ANTRITTSVORLESUNGEN DER
TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN

12

o. Hochschulprofessor für Geometrie

DR. PHIL. DR. TECHN. HEINRICH BRAUNER

GEDANKEN ÜBER GEOMETRIE

Gehalten am 28. Januar 1970

WIEN 1970
VERLAG DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE WIEN

GEDANKEN ÜBER GEOMETRIE

Die Geometrie ist, wie ihre Wortbedeutung beweist, aus nützlichen Kenntnissen empirischen Charakters entstanden. Auch heute noch besitzt sie engere Verbindungen zu technischen Disziplinen als andere Teilgebiete der Mathematik. Dadurch entsteht eine reizvolle Polarität in den Aufgaben eines Instituts für Geometrie, welche von der angewandten Geometrie bis zur im Sinne der reinen Mathematik betriebenen Geometrie reichen. Natürlich gehört nicht alles zur angewandten Geometrie, was in anderen Wissensgebieten geometrische Begriffsbildungen und Ergebnisse geometrischer Forschungen benützt oder sogar zu neuen geometrischen Problemstellungen Anlaß gibt. So wird niemand die von A. Einstein begonnene Geometrisierung physikalischer Begriffe zur angewandten Geometrie rechnen. Zur zweckmäßigeren mathematischen Beschreibung physikalischer Phänomene wird der euklidische Erfahrungsraum in der speziellen Relativitätstheorie durch die vierdimensionale Minkowskische Raum-Zeitwelt ersetzt, an deren Stelle in der allgemeinen Relativitätstheorie ein vierdimensionaler Riemannscher Raum tritt; seine Krümmungseigenschaften sind durch die vorhandene Materie bestimmt. Das Programm einer einheitlichen Feldtheorie besteht geradezu in einer Interpretation der Gravitationsfelder und der elektromagnetischen Felder durch geometrische Eigenschaften der Raum-Zeitwelt. All dies sind Anwendungen geometrischer Begriffsbildungen, wie sie auch in vielen nichtgeometrischen Teilgebieten der Mathematik vorkommen, aber keine angewandte Geometrie.

Angewandte Geometrie liegt vielmehr dort vor, wo unter Zugrundelegung eines naiven, durch Idealisierung der Erfahrungswelt abgeleiteten Raumbegriffs zur Bewältigung konkreter technischer Probleme geometrische Überlegungen benützt werden. Für diese der technischen Praxis verpflichtete Geometrie, zu der heute leider die überwiegende Mehrzahl aller Geometer keinerlei Beziehung besitzt, möchte ich typische Problemstellungen herausgreifen.

Die ersten Beispiele betreffen die Geodäsie, deren enge Verbindung zur Geometrie schon in der Bezeichnung zum Ausdruck kommt. Antwortet man auf die Frage eines mathematischen Laien nach dem eigenen Arbeitsgebiet mit dem Bekenntnis, man sei Geometer, so wird man sicher als Vermessungsingenieur eingestuft. In der Erdvermessung sind je nach der Art der Problemstellung vier Näherungen der Erdoberfläche üblich, nämlich die Approximation durch eine Ebene, durch eine Kugel, durch ein Drehellipsoid oder durch ein Geoid, eine Niveaufläche des Schwerepotentials der Erde. Die Anwendungen der Geometrie reichen nun von der Vermessung eines Polygonzuges und eines ebenen Geländes über die geometrischen Grundlagen der Kartographie bis zur Berechnung jenes besten Drehellipsoides für das Vermessungssystem eines Landes, für welches die Quadratsumme der Normalabweichungen von denen des Geoids in geeignet gewählten Punkten ein Minimum ist. Die für die Praxis bedeutsamen kartographischen Abbildungen der Kugel und des Ellipsoids werden durch recht komplizierte Abbildungsfunktionen beschrieben, die sich jedoch mit Hilfe von Rechenautomaten leicht auswerten lassen. Mit einem vom Rechner gesteuerten Zeichen- oder Graviergerät werden die Koordinatenwerte der Bildpunkte automatisch in den Kartenentwurf übertragen. Da diese Geräte für kartographische Arbeiten eine hohe Genauigkeit besitzen müssen, kommen keine Analogrechner, sondern nur digital gesteuerte Zeichengeräte in Frage. Für die gängigsten kartographischen Abbildungen existieren Programme in der Programmiersprache FORTRAN IV, die von zahlreichen Landesvermessungsämtern mit Erfolg eingesetzt werden.

Die klassischen Vermessungsmethoden sind heute vielfach durch photogrammetrische Verfahren ersetzt, die wieder weitgehend automatisiert ablaufen. In der Luftphotogrammetrie kann es beim gegenseitigen Einpassen zweier Luftbilder in ihre räumliche Aufnahmelage geschehen, daß bei gewissen Geländeformen diese Hauptaufgabe der Luftphotogrammetrie unlösbar oder zumindest nur sehr ungenau lösbar wird. Das ist der Fall, wenn das Gelände näherungsweise die Gestalt einer sogenannten gefährlichen Fläche besitzt, die mein Vorgänger im Lehramt, Herr Krames, ausführlich untersucht hat; ihre Bestimmung ist eine rein geometrische Aufgabe. Aus seinen Ergebnissen konnte er ein neues Orientierungsverfahren für die photogrammetrische Hauptaufgabe gewinnen, das in modifizierter Form heute mit Erfolg praktisch benützt wird. Dazu war es allerdings notwendig, die zahlreichen Fehlereinflüsse mit den Methoden der Ausgleichsrechnung zu erfassen. Die numerische Lösung ersetzt somit die konstruktiv geometrische Lösung, wie das auch auf vielen anderen Anwendungsgebieten der Fall ist. An diesen Beispielen erkennen wir, wie die Geometrie oft Grundlage eines praktischen Wissensgebietes ist, das sich jedoch verselbstständigt und nach eigenen Gesetzen weiterentwickelt.

Ein weiteres Beispiel sei dem Straßenbau entnommen. Wenn man mit den üblichen Methoden der kotierten Projektion eine Straßentrasse in ein gegebenes Gelände einpaßt und die notwendigen Dämme und Einschnitte konstruiert, so kann man aus dem Grundriß jene Straßenabschnitte, welche unerwartete Sichtbehinderungen aufweisen und Schattenstrecken heißen, nicht unmittelbar erkennen. Jeder Autofahrer kennt Situationen, in denen während eines Überholvorganges plötzlich ein entgegenkommendes Fahrzeug auftaucht, das in einer flachen Straßenmulde verborgen war. Auch im Falle einer langgestreckten leicht fallenden Kurve, deren Ende zwar in der Ferne gut sichtbar ist, von der aber ein kurzes Stück durch einen kleinen Einschnitt verläuft, kann es zu bösen Überraschungen kommen. Solche Schattenstrecken lassen sich vermeiden, falls man für eine Reihe von kritischen Punkten einen Zentralriß des fertigen Objektes konstruiert, was unter Benützung einer Reihe von Längsprofilen durch den Augpunkt nach der Durchschnittsmethode oder unter Benützung der sogenannten numerischen Perspektive mit Hilfe eines Rechenschiebers rasch möglich ist. Diese geometrischen Verfahren sollte jeder Straßenbauer beherrschen, um seinen Entwurf laufend überprüfen zu können. Für die endgültige Beurteilung einer Straßenplanung reichen diese konstruktiven Verfahren jedoch aus Zeit- und Genauigkeitsgründen nicht aus. Daher hat IBM in den letzten Jahren ein Programm zur Vermeidung solcher Schattenstrecken entwickelt. Dabei legt eine Lochkarte, die Fahrbahndeckenkarte, das Längsprofil der Straßenmittellinie fest, eine Geländekarte und eine Regelprofilkarte erfassen den Geländeverlauf sowie die Böschungen, Sicherheitsstreifen, Bankette usw., wie sie Querprofilen zu entnehmen sind. Aus diesen Daten ermittelt das Programm mit Hilfe der Standpunktkarten, welche die Lage der Augpunkte im Gelände bestimmen, und der Sichtbehinderungskarten, in der Häuser, Bäume, Brücken usw. eingetragen sind, eine lange siebenspaltige Zahlentabelle, aus der die Sichtweiten und Sichtbarkeitsgrenzen für die einzelnen Standpunkte abgelesen werden können. Dieses auf geometrischen Gesetzmäßigkeiten beruhende Verfahren hat sich so bewährt, daß in der Bundesrepublik Deutschland keine Bundesstraße mehr gebaut werden darf, bei der nicht eine solche Sichtweitenberechnung durchgeführt wurde. Wir sehen an diesem Beispiel, wie geometrische Untersuchungen zu praktisch brauchbaren Verfahren in der Technik ausgebaut werden.

Die Reihe der Beispiele zur angewandten Geometrie ließe sich leicht fortsetzen. Aus dem Fachgebiet Maschinenbau sei auf die Rolle geometrischer Überlegungen bei der Herstellung von Zahnrädern und beim Fräsen etwa von Schraubnuten hingewiesen; erwähnen möchte ich die diffizilen kinematischen Probleme, deren Lösung die Bedingung zur Konstruktion des Wankelmotors waren. Aber auch naturwissenschaftliche Wissensgebiete benötigen vielfach zur Lösung ihrer Fragen geometrische Betrachtungen. Genannt seien die Strukturtheorie der physikalischen Chemie und die Gittertheorie der Kristalle, in denen die räumliche Verteilung der Elementarbausteine von Interesse ist. Die linearen Zweibilderverfahren der konstruktiven Geometrie haben ihre Anwendung z.B. in der physikalischen Medizin bei der räumlichen Ausmessung von Röntgenaufnahmen gefunden.

All dies beweist die Bedeutung der Geometrie als Grundlagenfach einer modernen Technikerausbildung; darauf nehmen vor allem jene Lehrveranstaltungen Rücksicht, welche traditionsgemäß Darstellende Geometrie heißen. In ihnen werden jene geometrischen Gestalten studiert, die für die Technik von Interesse sind. Da zu den Aufgaben meines Institutes unter anderem auch die Abhaltung einer solchen Vorlesung gehört, möchte ich über dieses Fach einige Gedanken äußern.

Ein moderner Unterricht im Fach Darstellende Geometrie muß sich an den spezifischen Problemstellungen und Bedürfnissen der Techniker orientieren. Hier wird Geometrie nicht um ihrer selbst willen, wegen ihrer kulturellen Bedeutung oder ihres formalen Bildungswertes betrieben, sondern als Grundlage und Voraussetzung technischer Bildung. Metrisch bestimmte Formen stehen im Vordergrund und werden in einfachster Aufstellung studiert, wobei methodisch vom speziellen Problem auszugehen ist. Man benötigt parallel zur Vorlesung Übungen, welche die Brücke vom geometrischen Gehalt zur technischen Anwendung schlagen müssen, und weniger auf die bloße Herstellung schöner Bilder ausgerichtet sein sollten. Um aber das Lehrgut in einer Form übermitteln zu können, die auch dem theoretisch wenig geschulten jungen Technikstudenten zugänglich ist, und um nicht in den rein geometrischen Grundlagen stecken zu bleiben, deren Anwendungsmöglichkeiten der Student nicht erkennt, muß dem Fach Darstellende Geometrie eine nicht zu geringe Stundenzahl zur Verfügung stehen. Falls man einen praxisnahen Unterricht wünscht, muß man bedenken, daß eine geringere Stundenzahl nicht einfach weniger Stoff bedeutet; eine Stundenkürzung müßte vielmehr zu einer Änderung der Vorlesungs- und Übungsmethode führen, was für den Studenten eine nicht unwesentliche Vergrößerung seines Zeitaufwandes nach sich ziehen würde. Ich darf an dieser Stelle an die Mitglieder der einschlägigen technischen Studienkommissionen den Appell richten, nicht durch eine weitere Reduktion des Stundenausmaßes dieses Faches die genannten Unterrichtsziele unerreichbar zu machen. Im übrigen darf ich auf einen Satz verweisen, den E. Müller 1908 geschrieben hat: "Nicht eine Verringerung sondern eine Vertiefung seiner theoretischen Ausbildung braucht der zukünftige Ingenieur, aber diese Ausbildung muß seinen Bedürfnissen angepaßt werden." Dieser Erkenntnis ist auch heute nicht hinzuzufügen.

Ich sprach bisher über jene Seite der Geometrie, die ich provisorisch als angewandte Geometrie bezeichnet habe. Lassen Sie mich jetzt einiges zur Geometrie als Teilgebiet der Mathematik anfügen. Dabei ist völlig offen, welches Teilgebiet mit Geometrie eigentlich gemeint ist. Die von F. Klein in seinem sogenannten Erlanger Programm ausgesprochene Auffassung der Geometrie als Invariatentheorie einer Transformationsgruppe, wie sie als Einteilungsprinzip für viele klassische Geometrien auch heute noch eine gewisse Rolle spielt, ist jedenfalls als Definition der Geometrie viel zu eng. So läßt sich die Riemannsche Geometrie und die Finslersche Geometrie nur mit Zwang dem Erlanger Programm unterordnen, und z.B. die Geometrie metrischer Räume im Sinne von M. Fréchet paßt in die Kleinsche Definition überhaupt nicht hinein. Aber auch auf dem Hauptanwendungsgebiet des Erlanger Programms, nämlich den Geometrien der projektiven Gruppe und ihrer Untergruppen, wird allerdings mehr aus methodischen Gründen heute vom Erlanger Programm abgerückt. So erscheint etwa die Gruppe der Automorphismen eines Vektorraumes sekundär gegenüber seinen der Algebra entstammenden Struktureigenschaften, was in der Umbenennung von Geometrie des zentralaffinen Raumes in Geometrie des Vektorraumes seinen Ausdruck findet. Da eine anerkannte Begriffsbestimmung von Geometrie fehlt, sei folgende scherzhafte Erklärung zitiert: Geometrie ist das Teilgebiet der Mathematik, welches jene Mathematiker betreiben, die von sich selbst behaupten Geometer zu sein.

Die Mathematik hat sich in den letzten Jahrzehnten grundlegend gewandelt, bedingt durch eine grundsätzliche Neuordnung nach Strukturprinzipien. Diese neue Auffassung der Mathematik als eines Zusammenspiels von Strukturen wurde etwa 1938 eingeleitet durch einen Kreis bedeutender französischer Mathematiker wie Henri Cartan, Jean Dieudonné, Laurent Schwartz, André Weil u.a., welche unter dem Pseudonym Nicolas Bourbaki publizieren. Diese noch keineswegs abgeschlossenen Bemühungen haben zur Folge, daß heute kaum eine Vorlesung für Mathematiker in der gleichen Form wie etwa vor zehn Jahren angeboten werden kann. All dies hat natürlich auch Konsequenzen für die mathematischen Vorlesungen geometrischen Inhalts, wie ich an Hand von zwei Beispielen kurz darlegen will.

Als erstes Beispiel wähle ich die Grundlagen der Geometrie. Geometrie wurde bekanntlich schon vor rund 2300 Jahren axiomatisiert und ist darin ein Vorbild für andere Wissenschaften gewesen. Geometrische Methode war vielfach eine Bezeichnung für axiomatischen Aufbau, wie es etwa im Titel der Ethik von B. Spinoza "Ethica ordine geometrico demonstrata" Mitte des 17. Jahrhunderts zum Ausdruck kommt. Die moderne geometrische Axiomatik beginnt allerdings erst mit D. Hilbert, der um die Jahrhundertwende den formalistischen Standpunkt durchsetzte, wonach die geometrischen Grundbegriffe undefiniert bleiben und keine Konstanten sondern Variable sind; die Axiome besitzen nicht mehr den logischen Charakter von Aussagen sondern von Aussageformen. Diese Einstellung wird von der überwiegenden Mehrheit der Mathematiker zumindestens der westlichen Hemisphäre heute akzeptiert, doch mußte zuvor die Autorität E. Kants überwunden werden; nach seiner Ansicht sind die geometrischen Sätze synthetische Erkenntnisse a priori über den Anschauungsraum, dessen Struktur denknotwendig ist.

Das Hilbertsche Axiomensystem, in welchem die Relationen der Inzidenz, des Dazwischenliegens und der Kongruenz neben der Stetigkeit und dem Parallelenaxiom festgelegt werden, hat lange Zeit Forschung und Lehre über Grundlagen der Geometrie beherrscht. Heute sollte man nach meiner Meinung eine modifizierte Gliederung benützen, da sich im Hilbertschen Axiomensystem einerseits der hierarchische Aufbau der geometrischen Strukturen der Elementargeometrie nicht klar genug erkennen läßt, und andererseits die Querverbindungen zu den algebraischen Strukturen zu wenig betont werden. Ein geänderter Aufbau der ebenen Elementargeometrie könnte etwa wie folgt aussehen.

Gegeben sind zwei Mengen $\mathfrak{P}(A,B,\dots)$ und $\mathfrak{G}(a,b,\dots)$, wobei die Elemente von $\mathfrak{P}$ Punkte und die Elemente von $\mathfrak{G}$ Geraden heißen. Zwischen diesen ist eine Inzidenzrelation I der Form AIa erklärt, welche durch drei Axiome I_1, I_2, I_3 definiert wird. Ihr Inhalt ist sprachlich ausgedrückt: Es existiert genau eine Gerade, die mit zwei verschiedenen Punkten inzidiert, mit jeder Geraden inzidieren mindestens zwei verschiedene Punkte, es gibt mindestens drei verschiedene Punkte, die mit keiner Geraden inzidieren. Die Struktur $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, I; I_1, I_2, I_3\}$ heißt eine Inzidenzebene; sie ist so allgemein, daß keine interessanten Ergebnisse aus den Axiomen zu gewinnen sind. Nun definiert man für zwei Geraden den Begriff parallel: Zwei Geraden heißen parallel, wenn sie entweder identisch sind oder mit keinem Punkt gleichzeitig inzidieren. Das Parallelaxiom P fordert dann: Zu jedem Punkt A und jeder Geraden a gibt es genau eine zu a parallele Gerade, die mit A inzidiert. Die Parallelität ist dann eine zweistellige Relation auf $\mathcal{G}$, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, also eine Äquivalenzrelation. Die geometrische Struktur $\{\mathcal{P}, \mathcal{G}, I; I_1, I_2, I_3, P\}$ wird eine affine Inzidenzebene genannt. Ein Modell dieser Geometrie, das minimal viele Punkte und Geraden enthält, besteht aus genau vier Punkten und sechs Geraden. Welche algebraische Struktur entspricht nun einer affinen Inzidenzebene? Gegeben sei eine Menge M, deren Elemente wir Zahlen nennen, und die aus mindestens zwei verschiedenen Elementen bestehen soll. Unter einem Punkt wollen wir nach klassischem Vorbild ein geordnetes Paar von Elementen aus M verstehen. Eine Gerade wird in der analytischen Elementargeometrie durch eine lineare Gleichung im allgemeinen der Form $y = m\,x + c$ beschrieben, d.h. y ist eine Funktion T von drei Argumenten m, x, c. Im Koordinatenbereich M sei also eine ternäre Verknüpfung $(m,x,c) \to T(m,x,c)$ gegeben, welche im klassischen Fall $T = m\,x + c$ lautet. Soll nun eine affine Inzidenzebene vorliegen, so muß die ternäre Operation T auf M gewisse Eigenschaften besitzen, die ich nicht explizit angeben will. Die Menge M mit einer solchen ternären Verknüpfung heißt ein Ternärkörper. Die geometrische Untersuchung der affinen Inzidenzebene und die algebraische Untersuchung der Ternärkörper, die im allgemeinen keine Körper sind und über deren Struktur man noch recht wenig weiß, sind nur sprachlich verschieden.

Im zweiten Schritt werden sogenannte Schließungssätze studiert. Hier spielt der Satz von Desargues eine zentrale Rolle: Liegen die entsprechenden Ecken zweier Dreiecke jeweils auf genau einer von drei kopunktalen Geraden und sind zwei Paare entsprechender Dreieckseiten parallel, so ist auch das dritte Paar entsprechender Dreieckseiten parallel. Dieser Satz ist keine Folge in einer affinen Inzidenzebene, wie man seit der Entdeckung nichtdesarguesscher affiner Inzidenzebenen weiß. Benützt man diesen Satz als Axiom D, so heißt die geometrische Struktur $\{\mathcal{P}, \mathcal{G}, I; I_1, I_2, I_3, P, D\}$ eine desarguessche Ebene; der zugehörige Ternärkörper ist ein Schiefkörper, in dem alle Gesetze eines Körpers gelten bis auf eventuell die Kommutativität der Multiplikation. Man erzwingt die Kommutativität des Koordinatenkörpers durch ein zusätzliches geometrisches Axiom, nämlich jenes von Pappus-Pascal PP: Sind in einem Sechseck, dessen Ecken abwechselnd auf zwei Geraden liegen, jedoch keine auf beiden gleichzeitig, zwei Paare von Gegenseiten parallel, so auch das dritte Paar. Dieser Satz ist von den anderen Axiomen unabhängig, und die geometrische Struktur $\{\mathcal{P}, \mathcal{G}, I; I_1, I_2, I_3, P, D, PP\}$ wird algebraisch durch einen kommutativen Körper beschrieben. Daß aus dem Axiom von Pappus-Pascal in der affinen Inzidenzebene das Axiom von Desargues folgt, ist ein Satz von G. Hessenberg. Umgekehrt folgt der Satz von Pappus-Pascal aus dem Satz von Desargues speziell im

Falle endlicher affiner Inzidenzebenen, was die geometrische Formulierung eines algebraischen Satzes von J. Wedderburn ist, welcher besagt, daß jeder endliche Schiefkörper kommutativ ist. Ein rein geometrischer Beweis dafür ist übrigens noch ausständig.

Um nun zur Elementargeometrie zu kommen, sind noch zwei Probleme zu lösen, nämlich: Wie wird der Koordinatenkörper speziell zum Körper der reellen Zahlen, und wie kann man in der reellen affinen Ebene eine euklidische Metrik einführen? Für das erste Problem hat man den Begriff der Anordnung etwa mit Hilfe von Ordnungsfunktionen im Sinne von E. Sperner zu definieren und den folgenden algebraischen Satz zu benützen: Jeder stetig angeordnete Schiefkörper ist isomorph zum Körper der reellen Zahlen. Um eine Metrik zu erhalten, faßt man die Orthogonalität von zwei Geraden axiomatisch und zwar so, daß algebraisch damit ein Skalarprodukt, also eine positiv definite symmetrische Bilinearform festgelegt wird. Das Ergebnis aller Untersuchungen lautet dann: Eine stetig angeordnete desarguessche Ebene, in der eine Orthogonalitätsrelation erklärt ist, ist isomorph zur euklidischen Ebene über den Körper der reellen Zahlen, also zur Ebene der Elementargeometrie.

Ich glaube, auch diese sehr grobe Skizze zeigt Ihnen die wesentlichen Unterschiede zur bis vor kurzem üblichen Darstellung der Grundlagen der Geometrie. Natürlich ist nicht der Unterschied in der Lehre das primäre, sondern nur die Folge von neu entwickelten geometrischen Forschungsgebieten. Eine bedeutende Zahl der deutschsprachigen Geometer ist heute auf diesen Gebieten geometrischer Grundlagenforschung tätig.

Als zweites Beispiel möchte ich die Differentialgeometrie anführen. Bei C.F. Gauß, der die Flächentheorie zu Beginn des 19. Jahrhunderts in die übliche systematische Gestalt gebracht hat, erscheint die Fläche stets eingebettet in einen dreidimensionalen euklidischen Raum. Doch hat Gauß die Bedeutung der sogenannten inneren Flächentheorie, welche sich auf Eigenschaften der Fläche bezieht, die von der konkreten Realisierung der Fläche im Einbettungsraum unabhängig sind, klar erkannt. Eine von der Einbettung unabhängige Begründung der inneren Geometrie hat B. Riemann 1854 in seiner Göttinger Antrittsvorlesung gegeben und dabei auch gleich die Beschränkung auf die Dimensionszahl 2 fallen gelassen. Vor allem bei Problemen im Großen zeigte sich aber bald, daß eine Präzisierung des benützten Raumbegriffes notwendig ist. So entstand ein Aufbau, der beim Begriff des topologischen Raumes beginnt und an welchem eine Vorlesung über Differentialgeometrie heute nicht mehr vorübergehen sollte. Da auch dies ein schönes Beispiel für das Eindringen des Strukturdenkens in die Geometrie ist, will ich kurz darüber berichten.

Die Grundlage ist der Begriff des topologischen Raumes. Dies ist eine Menge X, auf der ein System von Teilmengen ausgezeichnet ist, die wir offene Menge nennen, und zu denen X selbst und die leere Menge gehört. Außerdem soll gelten: Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen und der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen. Das System der offenen Mengen bestimmt dann eine Topologie auf X, doch ist dieser Begriff so allgemein, daß topologische Räume viele von der gewohnten Raumanschauung abweichende Züge tragen können. Als einfache Beispiele für topologische Räume seien der n-dimensionale Zahlenraum, also der Raum der geordneten n-Tupel reeller Zahlen, die Räume der Funktionalanalysis, etwa der unendlich dimensionale Hilbertraum, der in der Quantenmechanik Verwendung findet, und die Phasenräume der theoretischen Physik angeführt. Um durch zusätzliche Forderungen den für die Differentialgeometrie brauchbaren Raumbegriff zu gewinnen, muß man den topologischen Raum zunächst zu einer topologischen Mannigfaltigkeit machen. Die wesentliche Voraussetzung neben anderen ist dabei, daß sich eine Mannigfaltigkeit lokal nicht von einem Zahlenraum unterscheidet. In der Umgebung eines Punktes können also die Punkte der Mannigfaltigkeit durch n-Tupel aus dem n-dimensionalen Zahlenraum beschrieben werden. Man nennt das Urbild einer Umgebung eines Punktes im Zahlenraum eine Karte der Mannigfaltigkeit; die Gesamtheit aller Karten, die zu einer Überdeckung der Mannigfaltigkeit gehören, heißt ein Atlas von X. Dieser Begriff ermöglicht die Definition der differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Die Schwierigkeit liegt zunächst darin, daß in der Analysis Funktionen studiert werden, die über einem Gebiet des Zahlenraumes definiert sind, nicht aber solche, die auf einer Mannigfaltigkeit erklärt werden. Mit Hilfe des Atlasbegriffes kann man nun die Differenzierbarkeit von Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit zurückspielen auf die bekannte Differenzierbarkeit von Funktionen über einem Gebiet des Zahlenraumes. Schon in der elementaren Differentialgeometrie werden diese Begriffsbildungen benützt, wenn man z.B. die Gaußsche Krümmung einer Fläche nach den Gaußschen Flächenparametern differenziert. Übrigens sei darauf hingewiesen, daß eine topologische Mannigfaltigkeit nicht unbedingt eine differenzierbare Struktur verträgt und diese auch nicht eindeutig bestimmt sein muß. So konnte J. Milnor 1956 zeigen, daß die siebendimensionale Sphäre wesentlich verschiedene differenzierbare Strukturen gestattet, und ein Beispiel für eine Mannigfaltigkeit ohne differenzierbare Struktur wurde 1960 entdeckt.

Die Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten hat in den letzten Jahrzehnten einen rapiden Aufschwung genommen und vielseitige Anwendungen gefunden, für die Differentialgeometrie ist sie jedoch nur eine Station auf dem Weg. Unter Benützung der Differenzierbarkeit auf X kann man in jedem Punkt Tangentenvektoren definieren, und alle Tangentenvektoren eines Punktes bilden dann einen linearen Vektorraum im Sinne der linearen Algebra. Die weiteren notwendigen Begriffsbildungen beziehen sich vor allem auf diesen. Man kann nämlich einerseits versuchen, die Tangentialvektorräume in verschiedenen Punkten von X isomorph aufeinander zu beziehen. Je nachdem dieser im allgemeinen vom Weg abhängige Isomorphismus konkretisiert wird, entstehen verschiedene Zusammenhänge auf X. Durch Spezialisierung erhält man die linear und affin zusammenhängenden Räume. Ein anderer Weg besteht darin, in jedem Tangentialvektorraum eine Längenmetrik zu definieren, die gewissen geometrisch naheliegenden Forderungen genügt. Ist diese Metrik im Tangentialvektorraum jedes Punktes minkowskisch bzw. euklidisch, so heißt X ein Finslerraum bzw. ein Riemannscher Raum. Ein Riemannscher Raum ist also eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, für die im Tangentialvektorraum jedes Punktes eine euklidischeMetrik gegeben ist. Speziell in der Gaußschen Flächentheorie stammt diese Metrik von der euklidischen Metrik des Einbettungsraumes und ist daher nicht frei wählbar. Aber schon im Elementarunterricht der Differentialgeometrie braucht man den allgemeineren Begriff, so etwa, wenn man die Poincaresche Halbebene als Beispiel einer vollständigen Fläche konstanter negativer Krümmung vorführt. Diese ist ja, obwohl im Kleinen durch die konforme Abbildung der Pseudosphäre entstanden, keine Fläche im dreidimensionalen euklidischen Raum, sondern ein zweidimensionaler Riemannscher Raum, da ihre Metrik nicht vom dreidimensionalen euklidischen Raum induziert wird.

Dieser hier skizzierte Aufbau der Differentialgeometrie läßt ihre logischen Grundlagen und die Struktur ihrer Begriffswelt klar erkennen und hat zu zahlreichen neuen Untersuchungen Anlaß gegeben. Interessanterweise bietet er aber inhaltlich gegen den klassischen Standpunkt, wonach die Differentialgeometrie die differenzierbaren Untermannigfaltigkeiten des n-dimensionalen euklidischen Raumes zu untersuchen habe, im wesentlichen nichts Neues. Jeder hinreichend oft differenzierbare Riemannsche Raum hat nämlich auch im Großen Platz in einem euklidischen Raum genügend hoher Dimension und nach H. Whitney gilt: Jede n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist einer Untermannigfaltigkeit des 2n+1 -dimensionalen Zahlenraumes diffeomorph, d.h. unterscheidet sich von einer solchen nicht in den differenzierbaren Eigenschaften.

Ich habe an Hand von zwei Beispielen vorzuführen versucht, wie das Denken der modernen Mathematik sich in Forschung und Lehre auch auf die Geometrie auswirkt. Ich habe nicht gesprochen über die verschiedenen Gebiete der klassischen Geometrie, die gerade hier in Wien seit jeher besonders gepflegt werden. Natürlich bedeutet eine, wie ich glaube, notwendige Aufgeschlossenheit den modernen Richtungen gegenüber nicht eine bewußte Vernachlässigung der Pflege der klassischen Geometrie, wenn dies auch an manchen Geometrieinstituten heute geschieht. Ich halte diese Einseitigkeit, die über den Satz des Geometers A. Clebsch: "Die Freude an der Gestalt macht den Geometer" nur mitleidig lächelt, für genauso falsch wie eine Beschränkung der Geometrie auf die anschaulich erfaßbaren Gebiete allein. Hier ist nach meiner Meinung nur eine Synthese, die jede Einseitigkeit der Methode vermeidet, der richtige Weg. Diese Ansicht bedeutet gleichzeitig ein Programm für meine künftige Tätigkeit in Wien.