$ , also ist  $(\varphi_1, \varphi_2)$  sicher nicht surjektiv.

Außerdem kommen für  $(X', X'')$  nicht alle möglichen Paare aus  $\mathcal{K}' \times \mathcal{K}''$  in Betracht, sondern nur solche Paare, die durch die Ordnungsprojektivität  $\beta$  gekoppelt sind;

d.h.  $\forall X \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0$  gilt:  $(Z'_2 X')\beta = (Z''_1 X'')$ .

Die Ordnungsstrahlen von  $X$  stammen von Kernstrahlen, die als Spuren der doppelprojizierenden Ebene  $\mathcal{K} \cdot X$  in den Projektionsebenen  $\pi, \bar{\pi}$  aufzufassen sind.

2) Das  $(\varphi_1, \varphi_2)$ -Bild einer Punktreihe  $\mathcal{K}_g$ :

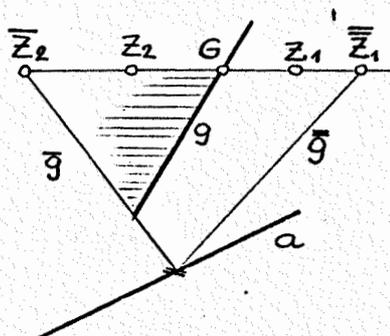
$\alpha)$   $g$  allgemein, d.h.  $g$  windschief  $\mathcal{K}$ .

$\mathcal{K}_g \subset \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0 \Rightarrow (\varphi_1, \varphi_2)|_{\mathcal{K}_g}$  ist injektiv

Dabei gilt:  $\bar{Z}_2 \notin \bar{g}, \bar{Z}_1 \notin \bar{g} \Rightarrow Z'_2 \notin g', Z''_1 \notin g''$

$\bar{g}(\bar{X}) \bar{\pi} g(X) \bar{\pi} \bar{g}(\bar{X}) \Rightarrow g'(X') \wedge g''(X'')$

$\beta)$   $g$  schneidet  $\mathcal{K}$  in  $G \neq Z_1, Z_2 \Rightarrow$



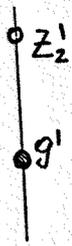
$G' = Z'_2, G'' = Z''_1$

$g', g''$  sind Ordnungsstrahlen.

$\bar{g}, \bar{g}$  sind Spuren der doppelproj. Ebene  $\mathcal{K} \cdot g$  in  $\pi, \bar{\pi}$ , treffen einander also auf

$a \Rightarrow g'\beta = g''$ .

8)  $g$  schneidet  $\sigma$  in  $G=Z_1$  ( $g \neq \sigma$ )



$g$  ist "erstprojizierend". ( $\Rightarrow \mathbb{P}_g \setminus \{Z_1, Z_2\}$  wird abgebildet).  $\Rightarrow$   
 $g'$  ist ein Punkt  $\neq Z_2$ ,  $\bar{g}$  enthält  $\bar{Z}_1$  ( $\bar{g}$ ...Gerade)  
 $g'$ ...Gerade durch  $Z_1''$  punktiert in  $Z_1'$ .  
 $(\bar{Z}_2 \bar{g})$ ,  $\bar{g}$  .. Spuren der doppelt proj. Ebene durch  $g$   
 $\Rightarrow (Z_1' g')\beta = g''$ .

8)  $g=\sigma \Rightarrow g$ ... "doppeltproj." ( $\Rightarrow \mathbb{P}_g \setminus \{Z_1, Z_2\}$  wird abgebildet).  
 $\rightarrow g'=Z_2', g''=Z_1''$ .

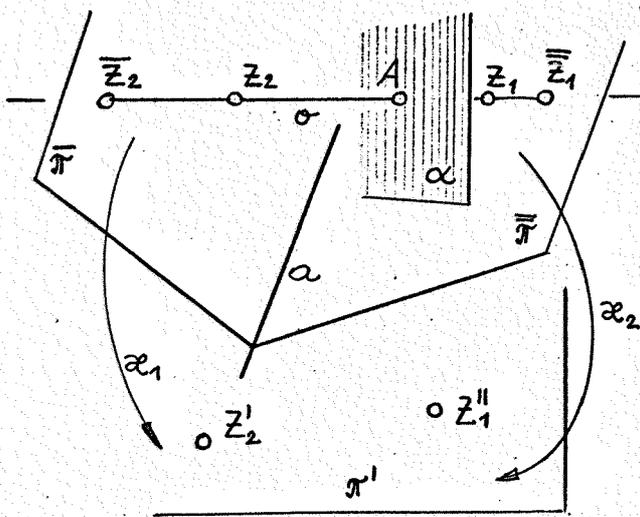
3) Das  $(\varphi_1, \varphi_2)$ -Bild eines Punktfeldes  $\mathbb{P}_\alpha$  :

$\alpha$  allgemein d.h.  $\sigma \nmid \alpha \wedge \exists A=\alpha \cap \sigma$  mit  $A \neq Z_1, Z_2$ .  
 $\xi_1 | \mathbb{P}_\alpha$  ist eine persp.Koll.von  $\alpha$  auf  $\bar{\sigma}$   
 $\xi_2 | \mathbb{P}_\alpha$  ist eine persp.Koll.von  $\alpha$  auf  $\bar{\sigma}$

$\forall X \in \mathbb{P}_\alpha$  gilt:  $X' \xrightarrow{\alpha_\alpha} X''$  mit  $X' \xrightarrow{\xi_1^{-1}} (\xi_1 | \mathbb{P}_\alpha)^{-1} \cdot (\xi_2 | \mathbb{P}_\alpha) \cdot X'' = X$   
 $\pi$  Koll.       $\pi$  Koll.       $\pi$  Koll.

$\Rightarrow \exists \alpha_\alpha: \pi'(X') \rightarrow \pi'(X'')$   $\wedge \alpha_\alpha$  ist eine proj. Kollineation, für welche wegen  $A'=Z_2'$  und  $A''=Z_1''$  gilt:  $Z_2' \alpha_\alpha = Z_1''$ .

Zusätzlich erfüllt  $\alpha_\alpha$  folgende Eigenschaft:



$\forall X \in \mathbb{P}_\alpha \setminus \{A\}$  muß gelten:  
 $(Z_2' X')\beta = Z_1'' X''$ .

Diese Eigenschaft muß mit  $\alpha_\alpha$  verträglich sein:

Beh.: Es gilt  $\alpha_\alpha | \xi_{Z_2'} = \beta$ .

Beweis:  $Z_2' = A'$  ( $A=\alpha \cap \sigma$ )

$A' \alpha_\alpha = A'' = Z_1''$  (laut Vs.)  $\Rightarrow$

$(Z_2' X')\beta = (Z_1'' X'')$   $\Rightarrow$

Die Ordnungsstrahlen werden bei  $\alpha_\alpha$  so wie bei  $\beta$  transformiert.

Bemerkung: Ist die Hauptbildfigur vom IV. Typ, also  $Z_1'' = Z_2' \wedge Z_2' = Z_1'' \wedge X' \wedge X''$  so gilt: Zu jeder allgemeinen Ebene  $\alpha$  ist  $\alpha_\alpha$  eine persp. Kollineation mit Zentrum  $Z_1'' = Z_2'$ .

$\beta$ )  $\alpha$  erstprojizierend (d.h.  $Z \nmid \alpha$ ,  $\sigma \nmid \alpha$ )

$\Rightarrow (\mathbb{P}_\alpha)_{\varphi_1} = \alpha'$  ist eine Gerade, die  $Z_2'$  nicht enthält ( $\bar{Z}_2 \notin \bar{\alpha}$ );  
 $(\mathbb{P}_\alpha)_{\varphi_2} = \mathbb{P}''$ .

§)  $\alpha$  ist doppeltprojizierend.

$\rightarrow \alpha', \alpha''$  sind Geraden, und zwar  $\alpha_j$ -Bilder von Kernstrahlen; also gilt:  $Z_2' \perp \alpha'$ ,  $Z_1'' \perp \alpha'' \wedge \alpha' \beta = \alpha''$

Satz 10: Ist  $K$  ein kommutativer Körper mit mindestens drei verschiedenen Elementen, der nur den trivialen Automorphismus gestattet, und sind  $\varphi_1, \varphi_2$  zwei lineare Abb. aus  $\mathbb{K}(K)$  auf  $\mathbb{P}^1(K)$ , deren Bildfelder nicht kollinear sind, so existiert eine Ordnungsprojektivität  $\beta$  zwischen den beiden Ordnungsbüscheln so, daß die beiden Bildpunkte eines nicht auf der Kernachse liegenden Punktes auf zugeordneten Strahlen liegen.

Die Beschränkung der Abbildung  $(\varphi_1, \varphi_2)$  auf den längs der Kernachse geschlitzten proj. Punktraum ist injektiv.

Geraden, welche die Kernachse nicht treffen, werden auf projektive Punktreihen abgebildet; nichtprojizierende Ebenen auf Kollineationen des 1. Bildfeldes auf das 2. Bildfeld, welche die Ordnungsprojektivität enthalten.

## 2.2 Lagenaufgaben im proj. Punktraum

Geg.: proj. Punktraum  $\mathcal{P}$  (0.2);  $\mathcal{P}_g, \mathcal{P}_\alpha$ ;  $I \rightarrow \epsilon$   
 $X \perp g \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}_g$ ,  $X \perp \alpha \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}_\alpha$ ,  $g \perp \alpha \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}_\alpha \quad \forall X \in \mathcal{P}_g$ .

Jede Aufgabe in  $\mathcal{P}$ , die bloß Inzidenzaussagen zum Inhalt hat, läßt sich auf eine (oder mehrere) der folgenden sechs Lagenaufgaben zurückführen, die paarweise durch das Dualitätsprinzip gekoppelt sind.

$L_1$ : Geg.:  $A, B \mid \neq$ ,  
 Ges.:  $g = A.B$

$L_1^*$ : Geg.:  $\epsilon, \varphi \mid \neq$   
 Ges.:  $g = \epsilon.\varphi$

$L_2$ : Geg.:  $a, b$ , mit  
 $\exists S$  mit  $S \perp a, b$ .  
 Ges.:  $\alpha = a.b$

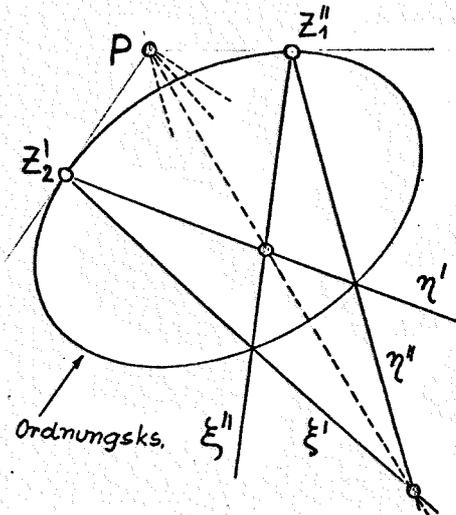
$L_2^*$ : Geg.:  $a, b$  mit:  
 $\exists \alpha$  mit  $a, b \perp \alpha$ .  
 Ges.:  $S = a.b$

$L_3$ : Geg.:  $A, a$ ;  $A \not\perp a$   
 Ges.:  $\alpha = A.a$

$L_3^*$ : Geg.:  $\alpha, a$ ;  $a \not\perp \alpha$   
 Ges.:  $A = a.\alpha$

Die Lösung dieser Aufgaben in einem linearen Zweibildersystem erfordert die Vervollständigung der Ordnungsprojektivität  $\beta$ ; dabei wird je nach dem Typus des Zweibildersystem wie folgt vorgegangen:

1. Typus: Die Ordnungsstrahlbüschel erzeugen den Ordnungskegelschnitt ( $\pi' \dots PP$ -Ebene).



Wir fassen die Ordnungsstrahlen auf als Bilder der Spuren gewisser doppeltproj. Ebenen in den Projektionsebenen  $\bar{\pi}, \bar{\pi}'$ .

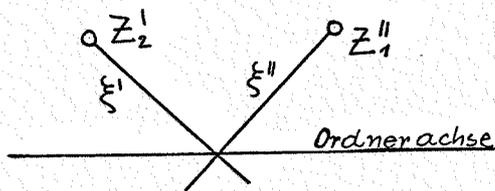
Dann gilt für zwei bel. doppeltproj. Ebenen  $\xi, \eta (\neq)$ :

$$\xi'' = \xi' \cdot \beta, \quad \eta'' = \eta' \cdot \beta.$$

Proj. Geom.:  $\Rightarrow \exists$  "Projektivitätszentrum" P mit  $PI(\xi' \eta'').(\xi'' \eta')$ .

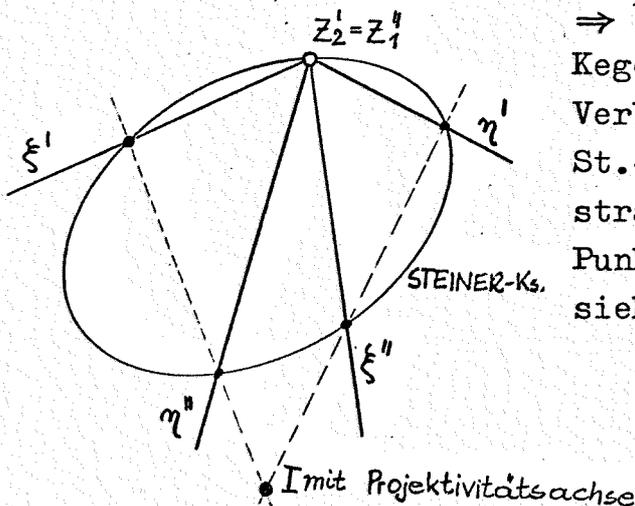
2. Typus:  $\beta$  ist eine Perspektivität  $\Rightarrow \exists$  Ordnerachse

(=Perspektivitätsachse von  $\beta$ ), mit deren Hilfe  $\beta$  vervollständigt wird.

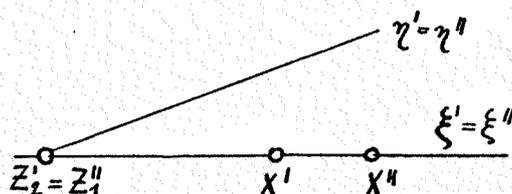


3. Typus:  $\beta$  ist Projektivität  $\neq \iota$  im Büschel  $Z_1''=Z_2''$ .

$\Rightarrow$  Vervollständigung mittels STEINER-Kegelschnitt. (Die "kreuzweisen" Verbindungen der Schnittpunkte des St.-Ks. mit zwei Paaren von Ordnungsstrahlen schneiden einander in einem Punkt der Projektivitätsachse von  $\beta$ , siehe Figur).

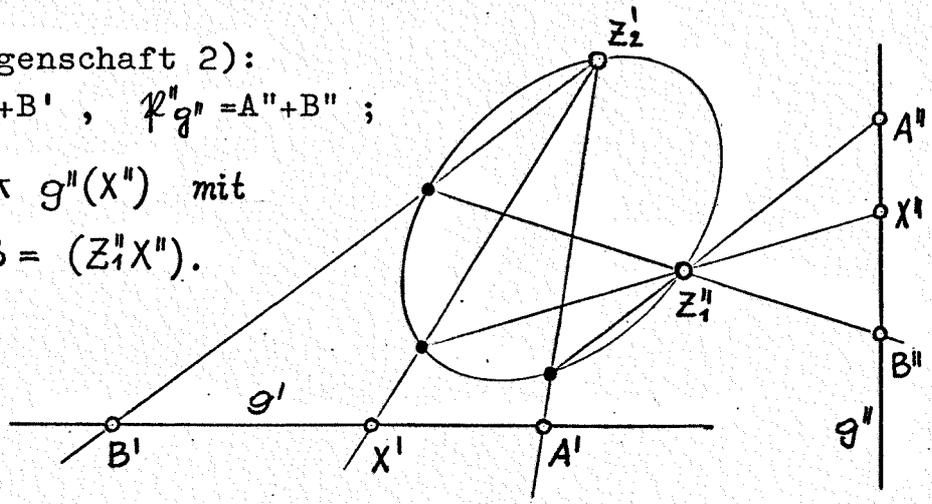


4. Typus:  $\beta = \iota$ ;  
 $Z_1'' = Z_2''$



Wir lösen hier die Lageaufgaben in  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0$  für den "allgemeinen Fall" (d.h. die auftretenden Ebenen sind nicht projizierend, die Geraden mögen den Kernstrahl  $\mathcal{K}$  nicht treffen) in einem lin. Zweibildersystem vom 1. Typus:

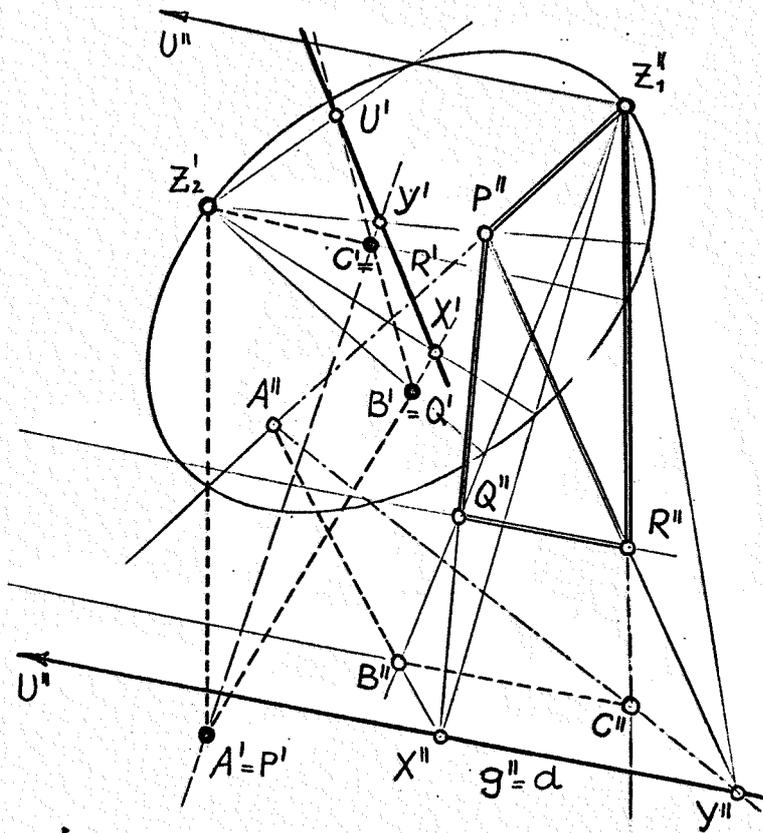
L<sub>1</sub>: Vgl. Eigenschaft 2):  
 $\mathcal{K}g' = A'+B'$ ,  $\mathcal{K}g'' = A''+B''$ ;  
 $g'(X') \propto g''(X'')$  mit  
 $(Z_2' X')\beta = (Z_1'' X'')$ .



L<sub>1</sub>\*: (Vgl. Eigenschaft 3) Geg.:  $\mathcal{K}_\varepsilon, \mathcal{K}_\varphi$  allgemein.

Ges.:  $\mathcal{K}_\varepsilon \cap \mathcal{K}_\varphi = \mathcal{K}_g$

Im Zweibildersystem ist  $\varepsilon = ABC$  und  $\varphi = PQR$  festgelegt



durch eine (proj.) Kollineation  $\alpha_\varepsilon$  bzw.  $\alpha_\varphi$ .

$\alpha_\varepsilon$  ist bestimmt durch  $A' \mapsto A''$ ,  $B' \mapsto B''$ ,  $C' \mapsto C''$ ,  $(Z_2' \mapsto Z_1'')$ ,

$\alpha_\varphi \dots P' \mapsto P''$ ,  $Q' \mapsto Q''$ ,  $R' \mapsto R''$ ,  
 $(Z_2' \mapsto Z_1'')$

(Dabei ist  $\alpha_\varepsilon | \mathcal{O}_{g'Z_2'} = \alpha_\varphi | \mathcal{O}_{g'Z_2'} = \beta$ )

Für  $X \in \mathcal{K}_\varepsilon \cap \mathcal{K}_\varphi$  gilt:  $X' \alpha_\varepsilon = X' \alpha_\varphi = X''$

Konstruktiv gehen wir so vor, daß wir  $A', B', C'$  als erste Bilder von Punkten aus  $\mathcal{K}_\varphi$  auffassen, deren zweite Bilder mittels  $\alpha_\varphi$  ergänzt werden. In der Figur ist diese Konstruktion durch die Angabe  $A'=P'$ ,  $B'=Q'$ ,  $C'=R'$  vorweggenommen. Dann gilt:

$A'', P'', Z_1''$ ,  $B'', Q'', Z_1''$ ,  $C'', R'', Z_1''$  sind kollinear und  $\triangle A''B''C''$  ist  $Z_1''$ -perspektiv zu  $\triangle P''Q''R''$  ( $P'', Q'', R''$  nicht

kollinear, da  $\varphi$  laut Vs. allgemein)  $\Rightarrow \exists$  DESARGUES-Achse d. Beh.:  $d=g''$

Beweis: Sei  $X \in AB$  mit  $X''=(A''B'')$ .d,  $\Rightarrow X''\alpha_\varepsilon^{-1}=X' \in A'B'=P'Q' \Rightarrow X'\alpha_\varphi \in P''Q'' \wedge (Z_2'X')^\beta = (Z_1''X''\alpha_\varphi) \Rightarrow X'\alpha_\varphi=X''=X'\alpha_\varepsilon$ .

Analog für  $Y \in AC$  mit  $Y''=(A''C'')$ .d  $\Rightarrow Y'\alpha_\varepsilon=Y'\alpha_\varphi=Y''$ .

$\Rightarrow d=g'' \Rightarrow g'=X'Y'$ .

Ergebnis:  $\alpha_\varepsilon^{-1} \cdot \alpha_\varphi$  (bzw.  $\alpha_\varphi^{-1} \alpha_\varepsilon$ ) ist eine perspektive Kollineation mit dem Zentrum  $Z_1''$  und der Achse  $g''=(\varepsilon \cap \varphi)\varphi_2$ . Analog ist  $\alpha_\varepsilon \cdot \alpha_\varphi^{-1}$  eine persp. Koll. mit Zentrum  $Z_2'$  und der Achse  $g'=(\varepsilon \cap \varphi)\varphi_1$ .

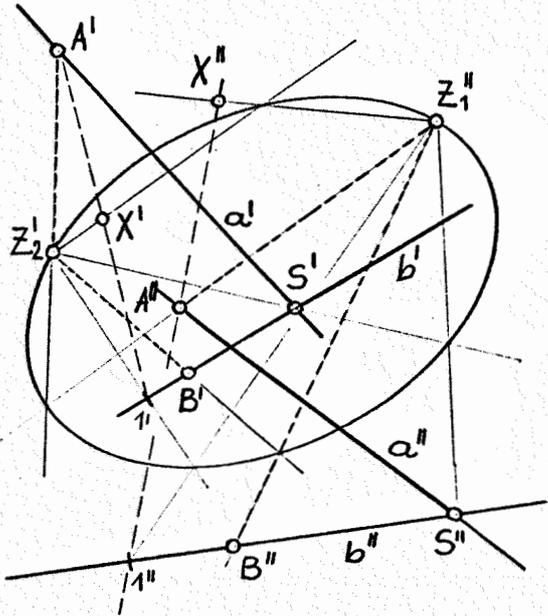
Bemerkung: Die Lösung von  $L_1^*$  im Punktraum kann auf  $L_1$  und  $L_3^*$  zurückgeführt werden:

Ist  $\varepsilon=ABC$  und  $\varphi=PQR$ , so sucht man etwa  $AB=c$  und  $BC=a$  ( $L_1$ ) und schneidet  $\varphi$  mit  $c$  und  $a$  ( $L_3^*$ ).  $\Rightarrow \varphi c=C_1 \wedge \varphi a=A_1$ ;  $\Rightarrow A_1C_1 = \varepsilon \cdot \varphi = g$  ( $L_1$ ).

$L_2$ : Geg.  $a, b \mid \neq \wedge \exists S$  mit  $S=a \cdot b$

Ges.  $\alpha = ab$

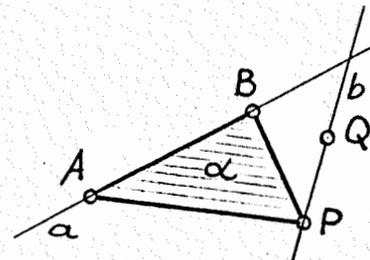
$\Rightarrow \exists A \in \mathcal{K}_a$  mit  $\mathcal{K}_a = S+A$ ;  $\exists B \in \mathcal{K}_b$  mit  $\mathcal{K}_b = S+B$ ; dabei sind  $S, A, B$  nicht kollinear  $\Rightarrow \alpha = ABS$ .



Im lin. Zweibildersystem bilden im allgem. Fall  $A', B', S', Z_2'$  und  $A'', B'', S'', Z_1''$  je ein Viereck, wodurch genau eine Kollineation  $\alpha$  mit  $\alpha \mid \mathcal{U}_j z_i = \beta$  festgelegt ist.

$X \in \mathcal{K}_a \Leftrightarrow X' \alpha = X''$ .

(Vervollständigung von  $\alpha$ , d.h. Konstruktion von  $X''$  bei gegebenem  $X'$  durch "Angittern"; siehe Figur).

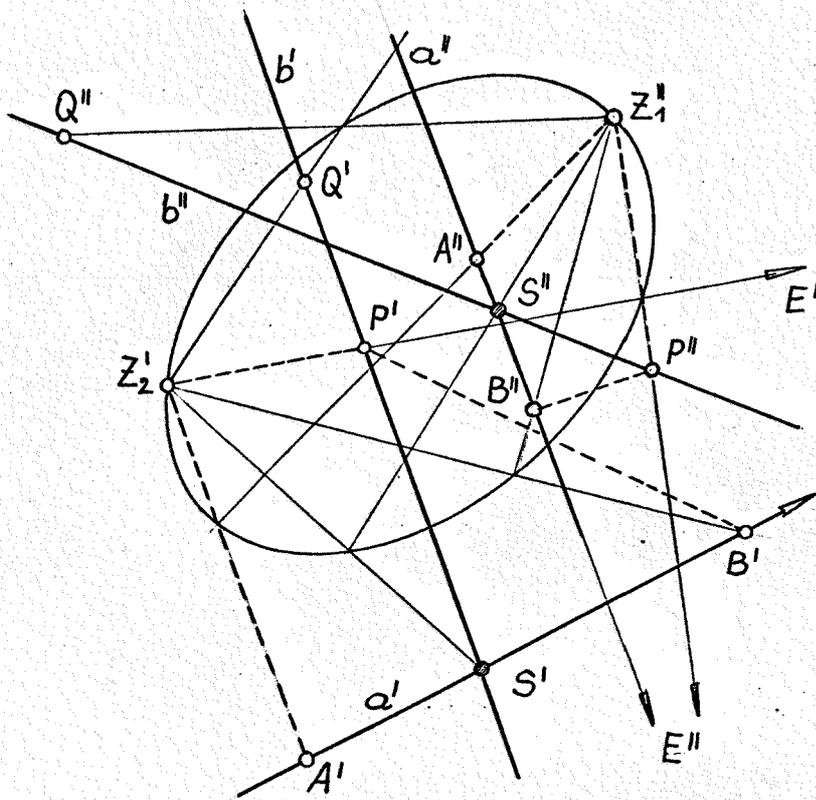


$L_2^*$ : Geg.  $\mathcal{K}_a = A+B$ ,  $\mathcal{K}_b = P+Q$

$\wedge \exists \alpha$  mit  $a, b \mid \alpha$

Ges.  $S = \mathcal{K}_a \cap \mathcal{K}_b$ .

- Zunächst: Schnittbedingung im Zweibildersystem ( $\exists \alpha = ab$ ):  
VS.  $\alpha$  allgemein  $\Rightarrow \exists 3$  nicht koll. Punkte in  $\{A, B, P, Q\}$   
(Z.B.  $A, B, P$ ), für welche die Bilder zusammen mit den Ordnungszentren je ein Viereck bilden.



⇒ Nach Eigenschaft 3 ist  $(\varphi_1, \varphi_2) | \mathcal{K}_\alpha = \mathcal{K}_\alpha$  und  $\mathcal{K}_\alpha$  ist durch  $Z_2' \mapsto Z_1''$ ,  $A' \mapsto A''$ ,  $B' \mapsto B''$  und  $P' \mapsto P''$  eindeutig festgelegt.

$\mathcal{K}_\alpha$  u.  $\mathcal{K}_\beta$  erfüllen die Schnittbed.  $\Leftrightarrow$  wenn auch der vierte Angabepunkt Q Bilder  $Q', Q''$  besitzt, für die gilt  $Q' \mathcal{K}_\alpha = Q''$ .

Liegt nun  $Q'' = Q' \mathcal{K}_\alpha$  auf  $A''B''$ , so gilt:  $Q' \perp A'B'$ , denn:

$$DV(A''B''Q''E'') = DV(A'B'Q'E')$$

$$= \underbrace{a''(Z_1''P'')} = \underbrace{a'(Z_2'P')}$$

$$\wedge (Z_2'Q')\beta = Q''.$$

Bilden  $A'', B'', Q'', P''$  ein

Viereck, so auch  $A', B', Q', P'$  mit  $a''$  und  $b''$  bzw.  $a'$  und  $b'$  als einem Paar in  $\mathcal{K}_\alpha$  zugeordneter Diagonalen.  $\Rightarrow$  Die Diagonalecken  $S'', S'$  sind in  $\mathcal{K}_\alpha$  zugeordnet  $\Rightarrow Z_2'S'\beta = S''Z_1'$  wegen  $\mathcal{K}_\alpha | \mathcal{O}_{Z_2'} = \beta$ .

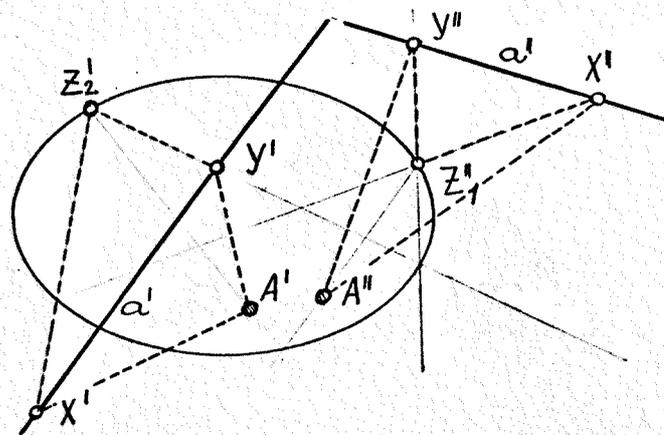
$S', S''$  sind die Bilder des gesuchten Schnittpunktes.

Damit gilt:  $a, b$  schneiden einander genau dann, wenn der Schnittpunkt der ersten Bilder ( $a', b'$ ) dem Schnittpunkt der zweiten Bilder ( $a'', b''$ ) in der Ordnungsproj.  $\beta$  zugeordnet ist ( $Z_2'(a'.b')\beta = Z_1''(a''b'')$ ).

L3: Geg.:  $A, a | \mathcal{F}$  ; Ges.:  $\alpha = aA$ .

Im l.Z, BS.:  $A', A''$ ;  $a', a''$ ; allgemeiner Fall (d.h.  $A' \not\perp a'$ ,  $A'' \not\perp a''$ ;  $a' \not\perp Z_2'$ ,  $a'' \not\perp Z_1''$ ).

Ges.:  $\mathcal{K}_\alpha$  (vgl. Satz 10)



Unter den gegebenen Vs.  $\exists X, Y$  mit  $X, Y | \perp a$  so, daß  $\{Z_2', A', X', Y'\}$  ein Viereck bilden.

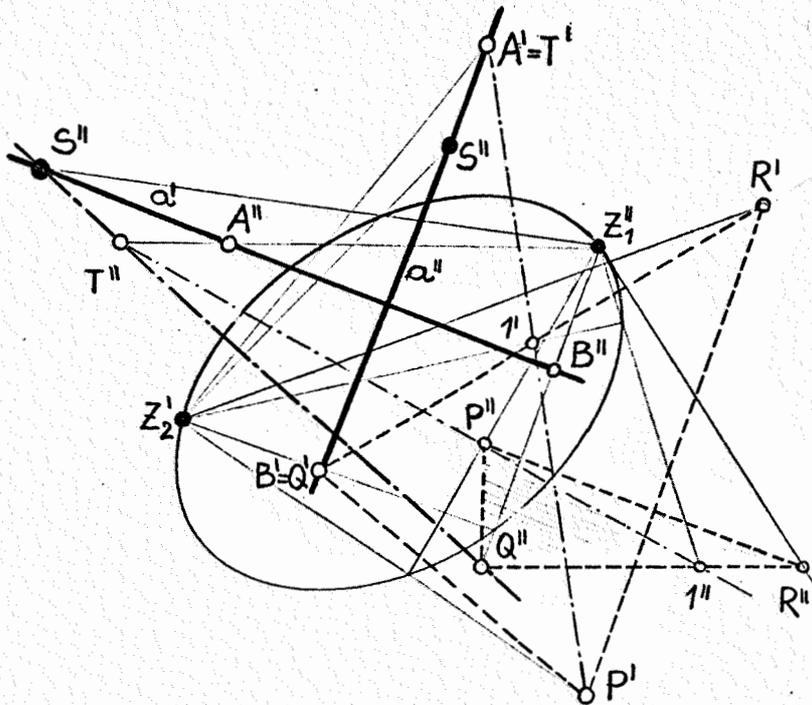
Wegen  $A'', Z_1'' | \perp a''$  müssen dann auch  $\{Z_1'', A'', X'', Y''\}$  ein Viereck bilden.

Durch  $Z_2' \rightarrow Z_2''$ ,  $A' \rightarrow A''$ ,  $X' \rightarrow X''$ ,  $Y' \rightarrow Y''$  ist genau eine Kollineation  $\alpha_\alpha$  festgelegt, für welche zusätzlich gilt:  $\alpha_\alpha | \mathcal{O}_{Z_2'} = \beta$ ; denn  $A', A''$ ;  $X', X''$ ;  $Y', Y''$  sind durch Ordnungsstrahlen gekoppelt ( $X'', Y''$  wurden gemäß  $L_1$  so ergänzt).

Umgekehrt gehören zu den von den Ordnungszentren verschiedenen zugeordneten Ecken  $A', A''$ ;  $X', X''$ ;  $Y', Y''$  der Vierecke eind. bestimmte Raumpunkte  $\{A, X, Y\}$ , die genau eine Ebene  $\alpha$  aufspannen.

$L_3^*$ : Geg.:  $\mathcal{K}_\alpha \dots P, Q, R$ ,  $\mathcal{K}_a \dots A, B$ ,  $\mathcal{K}_a \not\subset \mathcal{K}_\alpha$ , (allgemein)  
Ges.:  $\mathcal{K}_\alpha \cap \mathcal{K}_a = S$ .

Das  $(\varphi_1, \varphi_2)$ -Bild von  $\alpha$  bestimmt eine proj. Kollineation  $\alpha_\alpha$ ;  $a \xrightarrow{(\varphi_1, \varphi_2)} (a' = A'B', a'' = A''B'')$ .



Wir identifizieren  $A'$  und  $B'$  von  $a'$  mit ersten Bildern von Punkten aus  $\alpha$  und suchen deren zweite Bilder.

In der Figur:  $A' = T'$  zu  $T \in \mathcal{K}_\alpha$ ,  $\Rightarrow T''$  durch Angittern, siehe  $L_2$ . Für  $B' = Q'$  ist dieser Schritt durch die Angabe vorweggenommen.

Beh.:  $(T''Q'').a'' = S'' \dots 2.$   
Bild von  $S$ .

Beweis: Zu zeigen  $S' = S'' \xrightarrow{\alpha_\alpha^{-1}}$  inzidiert mit  $a'$ .

$S'' \in T''Q''$  mit  $T, Q \in \mathcal{K}_\alpha \xrightarrow{\alpha_\alpha^{-1}} S' \in T'Q' = A'B' = a'$ ; zusätzlich ist  $S'' \beta^{-1} = S'$ , wegen  $\alpha_\alpha | \mathcal{O}_{Z_2'} = \beta \Rightarrow S', S'' \dots$  Bildpaar des gesuchten Schnittpunktes.

Bemerkung: Das angegebene Verfahren heißt "Deckgeradenprinzip".

Satz von STAUDIGL: In jedem beliebigen lin. Zweibildersystem kann eine bestimmte Lagenaufgabe bei gegebener Hauptbildfigur "in gleicher Weise" gelöst werden.

2.3

Rekonstruktion

Geg.: Hauptbildfigur  $\{Z_2', Z_1''; \beta: \mathcal{O}_{Z_2'} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_1''}\}$   
 Zuläss. Hauptraumfigur  $\{Z_1, Z_2; \pi, \bar{\pi}\}$

Wir stellen folgende Fragen:

- (1) Zu wievielen Bildpaaren müssen die zugehörigen Raumpunkte vorgegeben sein, daß man den zu einem belieb. Bildpaar  $(X', X'')$  gehörenden Raumpunkt  $X$  eindeutig rekonstruieren kann ?
- (2) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den in 2  $\neq$  zuläss. Hauptraumfiguren rekonstruierten Punktmengen ?

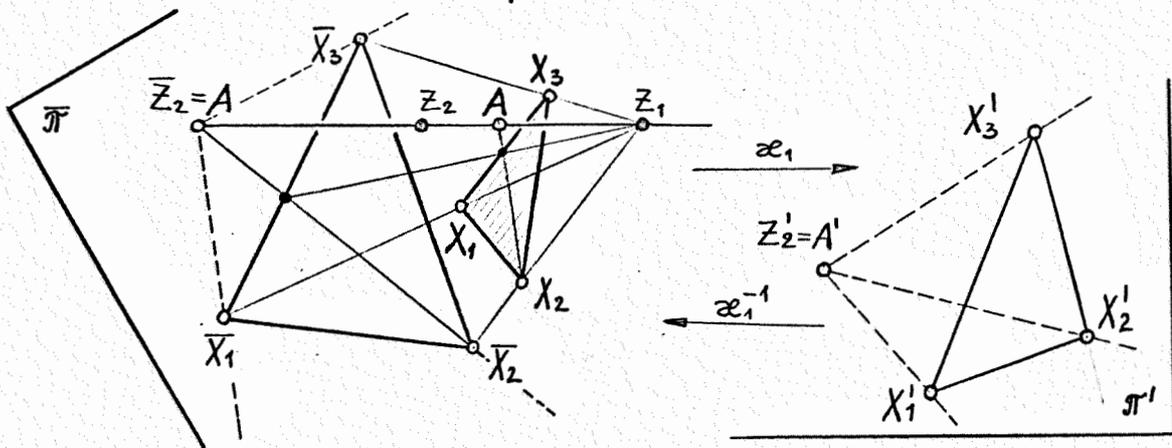
Dies wird beantwortet durch den

Satz 11 : Kennt man die Hauptbildfigur  $\{Z_2', Z_1''; \beta\}$  , so ist bei gegebener zulässiger Hauptraumfigur jede Punktmenge aus  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{K}_0$  ( $\mathcal{K}_0 = Z_1 + Z_2$ ) aus den Bildpaaren eindeutig rekonstruierbar, falls man von drei nicht kollinearen Punkten  $X_j$  , deren Verbindungsgeraden den Doppelsehstrahl  $\mathcal{O}$  nicht schneiden und deren Ebene nicht projizierend ist, die Bildpaare  $(X'X'')$  so vorgibt, daß  $\{Z_2'; X_1', X_2', X_3'\}$  und  $\{Z_1''; X_1'', X_2'', X_3''\}$  je ein Viereck sind.  
 Die zu zwei  $\neq$  zulässigen Hauptraumfiguren rekonstruierten Punktmengen sind (proj.) kollinear.

Bemerkung: Die letzte Aussage von Satz 11 ist gleichbedeutend mit: Durch das Zweibildersystem ist das Objekt bis auf Kollineationen eindeutig bestimmt.

Beweis von Satz 11 :

- a) Geg. Dreieck  $X_1 X_2 X_3$  "allgemein" (d.h. keine Seite trifft  $\mathcal{O}$  ,  
 $(X_1 X_2 X_3) \cap \mathcal{O} = A \neq | Z_1, Z_2$  )

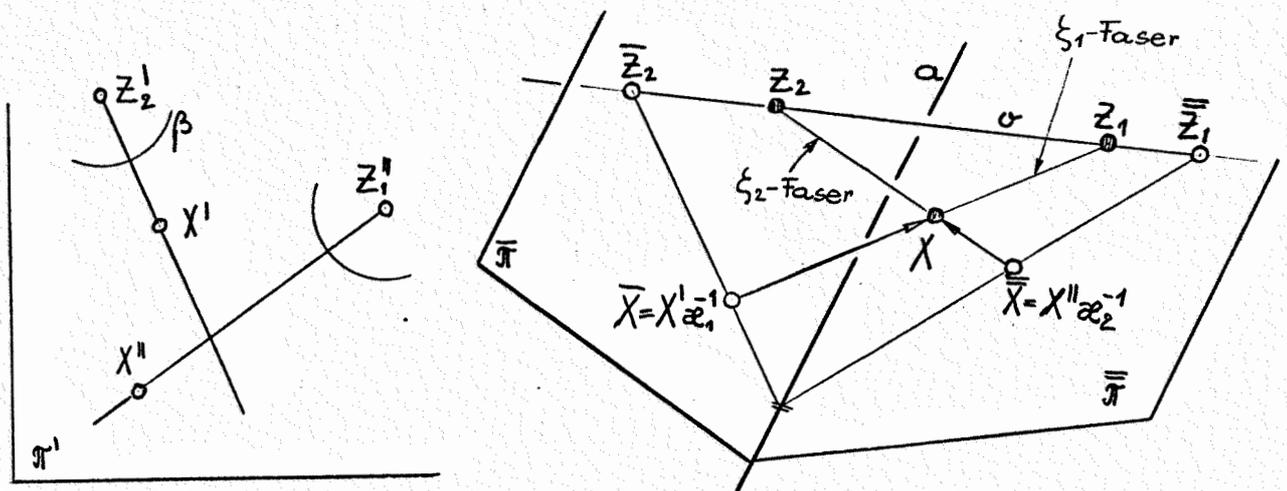


Unter den gegebenen Vs. ist  $\{X_1, X_2, X_3, A\}$  ein Viereck in einer Ebene nicht durch  $Z_1 \Rightarrow \{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{A}=\bar{Z}_2\}$  mit  $\bar{X}_j = X_j \xi_1$  ist ein Viereck.

$\Rightarrow \exists^*$  Koll.  $\alpha_1$  mit  $\{X'_1, X'_2, X'_3, Z'_2\} \xrightarrow{\alpha_1^{-1}} \{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{Z}_2\}$  .

Analog  $\exists^*$  Koll.  $\alpha_2$  mit  $\{X''_1, X''_2, X''_3, Z''_1\} \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} \{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{Z}_1\}$  .

Dabei stammen die drei gegeb. Paare von Ordnungsstrahlen von den Spuren (=Kernstrahlen) gewisser doppeltprojizierender Ebenen; diese Spuren treffen einander auf  $a = \bar{\pi} \cdot \bar{\pi}$  .  $\Rightarrow$  Die durch  $\{\beta; \alpha_1, \alpha_2\}$  bestimmte Projektivität der Kernbündel ist eine Perspektivität mit der Achse  $a = \bar{\pi} \cdot \bar{\pi}$  , da dies für drei Strahlenpaare gilt.



Zu jedem Paar  $(X', X'') \neq (Z'_2, Z''_1)$  ist der zugehörige Raumpunkt bestimmbar.  $(X = (X', X'') \cdot (\varphi_1, \varphi_2)^{-1}, X \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0)$  .

b) Die Rekonstruktion sei durchgeführt für zwei  $\neq$  Haupttraumfiguren  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{H}^*$  .

$X \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$  (bzgl.  $\mathcal{H}$ )  $\xrightarrow{(\varphi_1, \varphi_2)} (X', X'') \xrightarrow{(\varphi_1^*, \varphi_2^*)^{-1}} X^* \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0^*$  (bzgl.  $\mathcal{H}^*$ )

Zu jedem  $X \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0 \exists X \cdot (\varphi_1, \varphi_2) = (X', X'')$  , zu jedem solchen Paar  $(X', X'') \exists$  mittels der Rekonstruktion  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)^{-1}$  ein Punkt  $X^* \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0^*$  .

(Def.  $(\varphi_1, \varphi_2) \cdot (\varphi_1^*, \varphi_2^*)^{-1} | \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0 =: \tilde{\alpha}$  .)

Beh.: Die Abbildung  $\tilde{\alpha}: \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0^*$  läßt sich in genau eine Kollineation  $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  einbetten. ( $\tilde{\alpha} = \alpha | \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$  ) .

Zu zeigen:  $\tilde{\alpha}$  hat die Eigenschaften einer Kollineation in  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$  . und läßt sich in  $\mathcal{P}$  zu einer einzigen Kollineation erweitern.

(1)  $\tilde{\alpha}$  ist eine globale Abbild. auf  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$  .

(Dies ist aufgrund der Konstruktion von  $\tilde{\alpha}$  gewährleistet; siehe oben).

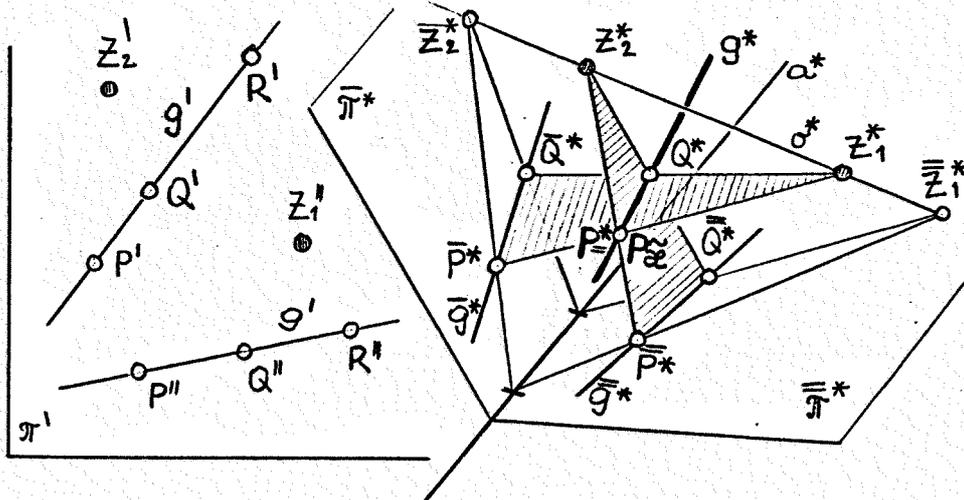
(2)  $\tilde{\alpha}$  ist eine bijektive Abbild. von  $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_0 \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_0^*$   
(Dies ist erfüllt, siehe oben).

(3)  $\tilde{\alpha}$  erhält in  $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_0$  kollineare Lage.

Um dies zu zeigen ist eine Fallunterscheidung erforderlich.

Fall 1 :  $P, Q, R \mid (\neq)$ , kollinear mit  $g$ ,  $g$  windschief  $\sigma$  :

$\Rightarrow P', Q', R'$  kollinear mit  $g' \nmid Z_2'$ ;  $P'', Q'', R''$  koll. mit  $g'' \nmid Z_1'$ .



Rekonstruktion:

$$\bar{Z}_2 \nmid g^*, \bar{Z}_1 \nmid g^*$$

$$\Rightarrow Z_1^* \cdot \bar{g}^* = \delta_1^*$$

$$Z_2^* \cdot \bar{g}^* = \delta_2^*$$

$$\Rightarrow \delta_1^* \cdot \delta_2^* = g^* \dots$$

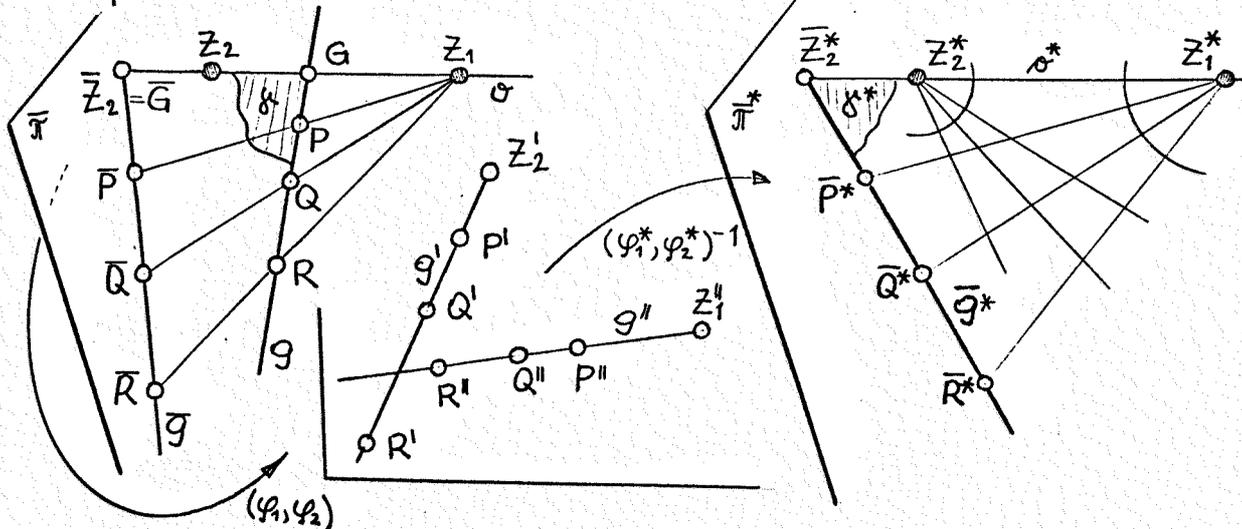
Schnittgerade für  $\delta_1^* \neq \delta_2^*$ . Nur dieser Fall ist möglich: (ind.):

Falls  $\delta_1^* = \delta_2^*$ , so ist  $\delta_1^*$  doppelprojizierend  $\Rightarrow$  Spuren von  $\delta_1^*$  sind Kernstrahlen  $\Rightarrow g^* \nmid \bar{Z}^*$ , im Widerspruch zur Vs..  
 $\Rightarrow P\tilde{\alpha}, Q\tilde{\alpha}, R\tilde{\alpha}$  kollinear.

Fall 2 :  $P, Q, R \mid (\neq)$ , kollinear mit  $g$ ,  $g$  erstprojizierend

$\Rightarrow P' = Q' = R' (\neq Z_2')$   $\Rightarrow P^*, Q^*, R^*$  inzidieren mit einer  $\varphi_1^*$ -Faser, also mit einer Geraden  $g^*$  durch  $Z_1^*$ .  $\Rightarrow P^*, Q^*, R^*$  kollinear.

Fall 3 :  $P, Q, R \mid (\neq)$ , kollinear mit  $g$ ,  $g$  schneidet  $\sigma$  in  $G \neq \{Z_1, Z_2$  :



$$DV(P,Q,R,G) = \delta \begin{cases} \xrightarrow{\xi_1} DV(\bar{P},\bar{Q},\bar{R},\bar{G}=\bar{Z}_2) = \delta \implies \\ \xrightarrow{\xi_2} DV(\bar{P},\bar{Q},\bar{R},\bar{G}=\bar{Z}_1) = \delta \implies \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\alpha_1} DV(P',Q',R',Z') = \delta \\ \xrightarrow{\alpha_2} DV(P'',Q'',R'',Z'') = \delta \end{array} \right\} \text{ wegen } \alpha_j \dots \text{proj. Kollineation.}$$

Damit gilt aber wegen  $\varphi_j^* = \xi_j^* \cdot \alpha_j^*$  :

$\delta = DV(\bar{P}^*,\bar{Q}^*,\bar{R}^*,\bar{Z}_2^*) = DV(\bar{P}^*,\bar{Q}^*,\bar{R}^*,\bar{Z}_1^*)$  und  $\bar{g}^*$  trifft  $\bar{g}^*$ .

Die zugehörigen Sehstrahlen  $Z_1^*\bar{P}^*, \dots, Z_2^*\bar{P}^*, \dots$  passen in genau eine Projektivität  $\pi$  in einer doppeltproj. Ebene  $\mathfrak{J}^*$ ; für diese ist der Strahl  $Z_1^*, Z_2^*$  selbstentsprechend, denn  $Z_1^*\bar{Z}_2^* = \mathfrak{O}^*$  und  $Z_2^*\bar{Z}_1^* = \mathfrak{O}^*$  sind zugeordnete Sehstrahlen.

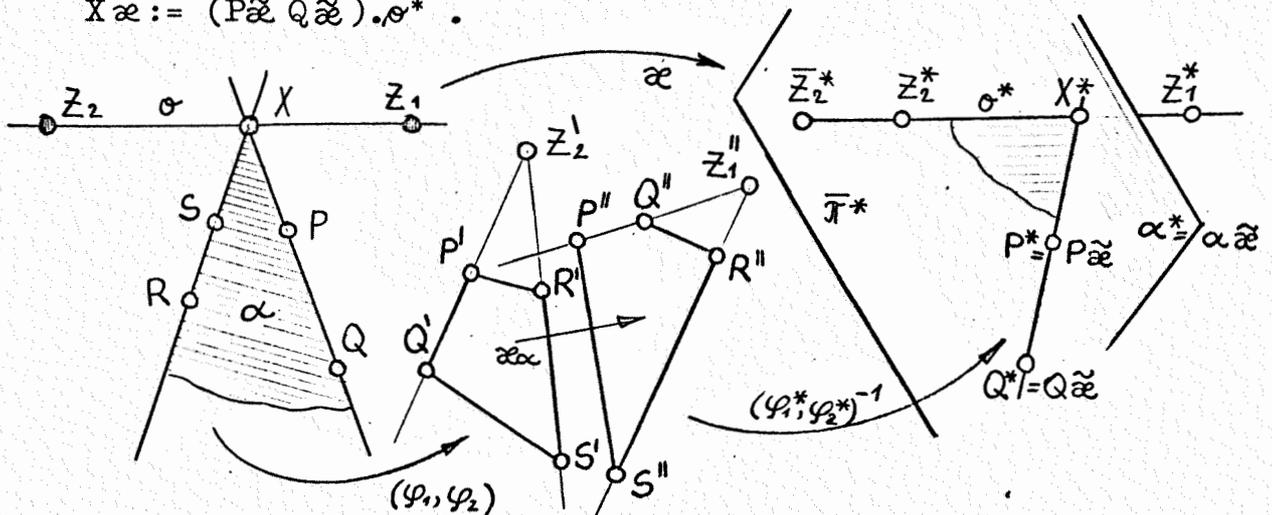
$\implies$  Das Erzeugnis von  $\pi$  ist eine Gerade  $g^*$  in  $\mathfrak{J}^*$  ( $g^* \dots$  Perspektivitätsachse,  $\implies g^* \not\perp [Z_1^*, Z_2^*]$ ).  $\implies P^*, Q^*, R^*$  kollinear mit  $g^*$ .

Wir haben nun gezeigt:  $\tilde{\alpha}$  erhält kollineare Lage von Punkttripeln aus  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$ .

(4) Erweiterung von  $\tilde{\alpha}$  in den Gesamttraum  $\mathcal{P}$  :

Wir konstruieren  $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  durch

- (I)  $X\alpha := X\tilde{\alpha} \quad \forall X \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$
- (II)  $Z_j\alpha := Z_j^*$  ( $j=1,2$ ) (d.h. die beschrifteten Ausnahmepunkte sind einander zugeordnet)
- (III)  $X \in \mathcal{P}_0 \setminus \{Z_1, Z_2\}$  ;  $X \bar{\perp}$  Hilfsgerade  $PQ \neq \mathfrak{O}$  ( $X \neq P, Q$ ) mit:  $X\alpha := (P\tilde{\alpha} Q\tilde{\alpha}) \cdot \mathfrak{O}^*$ .



Die Forderung (III) ist dann sinnvoll, wenn  $X^*$  unabhängig von der Auswahl der Punkte  $P, Q \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$  ( $X, P, Q$  koll.) festgelegt ist.

Um dies zu zeigen, gittern wir  $X$  an eine neue Punktreihe  $\mathcal{P}_{RS} (R, S \mid \neq X)$ . Dabei genügt es  $PQRS = \alpha$  allgemein vorauszusetzen; (durch Zwischenschalten eines allgemeinen Punktepaares einer Reihe durch  $X$  ist diese Vs. stets erfüllbar).

Dann gilt: In  $\alpha$  bilden  $\{P, Q, R, S\}$  ein Viereck  $\Rightarrow \{P', Q', R', S'\}$  und  $\{P'', Q'', R'', S''\}$  sind Vierecke in  $\pi'$  (da  $\alpha \bar{I} \mid Z_1, Z_2$ ) und legen genau eine Kollineation  $\mathcal{K}_\alpha$  fest. ( $\mathcal{K}_\alpha$  ist das  $(\varphi_1, \varphi_2)$ -Bild von  $\alpha$ ).  $\mathcal{K}_\alpha$  hat die Eigenschaft, daß  $\mathcal{K}_\alpha \mid \mathcal{O}_j \mid Z_2 = \beta$  ist.

Bei der Rekonstruktion  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)^{-1}$  gehört zu  $\mathcal{K}_\alpha$  eine eindeutig bestimmte, allgemeine Ebene  $\alpha^*$ , die  $\sigma^*$  im Punkt  $X^*$  schneidet.  $P', Q', Z_2'$  und  $P'', Q'', Z_1''$  sind kollinear  $\Rightarrow P\mathcal{K} = P^*, Q\mathcal{K} = Q^*$  liegen in einer doppeltprojizierenden Ebene durch  $\sigma^*$  und in  $\alpha^* \Rightarrow X^* = \sigma^* \cdot (P^*Q^*)$ .

Analog: Wegen  $R', S', Z_2'$  und  $R'', S'', Z_1''$  kollinear folgt  $X^* = \sigma^* \cdot (R^*S^*) (R^*, S^* \mid I \alpha^*)$ .  
 $\Rightarrow X^* = X\mathcal{K}$ .

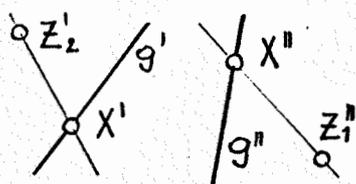
Somit ist (III) sinnvoll und die konstruierte Kollineation  $\mathcal{K}$  ist die (eindeutige) Erweiterung von  $\tilde{\mathcal{K}}$  zu einer Kollineation.

Die aus einem festen Zweibildersystem bezügl. zweier  $\neq$  Hauptraumfiguren rekonstruierten Punktmengen sind durch die Kollineation  $\mathcal{K}$  gekoppelt.  $\diamond$

Bemerkung a): Rekonstruktion von Geraden.

$$\mathcal{O}_j \subset \Pi(R), g \in \mathcal{O}_j \xrightarrow{(\varphi_1, \varphi_2)} (g', g'') \Rightarrow (g', g'') \xrightarrow{(\varphi_1, \varphi_2)^{-1}} g ?$$

Fall 1:  $g$  windschief  $\sigma$ .

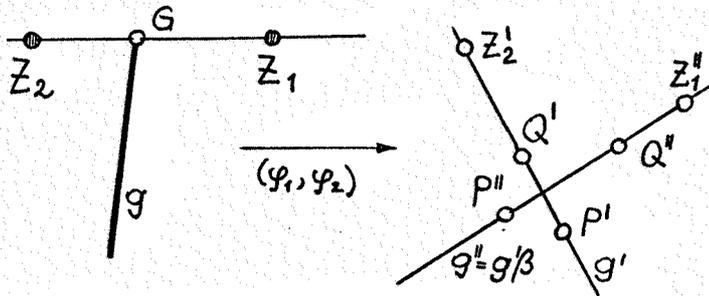


Man rekonstruiert zwei  $\neq$  Punkte (mittels der Ordnerprojektivität  $\beta$ )  $\Rightarrow g$  eindeutig bestimmt.

Fall 2:  $g \bar{I} Z_1 \wedge g \bar{I} Z_2 \Rightarrow g'$  ist ein Punkt,  $g''$  ist ein Ordnungsstrahl.  $\Rightarrow g$  ist rekonstruierbar ( $\varphi_1$ -Faser)

Fall 3:  $g = \sigma \Rightarrow g' = Z_1', g'' = Z_1'' \Rightarrow$  Rekonstruktion ist eindeutig möglich.

Fall 4:  $g$  schneidet  $\sigma$  in  $G \neq |Z_2, Z_1$



$\Rightarrow g \in \mathcal{O}_g$  nicht rekonstruierbar,  $\mathcal{K}_g$  ist rekonstruierbar, wenn man die Bildpaare zweier von  $G$  verschiedener Punkte  $P, Q (\neq)$  kennt.

Dann ist nämlich durch  $P' \mapsto P''$ ,  $Q' \mapsto Q''$ ,  $Z' \mapsto Z''$  eine Projektivität  $\mathcal{K}$  festgelegt, sodaß für jedes  $X \in \mathcal{K}_g$  gilt:  $X' \mathcal{K} = X''$ .

Rekonstruiert man zu zwei von  $(Z'_2, Z'_1)$  verschiedenen Paaren der Projektivität  $\mathcal{K}$  die zugehörigen Raumpunkte, so ist dadurch  $\mathcal{K}_g$  als Verbindungsgerade festgelegt.

Bemerkung b): Rekonstruktion der Hauptbildfigur, wenn eine genügend große Anzahl von Bildpaaren vorgegeben ist. D.h.: Man finde zwei Punkte  $(Z'_2, Z'_1)$  aus  $\pi'$  so, daß alle ersten Bilder, aus  $Z'_2$  projiziert, und alle zweiten Bilder, aus  $Z'_1$  projiziert, projektive Büschel bilden.

Hiezu gilt speziell für  $K=\mathbb{R}$ :

Zur Lösung des "Problems der ebenen Projektivität" sind i.a. sieben Paare  $(X'_2, X'_1)$  der reellen proj. Bildebene  $\pi'(\mathbb{R})$  erforderlich. Es gibt 3,2,1 Paare von Zentren  $Z'_2, Z'_1$  so, daß die Büschel projektiv sind.

Dieses den Erfordernissen der Fotogrammetrie entspringende Problem ist allgemein nur sehr umständlich lösbar. Im euklid. Raum wird bei Kenntnis der inneren Orientierung der Bildebenen (also Hauptpunkt und Augdistanz) der Lösungsweg vereinfacht.

## 2.4 Koinzidenzgeraden, Koinzidenzpunkte

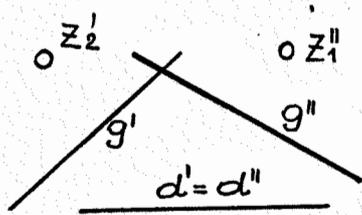
Def.:  $\mathcal{K} := \{d \in \mathcal{O}_g \text{ mit } d' = d''\}$  ...Menge der Koinzidenzgeraden  
 $\mathcal{K}_g := \{X \in \mathcal{K} \setminus \{Z_1, Z_2\} \text{ mit } X' = X''\}$  ...Menge der Koinzidenzpunkte

Koinzidenzgeraden:

Fall 1:  $d = \emptyset \Rightarrow d' = Z_2', d'' = Z_1'' \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{Q} \iff Z_1'' = Z_2' \iff (\varphi_1, \varphi_2)$  ist vom 3. oder 4. Typ.

Fall 2:  $d \perp Z_1, \not\perp Z_2 \Rightarrow d' \dots$  Punkt,  $d'' \dots$  Gerade  
 $\Rightarrow \mathcal{P}d' \neq \mathcal{P}d'' \Rightarrow d \notin \mathcal{Q}$

Fall 3:  $d \not\perp Z_1, Z_2$  In  $\mathcal{P}'$ : Geradenfeld  $\mathcal{G}', \mathcal{G}''$ :



$$\begin{aligned} \mathcal{G}' &\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} \bar{\mathcal{G}} \xrightarrow{\text{persp.}} \mathcal{E}_{Z_1}; \\ \mathcal{G}'' &\xrightarrow{\alpha_2^{-1}} \bar{\mathcal{G}} \xrightarrow{\text{persp.}} \mathcal{E}_{Z_2}; \end{aligned}$$

Für  $d' = d'' \Rightarrow \mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''$ .

( $\cup$  ... Identität ist spezielle Kollineation).

Aus  $\mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''$  folgt somit:  $\mathcal{E}_{Z_1}$  koll.  $\mathcal{E}_{Z_2}$ ; also wird durch die Identifizierung  $d' = d''$  eine Bündelkollineation  $\sigma: \mathcal{E}_{Z_1} \rightarrow \mathcal{E}_{Z_2}$  im Raum induziert, derart, daß zu jeder Bündelebene  $\xi \in \mathcal{E}_{Z_1}$  eine Ebene  $\xi\sigma \in \mathcal{E}_{Z_2}$  gehört mit  $\xi'$  (Gerade) gleich  $\xi'\sigma$  (Gerade).

$\Rightarrow d \in \mathcal{Q}$  genau dann, wenn gilt:  $dZ_1 = \xi \Rightarrow d \perp \xi\sigma$ ; also genau dann, wenn  $d$  gleichzeitig mit zwei in  $\sigma$  zugeordneten Sehebenen inzidiert.

$\Rightarrow \mathcal{Q}$  ist das Erzeugnis der beiden kollinear  $\neq$  Ebenenbündel  $\mathcal{E}_{Z_1}$  und  $\mathcal{E}_{Z_2}$ .

Koinzidenzpunkte:

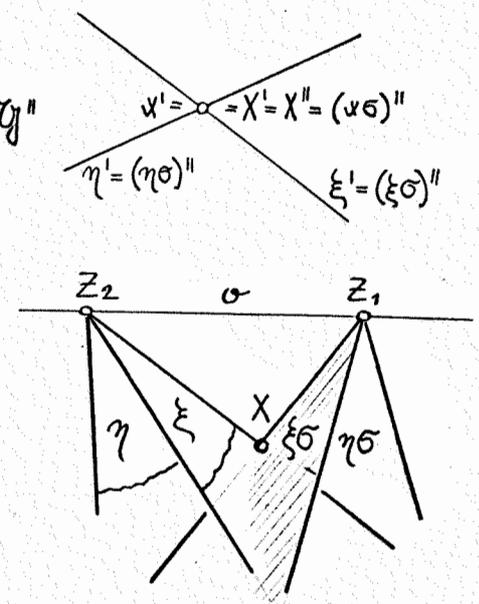
Fall 1:  $X \in \mathcal{P}_0 \setminus \{Z_1, Z_2\} \Rightarrow X' = Z_2', X'' = Z_1''$   
 $\Rightarrow X \in \mathcal{K} \iff Z_1'' = Z_2'$

$\Rightarrow$  Punkte auf  $\emptyset$  ( $\neq Z_1, Z_2$ ) sind genau dann Koinzidenzpunkte, wenn ein lin. Zweibildersystem vom 3. oder 4. Typ vorliegt.

Fall 2: Für  $X \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$  sei  $X' = X'' \Rightarrow$

Im Ebenenbündel  $\mathcal{E}_{Z_1}$  ]  $\xi, \eta$  ( $\in \emptyset$ ) durch  $X$ , denen in der durch  $\iota = \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}''$  induzierten Bündelkollineation  $\sigma: \mathcal{E}_{Z_1} \rightarrow \mathcal{E}_{Z_2}$  Ebenen  $\xi\sigma, \eta\sigma$  ( $\in \emptyset$ ) durch  $X$  zugeordnet sind.  $\Rightarrow$   
 $x = \xi, \eta \xrightarrow{\sigma} x\sigma = \xi\sigma, \eta\sigma \Rightarrow$

Die Kollineation  $\sigma$  der Ebenenbündel induziert eine Kollineation der Geradenbündel  $\mathcal{G}_{Z_1} \rightarrow \mathcal{G}_{Z_2}$ .



Für einen Koinzidenzpunkt  $X$  (mit  $X'=X''$ ) gilt daher:

$$XZ_1 = x \wedge x\sigma = XZ_2.$$

( $X$  ist Schnittpunkt zweier in der Kollineation  $\sigma$  zugeordneter Strahlen.)

Zwischenbemerkung: Fallunterscheidung der Bündelkollineation (vgl. Proj. Geom.):

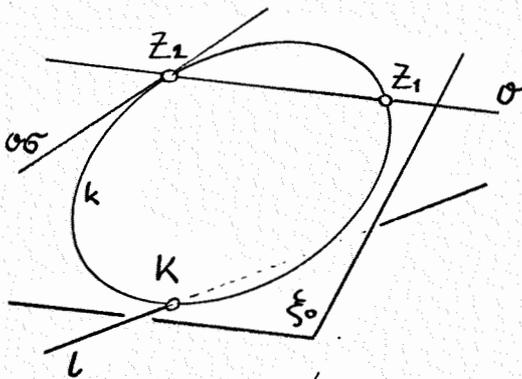
Fall 1) Der gemeinsame Bündelstrahl  $\sigma$  ist in  $\sigma$  nicht selbstentsprechend  $\wedge \exists$  keine selbstentsprechenden (doppeltproj.) Ebenen.

Proj. Geom. Satz 14.2: Die Menge der Schnittpunkte zugeordneter schneidender Geraden ist eine Kubik  $k$  durch  $Z_1$  und  $Z_2$ .

Die Menge der Schnittgeraden zugeordneter Ebenen ist die Sehnenkongruenz von  $k$  (Sehnenkongruenz := {eigentl. Sehnen}  $\cup$  {Tangenten}  $\cup$  {uneigentlichen Sehnen}).

Fall 2) In  $\sigma$   $\exists^*$  selbstentsprechende Ebene  $\xi_0$  ( $\xi_0$  ist notwendig doppeltprojizierend).  $\sigma$  sei nicht selbstentsprechend.

Proj. Geom. Satz 15.2: Die Menge der Schnittpunkte zugeordneter schneidender Geraden ist ein Kegelschnitt  $k$  durch  $Z_1, Z_2$  in  $\xi_0$  und eine Sekante  $l$  von  $k$ , die  $k$  in einem Punkt  $K \neq Z_1, Z_2$  trifft.



Das Erzeugnis der Ebenenbündel ist das Geradenfeld  $\mathcal{G}\xi_0$  und die Sehnenkongruenz des Paares  $(k, l)$ .

(Sehnenkongruenz von  $(k, l)$  := {Sehnen von  $k$  und  $l$ }  $\cup$  Bündel  $(K, \xi_0)$   $\cup$  Bündel  $(K, l, t)$ ;  $t \dots$  Tgte. von  $k$  in  $K$ ).

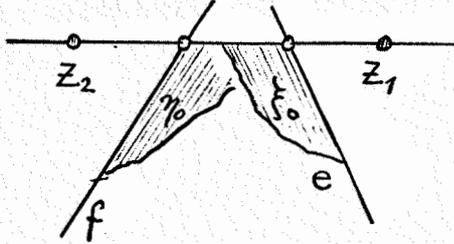
Fall 3)  $\sigma$  ist in  $\sigma$  selbstentsprechend.

$\Rightarrow \sigma|_{\mathcal{E}_0}$  ist eine Projektivität  $\neq \iota$  mit

$\begin{cases} 2 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$  Fixebenen  $\Rightarrow \sigma|_{\mathcal{E}_{z_1}}$  ist  $\begin{cases} \text{hyperb.} \\ \text{parabol.} \\ \text{ellipt.} \end{cases}$  Projektivität.

$\alpha)$   $\sigma|_{\mathcal{E}_0}$  ist eine hyperb. Projektivität ( $\Rightarrow \exists$  Fixebenen  $\xi_0, \eta_0$ )

Proj. Geom. Satz 15.3: Die Menge der Schnittpunkte zugehöriger Bündelstrahlen ist  $\mathcal{K}_0$  und zwei Punktreihen  $\mathcal{K}_e, \mathcal{K}_f$ , wobei gilt:  $e$  windschief  $f$ ;  $e, f$  schneiden  $\sigma$  in von  $Z_j$  verschiedenen Punkten;  $\sigma e = \xi_0$ ,  $\sigma f = \eta_0$ .



Das Erzeugnis der koll. Ebenenbündel ist das hyperbolische Netz  $\{e, f\}$  zusammen mit den Geradenfeldern  $\mathcal{G}_{\xi_0}, \mathcal{G}_{\eta_0}$ .

$\beta)$   $\sigma|_{\mathcal{E}_0}$  ist eine parabol. Projektivität ( $\Rightarrow \exists^*$  Fixebene  $\xi_0$ ).

Proj. Geom. Satz 15.3: Die Menge der Schnittpunkte zugehöriger Geraden besteht aus  $\mathcal{K}_0$  und  $\mathcal{K}_e$ , wobei  $e$  schneidet  $\sigma$  nicht in  $Z_j$  und  $\xi_0 = \sigma.e$ .

Das Erzeugnis der koll. Ebenenbündel ist ein parabolisches Netz mit der Achse  $e$  zusammen mit dem Geradenfeld  $\mathcal{G}_{\xi_0}$ .

$\gamma)$   $\sigma|_{\mathcal{E}_0}$  ist eine ellipt. Projektivität.

Proj. Geom. Satz 15.3: Das Erzeugnis zugeordneter schneidender Geraden ist  $\mathcal{K}_0$ .

Das Erzeugnis der koll. Ebenenbündel ist definiert als ellipt. Netz.

Fall 4)  $\sigma|_{\mathcal{E}_0}$  ist die Identität.

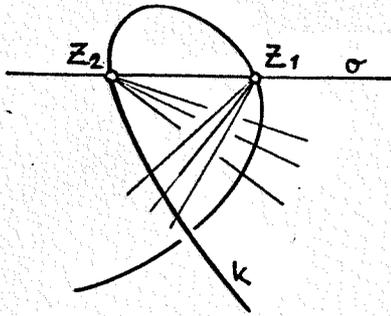
Proj. Geom. Satz 15.1: Die Bündel  $\mathcal{G}_{z_1}, \mathcal{G}_{z_2}$  (bzw.  $\mathcal{E}_{z_1}, \mathcal{E}_{z_2}$ ) sind perspektiv kollinear; d.h. das Erzeugnis der Geradenbündel ist die Perspektivitätsachse  $\xi$  ( $\xi \notin Z_j$ ) zusammen mit  $\mathcal{K}_0$ ; das Erzeugnis der Ebenenbündel ist das Geradenfeld  $\mathcal{G}_{\xi}$  vereinigt mit dem Gebüsch mit dem Träger  $\sigma$ .

Die vier Typen von lin. Zweibildersystem lassen sich nicht bloß hinsichtlich der Hauptbildfigur charakterisieren, sondern auch durch das zugehörige Koinzidenzgebilde im Ur-raum.

1) Für ein lin. Z.B.S. vom 1. Typus gilt wegen  $Z_1'' = Z_2'$ :  $\mathcal{K}_0 \notin k$  ( $\sigma$  nicht selbstentsprechend in  $\sigma$ ) und wegen  $\beta$ ...Projektivität  $\neq$  Perspektivität gilt:

$$(Z_2' Z_1'') \neq (Z_2'' Z_1') \beta$$

, also  $\exists$  keine selbstentsprechende Ebene in  $\sigma$ .  $\sigma$  gehört damit zu Fall 1 in obiger Zwischenbemerkung.

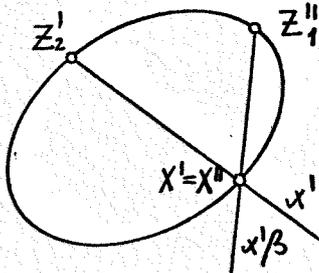


$$\Rightarrow k := \text{Kubik } k \setminus \{Z_1, Z_2\}$$

$\mathcal{Q} :=$  Sehnenkongruenz von  $k$  vermindert um die beiden Sehnenkegel mit den Scheiteln  $Z_1, Z_2$ .

(Sehstrahlen sind nie Koinzidenzgeraden; ,vgl. "Koinzidenzger.", Fall 1 und 2).

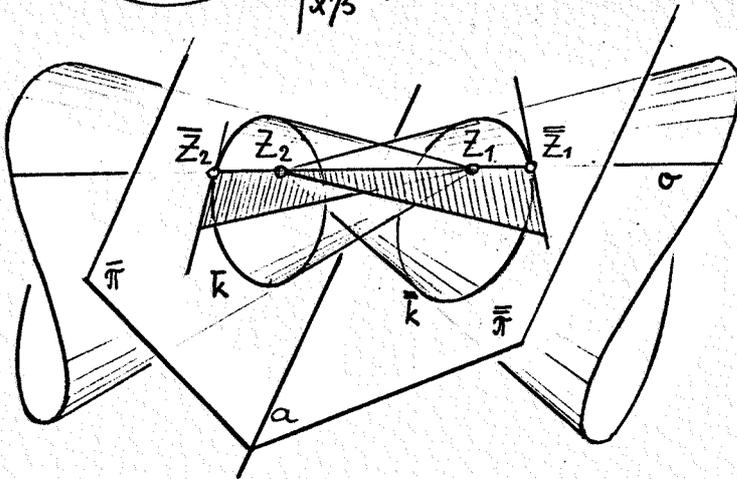
Bemerkung zu 1):



Für  $X$  mit  $X' = X''$  muß notwendig gelten:  $X' = X'' \in$  Ordnungskegelschnitt.

$\Rightarrow$  Der Ordnungskegelschnitt ist erstes und zweites Bild der Koinzidenzkubik  $k$ .

$\Rightarrow$  Konstruktion von  $k$  :

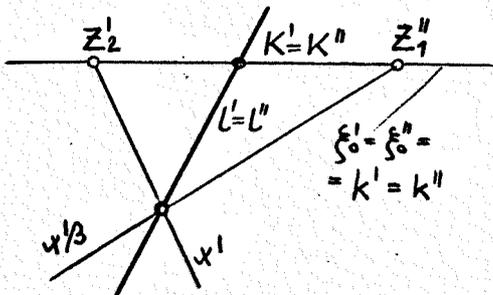


$$k' \alpha_1^{-1} = \bar{k} \subset \bar{\pi} \text{ mit } \bar{Z}_2 \perp \bar{k}$$

$$k'' \alpha_2^{-1} = \bar{k} \subset \bar{\pi} \text{ mit } \bar{Z}_1 \perp \bar{k}$$

$\Rightarrow$  Zugehörige  $\xi_j$ -Fasern bilden 2 quadratische Kegel mit der gemeinsamen Erzeugenden  $\sigma \Rightarrow k$  ist Restschnitt dieser quadr. Kegel.

2) Für ein lin. Z.B.S. vom 2. Typus gilt wegen  $Z_1'' = Z_2'$  :  $k_0 \notin k$ , d.h.  $\sigma$  ist in  $\sigma$  nicht selbstentsprechend; wegen  $\beta$ ...Perspektivität gilt:  $Z_1'' Z_2' = \xi_0' = \xi_0''$ , d.h.  $\exists$  eine (und nur eine) selbstentsprechende Ebene  $\xi_0$  in der Bündelkoll.  $\sigma$ .  $\Rightarrow$  Damit liegt der in der Zwischenbem. behandelte Fall 2 vor:  $\exists$  Kegelschnitt  $k$  in  $\xi_0$  und eine Koinzidenzpunktgerade  $l$  als Sekante von  $k$ . Die durch  $\beta$



bestimmte Perspektivitätsachse  $l' = l''$  ist Bildmenge von Koinzidenzpunkten.

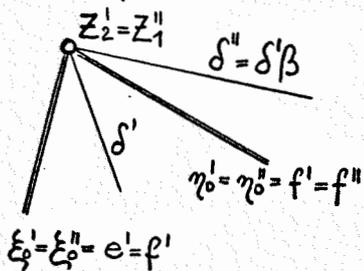
$$\Rightarrow k := \text{Kegelschnitt } k \setminus \{Z_1, Z_2\} \cup l.$$

$\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_{\xi_0} \cup$  Sehnenkongruenz  $(k, l)$ , vermindert um alle in der Vereinigungsmenge liegenden Sehstrahlen.

- 3) Für ein lin. Z.B.S. vom 3. Typus gilt wegen  $Z_1' = Z_2'$  :  
 $\mathbb{P}_\sigma \setminus \{Z_1, Z_2\} \subset \mathbb{k} \Rightarrow$  In  $\sigma$  ist  $\mathcal{O}$  eine selbstentsprechende Gerade.

Wegen  $\beta \neq \iota$  liegt damit der in Zwischenbem. behandelte Fall 3) vor.

$\alpha)$   $\beta$  ist eine hyperb. Projektivität  $\Rightarrow$



$\exists 2 \neq$  Fixstrahlen  $e' = e''$ ,  $f' = f''$ , sodaß gilt:

$$\mathbb{k} := \mathbb{P}_\sigma \setminus \{Z_1, Z_2\} \cup \mathbb{P}_e \cup \mathbb{P}_f$$

$\mathcal{Q} := \mathcal{G}_{\xi_0} \cup \mathcal{G}_{\eta_0} \cup$  hyperb. Netz  $(e, f)$ , vermindert um alle Sehstrahlen außer  $\mathcal{O}$ .

(vgl. "Koinzidenzgeraden", Fall 1 und 2).

$\beta)$   $\beta$  ist eine parabolische Projektivität  $\Rightarrow$

$$\mathbb{k} := \mathbb{P}_\sigma \setminus \{Z_1, Z_2\}$$

$\mathcal{Q} := \mathcal{G}_{\xi_0} \cup$  parab. Netz, vermindert um alle Sehstrahlen außer  $\mathcal{O}$ .

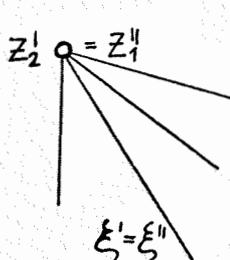
$\gamma)$   $\beta$  ist eine elliptische Projektivität  $\Rightarrow$

$$\mathbb{k} := \mathbb{P}_\sigma \setminus \{Z_1, Z_2\}$$

$\mathcal{Q} :=$  ellipt. Netz.

(In  $\mathcal{Q}$  liegt außer  $\mathcal{O}$  kein Sehstrahl,  $\Rightarrow \mathcal{Q}$  ist das ganze elliptische Netz).

- 4) Für eine lin. Z.B.S. vom 4. Typus gilt wegen  $Z_1'' = Z_2'$  und  $\beta = \iota$  :  $\mathbb{P}_\sigma \setminus \{Z_1, Z_2\} \subset \mathbb{k}$  und  $\sigma \mid \xi_{Z_0} = \iota$ , also liegt gemäß der Zwischenbemerkung der Fall 4) vor.



$\Rightarrow \exists$  nicht projizierende Koinzidenzebene  $\xi_0$ , wobei gilt:

$$\mathbb{k} := \mathbb{P}_{\xi_0} \cup \mathbb{P}_\sigma \setminus \{Z_1, Z_2\};$$

$\mathcal{Q} := \mathcal{G}_{\xi_0} \cup$  Gebüsch um  $\mathcal{O}$ , vermindert um die Sehstrahlen  $\neq \mathcal{O}$ .

Bemerkung zu 4): Die Koinzidenzebene  $\xi_0$  ist eine allgemeine Ebene, die Bildpaare ihrer Punkte bestimmen in  $\pi'$  eine Kollineation  $\alpha_{\xi_0}$  mit  $X' \mapsto X' \alpha_{\xi_0} = X'$ .

$\Rightarrow$  Die Koinzidenzebene ist jene Ebene, deren Bildkollineation die Identität in  $\pi'$  ist. ( $\Rightarrow \alpha_{\xi_0} = \iota$  ist genau für eine lin. Z.B.S. vom 4. Typ möglich.

Allgemein gilt: Die Fixpunkte der Bildkollineation  $\alpha_\alpha$  einer allgemeinen Ebene  $\alpha$  (unter Zugrundelegung eines lin. Z.B.S. von belieb. Typus) sind genau die Bilder der in  $\alpha$  liegenden Koinzidenzpunkte.

Satz 12 : Bei einem lin. Zweibildersystem  $(\varphi_1, \varphi_2)$  erfüllen die Koinzidenzpunkte bzw. Koinzidenzgeraden die folgenden Punkt- bzw. Geradenmengen  $k$  bzw.  $\mathcal{Q}$ .

Für  $(\varphi_1, \varphi_2)$  vom 1. Typ ist  $k$  eine Kubik  $k$  punktiert in  $Z_1, Z_2$  und  $\mathcal{Q}$  die Sehnenkongruenz von  $k$  vermindert um die beiden Sehnenkegel aus  $Z_1$  und  $Z_2$ .

Für  $(\varphi_1, \varphi_2)$  vom 2. Typ ist  $k$  ein Kegelschnitt  $k$  in einer doppelproj. Ebene  $\xi_0$  punktiert in  $Z_1, Z_2$  und eine Sekante  $l$  von  $k$  windschief  $\sigma$ .  $\mathcal{Q}$  ist die Vereinigungsmenge der Sehnenkongruenz des Paares  $(k, l)$  und dem Geradenfeld  $\mathcal{G}_{\xi_0}$  vermindert um die in der Menge enthaltenen Sehstrahlen.

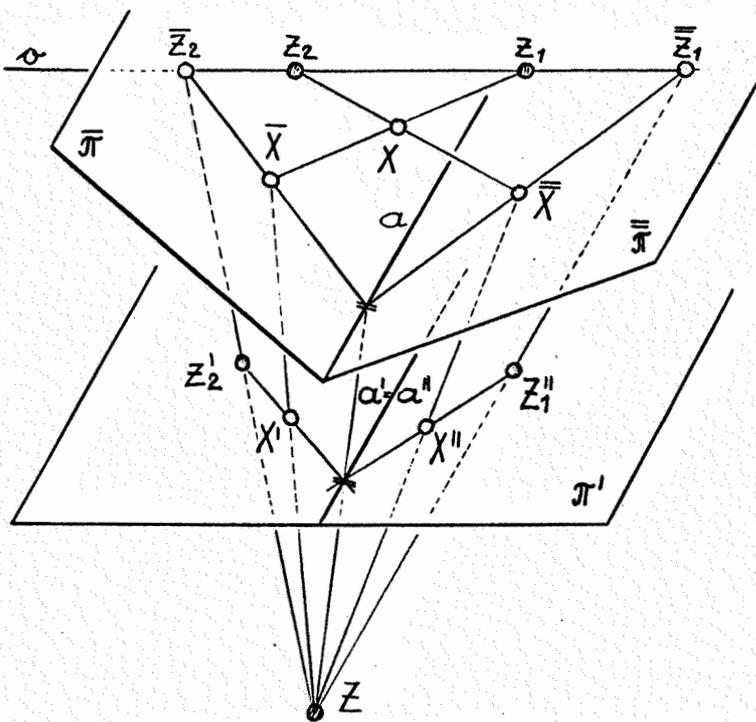
Für  $(\varphi_1, \varphi_2)$  vom 3. Typ ist  $k$  die Punktmenge  $\mathcal{R}_\sigma \setminus \{Z_1, Z_2\}$  und 2 zueinander windschiefe oder 1 oder 0 Treffgeraden von  $\sigma$  nicht durch  $Z_j$ .  $\mathcal{Q}$  ist die Vereinigungsmenge eines hyp., parab., ellipt. Netzes und der Geradenfelder in den Verbindungsebenen von  $\sigma$  mit den Netzachsen vermindert um die in der Menge enthaltenen Sehstrahlen  $\neq \sigma$ .

Für  $(\varphi_1, \varphi_2)$  vom 4. Typ ist  $k$  die Punktmenge  $\mathcal{R}_\sigma \setminus \{Z_1, Z_2\}$  und die Koinzidenzebene  $\xi_0 \setminus \{Z_j\}$ .  $\mathcal{Q}$  ist die Vereinigungsmenge des Geradenfeldes in  $\xi_0$  und dem Gebüsch um  $\sigma$  vermindert um die enthaltenen Sehstrahlen  $\neq \sigma$ .

## 2.5      Spezielle lin. Zweibildersysteme

I.f. sei die Bildebene  $\pi'$  im Raum  $\Pi$  enthalten.

Wir stellen die Frage nach Zweibildersystemen  $(\varphi_1, \varphi_2): \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$ , welche Projektion von 2 Projektionen sind. D.h. mit  $\varphi_1 = \xi_1 \cdot \alpha_1$ ,  $\varphi_2 = \xi_2 \cdot \alpha_2$  soll gelten:  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  lassen sich in eine einzige Zentralkollineation  $\xi$  einbetten.



Falls es solche lin. Z.B.S. gibt, so sind sie sicher nicht vom 1. Typus: Wegen  $Z_1'' \neq Z_2''$  inzidiert der zu  $\xi$  gehörige Ausnahmepunkt  $Z$  nicht mit  $\sigma$ .  $\implies$  Dann muß aber  $\beta$ , als  $\xi$ -Bild der perspektiven Kernstrahlbüschel, notwendig eine Perspektivität sein, also ist  $(\varphi_1, \varphi_2)$  nicht vom 1. Typus, (sondern vom 2. Typus). Wählt man also zu einer

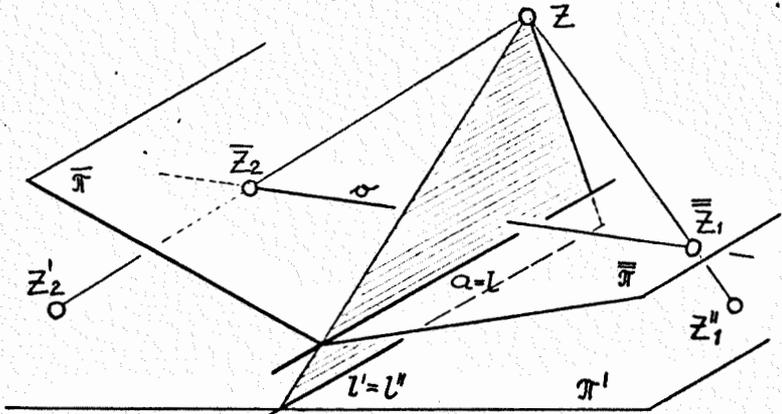
zuläss. Hauptraumfigur ein beliebiges Zentrum  $Z \notin \sigma$ , so ist die Projektion der Ebenen  $\bar{\pi}$  und  $\pi$  aus  $Z$  auf eine Ebene  $\pi'$  ( $\pi' \not\perp Z$ ) ein lin. Z.B.S. vom 2. Typus.

Ist  $(\varphi_1, \varphi_2)$  ein Z.B.S. mit  $Z_2' = Z_1''$ , dann muß  $Z$  (falls  $\exists Z$ ) notwendig auf  $\sigma$  liegen. Jede doppelprojizierende Ebene ist bei  $\xi$  projizierend.  $\implies$  Die Projektivität  $\beta$  der Ordnungsstrahlbüschel ist notwendig die Identität.  $\implies$  Zweibildersysteme vom 3. Typus sind nicht möglich.

Wählt man  $Z$  auf dem Doppelsehstrahl  $\sigma$  einer zuläss. Hauptraumfigur, dann ist die Projektion der Ebenen  $\bar{\pi}, \pi$  aus  $Z$  auf eine Ebene  $\pi'$  ( $\pi' \not\perp Z$ ) notwendig ein lin. Z.B.S. vom Typus 4).

Umkehrung:  $\exists$  zu einem belieb. Z.B.S.  $(\varphi_1, \varphi_2)$  vom 2. oder 4. Typus stets zuläss. Hauptraumfiguren  $\mathcal{H}$  und Zentren  $Z$  so, daß dies gegeb. Z.B.S. Zentralprojektion von  $\mathcal{H}$  aus  $Z$  ist.

Beweis für  $(\varphi_1, \varphi_2)$  vom 2. Typus:



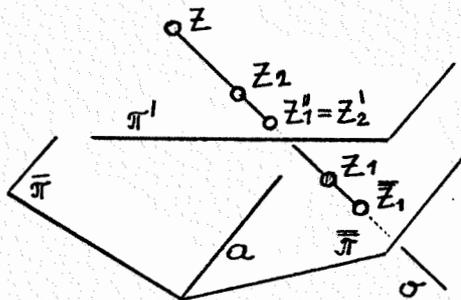
Die Ordnungssache ist punktweise fest  $\implies$  sie ist Zentralbild des Grundchnittes  $a$  (=Sekante  $l$  des Koinzidenzkegelschnittes  $k \in \xi_0$ ). Wählt man  $Z \in \ell$  belieb. ( $Z \notin \pi'$ ), dann ist  $Z_1'' Z_2' Z = \xi_0$  die Trägerebene

von  $k$ . Der Grundschnitt  $a$  kann in  $Z_1'$  ( $\neq \pi'$ ) beliebig ( $a \not\perp Z$ ) vorgegeben werden; durch  $a$  sind dann die Ebenen  $\bar{\pi}$ ,  $\bar{\pi}'$  zulässig zu wählen (d.h.  $\bar{\pi} \neq \bar{\pi}'$ ,  $Z \not\perp \bar{\pi}, \bar{\pi}'$ ).

Dann ist  $ZZ_2' \cap \bar{\pi} = \bar{Z}_2$ ,  $ZZ_1' \cap \bar{\pi}' = \bar{Z}_1$  und  $\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 = \emptyset$  festgelegt. Auf  $\emptyset$  ist noch  $Z_1, Z_2$  (zulässig) anzugeben.

Somit hat man für die Wahl von  $Z$  drei Freiheitsgrade, für  $a$  zwei und für  $\bar{\pi}, \bar{\pi}', Z_1, Z_2$  jeweils einen Freiheitsgrad (zusammen 9 Freiheitsgrade für  $\mathcal{H}$ ).

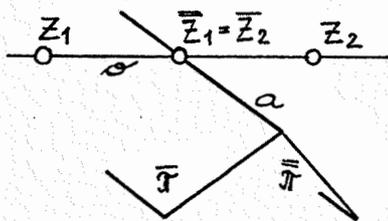
Beweis für  $(\varphi_1, \varphi_2)$  vom 4. Typus:



Wählt man  $Z$  nicht in  $\pi'$  (3 Freiheitsgrade), so ist  $\emptyset$  festgelegt  $\Rightarrow$  je ein Freiheitsgrad für  $Z_1$  und  $Z_2$  aus  $\emptyset$ . Durch zulässige Angabe von  $\bar{\pi}$  und  $\bar{\pi}'$  (je 3 Freiheitsgrade) ist  $\mathcal{H}$  vervollständigt. ( $\Rightarrow$  11 Freiheitsgrade für  $\mathcal{H}$ ).

◇

Bemerkung: Für spezielle, nicht zulässige Haupttraumfiguren sind auch lin.Z.B.S. vom 3. Typus in eine Projektion einbettbar; wenn nämlich  $a$  den Doppelsehstrahl schneidet, ist  $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2$  und  $Z_1' = Z_2'$  automatisch.  $\Rightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$  ist vom 3. oder 4. Typus.



Für  $(\varphi_1, \varphi_2)$  vom 3. Typus  $\exists$  dann stets  $Z \not\perp \emptyset$ , sodaß  $(\varphi_1, \varphi_2)$  einbettbar ist in eine Projektion aus  $Z$ .

Satz 13: Jedes lin. Zweibildersystem vom 2. bzw. 4. Typus in einer Ebene  $\pi' \subset \bar{\pi}$  kann durch Projektion aus einem Punkt  $Z \in \bar{\pi}$  von zwei Projektionen erzeugt werden, wobei gilt  $Z \not\perp \emptyset$  bzw.  $Z \perp \emptyset$ .

## 2.6 Lin. Zweibildersysteme im affinen Raum

Geg.:  $\mathcal{R}^a = \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_w$ ,  $\varphi_a: \mathcal{R}^a \rightarrow \mathcal{R}'$ ,  $\varphi_{2a}: \mathcal{R}^a \rightarrow \mathcal{R}''$   
 mit:  $\exists \varphi_1: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}', \varphi_2: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}''$  und  $\varphi_{ja} = \varphi_j|_{\mathcal{R}^a}$   
 $\mathcal{R}', \mathcal{R}'' \dots$  Punktmenge von  $\pi'$ ;  $\pi'_a \subset \pi'$  ... affine Ebene.  
 $\varphi_{ja}$  ... affine Abbildung.

Nach Satz 5 gilt: Ist  $\omega$  nicht projizierend, dann ist das Ergebnis der erweiterten lin. Abb.  $\varphi_a$  kollinear zu einer Zentralprojektion und affin zu einer speziellen Zentralprojektion.

Ist  $\omega$  projizierend, dann ist  $\omega\varphi_j$  eine Gerade. Ist  $\omega\varphi_j$  nicht Ferngerade von  $\pi_a'$ , dann ist das Ergebnis bei  $\varphi_j$  kollinear zu einer Parallelprojektion; ist dagegen  $\omega\varphi_j$  die Ferngerade von  $\pi_a'$ , so ist das Ergebnis bei  $\varphi_j$  affin zu einer Parallelprojektion. ( $j=1$  oder  $2$ ).

Wir koppeln  $\varphi_{1a}, \varphi_{2a}$  zu einer Paarabbildung  $(\varphi_a, \varphi_{2a})$ , wobei gilt:  $(\varphi_{1a}, \varphi_{2a}) = (\varphi_1, \varphi_2) | \mathbb{P}^a$  und  $(\varphi_1, \varphi_2)$  erfüllt die Vs. (I) - (III) (d.h.  $\exists$  zulässige Haupttraumfigur in  $\Pi = \Pi_a \cup \omega$ ), der zu  $\Pi_a$  gehörige Körper  $K$  erfülle die Vs. (1), (2) von 8.1.

Im Affinen sind dabei folgende Fälle zu unterscheiden:

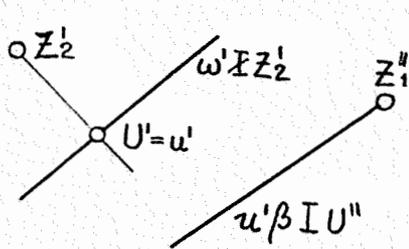
Fall 1:  $\omega$  ist eine allgemeine Ebene für das lin. Z.B.S.

$(\varphi_1, \varphi_2)$ ; die Bildpaare von Fernpunkten  $U$  erfüllen eine Kollineation  $\alpha_\omega: U' \rightarrow U'' \quad \forall U \in \mathbb{P}^\omega$  mit  $\alpha_\omega | \mathcal{U}_{Z_2} = \beta$ .

$\Rightarrow$  Im Z.B.S.  $(\varphi_a, \varphi_{2a})$  ist eine Kollineation  $\alpha_\omega$  von  $\pi'$  auf sich ausgezeichnet.

Die affinen Lageaufgaben werden als projektive Lageaufgaben bezüglich  $\omega$  gelöst (z.B. Bestimmung des Fernpunktes einer Geraden  $g$  ist gleichbedeutend mit der Konstruktion des Schnittpunktes  $g \cdot \omega$ ).

Fall 2:  $\omega$  ist erstprojizierend und nicht doppelprojizierend.

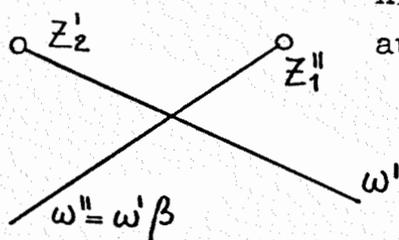


$U \perp \omega ; u = Z_1 U,$

Affine Lageaufgaben  $\rightarrow$  proj. Lageaufgaben unter Auszeichnung von  $\omega$ .

(Vervollständigung von  $X'' \leftrightarrow X'$  für  $X \in \mathbb{P}^\omega$  vgl. Übungen).

Fall 3:  $\omega$  ist doppelprojizierend



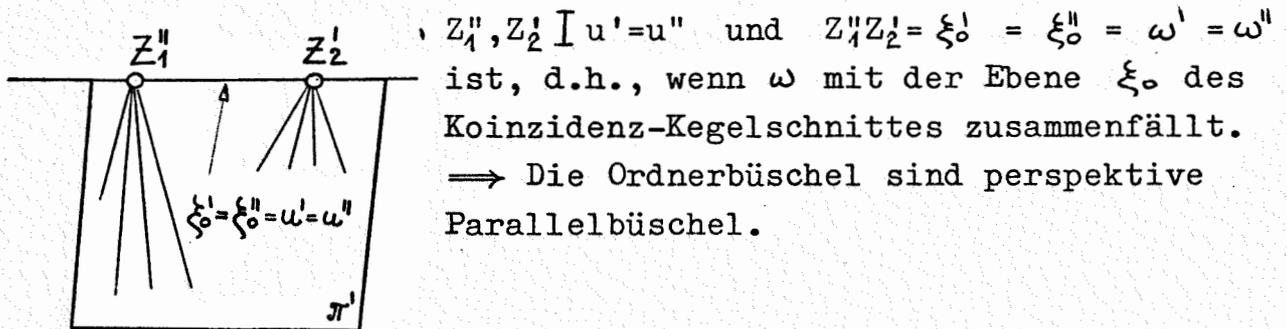
Affine Lageaufgaben werden als proj. Lageaufgaben formuliert.

Wir bestimmen lin. Zweibildersysteme  $(\varphi_{1\alpha}, \varphi_{2\alpha})$  in einer affinen Ebene  $\pi_\alpha$ , für welche beide Bildfelder affin zu je einer Parallelprojektion sind.

Für ein solches Z.B.S. muß die Ferngerade  $u'=u''$  von  $\pi_\alpha$  gleichzeitig erstes und zweites Bild von  $\omega$  sein. ( $\omega$  ist doppelprojizierend), vgl. Satz 5.

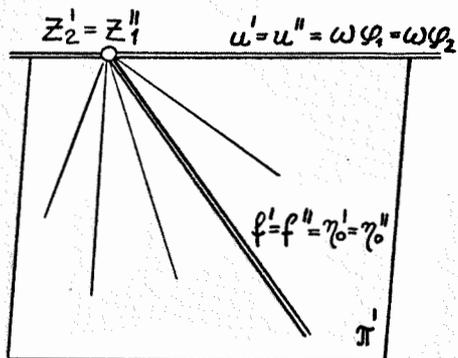
Dies ist für eine Z.B.S. vom 1. Typus sicher nicht der Fall ( $\beta$  ist nicht perspektiv).

Der 2. Typus ist hingegen möglich, und zwar dann, wenn



$Z_1'', Z_2' \perp u'=u''$  und  $Z_1''Z_2' = \xi_0' = \xi_0'' = \omega' = \omega''$  ist, d.h., wenn  $\omega$  mit der Ebene  $\xi_0$  des Koinzidenz-Kegelschnittes zusammenfällt.  $\Rightarrow$  Die Ordnungsbüschel sind perspektive Parallelbüschel.

Der 3. Typus eines Z.B.S. ist möglich, wenn  $Z_1''=Z_2' \perp u'=u''$

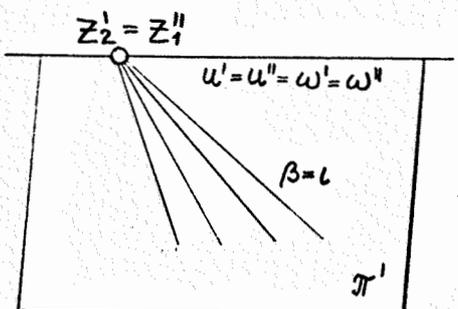


und  $u'=u''$  ein Fixstrahl der Projektivität  $\beta \neq \iota$  ist.  $\Rightarrow u' = \xi_0' = \xi_0'' e' = e''$  (vgl 2.5) mit  $\omega = \xi_0$ .  $\Rightarrow \beta$  ist nicht elliptische Projektivität.

2.5  $\Rightarrow$  Das Geradenfeld  $\mathcal{G}_\omega$  gehört zum Koinzidenzgebilde  $\mathcal{K}$ .

$\Rightarrow$  Die Ordnungsbüschel sind projektive Parallelbüschel zum selben Fernpunkt.

Für Z.B.S. vom 4. Typus braucht die Hauptbildfigur bloß so beschaffen sein, daß  $Z_1''=Z_2' \perp u'=u''$ . Ist  $\omega$  doppelprojizierend mit  $u' = \omega\varphi_1 = \omega\varphi_2$ , so ist  $(\varphi_{1\alpha}, \varphi_{2\alpha})$  affin zu einem Paar



von Parallelprojektionen.

Die Ordnungsbüschel sind zu einem einzigen Parallelbüschel vereinigt. (Z.B. Grund-Aufriß).

2.7      Lin. Zweibildersysteme im euklid. Raum  $\mathbb{T}_e$

Vgl. 0.7:  $\mathbb{T}_e$  ist ein affiner Raum  $\mathbb{T}_\omega(\mathbb{R}) \subset \mathbb{T}(\mathbb{R})$ , in welchem in der Fernebene  $\omega$  eine elliptische Polarität als absolute Polarität gegeben ist.

Fall 1: Sei  $(\varphi_1, \varphi_2)$  ein lin. Z.B.S., in welchem  $\omega$  nicht projizierend ist. ( $Z_j \notin \omega$ ).

$$U \in \mathbb{P}_\omega \xrightarrow{(\varphi_1, \varphi_2)} (U', U'') \text{ mit } \mathfrak{z}_\omega: U' \mapsto U'', \mathfrak{z}_\omega \dots \text{Koll.}$$

$$\text{In } \mathbb{T}_e: \left. \begin{array}{l} A_u = a \cdot \omega \\ a_u = \alpha \cdot \omega \end{array} \right\} a \perp \alpha \iff a_u = A_u \cdot \pi_\omega$$

$$\text{In } \mathbb{T}^1: \pi_\omega \longrightarrow \pi_\omega', \pi_\omega'' \dots \text{elliptische Polaritäten}$$

$$a \perp \alpha \implies \begin{cases} A_u', a_u' \text{ mit } A_u' \cdot \pi_\omega' = a_u' \\ A_u'', a_u'' \text{ mit } A_u'' \cdot \pi_\omega'' = a_u'' \end{cases}$$

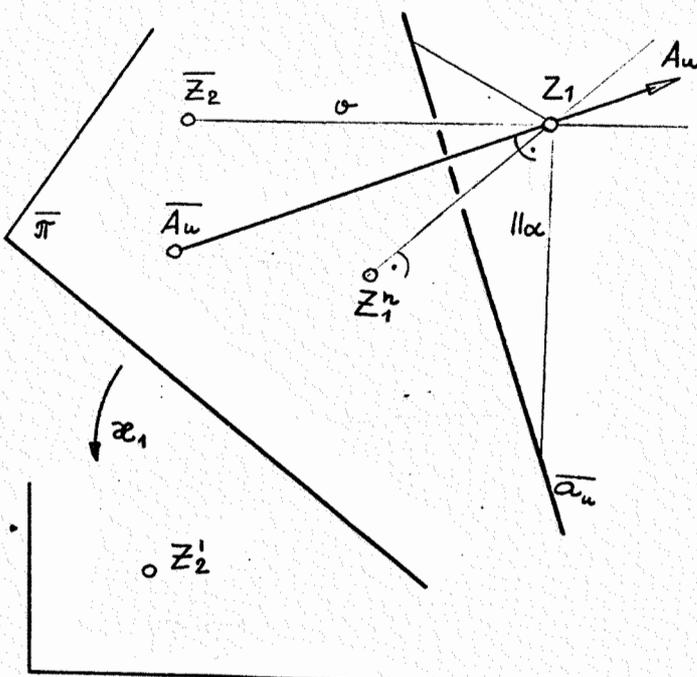
$\pi_\omega'$  und  $\pi_\omega''$  sind in gewisser Weise gekoppelt:

Für  $a \perp \alpha$  gilt mit  $A_u, a_u \mid \Gamma_\omega$ :  $A_u', A_u''$  und  $a_u', a_u''$  sind in  $\mathfrak{z}_\omega$  gekoppelt.

$$\left. \begin{array}{l} A_u' \xrightarrow{\pi_\omega'} a_u' \xrightarrow{\mathfrak{z}_\omega} a_u'' \\ A_u'' \xrightarrow{\mathfrak{z}_\omega} A_u'' \xrightarrow{\pi_\omega''} a_u'' \end{array} \right\} \implies \pi_\omega' \cdot \mathfrak{z}_\omega = \mathfrak{z}_\omega \cdot \pi_\omega''$$

Bemerkung:  $(\varphi_1, \varphi_2) = (\xi_1 x_1, \xi_2 x_2)$ ;

$\bar{\pi}_\omega \dots \xi_1$ -Bild der abs. Polarität,  $a \perp \alpha \iff \bar{A}_u \bar{x}_\omega = \bar{a}_u$ .

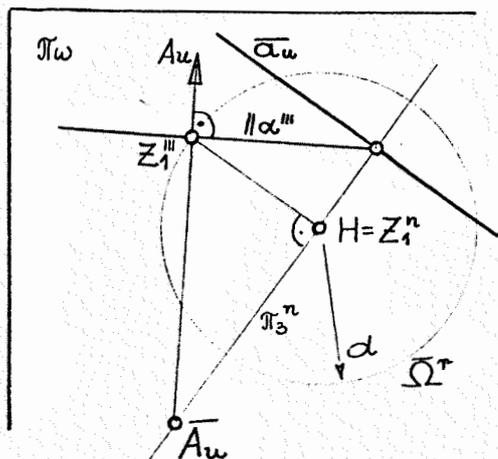


Nach Satz 6 gilt für  $\pi_\omega$ :  
Ein lineares Bild des euklid. Raumes  $\mathbb{T}_e$  ist genau ähnlich zu einer Zentralprojektion, wenn das Bild der abs. Polarität das Polarsystem eines nullteiligen Kreises ist.

$\implies \xi_1$  ist Zentralprojektion, also gilt:  $\pi_\omega$  ist das Polarsystem eines nullteiligen Kreises  $\bar{\Omega}$  ( $\bar{\Omega} = \Omega \xi_1$ ).

Für  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  folgt damit: Jeder allgemeine ebene Schnitt eines isotropen Kegels ist ein nullteiliger Kreis.

Nach 0.6 gilt: Der reelle Vertreter  $\bar{\Omega}^r$  von  $\bar{\Omega}$  ist ein mit  $\bar{\Omega}$  konzentrischer Kreis, u.zwar der Distanzkreis der Zentralprojektion  $\xi_1 \dots (Z_1, \bar{\pi})$  (=Spurkurve des gegen  $\bar{\pi}$  unter  $45^\circ$  geböschten Drehkegels mit Spitze  $Z_1$ ).



Elementare Konstruktion von  $\alpha$  mit  $\alpha \perp a$ :  $a \dots A_u \xrightarrow{\xi_1} \bar{A}_u (A_u^c)$   
 $\alpha \dots a_u \xrightarrow{\xi_1} \bar{a}_u (a_u^c)$  siehe Hpt-  
 vls.

(Konstruktion mittels Seitenriß benutzt die gleichen Linien, wie die Vervollständigung der Antipolarität eines Kreises).

Das Zentralbild der absoluten Polarität  $\pi_\omega$  ist die Antipolarität

des Distanzkreises.

Rekonstruktion

Für  $\bar{\pi}$  ist die Rekonstruktion durch Satz 11 gelöst.

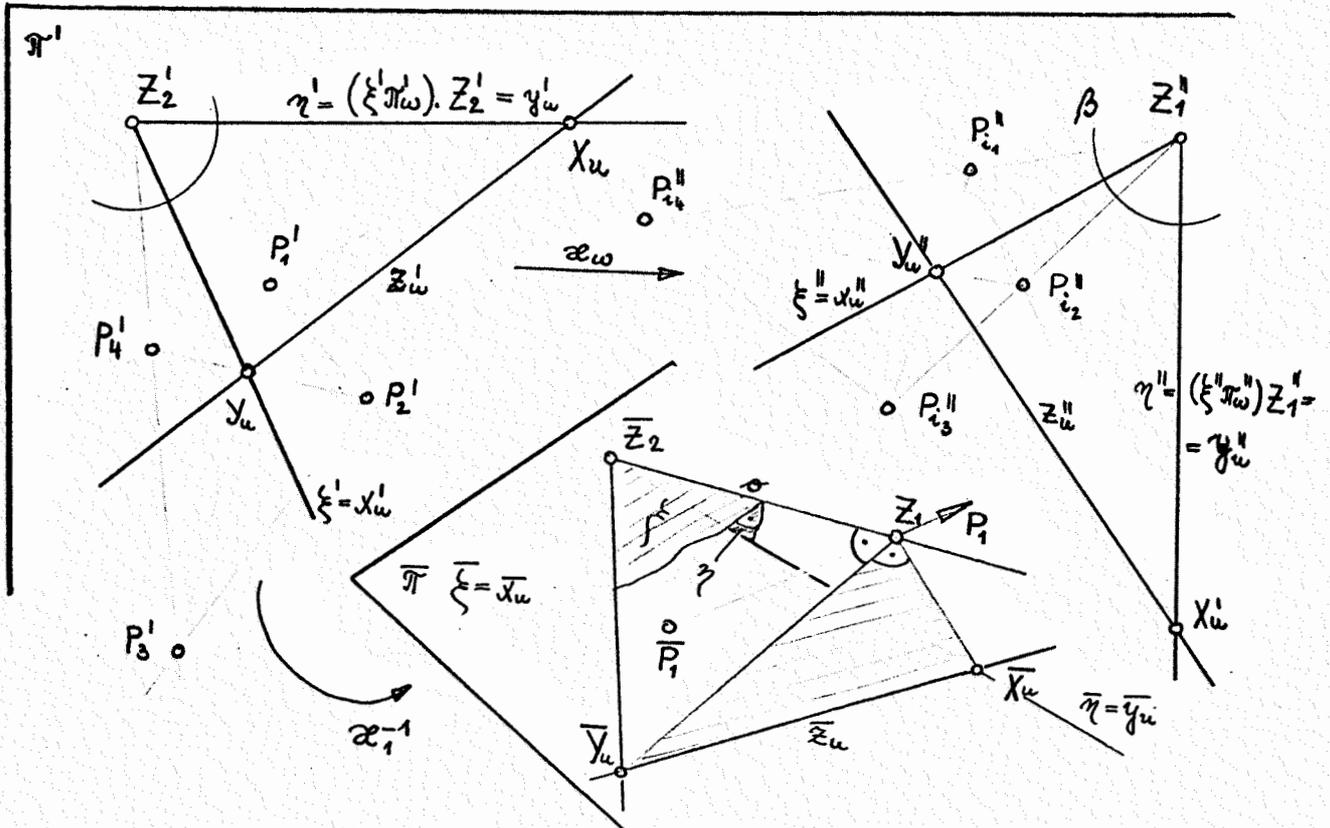
Für  $\bar{\pi}_e$  gilt der

Satz 14 : Kennt man die Ordnungspunkte von zwei wesentlich verschiedenen lin. Abbildungen des euklid. Raumes  $\bar{\pi}_e$ , bei denen die Fernebene nicht projizierend ist, so ist bei gegebener zulässiger Haupttraumfigur jede Punktmenge aus  $\mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}_\omega$  aus den Bildpaaren sechzehndeutig rekonstruierbar, falls man die Bilder  $\bar{\pi}_\omega', \bar{\pi}_\omega''$  der abs. Polarität  $\pi_\omega$  und das Bildpaar  $(\xi', \xi'')$  einer doppelproj. Ebene  $\xi$  kennt. Die verschiedenen Lösungen und die Lösungen zu verschiedenen zulässigen Haupttraumfiguren sind ähnlich.

Beweis (a) : Sei in  $\bar{\pi}_e$  eine feste H.R.F.  $\mathcal{C}_\beta$  und in  $\bar{\pi}'$  eine Angabe gemäß Satz 14 gegeben (d.h.  $Z_1', Z_2'$ );  $(\xi', \xi'')$ ;  $(\bar{\pi}_\omega', \bar{\pi}_\omega'')$  gegeben  $\Rightarrow \omega$  nicht projizierend vorausgesetzt.

Z.z. Rekonstruktion  $(\varphi_1, \varphi_2)^{-1}$  ist 16-deutig möglich.

Wir führen den Beweis auf Satz 11 zurück, d.h. wir vervollständigen die Angabe in  $\bar{\pi}'$  gemäß den Vs. von Satz 11, wir suchen also die Ordnerprojektivität  $\beta$  und die Bildpaare von 3  $\neq$  nicht kollinearen Punkten ( $\Rightarrow$  Bildkollineation einer allgemeinen Ebene. Hier: Bildkollineation  $\alpha_\omega$  von  $\omega$ ).



$\pi_\omega$  induziert in  $\mathcal{E}_0$  einen Orthogonalitätsbegriff:

Ist  $\eta$  die zu  $\xi$  normale doppelproj. Ebene, so sind die Ferngeraden  $x_u, y_u$  von  $\xi$  bzw.  $\eta$  kj. in  $\pi_\omega$ .

$\Rightarrow$  In  $\pi'$ : Zu  $\xi' = x_u'$   $\exists^* \eta'$  mit  $\eta' = y_u'$  kj. zu  $\xi'$  in  $\pi_\omega'$   
 Zu  $\xi'' = x_u''$   $\exists^* \eta''$  mit  $\eta'' = y_u''$  kj. zu  $\xi''$  in  $\pi_\omega''$ .  
 Dabei muß für  $\eta''$  gelten:  $y_u'' = y_u' \alpha_\omega$ .

In  $\omega$  kann  $x_u, y_u$  zu einem Poldreieck  $x_u, y_u, z_u$  bezügl.  $\pi_\omega$  ergänzt werden:  $Z_u = (\sigma \cdot \omega) \pi_\omega$

$\Rightarrow$  In  $\pi'$ :  $(\sigma \cdot \omega) \varphi_1 = Z_2'$ ,  $\Rightarrow z_u' = Z_2' \pi_\omega'$   
 $(\sigma \cdot \omega) \varphi_2 = Z_1''$ ,  $\Rightarrow z_u'' = Z_1'' \pi_\omega''$  } mit  $z_u'' = z_u' \alpha_\omega$

Damit kennen wir in  $\pi'$  die Bilder eines Poldreiecks der abs. Polarität; wir kennen somit von  $\alpha_\omega$  bereits 3 Punktepaare:

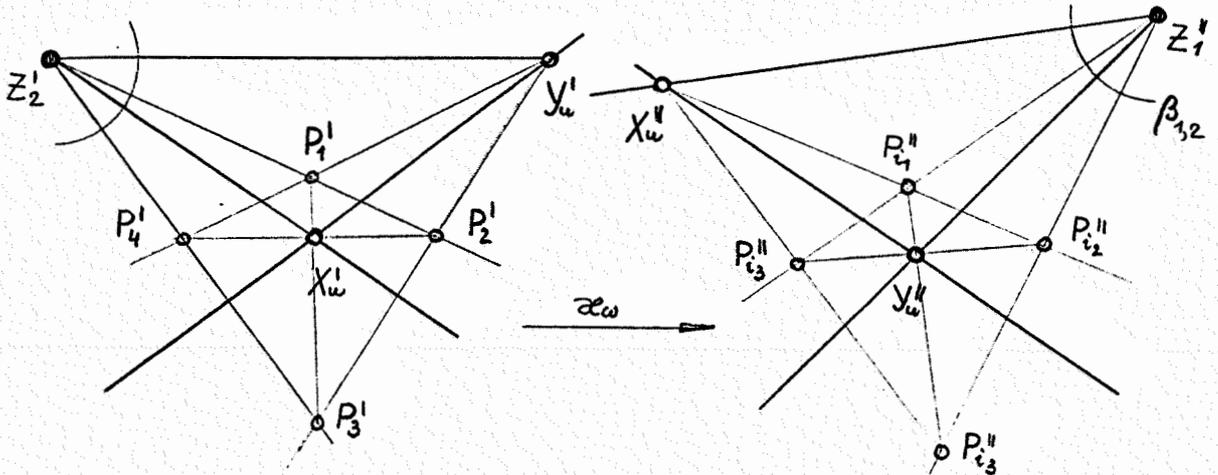
$$\left\{ \begin{array}{l} Z_2' \xrightarrow{\alpha_\omega} Z_1'' , \quad y_u' \cdot z_u' = x_u' \xrightarrow{\alpha_\omega} y_u'' \cdot z_u'' = x_u'' , \\ z_u' \cdot x_u' = y_u' \xrightarrow{\alpha_\omega} z_u'' \cdot x_u'' = y_u'' . \end{array} \right\} \quad (*)$$

Zur Festlegung von  $\alpha_\omega$  benötigen wir noch ein weiteres allgemeines Punktepaar, welches aus der Angabe zu konstruieren sein soll:

In  $\omega$   $\exists$  vier Paare Pol-Polare  $(P_j, p_j)$  in  $\pi_\omega$ , welche gleichzeitig dreieckspolar zum Poldreieck  $\{(\sigma \cdot \omega), x_u, y_u\}$  liegen. Vgl. 0.6 Aufg. 3 und Beweis von Satz 8: Die 4 Lösungen bilden

ein vollst. Vierseit bzw. Viereck, für welches das geg. Poldreieck des Diagonaldreieck (-eck) ist.

Die Bilder dieser Lösungspaare besitzen die gleichen Eigenschaften in  $\pi'$ ; d.h. sie sind dreieckspolar bezüglich  $\{Z_2', X_u', Y_u'\}$  bzw.  $\{Z_1'', X_u'', Y_u''\}$  und polar in  $\pi_\omega'$  bzw.  $\pi_\omega''$ .  
 $\Rightarrow$  In  $\pi_\omega'$ : ] 4 Lösungspaare  $P_1', p_1'; \dots; P_4', p_4'$  bzw.  $P_{i_1}'', p_{i_1}''; \dots; P_{i_4}'', p_{i_4}''$ , die gewisse Vierseite in  $\pi'$  bilden, welche in  $\alpha_\omega$  gekoppelt sind.



Bei  $\alpha_\omega$  gehen Inzidenzen in die analog beschrifteten Inzidenzen über.  $\implies$  Es kommen bloß 4  $\neq$  Möglichkeiten in Betracht, die Indexmenge  $\{1,2,3,4\}$  auf  $\{i_1, \dots, i_4\}$  abzubilden. (Bei Auswahl des  $P_1'$  zugeordneten Punktes  $P_{i_j}''$  ist die Zuordnung für alle übrigen Paare festgelegt).

$\Rightarrow$  Mit (\*) und  $P_1' \xrightarrow{\alpha_\omega} P_{i_j}'' := P_1''$  ist  $\alpha_\omega$  vierdeutig festgelegt. Zu gewähltem  $\alpha_\omega$  ist die Ordnerprojektivität  $\beta$  eindeutig bestimmt. ( $\beta$  ist zunächst zweideutig festgelegt; dabei ist  $\beta = \alpha_\omega | \mathcal{G}_{Z_2}'$ .)

Damit liegt in  $\pi'$  die Angabe gemäß Satz 11 vor.

Es ist nun noch die Haupttraumfigur  $\mathcal{H}$  im Sinne von Satz 11 zu ergänzen; d.h. wir müssen uns zu drei vorgegebenen Bildpaaren die Raumpunkte verschaffen: Durch die Vorgabe von  $\mathcal{H}$  kennt man von  $\varphi_j = \xi_j \alpha_j$  die Zentralproj.  $\xi_j$ . Gesucht sind somit die Kollineationen  $\alpha_1^{-1}: \pi' \rightarrow \bar{\pi}$ ,  $\alpha_2^{-1}: \pi' \rightarrow \bar{\bar{\pi}}$ .

Z.B.  $\alpha_1^{-1}$ : In  $\overline{\pi}$  kennt man  $\overline{\pi}_\omega$  (Polarsystem eines nullteil. Kreises) und  $\overline{\xi} = \overline{x}_u \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  Poldreiseit bzgl.  $\overline{\pi}_\omega$  in  $\overline{\pi}$ :  
 $\eta$  kj. zu  $\overline{\xi}$  in  $\overline{\pi}_\omega$  und  $\eta \perp \overline{z}_2$ ,  $\overline{\eta} = \overline{y}_u$  ;  
 $\overline{z}_u = \overline{z}_2 \overline{\pi}_\omega \Rightarrow \overline{z}_u \overline{y}_u = \overline{x}_u$ ,  $\overline{z}_u \overline{x}_u = \overline{y}_u$ .  
 $\Rightarrow$  In  $\omega$  kennt man 2 Punkte  $X_u, Y_u$ .  $\Rightarrow$  Ein weiterer Punkt wird noch benötigt.

Die  $\xi_1$ -Bilder der Lösungspaare  $(P_j, p_j)$  in  $\omega$  sind dreieckspolar bzgl.  $\{\overline{z}_2 \overline{x}_u \overline{y}_u\}$  und polar bzgl.  $\overline{\pi}_\omega$ .  
 $(\Rightarrow$  Ermittlung siehe 0.6 Aufg. 3:  $(\overline{p}_j, \overline{p}_j)$ .)

Für  $\alpha_1^{-1}$  muß also (analog wie für  $\alpha_\omega$ ) gelten:

$$Z_2' \mapsto \overline{z}_2, X_u' \mapsto \overline{x}_u, Y_u' \mapsto \overline{y}_u.$$

Wählt man nun zu  $P_1'$  aus vier Möglichkeiten einen Lösungspunkt  $\overline{p}_j = \overline{p}_1 \in \overline{\pi}$ , dann ist  $\alpha_1^{-1}$  festgelegt.

$\Rightarrow \alpha_1^{-1}$  ist vierdeutig bestimmt.

Durch eine gewählte Koll.  $\alpha_1^{-1}$  ist die Zuordnung des 1. Ordnungsbüschels zum 1. Kernstrahlbüschel (d.h. zu den doppelproj. Ebenen  $\in \mathcal{E}_0$ ) bestimmt.

Zu  $\overline{p}_1 = P_1' \alpha_1^{-1}$  gehört in  $\xi_1^{-1}$  ein Fernpunkt  $P_1$ ; dessen  $\varphi_2$ -Bild ist  $P_1'' = P_1' \alpha_\omega$  mit  $\alpha_\omega | \varphi_2^{-1} z_2' = \beta \Rightarrow \alpha_2^{-1}$  ist durch  $\alpha_\omega$  und  $\alpha_1^{-1}$  mitbestimmt.

Ergebnis:  $\alpha_\omega$  und  $\alpha_1^{-1}$  sind unabhängig von einander je vierdeutig durch die Angabe gemäß Satz 14 festgelegt.  $\Rightarrow$  Die Rekonstruktion ist 16-deutig möglich.

Beweis (b): Geg.: Zwei  $\neq$  zuläss. H.R.F.  $\mathcal{H}, \mathcal{H}^*$  in  $\pi \in \Pi$   
 $X \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0 \longrightarrow X^* \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0^*$  mit:  $\exists^*$  Koll.  $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  mit  $X^* = X\alpha$   $\forall X \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$ , vgl. Satz 11.  
 In Satz 14 wird behauptet:  $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  ist Ähnlichkeit.

Zeige zunächst:  $\alpha$  ist Affinität.

Für beide H.R.F.  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{H}^*$  erfolgt die Rekonstruktion so, daß zu der (vierdeutig bestimmten) Bildkollineation  $\alpha_\omega$  in  $\pi'$  die Fernebene  $\omega \subset \Pi$  gehört.

$\Rightarrow \alpha$  ist trivialerweise Affinität.

$\alpha$  ist Ähnlichkeit:

Beide Rekonstruktionen  $(\varphi_1, \varphi_2)^{-1}$  und  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)^{-1}$  führen auf ein Poldreieck und einmal Pol-Polare in der abs. Polarität in  $\omega$ .

$\implies (Z_1, \bar{x}_u) = \xi$ ,  $(Z_1, \bar{y}_u) = \eta$ ,  $(Z_1, \bar{z}_u) =: \alpha_1 \dots$  drei paarweise orthogonale Ebenen;  $\bar{p}_1 Z_1, \bar{P}_1 Z_1 \dots$  Ebene und Normale.

Analog:  $\xi^*, \eta^*, \alpha_1^* \dots$  paarweise orthogonale Ebenen,  $\bar{p}_1^* Z_1^*, \bar{P}_1^* Z_1^* \dots$  Ebene und Normale.

$\implies \omega$  ist Ähnlichkeit.

Fall 2: Sei  $(\varphi_1, \varphi_2)$  ein lin. Z.B.S, in welchem  $\omega$  erstprojizierend, aber nicht zweitprojizierend ist.

$(Z_1 \text{ I } \omega, Z_2 \text{ F } \omega) \implies \omega' \dots$  Gerade,  $\mathcal{F} \pi \omega'$ .

In  $\Pi \text{ e } \mathcal{T}$ : Die abs. Polarität  $\pi \omega$  induziert im Büschel der Ferngeraden durch  $Z_1$  eine

ellipt. Involution kj.Geraden.

$\implies$  Abs.Invol.  $\mathcal{E}_\omega$  doppelt proj. Ebenen  $\in \mathcal{E}_\omega$  ist Orthogonalität in  $\mathcal{E}_\omega$ .

( $\mathcal{E}_\omega \dots$  "Orthogonalinvolution").

In  $\pi'$  gilt dann: Die 1. Ordnungsstrahlen, aufgefaßt als  $\varphi_1$ -Bilder der doppeltproj. Ebenen sind in

einer ellipt. Involution, dem  $\varphi_1$ -Bild  $\mathcal{E}_{Z_2'}$  von  $\mathcal{E}_\omega$ , gekoppelt. ( $\mathcal{E}_{Z_2'}$  "ersetzt"  $\pi \omega'$ ).

Durch Angabe von  $Z_2', Z_1'', \mathcal{E}_{Z_2'}, \pi \omega''$  und das Bildpaar einer doppeltproj. Ebene ist Rekonstruktion möglich.

Genauer gilt:

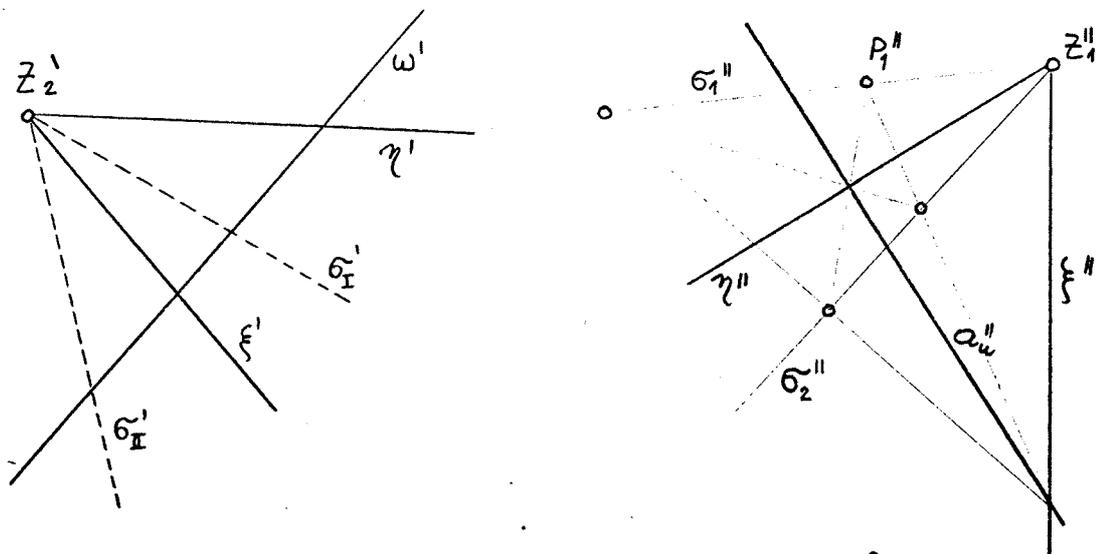
Satz 15: Kennt man die Ordnungspunkte von zwei wesentlich  $\neq$  lin. Abbildungen des euklid. Raumes, bei denen die Fernebene erstprojizierend (aber nicht zweitprojizierend ist), so ist bei gegebener zulässiger Haupttraumfigur  $(Z_1 \text{ I } \omega)$  jede Punktmenge aus  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_\omega$  bis auf zentrische Streckungen aus dem eigentlichen Zentrum  $Z_2$  achtdeutig rekonstruierbar, falls das 1. Bild der Orthogonal-Involution doppelt-

projizierender Ebenen, das 2. Bild der abs. Polarität und das Bildpaar einer doppelproj. Ebene gegeben sind.

Die  $\neq$  Lösungen und die Lösungen zu  $\neq$  Haupttraumfiguren sind ähnlich.

Beweis: Geg.:  $\mathcal{P}''$ ,  $\pi_\omega''$ ,  $\xi'' \Rightarrow$  analog zu Fall 1 : Konstruktion von  $\alpha_2^{-1}$  vierdeutig möglich.

(Zu  $\xi'' \exists \eta''$ ,  $a_\omega''$  und 4 Paare  $(P_j'', p_j'')$ , die dreieckspolar bzgl.  $(\xi'', \eta'', a_\omega'')$  und polar bzgl.  $\pi_\omega''$  sind).



Wir ergänzen nun die Ordnerprojektivität  $\beta$  :

Die Lösungspaare  $(P_j'', p_j'')$  haben bekanntlich die Eigenschaft, daß sie ein vollständiges Vierseit bilden, für welches das Poldreieck das Diagonaldreieck ist.

$\Rightarrow \exists$  zwei Ordnungsstrahlen  $\sigma_1''$ ,  $\sigma_2''$  welche je zwei der Punkte  $P_j''$  tragen und welche kj. in  $\pi_\omega''$  und harmonisch bezügl.  $\xi''$ ,  $\eta''$  sind.  $\sigma_1''$ ,  $\sigma_2''$  sind die 2. Bilder der (zueinander  $\perp$ , doppelproj.) Symmetrieebenen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  von  $\xi$  und  $\eta$ .

$\Rightarrow$  Im 1. Bild hat man in der Involution  $\varepsilon_{Z_2}'$  jenes Paar von Strahlen  $\sigma_I'$ ,  $\sigma_{II}'$  aufzusuchen, welches gleichzeitig harmonisch zu  $\xi'$ ,  $\eta'$  ist. (Vgl. 0.6 Aufgabe 3, formuliert für die Schnittpunkte von  $\xi'$ ,  $\eta'$  und  $\sigma_I'$ ,  $\sigma_{II}'$  mit  $\omega'$ ).

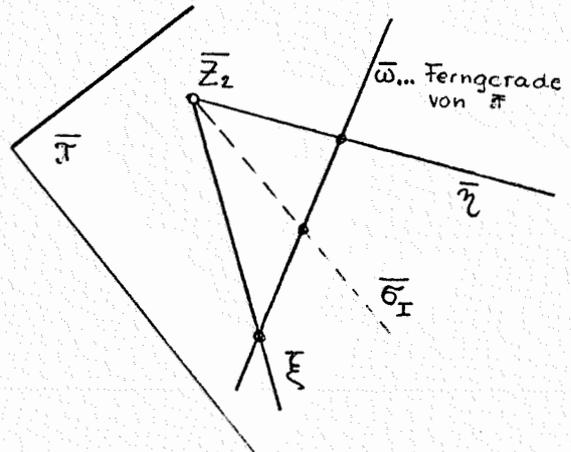
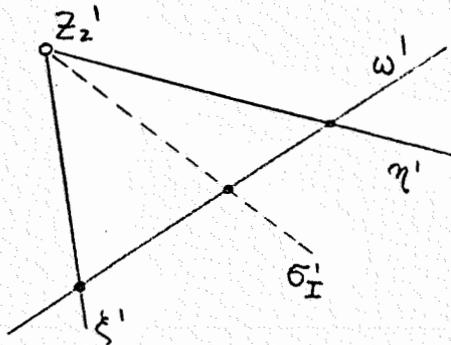
$\Rightarrow \exists$  genau ein Geradenpaar  $\sigma_I'$ ,  $\sigma_{II}'$ .

Ergebnis:  $\exists 2 \neq$  Lösungen für  $\beta$  :

$$\beta_1: \begin{matrix} \xi' \rightarrow \xi'' \\ \eta' \rightarrow \eta'' \\ \sigma_I' \rightarrow \sigma_I'' \end{matrix}$$

$$\beta_2: \begin{matrix} \xi' \rightarrow \xi'' \\ \eta' \rightarrow \eta'' \\ \sigma_I' \rightarrow \sigma_2'' \end{matrix}$$

Bei gewähltem  $\beta$  und gewähltem  $\alpha_2^{-1}$  (8  $\neq$  Möglichkeiten) ist die Zuordnung 1. Ordnungsstrahlen  $\leftrightarrow$  1. Kernstrahlen in  $\bar{\pi}$  eindeutig festgelegt.

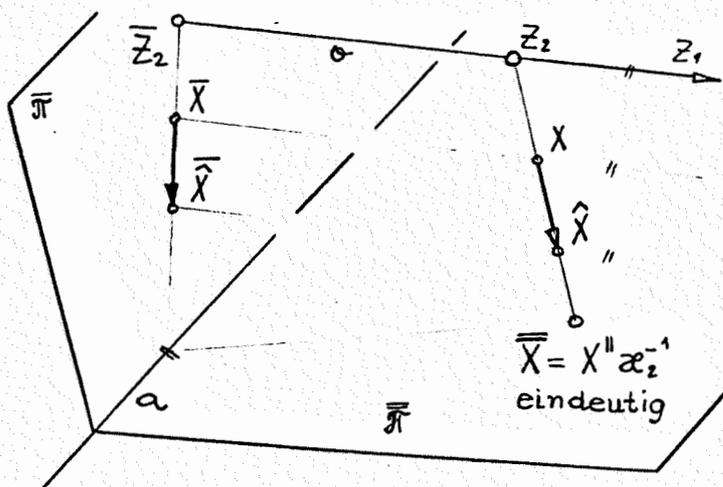


Jede mögliche Koll.  $\alpha_1^{-1}$  ordnet  $\omega'$  die Ferngerade  $\bar{\omega}$  von  $\bar{\pi}$  punktweise zu,  $Z_2' \alpha_1^{-1} = Z_2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \alpha_1^{-1}$  ist bis auf Homologien aus  $PGL(\bar{Z}_2, \bar{\omega})$  bestimmt  
 (d.h. für zwei mögliche Kollineationen  $\alpha_1^{-1}, \hat{\alpha}_1^{-1}$  gilt:  
 $\alpha_1^{-1} \cdot \hat{\alpha}_1^{-1} =: \chi \in PGL(\bar{Z}_2, \bar{\omega})$ ).

Die Achse  $\omega$  dieser Homologien  $\chi$  ist Ferngerade von  $\bar{\pi}$   
 $\Rightarrow \chi$  ist zentrische Streckung (Zentrum  $Z_2$ ).

Ergebnis: Zu den 8  $\neq$  Möglichkeiten für  $\beta, \alpha_2^{-1}$  ist  $\alpha_1^{-1}$  bis auf zentrische Streckungen bestimmt.

Bedeutung der zentrischen Streckungen von  $\bar{\pi} \subset \bar{\pi}$  aus  $Z_2$  für die Rekonstruktion in  $\mathcal{P}$  :



Sei  $\bar{X} = X' \alpha_1^{-1}$ ,  $\hat{X} = X' \hat{\alpha}_1^{-1}$ ,  
 $\Rightarrow \forall X \in \bar{\pi}$  gilt:  
 $TV(\bar{X} \hat{X} Z_2) = \text{konst.} =$   
 $= TV(X \hat{X} Z_2)$ .  
 $\Rightarrow$  Die Rekonstruktion ist bis auf zentrische Streckungen von  $Z_2$  aus achtdeutig durchführbar.

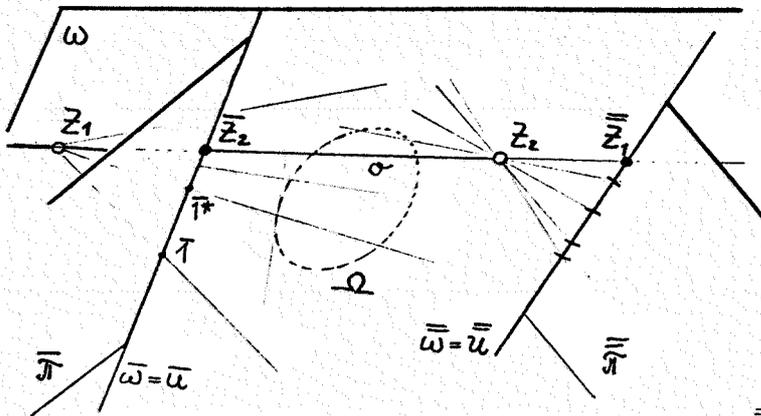
Beweis (b) : Geg. sind zwei  $\neq$  H.R.F.  $\mathcal{F}$  ,  $\mathcal{F}^*$  ;

Beh.:  $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  mit  $X\alpha = X^*$  ist Ähnlichkeit

$\alpha$  ist sicher Affinität, da  $\forall U \in \omega$  gilt:  $U^* \in \omega$  .  
 Mit  $\pi_\omega'' = \pi_\omega \varphi_2 = \pi_\omega \varphi_2^*$  geht das orthogonale Dreiflach  $(\xi, \eta, Z_2 \bar{a}_u)$  und  $(Z_2 \bar{P}_1) \perp (Z_2 \bar{P}_1)$  über in das orthogonale Dreiflach  $(\xi^*, \eta^*, Z_2^* \bar{a}_u^*)$  und in  $(Z_2^*, \bar{P}_1^*) \perp (Z_2^* \bar{P}_1^*)$  , vgl. Fall 1 .

$\Rightarrow \alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  ist Ähnlichkeit.

Fall 3 : Sei  $(\varphi_1, \varphi_2)$  ein lin. Z.B.S, für welches  $\omega$  doppeltprojizierend ist  $(Z_j \perp \omega)$  .  $\Rightarrow \pi, \bar{\pi} \mid \neq \omega$



$\pi_\omega$  induziert im Büschel der 1. Fern-Sehstrahlen eine ellipt. Involution  $\varepsilon_{Z_1}$  und im Büschel der 2. Fern-Sehstrahlen eine Involution  $\varepsilon_{Z_2}$  .

$\Rightarrow$  Auf  $\bar{u} = \bar{\omega}$  .. ellipt. Inv.  $\bar{\varepsilon}_{Z_1}$   
 auf  $\bar{u} = \bar{\omega}$  .. ellipt. Inv.  $\bar{\varepsilon}_{Z_2}$

$\Rightarrow$  In  $\pi'$ :  $\varepsilon_{Z_1}'$  ... ellipt. Inv. auf  $\omega'$  ( $\omega' \perp Z_1'$ ),  $\varepsilon_{Z_2}''$  ... ellipt. Inv. auf  $\omega''$  ( $\omega'' \perp Z_1''$ ) .

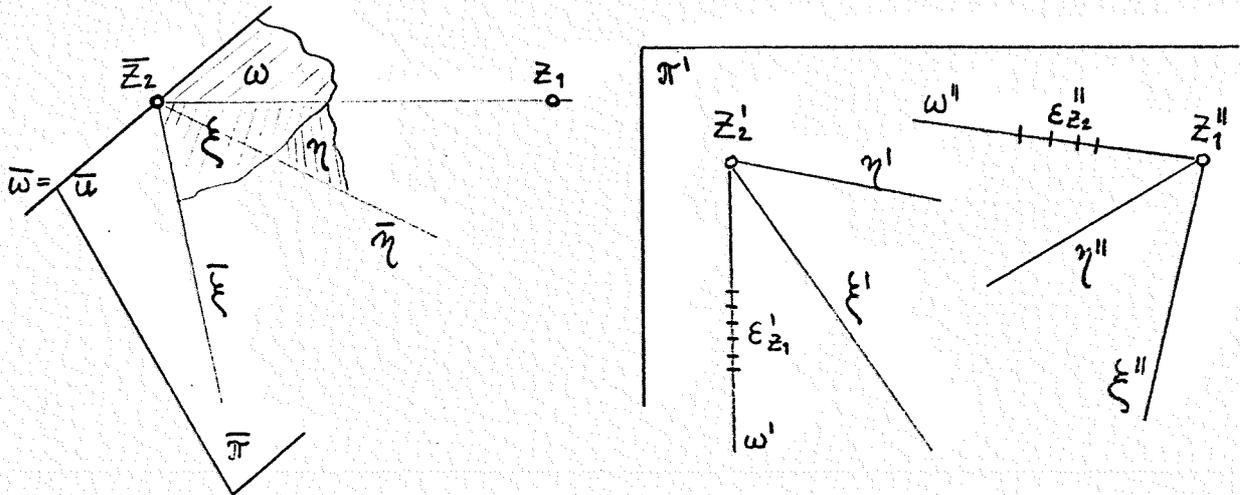
Bemerkung a):  $\bar{\varepsilon}_{Z_1}$  stimmt genau dann mit der durch  $\pi_\omega$  auf  $\bar{u}$  induzierten absoluten Inv. überein, wenn  $\bar{u} = Z_1 \pi_\omega$  , also genau dann, wenn  $\xi_1$  eine Normalprojektion ist.

Für die Rekonstruktion im Sinne von Satz 11 gilt hier

Satz 16 : Kennt man die Ordnungspunkte von zwei wesentlich verschiedenen lin. Abbildungen des euklid. Raumes mit doppeltproj. Fernebene, so ist bei geg. zulässiger Hauptraumfigur ( $-Z_1, Z_2$  sind Fernpunkte-) jede Punktmenge aus  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$  bis auf Translationen parallel zur Stellung  $Z_1 Z_2$  vierdeutig rekonstruierbar, falls man die Bildpaare  $(\omega', \omega'')$ ,  $(\xi', \xi'')$ ,  $(\eta', \eta'')$  von  $\omega$  und zwei weiteren doppeltproj. Ebenen  $\xi$  und  $\eta$  kennt, sowie das erste

Bild der Involution abs. konjugierter 1. Fern-Sehstrahlen und das 2. Bild der Involution abs. kj. 2. Fern-Sehstrahlen.

Beweis: Durch  $\xi', \eta', \omega'$  und  $\xi'', \eta'', \omega''$  ist die Ordnungsprojektivität in  $\pi'$  festgelegt.



Durch  $\xi, \eta, \omega | \in \mathcal{E}_0$  und  $\xi', \eta', \omega' | \in \mathcal{E}_{Z_2'}$  ist die Zuordnung der 1. Ordnungsstrahlen zu  $\mathcal{E}_0$  (bzw. zum 1. Kernstrahlbüschel) festgelegt.

Rekonstruktion von  $\alpha_1^{-1}$ :

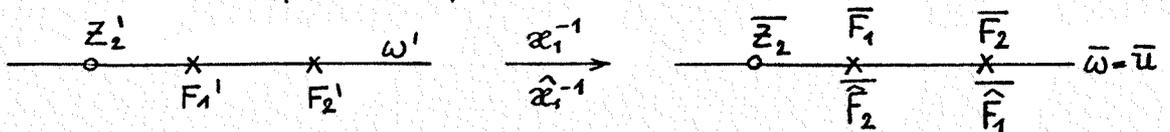
$$\omega' \xrightarrow{\alpha_1^{-1}} \bar{\omega}, \quad \xi' \rightarrow \bar{\xi}, \quad \eta' \rightarrow \bar{\eta}, \quad \varepsilon_{Z_1}' \rightarrow \bar{\varepsilon}_{Z_1}$$

Interpretation von  $\alpha_1^{-1}$  als Ähnlichkeit von  $\pi'$  (mit  $\omega'$  als Ferngerade und  $\varepsilon_{Z_1}'$  als absol. Involution) auf  $\bar{\pi}$  (mit  $\bar{\omega}$  als Ferngerade und  $\bar{\varepsilon}_{Z_1}$  als abs. Involution).

$\Rightarrow \exists$  "Ähnlichkeiten",  $\alpha_1^{-1}: \pi' \rightarrow \bar{\pi}$ .

Seien  $\alpha_1^{-1}$  und  $\hat{\alpha}_1^{-1}$  zwei solche Ähnlichkeiten. Dann sind  $\alpha_1^{-1}, \hat{\alpha}_1^{-1}$  entweder gleichsinnig oder gegensinnig.

( $\exists$  zwei wesentl.  $\neq$  Möglichkeiten der Zuordnung der Fixpunkte von  $\varepsilon_{Z_1}'$  und  $\bar{\varepsilon}_{Z_1}$ ).



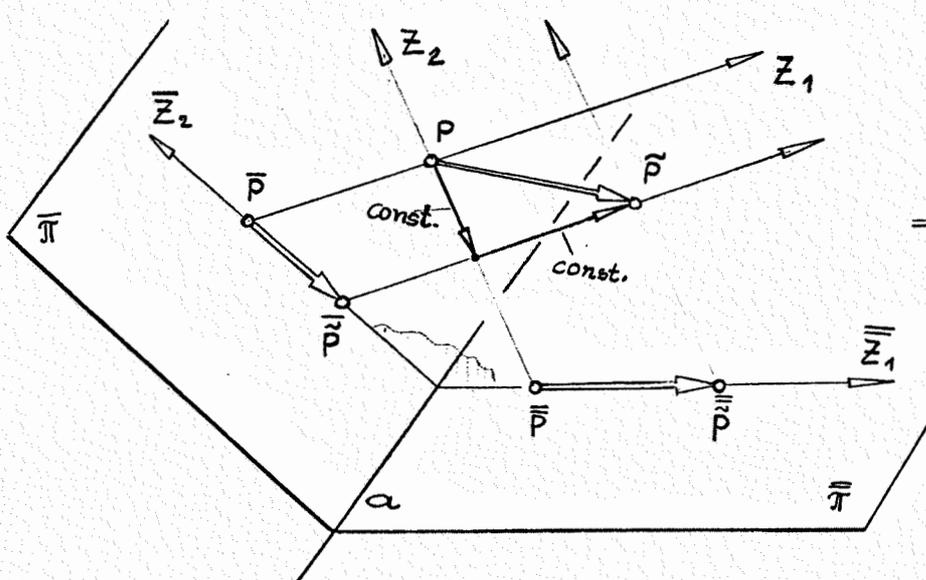
Seien nun  $\tilde{\alpha}_1^{-1}$  und  $\alpha_1^{-1}$  gleichsinnig ( $\tilde{\alpha}_1^{-1}$  ist entweder mit  $\alpha_1^{-1}$  oder mit  $\hat{\alpha}_1^{-1}$  gleichsinnig).

$\Rightarrow \alpha_1, \tilde{\alpha}_1^{-1}: \bar{\pi} \rightarrow \bar{\pi}$  ist gleichsinnige Ähnlichkeit.

$\Rightarrow \alpha, \hat{\alpha}_1^{-1}$  hat auf  $\bar{\omega}$  über  $\mathbb{C}$  zwei  $\neq$  Fixpunkte  $\bar{F}_1, \bar{F}_2$ ;  
 ferner ist  $\bar{Z}_2(\alpha, \hat{\alpha}_1^{-1}) = \bar{Z}_2$  wegen  $\bar{\xi}(\alpha, \hat{\alpha}_1^{-1}) = \bar{\xi}, \bar{\eta}(\alpha, \hat{\alpha}_1^{-1}) = \bar{\eta}$ .  
 $\implies \alpha, \hat{\alpha}_1^{-1} | \bar{\omega} = \iota \implies \alpha, \hat{\alpha}_1^{-1}$  ist eine  $\bar{\pi}$  Koll. mit  
 der Achse  $\bar{\omega}$ . Da  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$  bei  $\alpha, \hat{\alpha}_1^{-1}$  fest bleiben,  
 also Kollineationsstrahlen sind, ist  $\bar{Z}_2 = \bar{\xi} \cdot \bar{\eta}$  das  
 Zentrum dieser  $\bar{\pi}$  Koll.  
 $\Rightarrow$  Mit  $\bar{\omega} = \bar{u}$  ... Ferngerade von  $\bar{\pi}$  gilt:  $\alpha, \hat{\alpha}_1^{-1}$  ist eine  
 Elation.

Ergebnis:  $\alpha, \hat{\alpha}_1^{-1}$  lässt sich abgesehen von Translationen zwei-  
 deutig festlegen ( $\alpha, \hat{\alpha}_1^{-1}$ ).

Analog ist  $\alpha, \hat{\alpha}_2^{-1}: \bar{\pi} \rightarrow \bar{\pi}$  bis auf Translationen in  $\bar{\pi}$  in  
 Richtung  $\bar{Z}_1$  zweideutig bestimmt (unabhängig von  $\alpha, \hat{\alpha}_1^{-1}$ ).



$$\begin{aligned} \overrightarrow{P\tilde{P}} &= \overrightarrow{X\tilde{X}} \quad \forall \bar{X} \in \bar{\pi}_e \\ \overrightarrow{P\tilde{P}} &= \overrightarrow{X\tilde{X}} \quad \forall \bar{X} \in \bar{\pi}_e \\ \implies P\tilde{P} &= X\tilde{X} = \text{const.} \end{aligned}$$

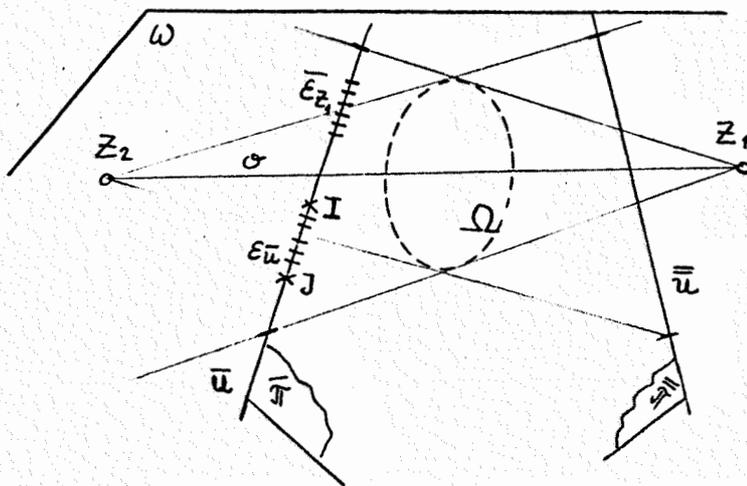
Der Schiebvektor  $\overrightarrow{P\tilde{P}}$  liegt dabei  
 in einer doppelt-  
 projiz. Ebene.  
 ( $\omega$  punktw. fest).

Ergebnis:  $(\varphi_1, \varphi_2)^{-1}$  ist bis auf Translationen in  $\bar{\pi}_e$   
 parallel zur Stellung  $Z_1 Z_2$  vierdeutig bestimmt.

Bemerkung b): Der Zusammenhang  $\alpha: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  zwischen den  
 Rekonstruktionen bezüglich verschiedener Haupttraumfiguren  
 $\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_j^*$  ist sicher eine Affinität, denn  $\forall U \in \omega$  gilt:  
 $U^* \in \omega$ .

$\pi_\omega$  induziert auf  $\bar{u}$  und  $\bar{u}$  in natürlicher Weise die  
 absolute Involution  $\varepsilon_{\bar{u}}$  in  $\bar{\pi}$  bzw.  $\varepsilon_{\bar{u}}$  in  $\bar{\pi}$ .

Bei  $\alpha$  wird  $\bar{u}$  und  $\bar{\varepsilon}_{Z_1}$  auf  $u^*$  und  $\varepsilon_{Z_1^*}$  abgebildet;  
 $\varepsilon_{\bar{u}}$  geht in eine elliptische Involution  $(\varepsilon_{\bar{u}})^*$  über, die i.a.  
 von der abs. Involution  $\varepsilon_{\bar{u}^*}$  in  $\bar{\pi}^*$  verschieden ist.



⇒ Die Rekonstruktionen zu  $\neq$  H.R.F. sind i.a. bloß affin. (Die abs. Polarität ist durch die Angabe nicht bestimmt). Man kennt vom abs. KS.  $\Omega$  4 Tangenten = Doppelstrahlen von  $\varepsilon_{z_1}$  und  $\varepsilon_{z_2}$ ).

Bemerkung c) : Das Rekonstruktionsproblem ist eine Aufgabe der Fotogrammetrie: Rekonstruktion eines Geländes aus zwei Luftaufnahmen. ⇒  $\alpha_1, \alpha_2$  sind Ähnlichkeiten (Entwickeln und Vergrößern der Photographie). Die Fernebene  $\omega$  ist nicht projizierend (⇒ es liegt Fall 1 vor). Die Bilder  $\pi_\omega, \pi_\omega''$  der abs. Polarität sind durch die bekannte innere Orientierung des Aufnahmeapparates und des Vergrößerungsmaßstabes gegeben. ( $\pi_\omega'', \pi_\omega'$  ist die Antipolarität am jeweiligen Distanzkreis).

Für die Angabe gemäß Satz 14 sind die Ordnungspunkte  $Z_1', Z_1''$  erforderlich ⇒ Vgl. 2.3 Bem.b): Das Problem der ebenen Projektivität erfordert 7 Paare von Punkten allgemeiner Lage. Hier gilt: Kennt man die Distanzkreise, so sind zur Bestimmung der Hauptbildfigur bloß 5 Punktepaare allgemeiner Lage erforderlich.

(Satz von E.KRUPPA).

Hauptsatz der Fotogrammetrie (FINSTERWALDER):

Kennt man von einem Objekt von ausreichend vielen Objektpunkten die Bilder in zwei Photographien und die Distanzkreise, so ist das Objekt bestimmt, vorausgesetzt, das Objekt ist keine "gefährliche Fläche" (J.KRAMER).

2.8 Maßaufgaben des  $\pi_e$  (bzw.  $\pi_{e,d}$ ) im lin. Z.B.-System.

Geg.:  $\pi_e \subset \pi, \pi_{e,d} \subset \pi$ , Elementmengen  $\mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{R} \mid \subset \pi$ .

Hauptraumfigur  $\mathcal{H}$  eines lin. Z.B.S. ( $\varphi_1, \varphi_2$ ).

( $\pi_e \dots \pi_a$  mit Winkelmessung mittels LAGUERRE-Formel,

$\pi_{e,d} \dots \pi_e$  mit Längenmessung, vgl. 0.5).

$\pi'$  ... proj. Bildebene; Hauptbildfigur.

Beh.: Jede Aufgabe des  $\Pi_e$  (bzw.  $\Pi_{e,d}$ ) läßt sich in Lageaufgaben und in folgende "Maßaufgaben" zerlegen:

- M1 : Wahre Größe einer Strecke (in  $\Pi_{e,d}$ ).
- M2 : Wahre Gestalt einer ebenen Figur (eines Winkels) (in  $\Pi_e$ ).
- M3 : Vervollständigung der durch die abs. Polarität  $\Pi_\omega$  geg. Orthogonalität (d.h. Normale zu einer Ebene, Normalebene zu einer Geraden); (in  $\Pi_e$ ).

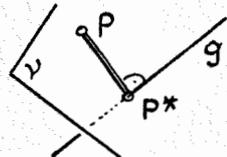
Bemerkung: In  $\Pi_e$ , wobei keine Einheitsstrecke ausgezeichnet ist, kann M1 ersetzt werden durch

- M1a: Übertragen einer Strecke (die Gleichheit zweier Strecken ist ein Begriff der Ähnlichkeitsgeometrie, da die zur Längenmessung benötigten Translationen und Kugeln Begriffe der Ähnlichkeitsgeom. sind).
- M1b: Teilen und Vervielfachen einer Strecke.

Um obige Beh. zu zeigen, untersuchen wir die gegenseitige Lagen- und Maßbeziehungen von zwei Elementen aus  $\mathcal{E} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{P}$ .

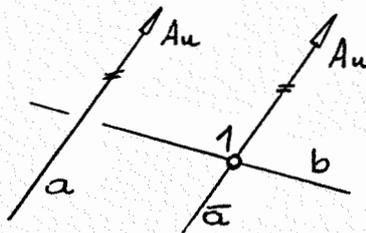
$\mathcal{P} \times \mathcal{P}$  : Für  $P, Q \in \mathcal{P} \subset \Pi_{e,d}$  ist ein Abstand  $d(PQ) = \overline{PQ}$  definiert, vgl. 0.5 Folg. 4  $\implies$  ..... (M1)

$\mathcal{P} \times \mathcal{G}$  : Geg.  $P, g \in \Pi_{e,d}$ ; Ges.: "Normalabstand"  $\overline{Pg}$ :  
 In  $\Pi_{e,d}$ : Ebene  $v \perp g$  mit  $v \perp P$  ..... (M3)  
 $v \cdot g = P^*$  ..... (L<sub>3</sub><sup>\*</sup>)  
 $\overline{PP^*} = : \overline{Pg}$  ..... (M1)



$\mathcal{G} \times \mathcal{G}$  : Geg.  $a, b$  windschief; Ges.: (1) Winkel  $\sphericalangle ab$   
 (2) Abstand  $\overline{ab}$

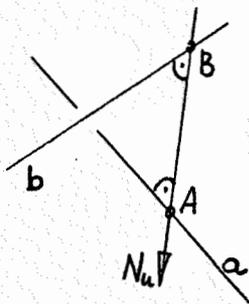
(1) In  $\Pi_e$ :  $\bar{a} \parallel a$  mit  $\bar{a} \cdot b = 1 \implies$  projektive Formulierung:



$a \cdot \omega = A_u$  ..... (L<sub>3</sub><sup>\*</sup>)  
 $A_u 1 = \bar{a} \quad (1 \perp b)$  ..... (L<sub>1</sub>)  
 $\sphericalangle \bar{a} b = : \sphericalangle a b$  ..... (M2)

(2) In  $\Pi_{e,d}$ :  $a \cdot \omega = A_u$ ,  $b \cdot \omega = B_u$  ..... (L<sub>3</sub><sup>\*</sup>)  
 $A_u B_u = f_u$  ..... (L<sub>1</sub>)

( $f_u$  ... Ferngerade von  $\varphi$  mit  $a \parallel \varphi$ ,  $b \parallel \varphi$ )



$N_u := f_u \cdot \omega$  ... Fernpkt der zu  $\varphi$  normalen Richtung ..... (M3)

$N_u a = \alpha$ ,  $N_u b = \beta$  ..... (L3)

$B := \alpha \cdot b$ ,  $A := \beta \cdot a$  ..... (L3\*)

$\overline{AB} = : \overline{ab}$  ..... (M1)

Anmerkung: Für  $a // b \Rightarrow (1) \sphericalangle ab = 0$ ,

(2)  $\overline{ab} := \overline{aB}$  mit  $B \in b$ ,  $B$  beliebig,  $\Rightarrow$  vgl.  $\mathbb{R} \times \mathbb{U}$ .

$\mathbb{U} \times \mathbb{E}$ : Geg.  $g, \varepsilon \in \mathbb{T}_e$ , Ges.:  $\sphericalangle g \varepsilon$ .

$\sphericalangle g \varepsilon := \frac{\pi}{2} - \sphericalangle g n_\varepsilon$  mit  $n_\varepsilon \perp \varepsilon$

$\Rightarrow n_\varepsilon \perp \varepsilon$  mit  $n_\varepsilon \in P$  (PIg) ..... (M3)

$\sphericalangle g n$  siehe  $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$ , (1) ... im wesentl. (M2)

$\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ : Geg.  $\varepsilon, \varphi \in \mathbb{T}_e$ , Ges.:  $\sphericalangle \varepsilon \varphi$ .

$\sphericalangle \varepsilon \varphi := \sphericalangle n_\varepsilon n_\varphi$ ;  $n_\varepsilon \perp \varepsilon$ ,  $n_\varphi \perp \varphi$ , ..... (M3)

$\sphericalangle n_\varepsilon n_\varphi$  siehe  $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$ , (1) ... im wesentl. (M2)

Damit ist nun gezeigt, daß die Aufgaben von  $\mathbb{T}_{e,d}$  im wesentlichen bloß (M1), (M2), (M3) erfordern.

Lösung von (Mj) in einem lin. Zweibildersystem:

Vs.:  $(\varphi_1, \varphi_2)$  mit  $\omega$  nicht doppelprojizierend (z.B. nicht erstprojizierend)  $\Rightarrow$  In  $\pi'$ :  $\omega', \omega''$ ;  $\pi_\omega', \pi_\omega''$  bzw.  $\varepsilon_{z_1}''$ .  
 $\mathbb{T}_{e,d} \Rightarrow \overline{OE} = e$ ,  $\Rightarrow$  In  $\pi'$ :  $O', E', O'', E''$ .

(M3):  $a \perp \alpha \Leftrightarrow A_u = a_u \pi_\omega \Rightarrow A_u' = a_u' \pi_\omega'$ .  
 $a \perp b \Leftrightarrow A_u \text{ kj. } B_u \text{ in } \pi_\omega \Rightarrow A_u', B_u' \text{ sind kj. in } \pi_\omega'$ .

Orthogonalität  $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Konjugiertheit} \\ \text{der Fernelemente} \\ \text{in } \pi_\omega \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Konjugiertheit} \\ \text{der Bilder der} \\ \text{Fernelemente, in} \end{array} \right.$

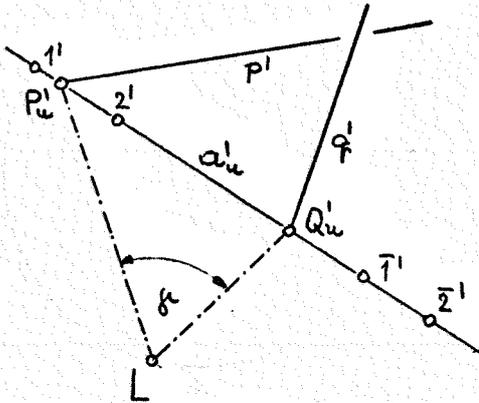
(M2): Wahre Gestalt einer ebenen Figur  $\varphi$  (eines Winkels)

$\varphi \subset \alpha$ , ( $\varphi$  ... Winkel)  $\varphi'$  kollinear  $\varphi$ ,  $\varphi' = \varphi \varphi_1$ .

Gesucht: Kollineation  $\mu_\alpha: \pi' \rightarrow \pi'$  so, daß  $\varphi' \mu_\alpha$  ähnlich ist zu  $\varphi$ .  $\varphi' = \varphi \varphi_1 = \varphi \xi_1 x_1$ ,  $\varphi \xi_1 x_1 \mu_\alpha \sim \varphi \Rightarrow \varphi_1 \mu_\alpha$  ... Ähnlichkeit.

Bei  $\varphi_1 \mu_\alpha$  muß die Ferngerade  $a_u$  von  $\alpha$  ( $a_u = \alpha \cdot \omega$ ) auf die Fern-

gerade  $u'$  von  $\pi'$  abgebildet werden; das  $(\rho_1, \mu_\alpha)$ -Bild der absoluten Involution  $\varepsilon_{a_u}$  auf  $a_u$  muß die abs. Inv. auf der Ferngeraden  $u'$  von  $\pi'$  sein.  $\Rightarrow \mu_\alpha$  ist eine Kollineation, die  $\varepsilon_{a_u}$  auf die abs. Inv. auf  $u'$  abbildet. ("Maßkollin.")

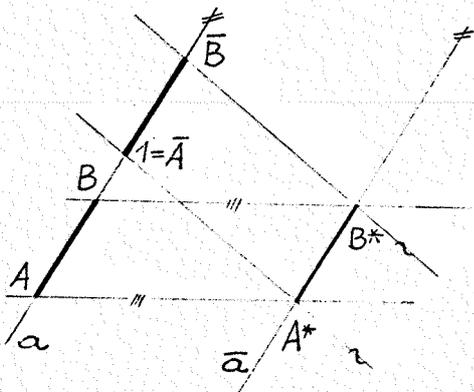


Proj. Geom.: In der Menge  $\{\mu_\alpha\}$  ]  
 $\bar{\mu}$  Kollineation mit dem LAGUERRE-Vertreter als Zentrum und  $a_u'$  als Verschwindungsgerade (Koll.-Achse beliebig  $\parallel a_u'$ ).  
 $\Rightarrow \sphericalangle pq : p', P_u'; q', Q_u';$   
 $\Rightarrow Q_u' P_u' = a_u' ; \varepsilon_{a_u'} \Rightarrow L ,$   
 $\Rightarrow \sphericalangle P_u' L Q_u' = : \sphericalangle pq .$

Aus dem LAGUERRE-Punkt erscheint der Winkel zweier Geraden unverzerrt als Winkel zwischen den Bildern der Fernpunkte.

(M1a) : Speziell Verschieben einer Strecke (Addition von Strecken)

$a = AB = A1$ , Ges.:  $\bar{B} \perp a$  mit  $\bar{B} \dots$  Endpunkt der Strecke  $\vec{A1} + \vec{AB}$ .



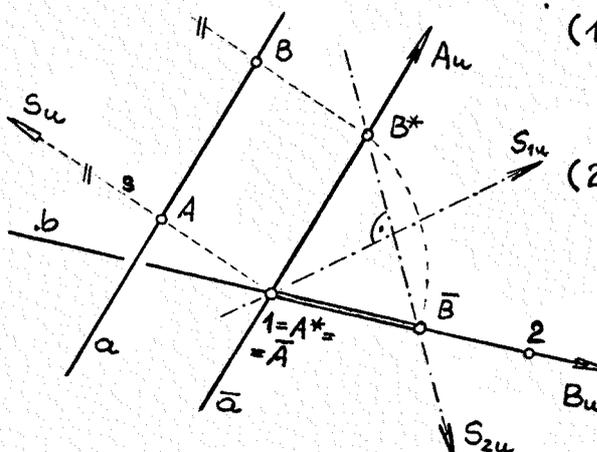
Wir wählen  $\bar{a} \parallel a$  beliebig,  $\Rightarrow \bar{a} \cdot a = \alpha$ ,  
in  $\alpha$  eine beliebige Projektionsrichtung (Zentrum  $I \omega \alpha$ )  $\rightarrow A \mapsto A^*, B \mapsto B^*$ .  
In  $\alpha$  legt  $A^*1$  eine  $\parallel$ -Projektion fest mit  $A^* \mapsto 1 = \bar{A}$  und  $B^* \mapsto \bar{B}$ .

$\Rightarrow$  Verschiebung ist eine reine affine Lagenaufgabe.

Übertragen einer Strecke auf eine nicht parallele Gerade :

Geg.  $a = AB$ ,  $b = 12$ , ( $a$  windschief  $b$ ,  $b \cdot \vec{12}$ )

Ges.  $\bar{B} \perp b$  mit  $\vec{AB} = \vec{1\bar{B}}$ .



(1)  $\bar{a} \parallel a$  mit  $\bar{a} \perp 1$ ,  $\parallel$ -Projektion in Richtung  $s = A1 \Rightarrow A \mapsto 1 = A^*, B \mapsto B^*$   
(2) Drehung um  $1$  in  $\varepsilon = \bar{a}b$  wird ersetzt durch Projektion Drehsehnenrichtung (=Richtung der Winkelsymmetralen  $s_1, s_2$  von  $\sphericalangle(ab)$ ).

Lösung in  $\pi'$ : (1)  $a\omega = A_u \dots (L^*)$ ,  $A_u 1 = \bar{a} \dots (L_1)$ ,  
 $A 1 = s \dots (L_1)$ ,  $s\omega = S_u \dots (L_3^*)$ ,  $S_u B \cdot \bar{a} = B^* \dots (L_2^*)$   
 (2) Auf  $e_u' = A_u' B_u'$   $\exists$  Invol. kj. Punkte bzgl.  $\pi\omega'$ .  
 $\Rightarrow$  Bilder der Fernpunkte  $S_{1u}$ ,  $S_{2u}$  der Symmetriestrahlen  
 $s_1$ ,  $s_2$  sind harmonisch zu  $A_u'$ ,  $B_u'$  und in der Invol. auf  $e_u'$   
 gekoppelt  $\Rightarrow$  Konstruktion nach 0.6 Aufgabe 3:  
 $DV(S_{1u}', S_{2u}', A_u', B_u') = -1$ .

(M1b) : Teilen einer Strecke AB.

In  $\pi_e$  ist der die Strecke teilende Punkt X bestimmt durch  
 $TV(X, A, B) = DV(X, A, B, A_u)$ , wenn  $A_u$  der Fernpunkt der  
 Geraden AB ist.

Dann gilt in  $\pi'$ :

$$DV(X', A', B', A_u') = DV(X, A, B, A_u) = DV(X'', A'', B'', A_u'')$$

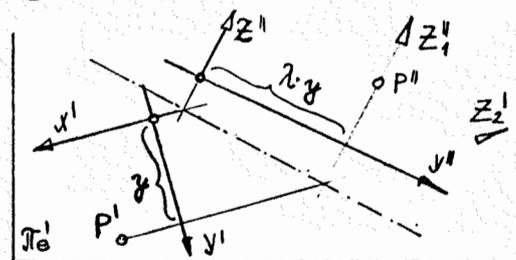
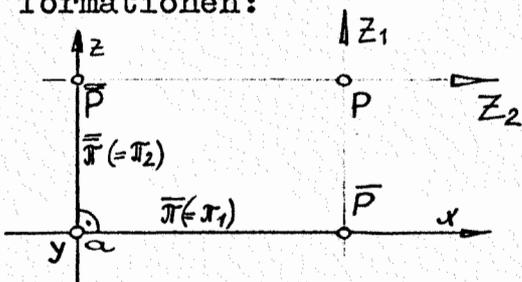
Bemerkung: In einem lin. Z.B.S.  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , in welchem die  
 Fernebene  $\omega$  doppeltprojizierend ist (bisher ausgeschlossener  
 Fall), werden die die Vervollständigung von  $\pi\omega$  betreffenden  
 Aufgaben mit Hilfe einer dritten Abbildung  $\varphi_3$  auf den be-  
 schriebenen Fall zurückgeführt, wenn  $\omega$  bezgl.  $\varphi_3$  allgemein  
 ist. D.h. man führt die  $\pi\omega$  betreffenden Aufgaben in einem  
 Z.B.S.  $(\varphi_1, \varphi_3)$  oder  $(\varphi_2, \varphi_3)$  durch. Diese Methode heißt  
 "Verwendung eines Nebenauges  $Z_3$  ( $Z_3 \notin \omega$ ) und einer Neben-  
 bildebene  $\pi_3$ " ( $\pi_3 \notin Z_3$ ,  $\pi_3 \notin Z_1$  oder  $Z_2$ ).

2.9 Spezielle lin. Zweibildersysteme

Geg.:  $\pi_e$ ,  $\pi' = \pi_e' \subset \pi_e$

I. "Normalrisse"

a) Die zum Z.B.S.  $(\varphi_1, \varphi_2)$  gehörigen Projektionen  $\xi_1, \xi_2$   
 sind Normalprojektionen auf zueinander normale Ebenen  $\bar{\pi}, \bar{\pi}'$ ,  
 die zugehörigen Kollineationen  $\alpha_1, \alpha_2$  sind ähnliche Trans-  
 formationen:

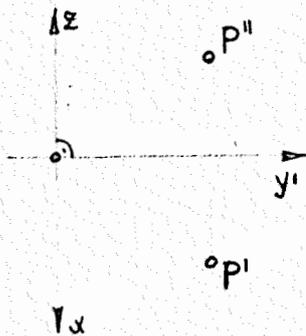


⇒ Zwei Einschneiderisse der Axonometrie sind ein Beispiel eines solchen lin. Z.B.S. . I.a. sind dabei die Ordnungs-Fernzentren = und , nicht kongruent Ordnungssachse.

Das beschriebene Z.B.S. ist vom 2. Typus.

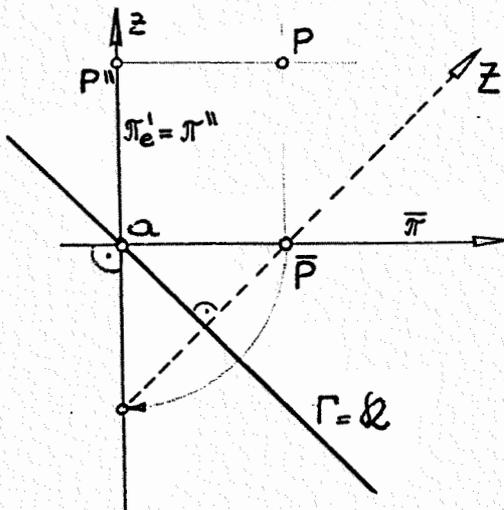
b) Speziell: "Zwei zugeordnete Normalrisse"

Darunter versteht man ein Z.B.S., dessen zugehörige Projektionen  $\zeta_j$  Normalproj. sind und für welches in der Hauptbildfigur die Ordnungszentren in einen Fernpunkt fallen, wobei  $\beta$  die Identität ist. (⇒ Die zugehörigen Kollineationen  $\alpha_j$  sind ähnliche Transformationen zum selben Faktor).  
 ⇒ Das beschriebene Z.B.S. ist vom 4. Typ. Speziell für  $\bar{\pi} \perp \bar{\pi}$ , also für spezielle Haupttraumfigur  $\mathcal{H}$ , ist das Grund- Aufriß-Verfahren ein Beispiel.



Für  $\pi_e' \subset \Pi_e$  und  $(\varphi_1, \varphi_2)$  vom 4. Typ gilt aber:

] Zentrum Z und H.R.F.  $\mathcal{H}$  so, daß  $(\varphi_1, \varphi_2)$  Projektion von zwei Projektionen  $\xi_1, \xi_2$  aus Z auf  $\pi_e'$  ist.



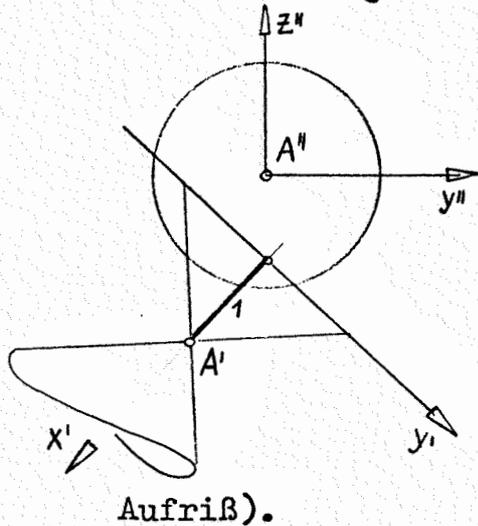
Wir wählen  $\pi_e' = \bar{\pi}$  und  $\alpha_2 = \iota$ ,  $\alpha_1$  ist Proj. von  $\bar{\pi}$  in Richtung der Drehsehnen der Drehung  $\bar{\pi} \rightarrow \bar{\pi}$  (MONGE-sche Drehung) Zentrum Z (zwei Möglichkeiten).

Das Koinzidenzgebilde dieses Z.B.S. ist die zu den Drehsehnen normale Symmetrieebene  $\Gamma$  von  $\bar{\pi}$  und  $\bar{\pi}$ .

Das Bild einer allgemeinen Ebene  $\alpha$  ist eine perspektive Affinität  $\alpha_\alpha: P' \rightarrow P''$  mit der Achse  $(\alpha \Gamma)' = (\alpha \Gamma)''$ .

Zwei zugeordnete Normalrisse sind z.B. auch Normale Axonometrie und ein Einschneideriß. (Die Bildebenen  $\pi_e' = \bar{\pi}$  und  $\bar{\pi}$  sind nicht normal !)

Bemerkung: In jedem der angegebenen Beispiele ist die Fernebene  $\omega$  doppelprojizierend ( $\omega' = \omega'' = u_{\pi'}$ ). Für die Lösung von Maßaufgaben ist i.a. eine zusätzliche Zentralprojektion  $\xi_3$  ("Nebenaug" A) erforderlich. Z.B.  $\xi_3$  mit



Zentrum A ... Einheitspunkt der x-Achse und  $\bar{\pi} = \bar{\pi}'$ .

$\Rightarrow$  Mittels  $(\xi_1, \xi_3)$  oder  $(\xi_2, \xi_3)$  erfaßt man die abs. Polarität.

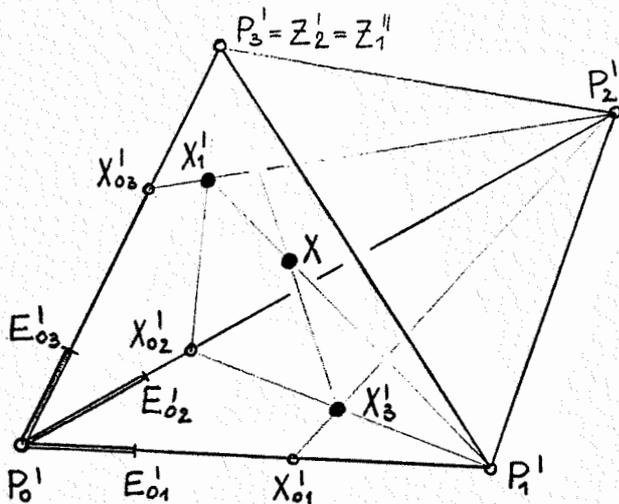
Für jeden Normalriß gilt aber auch: Das Bild einer Ebenennormalen ist senkrecht zur Hauptlinie der Ebene.  $\Rightarrow$  Die Lösung der Maßaufgaben ist daher für zwei beliebige Normalrisse elementar ohne Nebenaug möglich. (Z.B. speziell: Grund-

Aufriß).

## II. "Axonometrie"

Vgl. 1.3: Ebenes axonometrisches 7-Eck  $\{P_j, E_{kl}\}$  ;

$X'$  durch  $(X'_{o1}, X'_{o2}, X'_{o3})$  bestimmt.



Das axonometrische Bild entsteht durch Projektion  $\xi$  aus dem Ausnahmepunkt  $\Sigma$  auf  $\bar{\pi}$ .

a) Wir untersuchen die Kopplung zwischen dem axon. Bild und einem ax. Nebenbild.

Z.B.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ax. Bild } X', \\ \text{ax. Nebenbild } X'_3 \end{array} \right\} \Rightarrow (X', X'_3) = ?$

$X'_3$  ist lin. Bild für  $\xi_2$  ... Projektion aus  $P_3 =: Z_2$  auf  $\bar{\pi} = P_0 P_1 P_2$ .

Daneben ist  $\Sigma =: Z_1$ ,  $\bar{\pi} (= \pi')$   $\Rightarrow \Sigma = Z_1 [ P_3 P'_3 \Rightarrow Z'_1 = Z'_2 = P'_3; \{X', X'_3, P'_3\}$  kollinear  $\forall X \in \mathcal{P} \setminus \{Z_1, Z_2\} \Rightarrow ]$  Ordnungsprojektivität, und zwar gilt:  $\beta = \iota$ .

Ergebnis: Das ax. Bild gekoppelt mit einem ax. Nebenbild ist ein lin. Z.B.S. vom 4. Typ.

Dabei gilt für die zugehörigen Kollineationen  $\alpha_1: \bar{\pi} \rightarrow \pi'$ ,  $\alpha_2: \bar{\pi} \rightarrow \pi'$ :  $\{X'\}$  kollinear zu Zentralproj.  $\xi$  auf  $\bar{\pi}$  (vgl. Satz 3); d.h.  $\exists \alpha: \bar{X} \rightarrow X' \Rightarrow \alpha_1$  ist diese Kollineation  $\alpha$ .  $\alpha_2$  stimmt bei Beschränkung von  $\xi$  auf  $P_0 P_1 P_2$  mit  $\alpha$  überein:  $\alpha_2 := (\xi | \bar{\pi}) \alpha \Rightarrow P_0 P_1 P_2 = \Gamma \dots$  Koinzidenzebene.

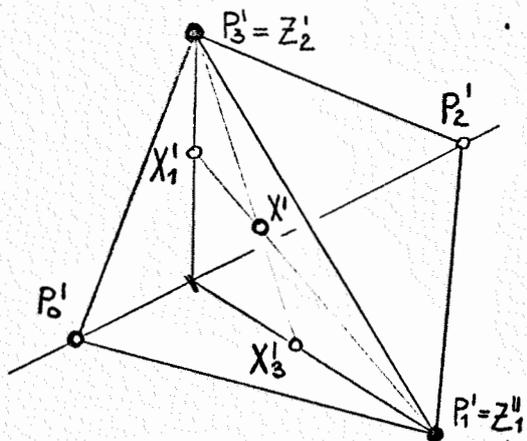
Bemerkung: Falls  $\Sigma = P_3 \Rightarrow Z_2 = P_3$  unbrauchbar  $\Rightarrow Z_2$  ist in eine der übrigen Ecken des Koord.-Tetraeders zu legen,  $\bar{\pi}$  ist die dieser Ecke gegenüberliegende Koord.-Ebene.

b) Beh.: Zwei axonometrische Nebenbilder bilden ein lin. Z.B.S. vom 2. Typus.

Z.B.  $(X'_1, X'_3) \dots (\varphi_1, \varphi_2) = (\xi_1 \alpha_1, \xi_2 \alpha_2)$   
 $\xi_1 \dots$  Zentrum  $Z_1 := P_1$ , Bildebene  $\bar{\pi} := P_0 P_2 P_3$   
 $\xi_2 \dots$  Zentrum  $Z_2 := P_3$ , Bildebene  $\bar{\pi} := P_0 P_1 P_2$

Vgl. Satz 3: Axonometrie ist kollinear zu Zentralproj.  $\xi$  aus  $\Sigma$  ( $\Sigma \neq P_1, P_3$ ) auf  $\pi \subset \bar{\pi}$  (d.h.  $\exists \alpha: \pi \rightarrow \pi'$ ,  $\pi' \dots$  Zeichenebene)

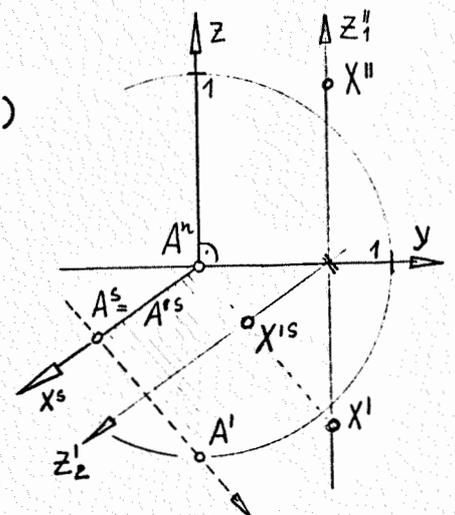
$\Rightarrow$  Wir benützen  $(\xi | \bar{\pi}) \alpha$  als Kollineation  $\alpha_1$  und  $(\xi | \bar{\pi}) \alpha$ , als Kollineation  $\alpha_2$ .



Mit obigem  $\xi$ ; und  $\alpha$ ; und allgemeinem axonometrischen Siebeneck gilt:  
 Die Ordnungszentren  $P'_1 = Z''_1$  und  $P'_3 = Z''_2$  sind verschieden, zugeordnete Ordnungsstrahlen treffen einander auf  $P'_0 P'_2$  ( $P'_0 P'_2 \not\perp / P'_1, P'_3$ )  $\Rightarrow P'_0 P'_2$  ist Ordnungsachse  $\Rightarrow \beta$  ist Perspektivität  $\Rightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$  ist vom 2. Typus.

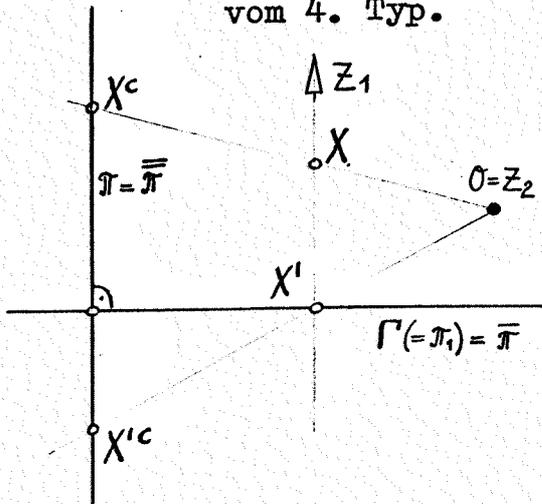
Speziell: Schrägriß (frontale Axonometrie)  
 Aufriß - Schrägrundriß ist lin. Z.B.S. vom 2. Typus.

Für die Maßaufgaben ist der Einheitspunkt der x-Achse als Nebenaugse verwendbar.



III) "Zentralprojektion"

Beh.: Zentralriß und Zentralgrundriß ist ein lin. Z.B.S. vom 4. Typ.



$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\xi_1 \alpha_1, \xi_2 \alpha_2).$$

Wir benützen die Zentralproj.  $\xi$  als Proj.  $\xi_2$  und die Bildebene der Zentralproj. als  $\bar{\pi}$  und als Zeichenebene  $\Rightarrow \alpha_2 = l$ .

Unter dem Zentralgrundriß versteht man das  $\xi$ -Bild der Normalprojektion auf eine zur Bildebene  $\pi = \bar{\pi}$  normale Ebene  $\Gamma (= \pi_1) = \bar{\pi}$ . ( $\bar{\pi} \perp Z_2$ )

$\Rightarrow$  Projektion  $\xi_1$  ... Normalproj. auf  $\Gamma = \bar{\pi}$ , (Fernpunkt  $Z_1$ ),

$$\alpha_1 = \xi | \bar{\pi}.$$

$\Rightarrow Z_1''$  und  $Z_2'$  fallen in einen Fernpunkt von  $\pi$  ( $Z_1'' = Z_2' = Z_4$ );

$X^c, X'^c, Z_1'' = Z_2'$  kollinear  $\Rightarrow$  die Ordnungsprojektivität  $\beta$  ist die Identität (Ordnungsstrahlen bilden  $\parallel$ -Strahlbüschel)

$\Rightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$  ist ein lin. Z.B.S. vom 4. Typ.

Das Koinzidenzgebilde dieses Z.B.S. ist die Grundebene  $\Gamma$ .

Das  $(\varphi_1, \varphi_2)$ -Bild einer allgemeinen Ebene  $\alpha$  führt auf eine perspektive Affinität  $\alpha_\alpha$  in  $\pi$ . Die Achse von  $\alpha_\alpha$  ist die Grundspur  $(\alpha \cdot \Gamma)^c$  von  $\alpha$ , Affinitätsstrahlen sind die Ordnungsstrahlen  $X^c X'^c$ .

Maaufgaben in der Zentralprojektion

(M1) : Wegen  $\alpha_2 = l$  kennt man das Bild der Einheitsstrecke  $\Rightarrow$  (M1) kann direkt gelöst werden.

Z.B. (M1a) (vgl. 2.8) "Übertragen einer Strecke".

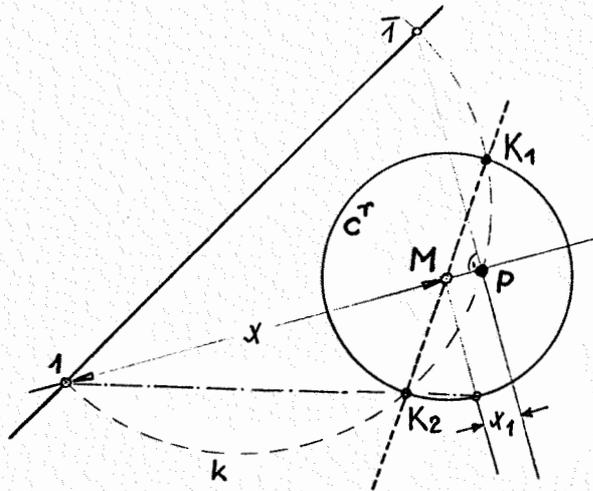


Wir konstruieren zunächst den Spurpunkt  $P$  ( $P^c, P'^c = a'^c.g$ ) und legen durch  $a$  eine beliebige Hilfsebene  $\mathcal{E}$  (Fluchtspur  $e_{\mathcal{E}} \perp A_{\mathcal{E}}^c$ , Spur  $e \parallel e_{\mathcal{E}}^c$  durch  $P$ , deren Spur  $e$  als Hilfsgerade  $b_c \pi$  benützt werden soll. Die Übertragung der Strecke  $\overline{AB}$  von  $a$  auf  $b$  erfolgt bekanntlich durch Projektion in Richtung einer der Winkelsymmetralen von  $\sphericalangle ab$  (Fernpunkte  $S_{1u}, S_{2u}$ )  $\Rightarrow S_{1u}^c, S_{2u}^c \perp e_{\mathcal{E}}^c$  und sind einerseits harmonisch bezügl.  $A_{\mathcal{E}}^c$  und  $B_{\mathcal{E}}^c$  ( $B_{\mathcal{E}}^c$  .. Fernpunkt von  $e$ ) andererseits antikonjugiert bezügl. des Distanzkreises (vgl. 0.6):

$H(A_{\mathcal{E}}^c, B_{\mathcal{E}}^c, S_{1u}^c, S_{2u}^c) \Rightarrow S_{1u}^c, S_{2u}^c$  symmetrisch zu  $A_{\mathcal{E}}^c$  und antikonjugiert bezüglich  $(\Omega^c)^r$ .

Zwischenbemerkung: Für das Polarsystem eines nullteiligen Kreises  $c$  gilt folgender

Hilfssatz: Jeder Halbkreis  $k$  über zwei bezüglich eines nullteil. Kreises  $c$  kj. Punkten  $1, \bar{1}$  trifft den reellen Vertreter  $c^r$  von  $c$  in Gegenpunkten.

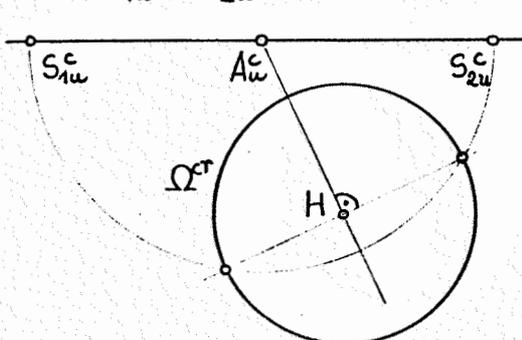


Für den Mittelpunkt  $M$  von  $c$  gilt nämlich elementar:  
Ist  $P$  der Lotfußpunkt von  $\bar{1}$  auf  $1M$ , und ist  $\overline{M1} = x$ ,  $\overline{MP} = x_1$ , dann ist  $x \cdot x_1 = r^2 = \text{konst.}$   
die Potenz von  $M$  bezügl.  $k$  ( $r$  ... Radius von  $c^r$ ).

Speziell eine durch einen Schnittpunkt von  $k$  und  $c^r$  (etwa durch  $K_1$ ) gebundene Gerade  $g$  durch  $M$  trifft daher  $k$  notwendig im

zweiten Schnittpunkt  $K_2 \Rightarrow K_1, K_2$  sind Gegenpunkte von  $c^r$ .

Mit diesem Hilfssatz läßt sich das gesuchte Symmetriepaar  $S_{1u}^c, S_{2u}^c$  als Schnittpunktepaar von  $e_{\mathcal{E}}^c$  mit jenem Kreis



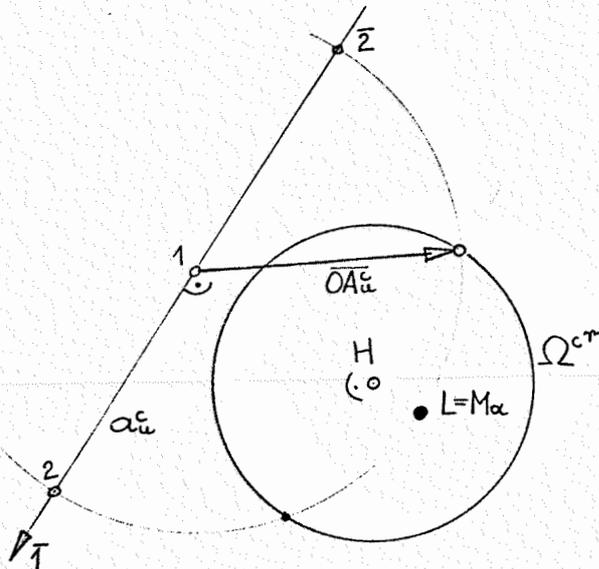
$k$  um  $A_{\mathcal{E}}^c$  konstruieren, der den Distanzkreis in Gegenpunkten trifft. (Die gleichen Linien erfahren in der H.Vs. eine räumliche Deutung: Meßpunkt  $M_a$  einer Geraden  $a$  mittels Abstandsgleichheit  $\overline{M_a A_{\mathcal{E}}^c} = \overline{O A_{\mathcal{E}}^c}$ .)

(M2) : Vgl. 2.8, wahre Gestalt einer ebenen Figur  $\varphi \subset \alpha$   
 $(\alpha \parallel \pi)$ .

Bezeichnung im Zentralriß :  $(\alpha, \omega)' = a' =: a_u^c$ ,  $\varphi' =: \varphi^c$

Wir suchen eine Kollineation  $\mu_\alpha$  der Bildebene auf sich so,  
 daß  $\varphi^c \mu_\alpha \sim \varphi$  ( $\mu_\alpha$  ... "Maßkollineation").

Z.B. ist eine geeignete Maßkollineation  $\mu_\alpha$  jene persp.  
 Kollineation, welche das Bild  $h^c$  einer Spurparallelen  
 der Ebene  $\alpha$  zur Achse und einen der LAGUERRE-Vertreter  
 $L$  des Zentralbildes  $\mathcal{E}_{a_u^c}^c$  der abs. Inv. auf  $a_u^c$  zum Zentrum besitzt.



Mittels des obigen Hilfssatzes  
 verschafft man sich zwei Paare  
 antikj. Punkte auf  $a_u^c$  bezügl.  
 des Distanzkreises  $\Omega^{c,r}$  (etwa  
 Zentralpunkt 1 und Fernpunkt  
 $\bar{1}$ , 2 und  $\bar{2}$  symmetrisch zu 1 )  
 $\Rightarrow L$  ist ein Schnittpunkt der  
 Halbkreise über diesen Punkte-  
 paaren. (Dabei gilt auch  
 elementar (H.VI.):  
 für  $L =: M_\alpha$  :  $\overline{a_u^c M_\alpha} = \overline{O a_u^c}$  ).

Die Achse  $h^c$  von  $\mu_\alpha$  ist parallel zu  $a_u^c$ . Ist speziell  
 $h^c = a$  die Spur von  $\alpha$ , so ist  $\varphi^c \mu_\alpha = \varphi_o^c \cong \varphi$ .

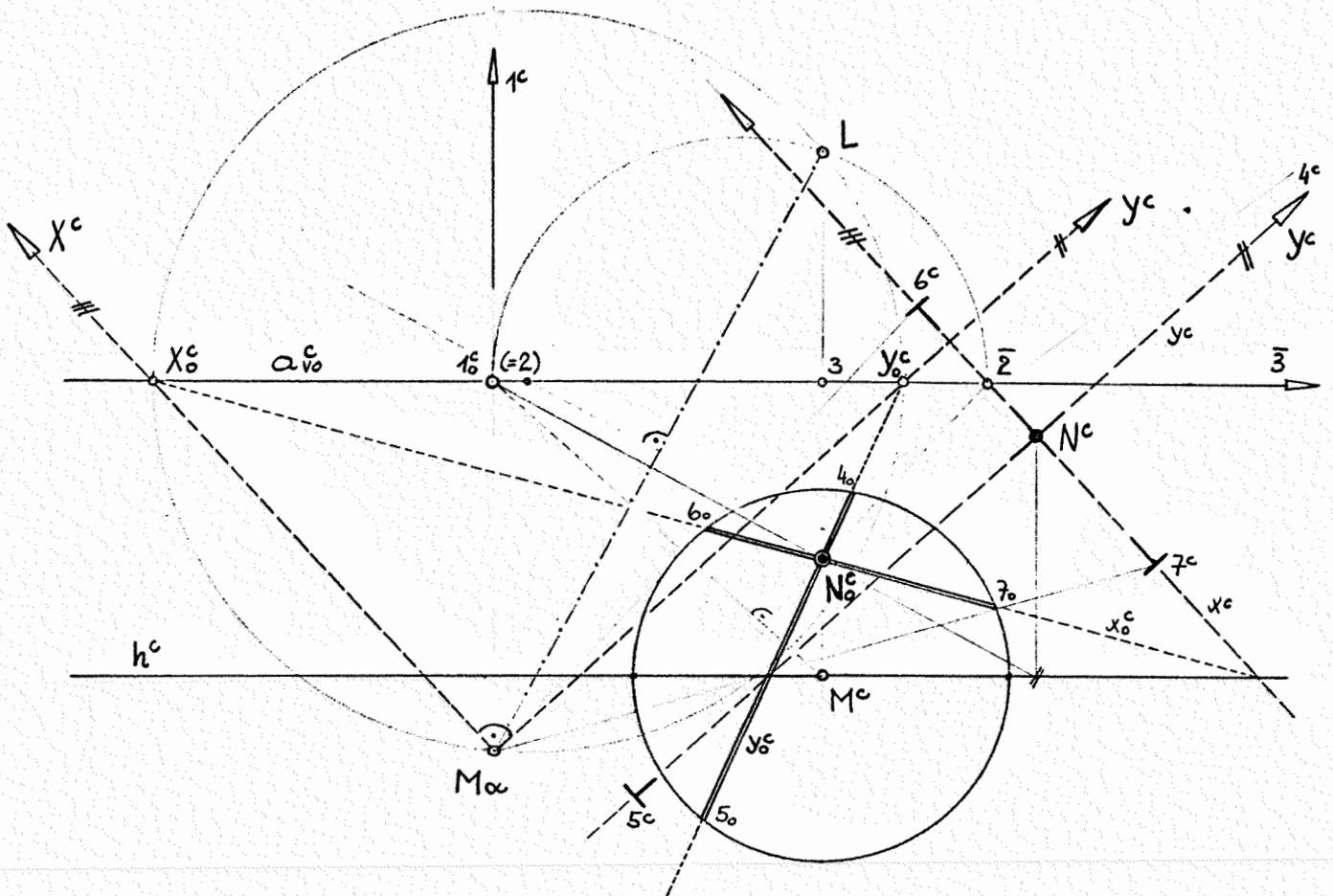
Für die Verschwindungsgerade  $a_{v_o}^c$  von  $\mu_\alpha$  gilt:  
 $\overrightarrow{a_u^c M_\alpha} = \overrightarrow{h^c a_{v_o}^c}$ .

Anwendungen: (1) Direkte Achsenkonstruktion eines Kreisbildes

Geg.:  $k(\alpha, M; r)$ ,  $\mu_\alpha$  nicht ausgeartet.

Fall 1:  $\mu_\alpha$  ist so beschaffen, daß die durch  $k_o^c$  auf  $a_{v_o}^c$   
 induzierte Invol. kg. Punkte elliptisch ist.

$\mu_\alpha$  ist Kollineation  $\Rightarrow$  das Polarsystem von  $k^c$  geht bei  
 $\mu_\alpha$  in das Polarsystem von  $k_o^c$  über  $\Rightarrow$  der Pol  $N^c$  der  
 Ferngeraden  $u (=a_v^c)$  der Bildebene  $\pi$  bzgl.  $k^c$  ist das  
 $\mu_\alpha^{-1}$ -Bild des Poles  $N_o^c$  der Verschwindungsgeraden  $a_{v_o}^c$   
 (in  $\mu_\alpha$ ) bezüglich  $k_o^c$ . ( $N^c$ ...Mittelpunkt von  $k^c$ ).



Sind  $x^c, y^c$  das Rechtwinkelpaar der Invol.  $k_j$ . Durchmesser von  $k^c$  (also die Achsen von  $k^c$ ), dann erscheinen deren Fernpunkte  $X^c, Y^c$  aus dem Kollinationszentrum  $M_\alpha$  unter  $\pi/2$ .  $X^c, Y^c$  sind - als Fernpunkte  $k_j$ . Richtungen von  $k^c$  - gekoppelt in der Involution  $k_j$ . Punkte bezüglich  $k^c$  auf der Ferngeraden  $a_{v_0}^c \Rightarrow$ . Nach Ausüben von  $\mu_\alpha : \}$  Punktepaar  $X_0^c, Y_0^c$  auf  $a_{v_0}^c$  mit

- (1)  $\sphericalangle X_0^c M_\alpha Y_0^c = \pi/2$  ;
- (2)  $X_0^c, Y_0^c$   $k_j$ . bezüglich  $k_0^c$  .

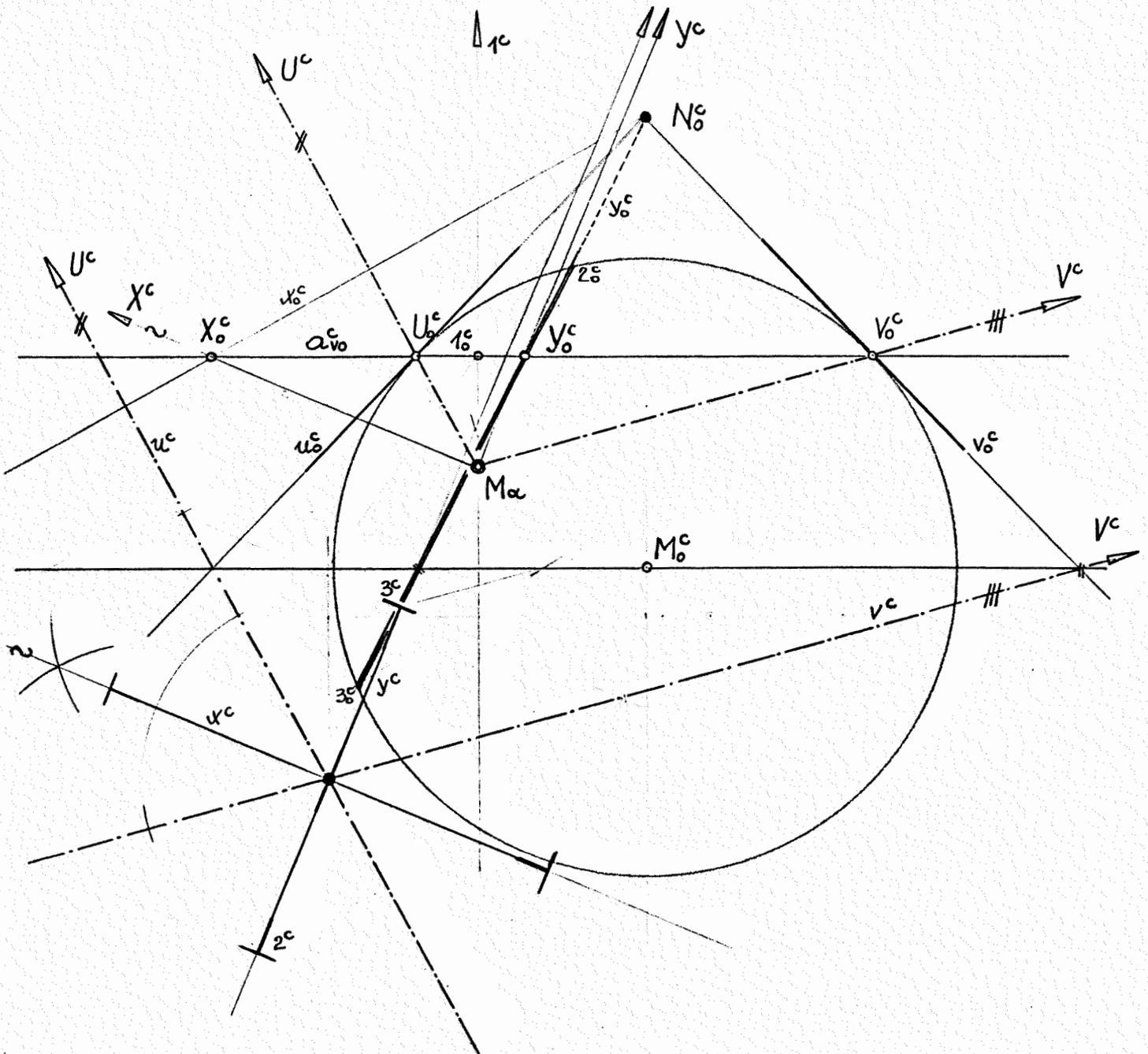
Konstruktion von  $X_0^c$  u.  $Y_0^c$  wie folgt:

Aus dem LAGUERRE-Punkt  $L$  der durch  $k_0^c$  auf  $a_{v_0}^c$  induzierten (elliptisch vorausgesetzten) Invol.  $k_j$ . Punkte erscheinen alle Paare  $k_j$ . Punkte unter  $\pi/2$ , aus  $M_\alpha$  hingegen genau das gesuchte Paar  $X_0^c, Y_0^c$  .

$\Rightarrow X_0^c, Y_0^c$  sind die Schnittpunkte von  $a_{v_0}^c$  und dem Thaleskreis durch  $L$  und  $M_\alpha$  mit der Mitte auf  $a_{v_0}^c$  .

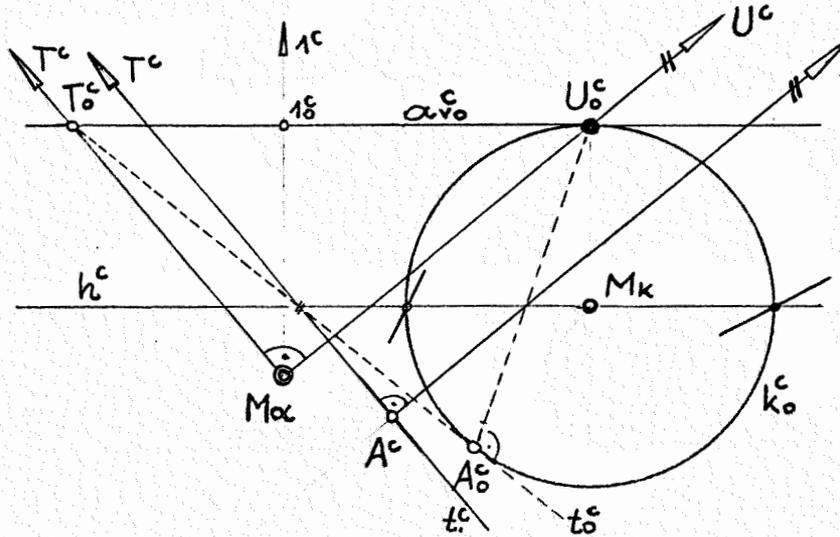
$\Rightarrow x^c \parallel M_\alpha X_0^c, y^c \parallel M_\alpha Y_0^c . \Rightarrow x_0^c = x^c \mu_\alpha, y_0^c = y^c \mu_\alpha \dots$   
 Sehnen von  $k_0^c$  durch  $N_0^c$ ;  $\Rightarrow$  Achsenendpunkte von  $k^c$   
 sind die  $\mu_\alpha^{-1}$ -Bilder der Sehnenendpunkte von  $k_0^c$ .

Fall 2:  $\mu_\alpha$  ist so beschaffen, daß die Involution  $k_j$ . Punkte auf  $a_{v_0}^c$  bezügl.  $k_0^c$  hyperbolisch ist.  $\Rightarrow$  Doppelpunkte  $U_0^c, V_0^c (\neq)$  dieser Inv. sind die Schnittpunkte von  $k_0^c$  mit  $a_{v_0}^c \Rightarrow U^c, V^c \dots$  Fernpunkte von  $k^c \Rightarrow k^c \dots$  Hyperbel.  
 $u_0^c, v_0^c \dots$  Tangenten von  $k_0^c$  in  $U_0^c, V_0^c \Rightarrow u^c, v^c \dots$  Asymptoten von  $k^c$ ;  $u_0^c \cdot v_0^c = N_0^c \dots$  Pol von  $a_{v_0}^c$  bzgl.  $k_0^c \xrightarrow{\mu_\alpha^{-1}} N^c \dots$  Mittelpunkt von  $k^c$ .



$\Rightarrow$  Achsen  $x^c, y^c$  elementar als Winkelsymmetralen von  $u^c, v^c$   
 $\Rightarrow x_0^c = x^c \mu_\alpha, y_0^c = y^c \mu_\alpha$  ... Sehnen von  $k_0^c$ , Sehnenendpunkte sind in  $\mu_\alpha^{-1}$  den Achsenendpunkten von  $k^c$  zugeordnet.

Fall 3:  $\mu_\alpha$  ist so beschaffen, daß  $a_{v_0}^c$  Tangente von  $k_0^c$  ist  $\Rightarrow k_0^c$  ist Parabel.



$U_0^c$  ... Berührungspkt. von  $k_0^c$  mit  $a_{v_0}^c \Rightarrow U^c$  .. Parabelfernpunkt ( $\Rightarrow$  Achsenrichtung)  $\Rightarrow$  Scheitel  $A^c$  von  $k^c$ :

Tangente  $t^c$  in  $A^c$  ist  $\perp$  zur Achsenrichtung  $\Rightarrow T^c$  ... Fernpunkt der Scheiteltangente  $\Rightarrow T_0^c = T^c \mu_\alpha$ ;

$\sphericalangle T_0^c M_\alpha U_0^c = \pi/2$ .  $t_0^c$  ... Resttangente aus  $T_0^c$  an  $k_0^c$ , Berührungspunkt  $A_0^c = A^c \mu_\alpha \Rightarrow A^c = A_0^c \mu_\alpha^{-1}$ .

Fall 4:  $k$  nullteilig, gegeben durch ellipt. Polarität  $\pi_k$  (Antipolarität am reellen Vertreter  $k^r$ ).

Zentralproj. von  $k$  analog zu Fall 1. Reeller Vertreter  $(k^c)^r$  des Bildes  $k^c$  von  $k$  ist  $\neq$  vom Zentralbild des reellen Vertreters  $k^r$  von  $k$ ! "Reeller Vertreter" ist ein affiner Begriff!

Festlegung von  $(k^c)^r$  durch das Zentralbild  $(\pi_k)^c$  von  $\pi_k \Rightarrow$  Bestimmung der Involutionen  $k_j$ . Punkte auf den Achsen von  $k^c$ .

Anwendung (2): Zentralumriß einer Kugel (einer Quadrik):

Dazu: Zwischenbemerkung über proj. Polaritäten im dreidim. proj. Raum  $\Pi$  (vgl. Proj.Geometrie):

Def.: Eine bijektive inzidenztreue Abbildung  $\delta: \Pi(\mathcal{P}) \rightarrow \Pi(\mathcal{E})$  heißt "Polarität" oder "involutorische Korrelation"  $\Leftrightarrow \forall X, Y \in \Pi(\mathcal{P})$  mit  $X I Y \delta \Rightarrow Y I X \delta$ .

("Konjugiertheitsrelation ist symmetrisch")

Speziell:  $\mathbb{P}$  über  $\mathbb{R} \Rightarrow \delta$  automatisch projektiv.

Def.:  $A, \alpha, a$  heißt ein selbstkj. Punkt, eine selbstkj. Ebene, eine selbstpolare Gerade ("Erzeugende")  $\Leftrightarrow A \perp A\delta$  bzw.  $\exists P$  in  $\alpha$  mit  $P\delta = \alpha$  bzw.  $\forall P$  auf  $a$  gilt  $P\delta \perp a$ .

Def.: Polarität  $\delta$  mit  $\mathcal{A}$  selbstkj. Punkt heißt "elliptische Polarität".

$\delta$  mit  $\exists P \in \mathbb{P}(\mathcal{A})$  mit  $P \perp P\delta \wedge \exists Q \in \mathbb{P}(\mathcal{A})$  mit  $Q \not\perp Q\delta$  heißt "hyperbolische Polarität".

$\delta$  mit  $\exists$  in  $\mathbb{P}(\mathcal{A})$  nur selbstkj. Punkte (d.h.  $\forall P \in \mathbb{P}(\mathcal{A})$  gilt:  $P \perp P\delta$ ) heißt "Nullpolarität" ( $=: \delta_0$ ).

$\{P \text{ mit } P \perp P\delta\}$  heißt "Kerngebilde" ("Basisgebilde") der Polarität.

Hilfssatz 1: Eine Polarität  $\delta \neq \delta_0$  ist festgelegt durch ein Poltetraeder und ein "fremdes Paar" Pol-Polarebene. (In  $\delta_0$   $\mathcal{A}$  Poltetraeder).

$\delta \neq \delta_0$  induziert auf jeder Geraden  $g$  eine Involution kj. Punkte. ( $A, A' \in g$  kj.  $\Leftrightarrow A' = g.A\delta$ )

$\delta \neq \delta_0$  induziert in jeder Ebene  $\varepsilon \in \mathbb{P}(\mathcal{E})$  mit  $\varepsilon \not\perp \varepsilon\delta$  eine ebene Polarität ("Spurpolarität" von  $\delta$  in  $\varepsilon$ ).

Hilfssatz 2:  $\exists$  genau 3  $\neq$  Typen von Poltetraedern:

- (I) Auf allen sechs Kanten des Poltetraeders ist die Inv. kj. Punkte elliptisch.
- (II) Drei von einem Punkt ausgehende Kanten tragen hyp. Involutionen, die übrigen (in einer Ebene liegenden) Kanten dagegen elliptische Invol.
- (III) Die Involutionen kj. Punkte sind auf zwei windschiefe Kanten des Poltetraeders elliptisch, alle übrigen sind hyperbolisch.

Weiters gilt: Alle Poltetraeder zu einer Polarität  $\delta$  in  $\mathbb{P}(\mathbb{R})$  sind vom gleichen Typus  $\implies$

- (I) -Polarität ... elliptische Polarität über  $\mathbb{R}$ , (Basisgebilde ist die leere Menge).
- (II) -Polarität ... hyperbolisch, Polarsystem einer ovalen Quadrik  $\Phi$  ( $\Phi$  ... Basisgebilde)

(III) -Polarität ... hyperbolisch, Polarsystem einer ringartigen Quadrik  $\Phi$  ( $\Phi$  ... Basisgebilde)

$\mathbb{R}\mathbb{C}$ :  $\delta$  ... (I) -Polarität ist über  $\mathbb{C}$  hyperbolisch, Basisgebilde ist eine nullteilige Quadrik  $\Phi$ .

$\rightarrow$  Über  $\mathbb{R}$ :  $\delta$  ist Antipolarität an der reellen Vertreterquadrik  $\Phi^r$  von  $\Phi$ .

Bemerkung a): "Tangentialebene"  $\varepsilon$  der Basisfläche  $\Phi$  einer Polarität  $\delta$ :  $\varepsilon =: E^\delta \wedge E \perp \varepsilon$ . In  $\varepsilon$  ist die Spurpolarität ausgeartet zur Involution kj. Flächentangenten in  $E$ . Die Doppelstrahlen dieser Involution (falls  $\exists$ ) sind Erzeugenden der Basisfläche  $\Phi$ . Ist diese Involution speziell eine Rechtwinkelinvolution, so ist  $E$  ein Nabelpunkt von  $\Phi$ .

Bemerkung b): Kugelbegriff siehe 0.7 Folg.3:

Einteilige Kugel  $\Phi \leftrightarrow$  in  $\omega$  induzierte Spurpolarität ist die absolute Polarität;  $\delta$  ist (II)-Polarität; in jedem (reellen) Punkt von  $\Phi$  ist die Invol. kj. Tangenten die Rechtwinkelinvolution.

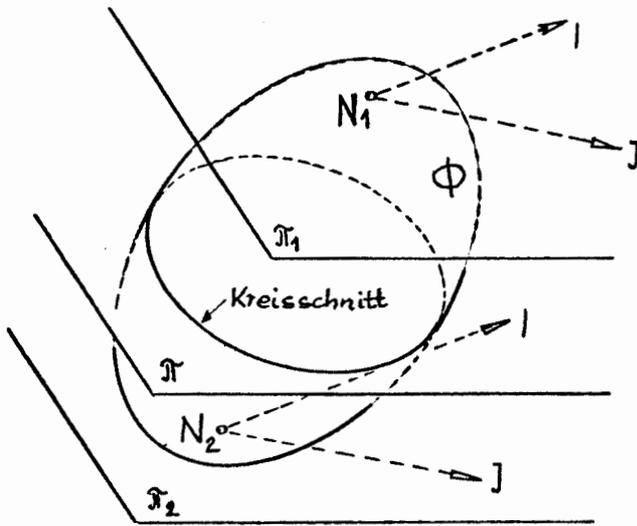
Nullteilige Kugel  $\Phi \leftrightarrow$  Spurpolarität in  $\omega$  ist die abs. Polarität;  $\delta$  ist über  $\mathbb{R}$  eine (I)-Polarität.

Damit: Zentralbild einer Kugel bzw. Quadrik.

Allgemeines Konstruktionsprinzip für das Aufsuchen des scheinbaren Umrisses  $u^c$  einer Quadrik  $\Phi$  (über  $\mathbb{R}\mathbb{C}$ )

- (1) Festlegung des zu  $\Phi$  gehörigen Polarsystems
- (2) Aufsuchen der Spurpolarität  $\pi_\sigma$  in der Polarebene des Auges  $\sigma$  der Zentralprojektion. (Vs.  $\sigma$  liegt nicht auf  $\Phi$ ).
- (3) Projektion von  $\pi_\sigma$  aus  $\sigma$  auf die Bildebene  $\pi \Rightarrow \pi_\sigma^c$ .
- (4)  $u^c$  ist Basiskurve von  $\pi_\sigma^c$ .

Eine von diesem Konstruktionsprinzip abweichende Methode ist bei Projektion einer Quadrik auf eine Kreisschnittebene angebracht (z.B.  $\Phi$  ist Kugel oder Drehquadrik mit zur Bildebene lotrechter Achse):



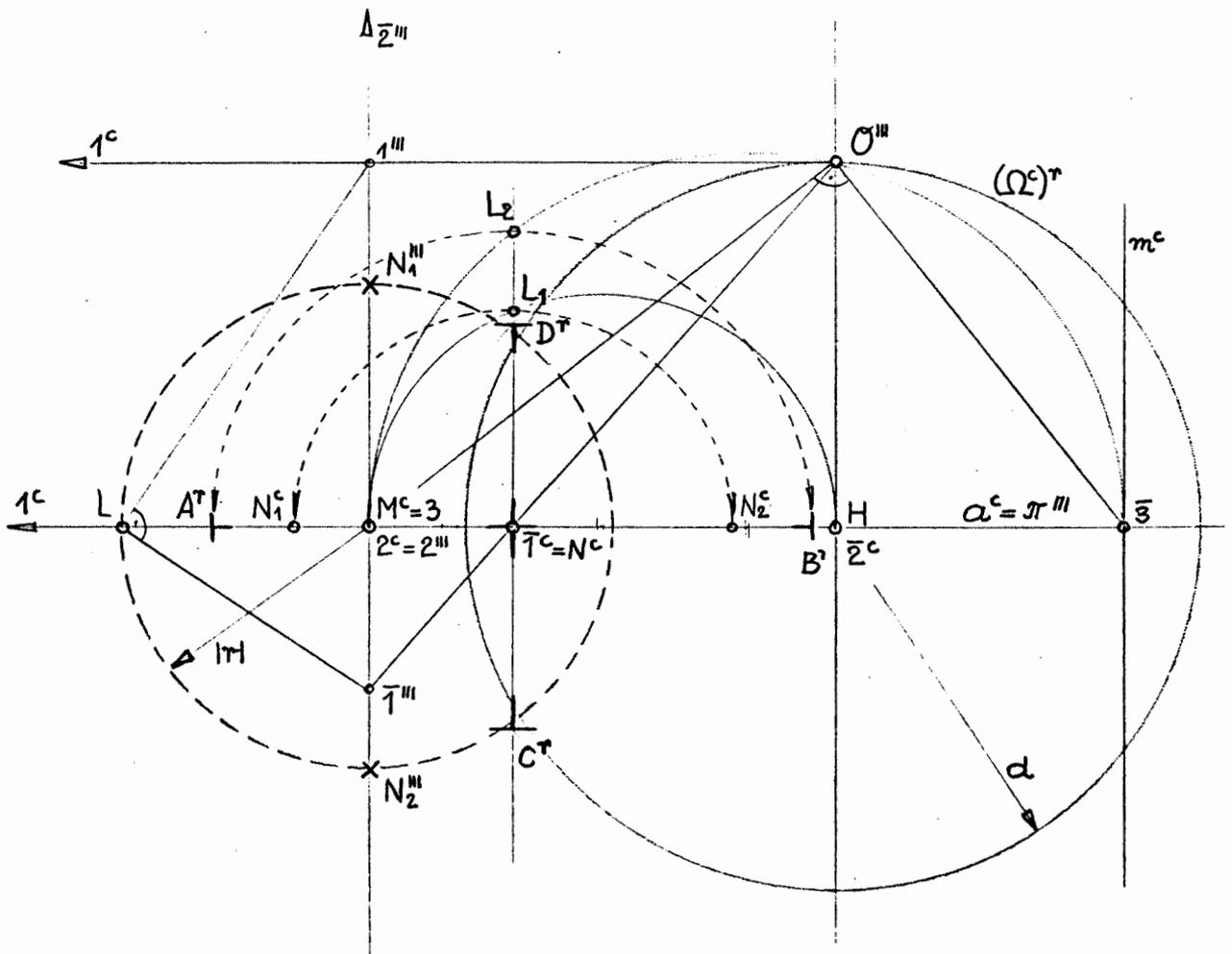
Formulierung über  $\mathcal{C}$  : Die zur Bildebene  $\pi \parallel$  Tangentialebenen  $\pi_1, \pi_2$  berühren  $\Phi$  in Nabelpunkten  $N_1, N_2 \Rightarrow$  Doppelstrahlen der Involution  $kj$ . Flächentangenten in  $N_1, (N_2)$  sind die isotropen Geraden in  $\pi_1$  ( $\pi_2$ ) durch  $N_1(N_2)$ . Diese isotropen Geraden sind Erzeugende von  $\Phi$ .  $\Rightarrow$  Ihre Zentralbilder (d.s. wegen  $\pi_1 \parallel \pi \parallel \pi_2$  die isotropen

Geraden durch  $N_1^c, N_2^c$ ) müssen den scheinbaren Umriß  $u^c$  von  $\Phi$  berühren.

Die Punkte, aus welchen an einen Kegelschnitt isotrope Tangenten gelegt werden können, sind die Brennpunkte.  $\Rightarrow \Rightarrow N_1^c, N_2^c$  sind Brennpunkte von  $u^c$ .

Beispiel: Zentralumriß einer nullteiligen Kugel  $\Phi$

Geg.:  $H, d; \Phi \{M \mid \pi; |r|\}$



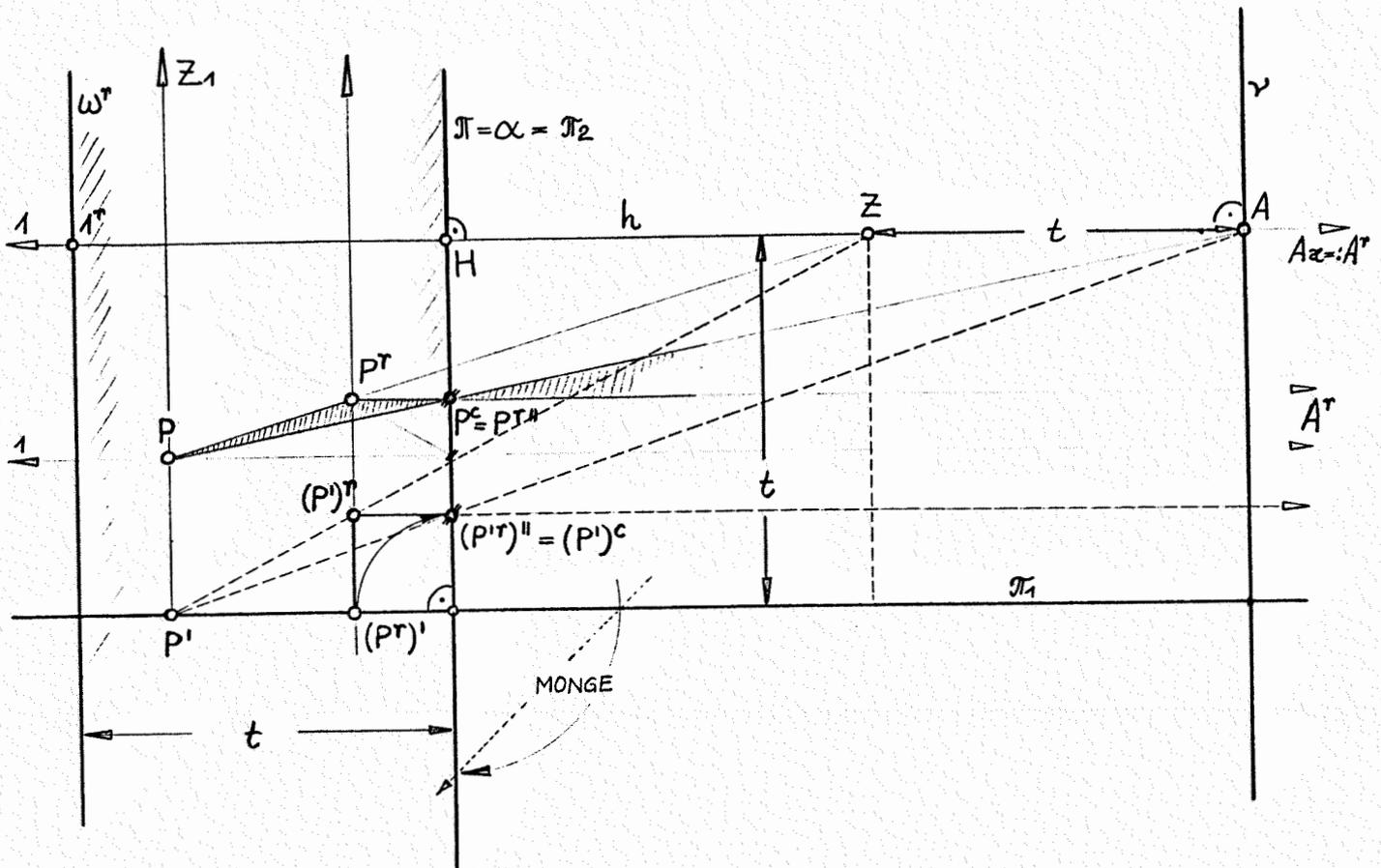
- (1) Seitenriß auf die Symmetrieebene MOH  
 $\Rightarrow \mathcal{P}^m, 0^m, a^m$  mit  $a \perp \mathcal{P}$  durch M .
- (2) Festlegung der Inv. kj. Punkte auf a (sie ist elliptisch)  
 $M^c$  ...Zentralpunkt, LAGUERRE-Punkt L mit  $LM^c = |r|$  .  
 Wir suchen jenes Paar  $1, \bar{1}$  das bei Projektion aus  $\mathcal{O}$  den  
 Fernpunkt  $1^c$  und Zentralpunkt  $\bar{1}^c = N^c$  der Bildinvolution  
 liefert.  $M=2$  ,  $\bar{2}=a \cdot \omega$  ist ein weiteres Paar  $\Rightarrow 2^c = M^c$  ,  
 $\bar{2}^c = H$  .
- (3)  $\Rightarrow$  Bild der Inv. auf a festgelegt durch Zentralpunkt  $N^c$   
 (Mittelpunkt von  $u^c$  und  $(u^c)^r$  ) und das Paar  $(M^c, H)$   
 $\Rightarrow$  LAGUERRE-Punkt  $L_1 \Rightarrow$  Symmetriepaar  $(N_1^c)^r, (N_2^c)^r$  ...  
 Brennpunkte von  $(u^c)^r$  .
- (4)  $\Omega = \Phi \cdot \omega \Rightarrow u^c$  berührt  $\Omega^c$  doppelt; Tangenten in den  
 Berührungspunkten sind die Bilder der Umrißerzeugenden  
 des Asymptotenkegels (Spitze  $M^c$ )  $\Rightarrow$  Umrißpunkte von  
 $\Omega^c$  liegen auf der Antipolaren  $m^c$  von  $M^c$  bezüglich  
 $(\Omega^c)^r$  .
- (5) Festlegung der Inv. kj. Punkte auf  $a^c$  bezüglich  $u^c$  .  
 Zentralpunkt ist  $N^c$  ,  $M^c=3$  und  $\bar{3}=m^c \cdot a^c$  ist ein Punkte-  
 paar  $\Rightarrow$  LAGUERRE-Punkt  $L_2 \Rightarrow$  Symmetriepaar  $A^r, B^r$   
 sind Scheitel von  $(u^c)^r$  .

#### (IV) Reliefperspektive

Geg.: Objekt  $\mathcal{F}$  festgelegt in einem speziellen Zweibildersystem, nämlich durch Zentralbild  $\mathcal{F}^c$  und Zentralgrundriß  $\mathcal{F}'^c$  in der Zentralprojektion  $\zeta$  (Zentrum A , Bildebene  $\mathcal{P}$  , Hauptstrahl h ).

Wir unterwerfen  $\mathcal{F}$  einer räumlichen Homologie  $\alpha: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  mit Z auf h (Z  $\neq$  A) als Zentrum,  $\mathcal{P} = \alpha$  als Achse, wobei dem Augpunkt A der Fernpunkt  $A\alpha =: A^r$  von h zugewiesen werden soll.

Das Ergebnis  $\mathcal{F}\alpha =: \mathcal{F}^r$  heißt "Relief" von  $\mathcal{F}$  und soll durch ein zweckmäßiges Z.B.S. erfaßt werden.



Wir vervollständigen zunächst die Homologie  $\alpha$  :

A mit  $A\alpha \dots$  Fernpunkt von  $ZA=h$  heißt "Hauptverschwindungspunkt"  $\Rightarrow$  Verschwindungsebene  $\nu$  durch A parallel  $\alpha = \pi$ .

$\Rightarrow \omega\alpha =: \omega^r // \alpha$  mit  $\overrightarrow{\alpha\omega^r} = \overrightarrow{\nu Z} =: t$ .. "Relieftiefe"

(Bei  $\alpha$  wird der Z nicht enthaltende Halbraum bezüglich  $\alpha$  abgebildet auf den Streifen "zwischen"  $\alpha$  und  $\omega^r$  )

Sei P ein Punkt von  $\Pi$  ( $P \notin \alpha$ ,  $P \neq |A, Z$ )  $\Rightarrow P\alpha = P^r$  durch Angittern:  $PA \cdot \alpha = P^c$  fest  $\Rightarrow P^r = (PZ) \cdot (P^c A^r)$

Ergebnis:  $\forall P \neq |Z, A$  gilt, daß der Zentralriß  $P^c$  von P aus A auf die Bildebene  $\alpha$  übereinstimmt mit der Normalprojektion (Proj. aus  $A^r$ , "Aufriß") des Reliefs  $P^r$  von P auf die gleiche Bildebene (Satz von GOURNERIE)

$$\Rightarrow P^c = (P^r)''$$

$$\Rightarrow \varphi^c = \varphi^r$$

Um ein weiteres zweckmäßiges Bild des Reliefs zu erhalten treffen wir für den Zentralgrundriß folgende Voraussetzung:

Der Zentralgrundriß sei bezogen auf eine Grundebene  $\pi_1 \perp \alpha$  mit  $\overrightarrow{A\pi_1} = t$ .

Wir konstruieren zunächst das Relief  $P'^r$  von  $P'$  durch Angittern  $\Rightarrow (P')^c = (P'^r)''$ , siehe oben. Dabei gilt mit  $PP' \perp \pi_1$  ( $\pi_1 \perp \alpha$ ), daß auch  $P^r P'^r \perp \pi_1$  ist.  $\Rightarrow$  "Grundriß"  $(P^r)'$  des Reliefs  $P^r \dots$  Normalprojektion auf  $\pi_1$ .  $\Rightarrow P^r \alpha = \overrightarrow{(P^r)'} \alpha = \overrightarrow{(P')^c} \alpha$ .

Ferner sind die Dreiecke  $Z A (\gamma \cdot \pi_1)$  und  $(P')^r (P')^c (\alpha \cdot \pi_1)$  zentrisch ähnlich bezüglich  $P'$ .  $\Rightarrow$  Wegen der speziellen Wahl der Grundebene  $\pi_1$  mit  $\overline{ZA} = A(\gamma \cdot \pi_1)$  gilt damit Streckengleichheit für  $\overline{(P')^r (P')^c} (= \overline{(P^r)' \alpha})$  und  $(P'^c)(\alpha \cdot \pi_1)$ .

Ergebnis: Die Normalprojektion des Reliefs  $\varphi^r$  auf die Grundebene  $\pi^r$  (also der "Reliefgrundriß") ist dem Zentralgrundriß  $\varphi'^c$  von  $\varphi$  aus  $A$  auf  $\alpha$  kongruent und kann mit diesem etwa durch Drehung von  $\pi_1$  um  $(\alpha \cdot \pi_1)$  zur Deckung gebracht werden (MONGE'sche Drehung). (Satz von STAUDIGL).

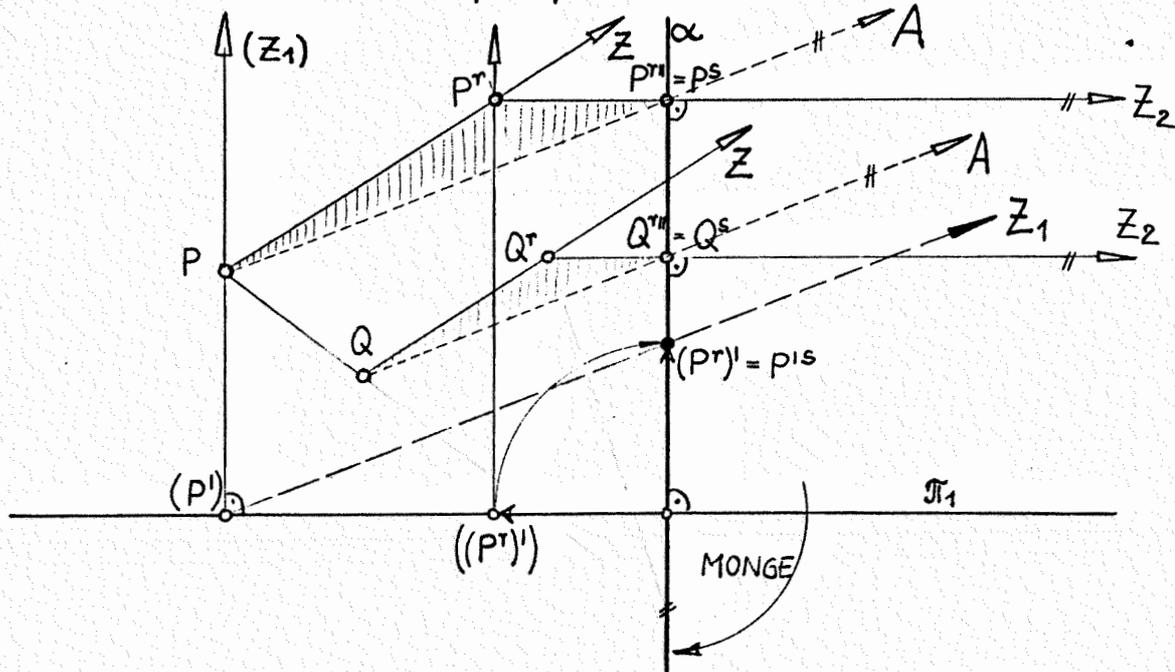
Satz 17: Wird ein Objekt  $\varphi$  nach dem Zentralriß - Zentral-Grundrißverfahren abgebildet mit der Achse  $\alpha$  einer räuml. Homologie  $\mathfrak{a}$  als Bildebene ( $Z \dots$  Zentrum von  $\mathfrak{a}$ ), dem Hauptverschwindungspunkt  $A$  von  $\mathfrak{a}$  als Auge und einer Grundebene im Abstand  $\overline{ZA}$  unter dem Auge, so erhält man Auf- und Grundriß des Reliefs  $\varphi \mathfrak{a} = \varphi^r$  von  $\varphi$ . Es gilt dabei:  $(\varphi^c, \varphi'^c) = (\varphi^{r''}, \varphi^{r'})$ .

Umgekehrt gilt: Jedes beliebige Bildpaar  $(\varphi^c, \varphi'^c)$  läßt sich als Auf- und Grundriß eines gewissen Reliefs  $\varphi^r$  des zugehörigen Raumobjekts deuten, wobei die Bildebene die Achse der betreffenden Homologie  $\mathfrak{a}$  ist und der Abstand Auge-Grundebene die Relieftiefe  $t$  festlegt.

( $Z$  ergibt sich so, daß das Auge der Hauptverschwindungspunkt von  $\mathfrak{a}$  ist.  $\Rightarrow Z$  ist stets eigentlich).

Bemerkung: Benützt man anstelle der persp. Kollineation  $\mathfrak{a}$  ( $Z, \alpha$ ) eine perspektive Affinität  $\mathfrak{a}_a$  mit der Achse  $\alpha$  ( $\mathfrak{a}_a$  festgelegt durch ein Paar zugeordneter Punkte  $P, P^r$ ), so entsteht nach Anwendung von  $\mathfrak{a}_a$  auf ein Objekt  $\varphi$  das sogenannte "Parallelrelief"  $\varphi^r$  von  $\varphi$ .

Wir versuchen nun wieder, ein geeignetes Z.B.S. des Objektes  $\varphi$  mit einem des Parallelreliefs  $\varphi^r$  zu koppeln (etwa dem Auf- und Grundriß  $(\varphi^{r''}, \varphi^{r'})$  von  $\varphi^r$ ).



Wir konstruieren den Aufriß  $P^{r''}$  des Parallelreliefs  $P^r$  von  $P$  (Normalprojektion auf  $\alpha = \pi_2$ , Fernpunkt  $Z_2$ ).

$\forall Q \in \pi_\alpha$  gilt dann:  $\Delta Q Q^r Q^{r''}$  zentrisch ähnlich  $\Delta P P^r P^{r''}$ , dabei ist  $QQ^r \parallel PP^r$ ,  $Q^r Q^{r''} \parallel P^r P^{r''} \Rightarrow$  es ist auch  $QQ^{r''} \parallel PP^{r''}$ .  $\Rightarrow$  Der Aufriß des Parallelreliefs  $\varphi^r$  entsteht durch eine gewisse Parallelprojektion, welche durch das Angabepaar  $P, P^r$  (und die Achse  $\alpha = \pi_2$ ) bestimmt ist.

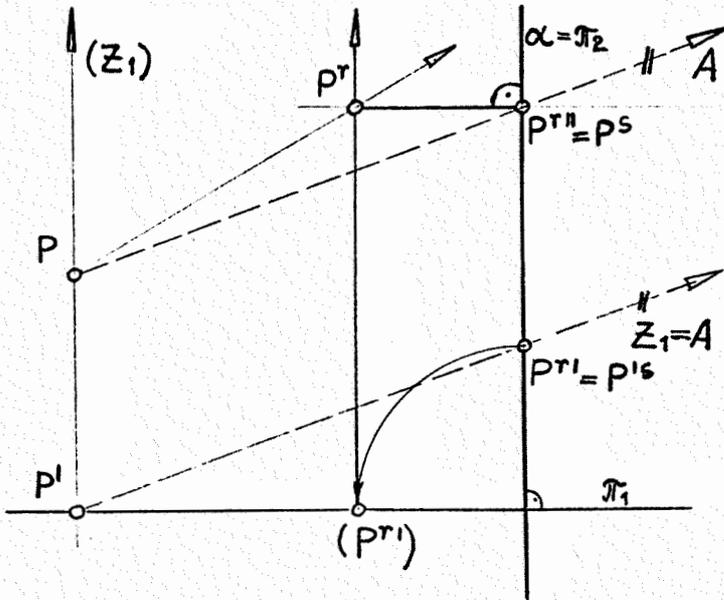
$\varphi^{r''}$  ...Schrägriß aus Fernpunkt  $A = (PP^{r''}) \cdot \omega$ .

Ferner gilt: Es ist  $TV(P'P^{r'}\alpha) = TV(PP^r\alpha) = (=TV(Q'Q^{r'}\alpha)) =$   
 $= \text{konst. mit } P^{r'}, Q^{r'} \dots \text{Grundriß von } P^r, Q^r. \Rightarrow$  Nach Ausüben der MONGE'schen Drehung ist dann  $Q'Q^{r'} \parallel P'P^{r'} \forall Q \in \pi_\alpha$ , also ist auch der Grundriß von  $\varphi^r$  ein gewisser Schrägriß (Fernpunkt  $Z_1$ ).

I.a. gilt dabei:  $Z_1 \neq A$ .

Im Sinne der Umkehrung von Satz 17 gilt aber stets:

Zu vorgegebenem Schrägriß-Schräggrundriß eines Objektes  $\varphi$   $\exists^*$  Parallelrelief  $\varphi^r = \varphi_{\alpha}$ , dessen Auf- und Grundriß mit dem vorgegebenen Schrägriß-Schräggrundriß übereinstimmt.



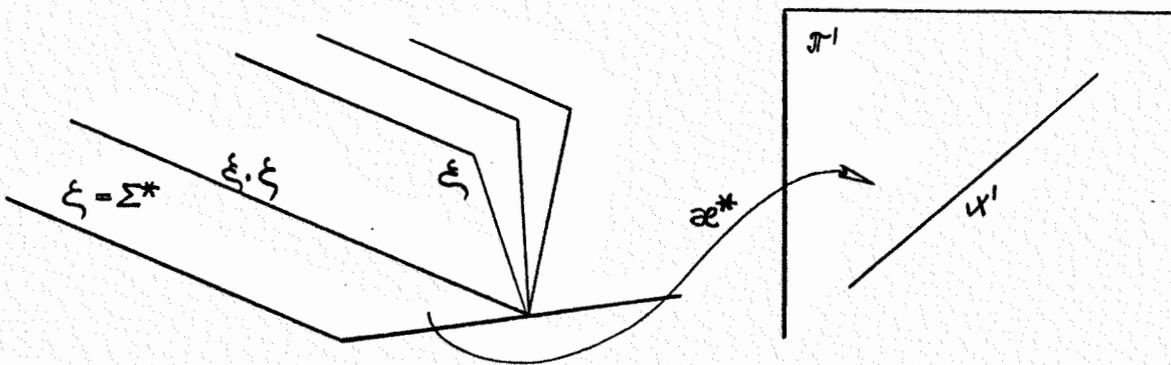
Rekonstruktion von  $\alpha_a$  :  
 Geg:  $\alpha, A; P^s, P^{1s}$  .  
 $\Rightarrow$  Wähle belieb. Grundrißebene  $\pi_1 \perp \alpha$  nicht durch  $P^{1s}$  .  
 $\Rightarrow (AP^{1s}) \cdot \pi_1 = P'$  .  
 $\Rightarrow P$  auf  $AP^s$  mit  $\overline{P\alpha} = \overline{P'\alpha}$  .  
 $P^r$ :  $P^{r1s} = P^s$ ,  $\overline{P^r\alpha} = \overline{P^{1s}\pi_1}$   
 $\Rightarrow \alpha_a$  durch  $P, P^r$  und  $\alpha$  festgelegt. (Unabhängig von  $\pi_1$  !)

§ 3 Lineare Zweispurensysteme

3.1 Vgl. Satz 2 : Eine lin. Abb.  $\varphi^*$  aus dem Ebenenraum  $\Pi(\mathcal{E})$  in die proj. Geradenenebene  $\pi^1(\mathcal{U}')$  ist entweder bijektiv zu einer Kotierung oder kollinear zum Spurenfeld in einer Ausnahmeebene  $\Sigma^*$  (und dann surjektiv).

$\varphi^*$  surjektiv  $\Rightarrow$  Kotierung scheidet aus  $\Rightarrow \varphi^*$  ist i.w. das "Spurenprinzip".

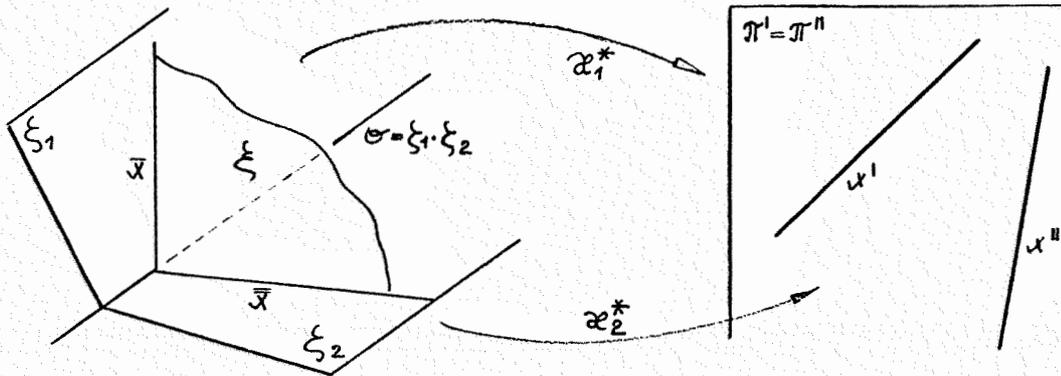
D.h. in  $\Pi$  ist eine Ebene  $\xi := \Sigma^*$  ausgezeichnet, das Spurenfeld  $\xi(\mathcal{U})$  wird vermöge einer Kollineation  $\alpha^*$  auf  $\pi^1(\mathcal{U}')$  abgebildet.



Jede Ebene  $\xi \neq \xi$  besitzt ein  $\varphi^*$ -Bild  $x'$  mit  $x' = (\xi, \xi)\alpha^*$  .  $\Rightarrow$

Die  $\varphi^*$ -Fasern sind die Ebenenbüschel um die Spuren in  $\xi$  geschlitzelt längs  $\xi$  .  $\Rightarrow \varphi^*$  ist nicht injektiv !

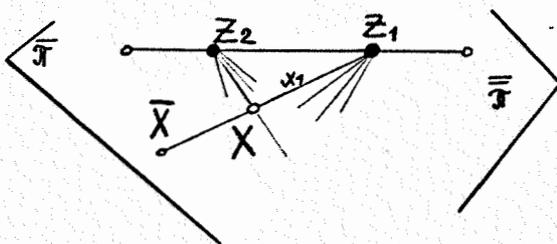
Wir wollen nun analog zu 2.1 zwei lin. Spurensysteme  $\varphi_1^*$ ,  $\varphi_2^*$  koppeln um eine bis auf eine gewisse Ausnahmemenge bijektive Paarabbildung zu erhalten.  $\Rightarrow \varphi_1^*, \varphi_2^*$  müssen sicher wesentlich verschieden sein (also nicht kollinear)  $\Rightarrow \Sigma_1^* =: \xi_1$  und  $\Sigma_2^* =: \xi_2$  sind verschieden; zu  $\xi_1$  gehört Koll.  $\alpha_1^*: \xi_1 \rightarrow \pi'(U_1')$ , zu  $\xi_2$  gehört  $\alpha_2^*: \xi_2 \rightarrow \pi'(U_2'')$  ( $U_1' = U_2''$ ).



Hierbei ist  $\xi(\varphi_1^*, \varphi_2^*) = (x', x'')$  mit:  $x' = \xi \varphi_1^* = \bar{x} \alpha_1^*$  ( $\bar{x} = \xi \cdot \xi_1$ ),  
 $x'' = \xi \varphi_2^* = \bar{\bar{x}} \alpha_2^*$  ( $\bar{\bar{x}} = \xi \cdot \xi_2$ ).

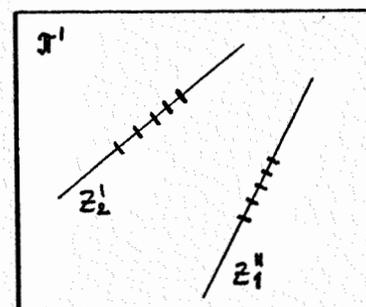
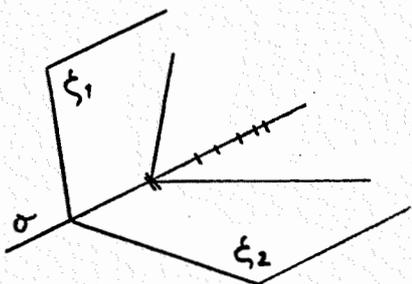
Im Gegensatz zum lin. Z.B.S. ist für das Zweispurenprinzip die Verschiedenheit der Ausnahmeebenen  $\xi_1, \xi_2$  die einzige wesentliche Voraussetzung. (Ihr entspricht dual im Z.B.S. die Vs.  $Z_1 \neq Z_2$ ).  $\Rightarrow \pi'(U_1')$  nicht koll.  $\pi'(U_2'')$ .

Bemerkung: Die für das lin. Z.B.S. getroffenen zusätzlichen Voraussetzungen betreffen die willkürlichen Bildebenen  $\bar{\pi}, \bar{\bar{\pi}}$ .



Bei Formulierung des Z.B.S. über die zu den Bildfeldern kollinearen Sehstrahlbündel (Faserbündel) entfallen diese zusätzlichen Voraussetzungen.

$\xi_1 \cdot \xi_2 =: \sigma$  .. "Doppelspur".  $\sigma$  ist erstes Bild von  $\xi_2$  ( $\sigma = \bar{z}_2$ ) und zweites Bild von  $\xi_1$  ( $\sigma = \bar{\bar{z}}_1$ ).



$\Rightarrow z_2' = \bar{z}_2 \alpha_1^*$  ,  $z_1'' = \bar{z}_1 \alpha_2^* \Rightarrow z_2'$  ,  $z_1''$  sind bijektiv gekoppelt und heißen "Ordnungsreihen" des Zweispurenprinzips.

Wir verlangen zusätzlich, daß die Kopplung zwischen  $z_2'$  und  $z_1''$  eine Projektivität ist und daß das Erzeugnis dieser Projektivität i.a. ein Kegelschnitt ist. D.h. wir treffen über den Körper  $K$  von  $\Pi$  (und  $\pi'$ ) zusätzliche Voraussetzungen:

Vs.(1) :  $K$  gestatte bloß den trivialen Automorphismus  
 $(\Rightarrow \alpha_1^*, \alpha_2^*$  automatisch projektiv:  $\Rightarrow$ ] Projektivität  
 $\beta^* : \mathcal{P}_{z_2'} \rightarrow \mathcal{P}_{z_1''}$  ;  $\beta^*$  ... "Ordnungsprojektivität")

Vs.(2) :  $K$  sei kommutativ ( $\Rightarrow$ ] in  $\pi'$  sinnvollen Kegelschnittsbegriff).

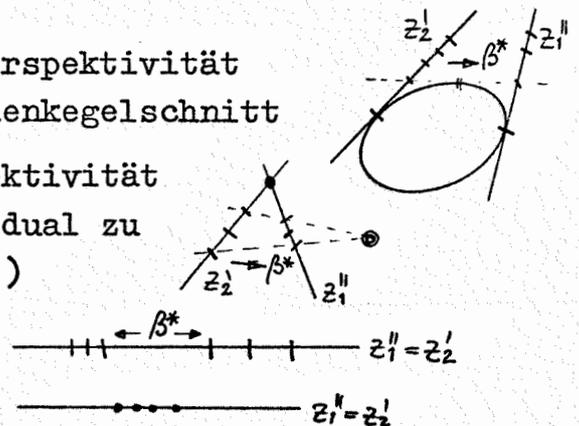
Analog zu 2.1 heißt  $\{z_2', z_1''; \beta^*\}$  "Hauptbildfigur" in  $\pi'$ .  
 Dual zu 2.1 sind vier  $\neq$  Typen von Zweispurensystemen zu unterscheiden:

1. Typus :  $z_1'' \neq z_2'$  ,  $\beta^*$  nicht Perspektivität  
 $\Rightarrow \exists$  Ordnungsgeradenkegelschnitt

2. Typus :  $z_1'' \neq z_2'$  ,  $\beta^*$  ist Perspektivität  
 $\Rightarrow \exists$  Ordnungszentrum (dual zu Ordnungssachse bei Z.B.S.)

3. Typus :  $z_1'' = z_2'$  ,  $\beta^* \neq \mathcal{L}$

4. Typus :  $z_1'' = z_2'$  ,  $\beta^* = \mathcal{L}$



Das Spurenebenenpaar  $\{\xi_1, \xi_2\}$  heißt "Haupttraumfigur" des Z.B.S.

Eigenschaften des lin. Zweispurensystems  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$

- 1) Die Definitionsmenge von  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  :  $D(\varphi_1^*, \varphi_2^*) = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_0$   
 $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  ist in  $D(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  injektiv:  
 Sei  $\xi \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_0$  ,  $\xi(\varphi_1^*, \varphi_2^*) = (x', x'')$  , wobei gilt:  
 $x' \neq z_2'$  ,  $x'' \neq z_1''$  und  $(x' \cdot z_2') = :1'$  ,  $\xrightarrow{\beta^*} (x'' \cdot z_1'') = :1''$

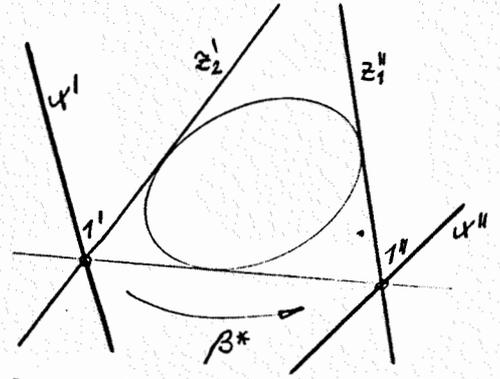
Z.B.  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  vom Typus 1 :  
 $\Rightarrow \xi$  mittels  $(\alpha_1^*)^{-1}, (\alpha_2^*)^{-1}$  ein-  
 deutig rekonstruierbar.

$\bar{x} = x'(\alpha_1^*)^{-1}, \bar{x} = x''(\alpha_2^*)^{-1}$  und  
 $\xi = \bar{x}\bar{x}$ .

Speziell:  $\xi$  mit  $\sigma \perp \xi \Rightarrow$

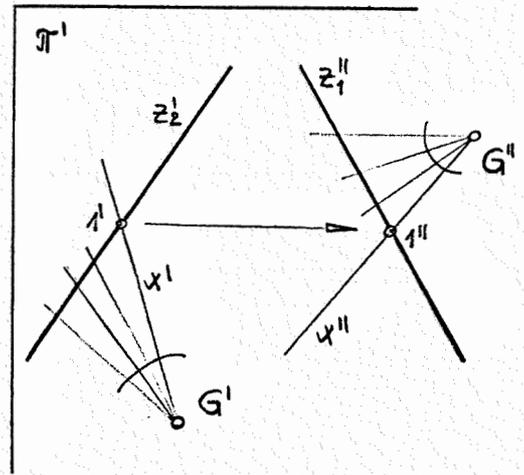
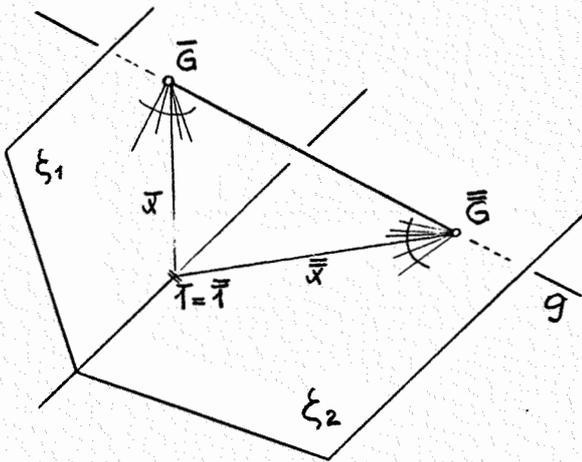
$\bar{x} = \bar{x} = \sigma \Rightarrow x' = z_2', x'' = z_1''$

$\Rightarrow \xi$  ist nicht eindeutig rekonstruierbar.



2) Das  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$ -Bild eines Ebenenbüschels  $\mathcal{E}_g$  (=: "Gerade" in  $\Pi$ ):

$g$  "allgemein", d.h.  $g$  windschief  $\sigma$ .



$g \cdot \xi_1 =: \bar{G}, g \cdot \xi_2 =: \bar{G}$ ,

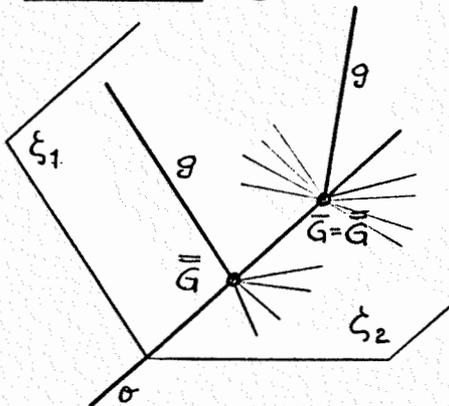
$\Rightarrow G' = \bar{G}\alpha_1^*, G'' = \bar{G}\alpha_2^*$  mit  $G' \notin z_2', G'' \notin z_1''$ .

$\forall \xi \in \mathcal{E}_g$  gilt:  $\xi(\varphi_1^*, \varphi_2^*) = (x', x'')$  mit  $x' \perp G', x'' \perp G''$ ;

$(x' \cdot z_2') =: 1' \xrightarrow{\beta^*} (x'' \cdot z_1'') =: 1'' \Rightarrow \mathcal{U}_{G'} \perp \mathcal{U}_{G''}$  (Dies folgt auch aus  $\mathcal{U}_{\bar{G}} \perp \mathcal{U}_{\bar{G}}$ ).

$\Rightarrow$  Das  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$ -Bild eines allgemeinen Ebenenbüschels  $\mathcal{E}_g$  ist ein Paar projektiver Geradenbüschel.

Speziell:  $g$  "erstinzident" (d.h.  $g \perp \xi_1, g \perp \xi_2$ ).



$\Rightarrow \bar{x} = g$  fest  $\forall \xi \in \mathcal{E}_g$

$\Rightarrow \{x'\}$  ist eine feste Gerade (und kein Büschel).

$\{x'\} \neq z_2'$

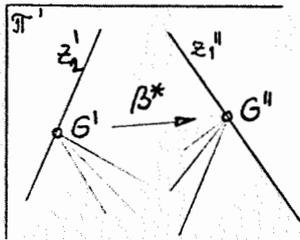
$\{x''\}$  ist ein Büschel um  $G''$ .

Analog:  $g$  "zweitinzident".

Speziell:  $g$  "doppeltinzident" ( $g = \sigma$ )

$$\begin{aligned} \{x'\} \dots \text{fest} &= z_2' \\ \{x''\} \dots \text{fest} &= z_1'' \end{aligned}$$

Speziell:  $g$  schneidet  $\sigma$  und  $g$  ist nichtinzident.



$$\{x'\} \dots \mathcal{G}_{G'}', \quad \{x''\} \dots \mathcal{G}_{G''}''$$

Dabei ist  $G' \beta^* = G''$ .

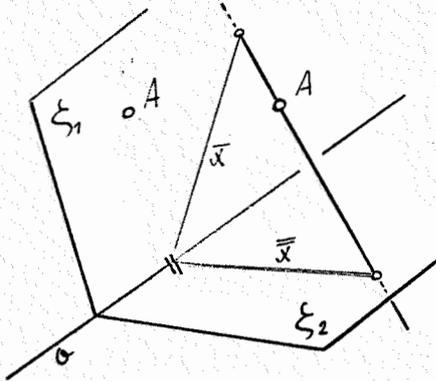
$\Rightarrow$  In  $\beta^*$  zugeordnete Punktepaare  $(G', G'')$  von  $z_2', z_1''$  lassen sich auffassen als die Bilder von Geraden, die  $\sigma$  treffen.

$\Rightarrow$  Alle Geraden eines Bündels  $\mathcal{G}_{\bar{G}}$

mit  $\bar{G} = \bar{G}$  fest auf  $\sigma$  haben das selbe Bildpaar.

### 3) Ebenenbündel $\mathcal{E}_A$ ("Punkte")

Zunächst: "allgemeine Lage" von  $A$ , d.h.  $A \notin \xi_j$ .



Jede Ebene  $\xi \in \mathcal{E}_A$  hat ein Bildpaar  $(x', x'')$ .

Wir interessieren uns für die Kopplung  $x' \mapsto x''$ .

Dual gilt (vgl. 2.1): das Bild eines allgemeinen Punktfeldes  $\alpha$  in einem lin. Z.B.S. ist eine Kollineation  $\alpha_\alpha$ .  $\Rightarrow$

Beh.: Ist  $A$  allgemein, so  $\exists^* \alpha_A^*: \mathcal{G}_A' \rightarrow \mathcal{G}_A''$  mit  $x'' = x' \alpha_A^*$  und  $(x', x'') \dots$  Bildpaar von  $\xi \in \mathcal{E}_A$

$$\text{Beweis: } \left( \begin{array}{l} \mathcal{E}_A \text{ persp. koll. } \mathcal{G}_A' \xrightarrow{\alpha_1^*} \mathcal{G}_A' = \{x' \mid x' = \xi \varphi_1^* \wedge \xi \in \mathcal{E}_A\} \\ \mathcal{E}_A \text{ persp. koll. } \mathcal{G}_A'' \xrightarrow{\alpha_2^*} \mathcal{G}_A'' = \{x'' \mid x'' = \xi \varphi_2^* \wedge \xi \in \mathcal{E}_A\} \end{array} \right) \alpha_A^*$$

$\Rightarrow$  persp. Koll,  $\iota$ ,  $\alpha_j^*$  ...proj. Kollineationen  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_A^* \dots$  Kollineation. Dual zu 2.1 gilt:  $\alpha_A^* | z_2' = \beta^*$

Speziell:  $A$  ist "erstinzident" ( $A \in \xi_1, A \notin \xi_2$ ):

$$\Rightarrow \mathcal{E}_A \xrightarrow{(\varphi_1^*, \varphi_2^*)} \left\{ \begin{array}{l} \{x'\} \dots \text{festes Geradenbündel} \\ \{x''\} \dots \text{Geradenfeld} \end{array} \right.$$

Speziell:  $A$  "doppeltinzident" ( $A \in \sigma$ )

$\Rightarrow \mathcal{E}_A \xrightarrow{(\varphi_1^*, \varphi_2^*)} \text{zwei in } \beta^* \text{ gekoppelte feste Büschel.}$

Satz 18 (analog zu Satz 10): Ist  $K$  ein kommutativer Körper, der nur den trivialen Automorphismus gestattet und sind

$\varphi_1^*, \varphi_2^*$  zwei wesentlich  $\neq$  lin. Abbildungen aus  $\Pi(\mathcal{E})$

auf ein Geradenfeld, so existiert eine Ordnungsprojektivität  $\beta^*$  zwischen den beiden Ordnungsreihen so, daß die beiden Bildgeraden einer die Doppelspur nicht schneidenden Ebene durch in  $\beta^*$  zugeordnete Punkte der beiden Ordnungsreihen gehen.

Die Beschränkung dieser Abbildung  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  auf den längs der Doppelspur geschlitzten proj. Ebenenraum ist injektiv. Geraden, welche die Doppelspur nicht treffen, werden auf projektive Büschel abgebildet; nichtinzidente Punkte auf Kollineationen des 1. Bildfeldes auf das zweite, welche  $\beta^*$  enthalten.

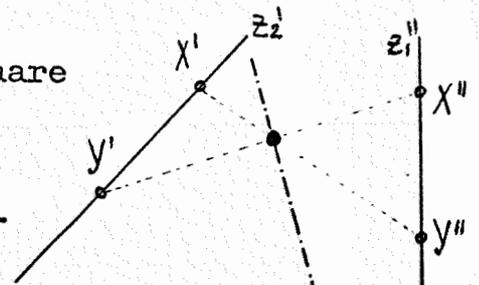
### 3.2 Lageaufgaben in einem lin. Zweispurensystem

Vgl. 2.2: STAUDIGL : Bei gegebener Hauptbildfigur.

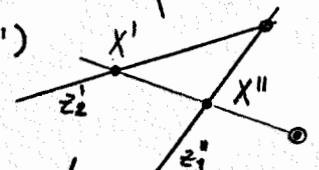
$\{ z_2', z_1'', \beta^* : \mathbb{P}_{z_2'} \rightarrow \mathbb{P}_{z_1''} \}$  sind die Lageaufgaben des proj. Raumes  $\Pi$  in gleicher Weise lösbar.

Zur Lösung der Lageaufgaben ist zunächst die Vervollständigung von  $\beta^*$  erforderlich:

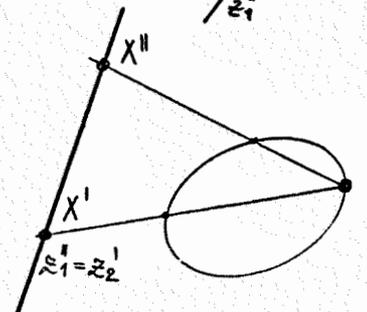
$(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  vom 1. Typus:  $\Rightarrow$  Für je zwei Paare  $(X', X'')$ ,  $(Y', Y'')$  mit  $X'' = X' \beta^*$ ,  $Y'' = Y' \beta^*$  gilt:  $(X''Y')$ ,  $(X'Y'')$   $\perp$  mit einer Projektivitätsachse.



$(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  vom 2. Typus:  $\Rightarrow$  Für jedes Paar  $(X', X'')$  gilt:  $(X', X'')$   $\perp$  mit einem Ordnungszentrum.



$(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  vom 3. Typus (d.h.  $\beta^* \neq l$ ): Vervollständigung von  $\beta^*$  auf  $\mathbb{Z}_2' = \mathbb{Z}_1''$  mittels STEINER-Kegelschnitt ( $\Rightarrow$  Projektivitätsachse)



$(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  vom 4. Typus:  $\beta^* = l \Rightarrow X'' = X'$ .

Lageaufgaben (Lösung für den "allgemeinen Fall" in einem lin. Z.B.S. vom 1. Typus):



3.3      Rekonstruktion      (vgl. 2.3)

Geg.: Hauptbildfigur  $\{z_2', z_1''; \beta^*\}$ , Haupttraumfigur  $\{\xi_1, \xi_2\}$

1. Problem: Zu wievielen Ebenen von  $\Pi$  müssen die Bildpaare bekannt sein, daß die Rekonstruktion  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)^{-1}$  möglich ist ?
2. Problem: Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Rekonstruktionen zu verschiedenen Haupttraumfiguren.

Hiezu gilt dual zu Satz 11:

Satz 19: Kennt man die Hauptbildfigur eines lin. Z.S.S., so ist bei zulässig gegebener Haupttraumfigur jede Ebenenmenge aus  $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_0$  aus den Bildpaaren eindeutig rekonstruierbar, falls man von drei nicht kollinearen Ebenen, deren Schnittgeraden  $\sigma$  nicht schneiden und deren Schnittpunkt nicht inzident ist, die Bildpaare so vorgibt, daß  $\{z_2', x_1', x_2', x_3'\}$  und  $\{z_1'', x_1'', x_2'', x_3''\}$  je ein Viereck sind.

Die zu zwei  $\neq$  zulässigen Haupttraumfiguren rekonstruierten Ebenenmengen sind kollinear.

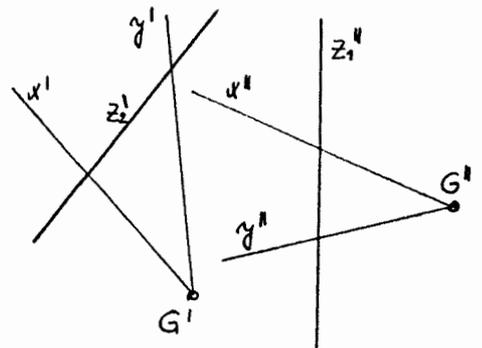
Der Beweis dieses Satzes kann durch Dualisieren des Beweises zu Satz 11 erfolgen, welcher bloß Lageaufgaben benützt.

Anmerkung: Durch ein lin. Z.S.S. ist ein Objekt bis auf kollineare Umformungen in  $\Pi$  bestimmt.

Bemerkung a) : Rekonstruktion von Geraden  $g$  .

$g \dots \mathcal{E}_g (\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  sind i.a. (d.h. für  $g$  windschief  $\sigma$ ) zwei projektiv gekoppelte Büschel, deren Scheitel  $G'$  bzw.  $G''$  nicht mit  $z_2'$  bzw.  $z_1''$  inzidieren.

$\mathcal{E}_{G'}^1$  persp.  $\mathcal{P}_{z_2'} \xrightarrow{\beta^*} \mathcal{P}_{z_1''}$  persp.  $\mathcal{E}_{G''}^2$   
 $\Rightarrow$  Rekonstruktion von  $g$  durch  
 Rekonstr. von zwei Ebenen  $\xi \dots (x', x'')$   
 und  $\eta \dots (y', y'')$  durch  $g \Rightarrow g$  aus

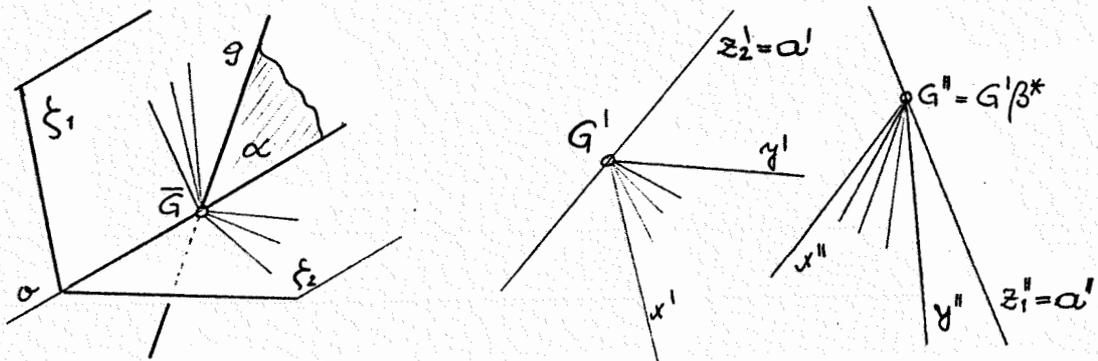


$(G', G'')$  rekonstruierbar.

Speziell:  $g \perp \xi_1, (\perp \xi_2) \Rightarrow \{x'\} \dots$  feste Gerade;  $G''$  ;  
 $\Rightarrow \forall \xi \in \mathcal{E}_g$  gilt:  $x' \alpha_i^{*-1} = \bar{x} = g$  ;  $(x'' \perp G'')$ .  
 $\Rightarrow g$  ist rekonstruierbar.

Speziell:  $g = \sigma \Rightarrow x' = z_2', x'' = z_1'' \Rightarrow g = \sigma$  eindeutig durch  
 $(z_2', z_1'')$  bestimmt.

Speziell:  $g$  schneidet  $\sigma \wedge g$  ist nicht inzident.



$g$  mit  $G' \perp z_2', G'' \perp z_1''$  zunächst unbestimmt im Bündel  $\mathcal{U}_{\bar{g}}$   
 $(\bar{G} = \bar{G})$ .

Wir betrachten  $\mathcal{E}_g : \mathcal{E}_g \xi_1 = \mathcal{U}_{\bar{g}}, \mathcal{E}_g \xi_2 = \mathcal{U}_{\bar{g}}$  und  $\mathcal{U}_{\bar{g}} \wedge \mathcal{U}_{\bar{g}}$ .  
 $\Rightarrow \mathcal{U}_{G'} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{U}_{G''}$

Diese Projektivität ist festgelegt durch 3 Paare:

$$\left. \begin{array}{l} (x', x'') \dots \xi \text{ durch } g \\ (y', y'') \dots \eta \text{ durch } g, \\ (z' = a', z'' = a'') \dots \alpha = g \cdot \sigma \end{array} \right\} \mathcal{F}: \mathcal{U}_{G'} \rightarrow \mathcal{U}_{G''} \text{ mit } (x', y', a') \xrightarrow{\mathcal{F}} (x'', y'', a'').$$

$\Rightarrow g$  ist rekonstruierbar, falls man die Bildpaare von zwei Ebenen durch  $g$  kennt, die  $\sigma$  nicht enthalten.

Bemerkung b) : Ist die Hauptbildfigur nicht vorgegeben, so läßt sich diese ergänzen, wenn man von genügend vielen Ebenen  $\xi_j$  die Bildpaare  $(x_j', x_j'')$  kennt. D.h. man kann dann Ordnungsreihen  $z_2', z_1''$  so finden, daß  $(z_2' \cdot x_j') \wedge (z_1'' \cdot x_j'')$ . ("Problem der ebenen Projektivität", dual zu 2.3 Bem.b).

Für  $K = \mathbb{R}$  : Satz v. STAUDT:  $\exists$  3,2,1 Lösungspaare  $(z_2', z_1'')$ , falls 7 Paare  $(x_j', x_j'')$  in "allgemeiner Lage" bekannt sind.

3.4 Koinzidenzgeraden und -ebenen

$$k^* := \{ \xi \in \mathcal{E} \mid \xi \varphi_1^* = x', \xi \varphi_2^* = x'' \wedge x' = x'' \} = \{ \text{Koinzidenzebenen} \}$$

$$\mathcal{Q}^* := \{ d \in \mathcal{G} \mid (D', D'') \wedge D' = D'' \} = \{ \text{Koinzidenzgeraden} \}$$

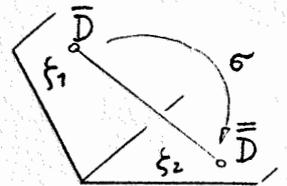
Koinzidenzgeraden d :

Fall 1:  $d = \sigma \in \mathcal{Q}^* \Leftrightarrow (z_2', z_1'') \text{ mit } z_2' = z_1'' \Leftrightarrow (\varphi_1^*, \varphi_2^*) \text{ von 3. oder 4. Typus.}$

Fall 2: d mit  $d \perp \xi_1 \wedge d \perp \xi_2$  ist niemals Koinzidenzgerade:  
 $\mathcal{E}a\varphi_1^* \dots$  feste Gerade,  $\mathcal{E}a\varphi_2^* \dots$  Geradenbüschel.

Fall 3:  $d \perp \xi_j \Rightarrow$  1. Bild  $\mathcal{E}a\varphi_1^*$  ist ein Büschel (Scheitel D')  
 2. Bild  $\mathcal{E}a\varphi_2^*$  ist ein Büschel (Scheitel D'')  
 d Koinzidenzgerade  $\Leftrightarrow D' = D''$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{D'\} = \mathcal{P}' \xrightarrow{\alpha_1^{*-1}} \overline{\mathcal{P}}\xi_1 \\ \{D''\} = \mathcal{P}'' \xrightarrow{\alpha_2^{*-1}} \overline{\mathcal{P}}\xi_2 \end{array} \right\} \text{ Abbildung } \sigma$$



Wegen  $\iota : \{D'\} \rightarrow \{D''\}$  und  $\alpha_j^*$  proj. Kollineationen gilt für

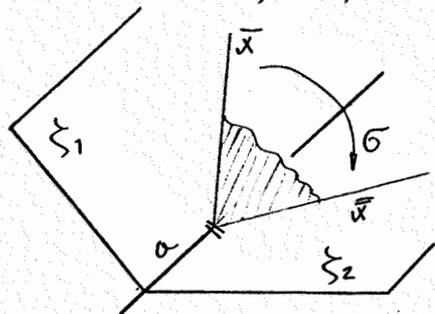
$$\sigma : \overline{\mathcal{P}}\xi_1 \rightarrow \overline{\mathcal{P}}\xi_2 : \sigma = \alpha_1^* \iota \alpha_2^{*-1} \text{ ist proj. Kollineation.}$$

$\Rightarrow \{d\} = \mathcal{Q}^*$  ist das Erzeugnis projektiver Punktfelder (vgl. die folgende Zwischenbemerkung).

Koinzidenzebenen:

Fall 1:  $\forall \xi \in \mathcal{E}_0 \setminus \{\xi_1, \xi_2\} \Rightarrow \xi \varphi_1^* = z_2', \xi \varphi_2^* = z_1''$   
 $\Rightarrow \xi \in k^* \Leftrightarrow z_2' = z_1'', \text{ d.h. } \Leftrightarrow (\varphi_1^*, \varphi_2^*) \text{ vom 3. oder 4. Typus.}$

Fall 2:  $\xi \perp a, \Rightarrow \xi(\varphi_1^*, \varphi_2^*) = (x', x''), \xi \in k^* \Leftrightarrow x' = x''$



$$\left\{ \begin{array}{l} \{x'\} = \mathcal{G}' \xrightarrow{\alpha_1^{*-1}} \overline{\mathcal{G}}\xi_1 \\ \{x''\} = \mathcal{G}'' \xrightarrow{\alpha_2^{*-1}} \overline{\mathcal{G}}\xi_2 \end{array} \right\} \text{ Abb. } \sigma$$

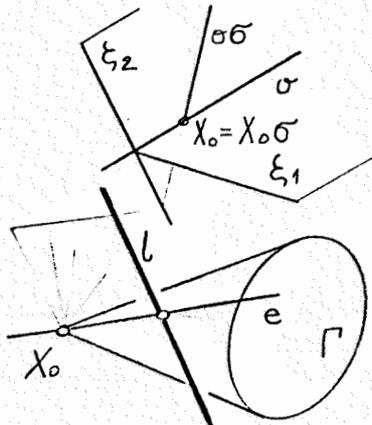
$\Rightarrow \sigma = \alpha_1^* \iota \alpha_2^{*-1}$ , also selbe Kollineation, wie die zu den Koinzidenzgeraden gehörige (vgl. Fall 3).

Zwischenbemerkung (vgl. Proj. Geom. § 15, Erzeugnis zweier kollinearere Felder):

$$\sigma : \xi_1 \rightarrow \xi_2, \quad \sigma = \xi_1 \cdot \xi_2$$

Fall 1 :  $\sigma$  ist nicht selbstzugeordnet,  $\mathcal{A}$  selbstzugeord.  
 Punkt.  $\Rightarrow$  Das Erzeugnis  $k^*$  zugeordneter Geraden ist eine  
 Torse 3. Klasse durch  $\xi_i$  ;  
 das Erzeugnis  $\mathcal{Q}^*$  zugeordneter Punkte ist die Achsen-  
 kongruenz dieser Torse ("eigentliche" und "uneigentliche"  
 Achsen und Tangenten der Gratkubik).

Fall 2 :  $\sigma$  ist nicht selbstentsprechend  $\wedge \exists^*$  einen  
 selbstentsprechenden Punkt.



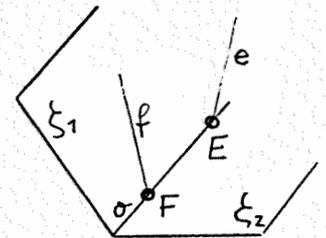
$\Rightarrow k^*$  ist ein quadratischer Kegel  $\Gamma (X_0; \xi_1, \xi_2)$   
 zusammen mit einem Ebenenbüschel um eine  
 Tangente  $l$  von  $\Gamma$ ;  
 $\mathcal{Q}^*$  ist die Achsenkongruenz des Paares  $(\Gamma, l)$   
 zusammen mit dem Geradenbündel um  $X_0$  .  
 (Achsenkongruenz von  $(\Gamma, l)$ : = {Tangenten von  $\Gamma$ ,  
 die  $l$  schneiden}  $\cup$  Büschel  $(e, l)$   $\cup$   
 Büschel  $(X_0, e)$ ).

Fall 3 :  $\sigma$  ist selbstentsprechend ( $\Rightarrow \sigma|P_0 \dots$  Projektivität)

$\alpha)$   $\sigma|P_0 \dots$  hyperbolisch  $\Rightarrow$  Fixpunkte  $E, F$

$k^* = \mathcal{E}_\sigma \cup \mathcal{E}_e \cup \mathcal{E}_f \wedge e \cdot \sigma = E, f \cdot \sigma = F$ ;  
 $e, f$  windschief;  $e, f \not\parallel \xi_i$  .

$\mathcal{Q}^* =$  hyperb. Netz  $(e, f) \cup$  Bündel in  $E, F$  .



$\beta)$   $\sigma|P_0 \dots$  parabolisch, Fixpunkt  $E$

$k^* = \mathcal{E}_\sigma \cup \mathcal{E}_e \wedge e \cdot \sigma = E, e \parallel \xi_i$  .

$\mathcal{Q}^* =$  parabol. Netz um  $e \cup$  Bündel  $E$  .

$\gamma)$   $\sigma|P_0 \dots$  elliptisch  $\Rightarrow \mathcal{A}$  Fixpunkte :  $\Rightarrow k^* = \mathcal{E}_\sigma$ ,

$\mathcal{Q}^*$  ist definiert als ellipt. Netz (selbstdual).

Fall 4 :  $\sigma$  ist selbstentsprechend und  $\sigma|P_0 = \iota$  .

$\Rightarrow \exists$  Perspektivitätszentrum  $Z$ .  $k^* = \mathcal{E}_\sigma \cup \mathcal{E}_Z$  ,

$\mathcal{Q}^* =$  Bündel  $\mathcal{U}_Z \cup$  Gebüsch  $\sigma$  .

Um nun die Koinzidenzgebilde eines lin. Z.S.S. angeben zu  
 können, sind die in der Zwischenbemerkung zitierten Er-  
 zeugnisse kollineare Felder in gewisser Weise zu schlitzen.

Hiezu gilt

Satz 20 (Vgl. Satz 12): Bei einem lin. Z.S.S.  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  erfüllen  
 die Koinzidenzebenen bzw. -geraden folgende Ebenenmengen  
 $k^*$  bzw. Geradenmengen  $\mathcal{Q}^*$  :

1. Typus:  $k^*$  ist eine Torse 3. Klasse, vermindert um  $\{\xi_1, \xi_2\}$   
 $\mathcal{Q}^*$  ist die Achsenkongruenz dieser Torse vermindert um die Achsengeradenkegelschnitte in  $\xi_1$  und  $\xi_2$ .
2. Typus:  $k^*$  ist ein quadratischer Kegel  $\Gamma(X_0, \mathcal{L}_0) \setminus \{\xi_1, \xi_2\}$  und ein Ebenenbüschel um Tangente  $l$  von  $\Gamma$ .  
 $\mathcal{Q}^*$  ist Achsenkongruenz des Paares  $(\Gamma, l)$  zusammen mit dem Geradenbündel  $X_0$  vermindert um die  $\xi_i$  angehörenden Geraden (inzidente Geraden).
3. Typus:  $k^*$  ist das Ebenenbüschel  $\mathcal{E}_0 \setminus \{\xi_1, \xi_2\}$  zusammen mit 2, 1, 0 Ebenenbüschel.  
 $\mathcal{Q}^*$  ist ein Netz und die Ebenenbündel um alle Fixpunkte vermindert um die inzidenten Geraden  $\neq \emptyset$ .
4. Typus:  $k^*$  ist  $\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_2 \setminus \{\xi_1, \xi_2\}$   
 $\mathcal{Q}^*$  ist das Gebüsch  $\emptyset \cup$  Bündel  $\mathcal{G}_Z$  vermindert um die inzidenten Geraden  $\neq \emptyset$ .

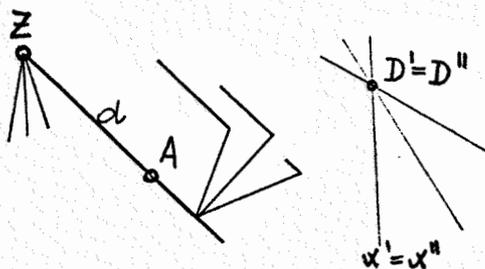
Bemerkung: Sei  $A$  ein nichtinzidenter Punkt  $\implies \mathcal{E}_A$

mit :  $\xi \in \mathcal{E}_A \longmapsto (x', x'')$ .  $\implies \alpha_A^* : x' \mapsto x''$ .  
 $\implies \{\text{Fixgeraden}\}$  von  $\alpha_A^*$  sind die Bilder der Ebenen aus  $\mathcal{E}_A \cap k^*$ .

Speziell für  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  vom 4. Typus (also  $\alpha_2' = \alpha_1'', \beta^* = l$ ), gilt wegen  $\alpha_A^* | z_2' = \beta^*$  :  $\alpha_A^*$  ist eine perspektive Kollineation mit  $z_2' = z_1''$  als Achse.

$\implies \exists$  Kollineationszentrum  $D' = D''$  (Fixgeradenbüschel).

Dieses Fixgeradenbüschel ist 1. und 2. Bild eines Ebenenbüschels, welches wegen  $x' = x''$  dem Koinzidenzgebilde  $k^*$  angehören muß;  $D' = D''$  ist Bild einer Koinzidenzgeraden.



Bei einem Z.S.S. vom 4. Typ ist  $k^* = \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_Z$  (Z..Perspektivitätszentrum von  $\xi_1 \mapsto \xi_2$ ).  
 $\implies$  In  $\Pi$  :  $AZ =: d$  mit  $d( \quad , \quad ) = (D', D'' = D')$ ,  $( \quad , \quad ) = \text{Fixgeradenbüschel um } D' = D''$ .

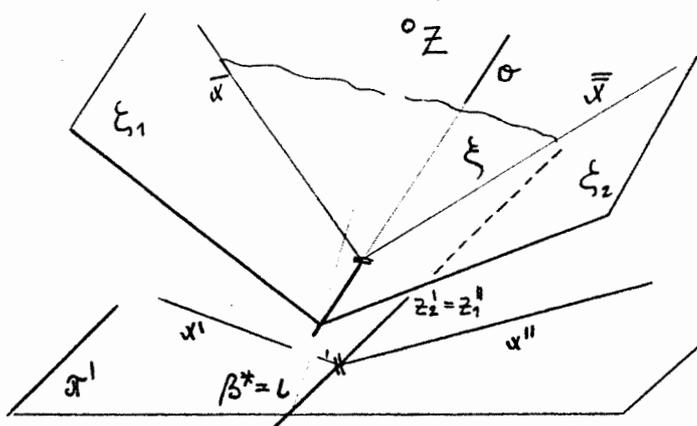
Daher gilt: Bei einem lin. Z.S.S. vom 4. Typ ist die Kollineation  $\alpha_A^*$ , die einem nicht inzidenten Punkt  $A$

zugeordnet ist, eine perspektive Kollineation, wobei die Ordnungsreihe die Achse ist und das Zentrum der Bildpunkt jener Geraden durch A ist, die dem Koinzidenzbündel angehört.

Speziell:  $A=Z \Rightarrow \alpha_Z^* = \mathcal{L}$ ; denn Z wurde so konstruiert, daß  $\forall (x', x'')$  und  $\forall (X', X'')$  gilt:  $x'=x''$ ,  $X'=X''$ ,  
 ( $\mathcal{O}_Z, \mathcal{L}_Z$  ....Koinzidenzbündel).

3.5 Projektion eines lin. Z.S.S. (vgl.2.5)

Vs.:  $\pi' \subset \Pi$ ,  $Z (\mathcal{L} \xi_i, \mathcal{L} \pi')$ ..Zentrum der Projektion.



Die Kollineationen  $\alpha_i^*: \xi_i \rightarrow \pi'$  werden durch die Projektion von  $\xi_i$  auf  $\pi'$  aus Z induziert.

$\Rightarrow$  Es ist notwendig  $z_2' = z_1'$  und  $\beta^* = \mathcal{L}$ , d.h.  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  ist sicher vom 4. Typ.

Umgekehrt läßt sich jedes lin. Z.S.S. vom 4. Typ mit

$\pi' \subset \Pi$  auffassen als Projektion von 2 Spurenebenen aus einem Zentrum Z auf  $\pi'$ ; (d.h. die Haupttraumfigur  $\{\xi_1, \xi_2\}$  läßt sich stets so ergänzen, daß  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  eine Projektion ist). Dazu kann das Zentrum Z beliebig ( $Z \notin \pi'$ ) gewählt werden (3 Freiheitsgrade), damit ist  $\sigma$  bis auf Wahl in  $Zz_1'$  ( $\sigma \notin Z$ ) festgelegt (2 Freiheitsgrade).

Für  $\xi_i$  mit  $\xi_i \notin \sigma$ ,  $\mathcal{L} Z$  und  $\xi_1 + \xi_2$  hat man je einen Freiheitsgrad.  $\Rightarrow$  7 Freiheitsgrade für die Wahl einer geeigneten Haupttraumfigur  $\{\xi_1, \xi_2\}$ , wobei das Bündel Z das Koinzidenzbündel des Z.S.S. ist.

Satz 21: Jedes lin. Zweispurensystem vom 4. Typus in einer Ebene  $\pi' \subset \Pi$  kann durch Projektion aus einem Punkt Z ( $\notin \pi'$ ) von zwei Spurenebenen erzeugt werden ( $\xi_i \notin Z$ ), wobei das Bündel Z das Koinzidenzbündel des Z.S.S. ist.

3.6 Lineare Zweispurensysteme im affinen Raum

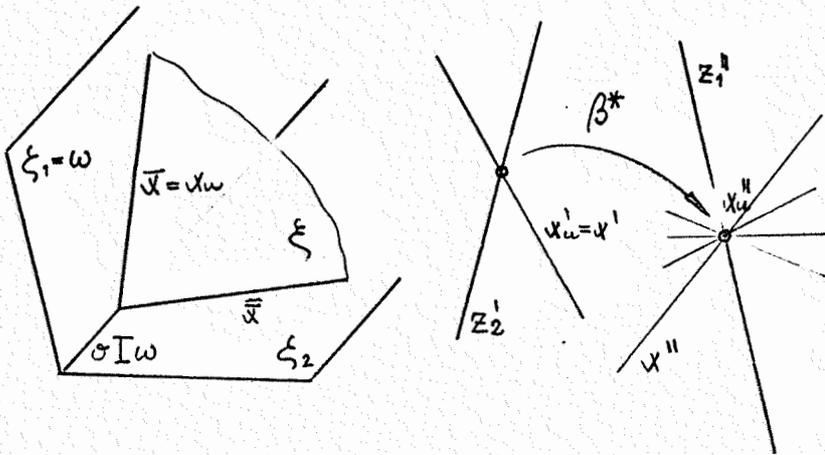
Vgl. 2.6:  $\Pi(\mathcal{P}) \setminus \mathcal{P}_\omega =: \Pi_\alpha$  ;  $\mathcal{P}_\omega$  ...Fernpunktfeld,  $\omega$  ...Fern-ebene.

Hingegen ist der Raum  $\Pi(\mathcal{E}) \setminus \{\omega\}$  im wesentlichen ein "punktierter" proj. Raum. (Nicht dual zu  $\Pi_\alpha$  !)

Es soll also die in einem affinen Punktraum enthaltene Ebenenmenge abgebildet werden.

Je nach der Lage der Hauptraumfigur  $\{\xi_1, \xi_2\}$  zur Fernebene unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Die Hauptraumfigur ist so beschaffen, daß eine Spurenebene die Fernebene ist (z.B.  $\{\xi_1, \xi_2\}$  mit  $\xi_1 = \omega$ ). (Diese Aufstellung ist die natürliche, da dadurch die Ausnahmemenge von  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$ , d.i. die Ebenenmenge  $\{\xi_1, \xi_2, \omega\}$  möglichst klein wird).



Für eine Ferngerade  $x_u \neq \omega$  gilt dann:  $x_u$  ist erstinzident, also ist das 1. Bild  $x_u'$  eine feste Gerade  $\neq z_2'$ , das 2. Bild  $x_u''$  ist ein Geradenbüschel dessen Scheitel auf  $z_1''$  liegt und in  $\beta^*$  mit dem Schnittpunkt

$x_u' \cdot z_2'$  gekoppelt ist.

Die Geraden des Büschels sind die 2. Bilder der Ebenen der Stellung  $x_u$  (d.h.  $\xi$  mit  $\bar{x} = x_u, \bar{x} \in \xi_2$  belieb. durch  $\sigma \cdot x_u$ ).

$\Rightarrow (x_u' \cdot z_2') \beta^* = z_1'' \cdot x''$  .

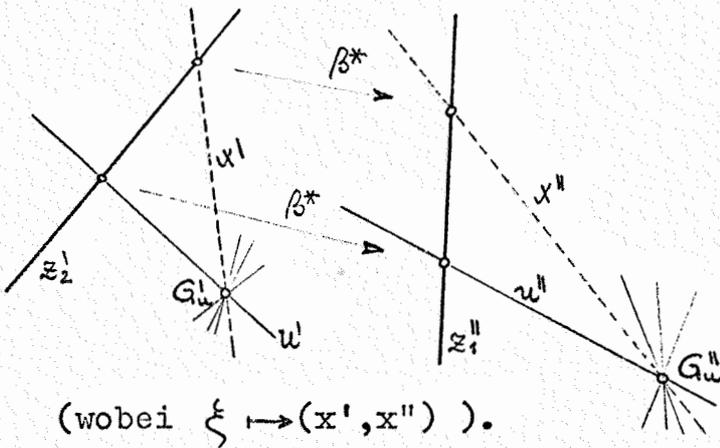
Analog: Fernpunkt  $G_u$  einer allgemeinen Geraden  $g \Rightarrow G_u' = G'$ .

Ergebnis: Die affinen Aufgaben sind als projektive Lageaufgaben bezüglich  $\omega$  zu lösen.

Bemerkung: Wegen  $\xi_i \rightarrow \pi^i$  durch Kollineation  $\alpha_i^*$  gilt hier: Das Feld der Fernpunkte (bzw. Ferngeraden) ist kollinear zum Feld der 1. Bildpunkte (Bildgeraden). Diese auch allgemein gültige Eigenschaft der lin. Z.S.S. erlangt bei der Abbildung

speziell des euklid. Raumes wesentliche Bedeutung.

Fall 2: Keine der Spurenebenen  $\xi_i$  ist die Fernebene  $\omega$   
 $\Rightarrow \omega$  ist eine "allgemeine" Ebene  $\Rightarrow \omega \mapsto (u', u'')$ .



(wobei  $\xi \mapsto (x', x'')$ ).

$\Rightarrow$  Die affinen Aufgaben sind proj. Lageaufgaben bezügl.  $\omega$ .

Z.B.: Ferngerade  $g_u$  einer allgemeinen Ebene  $\xi$ :  
 Falls  $g_u$  allgemein  $\Rightarrow g_u \mapsto (G_u', G_u'')$  mit  
 $G_u' = u' \cdot x'$ ,  $G_u'' = u'' \cdot x''$

### 3.7 Lineare Zweispurensysteme im euklid. Raum $\mathbb{T}_e$

Vgl. 2.7:  $\mathbb{T}_e$  ist ein  $\mathbb{T}_a$  über  $\mathbb{R}$  mit abs. Polarität  $\pi_\omega$  in  $\omega$ ; d.h.  $\mathbb{T}_e$  ist ein Begriff des Punktraumes, in welchem in einem bestimmten Feld eine Punkt-Geradenverwandtschaft erklärt ist.  $\Rightarrow$  Analog zu 3.6 soll die in einem euklid. Punktraum enthaltene Ebenenmenge die Definitionsmenge eines lin. Z.S.S. sein.

Wie in 3.6 unterscheiden wir zwei Fälle für die H.R.F.

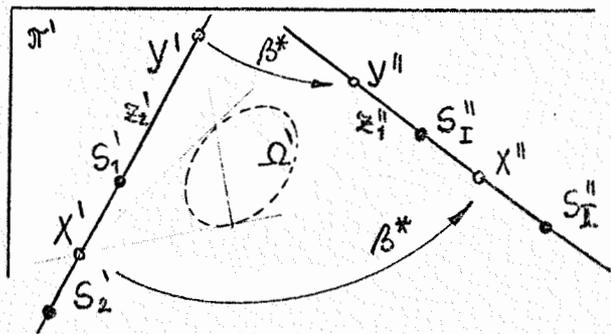
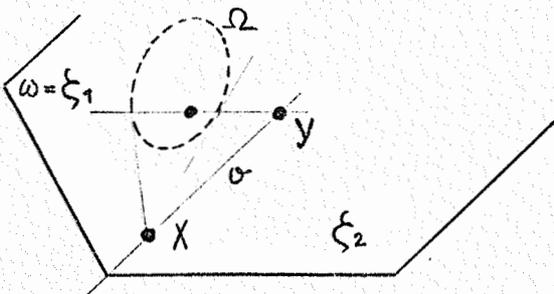
Fall 1: Eine Spurenebene (etwa  $\xi_1$ ) ist die Fernebene  $\omega$ .

Dann gilt gemäß der Bemerkung in 3.6: Das erste Bildfeld ist kollinear zum Feld  $\omega$ .  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Bei gegebener Kollineation  $\alpha_1^*$  ist das 1. Bild  $\pi_\omega^1$  der abs. Polarität mitgeliefert:  $\pi_\omega^1 = \pi_\omega \alpha_1^*$ .

Das 2. Bild von  $\omega$  ist  $z_1''$ , also eine Gerade  $\Rightarrow \pi_\omega^2$  hat keinen Sinn. Faßt man dagegen  $z_1''$  auf als 2. Bild der Doppelspur  $\sigma$ , so ist die Frage nach dem 2. Bild der abs.

Involution  $\epsilon_\sigma$  kj. Punkte auf  $\sigma$  sinnvoll.



Das erste Bild von  $\varepsilon_{\sigma}$  ist die Involution  $\varepsilon_{\sigma}'$  auf  $z_2'$ ,  
 $\varepsilon_{\sigma}'' = \varepsilon_{\sigma}' \cdot \beta^*$ .

$\varepsilon_{\sigma}''$  auf  $z''$  bestimmt die 2. Bilder von orthogonalen Geraden, die  $\sigma$  treffen.

Rekonstruktion (vgl. Satz 15:  $Z_1 I \omega$ ,  $Z_2 F \omega$ ).

Satz 22: Kennt man die Ordnungsreihen von zwei wesentlich  $\neq$  lin. Zweispurensystemen des euklid. Raumes, bei denen die Fernebene die erste Spurenebene ist, so ist bei gegebener zulässiger Hauptraumfigur jede Ebenenmenge aus  $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\sigma}$  bis auf Translationen und zentrische Streckungen aus Punkten der zweiten Spurenebene achtdeutig rekonstruierbar, falls das 1. Bild der abs. Polarität, das 2. Bild der abs. Involution auf  $\sigma$  und das Bildpaar eines Punktes auf  $\sigma$  gegeben sind.

Die  $\neq$  Lösungen und die Lösungen zu  $\neq$  zulässigen Hauptraumfiguren sind zueinander ähnlich.

Beweis: (a) Geg. sei eine feste zulässige H.R.F.  $\{\xi_1, \xi_2\}$  mit  
 $\xi_1 = \omega$ ,  $\xi_2 \neq \xi_1$

Vgl. 2.7, Beweis (a) zu Satz 15: Wir haben  $\alpha_j^* : \xi_j \rightarrow \pi'$  zu suchen.  $\alpha_j^*$  ist durch zugeordnete Vierecke festgelegt.

Z.B.  $\alpha_1^*$ : Man konstruiert in  $\pi'$  ein Poldreieck bezügl.  $\pi\omega'$

mit dem geg. 1. Bildpunkt  $X'$  als Ecke und der (mit  $X'$  inzidenten) Ordnungsreihe  $z_2'$ .

$\Rightarrow$  Poldreieck  $X'Y'Z'$ .

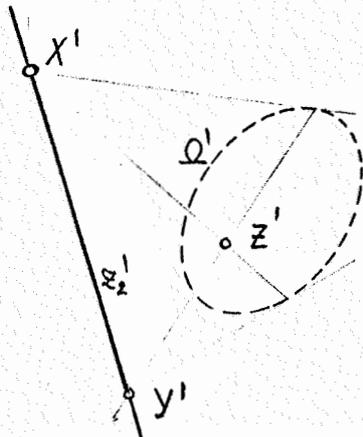
$\Rightarrow$  In  $\omega$ : Poldreieck bezügl.  $\pi\omega$  mit Ecke  $X$  und Seite  $\sigma$ :

$\Rightarrow \Delta XYZ$ .

Wir benötigen noch ein weiteres Paar zugeordneter Punkte.

Dazu wie in 2.7: Konstruktion der Paare  $(P_j', p_j')$ ,  $(P_j, p_j)$ , die  
 (1) kj. in den elliptischen Polaritäten  $\pi_{\omega}'$  und  $\pi_{\omega}$  und  
 (2) dreieckspolar bezüglich  $\Delta X'Y'Z'$  bzw.  $\Delta XYZ$  sind.

Ordnet man ein Paar  $(P_1, p_1)$  einem Paar  $(P_1', p_1')$  zu, dann ist die Zuordnung für die übrigen Paare festgelegt.

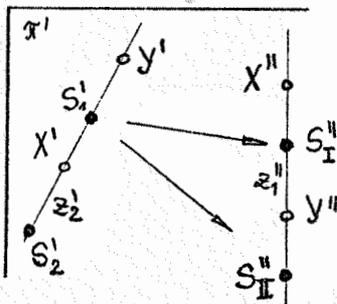


$\Rightarrow X' \mapsto X, Y' \mapsto Y, Z' \mapsto Z$  und  $P_1' \mapsto P_1$  (vierdeutig) legt die Kollineation  $\alpha_1^{*-1}$  fest.

Ergebnis:  $\alpha_1^{*-1}$  ist vierdeutig festgelegt.

$\beta^*$ : Durch  $\pi_\omega^1$  ist auf  $\sigma^1 = z_2^1$  das 1. Bild  $\varepsilon_\sigma^1$  von  $\varepsilon_\sigma$  mitgegeben. Also kennt man von  $\beta^*: z_2^1 \rightarrow z_1^1$  zunächst zwei Punktepaare, nämlich  $X', X''$  (gegeben) und  $Y' = X' \varepsilon_\sigma^1, Y'' = X'' \varepsilon_\sigma^1$ .

Bestimmt man nun nach 0.6 jenes eindeutige Punktepaar  $S_1^1, S_2^1$  aus  $\varepsilon_\sigma^1$  bzw.  $S_I^1, S_{II}^1$  aus  $\varepsilon_\sigma^1$ , welches gleichzeitig harmonisch ist zu  $X', Y'$  bzw.  $X'', Y''$ , so müssen  $S_1^1$  und  $S_2^1$  in  $\beta^*$  gekoppelt sein:



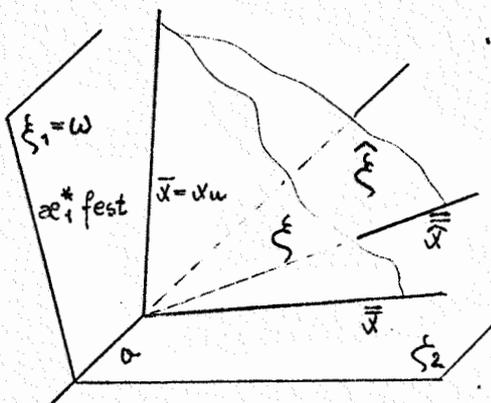
$\Rightarrow$  Je nach der Zuordnung  $S_1^1 \mapsto S_I^1 =: S_1^1$  oder  $S_1^1 \mapsto S_{II}^1 =: S_1^1$  (neben  $X' \mapsto X'', Y' \mapsto Y''$ ) ist  $\beta^*$  bestimmt.

$\Rightarrow \beta^*$  ist durch die Angabe zweideutig bestimmt.

$\alpha_2^*$ : Beh.:  $\alpha_2^{*-1}$  ist bloß bis auf zentrische Streckungen und Translationen bestimmt;

denn: Seien  $\alpha_2^{*-1}$  und  $\hat{\alpha}_2^{*-1}$  zwei  $\neq$  Lösungen, dann ist das Produkt  $\alpha_2^* \circ \hat{\alpha}_2^{*-1}$  sicher eine Kollineation  $\alpha$  von  $\xi_2$  auf sich. Bei diesen Kollineationen  $\alpha$  bleibt  $\sigma$  punktweise fest. ( $\sigma = \bar{z}_1, \alpha_2^*|_\sigma = \hat{\alpha}_2^*|_\sigma = \text{id}_{z_1}$ ).  $\Rightarrow \sigma$  ( $I \omega$ ) ist Achse von  $\alpha \Rightarrow \alpha$  ist eine zentrische Streckung aus einem Punkt von  $\xi_2$  oder eine Translation.

Wir untersuchen die Wirkung der Änderung von  $\alpha_2^*$  auf das Raumobjekt (z.B. auf eine allgemeine Ebene  $\xi$ ):



Da  $\alpha_1^*$  fest ist, ist die Ferngerade  $x_u = \bar{x}$  von  $\xi$  sicher fest; die 2. Spur  $\bar{x}$  geht in eine Spur  $\bar{x}$  über, die  $\sigma$  im Schnittpunkt mit  $\bar{x}$  trifft.

$$\Rightarrow \xi \xrightarrow{\alpha} \hat{\xi} = x_u \bar{x}.$$

Diese Zuordnung ist eine perspektive Kollineation  $\alpha$  mit  $\omega$  als Achse und  $\xi_2$  als Fixebene (Spur geht in Spur über).

Ist  $\alpha : \zeta_2 \rightarrow \zeta_2$  eine Homologie, dann ist auch  $\alpha$  eine Homologie mit dem Zentrum in  $\zeta_2$  (=Zentrum von  $\alpha$ )  $\Rightarrow \alpha$  ist eine zentrische Streckung.

Ist  $\alpha : \zeta_2 \rightarrow \zeta_2$  eine Elation (Zentrum auf  $\omega$ ), so ist  $\alpha$  eine Translation parallel  $\zeta_2$ .

(b): Wir variieren innerhalb der 4 Möglichkeiten für  $\alpha_1^*$  und 2 Möglichkeiten für  $\beta^*$ , in den Möglichkeiten für  $\alpha_2^*$  und in der Wahl einer zul. Haupttraumfigur ( $\zeta_2 = \omega$ ).

Beh.: Je zwei  $\neq$  Rekonstruktionen sind ähnlich.

Jedenfalls gilt: Die Rekonstruktionen sind sicher affin, denn  $\omega$  bleibt fest.

Zusätzlich legt  $\pi_\omega'$  die Zuordnung zwischen  $\zeta_1$  und  $\omega$  immer so fest, daß  $\pi_\omega'$  das 1. Bild der abs. Polarität ist.

$\Rightarrow$  Jede Rekonstruktion ordnet  $\pi_\omega'$  die feste absolute Polarität zu.  $\Rightarrow$  Die Ergebnisse zu  $\neq$  Rekonstruktionen sind ähnlich.

Fall 2: Keine der Spurebenen ist die Fernebene ( $\zeta_i \neq \omega$ )

$\Rightarrow$  Die absolute Polarität  $\pi_\omega$  ist nicht erfaßbar (vgl. Zweibildersystem mit  $\omega$  doppeltprojizierend).

In diesem Fall koppelt man mit dem lin. Z.S.S. eine Projektion aus einem "Nebenaugen"  $Z$  ( $\pi_e$  wird dazu als Punktraum aufgefaßt).

$\pi_\omega$  induziert dann eine Polarität  $\pi_Z$  im Bündel  $Z$ , deren "Spurpolaritäten"  $\pi_Z^I, \pi_Z^{II}$  in  $\zeta_1, \zeta_2$  die abs. Polarität ersetzen.

$\Rightarrow$  In  $\pi'$ :  $\pi_Z^I, \pi_Z^{II}$ .

$\Rightarrow$  Speziell:  $\alpha_Z^I = \alpha_Z^{II}$ ,  $\beta^* = \iota$  (also für eine lin. Z.S.S. vom 4. Typ) gilt damit:

$\pi_Z^I \cdot \pi_Z^{II} = \alpha_Z \dots$  perspektive Kollineation.

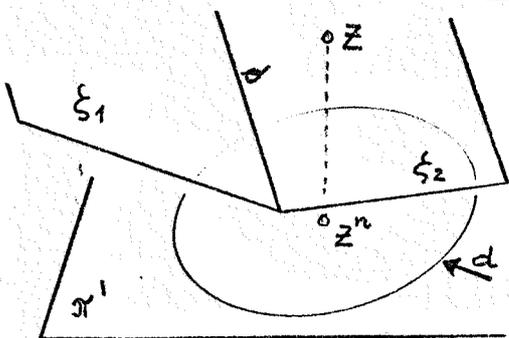
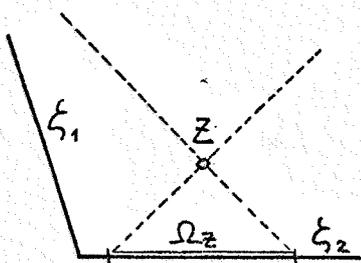
$\longrightarrow$  Ist  $\alpha_Z = \iota$  und  $\pi' \subset \pi$ , dann fällt

$Z$  in den Scheitel des Koinzidenzbündels.

$\Rightarrow \pi_Z^I = \pi_Z^{II}$ .

( $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  ist Projektion von  $\zeta_i$  aus  $Z$  auf  $\pi'$ ).

In diesem Fall gibt man  $\pi_Z^I = \pi_Z^{II}$  durch den Distanzkreis von  $Z$  in  $\pi'$  an.



Rekonstruktion

Satz 23: Durch die Hauptbildfigur eines lin. Z.S.S. vom 4. Typ mit eigentlicher Doppelspur, welches Zentralprojektion zweier Spurenebenen aus einem Punkt  $Z$  ist, ist die Haupttraumfigur und das Objekt zweideutig bis auf Streckungen aus  $Z$  bestimmt, wenn man das Bildpaar der Fernebene und den Distanzkreis von  $Z$  in  $\pi'$  kennt. Ist die Doppelspur uneigentlich, so können die Spurenebenen beliebig aus einer bestimmten Stellung gewählt werden und das Objekt ist bestimmt bis auf alle Affinitäten, die diese Stellung festlassen.

Beweis: (a) Vs.  $\mathcal{O} \perp \mathbb{I} \omega \implies \omega \mapsto (u', u'')$  mit  $u', u'' \neq z_2'$

$Z$  ist durch den Distanzkreis zweideutig festgelegt.

$u'$  entsteht durch Projektion von  $\bar{u}$  aus  $Z$  auf  $\pi'$ : ( $\bar{u} = \omega \cdot \xi_1$ ).

$$u' = (Z, \bar{u}) \cdot \pi'$$

$\implies u'Z$  legt die Stellung von  $\xi_1$  fest.

Analog gilt:

$u'' \cdot Z$  legt die Stellung von  $\xi_2$  fest.

Durch die beiden Stellungen ist die Richtung der Doppelspur  $\mathcal{O}$  bestimmt. Dabei muß gelten:  $\mathcal{O} \perp z_2' \cdot Z$ .

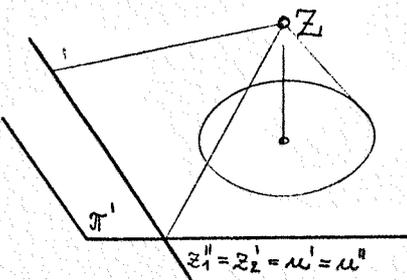
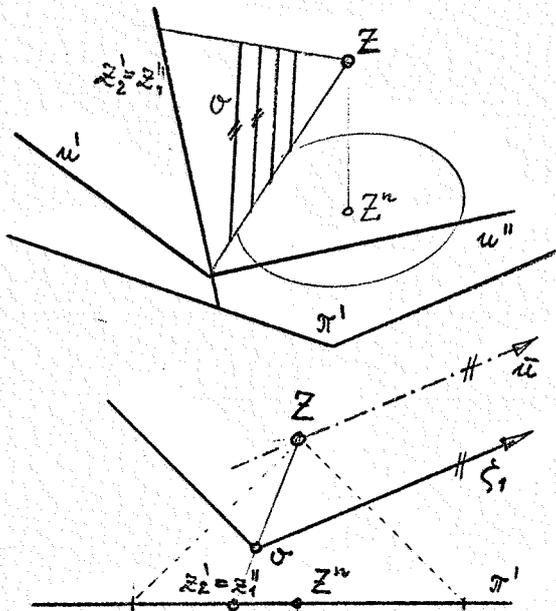
Wird  $\mathcal{O}$  aus dem  $\parallel$ -Büschel in  $z_2'Z$  gewählt, so ist dadurch die Haupttraum-

figur bestimmt.

Je zwei  $\neq$  Haupttraumfiguren gehen durch zentrische Streckungen aus  $Z$  ineinander über.

(b): Vs.  $\mathcal{O} \perp \mathbb{I} \omega \implies u' = z_2', u'' = z_2'', \xi_j$  sind bis auf Wahl im Büschel  $\mathcal{O}$  festgelegt.

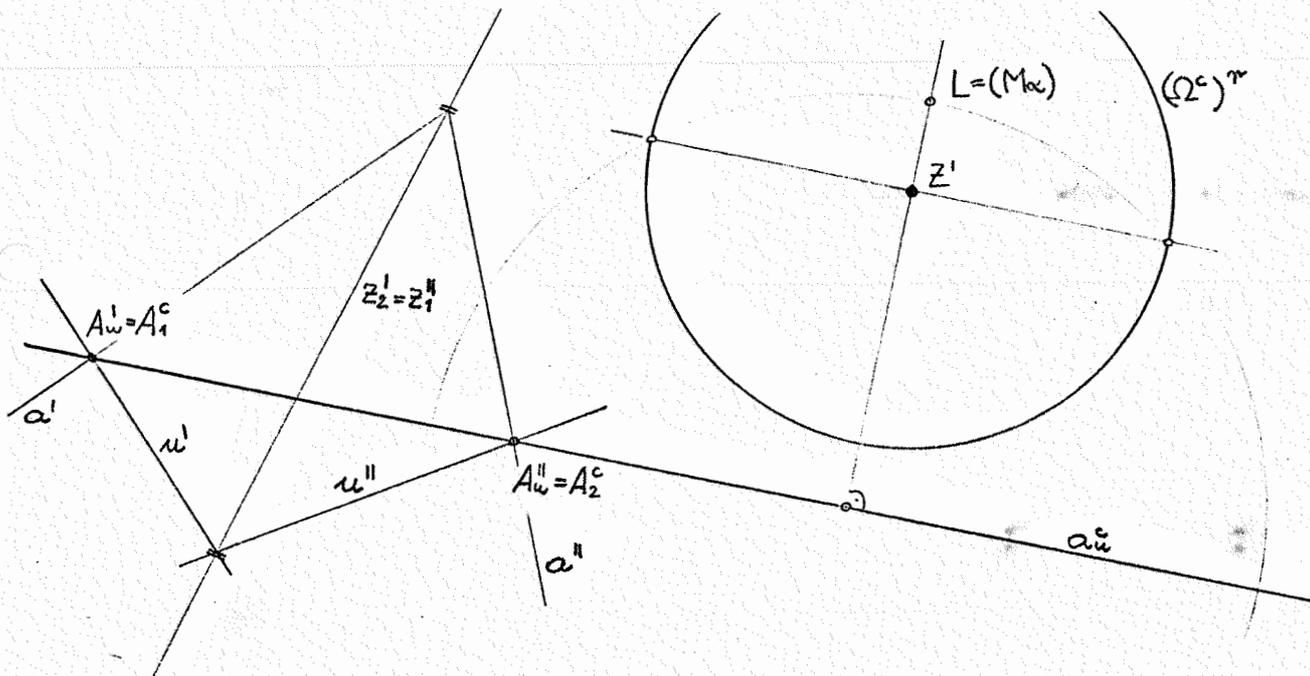
$Z$  ist durch den Distanzkreis zweideutig bestimmt;  $z_2' \cdot Z$  legt die Stellung von  $\xi_2 \parallel \xi_1$  fest. ( $\xi_1, \xi_2$  sind aus dieser Stellung beliebig  $\neq$  wählbar).



Je zwei  $\neq$  H.R.F. (d.h. 2  $\neq$  Paare von Spurebenen) gehen durch eine Affinität ineinander über; denn  $\omega$  ist sich selbst zugeordnet. Ferner muß die Stellung von  $\xi$ ; fest bleiben.  $\Rightarrow$  Beh. von Satz 23.

Z.B.: Fall (a):  $\alpha \mathcal{I} \omega$  ,  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  vom 4. Typ.

Wahre Gestalt einer ebenen Figur  $\varphi \subset \alpha \mathcal{I} \omega$



$\alpha \rightarrow (a', a'')$  ;  $\Rightarrow$  Zentralbild von  $\alpha \omega = a_u$  für das Zentrum  $Z$  :  $a_u^c$  ... Verbindungsgerade der Bilder von 2 Punkten auf  $a_u$  .

Wir verwenden hierzu speziell die inzidenten Punkte von  $a_u$ :

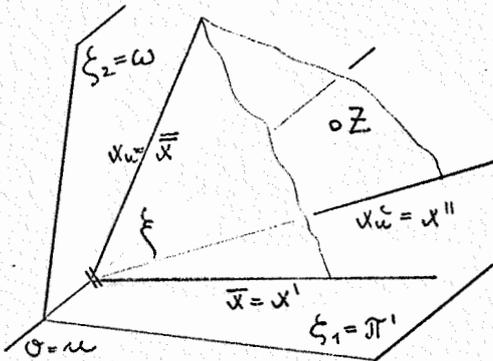
$A_1 = a_u \cdot \xi_1$  ,  $A_2 = a_u \cdot \xi_2$  . Da  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  die Zentralproj. von  $\xi$ ; aus  $Z$  ist, muß also für  $a_u \mapsto (A_u^I, A_u^{II}) = (u'a', u''a'')$  gelten:  $A_u^I = A_1^c$  ,  $A_u^{II} = A_2^c$  .

$\Rightarrow a_u^c = A_1^c A_2^c$  .

$\Rightarrow$  Maßkollineationen  $\mu_\alpha$  : Perspektiv Kollineationen mit  $a_u$  als Achse und dem LAGUERRE-Vertreter  $L$  der durch  $\Omega^c$  induzierten ellipt. Involution auf  $a_u^c$  als Zentrum.

3.8 Das Spur- Fluchtspurprinzip als spezielles lin.Z.S.S.

Geg.  $\Pi_e; \pi \subset \Pi_e, \zeta_1 = \pi', \zeta_2 = \omega.$



$\Rightarrow \alpha_1^* = l, \bar{x} = x'.$

$\alpha_2^*$  sei die Beschränkung einer Zentralprojektion (Zentrum  $Z \notin \xi_j$ ) auf die Fernebene  $\omega$ .

$\Rightarrow x'' = \bar{x} \alpha_2^* = x_u \alpha_2^* =: x_u^c$

Dabei gilt für die Doppelspur  $\sigma$ :

$\sigma = u, \dots$  Ferngerade von  $\pi'$ ,  $\sigma = \bar{z}_2 = \bar{z}_1,$

$\Rightarrow z_2' = z_2'', \sigma \alpha_2^* = \sigma^c = z_1''; \Rightarrow z_2' = z_1'' = u.$

$\forall (\bar{x}, \bar{x})$  gilt:  $\bar{x} \cdot \sigma = \bar{x} \cdot \sigma \Rightarrow x_u^c = x'', x'$  treffen einander auf  $\sigma \Rightarrow \beta^* = l \Rightarrow (\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  ist ein Z.S.S. vom 4. Typ.

Vgl. 3.5: Ein Z.S.S. vom 4. Typ mit  $\pi' \subset \Pi$  ist stets Projektion des Spurenfeldes aus einem Zentrum = Scheitel des Koinzidenzbündels.

$\Rightarrow$  Hier gilt: dieses Zentrum ist  $Z$ .

FIEDLER nennt dieses spezielle Z.S.S. zusammen mit der Zentralprojektion aus dem Scheitel des Koinzidenzbündels eine "Perspektive".

Maßaufgaben in der Perspektive.

$\pi_\omega'' \dots$  zweites Bild der abs. Polarität ( $\perp$  wegen  $\zeta_2 = \omega$ ) ist das Zentralbild von  $\pi_\omega$  aus  $Z \Rightarrow \pi_\omega''$  ist die Antipolarität am Distanzkreis von  $Z$  in  $\pi'$ .

(Lösung der Maßaufgaben siehe 2.9 (III), Zentralprojektion).

Das Bild einer Ebene  $\xi \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\sigma$

$\xi \mapsto (x(=x'), x_u^c(=x'')) = (\text{Spur}, \text{Fluchtspur}) \dots$  bijektive Zuordnung.

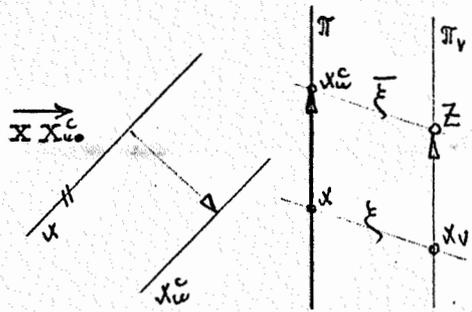
Wegen  $\sigma = u \wedge (x'' \cdot x') \perp \sigma$  gilt:  $x \parallel x_u^c, (x, x_u^c \mid \neq u).$

Schlitzt man den Ebenenraum längs des Büschels der Ferngeraden der Bildebene, dann ist das Spur- Fluchtspurprinzip eine bijektive Abbildung auf die geordneten Paare paralleler Geraden der (affinen) Bildebene.

"Spanne" einer Ebene  $\xi$  :

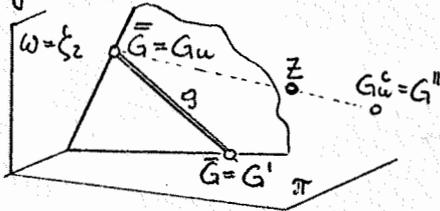
Darunter versteht man die Translation  $\vec{x} \vec{x}^c$ .  
Die Bedeutung der Spanne für die Raumfigur:

$$\vec{x} \vec{x}^c = \vec{x}_v \vec{Z} \quad (x_v \dots \text{Verschwindungspur}).$$



Das Bild eines Ebenenbüschels  $\mathcal{E}_g$  (=einer Geraden  $g$ ) :

$g \in \mathcal{G} \setminus \text{Gebüsch } \sigma$ .



$$\begin{aligned} \bar{G} &= G' =: G \uparrow u \\ \bar{G} &= G_u \Rightarrow G_u \alpha_2^* = G'' =: G_u^c \uparrow u \\ \Rightarrow g &\mapsto (G, G_u^c) \in (\pi_a \times \pi_a') \end{aligned}$$

Es gilt:

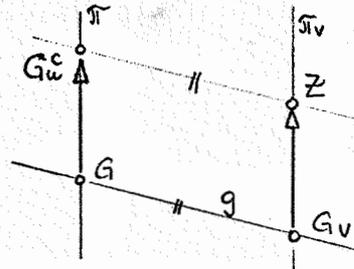
Schneidet man den Geradenraum längs des Gebüsches um  $\sigma$ , so ist das Spur-Fluchtpurprinzip eine bijektive Abbildung der Geradenmenge auf das kartes. Produkt der affinen Bildebene (aufgefaßt als Punktfeld) mit sich.

"Spanne" einer Geraden  $g := \vec{G} \vec{G}_u^c$ .

Dabei gilt für die Raumfigur:

$$\vec{G} \vec{G}_u^c = \vec{G}_v \vec{Z}$$

( $G_v \dots$  Verschwindungspunkt).



Speziell: Ist  $g$  erstinzident (oben ausgeschlossener Fall), so ist  $g' = g$  eine feste Gerade ( $\forall \xi$  durch  $g$  gilt:  $x = g'$ ,  $x^c \parallel x \Rightarrow G_u^c = g \cdot \sigma \dots$  Fernpunkt von  $g'$ ).

Das Koinzidenzgebilde des Spur-Fluchtpurprinzips

Vgl. 3.4:  $\mathcal{L}^* := \text{Ebenenbündel } \mathcal{E}_Z \quad (\cup \mathcal{E}_v)$ .

Dies gilt trivialerweise:  $\xi$  projizierend  $\Leftrightarrow x = x^c$ .

$\mathcal{L}^* := \text{Geradenbündel } \mathcal{G}_Z \quad (\cup \text{Gebüsch } \sigma)$

$Z$  ist Zentrum der Zentralprojektion  $\Rightarrow$  Sehstrahlen sind projizierend  $\Rightarrow G = G_u^c$ .

Das Bild eines Ebenenbündels  $\mathcal{E}_A$  (eines Punktes  $A$ ) :

Vs.  $A$  nicht inzident, vgl. 3.1:  $\xi \in \mathcal{E}_A \mapsto (x, x^c)$

mit  $x \mapsto x_u^c \dots$  Kollineation  $\alpha_A^*$ .  $\alpha_A^*|_{Z_2} = \beta^*$

Hier gilt wegen  $\beta^* = \iota$  :  $\alpha_A^*$  ist eine perspektive Affinität mit der Fernachse  $u$ .

Das Zentrum dieser Affinität ist nach 3.4 der Bildpunkt jener Koinzidenzgeraden durch  $A$ , die dem Koinzidenzbündel  $Z$  angehört.

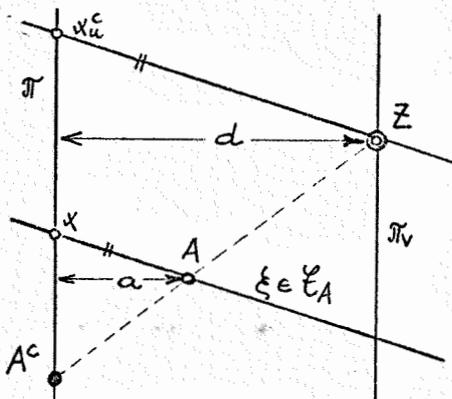
Zentrum :=  $AZ \cdot \pi^1$

$\Rightarrow AZ \dots$  Sehstrahl durch  $A \Rightarrow$  Zentrum ist der Bildpunkt  $A^c$  bei Zentralprojektion von  $A$  aus  $Z$ .

Ergebnis: Jeder nichtinzidente Punkt  $\neq Z$  bildet sich ab auf eine perspektive Affinität mit  $u$  als Achse und dem Zentralbild des Punktes als Zentrum.

$\Rightarrow$  Diese Affinität ist eine zentrische Streckung, wenn  $\alpha_A^*$  eine Homologie ist ( $\Rightarrow A^c \notin u$ ); sie ist eine Translation, falls  $\alpha_A^*$  eine Elation ist ( $\Rightarrow A^c \in u$ ;  $\Rightarrow$  der Sehstrahl  $AZ$  gehört auch dem Koinzidenzgebüsch um  $\sigma$  an  $\Rightarrow A \in (Z, \sigma) = \pi_v \dots$  Verschwindungsebene).

Im Falle einer zentrischen Streckung ( $A \notin \pi_v, \pi$ ) gestattet das Streckungsverhältnis  $\lambda = \overrightarrow{A^c x} : \overrightarrow{A^c x_u^c}$  folgende Deutung.



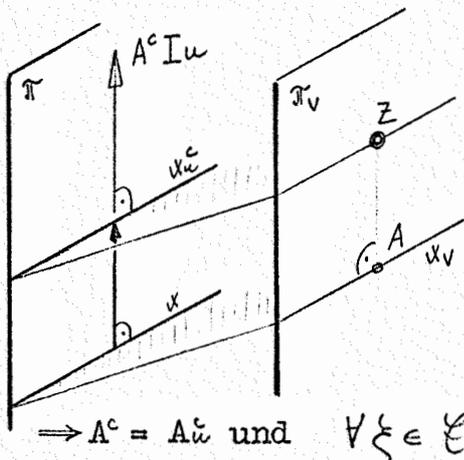
(siehe Figur):

$$\overrightarrow{A^c x} : \overrightarrow{A^c x_u^c} = \underbrace{(\overrightarrow{A \pi})}_{=: a} : \underbrace{(\overrightarrow{Z \pi})}_{=: d} = \lambda$$

$\Rightarrow \lambda > 0$  bedeutet:  $A$  und  $Z$  liegen im gleichen Halbraum bezügl.  $\pi$ .

Im Falle einer Translation ( $A \in \pi_v, A \neq Z$ ) gibt der Abstand  $\overrightarrow{AZ}$  die

Schiebstrecke an:



$\Rightarrow A^c = A u$  und  $\forall \xi \in \mathcal{L}_A$

Für  $\xi \in \mathcal{L}_A$  mit  $x_v \perp AZ$  gilt:

$\overrightarrow{x x_u^c} = \overrightarrow{AZ} \dots$  Spanne von  $\xi \Rightarrow x_u^c$  aus  $x$  durch Schiebung  $AZ \perp x$ .

$\Rightarrow \forall \xi \in \mathcal{L}_A$  gilt:  $x \xrightarrow{\overrightarrow{AZ}} x_u^c$ .

Speziell:  $A$  ersteinzident ( $\notin \sigma$ ):

$\Rightarrow \alpha_A^*$  ausgeartet.  $\forall \xi \in \mathcal{L}_A$  gilt:  $x \in A = A^c, x_u^c \parallel x$  (belieb.).

$A$  zweitinzident ( $\in \sigma$ ):

gilt:  $x_u^c \in A u, x \parallel x_u^c$  (belieb.)

Somit gilt:

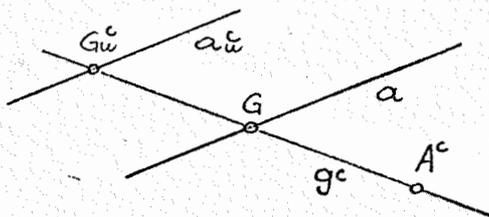
Schlitzt man den affinen Punktraum  $\mathbb{P}^a$  längs der Bildebene  $\pi$  und in  $Z$ , dann wird diese Punktmenge durch das Spur - Fluchtprinzip bijektiv bezogen auf die Vereinigungsmenge der zentrischen Streckungen in  $\pi$  und der Translationen in  $\pi$  ( $\neq l$ ). Das Zentrum der Streckungen ist das Zentralbild des Bündelzentrums, der Streckfaktor ist der Abstand des Bündelzentrums von der Bildebene, gemessen mit der Distanz von  $Z$  als Einheit.

Genau die Punkte der Verschwindungsebene  $\neq Z$  führen auf Translationen ( $\neq l$ ); die zu  $Z$  gehörige Bildkollineation  $\alpha_Z^*$  ist die Identität in  $\pi$ .

Anwendung: Abbildung eines Geradenbüschels  $(A, \alpha)$ .

(Vs.:  $A, \alpha \dots$  allgemein)

$\Rightarrow A \dots \mathcal{E}_A \xrightarrow{(\varphi_1^*, \varphi_2^*)} \alpha_A^* \dots$  zentrische Streckung oder Translation.  
 $\alpha \xrightarrow{(\varphi_1^*, \varphi_2^*)} (a, a^c)$  mit  $a \alpha_A^* = a^c$ .



$g \in \mathcal{G}_{A\alpha} \longrightarrow (G, G^c)$  mit  $G \perp a$ ,  
 $G^c \perp a^c$  und  $G \alpha_A^* = G^c$ .

$\Rightarrow$  Das Bild eines Geradenbüschels sind zwei in  $\alpha_A^*$  gekoppelte Punktreihen.

Zusammenfassende Gegenüberstellung:

	$\swarrow$ Spur- Fluchtspurprinzip $\searrow$	
affiner Raum (geschlitzt)	$\longleftrightarrow$	affine Bildebene $\pi$
Ebene nicht parallel $\pi$	$\longleftrightarrow$	geord. Paar parall. Geraden
Gerade nicht $\parallel \pi$	$\longleftrightarrow$	geord. Paar von Punkten
<u>Punkt</u> $\notin \mathbb{P}^a, \notin \mathbb{P}^v$	$\longleftrightarrow$	<u>zentrische Streckung</u>
$\notin \pi, \in \pi_v, \neq Z$	$\longleftrightarrow$	Translation
$Z$	$\longleftrightarrow$	Identität

Da das Spur - Fluchtspurprinzip die Elemente und Begriffe des affinen Raumes und der affinen Bildebene in bijektiver Weise koppelt, kann die angeführte Gegenüberstellung auch als Übersetzungstabelle eines Übertragungsprinzips aufgefaßt werden.

("Übertragungsprinzip" : = Übergang von einem Modell einer Geometrie zu einem anderen Modell derselben Geometrie.

"Modell": Die zunächst nicht definierten Grundgebilde der Geometrie werden mit konkreten Inhalt belegt.)

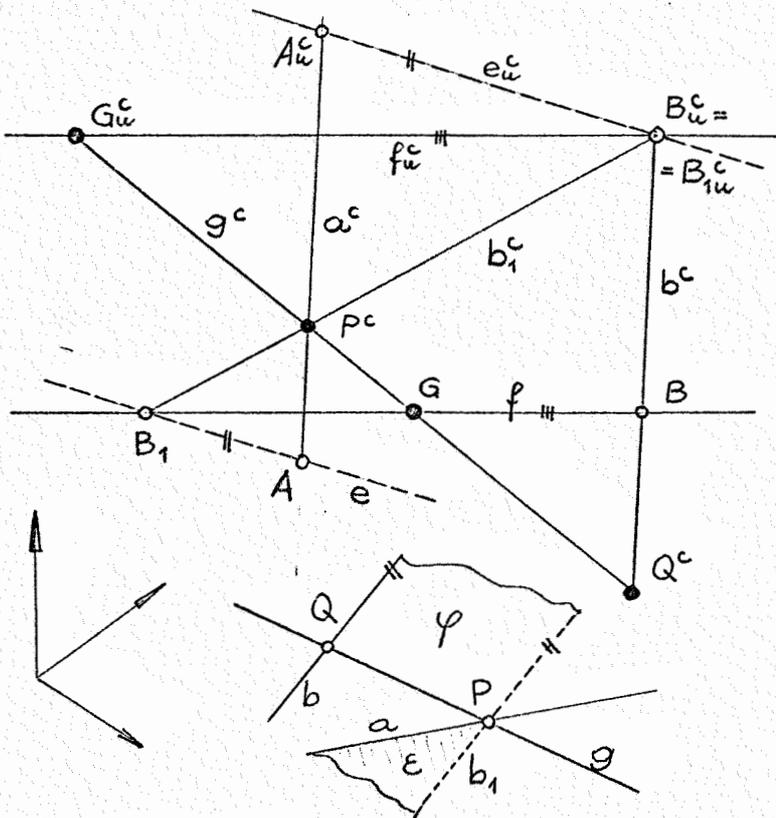
Beispiel 1:  $L_1$  : Geg.  $P, Q \mid \neq$  , ges.  $PQ=g$  (Vs.: allgemeiner Fall, d.h.  $P, Q \mid \in \pi, \pi_V$  ;  $\vec{P\pi} \neq \vec{Q\pi}$  ).

- $\Rightarrow P, Q \longmapsto$  (zentrische Streckungen mit  $\neq$  Streckfaktoren  $\lambda_P, \lambda_Q$  ( $\lambda_P \neq \lambda_Q$  wegen  $\vec{P\pi} \neq \vec{Q\pi}$ )).
- $\Rightarrow \exists^* g=PQ \longmapsto \exists^*$  Punktepaar  $(G, G_{\omega}^c)$ , das beiden Streckungen gemeinsam ist.

Konstruktion:

Geg.:  $\alpha_P^*, \alpha_Q^*$  ...zentrische Streckungen, festgelegt durch Zentrum und ein Punktepaar:  $P^c, A \mapsto A_{\omega}^c$  ;  $Q^c, B \mapsto B_{\omega}^c$

Ges.: gemeinsames Punktepaar  $(G, G_{\omega}^c)$  . (o.B.d.A.:  $P^c \neq Q^c$ ).



$(A, A_{\omega}^c)$  ... Bildpaar von  $a$  mit  $a \mid P$  in einem Spur-Fluchtspurprinzip.

$(B, B_{\omega}^c)$  ... Bildpaar von  $b$  mit  $b \mid Q$  .

$\Rightarrow$  In  $\Pi_{\omega}$  :  $PQ=g$  (mit  $P^c, Q^c \mid I g^c \Rightarrow G, G_{\omega}^c \mid I P^c Q^c$ ).

$b_1 \parallel b$  durch  $A$  ;  $ab_1 = \epsilon$   
 $(\Rightarrow \epsilon \mapsto (e, e_{\omega}^c)$  mit  $e \alpha_P^* = e_{\omega}^c$ )

$b_1 b =: \varphi \wedge \psi \mid P$  ,  $\varphi \mid Q$  ,  
 $(\Rightarrow \varphi \mapsto (f, f_{\omega}^c)$  mit  $f \alpha_P^* = f_{\omega}^c$ ,  
 $f \alpha_Q^* = f_{\omega}^c$ ).

$\Rightarrow g^c \cdot f = G$  ,  $g^c \cdot f_{\omega}^c = G_{\omega}^c$  .

Somit gilt:

Aus (richtigen) Inzidenzaussagen über Punkte folgen mittels des Übertragungsprinzipes (richtige) Sätze über zentrische Streckungen.

Beispiel 2: Schnittbedingung

Geg.  $a, b$ ; Wann  $\exists \alpha$  mit  $\alpha \mid a, b$ ; wann  $\exists S$  mit  $S \mid a, b$  ?

$a \mapsto (A, A^c)$ ,  $b \mapsto (B, B^c)$ . Falls  $\exists \alpha$ , dann  $\alpha \mapsto (x, x^c)$  mit  $x \parallel x^c$  und  $x \perp A, B \Leftrightarrow x = A \cdot B$ ,  $x^c \perp A^c, B^c \Leftrightarrow x^c = A^c \cdot B^c$   
 $\Rightarrow \exists \alpha \Leftrightarrow A, B \parallel A^c B^c$ .

Falls  $\exists S$ , dann  $S \mapsto \alpha_S^*$  und  $A \alpha_S^* = A^c$ ,  $B \alpha_S^* = B^c$   
 d.h.  $(A, A^c)$ ,  $(B, B^c)$  sind enthalten in einer zentrischen Streckung.

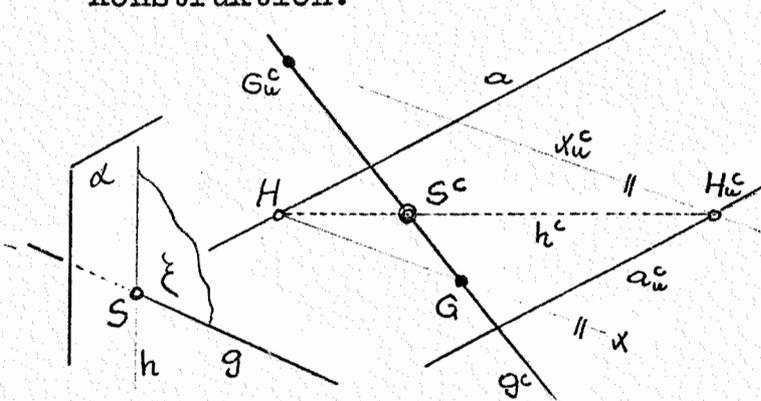
Beispiel 3:  $L_3^*$ : Geg.  $g, \alpha(\mathbb{F})$ ; ges.  $g \cdot \alpha = S$ .

$g \mapsto (G, G^c)$ ,  $\alpha \mapsto (a, a^c)$ ;  $S \mapsto \alpha_S^*$

$\Rightarrow L_3^*$ : Man suche das Zentrum jener Streckung, der gleichzeitig das Punktepaar  $(G, G^c)$  und das Geradenpaar  $(a, a^c)$  angehören.

(Vs.:  $g$  so, daß  $G \perp a$ ,  $G^c \perp a^c \wedge$  allgemeiner Fall, also  $S \perp \mathbb{F}$ ).

Konstruktion:



$\xi \in \mathbb{F}_g$  belieb. ( $\xi \mapsto (x, x^c)$  mit  $x \perp G$ ,  $x^c \perp G^c$ ).

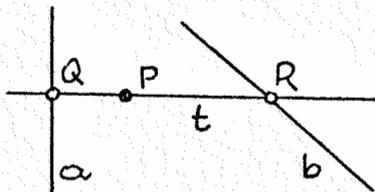
$\xi \cdot \alpha = h$  ( $h \mapsto (H, H^c)$  mit  $H := x \cdot a$ ,  $H^c := x^c \cdot a^c$ )

$h \perp S$ ,  $g \perp S$

$h^c \perp S^c$ ,  $g^c \perp S^c \Rightarrow S^c = g^c \cdot h^c$ .

Beispiel 4: Geg.  $a, b$  (windschief),  $P$  ( $\mathbb{F}$ )

$\exists^*$  Treffgerade  $t$  durch  $P$  an  $a$  und  $b$ .



$a \mapsto (A, A^c)$ ,  $b \mapsto (B, B^c)$ ,  $P \mapsto \alpha_P^*$  (Zentrum  $P^c$ )

$\Rightarrow t \mapsto (T, T^c)$  mit  $T \alpha_P^* = T^c$ .

(Vs. "allgemeiner Fall").

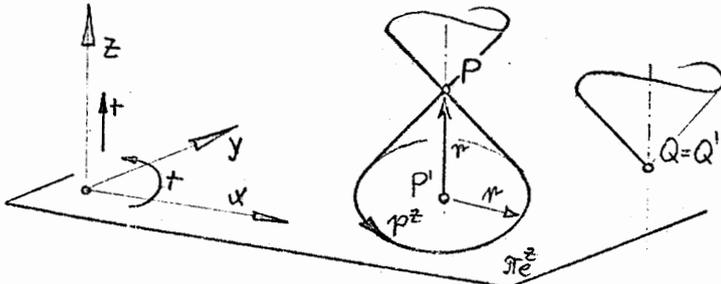
Ergebnis: Sind eine zentrische Streckung und  $z$  Punktepaare gegeben, dann  $\exists$  höchstens ein Punktepaar in dieser Streckung, welches mit dem 1. Punktepaar einer zentrischen Streckung ( $\alpha_Q^*$ ) und mit dem 2. Punktepaar einer zentrischen Streckung ( $\alpha_P^*$ ) angehört.

Im Sonderfall  $AB \parallel A^c B^c$  (also  $a \cdot b = \varepsilon$ ) ist Treffgerade  $t$  eindeutig möglich, falls  $P \perp \varepsilon$  (also  $\varepsilon \mapsto (e, e^c) \wedge e \alpha_P^* \neq e^c$ ).

§ 4 Zyklographie

4.1 Grundlegende Begriffsbildungen

Geg.:  $\mathbb{T}_e(\mathcal{K})$  kartesisches Rechtssystem  $\{x,y,z\}$   
 Bildebene  $\pi \subset \mathbb{T}_e$  mit  $z=0$  (horizontal).



Zu  $P \in \mathcal{K}$  gehört genau ein "Distanzkreis" (d.i. die Spurkurve des Böschungskegels mit der Spitze  $P$  und dem Öffnungswinkel  $\frac{\alpha}{2}$ ), als "Bild" von  $P$ .

Umgekehrt gehören zu einem Distanzkreis  $p$  zwei bezüglich  $\pi$  symmetrische Punkte  $P, \bar{P}$ .  $\Rightarrow$  "orientierter Distanzkreis"  $p^z$  als Bild genau eines Raumpunktes  $P$ . Dabei sollen folgende Festsetzungen getroffen werden:

- Bezüglich des geg. Koordinatensystems  $\{x,y,z\}$  mit  $\pi = x.y$  und  $\vec{xy}..$  pos. Drehsinn in  $\pi$  sei für
- $P$  mit  $z > 0$  der Distanzkreis positiv orientiert, für
- $P$  mit  $z < 0$  negativ orientiert; die Punkte
- $P$  mit  $z = 0$  werden mit ihrem Bild identifiziert.

$$\Rightarrow \text{Abbildung } \xi : \mathbb{T}_e(\mathcal{K}) \longrightarrow \{ \text{orient. Kreise in } \pi \} \cup \mathcal{P}_\pi =: \mathbb{T}_e^z \\ =: \{ \text{euklid. Zykel} \}$$

$\mathbb{T}_e^z \dots$  "euklidische Zykelebene",

$\xi \dots$  "Zyklographie", erklärt durch  $P (\in \mathcal{K}^e) \xrightarrow{\xi} p^z (\in \mathbb{T}_e^z)$

Eigenschaften von  $\xi$  :

Beh.:  $\xi$  ist eine Bijektion;

denn:  $\forall P \in \mathbb{T}_e$  gilt:  $\exists^*$  Zykel  $p^z$  mit  $P\xi = p^z \Rightarrow \xi$  ist global.

Umgekehrt gilt  $\forall p^z \in \mathbb{T}_e^z : \exists^*$  Punkt  $P \in \mathbb{T}_e$  mit  $P\xi = p^z$

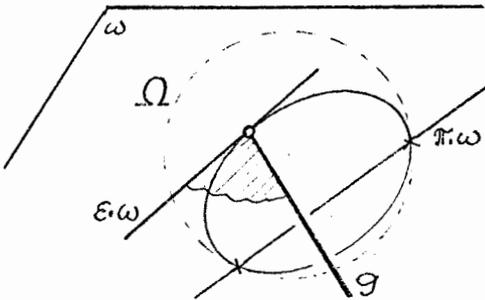
$\Rightarrow \exists \xi^{-1}$  und  $\xi^{-1}$  ist global.

$\Rightarrow \xi$  ist bijektiv.

Bemerkung a) : Angabe eines Kreises durch Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r (> 0)$ .  $\Rightarrow$  Angabe eines orientierten Kreises (=Zykel  $p^z$ ) durch Mittelpunkt  $P'$  und Radius  $r > 0$ , falls  $p^z$  pos. orientiert;  $r < 0$  falls  $p^z$  negativ orientiert. Für  $P$  mit

$P=P' \Rightarrow P\xi = p^z$  definiert als Zykel mit Radius  $r = 0$  ("Nullzykel").

Bemerkung b) :  $\mathbb{T}_e \subset \mathbb{T}$  ,  $\mathbb{T}$  ... projekt. Anschauungsraum  
 $\omega$  ... Fernebene,  $\Omega$  ... absoluter Kegelschnitt.



$\Rightarrow c$  ... gemeinsamer Fernkreis aller Böschungskegel.  
 $g \in \mathbb{T}_e$  mit  $g$  trifft  $c$  heißt "c-Gerade"  
 $\varepsilon \in \mathbb{T}_e$  mit  $\varepsilon \cdot \omega$  ... Tangente von  $c$  heißt "c-Ebene".

$\Rightarrow$  Böschungskegel: Erzeugenden sind c-Geraden, Tangentialebenen sind c-Ebenen.

{c-Geraden} = Treffgeradenkomplex von  $c \setminus \mathcal{O}_\omega$

"Zykel"  $p^z$  := {Spurpunkte aller mit  $P$  inzidenten c-Geraden}.

Vergleiche hierzu L.ECKHART's "allgemeinen Abbildungsbegriff":

Geg.  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$  .. Definitionsmenge,  $\mathbb{T} \subset \mathbb{T}$  ... Bildunterraum;

"Abbildungsmittel" := bestimmte Geradenmenge (Varietät).  $\Rightarrow$

Abbildung aus  $\mathbb{T}$  in  $\mathbb{T}$  (=Bildfigurenebene) auf folgende Weise definiert: Bild von  $P$  := {Schnittpunkte aller durch  $P$  legbaren Geraden des Abbildungsmittels mit der Bildebene}.

Beispiele: Zentralprojektion des  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$  auf  $\mathbb{T} \subset \mathbb{T}$  , Abbildungsmittel ist ein Geradenbündel (=spezielle Geradenkongruenz).

Zyklographie, Definitionsbereich ist  $\mathbb{T}_e \subset \mathbb{T}$  ; Bildebene  $\mathbb{T}_e \subset \mathbb{T}$  ("Zykelebene"), Abbildungsmittel .. Treffgeradenkomplex von  $c \setminus (\varepsilon \omega) \setminus \mathcal{O}_\omega$ .

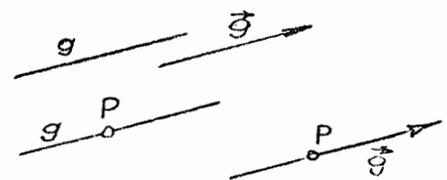
Folg.1 : Berührungsbegriff in  $\mathbb{T}_e^z$

Hilfsbegriffe:

"Speer"  $\vec{g}$  := orientierte Gerade  $g$

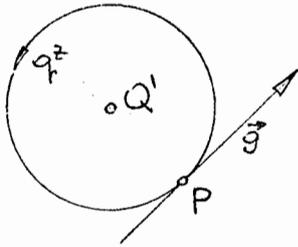
Linienelement :=  $\{P\} \cup \{g\} \wedge P \bar{I} g$

"orientiertes Linienelement" :=  $\{P\} \cup \{\vec{g}\} \wedge P \bar{I} g$

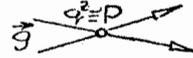


$(P, \vec{g})$  ist ein orientiertes Linienelement eines Zyklus  $q^z \neq$  Nullzykel  $\iff P \in$  Trägerkreis von  $q^z \wedge g$  ist Tangente des Träger-

kreises  $\wedge$  Orientierungen von  $q^z$  und  $\vec{g}$  stimmen überein.

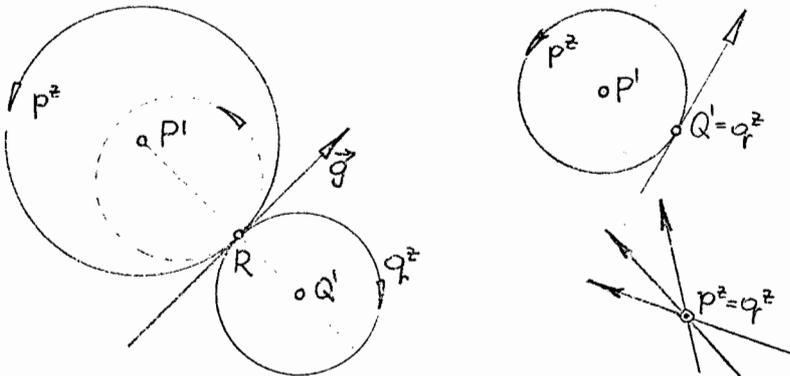


Speziell:  $q^z$  ... Nullzykel  $\implies$  . Ein orientiertes Linienelement  $(P, \vec{g})$  gehört einem Nullzykel  $q^z$  an  $\iff P \equiv q^z$  .



Definition: Zwei Zykel berühren einander genau dann, wenn sie ein orientiertes Linienelement gemeinsam haben.

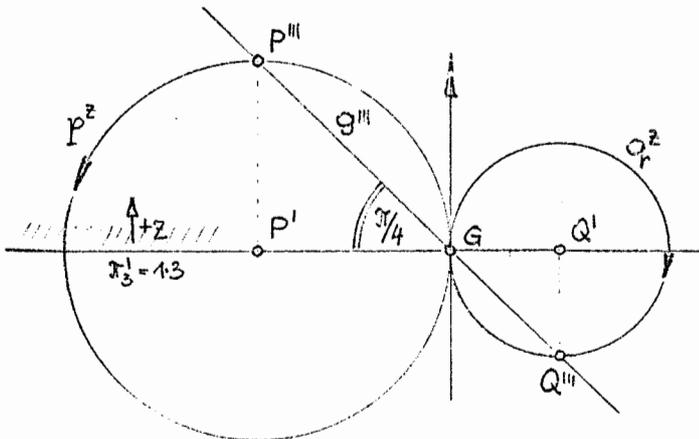
Z.B.



Ein Nicht-Nullzykel  $p^z$  berührt einen Nullzykel  $q^z \iff q^z$  ist ein Punkt des Trägerkreises von  $p^z$ . Zwei Nullzykel berühren einander  $\iff$  wenn sie derselbe Punkt sind.

Wegen  $\xi: \mathbb{P}e \rightarrow \mathbb{P}e^z$  bijektiv, definiert  $\xi$  ein Übertragungsprinzip Zykelebene  $\leftrightarrow$  eukl. Raum.

Z.B.: räumliche Deutung berührender Zykel  $p^z, q^z (\neq)$



$p^z \xi^{-1} = P, q^z \xi^{-1} = Q (P \neq Q)$   
 $p^z, q^z$  berühren einander  $\implies$   
 $\implies PQ = g$  ist c-Gerade und umgekehrt.

Also gilt:

Zwei Zykel berühren einander genau dann, wenn sie Bilder von Punkten einer c-Geraden sind.

Folg.2: Geg.  $p^z, q^z (\neq) \iff P, Q (\neq) \implies ]^* g = P.Q.$

$g \in \mathcal{P} \iff p^z, q^z$  sind Nullzykel

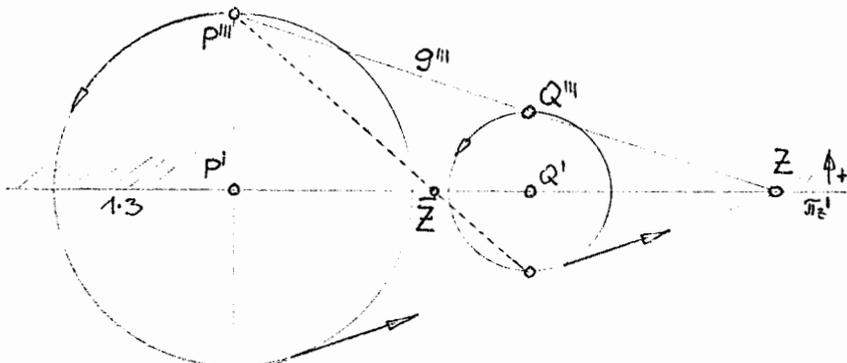
$g \parallel \mathcal{P} \iff p^z, q^z$  mit gleichen Radien  $r_p = r_q$

(Radien stimmen einschließlich des Vorzeichens überein !  $p^z, q^z$  gleichorientiert)

I.f.  $p^z, q^z (\neq)$  Nicht-Nullzykel mit  $r_p \neq r_q$   
 $\implies ]^* G = (PQ). \mathcal{P}$  mit  $P = p^z \xi^{-1}, Q = q^z \xi^{-1}$  .

Definition: "Ähnlichkeitszentrum"  $Z$  von  $p^z, q^z$  ist ein Ähnlichkeitszentrum der Trägerkreise, wobei gilt:

$$r_p : r_q = \overrightarrow{P'Z} : \overrightarrow{Q'Z} \quad (r_p, r_q \text{ mit Vorzeichen! Vs. } r_p \cdot r_q \neq 0)$$



$$\begin{aligned} \overrightarrow{P'Z} : \overrightarrow{Q'Z} &= r_p : r_q = \\ &= TV(P'Q'Z) \implies \\ &\implies Z \text{ eindeutig.} \end{aligned}$$

Also gilt:  $\exists^* Z$ ,  $Z$  ist Spurpunkt der Verbindungsgeraden (siehe Figur).

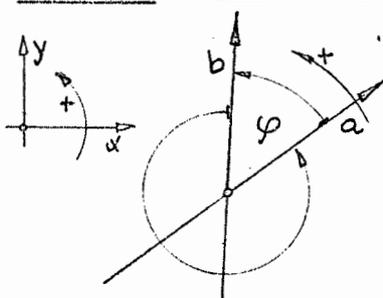
$\text{sgn. } r_p = \text{sgn. } r_q \implies Z$  ist ein Außenpunkt von  $\overline{P'Q'}$

$\text{sgn. } r_p \neq \text{sgn. } r_q \implies Z$  ist ein Innenpunkt von  $\overline{P'Q'}$

Sonderfall:  $r_p = r_q \implies Z$  ist ein Fernpunkt.

$r_p = r_q = 0 \implies Z$  ist unbestimmt.

Folg. 3: Winkelbegriff



In  $\pi^z$  ist durch das K-R-S  $\{x, y, z\}$  a priori ein Drehsinn ausgezeichnet.

$\implies$  Winkel zwischen 2 Speeren in diesem Drehsinn gemessen (orientierter Winkel).

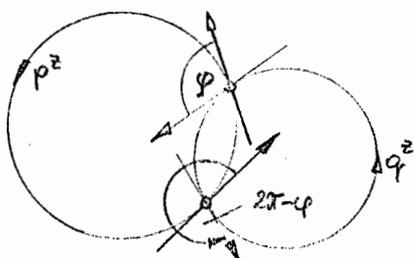
$$\vec{\Delta} ab = \vec{\varphi}$$

$$\vec{\Delta} ba = 2\pi - \varphi \implies \cos(\vec{\Delta} ab) = \cos(\vec{\Delta} ba) \implies$$

Der Kosinus des Winkels zwischen zwei Spuren ist

- (1) unabhängig von der Reihenfolge der Spurschenkel,
- (2) unabhängig von Umorientierungen beider Speere.

"Winkel zwischen zwei Zykeln  $p^z, q^z$  ( $\neq$  Nullzykel) mit einem gemeinsamen Punkt":



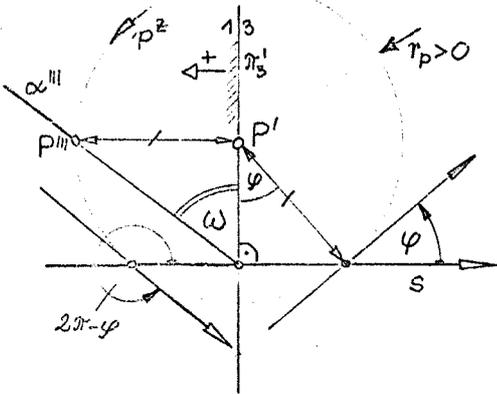
$\vec{\Delta} p^z q^z :=$  Winkel der Tangentenspeere im gemeinsamen Punkt von  $p^z, q^z$ .

Schneiden zwei Zykeln einander, so besitzen sie 2 gemeinsame Punkte und die Schnittwinkel  $\vec{\varphi}$  und  $2\pi - \vec{\varphi}$ .  $\implies$  Schneiden zwei

Zykeln einander, so haben ihre Schnittwinkel gleiche Cosinus-Werte.

"Winkel zwischen einem Speer und einem Nicht-Nullzykel":

Vs. ] Schnittpunkt.



$\sphericalangle sp^z :=$  Winkel zwischen  $s$  und dem Tangentspeer im Schnittpunkt  $s.q^z$ .

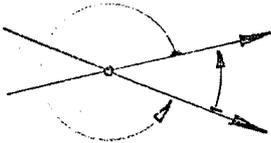
$\Rightarrow$  Cosinus-Werte der Schnittwinkel stimmen überein.

Der Schnittwinkel  $\sphericalangle sp^z$  gestattet eine Deutung im Urraum:

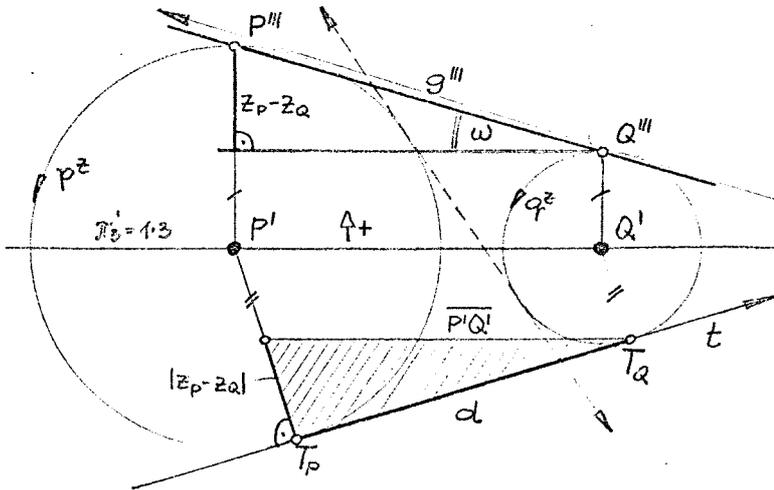
Dazu: Seitenriß durch  $P \perp s \Rightarrow P'''$   
 $Ps = \alpha \dots$  Verbindungsebene  $\Rightarrow \alpha'''$   
 Neigungswinkel  $\sphericalangle \alpha \pi_e^z = \omega$  ( $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$ ) }  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \text{ctg } \omega = \overline{P's} : |r_p| = |\cos \varphi|$   
 $\geq 0$

$\Rightarrow$  Der Betrag des Cosinus des Schnittwinkels  $\sphericalangle sp^z$  stimmt überein mit dem Cotangens des Neigungswinkels  $\sphericalangle (Ps, \pi_e^z)$  der Verbindungsebene  $Ps$  gegen die Bildebene.

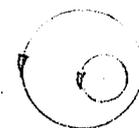
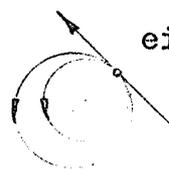
Übereinkunft: Wir schränken das Winkelintervall auf  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  ein; d.h., von den beiden möglichen Winkeln zwischen zwei Speeren werde stets der kleinere als "Schnittwinkel" bezeichnet.



Folg.4: Tangentialentfernung zweier Zykel



] höchstens zwei gemeinsame Tangentialspeere für zwei Zykel (d.sind höchstens 2 der möglichen 4 gemeinsamen Tangenten an die Trägerkreise).



Vs. ] gemeins. Tangentspeer,  $d :=$  Abstand der Berührungspunkte  $\overline{T_P T_Q}$ .

$$P \dots (\underbrace{x_P, y_P, z_P=r_P}_{P'}) , Q \dots (\underbrace{x_Q, y_Q, z_Q=r_Q}_{Q'})$$

$$\Rightarrow \overline{P'Q'} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

$\Rightarrow$  rechtwinkeliges Dreieck mit Katheten  $d, |z_P - z_Q|$  und Hypotenuse  $\overline{P'Q'}$ .

$$\Rightarrow d^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 - (z_P - z_Q)^2 \quad (d \geq 0)$$

$\Rightarrow$  Die Tangentialentfernung zweier Zyklen ist eine Funktion der Koordinaten der Ursprünge  $P, Q$ .

$PQ=g$ , (Seitenriß  $g'''$ );  $\sphericalangle g \cap e^z = \omega$  (siehe Figur) mit:

$$\operatorname{ctg} \omega = \frac{\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}}{|z_P - z_Q|}$$

$$\Rightarrow (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 - \operatorname{ctg}^2 \omega (z_P - z_Q)^2 = 0.$$

$\Rightarrow$  Für  $\operatorname{ctg}^2 \omega = 1 \Leftrightarrow d^2 = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow p^2, q^2$  berühren einander

Für  $\operatorname{ctg}^2 \omega > 1 \Leftrightarrow 0 \leq \omega < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow d^2 > 0$ .

$\Rightarrow$  Zwei Zyklen besitzen genau dann zwei  $\neq$  gemeinsame Tangentenspeere, wenn der Neigungswinkel  $\omega$  der Verbindungsgeraden  $g$  ihre Ursprünge im Intervall  $0 \leq \omega < \frac{\pi}{4}$  liegt ( $g$  ist flacher als eine  $c$ -Gerade);

sie besitzen einen gemeinsamen Tangentenspeer, wenn sie sich berühren ( $\omega = \frac{\pi}{4}$ ,  $g$  ist  $c$ -Gerade);

sie besitzen keinen gemeinsamen Tangentenspeer, wenn  $\frac{\pi}{4} < \omega \leq \frac{\pi}{2}$  ( $g$  ist steiler als eine  $c$ -Gerade).

("Tangentialentfernung" bloß für die ersten beiden Fälle definiert !)

### Folg.5 : Das zyklographische Bild einer Punktreihe

$\xi(\mathcal{P}_g)$  heißt "Zykelbüschel" ("lineare Zykelreihe", E.MÜLLER).

Nach Folg.4  $\exists$  3  $\neq$  Typen von Zykelbüscheln:

$g$  mit  $\left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq \omega < \frac{\pi}{4} & \dots \text{hyperbolisches} \\ \omega = \frac{\pi}{4} & \dots \text{parabolisches} \\ \omega > \frac{\pi}{4} & \dots \text{elliptisches} \end{array} \right\}$  Zykelbüschel

**Eigenschaften:**

Das hyperbol. Zykelb. besitzt zwei  $\neq$  Tangentenspeere, die einander im Ähnlichkeitszentrum treffen;  
 das parabol. Zykelb. besitzt einen Tangentenspeer (Ähnlichkeitszentrum ist der Berührungspunkt);  
 das ellipt. Zykelb. besitzt keinen Tangentenspeer.

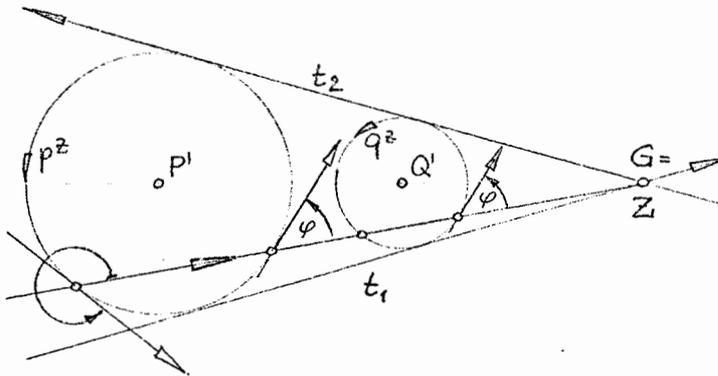
Speziell:  $\omega = 0$ , Punktreihe  $\mathcal{K}_g \parallel \pi_e^z$

Für  $\mathcal{K}_g \subset \pi_e^z$  ist das zyklographische Bild diese Punktreihe.

Für  $\mathcal{K}_g \not\subset \pi_e^z$  ist das zyklogr. Bild eine Zykelmenge, die durch Translation aus einem Zykel entsteht.



Abgesehen von diesen Fällen enthält jedes Zykelbüschel genau einen Nullzykel (=Ähnlichkeitszentrum zweier bel. Zykel des Büschels = Spurpunkt der Geraden).



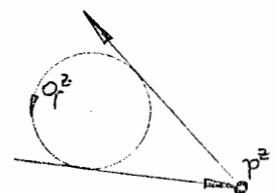
Dabei gilt:

Legt man durch den Nullzykel eines Zykelbüschels einen beliebigen Speer, der einen Büschelzykel schneidet, so schneidet er alle unter Winkeln mit festem Cosinuswert.

Jedes Zykelbüschel wird durch zwei  $\neq$  Zykel aufgespannt. (Vgl. Folg. 2: Lageaufgabe L1).

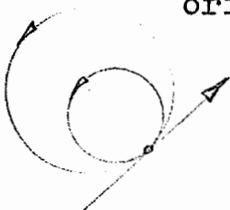
Speziell:  $p^z$  ... Nullzykel,  $q^z$  ... Nicht-Nullzykel.

$\Rightarrow$  Wird ein Zykel allen Ähnlichkeiten von einem festen Punkt aus unterworfen, so entsteht ein Zykelbüschel mit dem Ähnlichkeitszentrum als Nullzykel.



Bemerkung: Mit der Zyklographie verbunden ist die bijektive Abbildung der Menge aller c-Geraden auf die Menge der orientierten Linienelemente in  $\pi_e^z$ .

orient. Linienelement  $\xleftrightarrow{1}$  parabol. Zykelbüschel  $\xleftrightarrow{1}$  c-Gerade



Folg.6: Ähnlichkeitsachse von drei Zykeln.

Geg.  $p^z, q^z, r^z$  (paarw.  $\neq$  Nicht-Nullzykel)  $\Rightarrow P, Q, R \in \mathbb{P}^e$ .

Nach Folg.3 bestimmen je zwei dieser Zykel genau ein Ähnlichkeitszentrum ( $\Rightarrow$  Spurpunkte von  $PQ, QR, RP$ ).

Beh.: Die drei Ähnlichkeitszentren sind kollinear;

denn:  $P, Q, R$  bestimmen eine Ebene, falls  $P, Q, R$  nicht kollinear.  $\Rightarrow$  Für  $P, Q, R$  koll. gehören  $p^z, q^z, r^z$  einem Zykelbüschel an  $\Rightarrow \exists^*$  Ähnlichkeitszentrum.

$\Rightarrow$  Vs.  $P, Q, R$  nicht kollinear  $\Rightarrow PQR = \alpha \Rightarrow$  die Ähnlichkeitszentren liegen auf der Spur  $s$  von  $\alpha$ . (Speziell:  $s \dots$  Ferngerade von  $\pi_e^z$ , falls  $\alpha$  eine Hauptebene ist).

Definition: Die Spur von  $PQR = \alpha$  mit  $\alpha \neq$  Hauptebene heißt Ähnlichkeitsachse der Bildzykel von  $P, Q, R$ .

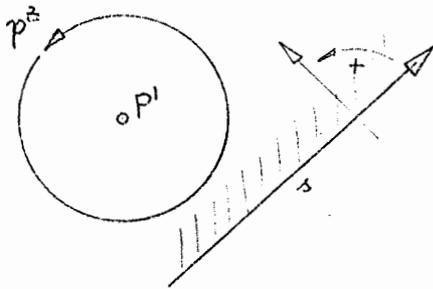
Nach Folg. 3 gilt mit  $\sphericalangle(\alpha \pi_e^z) = \omega \wedge 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$ :

Schneidet der Bildzykel (etwa  $p^z$ ) eines Punktes (etwa  $P$ ) von  $\alpha$  die Ähnlichkeitsachse  $s$ , dann ist der Betrag des Cosinus des Schnittwinkels  $\varphi_p$  gleich  $\text{ctg } \omega$ .

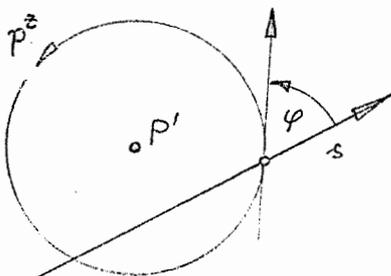
$\Rightarrow$  Auch für  $q^z$  und  $r^z$  gilt:  $|\cos \varphi_q| = |\cos \varphi_r| = \text{ctg } \omega$ .

Zusätzliche Festsetzung:

Orientierung der Ähnlichkeitsachse  $s$  so, daß der Grundriß  $P'$  eines Punktes  $P \in \alpha$  mit positiv orientiertem Bildzykel  $p^z$  auf dem positiven Ufer des Speeres  $s$  liegt.



Ausnahmefall:  $\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi_p = 0 \wedge \forall P \in \alpha$  gilt:  $P' \perp s$ ,  $s$  nicht orientierbar.



Mit dieser Orientierungsfestsetzung für  $s$  gilt:  $\cos \varphi_p > 0$  ( $\varphi_p \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ).

Für den Ausnahmefall  $\omega = \frac{\pi}{2}$  gilt trivialerweise  $|\cos \varphi_p| = \cos \varphi_p = 0$ .

$\Rightarrow$  Alle drei Angabezykel  $p^z, q^z, r^z$  schneiden die Ähnlichkeitsachse unter

Winkeln mit festem Cosinus bzw. — nach Einschränkung des Schnittwinkelintervalls auf  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  — unter gleichen Winkeln.

Folg.7 : Das zyklographische Bild einer Ebene (="Zykelbündel")

(Zykelbündel = "lineare Zykelkongruenz", vgl.E.MÜLLER)

Für  $\alpha = PQR$  mit  $\sphericalangle \alpha \pi_e^z = \omega$  und

$0 \leq \omega < \frac{\pi}{4}$   
 $\omega = \frac{\pi}{4}$   
 $\frac{\pi}{4} < \omega \leq \frac{\pi}{2}$

ist  $\alpha$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{flacher als} \\ \text{steiler als} \end{array} \right.$   $c$ -Ebene  $\wedge \mathbb{P}_\alpha \xi$  heißt  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ellipt.} \\ \text{parab. Zykelbündel} \\ \text{hyperbol.} \end{array} \right.$

Speziell:  $\alpha = \pi_e^z$  : Punktfeld in  $\pi_e^z$  ist ein spez. ellipt. Zykelbündel.

$\alpha \parallel \pi_e^z (\neq \pi_e^z)$ , also  $\omega = 0$ :   $r_p = \text{const. } \forall p^z \in \mathbb{P}_\alpha \xi$

Vs.  $\omega \neq 0$ : Alle Zykel eines Bündels haben eine gemeinsame Ähnlichkeitsachse  $s$  (=Spur von  $\alpha$ ).

Wegen  $1 \geq \cos \varphi_p = \text{ctg } \omega \quad \exists$  Schnittpunkte  $p^z \cdot s$  bloß für  $\frac{\pi}{4} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$ , also im Falle eines parabolischen oder hyperbolischen Zykelbündels. (Für elliptische Zykelbündel  $\nexists$  Schnitt der Ähnlichkeitsachse mit den Zykeln des Bündels).

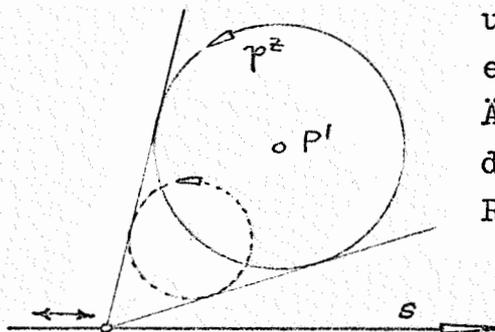
$\Rightarrow$  Ein parabolisches und hyperbolisches Zykelbündel besteht genau aus der Menge jener Zykel, die einen festen Speer  $s$  unter Winkeln mit festem Cosinus schneiden, vereinigt mit den Nullzykeln dieses Speeres.

Bemerkung a):  $\varphi = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$  ...parab.Zykelbündel = {Zykel, die einen festen Speer  $s$  berühren}  $\cup$  {Punkten  $\notin$  von  $s$ }.

$\Rightarrow$  Jeder Speer legt genau ein parab. Zykelbündel (d.i. das  $\xi$ -Bild einer  $c$ -Ebene) fest und umgekehrt.

$\Rightarrow$  Mit der Zyklographie gekoppelt ist eine Bijektion der Menge der  $c$ -Ebenen auf die Menge der Speere der (orientierten) Bildebene.

Bemerkung b): Festlegung des Zykelbündels durch einen Zykel  $p^z$



und den Spurspeer  $s : \Rightarrow$  Zykelbündel entsteht durch Ausübung aller zentrischen Ähnlichkeiten auf  $p^z$ , wobei das Zentrum den Speer  $s$  durchläuft.  $\Rightarrow s$  ist die Reihe der Nullzykel des Büschels.

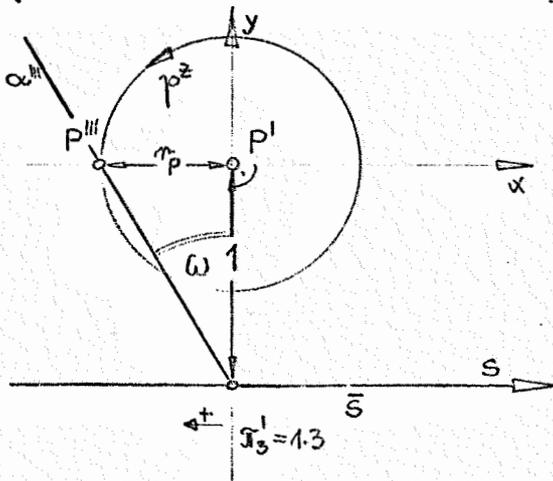
Bemerkung c): Geg. sei ein ellipt. Zykelbündel als  $\xi$ -Bild einer Ebene  $\alpha$  mit  $\angle(\alpha, \pi_e^2) = \omega \wedge 0 < \omega < \frac{\pi}{4}$ .

Nach erfolgter zyklograph. Abb. von  $\alpha$  überlagern wir

(I) die Zykelebene  $\pi_e^2$  mit der zugehörigen reellen euklidischen Ebene.

( $\Rightarrow$  Zykel  $\rightarrow$  elementarer Kreis, Speer  $\rightarrow$  elementare Gerade, elementare analytische Geometrie, Vektorrechnung in  $\pi_e(\mathbb{R})$ ).

(II) Wir erweitern  $\pi_e(\mathbb{R})$  zur komplexen euklid. Ebene  $\pi_e(\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$ . (Formel für skalares Vektorprodukt bleibt gültig).



ellipt. Zykelbündel  $\Rightarrow r_p < \overline{P^I s} =: 1$   
(dabei ist  $s \cdot P = \alpha$ ,  $\angle(\alpha, \pi_e) = \omega$ )

$$\Rightarrow \operatorname{ctg} \omega = \frac{1}{r}$$

Trägerkreis  $p$  von  $p^z$ :  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

Trägergerade  $\bar{s}$  von  $s$ :  $y + 1 = 0$

$\Rightarrow$  Schnittpunkte  $s \cdot p =: S_{1,2} : (\pm \sqrt{r^2 - 1}, -1)$

Speervektor  $\delta : (1, 0)$ ,

Tangentenvektor  $t \perp \overline{P^I S_1} : (1, \pm \sqrt{r^2 - 1}) \Rightarrow \frac{t}{|t|} = \frac{1}{r} (1, \pm \sqrt{r^2 - 1})$

(Gleichung der Tangente:  $\pm \sqrt{r^2 - 1} x + (-1) y - r^2 = 0$ )

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{\delta \cdot t}{|\delta| \cdot |t|} = \frac{1}{r} = \operatorname{ctg} \omega = \text{const.}$$

$\Rightarrow$  Die Schnittwinkel - Neigungswinkelbeziehung  $\cos \varphi = \operatorname{ctg} \omega$  gilt formal auch für elliptische Zykelbündel!

Aber:  $\cos \varphi > 0 \Rightarrow \varphi$  ist nicht reell!

Sprechweise: Die Zykeln eines elliptischen Zykelbündels schneiden den Spurspeer nach Winkeln mit festem Cosinuskwert  $> 1$ .

Für den (sicher komplexen) Schnittwinkel  $\varphi$  gilt:  $\cos \varphi$  ist reell ( $> 1$ ).

$$\varphi = \alpha + i\beta, \quad (\alpha, \beta \text{ reell}) \Rightarrow \cos \varphi = \cos(\alpha + i\beta)$$

Wir wenden auf diesen Ausdruck die Additionstheoreme an (gültig in  $\pi_e(\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$ ; Winkelfunktionen sind analytisch, also in  $\mathbb{C}$  fortsetzbar):

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + i\beta) &= \cos\alpha \cos i\beta - \sin\alpha \sin i\beta = \\ &= \cos\alpha \operatorname{ch}\beta - i \sin\alpha \operatorname{sh}\beta . \end{aligned}$$

$$\cos\varphi \text{ reell} \Leftrightarrow \sin\alpha \cdot \operatorname{sh}\beta = 0 .$$

$$\Rightarrow (1) \quad \beta = 0 \Rightarrow \varphi \text{ reell}$$

$$(2) \quad \alpha = 0 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Also gilt: Ein nicht reeller Winkel  $\varphi$  besitzt genau dann einen reellen Cosinuswert, wenn der Realteil von  $\varphi = 0 (\pi)$  ist.

Satz 24: Die zyklographische Abbildung ist eine Bijektion der Menge der Punkte des orientierten euklid. Raumes auf die Menge der Zykeln einer orientierten euklid. Ebene.

Eine Gerade wird auf ein Zykelbüschel abgebildet, welches aus zum Spurpunkt der Geraden zentrisch ähnlichen Zykeln besteht;

eine Ebene auf ein Zykelbündel, dessen Ähnlichkeitsachse die Spur der Ebene ist.

Die Zykeln eines Zykelbündels mit eigentlicher Ähnlichkeitsachse schneiden den Spurspeer nach Winkeln von festem Cosinuswert. Mit der Zyklographie sind bijektive Abbildungen der Menge der c-Geraden auf die Menge der orientierten Linienelemente bzw. die Menge der c-Ebenen auf die Menge der Speere der euklid. Ebene verknüpft.

#### 4.2 Zyklographie als Übertragungsprinzip

Vgl. 4.1 Folg.1:

$\mathbb{P}_e$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{P}_e^z$
Pkt.	-----	Zykel
c-Ebene	-----	Speer
c-Gerade	-----	Orientiertes Linienelement
Punktreihe	-----	Zykelbüschel
Punktfelder	-----	Zykelbündel

Lösung von Aufgaben durch Kopplung des zyklographischen Bildes mit einem Grundriß-Seitenrißverfahren oder mit einer kotierten Projektion (E.MÜLLER) oder mit einer Zentralprojektion (W.FIEDLER).

Beispiel 1: Geg. 3 Speere  $s_j$ , die ein Dreieck bilden.  
Ges. Zykel, die  $s_j$  nach  $\varphi_j$  (gegeben durch  $\cos \varphi_j$ ) schneiden.

Aus dieser Aufgabe folgt mit dem Übertragungsprinzip:

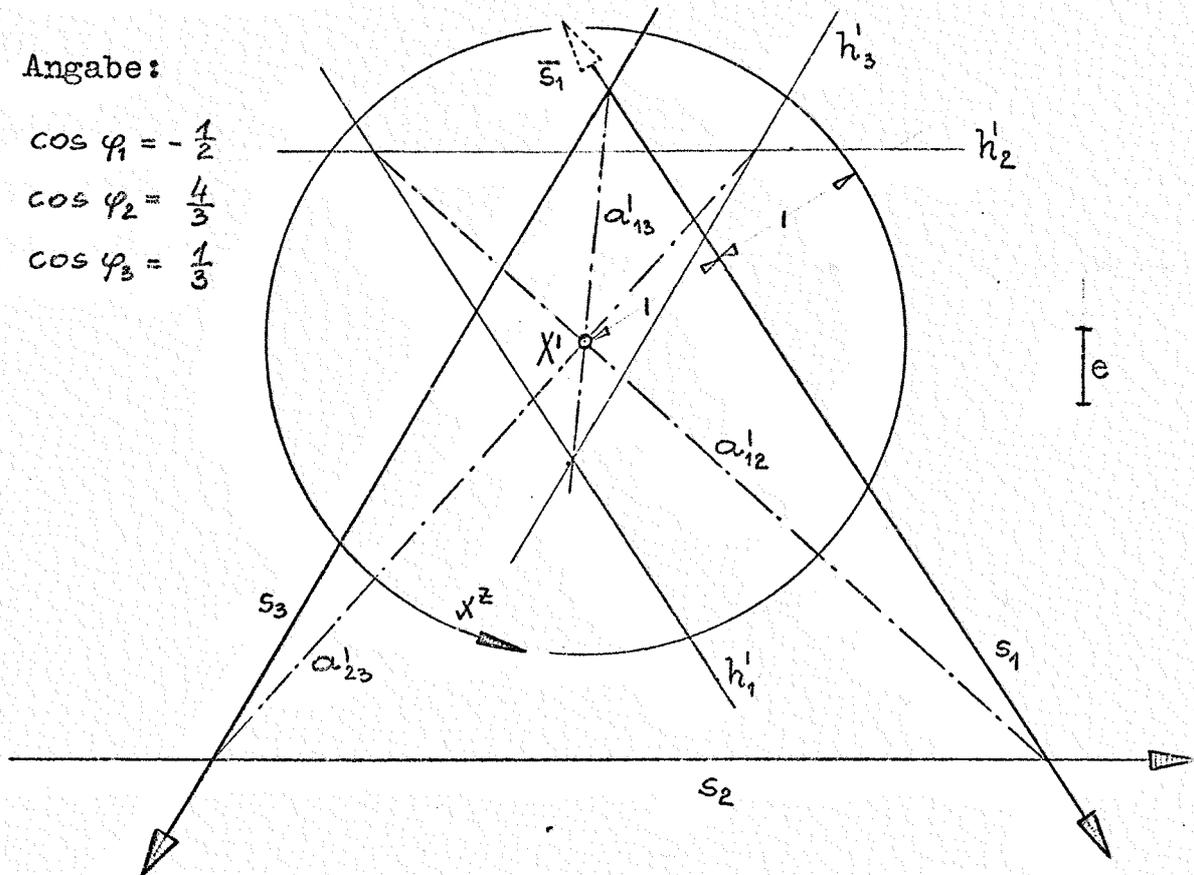
$(s_j, \cos \varphi_j) \rightarrow$  Ebene  $\varepsilon_j$ ,  $\Rightarrow$  3 Ebenen  $\rightarrow$  1 Schnittpunkt  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  1 Lösungszykel.

Angabe:

$$\cos \varphi_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{4}{3}$$

$$\cos \varphi_3 = \frac{1}{3}$$



- a)  $\cos \varphi_1$  negativ: Nach 4.1, Folg.6 (Festsetzung der Orientierung des Spurspeers einer Ebene so, daß  $\cos \varphi > 0$ ) muß  $s_1$  zunächst umorientiert werden ( $\Rightarrow \bar{s}_1, \cos \bar{\varphi}_1 = +\frac{1}{2}$ ).
- b) Festlegung der 3 Ebenen  $\varepsilon_j$  mit  $\operatorname{ctg} \omega_j = \cos \varphi_j$   
 $\Rightarrow$  (kotierte Projektion) Intervall  $i_j$  mit  

$$i_1 : i_2 : i_3 = \frac{1}{2} : \frac{4}{3} : \frac{1}{3} = 3 : 8 : 2$$
 $\Rightarrow$  Schichtenliniengrundrisse  $h'_j$   
 $\Rightarrow$  Schnittgeradengrundrisse  $a'_{jk} = (s_j s_k) \cdot (h'_j h'_k) \Rightarrow a'_{jk} a'_{kl} = X'$
- c) Zykel  $x^z$  mit Mitte  $X'$  und  $\cos \varphi_j = \frac{X' s_j}{|r_x|}$   
 Orientierung von  $x^z$  wird durch die Orientierung der Speere  $s_j$  gemäß der Festsetzung in 4.1, Folg.6 induziert.

Bemerkung: Konstruktion der berührenden Kreise eines Dreiseits  
(Spezialfall von Beispiel 1:  $s_1, s_2, s_3, \cos \varphi_3 = 1$ ).

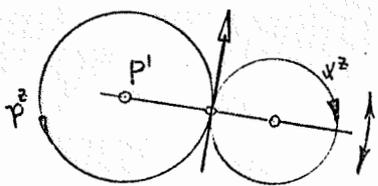
Zunächst Übergang zu Orientierungen: 1 Orientierung von  $s_1$   
gewählt (d.h.  $\Pi_e$  wird orientiert), noch genau 4 Orientierungs-  
möglichkeiten für  $s_2, s_3$ .

Man hat Beispiel 1 für jede dieser Möglichkeiten durchzu-  
führen.  $\Rightarrow \exists$  4 berührende Kreise.

Beispiel 2: Geg.  $p^z, q^z$  ( $\neq$ , Nicht-Nullzykel)

Ges. alle  $p^z$  und  $q^z$  berührenden Zykel

Vgl. 4.1, Folg.1: "berührende Zykel"



$\{ \text{Zykel } x^z, \text{ die } p^z \text{ berühren} \} = \{ \text{Bildzykel von} \}$   
 $\{ \text{Punkten } X \text{ der } c\text{-Geraden durch } P \}$

Bezeichnung:  $\{ \text{Pkte. aller } c\text{-Geraden durch} \}$   
 $P \} =: c\text{-Kegel}$

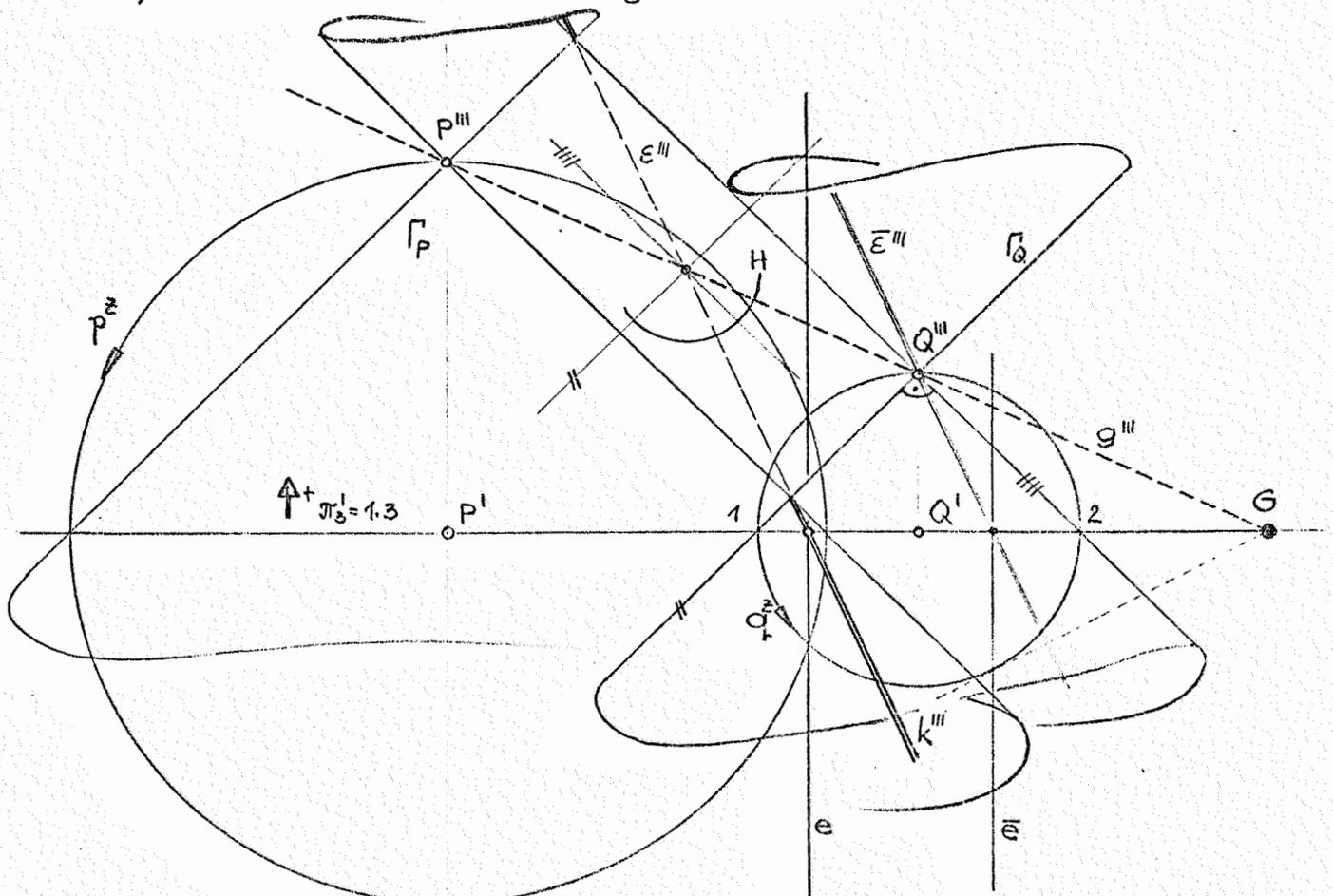
$\Rightarrow$  Übertragungsprinzip zur Lösung dieser Aufgabe:

Lösungsmenge in  $\Pi_e$  ist Schnitt zweier  $c$ -Kegel in  $\Pi_e$ .

$c$ -Kegel haben  $c$  ( $\in \omega$ ) gemeinsam.

$\Rightarrow$  Der Restschnitt ist eine Kurve 2. Ordnung (i.a. Kegelschnitt  $k$ )

$\Rightarrow$  Grundriß ist i.a. ein Kegelschnitt  $k'$ .



Um den Typus des Kegelschnitts  $k$  festzulegen, schneiden wir einen der c-Kegel (etwa  $\Gamma_Q$ ) mit der Richte ebene  $\bar{\varepsilon} \parallel \varepsilon$  durch  $Q$ . Dabei gilt:  $\varepsilon'''$  und  $P'''Q''' = g'''$  sind Diagonalen eines Rechteckes (vgl. Figur) und daher harmonisch zu dessen Seiten-|| (d.s. Kegelerzeugenden).  $\implies \bar{\varepsilon}'''$  und  $g'''$  harmonisch zu den Erzeugenden von  $\Gamma_Q$  in  $\pi_3$ .  $\implies$  Im Bündel  $Q$  ist  $\bar{\varepsilon}$  die Polarebene von  $g$  bezüglich  $\Gamma_Q$ .

$\implies G = g \cdot \pi_e^z$  und  $\bar{\varepsilon} \cdot \pi_e^z$  sind polar bezüglich des Trägerkreises von  $q^z$ .

$\implies$  Z.B.: Für  $g$  mit  $0 < \angle g \pi_e^z < \frac{\pi}{4}$  ist  $\Gamma_Q \cap \bar{\varepsilon}$  ein Erzeugendenpaar  $\implies k'$  ist eine Hyperbel.

Speziell:  $k'$  ist eine Gerade  $\perp P'Q' \iff k''' \perp 1.3 \iff g''' \parallel 1.3 \implies p^z, q^z$  sind kongruent ( $\neq$ ).

Zusammenfassung:

$g$  flacher als c-Gerade (nicht  $\parallel \pi_e^z$ )  $\implies k'$  ist Hyperbel.  
( $g \xrightarrow{\varepsilon}$  hyperb. Zykelbüschel).

$g$  ist c-Gerade ( $\rightarrow$  parab. Zykelb.)  $\implies k' = P'Q' =$  Menge der Mittelpunkte des parab. Zykelbüschels.

$g$  steiler als c-Gerade ( $\rightarrow$  ellipt. Zykelb.)  $\implies k'$  ist Ellipse.

Beispiel 3: "Problem von APOLLONIUS".

Geg.  $o^z, p^z, q^z \mid \neq$  Nullzykel  $\wedge O, P, Q$  ...Dreieck

Ges. alle Zykel, die  $o^z, p^z, q^z$  berühren.

Vgl. Beispiel 2:

$\varepsilon$  ...Trägerebene des Restschnittes der c-Kegel  $\Gamma_O, \Gamma_P$

$\varphi$  ...Trägerebene des Restschnittes der c-Kegel  $\Gamma_P, \Gamma_Q$

Unter Vs.  $\varepsilon \neq \varphi, \varepsilon \not\parallel \varphi \exists^*$  Schnittgerade  $s$  in  $\pi_e$

$\implies$  Lösung der Aufgabe mittels Übertragungsprinzip

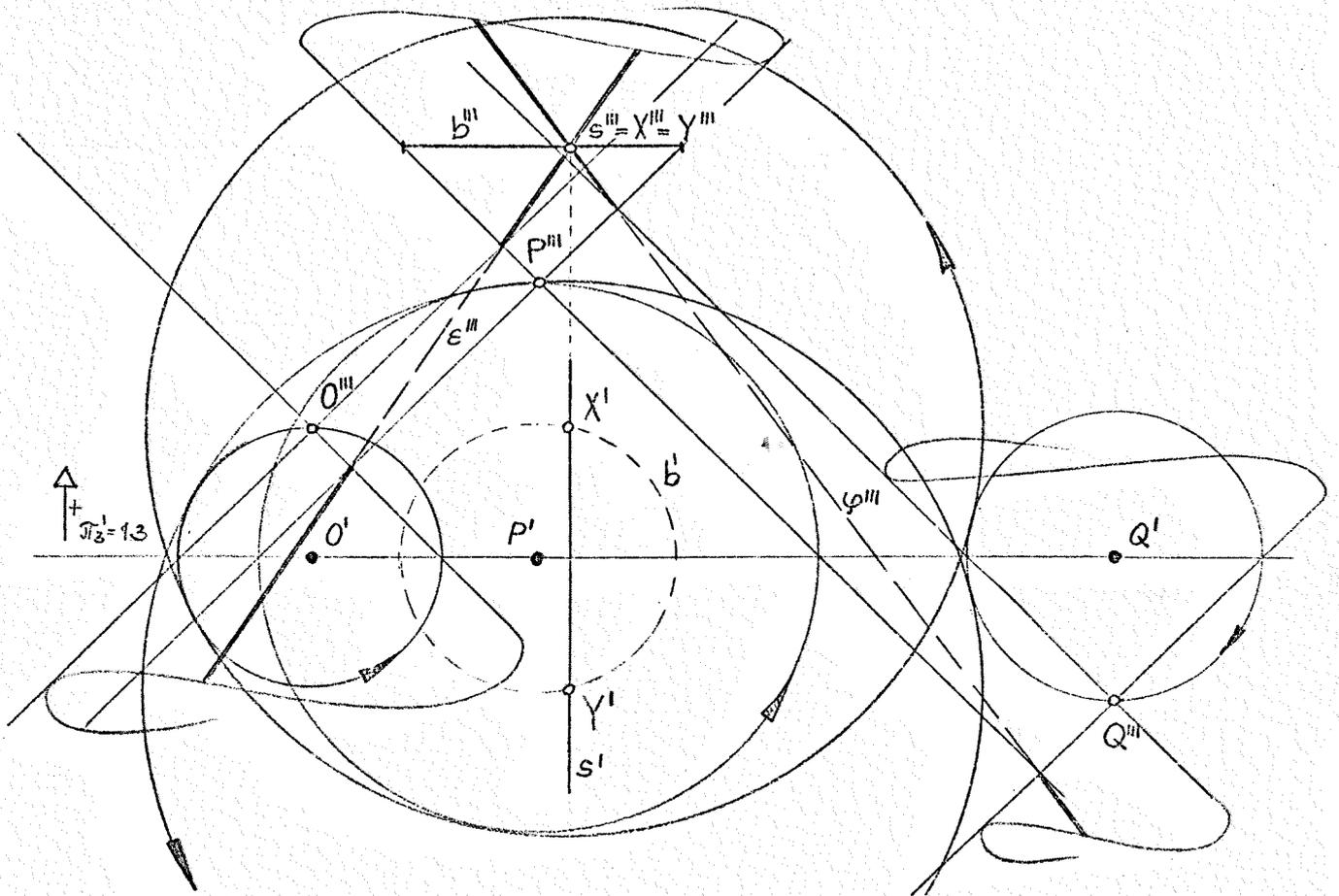
Schnitt eines c-Kegels (etwa  $\Gamma_P$ ) mit  $s \implies$  (i.a. 2  $\neq$  Lös.)

a) Spezielle Angabe:  $O', P', Q'$  kollinear ( $\implies OPQ \perp \pi_e^z$ )

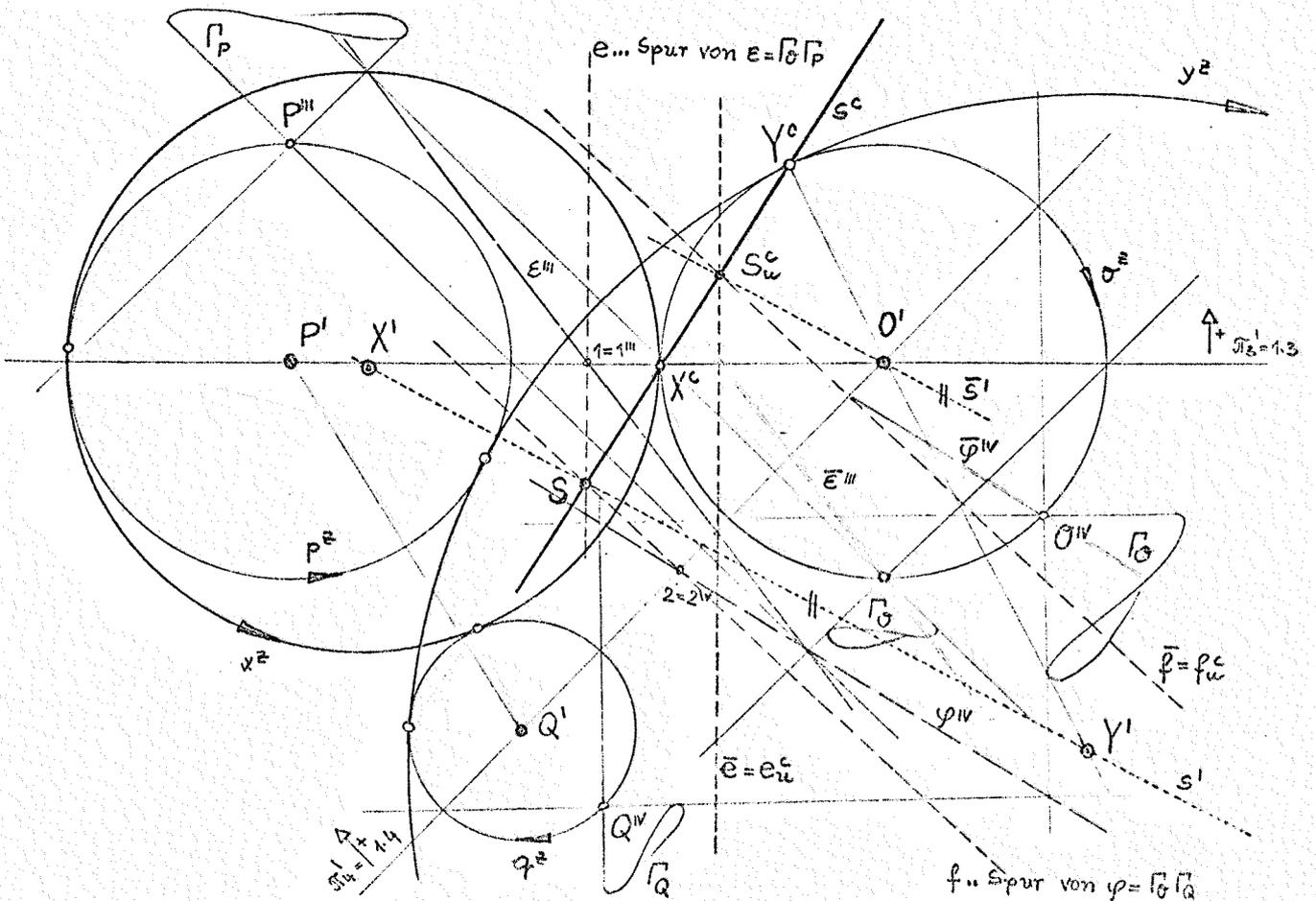
Bei Verwendung eines Seitenrisses ( $\pi_3 = OPQ$ ) erscheint sowohl

$\varepsilon$  als auch  $\varphi$  projizierend  $\implies s = \varepsilon \varphi$  ...projizierend,

$\implies X, Y = s \cdot \Gamma_P$  mittels Parallelkreis  $b : X, Y = s \cdot b$ .



b) Allgemeiner Fall :  $O', P', Q'$  nicht kollinear ( $\Rightarrow OPQ = \alpha \sqrt{\pi_3^2}$ )  
 Lösung der Aufgabe mittels Spur- Fluchtspurprinzip (  $\sigma$  als "Nebenaue" verwendet ).



Mit Hilfe von Seitenrissen ( $\pi_3$  durch  $O, P$  und  $\pi_4$  durch  $OQ$ ) bestimmt man  $\varepsilon = \Gamma_0 \cdot \Gamma_P$  und  $\varphi = \Gamma_0 \cdot \Gamma_Q$  bzw. deren Spuren  $e$  und  $f \Rightarrow e^c \parallel e$  und  $f^c \parallel f$  ...Fluchtspuren bezüglich des Auges  $O$  (Konstruktion z.B. ohne Seitenriß:  $f^c$  ist Polare des Spurpunktes  $F$  von  $OQ$  bezügl.  $e^c$ ).  $\Rightarrow$  Zentralbild  $s^c$  der Schnittgeraden  $s = \varepsilon\varphi$ :  $s^c = (e.f) \cdot (e^c f^c)$ ,

$$s \parallel \bar{s} = S_\omega^c \sigma \Rightarrow s' \parallel \bar{s}' = S_\omega^c \sigma' \wedge s' \perp S \Rightarrow s'$$

Schnitt von  $s$  mit  $\Gamma_0$ :  $s \cdot \Gamma_0 = \{X, Y\} \Rightarrow \{X^c, Y^c\} = s^c \cdot \sigma^z$

$$\Rightarrow X' = (X^c \sigma') \cdot s', \quad Y' = (Y^c \sigma') \cdot s'.$$

$\Rightarrow x^z$  mit Mitte  $X'$ , Radius  $r_x$  (und Orientierung) so, daß  $x^z$  und  $\sigma$  einander berühren.

$\Rightarrow y^z$  analog.

Bemerkung a): Geg.  $\sigma, p, q$  ...3 nicht kollineare Nullzykel.

Man konstruiere die "Umzykel".

$$\Rightarrow \varepsilon, \varphi \perp \pi_e^z, \Rightarrow s = \varepsilon \cdot \varphi \perp \pi_e^z; \Gamma_0 \text{ symmetrisch zu } \pi_e^z$$

$\Rightarrow \{X, Y\} = s \cdot \Gamma_0$  symmetrisch zu  $\pi_e^z$ .  $\Rightarrow$  Lösungszykel  $x^z, y^z$  sind ein Paar ergänzender Zykel.

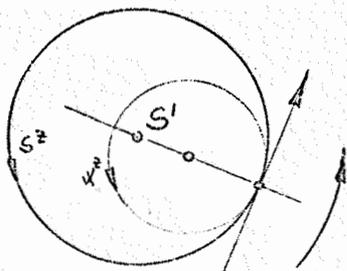
Bemerkung b): Das Problem von APOLLONIUS ist für Kreise  $\sigma, p, q$  formuliert (ohne Orientierungen!).

$\Rightarrow$  (vgl. Beispiel 1, Bemerkung): Bei Wahl der Orientierung etwa von  $\sigma$  ( $\Rightarrow \sigma^z$ ) ] vier  $\neq$  Orientierungsmöglichkeiten für  $p, q$  ( $\Rightarrow p^z, q^z$ ).  $\Rightarrow$  Zur Lösung des Problems ist Aufgabe 3b viermal durchzuführen  $\Rightarrow$  ] i.a. acht Lösungskreise.

### 4.3 Die "Zykelkugel"

Definition: Eine Zykelkugel ist die Menge aller Zykel, die einen festen Zykel nach Winkeln mit festem Cosinuswert schneiden.

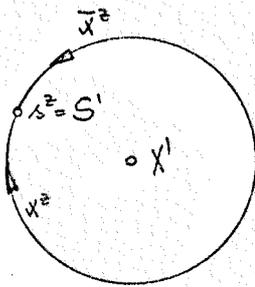
Speziell:  $\cos \varphi = 1$ ; ges.  $\{\text{Zykel } x^z \mid x^z \text{ berührt einen geg. Zykel } s^z\}$ .



Zu jedem Punkt von  $s^z$  gehört ein parabolisches Büschel von berührenden Zykeln  $x^z$ ;  $\Rightarrow$  Lösungszykel sind Bilder der Punkte von  $c$ -Geraden durch  $S$  ( $s^z$ ), also Bilder von Punkten des  $c$ -Kegels  $\Gamma_s$  durch  $s^z$ .

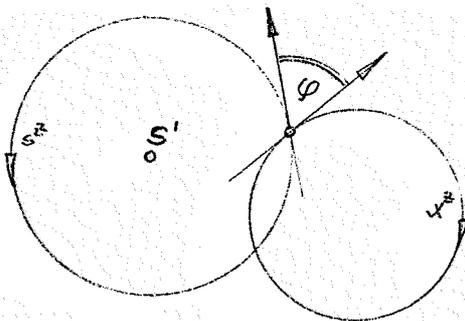
⇒ Das zyklographische Bild eines c-Kegels ist eine spezielle Zykelkugel und heißt "parabolische Zykelkugel".

Bemerkung a): Ist  $s^z$  ein Nullzykel  $\Rightarrow \cos \varphi$  nicht bestimmt, z.B.  $\cos \varphi = 1$  (Berührung)  $\Rightarrow$  Zykelkugel sicher parabolisch; Urbild ist ein zu  $\mathbb{T}_e^z$  symmetrischer c-Kegel.  $\Rightarrow$  Mit jedem Lösungszykel ist auch der ergänzende ein Lösungszykel.



⇒ Das zykl. Bild eines c-Kegels mit der Spitze in  $\mathbb{T}_e^z$  ist die Kreismenge durch  $S'$ .

Bemerkung b): Nach 4.1, Folg.3 gilt: Bei Umorientierung des Angabezykels  $s^z$  ändert der (geg.) Cosinuswert des Schnittwinkels  $\varphi$  das Vorzeichen.



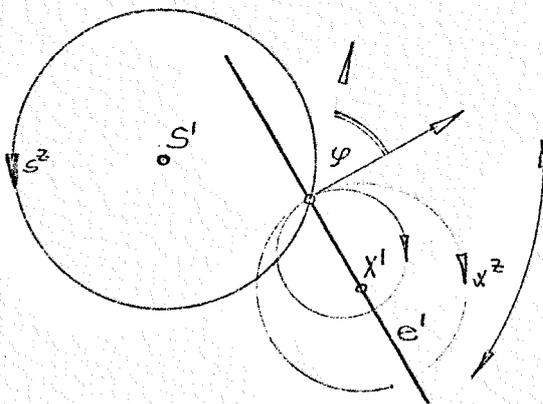
Es ist durch Umorientierung von  $s^z$  stets erreichbar, daß  $\cos \varphi \geq 0$ . (I.f. stets vorausgesetzt).

Definition: Eine Zykelkugel mit  $0 \leq \cos \varphi < 1$  heißt "hyperbolisch", mit  $\cos \varphi = 1$  heißt "parabolisch", mit  $\cos \varphi > 1$  heißt "elliptisch". ( $\cos \varphi > 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \varphi \equiv 0(\pi)$ )

⇒ Das Urbild einer parabol. Zykelkugel ist ein c-Kegel (siehe oben).

Das Urbild einer hyperbolischen Zykelkugel:

(Festsetzung  $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ )



In jedem Punkt von  $s^z$  bestimmt der geg. Schnittwinkel ein parabolisches Bündel von Lösungszykeln, also eine c-Gerade  $e$  (Grundriß  $e'$ ).

⇒ hyperbol. Zykelkugel besteht aus einer Drehschar parabol. Zykelbündel.

⇒ Urbild in  $\mathbb{T}_e$  durch Drehung der c-Geraden  $e$  um die lotrechte Achse

durch  $S'$ . (Achse windschief zu  $e$ , falls  $\varphi \neq 0$ ).

⇒ Urbild ist ein einschaliges Drehhyperboloid und heißt "einschalige c-Kugel". Die Erzeugenden der einsch. c-Kugel  $\phi$  sind c-Geraden  $\Rightarrow \phi$  geht durch den Fernkreis  $c$  hindurch.



Im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle M'G'G''$  liest man ab:

$$\boxed{d^2 + z_M^2 = r^2} \quad \text{und} \quad \sphericalangle s^z X^z = \varphi = \sphericalangle G'M'G'' \Rightarrow \cos \varphi = \frac{|z_M|}{|r|} = \frac{z_M}{r}$$

(sgn.  $z_M = \text{sgn. } r$ ).

$\Rightarrow$  Es gilt auch umgekehrt: Die Menge aller Zyklen mit fester Tangentialentfernung von einem gegebenen Zyklen erfüllt eine Zyklenkugel.

Denn:  $m^z \dots M \dots (\underbrace{x_M, y_M, z_M}_{M'})$ ,  $x^z \dots X \dots (\underbrace{x, y, z}_{X'})$

4.1, Folg. 4:  $d^2 = (x-x_M)^2 + (y-y_M)^2 - (z-z_M)^2 \dots \dots \dots (*)$

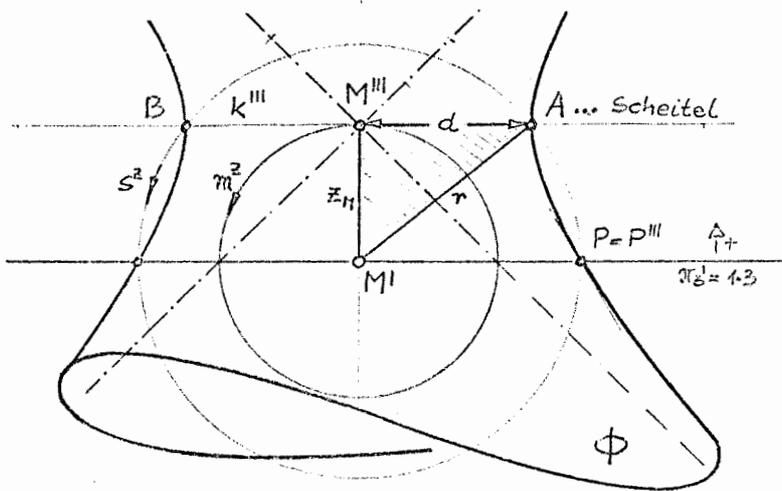
$\Rightarrow$  Mit  $d^2 = \text{konst.} > 0$  stellt (\*) die Gleichung einer einschaligen c-Kugel dar. (\*) beschreibt einschaliges Drehhyperboloid  $\Phi$  mit lotrechter Achse durch c;  $\Rightarrow$  das zykl. Bild ist eine hyp. Zyklenkugel mit  $d = \text{konst.}$ )

Schneidet man  $\Phi$  mit der Ebene  $z=z_M$ , so folgt aus (\*):  $d^2$  ist das Quadrat des Radius des Kehlkreises  $k$  von  $\Phi$ .

(Vgl. Figur:  $d = \overline{e'M'}$ )

Angabe einer hyp. Zyklenkugel.

a) Geg.  $s^z, m^z$  (konzentrisch mit  $|r| > |z_M|$ ,  $\text{sgn. } r = \text{sgn. } z_M$ )



Konstruktion der Meridianhyperbel elementar aus Asymptoten + 1 Punkt (P). Unter Beachtung der Beziehung  $d^2 + z_M^2 = r^2 \wedge d \dots$  Kehlkreisradius erhält man auch direkt die Scheitel A, B der Meridianhyperbel im Schnitt von  $s^z$  mit der Parallelen zur Rißachse durch  $M'''$ .

b) Geg.  $s^z, \cos \varphi (> 0) \Rightarrow z_M = r \cdot \cos \varphi \Rightarrow m^z \Rightarrow s^z, m^z \dots$  Angabe a).

Bemerkung: Sonderfall:  $M \in \pi_e^z \Rightarrow m^z \dots$  "Nullkreis".

$\Rightarrow z_M = 0 \Rightarrow$  (Vs.  $r$  reell  $\neq 0$ ),  $\cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

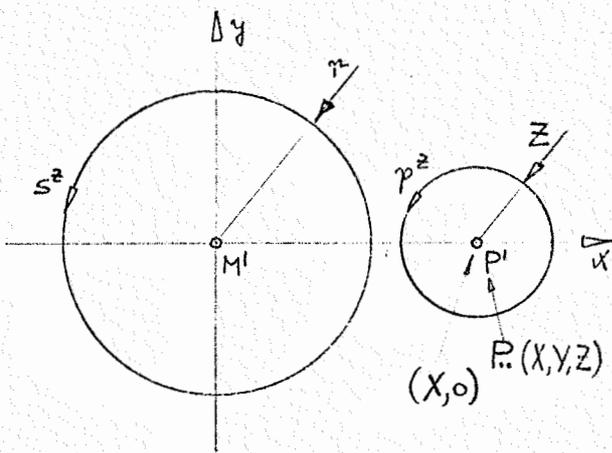
Da die einschalige c-Kugel mit  $M \in \pi_e^z$  zu  $\pi_e^z$  symmetrisch ist, gilt:

Mit jedem Zyklen der Zyklenkugel  $\xi(\Phi)$  gehört auch der ergänzende

Zykel der Zykelkugel an.  $\Rightarrow$  Ergebnis:  $\zeta(\phi)$  ist Kreismenge, die einen festen Kreis  $s$  (Orientierung von  $s$  ist unwesentlich) orthogonal schneidet, also ein hyperb. Kreisbündel.

Das Urbild einer elliptischen Zykelkugel

Geg.  $s^z, \cos \varphi > 1 \Rightarrow$  Übergang zu  $\pi_e(\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C})$ ; wir benützen die in  $\pi_e(\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C})$  gültige Formel für das skalare Produkt zweier Vektoren (vgl. 4.1, Folg. 7).



$$s^z \dots x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

$$p^z \dots (x - X)^2 + y^2 - Z^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xX + X^2 - Z^2 = 0$$

Schnittpunkte  $s^z \cdot p^z = S_{1,2} \dots (x_s, y_s)$

$$s^z: t_1 \dots x x_s + y y_s - r^2 = 0 \dots \text{Tgl. } t_1 \dots (-y_s, x_s) \dots \text{1. Tang.vektor}$$

$$p: t_2 \dots x x_s + y y_s - (xX + x_s X) + X^2 - Z^2 = 0 \Rightarrow x(x_s - X) + y y_s + (*) = 0$$

$$t_2 \dots (-y_s, x_s - X) \dots \text{2. Tgl.vektor}$$

$$|t_1| = \sqrt{y_s^2 + x_s^2} = r^2, \quad |t_2| = \sqrt{y_s^2 + (x_s - X)^2} = Z; \Rightarrow$$

$$\cos \varphi = \frac{t_1 \cdot t_2}{|t_1| \cdot |t_2|} = \frac{1}{r \cdot Z} \left( y_s^2 + x_s^2 - \frac{x_s X}{r^2} \right) = \frac{1}{2rZ} (2r^2 - r^2 - X^2 + Z^2)$$

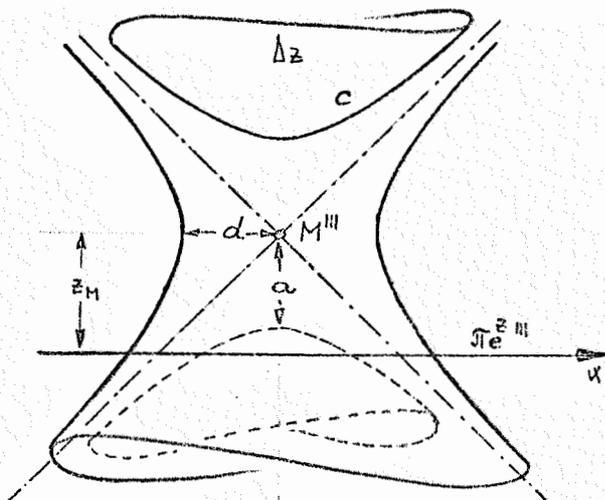
$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{r^2 - X^2 + Z^2}{2rZ}$$

$\cos \varphi = \text{konst.}$  laut Def. der Zykelkugel  $\zeta(\phi) \dots (s^z, \cos \varphi)$ .

$$p^z \dots (X, 0, Z) \in \zeta(\phi) \Leftrightarrow Z^2 - 2rZ \cos \varphi + r^2 - X^2 = 0 \Rightarrow$$

$$p^z \in \zeta(\phi) \Leftrightarrow (Z - r \underbrace{\cos \varphi}_{\text{konst.}})^2 - X^2 + r^2 \underbrace{(1 - \cos^2 \varphi)}_{\text{konst.}} = 0 \dots (**)$$

$\Rightarrow (**)$  stellt die Gleichung des Meridianschnittes  $c$  von  $\phi$  mit der Ebene  $y=0$  dar.



$c \dots$  gleichseitige Hyperbel, Mitte  $M$  mit  $z_M = r \cos \varphi$ .

$$\Rightarrow r^2 - z_M^2 > 0 \Leftrightarrow \cos^2 \varphi < 1 (\Rightarrow \cos \varphi < 1) \dots$$

$$\dots \text{hyperbol. Zykelkugel, } r^2 - z_M^2 =: d^2$$

$$r^2 - z_M^2 < 0 \Leftrightarrow \cos^2 \varphi > 1 (\Rightarrow \cos \varphi > 1) \dots$$

$$\dots \text{ellipt. Zykelkugel, } z_M^2 - r^2 =: a^2 (> 0)$$

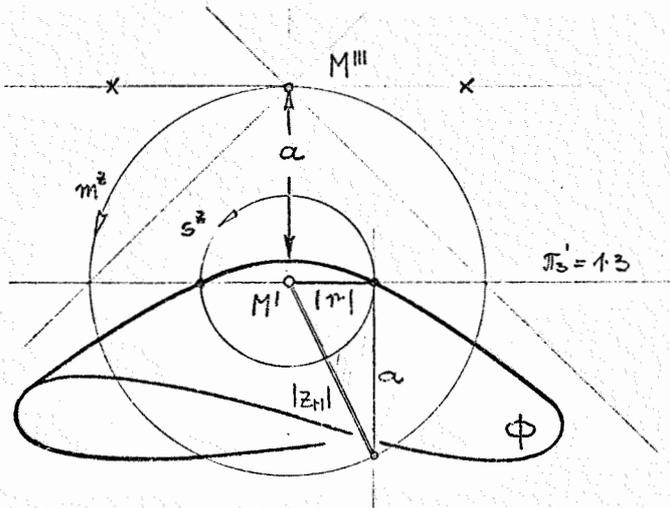
⇒ Im Fall der ellipt. Zykelkugel liegen die Scheitel der Meridianhyperbel  $c$  auf der  $z$ -Achse des verwendeten Koord. Systems (=Drehachse).

⇒  $\Phi$  ist ein zweischaliges Drehhyperboloid mit der Fernkurve  $c$  und dem Spurkreis  $s$  (=Trägerkreis von  $s^z$ ) und heißt "zweischalige  $c$ -Kugel".

(Anmerkung: Für  $r^2 = z_M^2 = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 1, \varphi = 0 \dots \xi(\Phi) \dots$  parab. Zykelkugel).

Angabe einer ellipt. Zykelkugel.

a) Geg.  $s^z, m^z$  (Mittenzykel der ellipt. Zykelkugel, also  $|r| < |z_M|$



$\cdot \text{sgn. } z_M = \text{sgn. } r$  wegen  $\cos \varphi > 0$  laut Festsetzung.

⇒ Konstruktion der Halbachsenlänge mittels  $z_M^2 - r^2 = a^2$ .

b) Geg.  $s^z, \cos \varphi$  ( $\neq 1$ , Vs. ellipt. Z.k). ⇒  $z_M = r \cos \varphi \Rightarrow \underline{m^z}$ .

Bemerkung 1): Analog zur hyp. Zykelkugel gilt auch hier: Der Mittenzykel  $m^z$  hat von jedem Zykel der ellipt. Zykelkugel gleiche Tangentialentfernung  $d$ , wobei gilt:

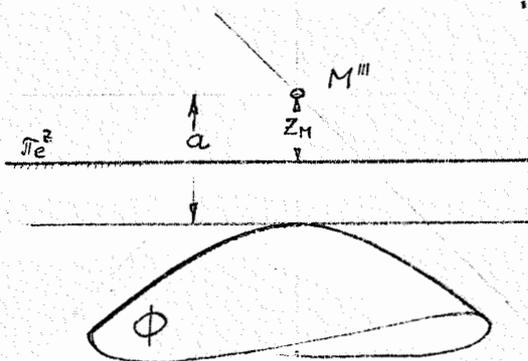
$$d^2 = -a^2 \quad (a > 0) \Rightarrow d \text{ ist reinimaginär (=Kehlkreisradius).}$$

Bemerkung 2) hyp. Zykelkugel ↔ einschal.  $c$ -Kugel

parab. Zykelkugel ↔  $c$ -Kugel

ellipt. Zykelkugel → zweischalige  $c$ -Kugel, die schneidet ( $s^z \dots$  "reeller" Zykel).

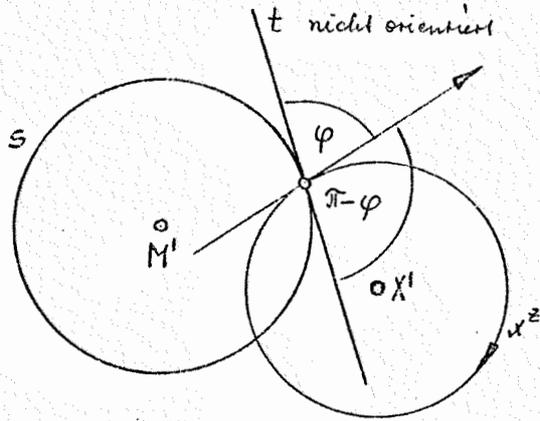
Wir untersuchen die Bildmenge einer zweischaligen  $c$ -Kugel, die  $\pi_e^z$  nicht schneidet.



⇒  $|z_M| > a$ ,  $s \dots$  nullteiliger Schnittkreis.

⇒  $\cos \varphi$  ist zwar konstant, aber nicht reell (1 Winkelschenkel ist nicht reell).

Beh.:  $\cos \varphi$  ist reinimaginär;



denn:  $z_M = r \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi$  rein-  
 $\downarrow$  reell  $\downarrow$  reinimag. imag.

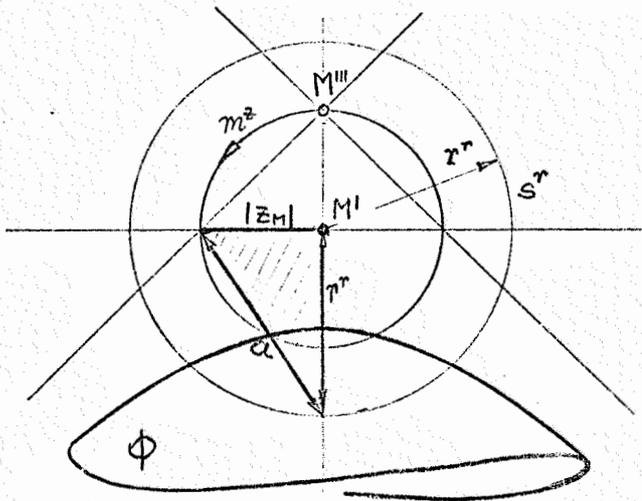
Da die Tangente an s nicht orientiert ist, ist der Schnittwinkel bloß modulo  $\pi$  bestimmt.  $\Rightarrow$  Nur der Betrag des Imaginärteils von  $\cos \varphi$  ist im vorliegenden Fall der ellipt. Zykelkugel konstant!

Konstruktion von  $\phi$  durch Übergang von  $\pi_e^z$  zu  $\overline{\pi_e^z}$  mit der Gleichung  $z+z_0=0$  ( $z_0$  passend, sodaß  $\phi \cap \overline{\pi_e^z}$  reell).

Andere Möglichkeit zur Konstruktion von  $\phi$  :

Geg. s (nullteilig), r (reinimag. Rad.)  $\rightarrow$   $s^r$  ..reeller Vertreter,  $r^r$  .. Radius von  $s^r$ .

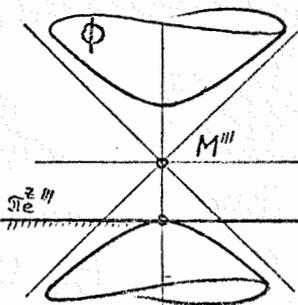
Orientierungsfestsetzung durch  $r=i.r^r$   
 $r^r = \text{Im}.r$  (mit Vorzeichen !);



$$a^2 = z_M^2 - r^2 = z_M^2 + (r^r)^2$$

Dabei gilt: Tangentialentfernung der Bildzykel von  $m^z$  ist konstant und reinimaginär.

Bemerkung 3): Sei  $\pi_e^z$  Scheiteltangentialebene von  $\phi$   
 $\Rightarrow z_M = a, r=0 \Rightarrow s^z \dots$   
 ...Nullzykel.

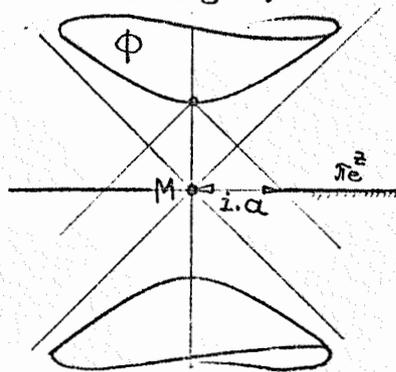


$$z_M = r \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{z_M}{r} = \infty.$$

$\cos \varphi$  ist wesentlich Singularität  $\Rightarrow \varphi$  unbestimmt.

Ergebnis: Die Zykel von  $\xi(\phi)$  haben zwar konstante reinimaginäre Tangentialentfernung, der Schnittwinkel  $\varphi$  mit dem Spurzykel (=Nullzykel) ist nicht bestimmt. Man spricht aber auch in diesem Fall von einer "elliptischen Zykelkugel".

Bemerkung 4):



$\pi_e^2 \cap M \Rightarrow m^z \dots$  Nullzykel  
 $s \dots$  Kehlkreis (Radius  $i.a$ ).

$$\cos \varphi = \frac{z_M}{r} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$  Der nullteilige Spurkreis (Kehlkreis) wird von jedem Zykel der ellipt. Zykelkugel rechtwinkelig geschnitten.

Die Menge aller Kreise, die einen festen nullteiligen Kreis  $s$  orthogonal schneiden ist ein elliptisches Kreisbündel.

( Der reelle Vertreter  $s^r$  von  $s$  wird nach Gegenpunkten geschnitten und gehört selbst zum elliptischen Kreisbündel).

Satz 25: Die parab. bzw. hyp. Zykelkugeln sind genau die zyklographischen Bilder der c-Kegel bzw. der einschaligen c-Kugeln. Eine hyp. Zykelkugel besteht aus allen Zykeln fester Tangentialentfernung von einem Mittenzykel, welcher das zyklographische Bild der c-Kugel-Mitte ist.

Jede elliptische Zykelkugel ist zyklographisches Bild einer zweischaligen Zykelkugel und ihre Zykeln besitzen konstante reinimaginäre Tangentialentfernung vom Mittenzykel.

Das zyklograph. Bild einer zweischaligen c-Kugel, welche die Bildebene nicht reell schneidet, besteht aus allen Zykeln fester reinimaginärer Tangentialentfernung vom Mittenzykel und ihre Zykeln schneiden einen nullteiligen Kreis nach einem Winkel mit reinimaginären Cosinuswert, dessen Imaginärteil bis auf das Vorzeichen konstant ist.

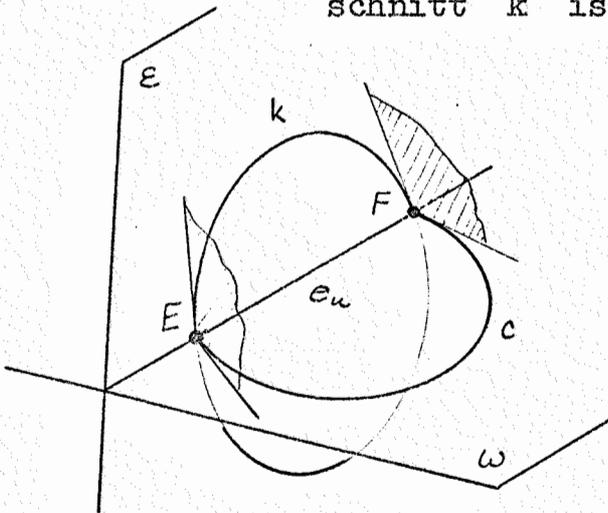
Anwendungen: Verallgemeinerung des APOLLONIUS'schen Problems.

Geg.: 3 Zykeln  $s_j^z$ ; allgem. Lage; ges. Zykeln, die  $s_j^z$  nach Winkeln mit vorgegebenem Cosinuswert  $\cos \varphi_j$  schneiden.

( $\Rightarrow \cos \varphi_j = 1$  : APOLLONIUS)

Lösung: Schnitt der durch  $\{s_j^z, \cos \varphi_j\}$  bestimmten c-Kugeln  $\phi_j$   
 ( $\phi_j$  nicht konzentrisch).

Schritt 1: Schnitt zweier c-Kugeln  $(\Phi_1 \cap \Phi_2) \subset E^3 \Rightarrow$  Restschnitt  $k$  ist eine krumme Kurve 2. Ord.



$$\Phi_1 \cap \Phi_2 = \{c, k\}$$

Da  $\Phi_1, \Phi_2$  den Fernkreis  $c$  gemeinsam haben, (ihre Schnittkurve also zerfällt), so berühren sie einander doppelt (Berührungspunkte  $E, F$ ).  $EF = e_\omega$  ist Fernspur der Trägerebene  $\varepsilon$  des Restschnittes  $k$ .

$E, F$  sind aber auch Berührungspunkte der Asymptotenkegel  $\Gamma_1, \Gamma_2$  von  $\Phi_1, \Phi_2$ .  $\Rightarrow \varepsilon$  ist parallel zur Schnittenebene  $\xi$  der Asymptotenkegel.

Konstruktion:

Wir verwenden eine Kegelspitze (etwa  $M$ ) als Nebenaugen  $\sigma$  einer Zentralprojektion auf  $\pi_e^z$ .

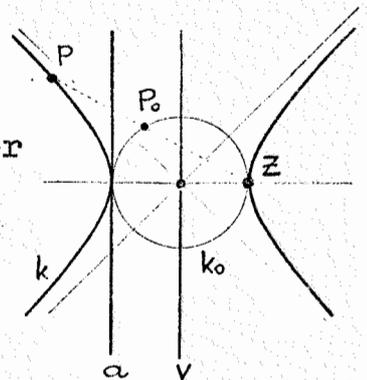
$e_\omega$  ... Polare des Spurpunktes der Verbindungsgerade der Kegelspitzen  $M_1, M_2$  (=c-Kugelmitten) bezüglich des zykl. Bildes des Auges (=Spurkreis von  $\Gamma_1$  = Mittenzykel  $m_1^z$  von  $\Phi_1$ ).

Spur  $e$ : Verbindungsgerade der Schnittpunkte der Spurzykel  $s_1^z, s_2^z$  von  $\Phi_1, \Phi_2$  (Verbindungsgerade ist stets reell; Konstruktion vergleiche die folgende Zwischenbemerkung).

Schritt 2: Wiederholung von Schritt 1 für  $\Phi_1, \Phi_3$   
 $\rightarrow \varphi$  ... Trägerebene des Restschnittes von  $\Phi_1 \cap \Phi_3$ ,  
 $\varphi \dots (f, f_\omega)$ .

Schritt 3: Schnitt von  $\Phi_1$  mit  $\varepsilon \cdot \varphi = s$  (Schnitt einer Hyperbel mit einer Geraden elementar mittels geeigneter Homologie).

$\Rightarrow \}$  2 Lösungszykel (über  $\mathbb{C}$ ).



Zwischenbemerkung:

Konstruktion der gemeinsamen Sehne von zwei Kreisen  $k_1, k_2 \mid \in \pi_1$  ( $k_1, k_2$  auch nullteilig).

$k_1, k_2$  spannen ein spezielles Kegelschnittsbüschel  $\lambda k_1 + \mu k_2$  auf. Über  $\mathbb{C}$   $\exists$  4,3,2,1 (+) "Grundpunkte" in einem allgem. K.S.-Büschel.

$\implies$  Die abs. Punkte I, J von  $\mathcal{T}_1$  sind kj.komplexe (sicher  $\neq$ ) Grundpunkte von  $\lambda k_1 + \mu k_2 \implies 3$  Fälle:

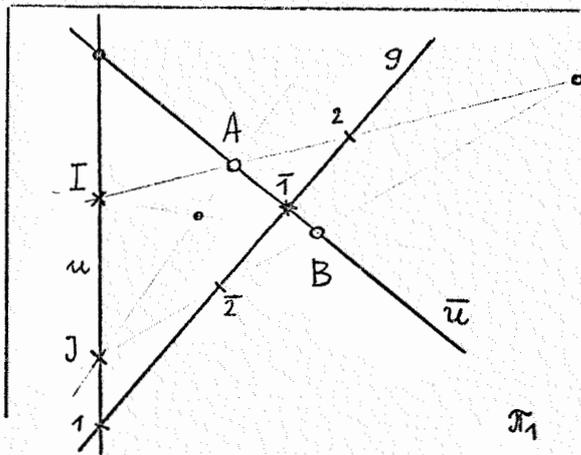
a)  $\exists$  vier  $\neq$  Grundpunkte: I, J; A, B (reell getrennt)  $\implies$  ellipt. Kreisbüschel,  
I, J; A, B (kj.komplex)  $\implies$  hyp.Kreisbüschel.

b)  $\exists$  drei  $\neq$  Grundpunkte: I, J, A (+Tangente A in a)  $\implies$  parab.Kreisb. ( $k_1$  berührt  $k_2$  in A).

c)  $\exists$  zwei  $\neq$  Grundpunkte (notwendig I, J)  $\implies k_1, k_2$  konzentrisch, ( $k_1$  berührt  $k_2$  in I und J).

$\implies$  Gesuchte gemeinsame Sehne ist im Fall c) die Ferngerade, im Fall b) die gemeinsame Tangente a; (da A als Doppellösung einer quadr. Gleichung stets reell ist, kann dieser Fall bloß für einteilige Kreise  $k_1, k_2$  eintreten).

Es ist bloß Fall a) wesentlich:



$\{I, J, A, B\}$  über  $\mathbb{C}$  ein Viereck, dessen Gegenseitenpaare die in  $(\lambda k_1 + \mu k_2)$  enthaltenen singulären Kurven 2.Ord. darstellen.

$\implies$  Gegenseitenpaare sicher kj.komplex oder reell.

$\implies$  Wegen  $IJ=u$  reell  $\implies AB=\bar{u}$  reell ( $\bar{u}$ ...gesuchte gemeinsame Sehne).

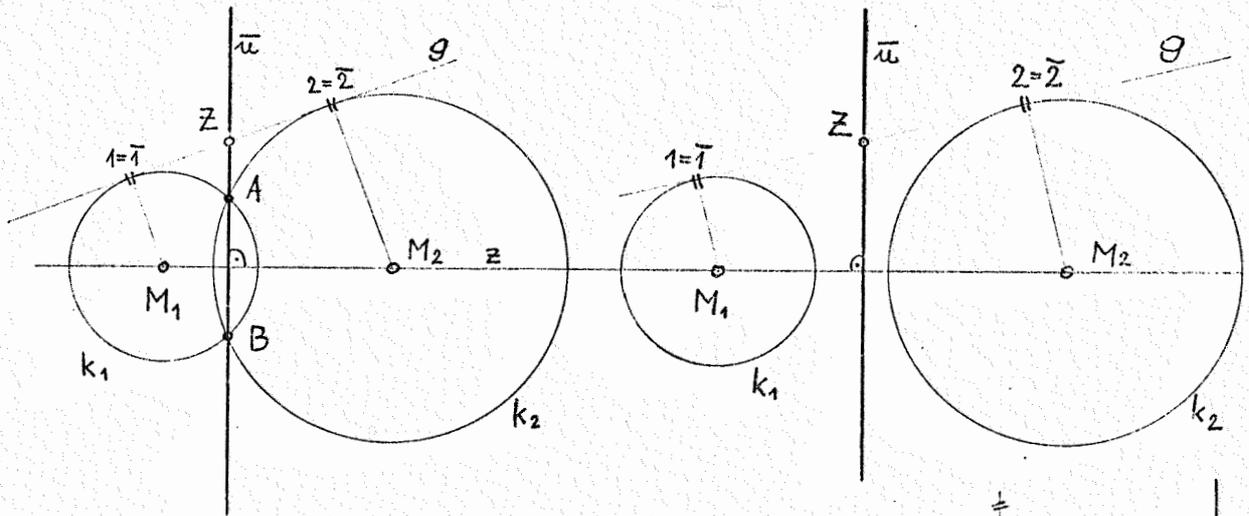
Jede "allgemeine" Gerade  $g \in \mathcal{T}_1$  schneidet die Kurven 2.Ord. eines Kegelschnittsbüschels nach Punkte-

paaren einer Involution, (der DESARGUES-Involution). In unserem Fall ist stets dem Fernpunkt  $1=g.u$  der Schnittpunkt  $\bar{1}=g.\bar{u}$  zugeordnet.  $\bar{1}$  ist also Zentralpunkt der DESARGUES-Invol. auf  $g$ .

Damit gilt: Die gemeinsame eigentliche Sehne ("Chordale") zweier Kreise  $k_1, k_2 \in \mathcal{T}_1$  ist die Menge der Zentralpunkte Z der durch das Kreisbüschel  $\lambda k_1 + \mu k_2$  auf allgemeinen Geraden  $g \in \mathcal{T}_1$  induzierten DESARGUES-Involutionen.

Konstruktion:  $\bar{u}$  ist sicher normal zur Zentralen  $z=M_1M_2$

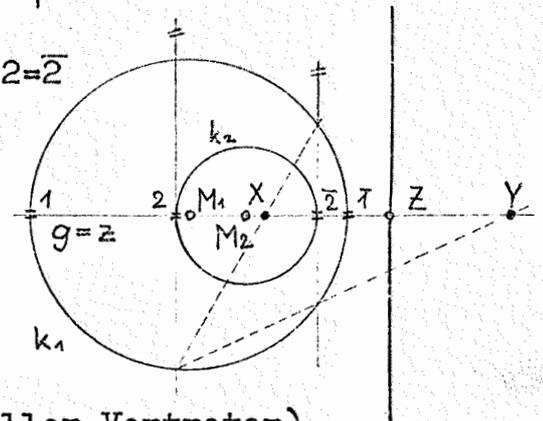
Vs.:  $k_1, k_2$  reell;  $\exists$  gemeins. Tangenten



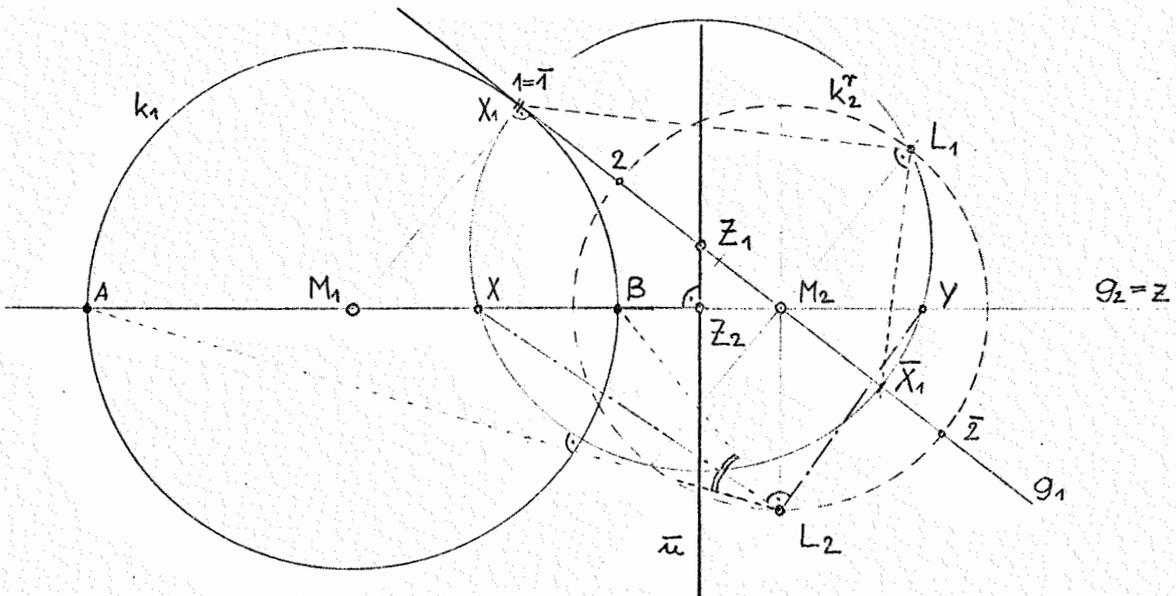
DES.-Inv. auf  $g$ : Fixpunkte  $1=\bar{1}, 2=\bar{2}$   
 $\Rightarrow Z$  halbiert  $\bar{1}\bar{2}$

Vs.  $k_1, k_2$  reell;  $\exists$  keine gem. Tgten.

$X, Y$ ..Fixpunkte der DES.-Inv.  
 auf  $g=z$  mit den Paaren  
 $1, \bar{1}; 2, \bar{2}$  .  $\Rightarrow Z$  halbiert  $\overline{XY}$ .



Vs.:  $k_1$  reell,  $k_2$  nullteilig ( $k_2^r$ ..reeller Vertreter)



Konstruktion von  $Z_1$  auf einer (reellen) Tangente  $g_1$  aus  $M_2$   
 an  $k_1$  siehe Figur.

Anderer Weg:  $g_2=z \Rightarrow$  Auf  $z$  ist  $A, B$  ein reelles Punktepaar  
 der DES.-Inv.,  $k_2$  induziert auf  $z$  eine ellipt. Inv. ( $L_2$ )  $\Rightarrow$

$\exists^*(X, Y)$  mit  $L_2 X \perp L_2 Y$  und  $H(A, B; XY)$ ;  $X, Y \dots$  Fixpunkte der DES.-Inv.  $\Rightarrow Z_2$  halbiert  $\overline{XY}$ .

Vs.:  $k_1$  und  $k_2$  nullteilig ( $k_1^r, k_2^r \dots$  reelle Vertreter)

Hilfsgerade :  $g=z$ .

$k_1, k_2$  induzieren auf  $z$

Zwei ellipt., Involutionen

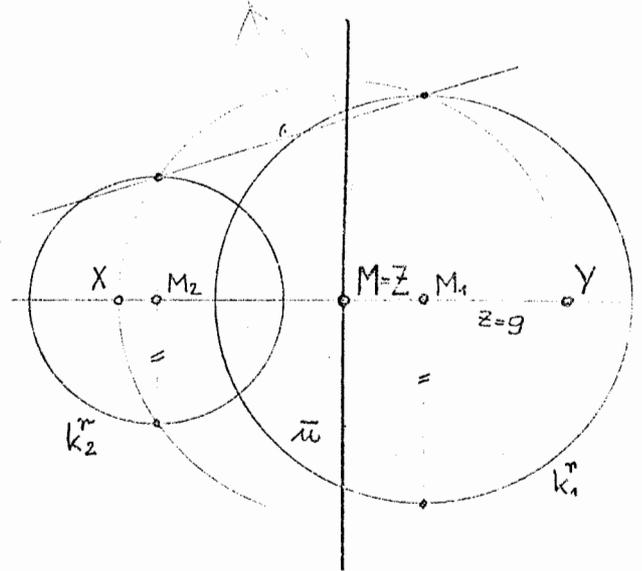
$\Rightarrow \exists^*$  ein gemeinsames Paar

$(X, Y)$  in beiden Involutionen.

(Konstruktion mittels Hilfskreis  $k$  mit Mittelpkt  $M$  auf  $z$ , der  $k_j^r$  nach Gegenpunkten

schneidet).  $\Rightarrow Z$  halbiert  $\overline{XY} \Rightarrow Z=M \dots$  Zentralpunkt

der DES.-Inv. auf  $z$ .



Beispiel zum verallgemeinerten Problem von APOLLONIUS.

Geg.: Zykel  $s_1^z (M_1^z, r_1 = -5e)$ ,  $s_2^z (M_2^z, r_2 = 2e)$ ,  
nullteiliger Kreis  $s_3^r (M_3^r, r_3^r = +3e)$

Ges.: Zykel, die  $s_1^z, s_2^z, s_3^r$  unter Winkeln  $\varphi_j$  mit  $\cos \varphi_1 = -\frac{4}{5}$ ,  
 $\cos \varphi_2 = -\frac{3}{2}$ ,  $\cos \varphi_3 = \frac{i}{2}$  schneiden.

Schritt 1: Festlegung der Orientierungen ( $s_j^z \rightarrow \overline{s_j^z}$ ) so, daß  $\cos \overline{\varphi_j} \geq 0$ .

a)  $s_1^z \rightarrow \overline{s_1^z}$  mit  $\overline{r_1} = +5e$ ,  $\cos \overline{\varphi_1} = +\frac{4}{5}$ .  $\Rightarrow \overline{m_1^z}$  mit  $\overline{z_{M_1}} = \overline{r_1} \cos \overline{\varphi_1}$   
 $\Rightarrow \overline{z_{M_1}} = +4e$ ; ( $\overline{s_1^z}, \overline{m_1^z}$  gleich orientiert).  
 $\overline{z_{M_1}} < \overline{r_1} \Rightarrow \Phi_1 \dots$  einschalige c-Kugel.

b)  $s_2^z \rightarrow \overline{s_2^z}$  mit  $\overline{r_2} = -2e$ ,  $\cos \overline{\varphi_2} = +\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \Phi_2 \dots$  zweischalige  
c-Kugel, die  $\pi_e^z$  in  $\overline{s_2^z}$  (also reell) schneidet.  
 $\overline{m_2^z}$  mit  $\overline{z_{M_2}} = (-2e) \cdot \frac{3}{2} = -3e$ .

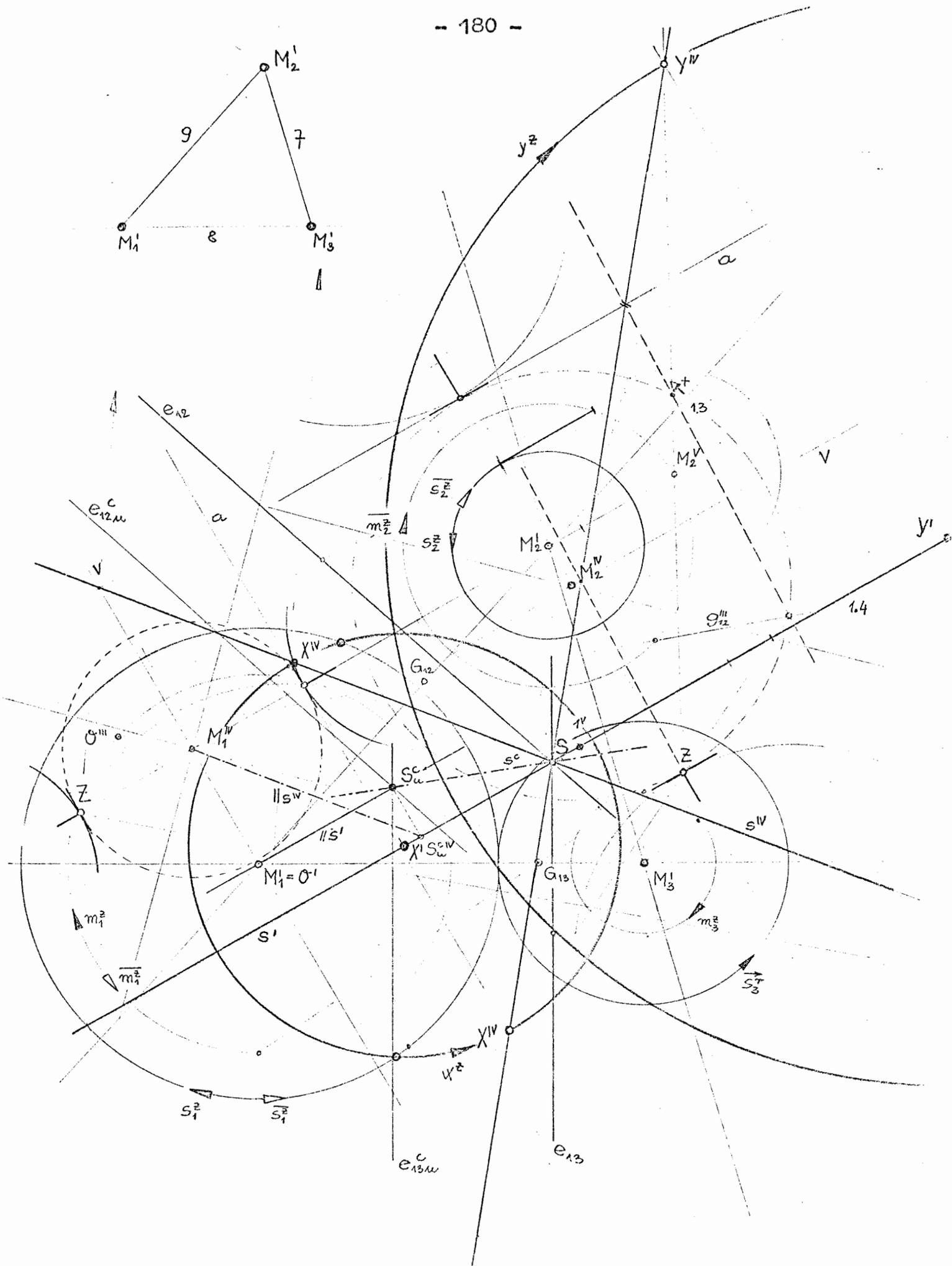
c)  $s_3^r \rightarrow \overline{s_3^r}$  mit  $r_3^r = +3e$  ( $\cos \varphi_3 = +\frac{i}{2}$ )  $\Rightarrow r_3 = i \cdot r_3^r$ ,  $\text{sgn. } r_3^r = +1$   
 $\Rightarrow s_3^r$  ist positiv zu orientieren (Festsetzung).

Mittels  $z_M = r \cos \varphi$  folgt für  $\overline{s_3^r}$ :

$$z_{M_3} = i \cdot 3e \cdot \frac{i}{2} = -\frac{3}{2}e, \text{ also } \text{sgn. } z_{M_3} = -1$$

( $\overline{s_3^r}$  und  $\overline{m_3^z}$  sind entgegengesetzt orientiert).  $\Rightarrow$

$\Phi_3 \dots$  zweischalige c-Kugel, die  $\pi_e^z$  nicht reell schneidet.



Schritt 2,3: Schnitt von je zwei  $c$ -Kugeln (Drehhyperboloid) siehe Konstruktionsbeschreibung auf Seite 176.

Spuren  $e_i$ ; der Trägerebenen  $\varepsilon_i$ ; von  $k_i \subset (\Phi_i \cap \Phi_j)$  gemäß Zwischenbemerkung.

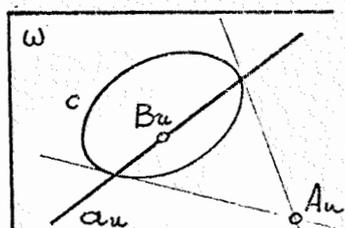
4.4  $c$ -Geometrie (vgl. 0.7)

Geg.:  $\Pi_\alpha(\mathbb{R}) \subset \Pi(\mathbb{R})$ ,  $\omega$  ... Fernebene;

in  $\omega$  sei eine Polarität als "absolute Polarität"  $\pi_\omega$  ausgezeichnet.

Ist  $\pi_\omega$  elliptisch  $\implies \{\Pi_\alpha(\mathbb{R}), \pi_\omega\}$  ist ein euklid. Raum  $\Pi_e$ .

Ist  $\pi_\omega$  hyperbolisch  $\implies \pi_\omega$  ist Polarsystem eines (reellen) Kegelschnittes  $c$ ;  $\pi_\omega =: \pi_c$ .



Umgekehrt ist durch einen gegebenen Kegelschnitt  $c \subset \omega$  eine abs. Polarität  $\pi_c$  festgelegt und  $\pi_c$  definiert die " $c$ -Orthogonalität" im  $\{\Pi_\alpha(\mathbb{R}), \pi_c\}$ .

$$\left. \begin{array}{l} a \perp^c b \iff A_u \text{ c-kj. } B_u \\ a \perp^c \alpha \iff A_u = a_u \cdot \pi_c \\ \alpha \perp^c \beta \iff a_u \text{ c-kj. } b_u \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dabei sind } a, b, \alpha, \beta \in \Pi_\alpha \text{ und } A_u, \\ B_u, a_u, b_u \text{ die zugehörigen Fern-} \\ \text{elemente in } \omega. \end{array} \right.$$

$\{\Pi_\alpha(\mathbb{R}); \pi_c\} =: \Pi_{pe}$  ... "pseudo-euklidischer Raum".

Die zugehörige Geometrie heißt "pseudo-euklidische Geometrie" ("MINKOWSKI-Geometrie").

Bemerkung 1: " $c$ -isotrope Geraden".

Def.: Eine Gerade  $g \in \Pi_{pe}$  heißt  $c$ -isotrop  $\iff g$  ist zu sich selbst  $c$ -normal  $\iff$  Fernpunkt von  $g$  ist selbstkonjugiert.

$\implies \{g \in \Pi_{pe} \mid g \text{ c-isotrop}\} = \{\text{eigentliche Geraden, die } c \text{ treffen}\}$   
das ist aber genau die Menge der  $c$ -Geraden.

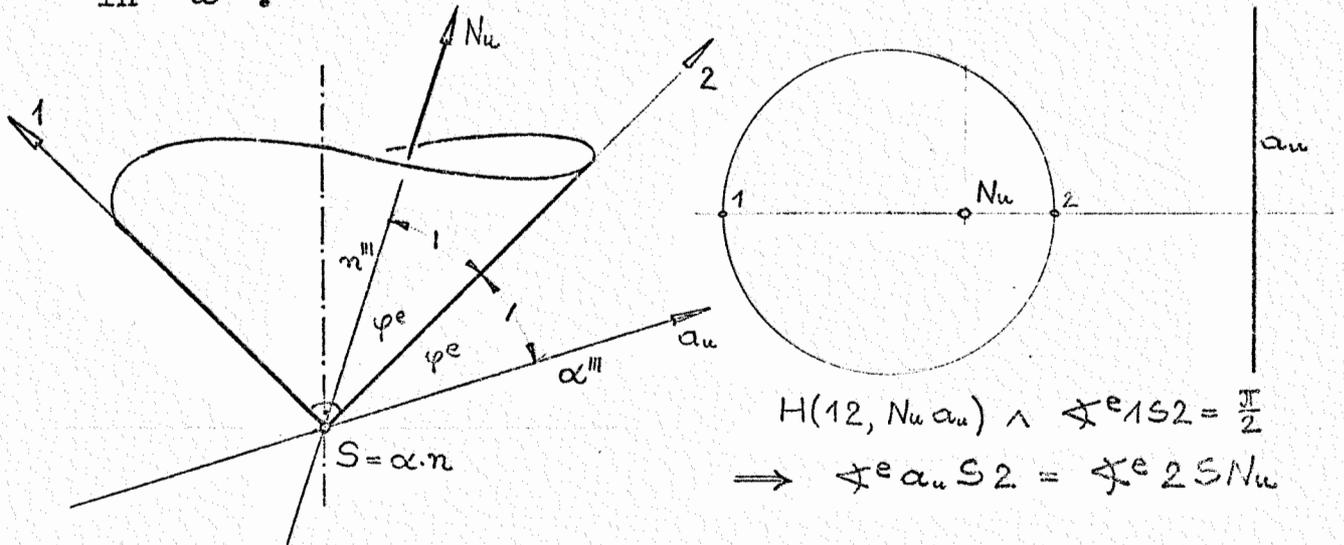
" $c$ -isotrope Ebenen"

Def.: Eine Ebene heißt  $c$ -isotrop  $\iff$  wenn sie eine zu ihr normale Gerade enthält.

$\implies \{\varepsilon \in \Pi_{pe} \mid \varepsilon \dots c\text{-isotrop}\} = \{c\text{-Ebenen}\} (= \{\text{Tangentialebenen von } c \neq \omega\})$ .

Bemerkung 2: Konstruktion eines speziellen Modells für  $\Pi_{pe}$

Wir gehen vom proj. abgeschl. Anschauungsraum aus, d.h.  $\Pi_a(\mathbb{R})$  sei der P.A.R. (also ein spezieller  $\Pi_e(\mathbb{R})$ );  $\pi_c$  sei die zum Fernkreis  $c$  zur Böschung 1 (im  $\Pi_e$ !) gehörige Polarität in  $\omega$ .



Beh.: In diesem Modell des  $\Pi_{pe}$  hat das  $c$ -Normalstehen von Ebene  $\alpha$  und Gerade  $n$  auch eine euklidische Bedeutung; und zwar gilt: In einem geeigneten Seitenriß  $\pi_3$  halbieren die (zueinander normalen) Umrißerzeugenden des  $c$ -Kegels mit der Spitze  $S = \alpha.n$  die euklidischen Winkel zwischen  $n'''$  und  $\alpha'''$ . (Beweis siehe Figur).

Folg.1: "c-Ähnlichkeiten"

Geg.: Affinität  $\alpha_a: \Pi_a \rightarrow \Pi_a$ , d.h.  $\exists \alpha: \Pi \rightarrow \Pi \wedge \alpha_a = \alpha|_{\Pi_a}$   
 Ähnlichkeit in  $\Pi_e$ : Die Einschränkung der zu  $\alpha_a$  gehörigen Kollineation  $\alpha$  auf  $\omega$  kommutiert mit der abs. Polarität  $\pi_\omega$  ( $\alpha|_\omega \cdot \pi_\omega = \pi_\omega \cdot \alpha|_\omega$ ).

Diese Definition wird auch zur Definition der  $c$ -Ähnlichkeit benutzt:

$c$ -Ähnlichkeit: = Affinität  $\alpha_a$  mit  $\exists \alpha \wedge \alpha_a = \alpha|_{\Pi_a}$   
 und  $\alpha|_\omega \cdot \pi_c = \pi_c \cdot \alpha|_\omega$ .

- $\Rightarrow$  Bei  $c$ -Ähnlichkeit bleibt kj. Lage bezügl.  $c$  erhalten.
- $\Leftrightarrow c$  bleibt als Ganzes fest.

$\pi_c$  ist festgelegt durch ein Poldreieck und ein Paar Pol - Polare.  
 $\Rightarrow c$ -Ähnlichkeit führt diese Angabestücke in wieder solche über.

Also gilt: Eine Affinität ist genau dann eine c-Ähnlichkeit, wenn sie ein Dreikant von c-normalen Geraden und ein Paar (Ebene, c-Normale) in wieder solche Elemente überführt.

Def.: "c-Kugel" (vgl. 0.7, Folg.3)

c-Kugel ist Mittelpunktsquadratik  $\Phi$ , für die gilt:

Die Spurpolarität in  $\omega$  bezüglich  $\Phi$  ist identisch mit der abs. Polarität.  $\Rightarrow \Phi$  ist genau dann c-Kugel, wenn  $\Phi \cap \omega = c$ .

( $\Rightarrow$  Diese c-Kugeln stimmen also mit den in 4.3 eingeführten c-Kugeln überein).

Analog zu 0.7 gilt damit auch hier:

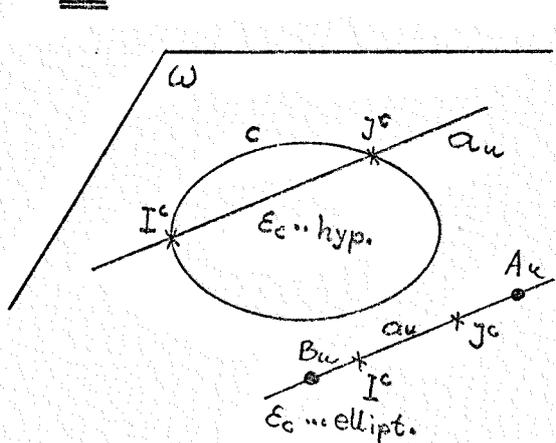
Eine c-Ähnlichkeit ist eine Affinität, die eine einzige c-Kugel in eine c-Kugel überführt.

Die Menge der c-Ähnlichkeiten bildet hinsichtlich der Verknüpfung eine Gruppe (Bezeichnung:  $AGO(\mathbb{P}_{pe})$  bzw.  $AGO(R,3;c)$ ). Die Invariantentheorie dieser Gruppe ist die "c-Geometrie".

Folg.2: "c-Winkel"

Vs.  $\alpha \neq \omega$ ,  $\alpha$  nicht c-isotrop ( $\Rightarrow a_\omega = \alpha \cdot \omega$  berührt nicht c)  
 $\Rightarrow \pi_c$  induziert auf  $a_\omega$  eine nicht ausgeartete Involution  $\varepsilon_c$   
 kj. Punkte, wobei wir wegen  $\pi_c \dots$  hyperbolisch zwei Realitätstypen unterscheiden müssen.

a)  $\varepsilon_c$  ist eine elliptische Involution



$\Rightarrow \{\alpha, \varepsilon_c\}$  ist eine euklidische Ebene  
 denn:  $\alpha$  ist reell  $\Rightarrow \exists$  Ferngerade  
 $\wedge \varepsilon_c$  ellipt. nach Vs.

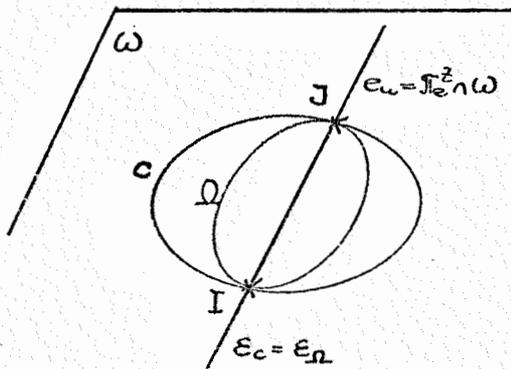
Im speziellen Modell des  $\mathbb{P}_{pe}$  ist  $\alpha$  eine flachgängige Ebene (d.h.  $\angle^e \pi_c^2 \alpha < \frac{\pi}{4}$ )

In  $\alpha$  wird mittels der LAGUERRE-Formel eine Winkelmetrik definiert:

$$\angle^c ab = \frac{1}{2i} \log DV(A_\alpha B_\alpha I^c J^c)$$

Bemerkung: Diese c-Winkelmetrik ist unabhängig von der im speziellen Modell vom P.A.R. stammenden euklidischen e-Winkelmetrik! In diesem Modell gilt jedoch für alle zu  $\pi_c^2$  parallelen Ebenen (und nur für diese), daß die c-Winkelmetrik

mit der gewöhnlichen (euklid.) Winkelmetrik zusammenfällt.



Nach Bem. 2 ist nämlich  $c$  der Fernkreis zur Böschung  $1$  im P.A.R. =  $\Pi_e$  also berührt  $c$  das Absolutgebilde  $\Omega$  von  $\Pi_e$  doppelt.  $\Rightarrow$  Die Verbindungsgerade  $e_u$  der Berührungspunkte  $I$  und  $J$  von  $c$  und  $\Omega$  ist reell; auf  $e_u$  stimmen die durch  $\pi_c$  und  $\pi_\omega$  induzierten absoluten Involutionen  $\epsilon_c$  und  $\epsilon_\Omega$  überein ( $\epsilon_c, \epsilon_\omega$  haben gleiche Fixpunkte über  $\mathbb{C}$ ).  $e_u$  ist Ferngerade der Stellung  $\pi_c^z$  und  $\pi_\omega^z$  ist eine P.A.E.  $\Rightarrow$  Die durch  $\epsilon_c = \epsilon_\Omega$  definierte abstrakte euklid. Metrik ist die gewöhnliche.

b)  $\epsilon_c$  ist hyperbolisch ( $\Leftrightarrow$  Im speziellen Modell ist  $\alpha$  eine steilgängige Ebene).

Die Formel von LAGUERRE erfordert im Fall a) den algebraischen Abschluß von  $\Pi_{pe}(\mathbb{R})$ , also  $\Pi_{pe}(\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$ . In diesem Raum ist a) und b) nicht unterscheidbar, also ist es sinnvoll, diese Formel als Winkeldefinition zu benutzen, wenn  $\epsilon_c$  (bei Beschränkung auf  $\mathbb{R}$ ) hyperbolisch ist;

$$\text{d.h.} \quad \sphericalangle^c ab = \frac{1}{2i} \lg DV(A_u B_u I^c J^c) \quad \text{mit } I^c, J^c \text{ reell.}$$

Beh.: Die reellen  $c$ -normalen Geraden (in  $\alpha$  mit  $\epsilon_c$  hyp.) sind die einzigen reellen Geraden mit reellem  $c$ -Winkel  $\neq 0$ .

Beweis: Wir setzen das sicher reelle  $DV(A_u B_u I^c J^c)$  als komplexe Zahl  $z$  an. ( $z \in \mathbb{C}$ )

Soll  $\sphericalangle^c ab \in \mathbb{R}$  gelten, dann muß  $\lg z$  reinimaginär sein.

Wir beschränken uns auf den Hauptwert von  $\arg z$  :

$$\Rightarrow \lg z = \underbrace{\lg |z|}_{\text{reell}} + i \arg z$$

$$\Rightarrow \text{Mit } \lg z \text{ reinimaginär} \Rightarrow \lg |z| = 0 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow z = \pm e^{i\varphi}$$

$$\text{Da } DV(\dots) = z \text{ reell ist,} \Rightarrow e^{i\varphi} \text{ reell} \Leftrightarrow \varphi = 0 \Rightarrow z = \pm 1$$

$$\text{Fall 1: } z = -1 \Rightarrow A_u \text{ c-kj. } B_u \Rightarrow a \perp^c b \Rightarrow \sphericalangle^c ab = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

$$\text{Fall 2: } z = +1 \Rightarrow \text{die vier Punkte}$$

$A_u, B_u, I^c, J^c$  sind nicht alle paarweise  $\neq$ .

Laut Vs.  $I^c \neq J^c \implies I^c \neq A_u = B_u \neq J^c$ , also

$a \parallel b$  nicht  $c$ -isotrop  $\implies \sphericalangle^c ab = 0$

Bemerkung: Für  $z=0$  ist  $A_u = I^c$  und daher ein Schenkel des Winkels  $c$ -isotrop.

In diesem Fall ist der  $c$ -Winkel gemäß obiger Formel nicht definiert.

c)  $\varepsilon_c$  ist ausgeartet ( $\iff \alpha$  ist  $c$ -isotrop)

In diesem Fall ist die LAGUERRE-Formel zur Definition einer Winkelmetrik unbrauchbar. Die Winkelmetrik einer  $c$ -isotropen Ebene heißt "ebene isotrope Winkelmetrik" und stützt sich auf ein Fernlinienelement als Absolutgebilde (=Linienelement von  $c$ ).

Zusammenfassung:

In jeder nicht- $c$ -Ebene wird durch die  $c$ -Geometrie eine Winkelmetrik induziert. Im speziellen Modell des  $\mathbb{P}_c$  ist diese Winkelmetrik bei flachgängigen Ebenen im wesentlichen euklidisch, bei steilgängigen Ebenen pseudoeuklidisch.

Folg.3: Analytische Darstellung der  $c$ -Ähnlichkeiten.

Analog zu 0.7 ist nur in speziellen (affinen) Koordinatensystemen eine spezielle Bauart der Transformationsmatrix zu erwarten.

$c$ -Ähnlichkeit ist Affinität  $\alpha_a$  und besitzt als solche in einem affinen Koordinatensystem ( $\omega \dots x_0 = 0$ ) die Darstellung

$$\alpha_a \dots x_j = a_j + \sum_{k=1}^3 a_{jk} x_k \quad (j=1,2,3) \wedge \det(a_{jk}) \neq 0,$$

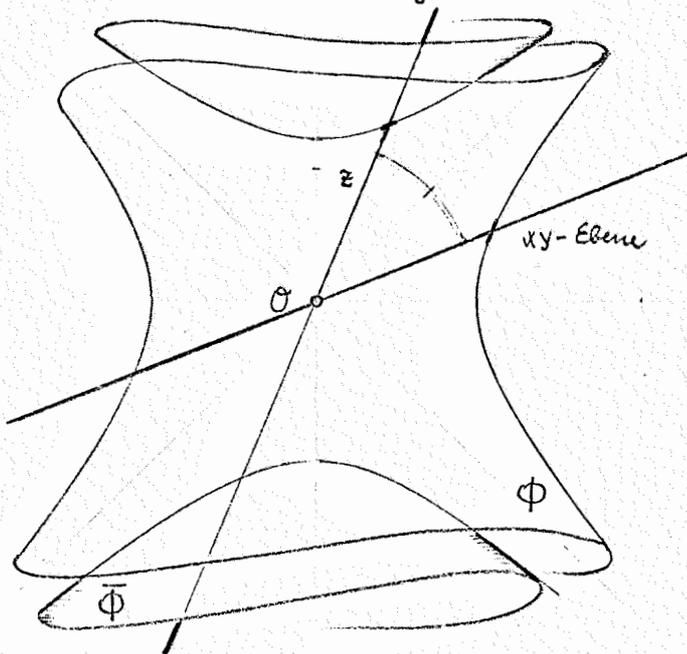
Das Vorzeichen von  $\det(a_{jk})$  hat dabei geometrische Bedeutung ( $\mathbb{P}_a$  ist orientiert):

$$\det(a_{jk}) > 0 \iff \alpha_a \text{ ist gleichsinnig}$$

$$\det(a_{jk}) < 0 \iff \alpha_a \text{ ist gegensinnig.}$$

In 0.7 werden die Ähnlichkeiten von  $\mathbb{T}_c$  in speziellen Normalkoordinatensystemen (kartesischen K.S.) beschrieben. Dazu ist ein Würfelbegriff oder Kugelbegriff erforderlich (Einheitskugel um Ursprung trägt die Einheitspkte. der Achsen).

Jetzt: c-Ähnlichkeiten beschrieben in speziellen c-Normalkoordinatensystemen (Achsen sind c-normal), den "c-kartesischen Koordinatensystemen":



Dazu: Erklärung der Einheitspunkte der paarweise c-normalen Achsen als Schnittpunkte der Achsen mit einem Paar  $kj$ . c-Kugeln mit der Mitte im Koordinatenursprung.

Damit soll gelten:

Ein affines K.S. heißt "c-kartes.

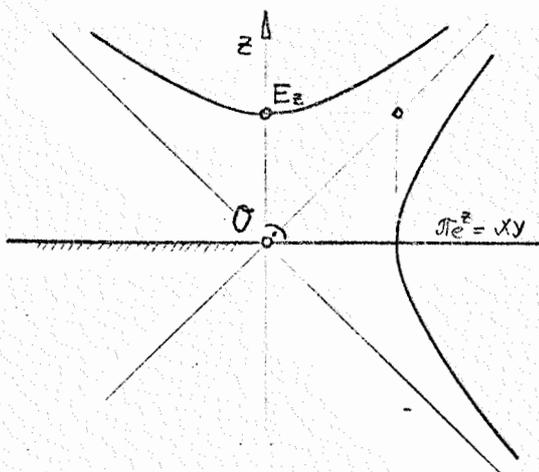
$\iff$  wenn es ein c-Normalkoordinatensystem mit den Einheitspunkten auf einem Paar  $kj$ .

c-Kugeln um den Ursprung ist.

Anmerkung: Die im euklid. Raum mögliche Definition eines kartes. K.S. mit Hilfe einer einzigen Kugel bzw. eines Würfels ist in der c-Geometrie nicht möglich, da von drei ( $\neq$ ) paarw. c-normalen Geraden stets eine steilgängig ist. In der c-Geometrie existiert also kein Würfel.

Speziell:  $\exists$  c-kartesisch K.S., die auch euklid. kartesisch sind, und zwar genau für solche mit zu  $\mathbb{T}_c^z \parallel$  x-y-Ebene.

Zur Beschreibung der c-Ähnlichkeiten benützen wir zunächst ein solches K.S. mit  $\mathbb{T}_c^z = xy$ -Ebene:



c wird dann in homogenen kartes. Koordinaten beschrieben durch

$$c \dots x_0 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

und soll bei einer Affinität

$$\alpha a \dots x_j^1 = a_j x_0 + \sum_{k=1}^3 a_{jk} x_k \quad (j=1,2,3)$$

in sich transformiert werden.

Es soll also gelten:  $x=0$  (  $a$  beliebig, "Schiebungsanteil", o.B.d.A.  $a=0$  ).

$$\rho (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \sum_{k=1}^3 a_{1k} a_{1l} x_k x_l + \sum_{k=1}^3 a_{2k} a_{2l} x_k x_l - \sum_{k=1}^3 a_{3k} a_{3l} x_k x_l = 0$$

$$\implies \left( \sum a_{1k} a_{1l} + \sum a_{2k} a_{2l} - \sum a_{3k} a_{3l} \right) x_k x_l = 0$$

Hieraus folgend durch Koeffizientenvergleich folgende Bedingungen für  $a_{lk}$  :

$$a_{1k} a_{1l} + a_{2k} a_{2l} - a_{3k} a_{3l} = 0 \quad \forall k \neq l$$

$$a_{1k}^2 + a_{2k}^2 - a_{3k}^2 = \rho \quad \text{für } k=1, 2$$

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2 = -\rho \quad (k=3)$$

Durch diese Bedingungen sind aber genau die zu c-orthogonalen 3 zeiligen Matrizen  $(\alpha_{jk})$  proportionalen Matrizen gekennzeichnet.

"c-orthogonal.Matrix"  $(\alpha_{jk}) \in \Lambda_3(\mathbb{R})$  :

$$(*) \begin{cases} \alpha_{1k} \alpha_{1l} + \alpha_{2k} \alpha_{2l} - \alpha_{3k} \alpha_{3l} = 0 \quad \forall k \neq l \\ \alpha_{1k}^2 + \alpha_{2k}^2 - \alpha_{3k}^2 = 1 \quad (k=1, 2) \\ \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 - \alpha_{33}^2 = -1 \quad (k=3) \end{cases}$$

$\implies a_{jk} = \sqrt{\rho} \cdot \alpha_{jk}$  ; da  $a_{jk} \in \mathbb{R} \implies \rho > 0$  (sonst ist  $\alpha_a$  keine reelle Transformation).

Es ist dabei keine Einschränkung, wenn man  $\sqrt{\rho} =: \lambda > 0$  festsetzt.  $(\overline{\alpha}_{jk})$  mit  $\overline{\alpha}_{jk} = -\alpha_{jk} \wedge (\alpha_{jk})$  c-orthog. ist gleichfalls c-orthogonal).

Somit gilt: Im speziellen (c-)kartes. Koordinatensystem wird jede c-Ähnlichkeit durch das  $\lambda$ -fache einer c-orthogonalen Matrix beschrieben ( $\lambda > 0$ ).

Bemerkung a): Obige Aussage ist auch für allgemeine c-kartesische K-Systeme gültig.

Dazu interpretieren wir den Koordinatenwechsel vom obigen speziellen zum allgemeinen c-kart. K.S. als eine c-Ähnlichkeit beschrieben durch Schiebung und Transformationsmatrix  $\mathbb{T}$  (prop. zu einer c-orth. Matrix  $\mathbb{T}_1$  ).

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\
 \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\
 \bar{X} & \xrightarrow{\gamma^{-1} \alpha \gamma} & \bar{X}'
 \end{array}$$

Da die c-Ähnlichkeiten eine Gruppe bilden, gehört  $\gamma^{-1} \alpha \gamma$  wieder zu einer c-Ähnlichkeit und ist daher proportional zu einer c-orthogonalen Matrix.

Bemerkung b): Die Menge der c-Ähnlichkeiten bilden hinsichtlich der Verknüpfung eine Gruppe:  $GO(\Pi_{pe})$  (vgl. Folg. 1). Diese ist siebengliedrig, denn: der Schiebanteil  $\alpha = (a_j)$  ist durch drei Parameter festgelegt, von den neun Koeffizienten  $\alpha_{jk}$  sind wegen der sechs Bedingungen (\*) genau drei unabhängig wählbar, vom "Streckfaktor"  $\lambda = \sqrt{\rho}$  stammt ein weiterer Freiheitsgrad; d.s. zusammen also sieben Parameter.

Bemerkung c): Wegen der Bedingungen (\*) für eine c-orthog. Matrix  $\alpha_1 = (\alpha_{jk})$  folgt für die Determinante von  $\alpha_1$ :

$$\det(\alpha_{jk}) = \pm 1 ;$$

denn:

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & -\alpha_{33} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right| = -1 \\
 \underbrace{-\det(\alpha_{jk})}_{-} \cdot \underbrace{\det(\alpha_{jk})}_{+} = -\det^2(\alpha_{jk})
 \end{array}$$

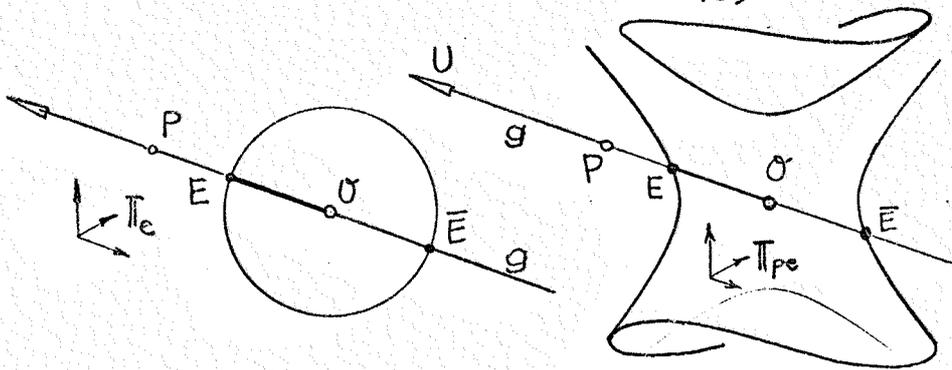
$$\Rightarrow \det^2(\alpha_{jk}) = +1$$

$\Rightarrow \det(\alpha_{jk}) > 0$  kennzeichnet die gleichsinn.c-Ähnl. ;  
 $\det(\alpha_{jk}) < 0$  kennzeichnet die gegensinn. c-Ähnl..

Folg. 4: c-kongruente Transformationen

Dazu: Längenmessung in  $\Pi_{pe} \dots d^c : \Pi_{pe} \times \Pi_{pe} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$   
 mit den Eigenschaften

- (I)  $d^c$  ist translationsinvariant (siehe O. 7, Folg. 4), d.h. Strecken  $\overline{AB}^c$  sind parallelverschiebbar, sodaß der Anfangspunkt A in einen festen Punkt O gelangt.
- (II)  $d^c$  ist für von O ausgehende Strecken  $\overline{OP}^c$  erklärt als Betrag des Teilverhältnisses  $TV(PEO)$ , wenn E ein



Schnittpunkt der Eich-c-Kugel  $\Phi$  um  $O$  mit der Trägergeraden  $g$  von  $\overline{OP}^c$  ist.

Zusatz: Für  $P=O \Rightarrow d^c = \overline{OO}^c = 0$ .

(Vgl. 0.7, Folg.4 :  $d(OP) = \overline{OP}^c = |DV(PEOU)| = |TV(PEO)|$ , mit  $E$ ...ein Schnittpunkt der Eichkugel um  $O$  mit  $g=OP$ ).

Jetzt gilt:  $d^c$  ist sicher nicht global ! Z.B. ist bei Auszeichnung einer einschaligen Eich-c-Kugel  $d^c$  bloß für Strecken auf flachgängigen Geraden  $g$  erklärt.

$g$  flachgängig  $\Rightarrow g \cap \Phi$  ist ein Punktepaar  $E, \bar{E}$  mit  $E \neq \bar{E}$ ;

Speziell:  $E=\bar{E} \Rightarrow g$  ist Tangente von  $\Phi$  durch  $O$ , also

Erzeugende des Asymptotenkegels von  $\Phi \Rightarrow g$  ist c-Gerade

( $E=\bar{E}=U \perp \omega \Rightarrow d^c(OP) = |TV(PEO)| = |DV(PEOU)| = |DV(FUOU)| = 0$ ),

$\Rightarrow$  Strecken auf c-Geraden haben die Länge 0.

$\Rightarrow \Pi_{pe}$  ist kein metrischer Raum !

Analytische Behandlung von  $d^c$ :

Wir benützen ein c-kart. K.S. mit Ursprung  $O$  in , welches auch euklid. kartes. ist.

In einem solchen K.S. stellt  $X^2+Y^2-Z^2-1=0$  eine einschalige c-Kugel  $\Phi$  mit der Mitte  $O$  und dem Kehlkreisradius 1 (euklid. gemessen !) dar, die z.B. im folgenden als Eich-c-Kugel benützt werden soll.

Sei  $P$  ein Punkt mit den Koordinaten  $(X,Y,Z)$ ; dann hat jeder Punkt der Geraden  $g=OP$  Koordinaten der Bauart  $(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z)$ .

Speziell für  $E = g \cap \Phi$  ergibt sich  $\lambda_E$  aus

$$\lambda_E^2 (X^2 + Y^2 - Z^2) - 1 = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda_E^2 = \frac{1}{X^2 + Y^2 - Z^2}$$

$$\Rightarrow \overline{OP}^c = |TV(PEO)| = |TV(1, \lambda_E, 0)| = \left| \frac{-1}{-\lambda_E} \right| = \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}$$

Nach Ausübung der Translation  $O \mapsto A$  ( $\Rightarrow P \mapsto B$ )

mit  $A \dots (X_A, Y_A, Z_A)$ ,  $B \dots (X_B, Y_B, Z_B)$  gilt dann

$$(*) \quad \underline{\overline{AB}^c = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 - (Z_B - Z_A)^2}} .$$

Ergebnis: Je nach Wahl der Eich-c-Kugel sind zwei  $\neq$  c-Längenmessungen bestimmt:

$\Phi$  einschalig  $\Rightarrow d^c$  nicht erklärt für steilgängige Geraden

$\Phi$  zweischalig  $\Rightarrow d^c$  nicht erklärt für flachgängige Geraden.

Wir wollen c-Längenmessung so festsetzen, daß sie für  $\pi_e^2$  (wie die c-Winkelmetrik) euklidisch ist.

Es gilt also die

1. FESTSETZUNG: Der euklid. Einheitskreis in  $\pi_e^2$  (vgl. O.4) ist Kehlkreis der Eich-c-Kugel.

Fordert man also das Übereinstimmen der Längenmessungen für  $\pi_e^2$  (und Ebenen  $\parallel \pi_e^2$ ), dann ist die Eich-c-Kugel einschalig und ihr Kehlkreisradius = 1.

Ein pseudoeuklid. Raum  $\mathbb{T}_{pe}$  erhält durch diese Festsetzung eine "pseudoeuklid. Metrik".

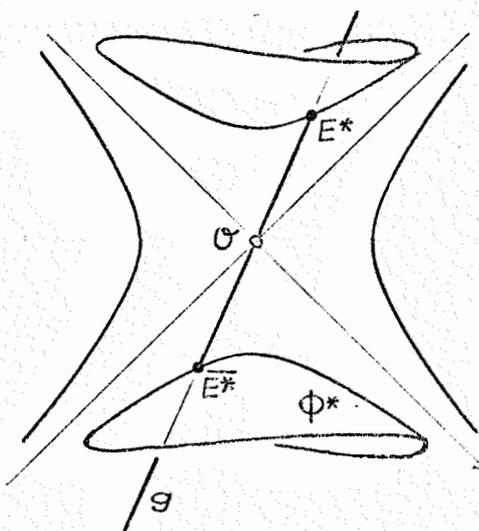
2. FESTSETZUNG: Die obige Abstandsformel (\*) gelte allgemein (auch für Punktepaare auf steilgängigen Geraden).  $\Rightarrow$

$$X^2 + Y^2 - Z^2 < 0 \Rightarrow \overline{OP}^c \text{ reinimaginär.}$$

(Dies ist im strengen Sinn keine Länge, da keine Abb. in  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  !)

Punktmengen konstanten c-Abstandes von einem festen Punkt:

Aus (\*) folgt: Die c-Kugeln sind genau diejenigen Punktmengen, die von einem festen Punkt konstanten c-Abstand haben. Der c-Radius der c-Kugel ist dabei stets der euklid. Radius des Kehlkreises (wegen 1. Festsetzung).  $r$  ist für zweischalige c-Kugeln reinimaginär.



Eine steilgängige Gerade  $g$  trifft die kj. zur Eich-c-Kugel in zwei  $\neq$  Punkten  $E^*, \bar{E}^*$ :  $\Rightarrow \overline{OP}^c := i |TV(PE^*O)|$  i.S. der einschaligen Eich-c-Kugel.

Folg.4: c-kongruente Transformationen

Das sind c-Ähnlichkeiten, die für ein Punktepaar die c-Länge erhalten, (vgl.O.7, Folg.4); d.h.

$$X'^2 + Y'^2 - Z'^2 = X^2 + Y^2 - Z^2 \quad .$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\varrho$  (siehe Folg.3) ist  $= 1$ .

$$\implies \lambda = \sqrt{\varrho} \implies \lambda = +1$$

Ergebnis: Eine Affinität ist genau dann eine  $c$ -Kongruenz, wenn sie in  $c$ -kartes. Koordinatensystemen die Darstellung

$$\mathbf{x}' = \mathbf{a}_j + \sum_{k=1}^3 \alpha_{jk} \mathbf{x}_k \quad (j=1,2,3) \text{ mit } (\alpha_{jk}) \text{ } c\text{-orthog. besitzt.}$$

Die Menge der  $c$ -Kongruenzen bildet eine Gruppe (hinsichtlich des Hintereinanderausführens als Verknüpfung), die Gruppe  $O(\mathbb{T}_{pe})$ .

Diese ist sechsgliedrig (wegen  $\lambda = 1$  fest verringern sich die 7 Freiheitsgrade von  $GO(\mathbb{T}_{pe})$  um einen Grad).

Die  $c$ -Kongruenzen mit  $\det(\alpha_{jk}) = +1$  bilden eine Untergruppe von  $O(\mathbb{T}_{pe})$ , die Gruppe der  $c$ -Bewegungen  $O^+(\mathbb{T}_{pe})$ .

Satz 26: Die  $c$ -Ähnlichkeiten bilden eine siebengliedrige Gruppe.

Die  $c$ -Kugeln sind die Drehhyperboloide durch  $c$ . Nach Auswahl einer einschaligen Eich- $c$ -Kugel ist eine Abstandsmessung bestimmt, in der die einschaligen bzw. zweischaligen  $c$ -Kugeln die Punktmengen festen reellen bzw. reinimaginären Abstandes von einem Punkt sind.

Die  $c$ -kongruenten Transformationen bilden eine sechsgliedrige Gruppe und werden in  $c$ -kartesischen Koordinatensystemen durch  $c$ -orthogonale Matrizen beschrieben.

#### 4.5      Die Gruppen $AGO(\mathbb{T}_{pe})$ , $GO(\mathbb{T}_{pe})$

(1) Die involutorischen  $c$ -Ähnlichkeiten  $\alpha$  sind  $c$ -Kongruenzen.

Bew.:  $\varphi' = \varpi + \lambda \mathcal{U} \varphi$ ;                       $\mathcal{U} \dots c\text{-orthogonal}$

$$\varphi'' = \varpi + \lambda \mathcal{U} \varphi' = \varpi + \lambda \mathcal{U} (\varpi + \lambda \mathcal{U} \varphi) = \varphi$$

$$\implies \varpi (1 + \lambda \mathcal{U}) = \varphi, \quad \lambda^2 \underbrace{|\mathcal{U}^2|}_{=1(c\text{-orth})} = 1 \implies \lambda^2 = 1$$

$\implies$  wegen Festsetzung  $\lambda > 0 : \implies \lambda = +1$

$\implies \alpha$  ist  $c$ -Kongruenz.

(2) Wir bestimmen alle involutorischen  $c$ -kongruenten Transformationen.

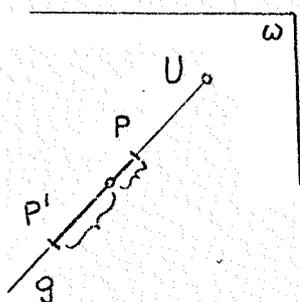
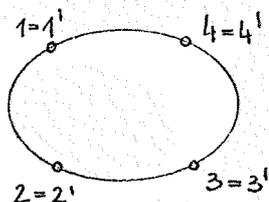
In  $\mathbb{T}(\mathbb{R})$  : Die involutorischen Kollineationen  $\alpha$  sind genau die harmon. Homologien und die harmonischen axialen Kollineation

In  $\mathbb{T}_{pe}$  : Zur involutorischen  $c$ -Kongruenz  $\alpha$  gehört eine sicher involut. Kollineation  $\alpha$  in  $\mathbb{T}_{pe} \cup \{\omega\}$ ; ( $\alpha$  läßt den absoluten Kegelschnitt  $c \cup \omega$  als Ganzes fest).  $\Rightarrow \alpha|_c$  ist eine Involution auf  $c$  ( $\alpha|_c$  ist sicher eine Projektivität von  $c$  auf sich).

$\Rightarrow \exists$  2 Haupttypen von inv.Koll.  $\alpha$  mit dieser Eigenschaft:

- I):  $\alpha|_c = \iota$  ... Identität
- II):  $\alpha|_c$  ... Involution  $\neq \iota$

Zu I): Wegen  $\alpha|_c = \iota$  gilt in ganz  $\omega$  :  $\alpha|_\omega = \iota$



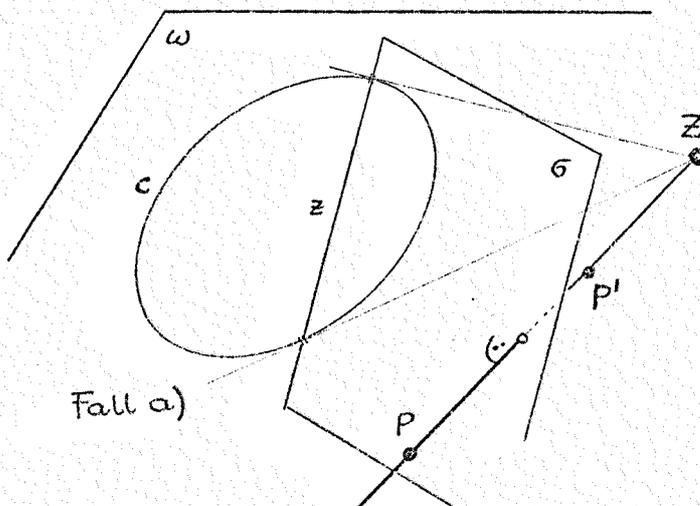
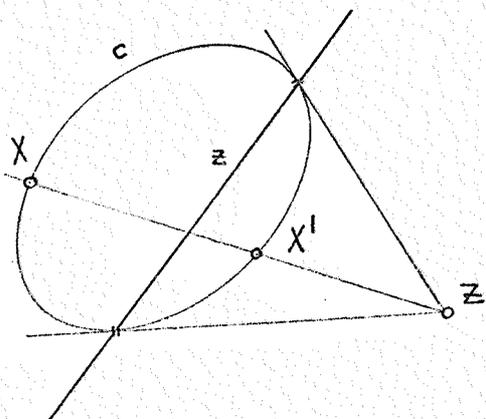
( $\alpha|_\omega$  ist durch ein Viereck von Fixpunkten aus  $c$  eindeutig festgelegt und daher die Identität in  $\omega$ ).

$\Rightarrow \alpha$  ist also eine perspektive Kollineation.  $\alpha$  ist harmonische Homologie (sicher keine Elation).  $\Rightarrow \exists Z \notin \omega$  .. eigentlicher Fixpunkt. ( $Z$  belieb.  $\in \mathbb{T}_{pe}$  wählbar).

Wegen  $H(P, P'; Z, U)$  und  $U$  ... Fernpunkt von  $g = ZP$  gilt: Die Strecken  $\overline{ZP}$  und  $\overline{ZP'}$  sind sowohl pseudoeuklidisch als auch euklidisch gleich.

$\Rightarrow \alpha|_{\mathbb{T}_{pe}}$  ist eine  $(c)$ -Punktspiegelung !

Zu II):  $\alpha|_c$  ... Involution  $\neq \iota \Rightarrow \alpha|_\omega$  ist eine ebene harmonische Homologie  $(Z, z)$  wobei Zentrum  $Z$  und Achse  $z$  ein Paar Pol und Polare bezüglich  $c$  sind.  $Z$  ... Involutionzentrum der Invol. auf  $c$ ,  $z$  ... Involutionssachse)

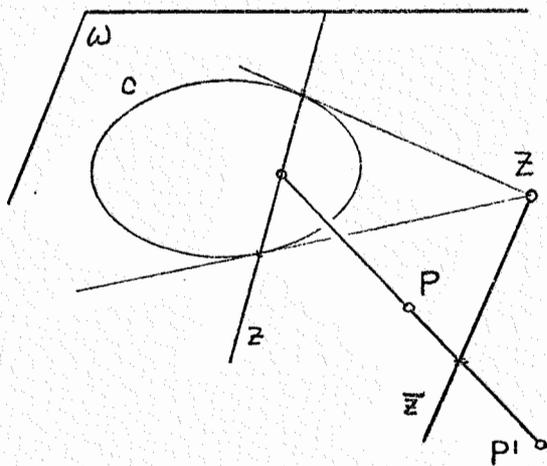


Diese Bedingungen für  $\alpha$  lassen nun sowohl harmonisch Homologien (Fall a) ) als auch harmonische axiale Kollin. (Fall b) ) als involutorische Kollineationen zu:

Fall a): Ist  $\alpha$  eine harm. Homologie, dann ist  $Z$  als Zentrum und eine Ebene  $\sigma$  der Stellung  $z$  als Achse von  $\alpha$  anzunehmen.

$\alpha|_{\Pi_{pe} = \alpha}$  mit  $H(P, P'; Z, \sigma)$  heißt "c-Spiegelung an einer (nicht c-isotropen) Ebene  $\sigma$ " in Analogie zur euklid. Spiegelung an einer Ebene in  $\Pi_e$ . Da nämlich  $Z$  der c-Pol der Ferngeraden  $z$  von  $\sigma$  ist, sind die Kollineationsstrahlen zu  $\sigma$  c-normal; wegen  $H(P, P', Z, \sigma)$  sind die (c)-Abstände  $\overline{\sigma P}^c$ ,  $\overline{\sigma P'}^c$  gleich.

Fall b): Ist  $\alpha$  eine harm. axiale Kollineation, dann ist notwendig  $z$  eine der Achsen ( $z$  besteht aus Fixpunkten), die andere Achse  $\bar{z}$  enthält  $Z$  und ist eigentlich (sonst beliebig!).



$\alpha$  harm.  $\Rightarrow H(P, P'; z, \bar{z})$  mit  $z$ ..Ferngerade, also ist  $\overline{P\bar{z}}^c = \overline{P'\bar{z}}^c$ ,  $\bar{z}$  ist c-normal zur Stellung  $z$ .  
 $\Rightarrow \alpha|_{\Pi_{pe} = \alpha}$  heißt "c-Umwendung" an  $\bar{z}$ .

Analytische Normalformen:

zu I):  $Z=0$  ( $x, y, z$  paarw. (c-)orthogonal)

$\Rightarrow x' = -x, y' = -y, z' = -z \dots \alpha$  gegensinnig.

zu a):  $\sigma \dots z=0$

$\Rightarrow x' = x, y' = y, z' = -z \dots \alpha$  gegensinnig.

zu b):  $\bar{z}$ ..z-Achse des Koord. Systems, Stellung  $z$  parallel  $z=0$  :

$\Rightarrow x' = -x, y' = -y, z' = z \dots \alpha$  gleichsinnig.

Bemerkung: Jede Punktspiegelung ist das Produkt von drei c-Spiegelung an nichtisotropen Ebenen, die durch das Zentrum der Spiegelung gehen und paarweise c-normal sind. Jede Umwendung ist das Produkt von zwei c-Spiegelungen deren (nicht isotrope) Ebenen durch die Achse der Umwendung gehen und c-normal sind.

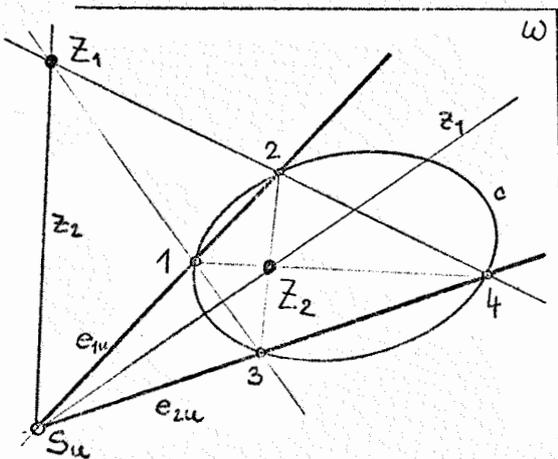
Beweis: Z.B. Punktspiegelung  $\alpha_\sigma \dots x'=-x \ y'=-y, \ z'=-z$ .

Wir benützen zur Erzeugung von  $\alpha_\sigma$  die c-Spiegelungen die den c-normalen Ebenen  $z=0, \ x=0, \ y=0$ , also gilt obige Aussage für die Normalform einer Punktspiegelung. Da alle Punktspiegelungen aus  $O(\mathbb{T}_{pe})$  äquivalent sind, gilt diese Aussage auch unabhängig vom Koordinatensystem. Analog dazu ist die Normalform der c-Umwendung erzeugbar aus den c-Spiegelungen an den c-normalen Ebenen  $x=0$  und  $y=0$ , also gilt obige koordinatenunabhängige Aussage.

- (3) Sind  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  ( $\neq \omega$ ) zwei paarweise  $\neq$  nicht parallele Ebenen und sind  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  flachgängig, dann  $\exists$  zwei ( $\neq$ ) c-Spiegelungen  $\alpha_{\sigma_j}$ , die  $\varepsilon_1$  in  $\varepsilon_2$  überführen ( $\sigma_j$ ...Spiegelebenen);  
sind  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  steilgängig und ihre Schnittgerade  $s = \varepsilon_1 \varepsilon_2$  nicht c-isotrop, dann  $\exists$  gleichfalls zwei ( $\neq$ ) solche c-Spiegelungen  $\alpha_{\sigma_j}: \varepsilon_1 \mapsto \varepsilon_2$ ; ist  $s$  hingegen c-isotrop, so  $\exists$  eine einzige c-Spiegelung  $\alpha_\sigma: \varepsilon_1 \mapsto \varepsilon_2$ .

Beweis: a)  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  steilgängig  $\wedge s = \varepsilon_1 \varepsilon_2$  nicht c-isotrop.

$\Rightarrow$  Ferngeraden  $e_{1u}, e_{2u}$  schneiden  $c$  reell  $\wedge s \cdot \omega = S_u \notin c$   
Schnittpunkte  $e_{ju} \cdot c$  sind paarweise  $\neq$  und bilden ein Viereck.



$S_u$  ist eine Diagonalecke dieses Viereckes;  $Z_1, Z_2$  seien die übrigen Diagonalecken,  $z_1 = S_u Z_2$  und  $z_2 = S_u Z_1$  sind dann zwei durch  $S_u$  gehende Seiten des Diagonaldreiecks. Es gilt also

$$H(e_{1u}, e_{2u}, z_1, z_2)$$

Eine c-Spiegelung  $\alpha_{\sigma_j}: \varepsilon_1 \mapsto \varepsilon_2$  muß nun notwendig die Schnittgerade  $s = \varepsilon_1 \varepsilon_2$  punktweise festlassen.  $\Rightarrow \sigma_j$

muß mit  $s$  inzidieren.  $\Rightarrow \alpha_{\sigma_j}$  ist eine (harm.) Homologie, die  $c$  als Ganzes festläßt, also müssen bei  $\alpha_{\sigma_j}$  die Schnittpunkte 1 und 2 von  $e_{1u}$  mit  $c$  in die Schnittpunkte 3 und 4 von  $e_{2u}$  mit  $c$  übergeführt werden.

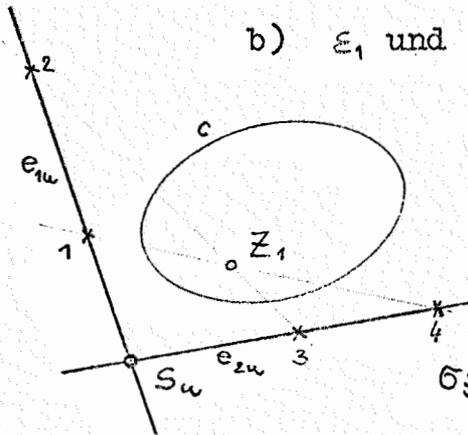
$\Rightarrow \exists$  genau 2  $\neq$  Möglichkeiten der Zuordnung  $\{1, 2\} \rightarrow \{3, 4\}$ .  $\Rightarrow \exists$  genau 2 Zentren  $Z_j$  (nämlich die von  $S_u$  verschiedenen Diagonalecken  $Z_1, Z_2$ ) für mögliche c-Spiegelungen  $\alpha_{\sigma_j}$ . Die zugehörigen Spiegelebenen sind durch  $s$  und die (durch  $S_u$  gehende) c-Polare  $z_j$  von  $Z_j$  (d.s. die oben beschriebenen Seiten des Diagonal-

dreiecks von  $\{1,2,3,4\}$  ) jeweils eindeutig festgelegt.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{\sigma_1} \text{ mit } Z_1, \quad \sigma_1 = s \cdot z_1 \quad (z_1 = S_u Z_2) \\ \alpha_{\sigma_2} \text{ mit } Z_2, \quad \sigma_2 = s \cdot z_2 \quad (z_2 = S_u Z_1) \end{array} \right\} \text{ sind die}$$

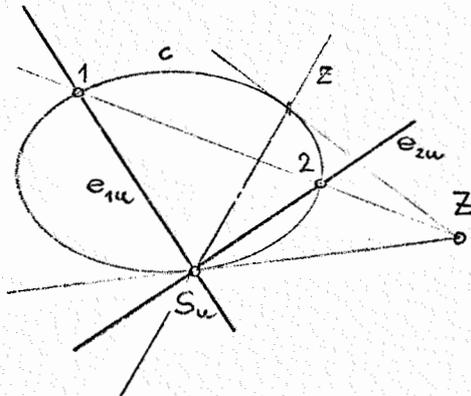
einzigsten c-Spiegelungen mit  $\alpha_{\sigma_j}: \varepsilon_1 \mapsto \varepsilon_2$

Bemerkung:  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  sind die c-Winkelsymmetrieebenen von  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  denn:  $\sigma_j \in \mathcal{L}_S$  und  $H(e_{1u}, e_{2u}, z_1, z_2) \wedge \sigma_1 \perp^c \sigma_2$ .



b)  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  flachgänglich  $\Rightarrow e_{1u} \cap c = \{1,2 \text{ über } \mathbb{C}\} \wedge 1,2$  sind kj. komplex;  $e_{2u} \cap c = \{3,4 \text{ über } \mathbb{C}\} \wedge 3,4$  kj. komplex.  $\Rightarrow \{1,2,3,4\}$  besitzt ein reelles Diagonaldreieck  $S_u Z_1 Z_2$ ,  $\Rightarrow$  Seiten des Diagonaldreiecks  $z_1 = S_u Z_2, z_2 = S_u Z_1$  sind reell.  $\Rightarrow \alpha_{\sigma_j}$  mit  $Z_j$  und  $\sigma_j$  wie in Fall a):  $\sigma_j$  sind c-Symmetrieebenen von  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ .

c)  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  steilgänglich,  $s = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$  c-isotrop:



$\Rightarrow$  Die Fernspuren  $e_{1u}, e_{2u}$  von  $\varepsilon_j$  treffen einander im Punkt  $S_u$  auf  $c$ .

Für eine c-Spiegelung  $\alpha_{\sigma}: \varepsilon_1 \mapsto \varepsilon_2$  muß wieder notwendig gelten:  $\sigma \perp s$ . Wir betrachten  $\alpha_{\sigma}|_{\omega}$ , (d.i. eine ebene harm. Homologie von  $c$ ).  $\alpha_{\sigma}|_{\omega}$  muß den von  $S_u$  verschiedenen Schnittpunkt 1 von  $e_{1u}$  mit  $c$  in den Schnittpunkt 2 von  $e_{2u}$  mit  $c$  ( $2 \neq S_u$ ) überführen; 12 ist also ein

"Kollineationsstrahl" von  $\alpha_{\sigma}|_{\omega}$ .

$S_u$  ist ein Fixpunkt in  $\alpha_{\sigma}|_{\omega}$ , sein "Kollineationsstrahl" daher genau die Tangente von  $c$  in  $S_u$ .

$\Rightarrow$  Das Zentrum  $Z$  von  $\alpha_{\sigma}|_{\omega}$  (und damit von  $\alpha_{\sigma}$ ) ist als Schnittpunkt dieser Kollineationsstrahlen eindeutig bestimmt.

$\Rightarrow$  Die Stellung  $z$  von  $\sigma$  ist die c-Polare von  $Z$  und damit eindeutig ( $z \perp S_u$ )  $\Rightarrow \sigma = z \cdot s$  eindeutig.

$\Rightarrow \alpha_{\sigma}$  mit  $Z, \sigma = s \cdot z$  ist die einzige c-Spiegelung mit

$\alpha_{\sigma}: \varepsilon_1 \mapsto \varepsilon_2$ .

Bemerkung: Die Ebenen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  und  $\sigma$  bilden zusammen mit der (einzigen) durch  $s = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$  legbaren c-isotropen Ebene ein harmonisches Quadrupel. Der Begriff "c-Symmetrieebene" ist hingegen im vorliegenden Fall nicht erklärt.

Folg.: Im speziellen Modell des  $\Pi_{pe}$  (vgl. 4.4) gibt es zu jedem Paar "gleichartiger" Ebenen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  eine (zwei) c-Spiegelung(en), durch welche das Punktfeld  $\mathcal{K}_{\varepsilon_1}$  perspektiv und c-kongruent auf das Punktfeld  $\mathcal{K}_{\varepsilon_2}$  abgebildet wird. Insbesondere läßt sich jede flachgängige Ebene  $\varepsilon$  durch c-Spiegelung c-kongruent auf die euklidische Ebene  $\mathcal{T}_e \subset \Pi_{pe}$  abbilden; jede steilgängige Ebene  $\varphi$  gestattet c-Spiegelung in eine zu  $\mathcal{T}_e$  normale Ebene.

Die innere Geometrie der nicht c-isotropen Ebenen zerfällt im wesentlichen in die Behandlung der euklidischen Ebene  $\mathcal{T}_e$  (als dem Repräsentanten einer flachgängigen Ebene) und der "pseudo-euklidischen" Ebene  $\varphi \perp \mathcal{T}_e$  (als dem Repräsentanten einer steilgängigen Ebene).

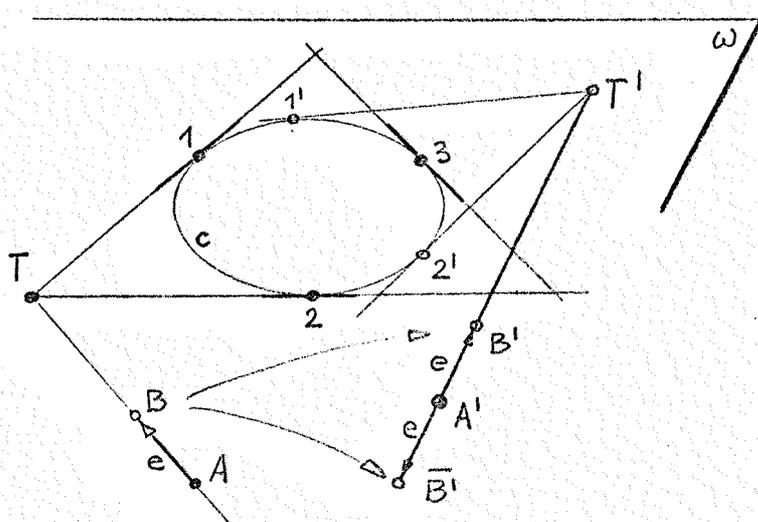
[  $\varphi$  "pseudoeuklidisch": die abs. Involution auf  $\varphi \cdot \omega$  ist hyperbolisch, die abs. Punkte von  $\varphi$  sind Fernpunkte (euklidisch-) orthogonaler Richtungen ].

Anmerkung: Anwendungen und konstruktive Behandlung der c-Spiegelungen an nicht c-isotropen Ebenen im speziellen Modell des  $\Pi_{pe}$  erfolgen in 4.6.

(4) Angabe einer c-kongruenten Transformation.

Beh.: Eine c-Kongruenz  $\alpha$  ist bis auf den Sinn festgelegt durch zwei zugeordnete beschriftete Dreiflache von c-isotropen Ebenen (c-Ebenen).

Beweis: Wir untersuchen  $\alpha|_{\omega}$  :



Die Fernspuren von Ur- und Bild-c-Dreiflache bilden je ein beschriftetes Tangentendreieck von  $c$ .  $\alpha|_{\omega}$  muß den Berührungspunkt jeder Tangente in den Berührungspunkt der Bildtangente überführen (anderenfalls bleibt  $c$  bei  $\alpha$  nicht als Ganzes fest).

Also gilt:  $1 \xrightarrow{\alpha} 1'$ ,  $2 \xrightarrow{\alpha} 2'$ ,  $3 \xrightarrow{\alpha} 3'$ , Tangenten  $\xrightarrow{\alpha}$   
Tangenten,  $\Rightarrow$  Ecken des Tangentendreiseits  $\xrightarrow{\alpha}$  Ecken des Bildes  
des Tangentendreiseits (z.B.  $T \xrightarrow{\alpha} T'$ , siehe Figur;  $T \notin c$ ).

$\Rightarrow$  Durch die Angabe ist in der Fernebene die Beschränkung einer  
c-Ähnlichkeit auf  $\omega$  eindeutig festgelegt.

In  $\Pi_{pe}$  :  $\alpha$  führt den Scheitel A und die Kanten des Ur-c-  
Dreiflachs (z.B. AT) in den Scheitel A' und die Kanten des Bild-  
c-Dreiflaches über ( $AT \xrightarrow{\alpha} A'T'$ ).

AT (und daher auch A'T') sind nicht c-isotrop,  $\alpha$  soll eine  
Kongruenz sein  $\Rightarrow$  eine Strecke  $\overline{AB}^c$  auf AT und ihre Bildstrecke  
A'B' sind notwendig gleich!  $\Rightarrow$  Die Bildstrecke läßt sich von  
A' aus auf A'T' nach zwei Richtungen abtragen ( $\Rightarrow$  Endpunkte B',  
B').  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Durch die Angabe sind zwei ( $\neq$ ) c-Kongruenzen bestimmt. Es gibt  
keine weiteren, denn die Punktequintupel  $\{A, B, 1, 2, 3\}$  und  
 $\{A', B', 1', 2', 3'\}$  (bzw.  $\{A', \overline{B'}, 1', 2', 3'\}$ ) bilden je eine  
Fundamentalfigur in  $\Pi_{pe} \cup \{\omega\}$ , wodurch also eine Kollineation  
 $\alpha$  (bzw.  $\overline{\alpha}$ ) eindeutig festgelegt ist.

$\alpha$  und  $\overline{\alpha}$  sind c-Kongruenzen, denn c bleibt als Ganzes fest  
und  $\overline{AB}^c = \overline{A'B'}^c$  bzw.  $\overline{AB}^c = \overline{A'B'}^c$ . Die beiden Lösungen gehen  
durch Punktspiegelung an A' auseinander hervor, sind also gegen-  
sinnig,  $\Rightarrow$  die Determinanten der Transformationsmatrizen haben  
 $\neq$  Vorzeichen (sind also +1 und -1).

$\Rightarrow$  Gibt man den Sinn vor, dann ist durch zugeordnete Dreifläche  
von c-Ebenen genau eine c-Kongruenz bestimmt.

(5) Jede c-kongruente Transformation ist Produkt von c-Spiegelungen  
an nicht c-isotrope Ebenen. (Vgl. (2), Bem.).

Beweis: Sei  $\alpha \in O(\Pi_{pe}) \Rightarrow \alpha|_c = \alpha_c \dots$  Projektivität  $c \rightarrow c$

Schritt 1:  $\alpha_c \neq \iota$

Wir beweisen zunächst folgenden

Hilfssatz: Jede Projektivität  $\alpha_c$  eines Kegelschnittes c  
auf sich ist Produkt von höchstens zwei Involution  $\alpha_i : c \rightarrow c$  ;

denn: Sei  $A \in c \wedge A \alpha_c =: A' \neq A$  (o.B.d.A; da  $\alpha_c \neq \iota$ )

$\Rightarrow A' = B \Rightarrow B \alpha_c = B' =: A'' \wedge$  sicher  $A'' \neq A'$

Falls  $A'' = A \Rightarrow \alpha_c$  ist eine Involution.

(Proj. Geom.: Hat eine Projektivität ein vertauschbares Elementenpaar, so ist sie eine Involution).

Falls  $A'' \neq A$ , so läßt sich eine Involution

$\alpha_c^{(1)}: c \rightarrow c$  durch  $A'' \xrightarrow{\alpha_c^{(1)}} A, A' \xrightarrow{\alpha_c^{(1)}} A'$  defini-

nieren.  $\Rightarrow$  Involutionszentrum  $Z_1$  ist Schnittpunkt

der Tangente von  $c$  in  $A'$  mit  $AA''$ .

Damit gilt:  $A(\alpha_c \cdot \alpha_c^{(1)}) = A' \wedge A'(\alpha_c \cdot \alpha_c^{(1)}) = A$

$(\alpha_c \cdot \alpha_c^{(1)})$  besitzt ein vertauschbares Punktepaar, ist also eine Involution, ( $(\alpha_c \cdot \alpha_c^{(1)}) =: \alpha_c^{(2)}$ .. Involut.);  $\Rightarrow \alpha_c = \alpha_c^{(2)} \cdot (\alpha_c^{(1)})^{-1}$ , also Produkt von zwei Involutionen gemäß der Beh. des Hilfssatzes.

$\Rightarrow$  Die Zusammensetzung  $\alpha_c \cdot \alpha_c^{(1)} \cdot \alpha_c^{(2)}$  ist die Identität  $\iota_c$  auf  $c$ . Da jede Involution auf  $c$  als Beschränkung einer  $c$ -Spiegelung an einer nicht  $c$ -Ebene auf  $c$  aufgefaßt werden kann,  $\exists$  insbesondere zu  $\alpha_c^{(i)}$   $c$ -Spiegelungen  $\alpha_{\sigma_i}$  an Ebenen  $\sigma_i$  mit  $\sigma_i \cap \omega = z_i$ ..  $c$ -Polare von  $Z_i$ . ( $\notin c$ ).

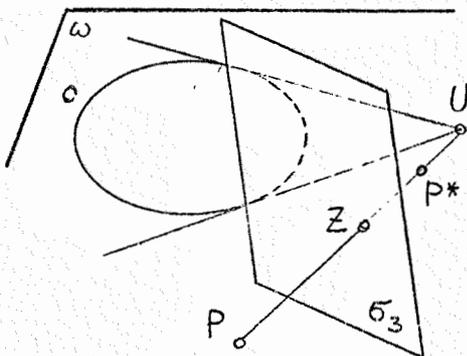
Setzt man nun  $\alpha$  mit den Spiegelungen  $\alpha_{\sigma_1}$  und  $\alpha_{\sigma_2}$  zusammen, so geht ein eigentlicher Punkt  $P$  in  $P \alpha \underbrace{\alpha_{\sigma_1} \alpha_{\sigma_2}}_{\alpha^*} = P^*$  über und  $c$  bleibt punktweise fest.

$\alpha^*|_c = \iota_c \Rightarrow \alpha^*|\omega = \iota_\omega \Rightarrow \alpha^*$  ist eine persp. Affinität mit der Achse  $\omega$ .

Wir untersuchen  $\alpha^*$  im

Schritt 2:  $\alpha^*: P \mapsto P^*$  und  $\alpha^* = \alpha \alpha_{\sigma_1}^{(1)} \alpha_{\sigma_2}^{(2)}, \alpha^*|\omega = \iota_\omega$

( $P \in \Pi_\alpha \Rightarrow P^* \in \Pi_\alpha$ )



Fall a): Sei  $PP^*$  nicht  $c$ -isotrop.

$\Rightarrow$  Dann  $\exists$  zu  $PP^*$  eine eindeutige  $c$ -normale Ebene  $\sigma_3$  durch den  $c$ -Mittelpunkt von  $\overline{PP^*}$ .

( $\sigma_3 \cdot \omega$  ..  $c$ -Polare von  $PP^* \cdot \omega = U \notin c$ )

Nach Ausübung der  $c$ -Spiegelung  $\alpha_{\sigma_3}^{(3)}$  an

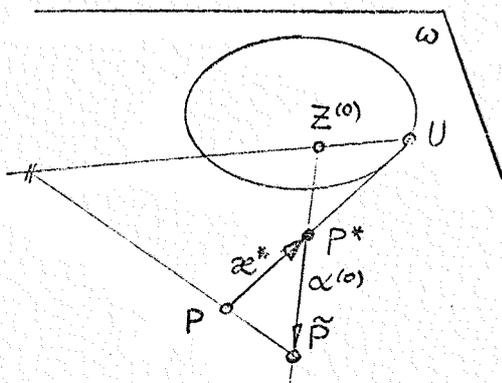
$\sigma_3$  (nicht  $c$ -isotrop) gilt:

$$P \alpha^* \alpha^{(3)} = P^* \alpha^{(3)} = P$$

$\Rightarrow \alpha^* \alpha^{(3)}$  hat einen eigentlichen Fixpunkt (nämlich  $P$ ) und ist somit eine Punktspiegelung an  $P$ , also nach (2), Bem. das Produkt von drei  $c$ -Spiegelungen  $\alpha^{(4)}, \alpha^{(5)}, \alpha^{(6)}$ .

[  $\mathfrak{a}^*$  ist als Produkt der c-Kongruenz  $\mathfrak{a}$  mit c-Spiegelungen (also c-Kongruenzen) aus  $O(\Pi_{pe})$ . ]

Fall b): Sei  $PP^*$  c-isotrop  $\forall P \in \Pi_{pe}$



Es ist nun durch Ausübung einer (belieb.) c-Spiegelung  $\alpha^{(0)}$  auf  $P^*$  (Spiegel-Ebene  $\sigma \perp P^*$ ) stets möglich, eine Angabe gemäß Fall a) zu erreichen:

$$P \xrightarrow{\mathfrak{a}^*} P^* \xrightarrow{\alpha^{(0)}} \tilde{P} \text{ mit } P\mathfrak{a}^*\alpha^{(0)} =: \tilde{\mathfrak{a}}$$

und  $P\tilde{\mathfrak{a}}$  nicht c-isotrop.

Nach Fall a)  $\exists$  dann ein  $\alpha^{(3)}$ , so daß  $\mathfrak{a}^*\alpha^{(0)}\alpha^{(3)}$  eine Punktspiegelung ist;

also ist  $\mathfrak{a}$  auch in diesem Fall Produkt von c-Spiegelungen.

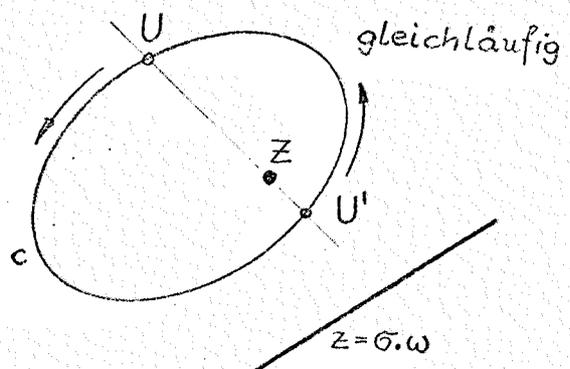
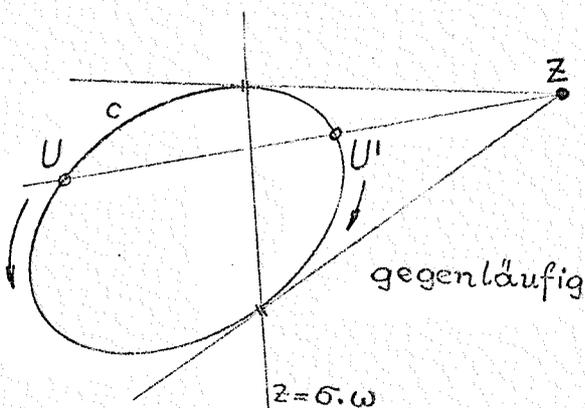
Satz 27: Jede involutorische c-Ähnlichkeit ist c-kongruent und eine c-Spiegelung an einem Punkt oder einer nicht c-isotropen Ebene oder eine Umwendung.

Je zwei gleichartige Ebenen können durch eine c-Spiegelung an einer nicht isotropen Ebene ineinander übergeführt werden.

Jede c-kongruente Transformation ist nach Angabe des Sinnes durch zwei zugeordnete Dreiflache von c-Ebenen festgelegt und Produkt von c-Spiegelungen an nicht c-isotropen Ebenen.

Bemerkung: Die Gruppe  $O(\Pi_{pe})$  gestattet nicht bloß die Zerlegung in die disjunkten Mengen der gleichsinnigen und gegensinnigen c-Kongruenzen, sondern auch die Einteilung in "gleichläufige" und "gegenläufige" c-Kongruenzen  $\mathfrak{a}$ , je nach dem, ob  $\mathfrak{a}$  den Laufsinn auf dem Absolutgebilde c erhält oder ändert.

Da jede c-kongruente Transf. nach Satz 27 aus c-Spiegelungen zusammensetzbar ist, genügt die Betrachtung gleich- bzw. gegenläufigen c-Spiegelungen  $\alpha$  (an nicht c-isotropen Ebenen):



⇒ Eine c-Spiegelung  $\alpha$  an einer flachgängigen (steilgängigen) Ebene  $\sigma$  bewirkt eine gleichläufige (gegenläufige) Selbstabbildung von  $c$ .

Ist eine allgemeine c-Kongruenz  $\alpha$  Produkt von  $n_1$  c-Spiegelungen an flachgängigen Ebenen und  $n_2$  c-Spiegelungen an steilgängigen Ebenen, so ist  $\alpha$  gleichläufig genau dann, wenn  $n_2 \equiv 0 \pmod{2}$  ist.

4.6 Zyklographisches Bild einer c-Spiegelung (vgl. 4.5 (3))  
("LAGUERRE-Spiegelung")

(I.f. wird das spezielle Modell des  $\Pi_{pe}$  zugrundegelegt)

Definition: Das zyklographische Bild einer c-Spiegelung (an einer nicht isotropen) Ebene  $\sigma$  heißt LAGUERRE-Spiegelung  $\lambda$ .

$$\lambda := \xi^{-1} \alpha_\sigma \cdot \xi \quad \wedge \quad \alpha_\sigma \dots c\text{-Spiegelung,} \quad \xi \dots \text{zykl. Abb.}$$

$$\lambda: \pi_e^z \longrightarrow \pi_e^z \quad (\text{Zykel} \xrightarrow{\lambda} \text{Zykel})$$

Beh.:  $\lambda: \pi_e^z \longrightarrow \pi_e^z$  ist eine involutorische Zykeltransformation;

denn:  $\lambda^2 = \xi^{-1} \alpha_\sigma \cdot \underbrace{\xi \cdot \xi^{-1}}_I \cdot \alpha_\sigma \cdot \xi = \xi^{-1} \cdot \underbrace{\alpha_\sigma \cdot \alpha_\sigma}_I \cdot \xi = \xi \cdot \xi^{-1} = I$

$I, \text{ da } \alpha_\sigma \text{ inv.}$

⇒  $\lambda$  ist damit automatisch bijektiv auf der Menge der Zykel in  $\pi_e^z$ .

Auf gleiche Weise leitet man aus Eigenschaften der c-Spiegelungen solche der L-Spiegelung ab. (Benützung der Zyklographie als Übertragungsprinzip).

Z.B.:  $\lambda$  führt parallele Speere in parallele Speere über.  
(// c-Ebenen  $\xrightarrow{\alpha_\sigma}$  // c-Ebenen).

$\lambda$  führt "konzyklische Speere" (d.s. Tangentenspeere eines Zykel) in konzyklische Speere über.

(kopunktale c-Ebenen  $\xrightarrow{\alpha_\sigma}$  kopunktale c-Ebenen).

$\lambda$  ist eine involutorische Speertransformation und daher bijektiv auf der Speermenge in  $\pi_e^z$ .

( $\alpha_\sigma$  ist involut. c-Ebenentransformation in  $\Pi_{pe}$ )

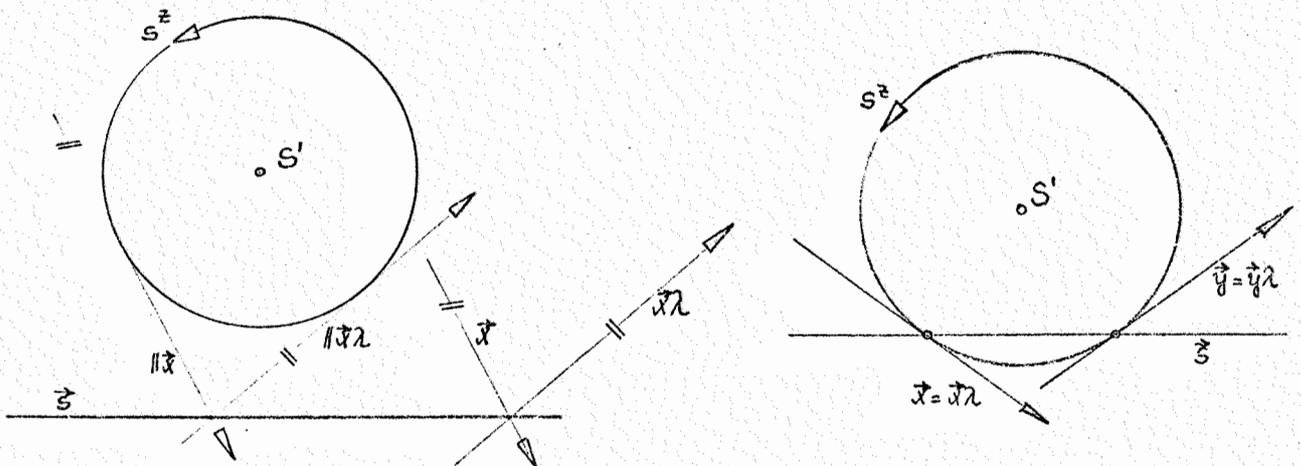
$\lambda$  besitzt ein nichtparabolisches Zykelbündel als Fixgebilde (d.i. das  $\xi$ -Bild der nicht c-isotropen c-Spiegelebene  $\sigma$ ).

$\Rightarrow$  Angabe einer L-Spiegelung  $\lambda$  :

$\lambda$  ist durch die Angabe eines nichtparabolischen Fix-Zykelbündels festgelegt; z.B. durch den Spurspeer  $\vec{s}$  von  $\sigma$  und den Bildzykel  $s^z$  eines Punktes S ( $S \overline{\perp} s$ ) von  $\sigma$ .

( $\alpha_\sigma$  ist durch  $\sigma$  festgelegt).

$\alpha_\sigma|_\omega$  ist eine harmon. Homologie, die c festläßt  $\Rightarrow$  Tangentenspeere eines Fixzykels von  $\lambda$  werden i.a. vertauscht. (Ist  $\sigma$  steilgängig, das Fixzykelbündel  $\xi(\sigma)$  also hyperbolisch, dann  $\exists$  genau zwei Fixspeere.)

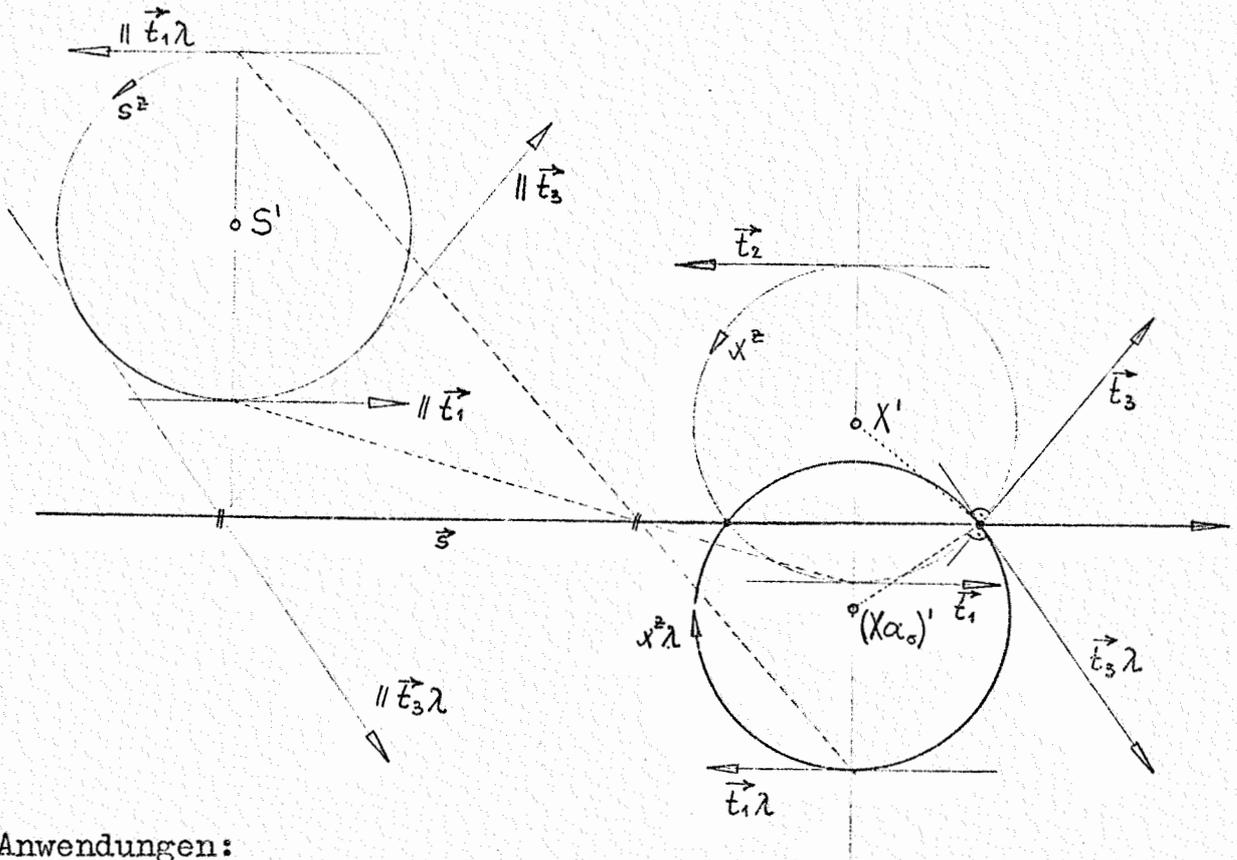


Mittels der Eigenschaften von  $\lambda$  als Speertransformation bzw. der zugehörigen c-Spiegelung  $\alpha_\sigma$  erfolgt die konstruktive Behandlung von  $\lambda$  als Zykeltransformation:

Z.B. Geg.  $\lambda (\vec{s}, s^z)$ , Zykel  $x^z$ ; ges.  $x^z \lambda$

Man unterwirft mit  $x^z$  konzyklische Speere der L-Spiegelung  $\lambda$  (etwa die zur Spur von  $\sigma$  parallelen Tangentenspeere von  $x^z$  oder - falls  $\exists$  - die Tangentenspeere von  $x$  in den Schnittpunkten  $x.s$ )

Da  $X.X\alpha_\sigma$  ( $X = x^z \xi^{-1}$ ,  $\alpha_\sigma = \xi \lambda \xi^{-1}$ ) c-normal zu  $\sigma$  ist, gilt für den Grundriß:  $X'.(X\alpha_\sigma)' \perp \vec{s}$

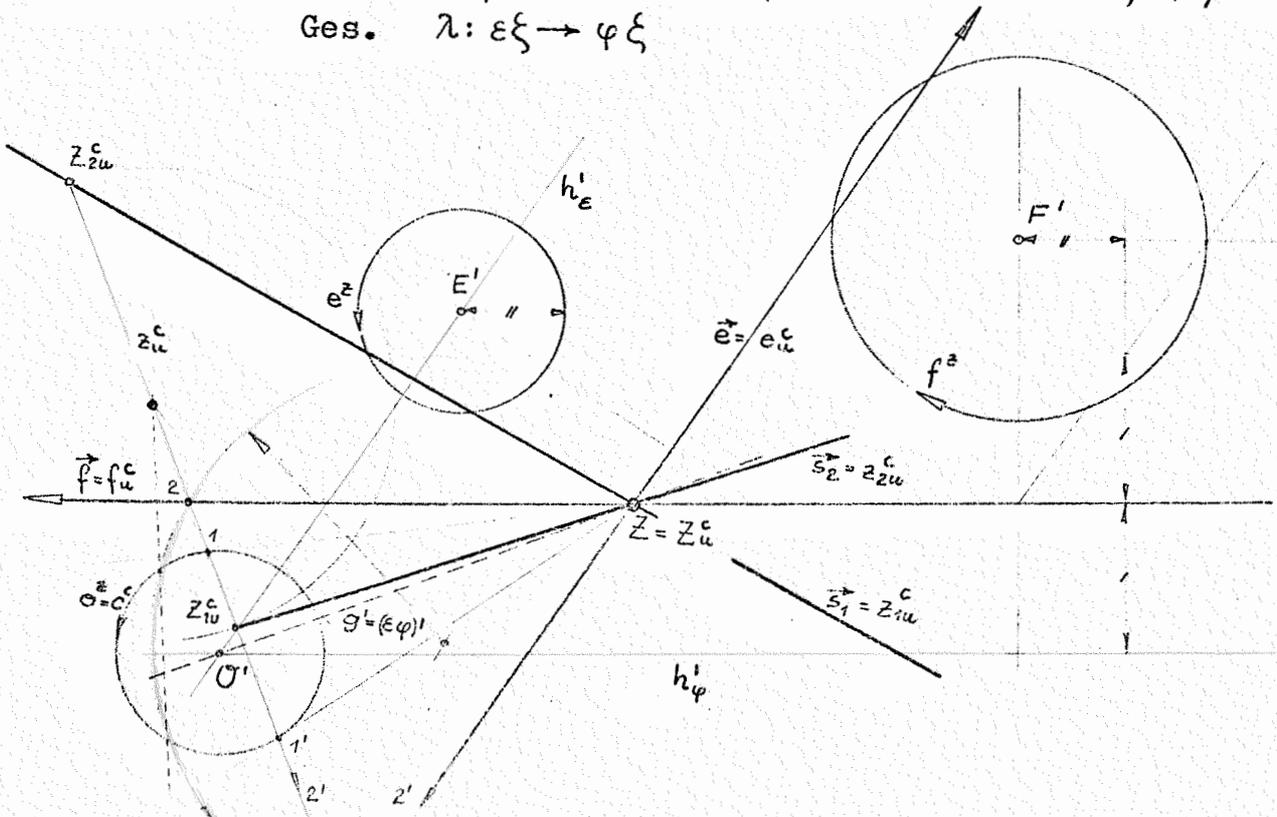


Anwendungen:

(1) Zu zwei gleichartigen (nichtparab.) Zykelbündeln gibt es i.a. zwei L-Spiegelungen, die das eine Zykelbündel in das zweite überführen. (Ist das gemeinsame Zykelbüschel parabolisch, dann  $\exists^*$  eine L-Spiegelung)

Beweis mittels zyklogr. Übertragung des Sachverhaltes in  $\mathbb{P}_{pe}$ ; vgl. 4.5 (3).

Beispiel: Geg.  $\varepsilon\xi \dots (\vec{e}, e^z)$ ,  $\varphi\xi \dots (\vec{f}, f^z)$  (Vs.  $\varepsilon\xi \wedge \varphi\xi$  ellipt.)  
 Ges.  $\lambda: \varepsilon\xi \rightarrow \varphi\xi$



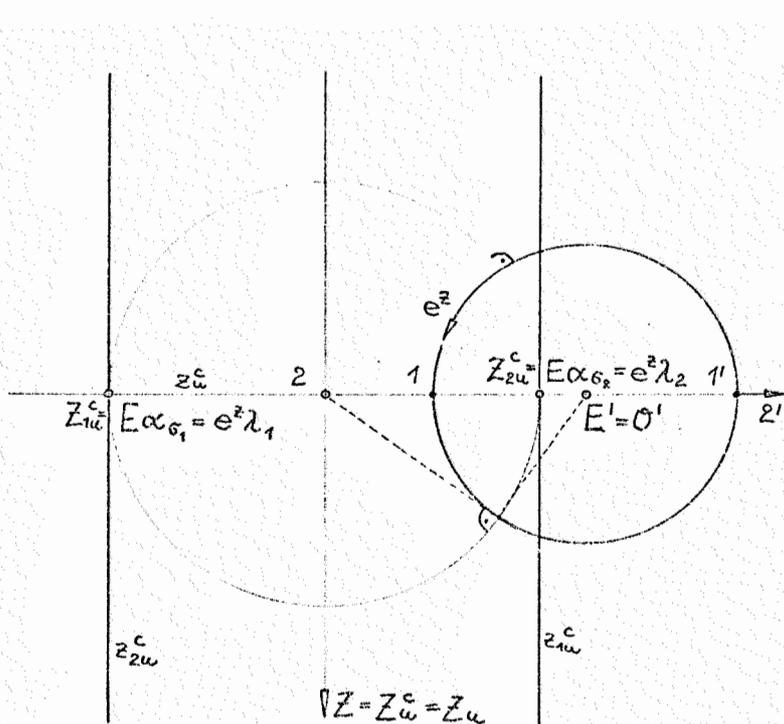
Konstruktion:

- 1)  $(\varepsilon\xi) \cdot (\varphi\xi) = g\xi \dots$  (hyp.) Fixzykelbüschel,  $\xi$ -Bild der (flachgängigen) Schnittgeraden  $g = \varepsilon\varphi$ .  
(Konstruktion mittels kotierter Projektion).
- 2) Zentralprojektion aus Nebenaugen  $\sigma$  ( $\sigma|g, \sigma \perp \pi_e^z$ ).  $\Rightarrow$   
 $\sigma^z = c^c \dots$  Zentralbild von  $c$ ,  $\vec{e} = e_u^c$ ,  $\vec{f} = f_u^c$ ,  $\vec{e} \cdot \vec{f} = Z = Z_u^c$
- 3) Über  $\sigma$ :  $e_u^c \cap c^c = A_1, A_2 \dots$  kj. komplex  
 $f_u^c \cap c^c = B_1, B_2 \dots$  kj. komplex } Viereck  
 $\Rightarrow$  Diagonaldreieck reell mit  $Z_u^c$  als Ecke; mit  $Z_u^c$  inzidente Seiten  $z_{1u}^c, z_{2u}^c$  sind Fluchtspuren (=Spuren) der beiden möglichen Spiegelebenen  $\sigma_1, \sigma_2$  durch  $g$ .

Über  $R$ : Konstruktion der auf der Polaren  $z_u^c$  liegenden Ecken des Diagonaldreiecks als Fixpunkte  $Z_{ju}^c$  der Desargues-Involution auf  $z_u^c$  bezüglich des von  $c^c$  und  $(e_u^c, f_u^c)$  aufgespannten Kegelschnittsbüschels. (Vgl. 4.5 (3)).

Speziell:  $\varphi = \pi_e^z$ ,  $\varepsilon\xi \dots (\vec{e}, e^z)$ .

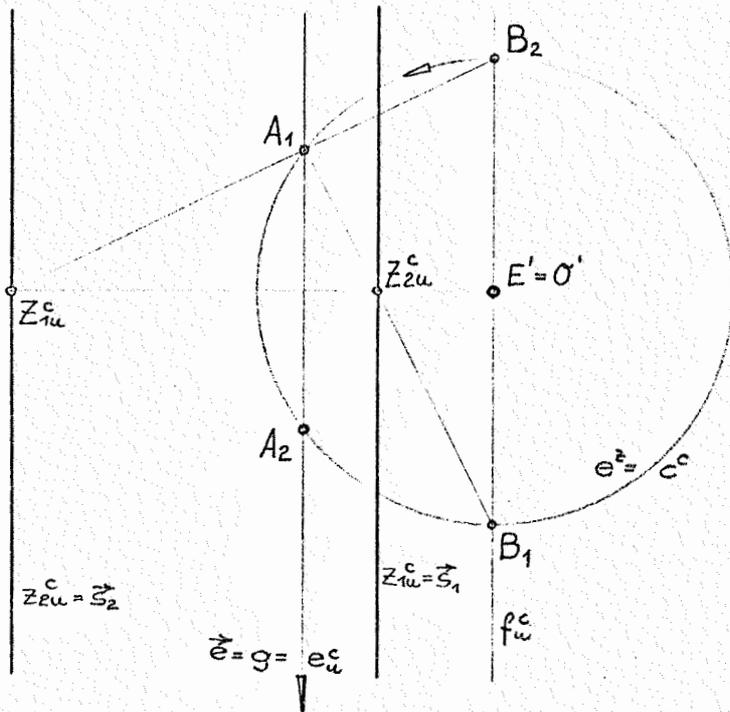
4.5 (3) Folg.:  $\Rightarrow$  Jedes ellipt. Zykelbündel kann durch zwei verschiedene L-Spiegelungen in das Punktfeld  $\pi_e$  übergeführt werden.



- 1)  $\varepsilon \cdot \pi_e = e = g = \vec{s}_1 = \vec{s}_2$ ;  
 $\varepsilon \cdot \omega = e_u$ ,  $\pi_e \cdot \omega = u$
- 2) Zentralproj. aus  $E = e^z \xi' = \sigma$   
 $\Rightarrow g\omega = Z_u = Z_u^c$ ;  $e^z = c^c$   
 $\Rightarrow$  Polare  $z_u^c$  von  $Z_u^c$  bzgl.  $c$  ist normal zu  $g$ ;
- 3)  $Z_{ju}^c = E\alpha_{\sigma_j} = e^z \lambda_j \dots$  Fixpunkte der DES.-Inv. bzgl. des durch  $c$  und  $(g, u)$  festgelegten Kegelschnittsbüschels.

Speziell:  $\varepsilon\xi \dots (\vec{e}, e^z)$  hyperb. Zykelbündel,  $\varphi \perp \pi_e^z$   
( $\varphi\xi \dots$  Bündel von Zykeln mit kollinearen Mitten)

4.5 (3) Folg.:  $\Rightarrow$  Jedes hyp. Zykelbündel kann i.a. durch zwei  $\neq$  L-Spiegelungen in ein Zykelbündel mit "koaxialen" Mitten übergeführt werden.



- 1)  $\varphi \cdot \varepsilon = g \parallel \pi_{\vec{e}}^z$  (z.B.  $g = \vec{e}$ )  
 $\varepsilon \cdot \omega = e_u, \varphi \cdot \omega = f_u$
- 2) Zentralproj. aus  $E = e^z \xi^{-1} = O$ :  
 $e_u^c = g = \vec{e}, f_u^c \parallel g$  durch  $E'$   
 $e_u^c \cdot c^c = A_1, A_2$   
 $f_u^c \cdot c^c = B_1, B_2$  } Viereck
- 3) Diagonaldreieck von  $\{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ ; analog zu früher.

(2) Lösung des APOLLONISchen Problems (4.2 Beisp.3) ) mittels L-Spiegelung:

Geg.: 3 Zykel  $p^z, q^z, r^z$ ; ges. {Zykel}, die  $p^z, q^z, r^z$  berühren. (Vs.  $p^z, q^z, r^z$  bestimmen ein Zykelbündel)

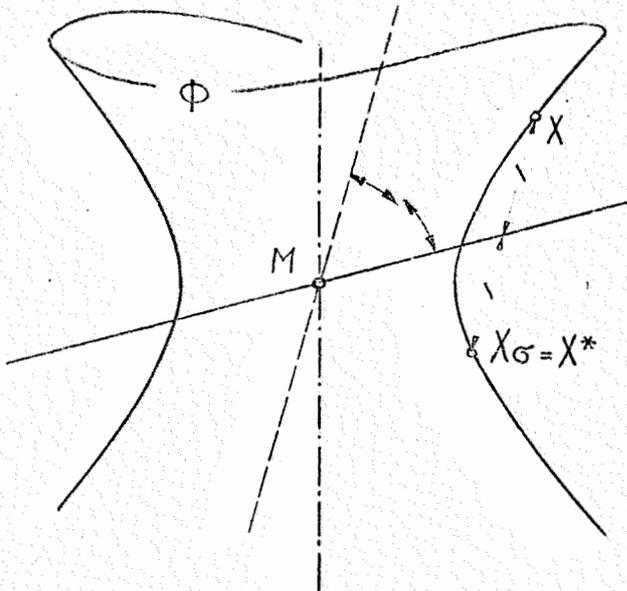
$p^z \xrightarrow{\xi^{-1}} P, q^z \rightarrow Q, r^z \rightarrow R.$

$\Rightarrow$  3 Fälle:  $\alpha$ )  $PQR = \varepsilon \dots c$ -isotrop  $\Rightarrow$  Lösung mit L-Spiegelung nicht möglich (Lös. wie 4.2, 3) )

$\beta$ )  $PQR = \varepsilon \dots$  flachgänglich  $\Rightarrow$  Anwendung einer  $c$ -Spiegelung  $\alpha_\sigma$ , die  $\varepsilon$  in  $\pi_{\vec{e}}^z$  überführt ( $\Rightarrow p^z, q^z, r^z$  gehen bei  $\xi^{-1} \alpha_\sigma \xi = \lambda$  in drei nicht kollineare Nullzykel  $p^{z*} = P^*, q^{z*} = Q^*, r^{z*} = R^*$  über, die (i.a.) zwei berührenden Lösungszykel  $x^z, y^z$  werden in das Paar ergänzender Umzykel von  $P^*, Q^*, R^*$  übergeführt.

$\gamma$ )  $PQR = \varepsilon \dots$  steilgänglich  $\Rightarrow$  Anwendung einer  $c$ -Spiegelung  $\alpha_\sigma$ , die  $\varepsilon$  in  $\varphi \perp \pi_{\vec{e}}^z$  überführt.  $\Rightarrow$  Aus der allgemeinen Angabe wird durch  $\xi^{-1} \alpha_\sigma \xi = \lambda$  die spezielle Angabe in 4.2 Beisp.3: Geg. Zykel  $p^{z*}, q^{z*}, r^{z*}$  mit kollinearen Mitten.

(3) L-Spiegelung einer Zykelkugel mit dem Mittenzykel als Fixzykel.  $\xrightarrow{\xi^{-1}}$



c-Spiegelungen  $\alpha_\sigma$  einer c-Kugel  $\Phi$  an einer Durchmessersebene  $\sigma$ .  
 $\alpha_\sigma \dots$  harmon. Homologie mit dem Pol von  $\sigma$  bzgl.  $\Phi$  als Zentrum und  $\sigma$  als Achse  $\Rightarrow \Phi$  bleibt bei  $\alpha_\sigma$  fest (affine Eigenschaft der Quadriken: schiefe Symmetrie bzgl. Durchmessersebene  $\sigma$  in dazu kj. Richtung).  
 $\Rightarrow M \xrightarrow{\alpha_\sigma} m^z \xrightarrow{\lambda} m^z$  fest;  $\overline{MX}^c = \overline{MX}^c_{\alpha_\sigma}$  ( $X \in \Phi$ )  $\Rightarrow x^z$  und  $x^z \lambda$  haben von  $m^z$  gleiche Tangentialentfernung.

4.7 Ebene LAGUERRE-Geometrie

Geg.: euklid. Ebene  $\pi_e(\mathcal{P}, \mathcal{U})$ ;

durch Orientierung der Elemente  $g \in \mathcal{U}$  entsteht aus  $\mathcal{U}$  die "Speermenge"  $\vec{\mathcal{U}} := \{\vec{g}\}$ .

In  $\pi_e$  wird die Menge aller orientierten Kreise und die Punktmenge  $\mathcal{P}$  zum Begriff der "Menge der euklid. Zykel"  $\vec{\mathcal{K}}$  zusammengefaßt ( $\mathcal{P} \dots$  Menge der "Nullzykel").

Für Speere und Zykel ist ein Berührungsbegriff erklärt (vgl. 4.1, Folg. 2) und wie folgt als zweistellige Relation zwischen der Speer-Menge  $\vec{\mathcal{U}}$  und der Zykel-Menge  $\vec{\mathcal{K}}$  definiert:

$\vec{\beta} \subset \vec{\mathcal{U}} \times \vec{\mathcal{K}}$  mit  $(\vec{g}, \vec{k}) \in \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{g} \in \vec{\mathcal{U}}, \vec{k} \in \vec{\mathcal{K}}$  und  $\vec{g} \perp \vec{k}$  (falls  $\vec{k}$  ein Nullzykel) oder  $\vec{g}$  berührt  $\vec{k}$  (falls  $\vec{k}$  ein Nicht-Nullzykel).



Definition: Zwei Speere heißen "konzyklisch", wenn sie mit dem gleichen Zykel in Berührungsrelation  $\vec{\beta}$  stehen.

Damit soll gelten:

$\{\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{K}}, \vec{\beta}\}$  heißt euklidisch LAGUERRE-Ebene und ist eine Berührungsstruktur, wobei  $\vec{\mathcal{U}}$  die Speere,  $\vec{\mathcal{K}}$  die Zykel der euklid. Ebene sind und  $\vec{\beta}$  die oben definierte Berührungsrelation ist.

Bemerkung: Die hier erklärte Struktur benützt ein konkretes Modell und ist in diesem Sinn keine axiomatische Theorie !  
 (  $\vec{\beta}$  wird nicht über Axiome definiert )!

Definition: Eine "LAGUERRE-Transformation"  $\lambda$  ist ein Automorphismus einer (euklid.) LAGUERRE-Ebene, besitzt daher folgende kennzeichnende Eigenschaften:

- (I)  $\vec{O}_j$  bijektiv  $\vec{O}_j' = \vec{O}_j$
- (II)  $\vec{K}$  bijektiv  $\vec{K}' = \vec{K}$
- (III) konzyklische Speere  $\xrightarrow{\lambda}$  konzyklische Speere

Vgl. hierzu die Definition einer kollinearen Transf. einer proj. Ebene auf sich: Dort bedingen die Eigenschaften (I):  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  bijektiv und (III)' koll. Punkte  $\rightarrow$  koll. Punkte automatisch die Eigenschaft (II):  $\vec{O}_j \rightarrow \vec{O}_j'$  bijektiv. Im Gegensatz dazu ist für L-Transf. Bedingung (II) nicht überflüssig, wird aber i.f. abgeschwächt. ( (III) ist "schwächer" als (III)' ).

Folg.1: Das zyklographische Bild jeder c-Ähnlichkeit  $\alpha$  ist eine L-Transformation:

$$\alpha \in GO(\Pi_{pe}) \implies \xi^{-1} \alpha \xi =: \lambda \quad \wedge \quad \lambda: \mathbb{P}_e^2 \rightarrow \mathbb{P}_e^2 \dots \quad \text{L-Transform. (Beh.)}$$

$$\xi \left( \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' = X\alpha \\ x^z & \xrightarrow{\lambda} & x'^z \end{array} \right) \xi \quad \left( \xi \dots \text{Bijektion} \implies \xi^{-1} \text{ ist sinnvoll} \right)$$

Beweis: (I):  $\vec{O}_j \rightarrow \vec{O}_j$  :  $\alpha$  ist auf der Menge der c-Ebenen bijektiv. "Speer" ist das  $\xi^{-1}$ -Bild einer c-Ebene  $\xrightarrow{\xi}$  Zusammensetzung  $\xi^{-1} \alpha \xi$  ist eine Bijektion auf  $\vec{O}_j$ .

(II):  $\vec{K} \rightarrow \vec{K}$  :  $\alpha$  ist Bijektion im affinen Punktraum  $\Pi_\alpha$   $\xrightarrow{\xi}$   $\xi^{-1} \alpha \xi$  ist bijektiv auf  $\vec{K}$ .

(III) konzykl. Speere: c-Ebenen des c-Kegels von X werden bei  $\alpha$  in c-Ebenen des c-Kegels von  $X\alpha$  transformiert  $\xrightarrow{\xi}$  konzykl. Speere  $\xrightarrow{\lambda}$  konzykl. Speere.

Folg.2: Umkehrung von Folg.1: Jede L-Transformation  $\lambda$  ist zyklographisches Bild einer c-Ähnlichkeit  $\alpha$ .

$$\lambda: \mathbb{P}_e^2 \rightarrow \mathbb{P}_e^2 \implies \xi \cdot \lambda \cdot \xi^{-1} =: \alpha, \quad \text{Beh.: } \alpha \in GO(\Pi_{pe})$$

$$\xi^{-1} \left( \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ x^z & \xrightarrow{\lambda} & x'^z \end{array} \right) \xi$$

Beweis: Zu zeigen ist,  $\alpha$  ist Affinität, die c festläßt.

$\lambda$  ist Bijektion auf  $\vec{O}_j \implies \alpha$  ist sicher Bijektion auf der Menge der c-Ebenen.

Ist  $\alpha$  Affinität, dann geht die Ferngerade jeder  $c$ -Ebene wieder in die Ferngerade einer  $c$ -Ebene über, also bleibt  $c$  tangentialweise fest.

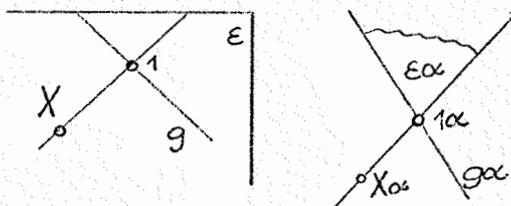
$\Rightarrow$  zu zeigen:  $\alpha$  erhält kollineare Lage (dann ist  $\alpha$  eine Affinität, denn  $\omega$  bleibt dann sicher fest).

Schritt 1: Alle mit einer flachgängigen Geraden  $g$  kollinearen Punkte bleiben nach Ausübung von  $\alpha$  kollinear; denn:  $g$  ist Schnitt von zwei  $\neq c$ -Ebenen  $\wedge c$ -Ebenen  $\xrightarrow{\alpha} c$ -Ebenen.  $\Rightarrow g\alpha \dots$  flachgängige Gerade.

Schritt 2: Die Einschränkung von  $\alpha$  auf eine flachgängige Ebene  $\varepsilon$  ist eine Affinität;

denn:  $\alpha$  ist bijektive Punktabbildung  $\Rightarrow \mathbb{P}_\varepsilon \rightarrow \alpha|_\varepsilon(\mathbb{P}_\varepsilon)$  bijektiv; in  $\varepsilon \int$  nur flachgängige Geraden  $\Rightarrow$  koll. Punkte  $\xrightarrow{\alpha|_\varepsilon}$  koll. Punkte.

$\Rightarrow \alpha|_\varepsilon$  bijektiv und kollinear.



Schritt 3: Seien  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  ( $\neq$ ) zwei flachgängige Ebenen

$a = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$  ihre (flachg.) Schnittgerade,

$1, 2 \int a, (\neq)$ ;  $3 \int \varepsilon_1, \int a$ ;  $4 \int \varepsilon_2, \int a$ .

$\alpha|_{\varepsilon_j} \dots$  Affinitäten mit  $1, 2, 3 \mapsto$

$1\alpha, 2\alpha, 3\alpha$ ;

$1, 2, 4 \mapsto 1\alpha, 2\alpha, 4\alpha$ ;

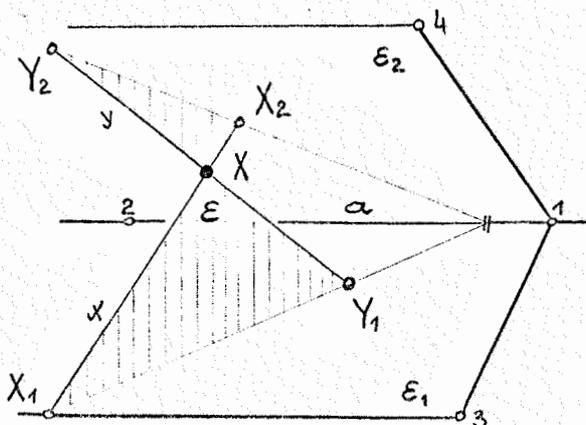
$\Rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \dots$  Tetraeder,

$\{1\alpha, \dots, 4\alpha\} \dots$  Tetraeder

$\Rightarrow \int^*$  Affinität  $\varphi$  mit  $1 \xrightarrow{\varphi} 1\alpha, \dots, 4 \xrightarrow{\varphi} 4\alpha$ .

Beh.:  $\varphi = \alpha$ ; denn:  $\alpha|_{\varepsilon_j} = \varphi|_{\varepsilon_j}$ .

Sei  $X \notin \varepsilon_j$ , dann  $\int$  sicher flachgängige Ebene  $\varepsilon$  durch  $X$  mit  $\varepsilon \parallel \varepsilon_j$ .  $\Rightarrow$



In  $\varepsilon \int$  (flachgängige) Geraden  $x, y$  durch  $X$  mit den Spurpunkten  $X_j, Y_j$  in  $\varepsilon_j$ .

$\Rightarrow x\alpha = X_1\alpha \cdot Y_1\alpha \wedge X_2\alpha = X_2\varphi, Y_2\alpha = Y_2\varphi$

$\Rightarrow x\varphi = X_1\varphi \cdot Y_1\varphi = x\alpha$ ; analog ist  $y\varphi = y\alpha$

$\Rightarrow X\alpha = x\alpha \cdot y\alpha = x\varphi \cdot y\varphi = X\varphi \Rightarrow X\varphi = X\alpha$

$\Rightarrow \alpha$  ist Affinität und läßt  $c$  fest, also ist  $\alpha: = \xi \lambda \xi^{-1} \in GO(\Pi_{pe})$

Bemerkung a): Wir haben in Folg.1 und Folg.2 gezeigt, daß die Menge der L-Transformationen bijektiv zur Menge der c-Ähnlichkeiten ist. Letztere bilden hinsichtlich des Hintereinanderausführens die siebengliedrige Gruppe  $GO(\Pi_{pe})$ .

$\Rightarrow$  Sind  $\alpha_1, \alpha_2 \in GO(\Pi_{pe}) \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 \in GO(\Pi_{pe})$ .

Seien  $\lambda_1 = \xi^{-1} \alpha_1 \xi$ ,  $\lambda_2 = \zeta^{-1} \alpha_2 \zeta$  die zugeh. L-Transf., dann ist  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \xi^{-1} \alpha_1 \xi \cdot \zeta^{-1} \alpha_2 \zeta = \xi^{-1} \alpha_1 \alpha_2 \xi$  die zu  $\alpha_1, \alpha_2$  gehörige L-Transf.; Also bildet die Menge der L-Transform. gleichfalls eine (siebengliedrige) Gruppe, die sogenannte "LAGUERRE-Gruppe"  $L_7$ .

Ergebnis: Die Zyklographie vermittelt also einen Isomorphismus zwischen  $GO(\Pi_{pe})$  und der LAGUERRE-Gruppe  $L_7$ .

Bemerkung b): Eigenschaften und Invarianten von  $L_7$  durch "Übertragung" von Eigenschaften und Invarianten der Gruppe  $GO(\Pi_{pe})$ .

1. Das Verhältnis zweier Tangentialentfernungen (auf einem Speer) ist eine Invariante von  $L_7$ ;

denn: Formeln für Tangentialentfernung (4.1, Folg.4) und c-Entfernung (4.4, Folg.4) sind gleiche Ausdrücke.

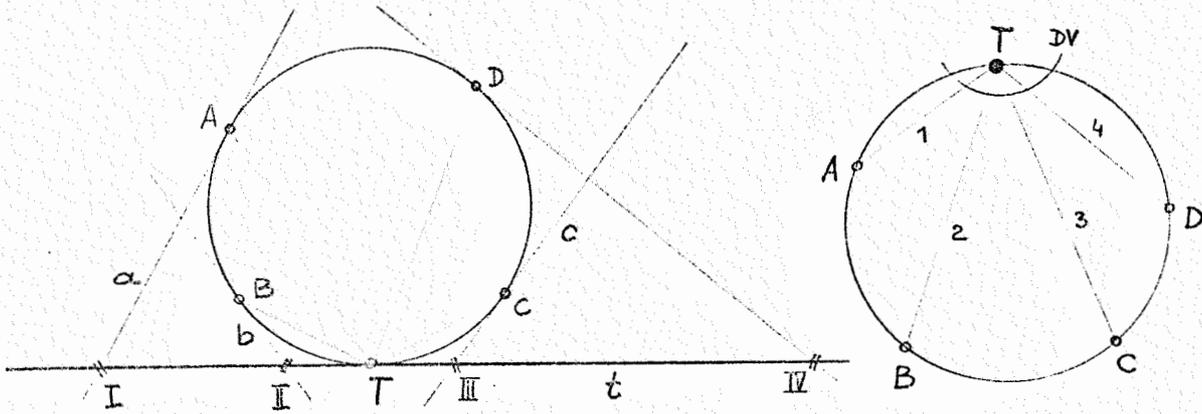
2. c-Winkel ist eine Invariante von  $GO(\Pi_{pe})$  und ist über die LAGUERREsche Formel definiert als

$$\sphericalangle^c ab = \frac{1}{2i} \lg DV(A \cdot B \cdot I \cdot J) \quad , \text{vgl. 4.4, Folg.2}$$

( $\Rightarrow \sphericalangle^c$  analytisch erklärt, wenn  $ab = \varepsilon$  nicht c-isotrop und a und b nicht c-isotrop.  $\sphericalangle^c$  reell  $\Leftrightarrow \varepsilon$  flachgängig oder  $\sphericalangle^c ab = \frac{\pi}{2}$ ).

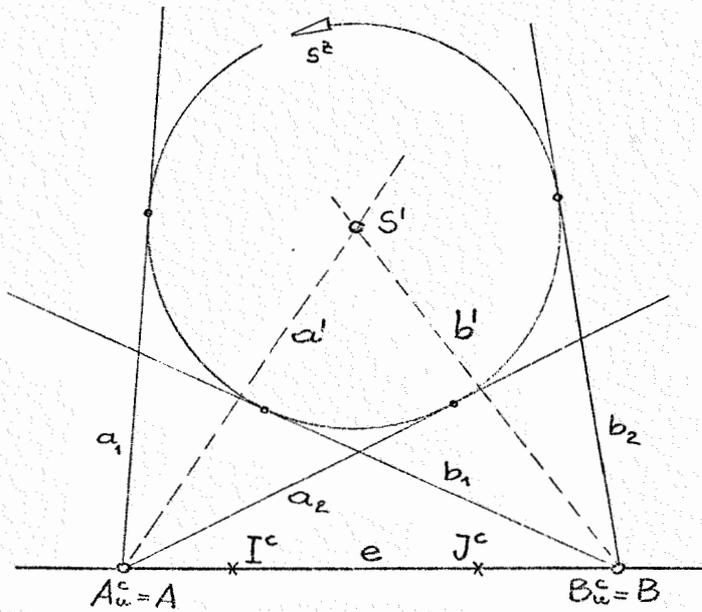
Wir suchen eine durch den c-Winkel festgelegte Invariante in der Gruppe  $L_7$ .

Dazu benützen wir einen Hilfsbegriff, das Doppelverhältnis von vier Tangenten (a,b,c,d) eines Kegelschnittes  $k$  (dualer Begriff zum DV von 4 Punkten (A,B,C,D) eines Kegelschnittes; vgl. Figur). Insbesondere gilt:  $DV(a,b,c,d) = DV(A,B,C,D)$  mit A,B,C,D sind die Berührungspunkte von a,b,c,d. (Beweis durch Polarisieren an  $k$ .)



$$\begin{aligned}
 & \sqcap DV(A, B, C, D) : = DV(TA, TB, TC, TD), T \in k \\
 & \sqcup DV(a, b, c, d) : = DV(ta, tb, tc, td), t \in k \quad (Tg_{te})
 \end{aligned}$$

Anwendung zur Übertragung des  $c$ -Winkels in die Zyklographie  $R \subset \mathbb{C}$ :  $\sphericalangle^c ab = \varphi^c$ . Wir projizieren zunächst die Fernpunkte  $A_u, B_u$  von  $a$  und  $b$  (o.B.d.A.  $ab = \varepsilon$ ,  $ab = S$ ) und die Punkte  $I, J = (A_u \cdot B_u) \cdot c$  aus  $S$  auf  $\pi_e^z$ , wobei wir voraussetzen wollen, daß weder  $a$  noch  $b$ , noch  $\varepsilon = ab$   $c$ -isotrop sind.



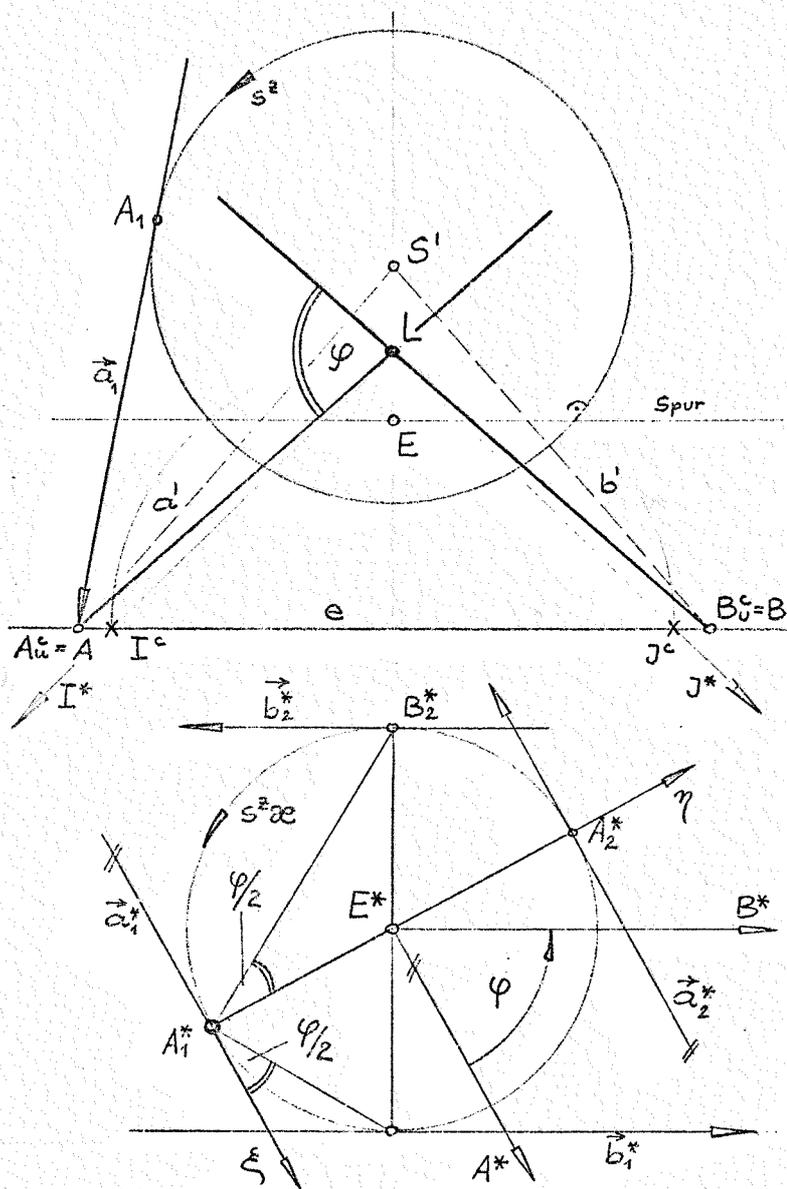
$\Rightarrow A_u^z, B_u^z, I^c, J^c$  paarw.  $\neq$ , also  $DV(A_u^z, B_u^z, I^c, J^c) = DV(A_u, B_u, I, J)$  erklärt ( $\Leftarrow \sphericalangle^c ab$  erklärt).

$I^c, J^c$  liegen auf dem Distanzkreis von  $S$ , das ist der Träger  $s$  des Bildzykels  $s^z$  von  $S$ .

$A_u^c = A, B_u^c = B, AB = e$ ..Spur von  $\varepsilon$ . Aus  $A$  und  $B$  ] (über  $\mathbb{C}$ ) Tangentenpaare  $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$  an  $s$  ( $A, B \notin s$ ).

Über  $R$  ] (reelle) perspektive Kollineationen  $\alpha: \pi_e^z \rightarrow \pi_e^z$ , die  $I^c$  und  $J^c$  entweder in die abs. Punkte von  $\pi_e^z$  (falls  $\varepsilon$  flachgängig) oder in reelle Fernpunkte  $I^*, J^*$  orthogonaler Richtungen in  $\pi_e^z$  (falls  $\varepsilon$  steilgängig) überführen.

Wir diskutieren den Fall  $\varepsilon$  flachgängig:



$\varepsilon$  mit  $e \dots$  Verschwindungsgerade, Zentrum  $L =$  Laguerrevertreter des Zentralbildes der abs. Involution von  $\varepsilon$  auf  $e = e^c$ .  
 $\Rightarrow \sphericalangle^{c} ab = \sphericalangle^{c} A_1 \hat{L} B_2 \dots$  euklid. Winkel.  
 Bei  $\varepsilon$  entsteht aus  $s$  wieder ein Kreis ( $s \varepsilon$  geht durch  $I^*$ ,  $J^* \dots$  abs. Punkte von  $\pi_e^2$ ), Doppelverhältnisse bleiben invariant, der Pol  $E$  von  $e$  bezüglich  $s$  geht bei  $\varepsilon$  in den Mittelpunkt  $E^*$  von  $s \varepsilon$  über, durch  $\varepsilon$  wird der Laufsinn auf  $s^2$  auf  $s^2 \varepsilon$  übertragen; Tangentenspeere  $\xrightarrow{\varepsilon}$  Tangentenspeere, speziell  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ ,  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$  aus  $A$  bzw.  $B \xrightarrow{\varepsilon} \parallel$  Paare von Tangentenspeere (vgl. Figur), z.B.  $\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_1^*$ ,  $A_1 \rightarrow A_1^*$ .  
 $\Rightarrow$  Wir benützen etwa  $\{A_1^*, a_1^* = \xi, A_1^* A_2^* = \gamma\}$  als kartes. K.S.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sphericalangle^c \xi(A_1^* B_1^*) = \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \sphericalangle^{c} ab \\ \sphericalangle^c \xi(A_1^* B_2^*) = \frac{\pi + \varphi}{2} \end{cases}$$

Das  $DV(\vec{a}_1^*, \vec{a}_2^*, \vec{b}_1^*, \vec{b}_2^*) = DV(A_1^*, A_2^*, B_1^*, B_2^*) = DV(\xi, \gamma, A_1^* B_1^*, A_2^* B_2^*)$  ist in diesem K.S. unter Benützung des Tangens des euklid. Winkels einer Geraden des Büschels  $A_1^*$  als Büschelparameter berechenbar.

Es gilt:  $DV(A_1^* A_2^* B_1^* B_2^*) = DV(0, \infty, \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, -\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}) = -\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$

Unter Benützung der ursprünglichen Bedeutung von  $\varphi = \sphericalangle^{c} ab$  und Beachtung der Vertauschungsgesetze für das DV gilt im Fall  $\varepsilon$  flachg.:

Das Doppelverhältnis von zwei Paaren konjugierter Speere ist bei geeigneter Reihenfolge in jedem Paar negativ gleich dem Quadrat des Tangens des halben  $c$ -Winkels jener beiden flachgängigen Geraden, welche durch die beiden Speerpaare bestimmt sind.

$$DV(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2) = -\operatorname{tg}^2 \frac{\sphericalangle^{c} ab}{2}$$

Im Falle einer steilgängigen Ebene  $\varepsilon = a.b.$  ist eine geeignete  $\pi$  Kollineation  $\varepsilon$  jene, die  $e$  in die Ferngerade von  $\pi_e^2$

und  $s$  in eine gleichseitige Hyperbel überführt. Da obiges DV von den Orientierungen der Tangentenspeere unabhängig ist, ist Erweiterung in  $\mathbb{C}$  möglich (für steilgängige Geraden in  $\varepsilon$ ).  
 $\Rightarrow$  Obiges Ergebnis gilt allgemein für  $a, b, \varepsilon$  nicht isotrop und  $\operatorname{tg}^2 \frac{\chi_{ab}^c}{2}$  ist eine Invariante von  $L_7$ .

Weitere Eigenschaften von  $\lambda \in L_7$ :

Parallele Speere  $\xrightarrow{\lambda}$  parallele Speere,  
 denn: Speer  $\xrightarrow{\xi^{-1}}$   $c$ -Ebene  $\Rightarrow$  Ferngerade ist Tangente von  $c$  und geht bei  $\xi \lambda \xi^{-1} = \alpha$  wieder in eine Tangente von  $c$  über.

Zykelbüschel  $\xrightarrow{\lambda}$  Zykelbüschel vom gleichen Typ;  
 Z.B. ellipt. Z-Büschel  $\xrightarrow{\xi^{-1}}$  flachg. Gerade  $g \Rightarrow ] 2 \neq$  reelle  $c$ -Ebenen durch  $g \Rightarrow$  Realitätsverhältnisse bei  $\alpha$  und  $\lambda$  ungeändert. Damit gilt auch:

Zykelbündel  $\xrightarrow{\lambda}$  Zykelbündel vom gleichen Typ.

Zykelkugel  $\xrightarrow{\lambda}$  Zykelkugel von gleicher Art; und zwar gilt unter Benützung der Definition der Zykelkugel als Zykelmenge konstanter Tangentialentfernung vom "Mittenzykel" (vgl. Satz 25):  
 hyp. Zykelkugel  $\xrightarrow{\xi^{-1}}$  einschalige  $c$ -Kugel  $\xrightarrow{\alpha}$  einsch.  $c$ -Kugel  $\xrightarrow{\xi}$  hyp. Zykelkugel;  
 ellipt. Zykelkugel  $\xrightarrow{\xi^{-1}}$  zweischalige  $c$ -Kugel mit reellem Spurkreis  $\xrightarrow{\alpha}$  zweischal.  $c$ -Kugel mit reellem oder nullteiligem Spurkreis  $\xrightarrow{\xi}$  Zykelkugel mit rein imaginärer Tangentialentfernung vom Mittenzykel.

Folg. 3:  $\lambda \in L_7$  ist i.a. keine Punkttransformation  $\mathcal{R}_{\pi_e} \rightarrow \mathcal{R}_{\pi_e}$ . Besitzt  $\lambda$  diese Eigenschaft, so ist  $\lambda = \lambda^e$  eine euklidische Ähnlichkeit in  $\pi_e^{(e)}$  ("Tangentialentfernung" für Nullzykel = Punkte ist der euklid. Abstand  $\Rightarrow \lambda^e$  ist teilverhältnistreu neben  $\lambda^e \dots$  zykelstreu (kreistreu), also besitzt  $\lambda^e$  die kennzeichnenden Eigenschaften einer  $e$ -Ähnlichkeit.

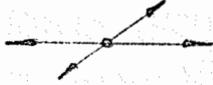
$\Rightarrow$  Die  $L$ -Transformationen sind also gewisse Verallgemeinerungen der euklid. Ähnlichkeiten.

Ferner folgt: Die Beschränkung jeder  $c$ -Ähnlichkeit auf  $\pi_e^z$ , die  $\pi_e^z$  als Ganzes festläßt, ist eine euklidische Ähnlichkeit.

Folg. 4:  $\lambda \in L_7$  ist eine "orientierte Berührungstranf.".

Definition: "orientiertes Linienelement", "Berührungsbegriff" für orientierte Kreise (=Zykel) siehe 4.1, Folg.1.

"Verein von orientierten Linienelementen": Darunter versteht man die Speermenge durch einen Punkt und die Menge der Tangentenspeere einer (wenigstens einmal stetig differenzierbaren) orientierten Kurve.



Beh.:  $\lambda$  ist vereinstreu;

denn: jedes orientierte Linienelement legt ein parabolisches Zykelbüschel fest, welches in  $\Pi_{pe}$  eine  $c$ -Gerade definiert.  
 $\implies$  Ein Verein von  $c$ -Geraden wird bei einer  $c$ -Ähnlichkeit in einen ebensolchen Verein übergeführt ( $c$  bleibt fest), dessen  $\xi$ -Bild ist also gleichfalls ein Verein von orientierten Linienelementen.

Folg.5: Untergruppen von  $L_7$

(I) Wegen  $L_7$  isomorph  $GO(\Pi_{pe})$  und  $O(\Pi_{pe})$ ...sechsgliedrige Untergruppe von  $GO(\Pi_{pe})$  muß gelten:  
 $\{ \lambda \mid \lambda = \xi^{-1} \alpha \xi \wedge \alpha \in O(\Pi_{pe}); * \}$  bildet eine sechsgliedrige Untergruppe von  $L_7$ , die "LAGUERRE-Gruppe  $L_6$  im engeren Sinn".

$O(\Pi_{pe})$ ...Gruppe der  $c$ -Kongruenzen, also abstandstreuen  $c$ -Ähnlichkeiten  $\implies$  (Folg.2; Bem.b):  $L_6$  ist die Gruppe der tangentialentfernungstreuen  $L$ -Transformationen.

Speziell:  $L$ -Transf. i.e.S. welche punkttreu sind, sind genau die euklid. Kongruenzen in  $\mathcal{E}^2$  ;

denn:  $p^z \dots (X_p, Y_p, Z_p = r_p = 0)$  ;  $q^z \dots (X_q, Y_q, Z_q = r_q = 0) \dots$

$p^z, q^z \dots$  Nullzykel  $\implies$  Tangentialentfernung gemäß 4.1, Folg.4:

$$d = \sqrt{(X_q - X_p)^2 + (Y_q - Y_p)^2 - 0} \dots \text{euklid. Abstand.}$$

(II) Der Untergruppe der involutorischen  $c$ -Ähnlichkeiten (also den  $c$ -Spiegelungen an nicht isotropen Ebenen) entspricht vermöge des Isomorphismus  $GO(\Pi_{pe}) \cong L_7$  die Untergruppe invol.  $L$ -Transformationen (also  $L$ -Spiegelungen). Diese ist wegen Satz 27 eine Untergruppe von  $L_6$  und jedes  $\lambda \in L_6$  ist endliches Produkt von  $L$ -Spiegelungen.

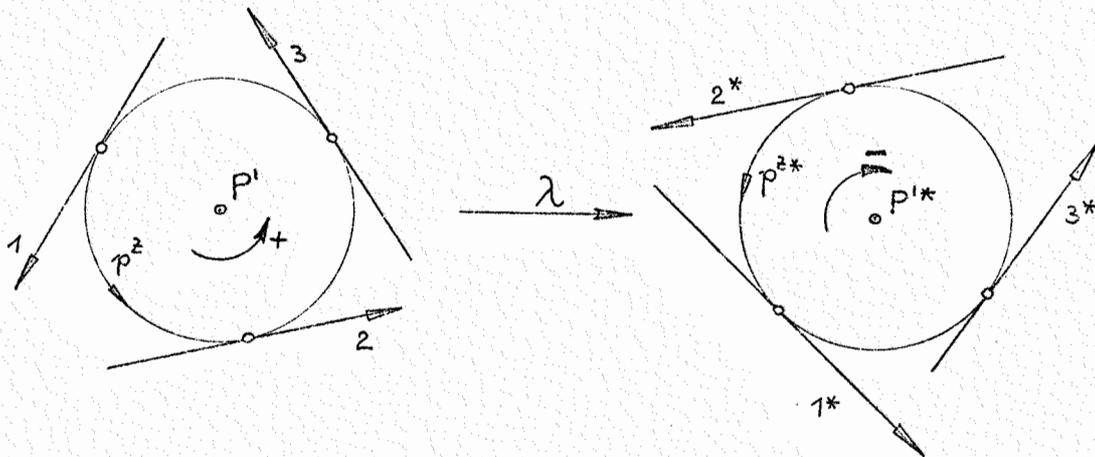
Eigenschaften der L-Spiegelungen  $\lambda_0$ , vgl. 4.6:

- (a)  $\lambda_0$  ist eine involutorische Speertransformation.
- (b) Festlegung von  $\lambda_0$  durch Angabe des zyklograph. Bildes der Spiegelebene  $\sigma$  der zugehör. c-Spiegelung  $\alpha_0$ , also durch Spurspeer  $\vec{s}$  ("Fixgerade", "Achse") und einen "Fixzykel", der  $\vec{s}$  nicht berührt ( $\sigma$  ist nicht c-isotrop).

Folg.6:  $O(\Pi_{pe})$  gestattet Einteilung in gleichsinnige, (gegen-sinnige) und gleichläufige (gegenläufige) c-Ähnlichkeiten  $\lambda$ .  
 $\Rightarrow L_c$  muß gleichfalls eine solche Zerlegung in (disjunkte) Mengen von L-Transf. gestatten.

- a) gleichläufig — gegenläufig.

Nummerierung der Berührungspunkte von drei konzyklischen Speeren definiert einen Laufsinn auf dem gemeinsamen Zykel  $p^z$ .



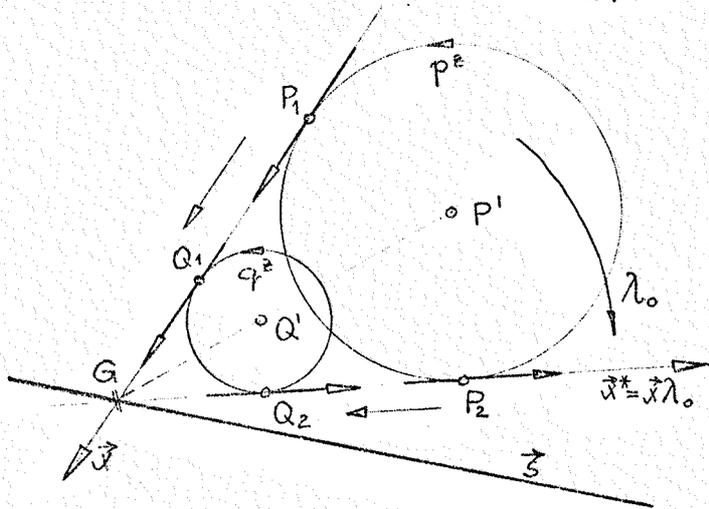
Dieser Laufsinn wird aufgefaßt als Zentralbild eines Laufsinnes auf  $c$ .

Stimmt dieser Laufsinn mit dem durch das Tripel der Bildspeere definierten Laufsinn auf  $c$  überein, so ist gleichläufig.

- b) gleichsinnig — gegensinnig

Diese Eigenschaft wurde für  $\alpha \in GO(\Pi_{pe})$  im Wege über das Vorzeichen der Determinante der Transformationsmatrix definiert (4.4, Folg.3), also Koordinaten in  $\Pi_{pe}$  erforderlich.

Anderer Weg: Das Produkt von zwei gegensinnigen c-Ähnlichkeiten ist gleichsinnig. Wegen Satz 27 kann man sich auf die Untersuchung der Produkte von zwei c-Spiegelungen beschränken. (Eine c-Spiegelung ist jedenfalls gegensinnig!)  $\xrightarrow{\xi}$  Eine Eigenschaft, die sich bei L-Spiegelung  $\lambda_0$  ändert, muß dann die gegensinnigen L-Transformation kennzeichnen.



Bei  $\lambda_0$  geht der Verein orientierter Linienelemente auf  $\vec{x}$  in einen ebensolchen auf  $\vec{x}^* = \vec{x}\lambda_0$  übergeführt. Ist  $\overrightarrow{P_1Q_1}$  eine orientierte Strecke auf  $\vec{x}$ ; (etwa gleichorientiert mit  $\vec{x}$ ); dann ist ihre orientierte Bildstrecke  $\overrightarrow{P_2Q_2}$  mit  $\vec{x}^*$  verschieden

orientiert (vgl. Figur) !  $\implies$

Der Verein orientierter Linienelemente auf  $\vec{x}$  wird bei  $\lambda_0$  gegensinnig kongruent auf den Verein orientiertes Linienelement des Bildspeeres abgebildet.

Diese Eigenschaft benützen wir zur Definition von gleichs. (gegens.)  $\lambda \in L_6$  :

Eine belieb. L-Transformation aus  $L_6$  heißt "gleichsinnig" genau dann, wenn die Reihe der orientierten Linienelemente eines Speeres gleichsinnig transformiert wird.

Bemerkung: Auch  $GO(\Pi_{pe})$  ist in die oben beschriebenen Teilmengen zerlegbar.

Deutung der Gleich-(Gegen)Läufigkeit benützt  $c$  und Zentralprojektion, also auch für  $L_7$  gültig.

Zur Deutung von Gleich-(Gegen)-Sinnigkeit schreiben wir  $\alpha \in GO(\Pi_{pe})$  als Produkt einer  $c$ -kongruenten Transformation  $\alpha_0$  mit einer ( $c$ -)Streckung (Faktor  $\rho$ ).

$\alpha \dots \varphi' = \alpha + \rho \alpha \varphi \wedge \alpha \dots c$ -orthogonal,  $\rho > 0$   
(Dies ist bei geeigneter Wahl von  $\text{sgn}(\|\alpha\|)$  keine Einschränkung der Allgemeinheit).

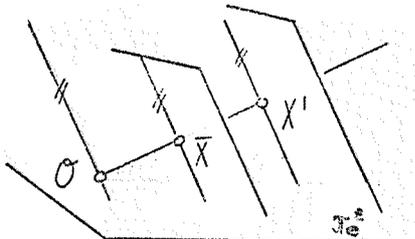
$\alpha_0 \dots \bar{\varphi} = \alpha + \alpha \varphi \dots c$ -kongruent.

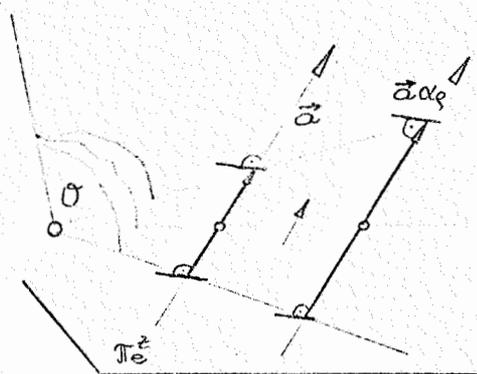
$\alpha_\rho \dots \varphi' = \rho \bar{\varphi} \wedge \rho > 0 \dots$  "Norm-Ähnlichkeit"

Beh.:  $\alpha_\rho$  ist gleichsinnig,

denn: zentrische Streckung mit pos. Streckfaktor führt z.B.

eine  $c$ -Ebene durch  $\bar{X}$  in eine dazu  $\parallel$   $c$ -Ebene durch  $X'$  über.  $\xrightarrow{\xi}$





Die  $\xi$ -Bilder dieser c-Ebenen sind ein Paar // Speere (Spurspeere).

Die c-Geraden in den c-Ebenen werden durch  $\alpha_p$  so perspektiv aufeinander bezogen, daß ihre Spurpunkte diese Spurspeere gleichsinnig durchlaufen.

Folg.7: Angabe einer L-Transf. i.e.S.  $\lambda \in L_c$  :

Nach Satz 27 ist jede c-Kongruenz nach Vorgabe des Sinnes durch ein Paar zugeordneter c-Dreiflache bestimmt.

$\Rightarrow \lambda$  ist festgelegt, wenn man zu drei konzyklischen (beschrifteten) Speeren deren (sicher konzyklische) Bildspeere und den Sinn von vorgibt.

Satz 28: Die LAGUERRE-Transformationen bilden eine zur c-Ähnlichkeitsgruppe isomorphe siebengliedrige Gruppe. Jede L-Transformation ist parallelentreu auf der Speermenge, eine orientierte Berührungstransformation und genau dann punkttreu, wenn sie eine euklid. Ähnlichkeit ist.

Die L-Transformationen im engeren Sinn bilden die sechsgliedrige Gruppe der tangentialentfernungstreuen L-Transformationen, welche durch die L-Spiegelungen erzeugt wird.

Eine L-Transformation i.e.S. ist bei gegebenem Sinn durch zwei (beschriftete) Tripel konzyklischer Speere eindeutig bestimmt.

#### 4.8 Euklidische Kreisebenen

Geg.  $\mathcal{P}_e$ ,  $\mathcal{G}_e$  ...Punktmenge,  $\mathcal{U}_e$  ...Geradenmenge,  
 $\mathcal{K}_e$  ...Kreismenge.

Euklid. Geometrie ist die Geometrie der Gruppe  $GO(\mathcal{P}_e)$ , deren Elemente  $\alpha$  (euklid. Ähnlichkeiten) durch folgende Eigenschaften definiert sind:

- (I\*)  $\alpha: \mathcal{P}_e \rightarrow \mathcal{P}_e$  ist bijektiv.
- (II\*) kollineare Punkte  $\xrightarrow{\alpha}$  kollineare Punkte.
- (III\*)  $\alpha$  ist kreistreu.

Beh.:  $\alpha$  (und damit  $GO(\mathcal{T}_e)$ ) kann auch durch andere Eigenschaften definiert werden, nämlich durch

- (I)  $\alpha: \mathcal{P}_e \rightarrow \mathcal{P}_e \dots$  bijektiv ( (I) = (I\*) )
- (II)  $\alpha: \mathcal{U}_e \rightarrow \mathcal{U}_e \dots$  bijektiv ( (II)  $\Leftrightarrow$  (II\*) , klar)
- (III)  $\alpha: \mathcal{K}_e \rightarrow \mathcal{K}_e \dots$  bijektiv.

(III) :  $\alpha: \mathcal{K}_e \rightarrow \mathcal{K}_e$  ist global ( $\alpha$  kreistreu  $\Rightarrow$  jeder Kreis wird abgebildet).

$\alpha: \mathcal{K}_e \rightarrow \mathcal{K}_e$  ist surjektiv (jeder Kreis ist Bild)

$\alpha: \mathcal{K}_e \rightarrow \mathcal{K}_e$  ist injektiv:

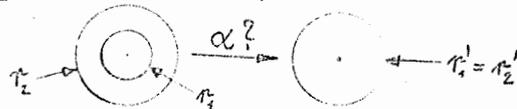
(indirekt): Sei  $k_1 \neq k_2 \wedge k_1 \alpha = k_2 \alpha$  ; (Radius  $r_1 = r_2$ )

a)  $k_j$  ... Mitte  $M_j \wedge M_1 \neq M_2 \xrightarrow{(\alpha)}$   $M_1 \alpha \neq M_2 \alpha \Rightarrow k_1 \alpha \neq k_2 \alpha$

b)  $M_1 = M_2$  :  $\alpha$  läßt Abstandsverhältnisse ungeändert.

$$\Rightarrow \underbrace{r_1 : r_2}_{\neq 1} = r'_1 : r'_2 \neq 1, \text{ also } k_1 \alpha \neq k_2 \alpha$$

$\Rightarrow$  (III) ist erfüllt.



Wir definieren eine zweistellige Relation  $\beta$  auf  $\mathcal{P}_e \times \mathcal{U}_e, \mathcal{P}_e \times \mathcal{K}_e, \mathcal{U}_e \times \mathcal{K}_e$ :

- (a)  $P \beta g \Leftrightarrow P \in g$
- (b)  $P \beta k \Leftrightarrow P \in k$
- (c)  $g \beta k \Leftrightarrow g$  berührt  $k$

$\Rightarrow \alpha \in GO(\mathcal{T}_e)$  ist in obigem Sinn relationstreu.

( (a), (b) sogar für Affinitäten gültig, (c) gilt, da  $\alpha$  eine Berührtransformation ist).

$\alpha$  besitzt also zusätzlich die Eigenschaft

(IV) :  $\alpha$  ist  $\beta$ -invariant.

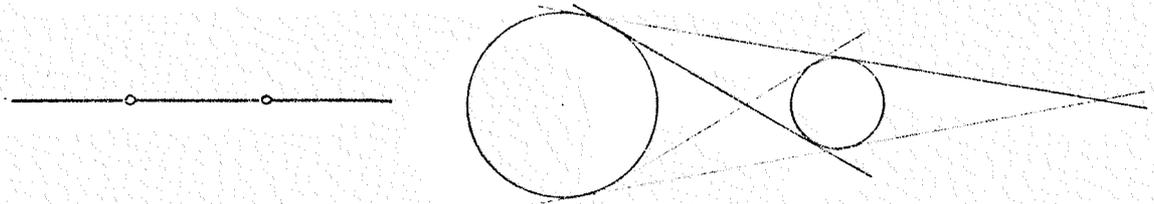
Wir studieren nun Geometrien in  $\mathcal{T}_e(\mathcal{P}_e, \mathcal{U}_e, \mathcal{K}_e)$ , denen ein anderer (erweiterter) Kreisbegriff zugrundeliegt und deren Transformationen die obigen Eigenschaften (I) bis (IV) nach geeigneter Modifikation erfüllen:

- Z.B!  $\mathcal{P}_e \cup \mathcal{K}_e =: \mathcal{K}_L \dots$  Menge der "LAGUERRE-Kreise"
- $\mathcal{U}_e \cup \mathcal{K}_e =: \mathcal{K}_M \dots$  Menge der "MÖBIUS-Kreise"
- $\mathcal{P}_e \cup \mathcal{U}_e \cup \mathcal{K}_e =: \mathcal{K}_N \dots$  Menge der "LIE-Kreise"

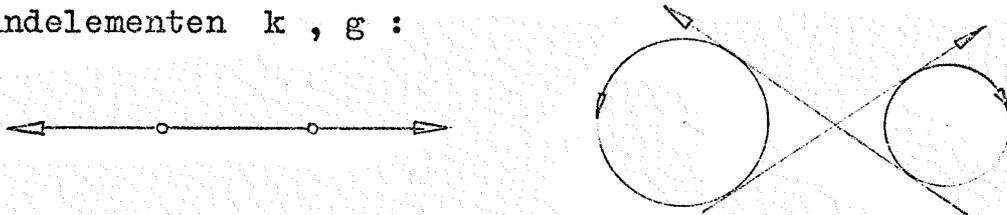
Das sind alle möglichen Erweiterungen des euklid. Kreisbegriffes.

Fall 1:  $\mathcal{P}_e \cup \mathcal{K}_e =: \mathcal{K}_L$

Komplikation:  $\exists$  eine einzige Gerade, die mit 2  $\neq$  Punkten in  $\beta$ -Relation steht, aber ebentuell 4 ( $\neq$ ) Geraden, die mit zwei  $\neq$  (euklid.) Kreisen in  $\beta$ -Relat. stehen.



Vereinheitlichung dieser Fälle durch Übergang zu orientierten Grundelementen  $k, g$  :



$\Rightarrow \exists$  max. 2 gemeinsame Speere.

$\{\vec{k}_e\} =: \vec{\mathcal{K}}_e, \{\vec{g}\} =: \vec{\mathcal{G}}_e; \vec{\mathcal{K}}_e \cup \vec{\mathcal{G}}_e =: \mathcal{L} \dots$  Menge der LAGUERRE-Zykel;  
 $\vec{\mathcal{G}}_e \dots$  euklid. Speere;  
 $\vec{\beta} \dots$  orientierte Berührungsrelation.

Definition: Die euklid. LAGUERRE-Ebene  $\pi_e^{\perp}(\mathcal{L}, \vec{\mathcal{G}}_e; \vec{\beta})$  ist die durch die orientierte Berührungsrelation  $\vec{\beta}$  strukturierte Menge  $\mathcal{L} =$  Menge der orientierten euklid. Kreise und Punkte und die Menge  $\vec{\mathcal{G}}_e$  der euklid. Speere.

Eine Transformation  $\lambda$  in  $\pi_e^{\perp}$  soll möglichst (I) - (IV) erfüllen:

(I) und (III) sind nun zusammenzufassen zu

(I<sub>L</sub>)  $\lambda: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \dots$  bijektiv;

(II) ist zu modifizieren zu

(II<sub>L</sub>)  $\lambda: \vec{\mathcal{G}}_e \rightarrow \vec{\mathcal{G}}_e \dots$  bijektiv;

für (IV) ist

(III<sub>L</sub>)  $\lambda$  ist  $\vec{\beta}$ -invariant

zu setzen.

Durch (I<sub>L</sub>), (II<sub>L</sub>), (III<sub>L</sub>) werden aber genau die LAGUERRE-Transformationen in der euklid. Zykelebene beschrieben (vgl. 4.7);

$\Rightarrow \exists$  ein Modell für diese Geometrie, nämlich die Zyklographie.

$\Rightarrow$  LAGUERRE-Geometrie ist Invariantentheorie der siebengliedr.

Gruppe  $L_7$  der L-Transformationen.

Bemerkung a):  $L_q \cong GO(\Pi_{pe})$

Wir interpretieren die Transformationen aus  $GO(\Pi_{pe})$  als Ebenentransformationen. Eine solche Transf.  $\alpha$  läßt eine Ebene (nämlich  $\omega$ ) fest und vertauscht die Tangentialebenen eines Kegelschnittes  $c \subset \omega$ .

Polarisiert man nun die Ebenenmenge an einer Quadrik  $\phi$ , dann ist die Transformation  $\pi^{-1} \alpha \pi$  (mit  $\pi$  ... Polarität an  $\phi$ ) eine Punkttransformation mit einem Fixpunkt, welche die Punkte eines quadrat. Kegels in ebensolche überführt.  $\Rightarrow$

$L_q$  ist isomorph zur proj. Gruppe der Automorphismen eines quadratischen Kegels.

$\Rightarrow$  Die euklid. Speerebene ist bijektiv zur Punktmenge eines quadrat. Kegels, gelocht in der Spitze.

Satz 29: Faßt man die Punkte und die euklid. Kreise zu einem neuen Kreisbegriff zusammen, so muß man die Geraden und euklid. Kreise orientieren, und die Berührung durch  $\vec{\beta}$  ersetzen, damit möglichst viele Eigenschaften der Ähnlichkeitsgeometrie erhalten bleiben.

Das Ergebnis ist die euklid. LAGUERRE-Geometrie als Verallgemeinerung der euklid. Ähnlichkeitsgeometrie.

Die LAGUERRE-Gruppe ist isomorph zur siebengliedrigen proj. Automorphismengruppe eines quadratischen Kegels und die euklid. Speerebene ist bijektiv zur Punktmenge des Kegels, der in der Spitze gelocht ist.

Bemerkung b): Beh.:  $(I_L), (II_L), (III_L)$  kann abgeschwächt werden zu

$(I_L^*): \lambda: \vec{O}j_e \rightarrow \vec{O}j_e \dots$  parallelentreu

$(II_L^*): \lambda: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \dots$  bijektiv  $(I_L) = (II_L^*)$

$(III_L^*) = (III_L):$  konzykl. Speere  $\xrightarrow{\lambda}$  konzyklische Speere und nicht konzykl. Speere  $\xrightarrow{\lambda}$  nicht konzykl. Speere (d.i. die  $\vec{\beta}$ -Invarianz)

Zu zeigen:  $(I_L^*), (II_L^*), (III_L^*) \iff (I_L), (II_L), (III_L)$

" $\Leftarrow$ " klar

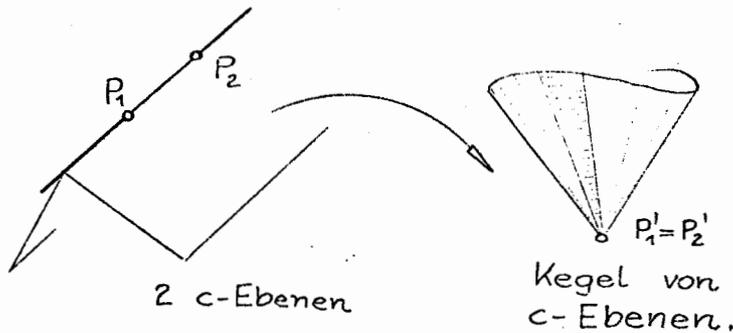
" $\Rightarrow$ " : Aus  $(III_L^*)$  folgt für das c-geometrische Modell  $\Pi_{pe}$  : nicht kopunktale c-Ebenen  $\rightarrow$  nicht kopunktale c-Ebenen,

kopunkt. c-Ebenen  $\mapsto$  kopunktales c-Ebenen;

$(\parallel_L^*) = (\parallel_L)$  bedingt eine Bijektion der c-Ebenenmenge.

Zu zeigen:  $\xi \lambda \xi^{-1} = : \alpha$  ist eine Bijektion im  $\mathbb{T}_{re}$  :  
 $\alpha$  ist global auf der Punktmenge  $\mathcal{P}$  (ein Dreiflach von c-Ebenen = : "Punkt"  $\xrightarrow{\alpha}$  Dreiflach von c-Ebenen = : "Punkt" und jeder Punkt  $\in \mathbb{T}_{re}$  ist aus  $D(\alpha)$  ).

$\alpha$  ist injektiv auf  $\mathcal{P}$  :



$P_1 \neq P_2 \Rightarrow ] 2, 1, 0$   
 c-Ebenen durch  $P_1, P_2$ ,  
 $\alpha \dots$  bijektiv auf der  
 c-Ebenenmenge, also  
 ist  $P_1' = P_2'$  mit  $] 1$   
 c-Kegel von c-Ebenen  
 nicht möglich.

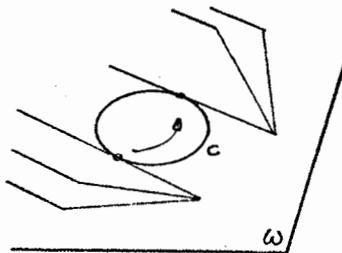
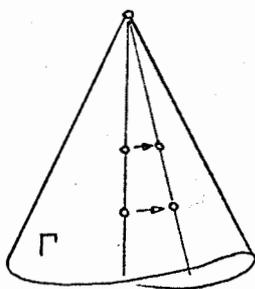
$\alpha$  ist surjektiv auf  $\mathcal{P}$  :

Zu zeigen: Urbilder von drei kopunktalen c-Ebenen sind nicht parallel. Wegen  $(\parallel_L^*)$  gilt: nicht parallele c-Ebenen  $\xrightarrow{\alpha}$  nicht parallele c-Ebenen und parallele c-Ebenen  $\xrightarrow{\alpha}$  parallele c-Ebenen.

$\Rightarrow$  Urbilder sind daher nicht parallel, also kopunktal.

Ergebnis:  $(\parallel_L^*), (\parallel_L^*), (\parallel_L^*)$  äquivalent  $(\parallel_L), (\parallel_L), (\parallel_L)$ .

Bemerkung c): Die Menge der L-Transformationen ist äquivalent zur Menge der Automorphismen  $\alpha$  eines Kegels  $\Gamma$  .



Da bei  $\alpha$  c-Ebenenbüschel in c-Ebenenbüschel transformiert werden, muß  $\alpha$  den Kegel  $\Gamma$  erzeugenderweise in sich abbilden; c-Kegeln in  $\mathbb{T}_{re}$  entsprechen auf Ebene Schnitte

nicht durch die Spitze.

$\Rightarrow$  Die Selbstabbildungen  $\alpha$  von  $\Gamma$  sind so beschaffen, daß gilt:

Punkte einer Erzeugenden  $\xrightarrow{\alpha}$  Punkte einer Erzeugenden;

$\alpha$  ist eine Bijektion der Punktmenge  $\Gamma \setminus \text{Spitze}$ ;

Punkte eines ebenen Schnittes  $\xrightarrow{\alpha}$  Punkte eines ebenen Schnittes.  
 $\alpha$  besitzt also Eigenschaften einer Kollineation im  $P$  eingeschränkt auf  $\Gamma$ .

Es gilt also: Jede Selbstabbildung eines quadrat. Kegels, die obige Eigenschaften besitzt, ist Beschränkung einer automorphen Kollineation von  $\Gamma$  im  $P^3$ . (Die Selbstabbildung  $\alpha$  ist zu einer Kollineation im Gesamtraum "verlängerbar").

Allgemein: Geg. sei eine Punktmenge  $M$  und eine Selbstabbildung  $\alpha$  dieser Punktmenge, die Eigenschaften einer Kollineation hat.

Frage: Wann ist  $\alpha$  zu einer Kollineation im projektiven Trägerraum von  $M$  fortsetzbar?

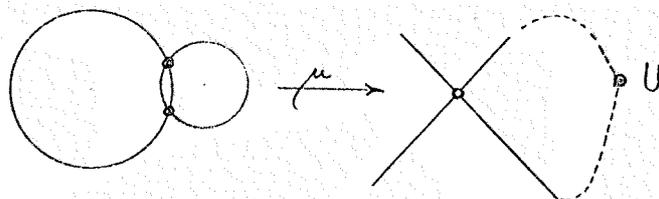
Lösung:  $M$  muß zusätzlich gewisse topologische Eigenschaften erfüllen.

Z.B. Geg.  $\Pi_\alpha, \alpha_\alpha \dots$  Affinität  $\Rightarrow \exists$  Kollineation  $\alpha$ , sodaß  $\alpha_\alpha$  Einschränkung von  $\alpha$  auf  $\Pi_\alpha$  ist.

Fall 2:  $\mathcal{U}_e \cup \mathcal{K}_e =: \mathcal{M} \dots$  Menge der MÖBIUS-Kreise

$\Rightarrow \beta$  ist als zweistellige Relation zwischen  $\mathcal{K}_e$  und  $\mathcal{M}$  zu erklären.

Komplikation: Zwei  $M$ -Kreise aus  $\mathcal{K}_e$  besitzen i.a. zwei Schnittpunkte, zwei  $M$ -Kreise aus  $\mathcal{U}_e$  hingegen höchstens einen! Eine MÖBIUS-Transformation  $\mu: \mathcal{K}_e \rightarrow \mathcal{U}_e$  kann daher zunächst keine Bijektion auf der Punktmenge  $\mathcal{K}_e$  sein.



FESTSETZUNG 1:  $\mathcal{M} := \mathcal{K}_e \cup \{U\}$  ( $U$ ..uneigentlicher Punkt)  
 und genau die  $M$ -Kreise aus  $\mathcal{U}_e$  sollen  $U$  enthalten.  
 ( $M$ -Kreis  $m$  inzidiert mit  $U \iff m \in \mathcal{U}_e$ )

I.f.: Die Menge  $\mathcal{U}_e$  der durch  $U$  "abgeschlossenen" euklid. Geraden und die Menge  $\mathcal{K}_e$  der euklid. Kreise werden zur Menge  $\mathcal{M}$  der MÖBIUS-Kreise zusammengefaßt ( $\mathcal{K}_e \cup \mathcal{U}_e =: \mathcal{M} \dots$  Menge der  $M$ -Kreise).

FESTSETZUNG 2: Die Relation  $\beta$  ist zwischen M-Kreisen und Punkten  $P$  aus der durch  $U$  "abgeschlossenen" Punktmenge  $\mathcal{K}_M = \mathcal{K}_e \cup \{U\}$  definiert und wird mit  $\dot{\beta}$  bezeichnet:

$$(P, m) \in \dot{\beta} \iff P \text{ liegt auf } m.$$

Damit Definition einer neuen euklid. Kreisebene:

Definition:  $\pi_e^M(\mathcal{K}_M, \mathcal{M}, \dot{\beta})$  heißt "MÖBIUS-Ebene" ("konforme Ebene"). Eine Abb.  $\mu$  einer MÖBIUS-Ebene in sich heißt MÖBIUS-Abbildung  $\iff$  wenn gilt:

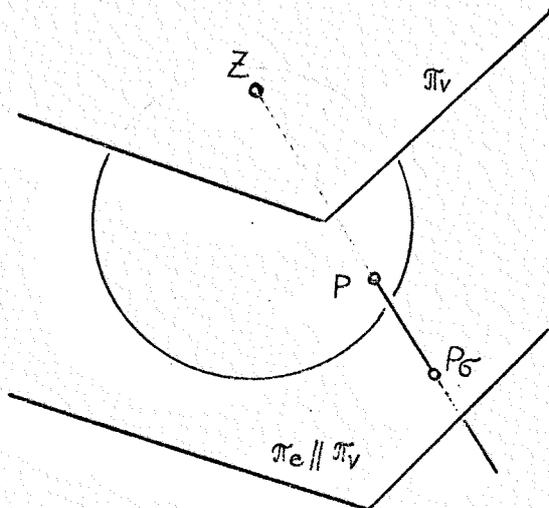
(I<sub>M</sub>)  $\mu: \mathcal{K}_M \rightarrow \mathcal{K}_M$  ist bijektiv;

(II<sub>M</sub>)  $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  ist bijektiv;

(III<sub>M</sub>)  $\mu$  ist  $\dot{\beta}$ -invariant (d.h. kopunktale M-Kreise  $\mapsto$  kopunktale M-Kreise).

Beispiel für die Existenz einer M-Ebene und M-Abbildungen:

Stereographische Projektion  $\sigma$  einer Kugel ("2-Sphäre")  $S^2 \subset \mathbb{T}_e$  (Bildebene  $\pi_e \parallel$  zur Tangentialebene  $\pi_v$  im Zentrum  $Z$  der Proj.  $\sigma$ ).



$\sigma: S^2 \rightarrow \pi_e$  zunächst nicht bijektiv.

Um Bijektion zu erreichen, schließen wir  $\pi_e$  durch einen Punkt  $U$  ab ( $\pi_e \cup \{U\}$  .. "konforme Ebene"), dem wir als Urbild bei  $\sigma$  das Zentrum  $Z$  zuweisen:  $Z\sigma =: U$ .

$\implies$  Kreise auf  $S^2$  werden bei  $\sigma$  auf MÖBIUS-Kreise  $m$  in  $\pi_e \cup \{U\} =: \pi_e^M$  abgebildet und  $\sigma: \mathcal{K}_{S^2} \mapsto \{m\} = \mathcal{M}$  ist bijektiv (klar; denn  $\sigma$  ist winkeltreu, also kreistreu, vgl. 2.9

(III) ; jeder M-Kreis ist Bild eines Kreises von  $S^2$ , jeder Kreis  $\subset S^2$  ist Urbild eines M-Kreises).

Bei  $\sigma$  werden kopunktale Kreise  $\subset S^2$  auf kopunktale M-Kreise abgebildet; umgekehrt haben kopunktale M-Kreise kopunktale Urbilder.

⇒ Durch  $\sigma$  wird ein Übertragungsprinzip der Inzidenzstruktur der 2-Sphäre  $S^2$  (als Menge ihrer Punkte und Kreise und der elementaren Inzidenz) auf die Inzidenzstruktur der MÖBIUS-Ebene vermittelt. (⇒  $\exists$  M-Ebenen).

Sei  $\alpha$  eine automorphe Kollineation von  $S^2$  ( $\alpha \in O(S^2)$ ,  $O(S^2)$ ..sechsgliedrige Gruppe der projektiven Automorphismen von  $S^2$ ).

⇒  $\alpha$  vertauscht die Punkte von  $S^2$  ( $\alpha: \mathbb{P}_{S^2} \rightarrow \mathbb{P}_{S^2}$  bijektiv) und die Kreise von  $S^2$  (ebene Schnitte  $\xrightarrow{\alpha}$  ebene Schnitte von  $S^2$ ,  $\alpha: \mathcal{K}_{S^2} \rightarrow \mathcal{K}_{S^2}$  bijektiv).

Erklärt man eine Abb.  $\mu: \mathbb{P}_M \rightarrow \mathbb{P}_M$  durch  $\mu := \sigma^{-1} \alpha \sigma$  mit  $\alpha \in O(S^2)$ ,  $\sigma$ ...stereogr. Proj., dann erfüllt  $\mu$  die Eigenschaften  $(I_M)$ ,  $(II_M)$ ,  $(III_M)$ :

$$(I_M) \quad \mu: \mathbb{P}_M \rightarrow \mathbb{P}_M \text{ bijektiv, denn } \mathbb{P}_M \xrightarrow[\text{bij.}]{\sigma^{-1}} \mathbb{P}_{S^2} \xrightarrow[\text{bij.}]{\alpha} \mathbb{P}_{S^2} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}_M$$

$$(II_M) \quad \mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \text{ bijektiv, denn } \mathcal{M} \xrightarrow[\text{bij.}]{\sigma^{-1}} \mathcal{K}_{S^2} \xrightarrow[\text{bij.}]{\alpha} \mathcal{K}_{S^2} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{M}$$

$$(III_M) \quad \mu \text{ ist } \beta\text{-invariant, denn kopunktale M-Kreise } \xrightarrow{\sigma^{-1}} \text{ kop.Kreise } \in S^2 \xrightarrow{\alpha} \text{ kop.Kreise } \in S^2 \xrightarrow{\sigma} \text{ kop. M-Kreise.}$$

⇒  $\exists$  M-Abbildungen.

$\{\alpha, \cdot\} = O(S^2)$  ist eine sechsgliedrige Gruppe ⇒ die Menge der oben erklärten M-Abb.  $\mu = \sigma^{-1} \alpha \sigma$  bildet hinsichtlich der Verknüpfung gleichfalls eine sechsgliedrige Gruppe ( $\mu_1 \cdot \mu_2 = \sigma^{-1} \alpha_1 \sigma \cdot \sigma^{-1} \alpha_2 \sigma = \sigma^{-1} (\alpha_1 \alpha_2) \sigma$ ).

Es gilt (ohne Beweis): Jede M-Abb.  $\mu: \mathbb{P}_M \rightarrow \mathbb{P}_M$  ist erzeugbar als stereographisches Bild einer automorphen Koll. von  $S^2$ .

Ergebnis: Die stereograph. Abb.  $\sigma$  vermittelt einen Gruppenisomorphismus zwischen  $O(S^2)$  und der (sechsgliedr.) Gruppe  $M_6(\mathbb{P}_M) := \{\mu, \cdot\}$ . (Von  $S^2$  werden bei diesem Isomorphismus bloß projektive Eigenschaften benützt;  $S^2$  ist also i.w. eine ovale Quadrik  $c P^3(\mathbb{R})$ .)

Bemerkung:  $(I_M), (II_M), (III_M)$  kann abgeschwächt werden zu  $(I_M^*) = (I_M), (III_M^*) = (III_M); (II_M^*): \mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  ist M-kreis-treu.

$\mu$  ist dann automatisch Bijektion auf  $\mathcal{M}$ ; denn mit  $\mu$  ist vermöge  $\sigma$  eine Kollineation  $\alpha$  gekoppelt. Aus  $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  bijektiv und inzidenzentreu folgt automatisch, daß  $\alpha: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  bijektiv auf der Ebenenmenge und damit bijektiv auf der Menge der ebenen Schnitte, von  $S^2$  ist.

(Diese Plausibilitätserklärung benützt die Fortsetzbarkeit der Selbstabbildungen von  $S^2$ , die auf der Punktmenge von  $S^2$  bijektiv sind, Punkte auf einem Kreis der  $S^2$  in wieder solchen Punkte überführen und die Inzidenzen zwischen Punkten und Kugelnkreisen erhalten, zu einer Kollineation im  $P^3$ .

Notwendige Bedingung für diese Fortsetzbarkeit ist die Voraussetzung der Regularität von  $S^2$ . Der Beweis dafür und für die Äquivalenz von  $(I_M) - (III_M)$  und  $(I_M^*) - (III_M^*)$  wurde 1961 von R. WAGNER erbracht).

Folg.1: Jede M-Transformation ist eine Berührungstranf.

Zu zeigen: Berührende M-Kreise  $\xrightarrow{\mu}$  berührende M-Kreise.

"Berührende M-Kreise" sind solche, die einen Punkt gemeinsam haben und keinen zweiten. Hieraus folgt mittels  $(I_M)$  ( $\mu$  Bijektion auf  $\mathcal{P}_M$ ) obige Behauptung.

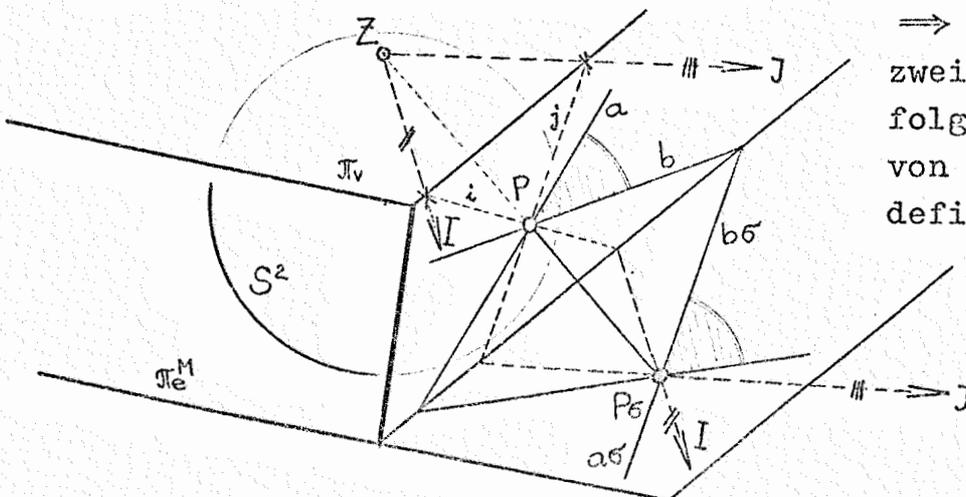
Bemerkung: Insbesondere sind // verschiedene Geraden als berührende M-Kreise anzusprechen.

Folg.2:  $\mu$  ist "konform" (winkeltreu).

$\sigma$  ist konform (vgl. 2.9. (III))

$R \subset \mathcal{C}$ :  $\alpha$  führt Erzeugenden von  $S^2$  in Erzeugenden über.

$\Rightarrow$  Für den Winkel zweier Tangenten  $a, b$  folgt wegen der DV-treue von  $\alpha$  und der Winkeldefinition nach LAGUERRE:



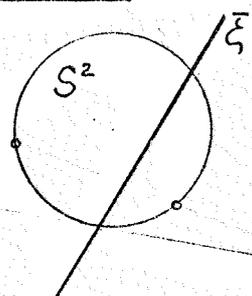
$DV(a,b,i,j) = DV(a\alpha, b\alpha, i\alpha, j\alpha)$  mit  $i, j$  und  $i\alpha, j\alpha \dots$  Erzeugenden von  $S^2$ .

$\Rightarrow \angle ab = \angle a\alpha b\alpha$

$\Rightarrow \alpha$  ist winkeltreu.

$\Rightarrow \mu = \sigma^{-1} \alpha \sigma$  ist winkeltreu.

Folg. 3:  $O(S^2)$  enthält involutorische Automorphismen  $\alpha$  von  $S^2$



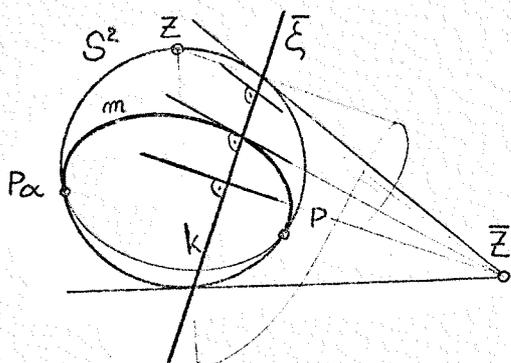
$\alpha^2 = \iota$  ..harmonische Homologie mit Zentrum  $\bar{Z}$  nicht auf  $S^2$ ; ( $\Rightarrow$  Achse ist Polarebene  $\bar{\xi}$  von  $\bar{Z}$  bezügl.  $S^2$ ).

$\{\alpha \in O(S^2) \mid \alpha^2 = \iota\}$  erzeugen  $O(S^2)$ , d.h.  $\alpha$  bel.  $\in O(S^2)$  ist endliches Produkt von invol. Autom.  $\alpha_j$ .

Ergebnis: Die Gruppe  $M_6$  ist aus  $\{\mu_i^* := \sigma^{-1} \alpha_i \sigma\}$  erzeugbar.

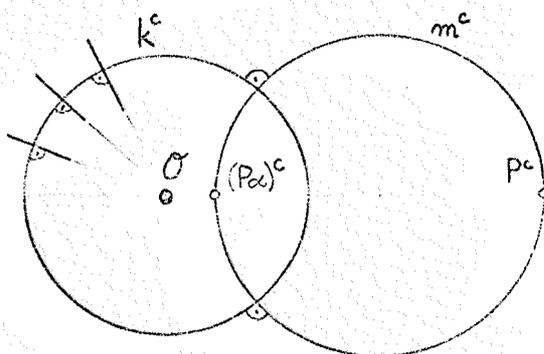
Beh.: Das stereograph. Bild einer harmon. Homologie mit einem Außenpunkt von  $S^2$  als Zentrum ist eine elementare Kreis-inversion.

[ Kreisinversion an  $k$  (Mitte  $\sigma$ ):  $\Leftrightarrow$  Ur- und Bildpunkt sind mit  $\sigma$  kollinear und  $kj$  bezügl.  $k$ . Dem Mittelpunkt  $\sigma$  von  $k$  wird der uneigentliche Punkt  $U$  als Bild zugewiesen.]



Beh.:  $\bar{Z}\sigma = \sigma$ ..Mittelpunkt des Inversionskreises  $k^c = k\sigma$ .

denn: die Erzeugenden des  $S^2$  aus  $\bar{Z}$  umschriebenen Drehkegels schneiden  $k = \bar{\xi} \cdot S^2$  orthogonal und werden bei  $\sigma$  auf ein Strahlbüschel abgebildet, für welches  $k^c$  Orthogonaltrajektorie ist.



Beh.: Ursprung  $P^c$  und Bildpunkt  $(P\alpha)^c$  sind mit  $\sigma = \bar{Z}\sigma$  kollinear; denn:  $P, P\alpha, \bar{Z}$  kollinear und  $\sigma \dots$  Kollineation.

Beh.:  $P^c$  und  $(P\alpha)^c$  sind kj. bezügl.  $k^c$ ;

denn: Jeder durch  $P$  und  $P\alpha$  gehende Kreis  $m$  von  $S^2$  schneidet  $k$  orthogonal ( $m$  berührt zwei Erzeugenden des Tangentialkegels aus  $\bar{Z}$  an  $S^2$ ).  $\xrightarrow{\sigma}$  Der Bildkreis  $m$  durch  $P^c$  und  $(P\alpha)^c$  schneidet  $k^c$  orthogonal;  $\implies P^c$  und  $(P\alpha)^c$  sind kj. bezügl.  $k^c$  (Proj. Geom.).

Bemerkung: Aus  $\bar{Z} \sigma = \mathcal{O}$  und der Winkeltreue von  $\sigma$  folgt die Kreistreue von  $\sigma$ , da das Bild eines Kreises alle Geraden des Büschels  $\mathcal{O}$ , welche die Bilder der Kegelerzeugenden aus  $\bar{Z}$  sind, orthogonal durchsetzen muß.

Folg. 4: Die konforme Ebene ist i.w. identisch mit der GAUSS'schen Zahlenebene  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} =: \dot{\mathbb{C}}$  und der RIEMANN'schen Zahlenkugel.

Jede gleichsinnig konforme Abb.  $\mu \in M_{\mathbb{C}}$  wird daher beschrieben durch eine holomorphe Funktion  $z \mapsto f(z) \wedge z = x+iy$ , wobei wegen  $\mu$  ...Bijektion gilt:

$D(f) = \dot{\mathbb{C}} \wedge \text{Im}(f) = \dot{\mathbb{C}} \implies f(z)$  ist eine in ganz  $\dot{\mathbb{C}}$  erklärte (bijektive) holomorphe Funktion, die höchstens Pole, aber keine wesentlichen Singularitäten besitzen kann. Also ist  $w=f(z)$  eine rationale Funktion.

$$w = f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad \text{mit } h(z), g(z) \text{ ..Polynome.}$$

Beh.:  $\deg g(z) \leq \deg h(z) \leq 1$ , also  $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$

denn:  $w \cdot h(z) - g(z) = 0$  muß für jedes feste  $w = w_0$  wegen  $\mu$  ...Bijektion einen eindeutigen  $z$ -Wert als Lösung besitzen, also hat  $w_0 \cdot h(z) - g(z) = 0$  genau eine Nullstelle  $z$ , ist daher linear.

$$\mu \text{ ...injektiv} \iff \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Die Menge der gleichsinnig konformen M-Transform.  $\mu$  bilden die Untergruppe  $M_{\mathbb{C}}^+$  von  $M_{\mathbb{C}}$  und wird beschrieben durch die Menge der holomorphen Funktionen  $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$

Bemerkung: Die gegenseitig konformen M-Transf. entstehen durch Zusammensetzung der gleichsinnig konformen mit einer einzigen gegenseitigen konformen, z.B.  $z = \bar{z}$  in der Form  $w = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}$  ( $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ).

Zur Parameterzählung und zur Erfassung von  $\infty$  homogenisieren wir:  $w = \frac{w_1}{w_0}$ ,  $z = \frac{z_1}{z_0}$ ,  $w_j, z_j \in \mathbb{C}$   
 $U \dots (0, z_1)$  ( $z_1 \neq 0$ ).

$$\Rightarrow \mu \dots \begin{cases} w_1 = \alpha z_1 + \beta \\ w_0 = \gamma z_1 + \delta \end{cases} \wedge \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

Diese Abbildungsgleichungen beschreiben aber auch eine proj. Selbstabbildung einer komplexen projektiven Geraden!  
 Die Menge dieser Selbstabbildungen bildet die proj. Gruppe  $PGL(2, \mathbb{C})$  (Proj. Geom.).

Somit gilt:  $M_b^+$  ist isomorph zu  $PGL(2, \mathbb{C})$

Bemerkung: Zu jeder gegenseitig konformen M-Abb. gehört eine Antiprojektivität der komplexen projektiven Geraden.

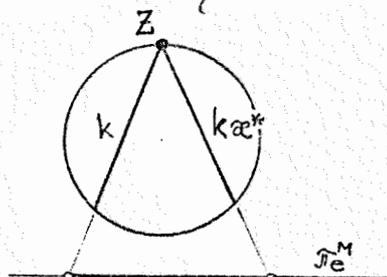
Satz 28: Faßt man die Geraden und die euklid. Kreise zu einem neuen Kreisbegriff zusammen, so muß man die affine Ebene konform abschließen, um die Eigenschaften der euklid. Ähnlichkeiten möglichst zu erhalten.

Die MÖBIUS-Gruppe  $M_b$  ist isomorph zur sechsgliedrigen proj. Automorphismengruppe einer ovalen Quadrik im dreidim. reellen proj. Raum.

Die sechsgliedrige Gruppe  $M_b^+$  der gleichsinnigen MÖBIUS-Transformationen ist isomorph zur proj. Gruppe einer komplexen proj. Geraden.

Bemerkung: Die geradentreuen M-Abbild.  $\mu^*$  sind genau die euklid. Ähnlichkeiten:

Beweis:  $\mu^* = \sigma^{-1} \alpha^* \sigma \dots$  geradentreu  $\Rightarrow \alpha^*$  ist so beschaffen, daß Kreise (und daher Ebenen) durch  $Z$  in ebensolche übergehen.  
 $\Rightarrow \alpha^*$  hat Fixpunkt  $Z$ .  
 $\Rightarrow \{\alpha^*, \dots\} \dots$  Untergruppe von  $O(S^2)$  mit Fixpunkt  $Z$ .  
 Da  $Z$  fest, kann  $S^2$  in  $Z$  punktiert werden  $\Rightarrow$  die M-Ebene  $\pi_e^M$  ist in  $U$  zu punktieren.  $\Rightarrow \pi_e^M \setminus \{U\}$  ist aber die gewöhnliche euklid. Ebene  $\pi_e$  und  $\mu^*|_{\pi_e}$  besitzt genau die Eigenschaften einer euklid. Ähnlichkeit, nämlich:



- (I)  $\mu^*: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  (affine Punktmenge) bijektiv
- (II) koll. Pkte.  $\xrightarrow{\mu^*}$  koll. Punkte).

(III)  $\mu^* \in M_6$ , also konform  $\Rightarrow \mu^* | \pi_e$  konform.

Hieraus folgt: Die Gruppe der euklid. Ähnlichkeiten  $GO(\pi_e)$  ist isomorph zur Gruppe jener proj. Automorphismen einer ovalen Quadrik, die alle einen festen Fixpunkt auf der Quadrik besitzen.

Fall 3:  $\mathcal{K}_e \cup \mathcal{U}_e \cup \mathcal{Q}_e = \mathcal{L} \dots$  "LIE-Kreise".

$\Rightarrow$  LAGUERRE-Kreise sind spezielle LIE-Kreise  $\Rightarrow$   
Orientierungen notwendig:  $\mathcal{K}_e \cup \mathcal{U}_e \cup \mathcal{Q}_e$

MÖBIUS-Kreise sind spezielle LIE-Kreise  $\Rightarrow$   
Konformer Abschluß notwendig:  $\mathcal{K}_e \cup \{U\} =: \mathcal{K}_N$

Definition:  $\{U\} \cup \mathcal{K}_e \cup \mathcal{U}_e \cup \mathcal{Q}_e =: \mathcal{L} \dots$  Menge der LIE-Kreise

$\Rightarrow$  Die Relation  $\beta$  ist so zu modifizieren, daß sie eine Teilmenge aus  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$  wird:  $\vec{\beta}_N$  besitzt Eigenschaften von  $\vec{\beta}$  (LAGUERRE-Geom.) und von  $\beta$  (MÖBIUS-Geometrie) und ist als "gleichsinnige Berührung" zweier LIE-Kreise  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  erklärt.

$$\begin{aligned} \vec{n}_1, \vec{n}_2 \in \mathcal{K}_e & \quad \wedge \quad \vec{n}_1 \vec{\beta}_N \vec{n}_2 \iff \begin{array}{c} \vec{n}_1 \quad \bigcirc \quad \vec{n}_2 \\ \text{---} \quad \bigcirc \quad \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ \vec{n}_1 \in \mathcal{K}_e, \vec{n}_2 \in \mathcal{U}_e & \quad \wedge \quad \vec{n}_1 \vec{\beta}_N \vec{n}_2 \iff \begin{array}{c} \vec{n}_1 \quad \bigcirc \quad \vec{n}_2 \\ \text{---} \quad \bigcirc \quad \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ \vec{n}_1, \vec{n}_2 \in \mathcal{U}_e & \quad \wedge \quad \vec{n}_1 \vec{\beta}_N \vec{n}_2 \iff \begin{array}{c} \vec{n}_1 \quad \text{---} \quad \vec{n}_2 \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{ gleichsinnig } // \cdot \\ \vec{n}_1 \in \mathcal{K}_e \text{ oder } \mathcal{U}_e, \vec{n}_2 \in \mathcal{K}_N & \quad \wedge \quad \vec{n}_1 \vec{\beta}_N \vec{n}_2 \iff \vec{n}_2 \perp \vec{n}_1. \end{aligned}$$

Definition:  $\pi_e^N := \{\mathcal{L}; \vec{\beta}_N\}$  heißt euklid. LIE-Ebene.

Eine Abbildung  $\nu$  der LIE-Ebene in sich heißt LIE-Transformation  $\iff$  wenn gilt:

(I<sub>N</sub>) :  $\nu: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  ist bijektiv

(II<sub>N</sub>) :  $\nu$  ist  $\vec{\beta}_N$ -invariant.

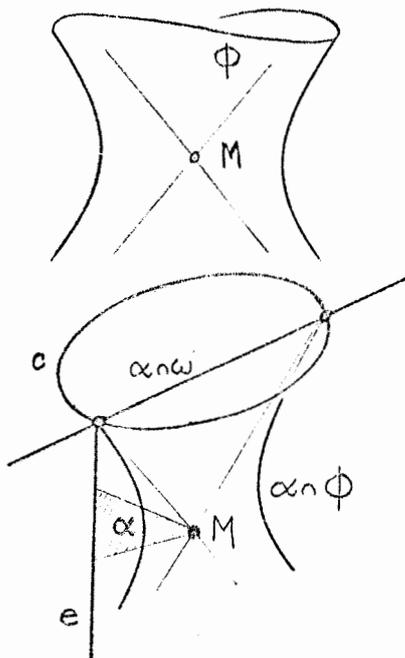
Die Existenz eines Modelles einer LIE-Ebene ist durch die Herleitung von der euklid. Kreisebene gesichert; die Existenz von LIE-Abb.  $\nu$  ist noch offen.

Zwischenbemerkung:

Da die LAGUERRE-Geometrie in der LIE-Geometrie (N-Geometrie) enthalten ist, kann die Zyklographie  $\xi$  als Übertragungsprinzip benützt werden.

Wir werden zeigen, daß spezielle LIE-Transf. vermöge  $\xi$  auf Inversionen an c-Kugeln  $c \subset \mathbb{T}_{pe}$  führen.

"Inversion  $\rho$  an einer c-Kugel  $\phi \subset \mathbb{T}_{pe}$ ":



$\rho: \mathbb{T}_{pe} \rightarrow \mathbb{T}_{pe}$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $P, P_\rho = P'$  sind kj. bzgl.  $\phi$
- (2)  $P, P', M$  sind kollinear ( $M \dots$  Mitte von  $\phi$ ).

( $\Rightarrow \forall P \in \phi$  gilt:  $P = P'$ )

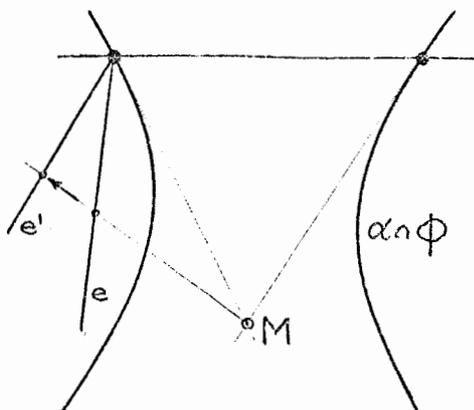
Bemerkung:  $\rho$  ist nur für eigentliche Pkte. definiert.

Wir erweitern  $\rho$  auf c-Geraden nicht durch  $M$ :

c-Gerade  $e \Rightarrow Me = \alpha \dots$  steilgängig und  $\alpha \cap \phi$  ist ein Kegelschnitt.

Wir untersuchen die Einschränkung von  $\rho$  auf  $\alpha$ :

Geg. ist ein Kegelschnitt  $\alpha \cap \phi$  und ein "Tangentendreieck";



ges. Punkte, die kj. zu  $(\alpha \cap \phi)$  und kollinear mit dem Schnittpunkt  $M$  der Tangenten sind.

$\rho|_\alpha$  ist eine quadrat. Abb. und heißt "HIRSTsche Inversion" (Verallgemeinerung der euklid. Kreis inversion).

$\Rightarrow$  Jede Gerade  $e$  durch einen Hauptpunkt  $\neq M$  geht in eine Gerade  $e'$  durch diesen Hauptpunkt über.  $\implies$

$\implies$  Jede c-isotrope Gerade nicht durch  $M$  geht in eine dazu parallele c-Gerade über.

#### FESTSETZUNGEN:

Da zu jedem Punkt  $P$  des Asymptotenkegels  $\Gamma$  von  $\phi$  nur Fernpunkte konjugiert liegen, die nicht in  $\text{im } \rho$  enthalten sind, gilt: Kegelpunkte sind Ausnahmepunkte.

Man schließt nun  $\mathbb{T}_{pe}$  "konform" ab; d.h. man adjungiert zu  $\mathbb{T}_{pe}$  einen "uneigentlichen quadratischen Kegel  $\bar{\Gamma}$  mit der uneigentlichen Spitze  $U$ ". Dessen Erzeugenden heißen

"uneigentliche c-Geraden" und sind die  $\varphi$ -Bilder der Erzeugenden des Asymptotenkegels; die Spitze  $U$  soll das  $\varphi$ -Bild von  $M$  sein.

Bemerkung: Dieser Abschluß ist c-konform, da sich die Winkelmetrik auf c-Geraden stützt und diese in c-Geraden übergehen. Daraus folgt bereits die c-Konformität, da jede analytische Punkttransformation lokal projektiv ist.

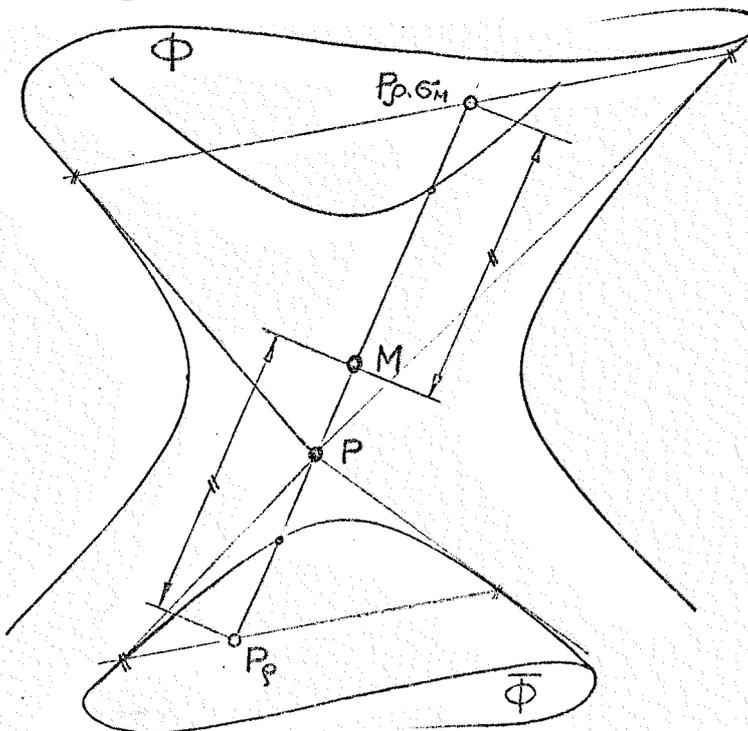
Damit gilt:

Das zyklograph. Bild einer Inversion an einer c-Kugel  $\Phi$  ist eine LIE-Transformation.

Zum Beweis genügt es, die Inversion an einer c-Kugel  $\Phi$  mit der Mitte  $M$  in  $\mathbb{R}e^N$  zu betrachten. Jede anders liegende c-Kugel kann nämlich mittels einer geeigneten c-Spiegelung  $\alpha_\sigma$  an einer nicht c-isotropen Ebene  $\sigma$  in eine solche c-Kugel übergeführt werden.

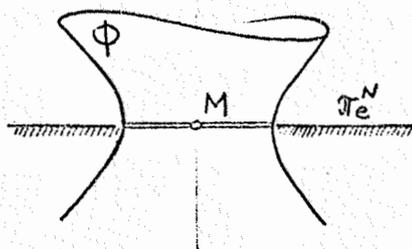
$\alpha_\sigma$  ist eine c-kongruente Transf., also erfüllt das  $\alpha_\sigma$ -Bild einer Inversion an einer allgemeinen c-Kugel die Eigenschaften (1) und (2) und ist somit eine Inversion am  $\alpha_\sigma$ -Bild dieser c-Kugel. Das  $\xi$ -Bild von  $\alpha_\sigma$  ist aber eine LAGUERRE-Transformation  $\lambda$ , also eine spezielle LIE-Transf..

Es ist ferner gleichfalls keine Einschränkung,  $\Phi$  als einschalig vorauszusetzen: Die Inversion an einer zweischaligen



c-Kugel  $\Phi$  ist nämlich Produkt der Inversion an der konj. (einschaligen) c-Kugel  $\bar{\Phi}$  und der Punktspiegelung am Mittelpunkt  $M$ . Letztere ist Produkt von drei c-Spiegelungen an nichtisotropen Ebenen.  $\xrightarrow{\xi}$  Das Produkt ist also eine LIE-Transf..

$\Rightarrow$  Vs.:  $\Phi$  ...einschalige c-Kugel mit Mitte  $M \in \pi_e^N$ .  
 Die Inversion  $\varphi$  an  $\Phi$  läßt die Ebenen durch  $M$  als  
 Ganzes fest  $\Rightarrow \pi_e^N$  bleibt fest.



$\Rightarrow \varphi|_{\pi_e^N}$  ist die euklid. Inversion am  
 Kehlkreis von  $\Phi$  und stimmt mit dem  
 $\zeta$ -Bild von  $\varphi|_{\pi_e^N}$  überein.  $\Rightarrow \varphi|_{\pi_e^N}$  ist  
 also eine MÖBIUS-Transf. (und daher  
 sicher eine LIE-Transf.  $\nu$  ).

Damit läßt sich nun eine MÖBIUS-Geometrie in dreidimensionalen  
 pseudoeuklid. Raum  $\mathbb{P}_{pe}^M$  analog zur M-Geometrie in  $\pi_e^M$   
 konstruieren:

Alle Ebenen des konform abgeschlossenen Raumes  $\mathbb{P}_{pe}^M$  ent-  
 halten die Spitze  $U$  des uneigentlichen Kegels  $\bar{U}$  und  
 werden dann zusammen mit den c-Kugeln und den c-Kegeln als  
 MÖBIUS-c-Kugeln aufgefaßt.  $\pi_e^N$  ist eine Ebene aus  $\mathbb{P}_{pe} \cup \bar{U}$ ,  
 also inzidiert  $\pi_e^N$  mit  $U$ .  $\Rightarrow$  Das zyklgraphische  
 Bild von  $\bar{U}$  ist genau dieser Punkt  $U$ .

Analog zu früher gilt: Jede M-Abbildung im  $\mathbb{P}_{pe}^M$  ist  
 endliches Produkt von Inversionen an c-Kugeln.

Umkehrung (ohne Beweis): Jede LIE-Abb.  $\nu$  ist zyklgraph.  
 Bild einer MÖBIUS-Transf. im konform abgeschlossenen  
 pseudoeuklid. Raum. (Zum Beweis ist ein "Fortsetzungssatz"  
 erforderlich).

Ergebnis: Das zyklgr. Bild der MÖBIUS-Gruppe des konform  
 abgeschl. pseudoeuklid. Raumes ist die Gruppe der LIE-Trans-  
 formationen.

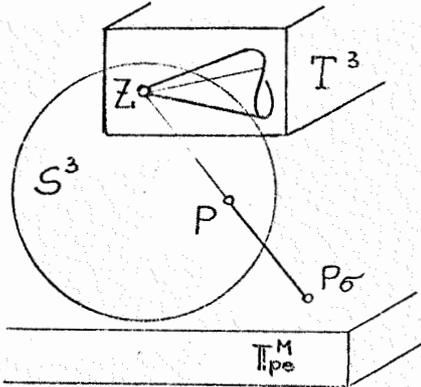
Diese MÖBIUS-Gruppe ist zehngliedrig und wird mit  $M_{10}(\mathbb{P}_{pe}^M)$   
 bezeichnet.

$\Rightarrow$  LIE-Gruppe  $\cong M_{10}(\mathbb{P}_{pe}^M)$ .

Analog zur Übertragung der M-Gruppe  $M_6(\pi_e^M)$  auf die Auto-  
 morphismengruppe einer 2-Sphäre  $S^2$  mittels einer stereograph.  
 Projektion soll nun die M-Gruppe  $M_{10}(\mathbb{P}_{pe}^M)$  auf die Auto-  
 morphismengruppe einer Hyperquadrik  $S^3$  im vierdimensionalen  
 euklid. Raum  $E^4$  übertragen werden.

Beh.:  $S^3$  ist ringartig;

denn: Bei der stereographischen Proj.  $\sigma^{-1}: \mathbb{T}_{pe}^M \rightarrow S^3$  aus  $Z \in S^3$  werden einschalige c-Kugeln  $\Phi$  auf die Schnittquadrik  $M_2^2$  von  $S^3$  mit dem dreidim. Verbindungsraum  $[\Phi Z]$  abgebildet.  $\sigma^{-1}$  ist als Zentralprojektion geradentreu  $\Rightarrow M_2^2$  ist ringartig  $\Rightarrow S^3$  trägt reelle Erzeugenden, ist also eine ringartige Hyperquadrik im  $E^4$ .



$\Rightarrow$  Der Schnitt von  $S^3$  mit dem dreidim. Tangentialraum  $T^3$  in  $Z$  ist ein quadratischer Kegel  $N_2^2$ . Die stereographische Proj.  $\sigma$  eingeschränkt auf  $S^3 \setminus N_2^2$  ist eine Bijektion auf  $\mathbb{T}_{pe}$ . Jede Erzeugende von  $N_2^2$  hat einen einzigen Bildpunkt  $\Rightarrow$  Bijektion ist gestört.

$\Rightarrow$  FESTSETZUNG:  $\sigma$  soll dem Tangentialschnitt  $N_2^2$  den uneigentlichen Kegel  $\square \subset \mathbb{T}_{pe}^M$  zuweisen; speziell  $Z \xrightarrow{\sigma} U$ .  
 $\Rightarrow \sigma: S^3 \rightarrow \mathbb{T}_{pe}^M$  ist bijektiv.

Ergebnis: Die oben erklärte stereographische Proj.  $\sigma: S^3 \rightarrow \mathbb{T}_{pe}^M$  vermittelt einen Isomorphismus zwischen der Gruppe der automorphen proj. Kollineationen von  $S^3$  im  $E^4$  und der MÖBIUS-Gruppe  $M_{10}(\mathbb{T}_{pe}^M)$ .

$\Rightarrow$  Die LIE-Gruppe der euklid. LIE-Ebene  $\pi_e^N$  ist isomorph zur zehngliedrigen proj. Automorphismengruppe einer ringartigen Hyperquadrik  $S^3$  im proj. reellen vierdimensionalen Raum  $P^4(\mathbb{R})$ .

Faßt man  $S^3$  auf als (reguläre) Schnittvarietät im fünfdimensionalen proj. Raum  $P^5$  einer Hyperquadrik  $M_4^2$  mit einer nicht tangentialen Hyperebene  $P^4$ , dann gestattet die Automorphismengruppe von  $S^3$  auch eine liniengeometrische Deutung; und zwar gilt unter Benützung der (bijektiven) KLEINSchen Abbildung  $\&$  der Geraden des proj. Raumes  $P^3$  auf die Punkte von  $M_4^2$  ("KLEINSche Hyperquadrik"  $\subset P^5$ ) als Übertragungsprinzip:

Das  $\&$ -Bild der Geraden eines Gewindes  $\subset P^3$  ist eine reguläre ringartige dreidimensionale Quadrik  $M_3^2$  auf  $M_4^2$ . ( $M_3^2 = M_4^2 \cap P^4$ ). Das  $\&$ -Bild einer proj. Kollineation oder Korrelation ist ein proj. Automorphismus von  $M_4^2$ .  $\Rightarrow$  Die Automorphismen von  $S^3 \subset M_4^2$  können als spezielle Automorphismen der  $M_4^2 \subset P^5$  angesprochen

werden, nämlich solche, die auch die von  $S^3$  aufgespannte Hyperebene  $P^4 \subset P^5$  als Ganzes festlassen. Vermöge  $\gamma^{-1}$  gehören zu diesem Automorphismen genau jene proj. Kollineationen und Korrelationen im Linienraum des  $P^3$ , welche ein Gewinde als Ganzes festlassen. Die Menge dieser Koll. und Korr. bildet hinsichtlich der Produktbildung eine zehngliedrige Untergruppe der (fünfzehngliedrigen) proj. Gruppe  $PGL(4, R)$ , die sogenannte "symplektische Gruppe"  $PGSp(4, R)$ .

$$\text{LIE-Gruppe in } \pi_e^N \cong M_{40}(\mathbb{P}_{pe}^M) \cong PGSp(4, R),$$

Satz 31: Faßt man die Punkte, die Geraden und die euklid.

Kreise zu einem neuen Kreisbegriff zusammen, so muß man die euklid. Ebene konform abschließen, die Geraden und Kreise orientieren und die Berührung durch gleichsinnige Berührung ersetzen, um die Eigenschaften der Ähnlichkeitsgeometrie möglichst zu erhalten.

Die LIE-Gruppe ist isomorph zur zehngliedrigen MÖBIUS-Gruppe des konform abgeschlossenen pseudo-euklid. Raumes und isomorph zur symplektischen Gruppe des dreidimensionalen proj. Raumes.

Bemerkung a): LAGUERRE-Geometrie im dreidim. pseudo-euklid.

Raum  $\mathbb{P}_{pe}$  :

Man faßt die Punkte und c-Kugeln zu einem neuen c-Kugelbegriff zusammen. Dann ] ein Übertragungsprinzip des pseudo-euklid. LAGUERRE-Raumes auf einen dreidimensionalen Kegel  $N_3^2$ , welcher seinerseits mittels der KLEINSchen Abbildung auf ein Gebüsch im Geradenraum des  $P^3$  übertragen werden kann.

⇒ Die LAGUERRE-Gruppe des  $\mathbb{P}_{pe}$  ist isomorph zur elfgliedrigen Automorphismengruppe eines Gebüsches im  $P^3$ .

Bemerkung b): LIE-Geometrie im  $\mathbb{P}_{pe}$  :

Analog zu früher gilt: LIE-Geometrie im  $\mathbb{P}_{pe}$  mit geeignetem Abschluß ist MÖBIUS-Geometrie im vierdimensionalen Raum  $P^4$  mit geeignetem Abschluß.

Diese M-Geometrie im  $P^4$  ist vermöge einer stereograph.

Projektion identisch mit der Geometrie auf einer Hyperquadrik

$M_4^2 \subset P^5$ , also mittels der KLEINSchen Abbildung i.w. identisch mit der proj. Geometrie im Geradenraum des  $P^3$ .

$\Rightarrow$  Die LIE-Gruppe im  $\mathbb{P}_{pe}$  (nach geeignetem Abschluß) ist isomorph zur fünfzehngliedrigen proj. Gruppe im Geradenraum des  $P^3$ .

Hiermit ist eine bijektive Abbildung der Geraden  $g$  auf (orientierte)  $c$ -Kugeln möglich (LIEsche Geraden-Kugel-Transformation. Bei LIE ist diese Abbildung zwischen Geraden aus  $E^3(\mathbb{C})$  auf euklid. Kugeln aus  $E^3(\mathbb{C})$  beschrieben).