

LINEARE    ABBILDUNGSMETHODEN

O.Prof.Dr.Dr. H. BRAUNER

I. Institut für Geometrie

Technische Universität Wien

Alle Rechte liegen beim Autor.

## LINEARE ABBILDUNGSMETHODEN

### 1. LINEARE ABBILDUNGEN

1.1 Grundbegriffe	1
1.2 Projektionen und Perspektivitäten	8
1.3 Definition linearer Abbildungen	14
1.4 Axonometrie	22
1.5 Lineare Abbildungen aus euklidischen Räumen	32
1.6 Lineare Abbildungen aus dreidimensionalen euklidischen Räumen	45

### 2. LINEARE ZWEIBILDERSYSTEME

2.1 Grundbegriffe	69
2.2 Lineare Zweibildersysteme aus einem dreidi- mensionalen projektiven Raum	74

### 3. LINEARE ZWEISPURENSYSTEME

3.1 Grundbegriffe	84
3.2 Lineare Zweispurensystem aus einem dreidi- mensionalen projektiven Raum	86

### 4. LINEARE ZWEIBILDERSYSTEME UND ZWEISPURENSYSTEME AUS EINEM DREIDIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM

4.1 Lineare Zweibildersysteme mit nichtprojizierender Fernebene	90
4.2 Lineare Zweibildersysteme mit projizierender Fernebene	95
4.3 Lineare Zweispurensysteme aus einem dreidi- mensionalen euklidischen Raum	97
4.4 Elementare Abbildungsmethoden der Darstellenden Geometrie	99

# 1. LINEARE ABBILDUNGEN

==== =====

## 1.1 Grundbegriffe

1.1.1 Sind  $M$  und  $N$  zwei Mengen und  $R \subset M \times N$  eine Teilmenge des kartesischen Produkts  $M \times N$ , so heißt ein Tripel  $\varphi = (M, N; R)$  eine Abbildung (Funktion) aus der Urmenge (Quellmenge)  $M$  in die Zielmenge  $N$ , wenn aus  $(x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R$  stets  $y_1 = y_2$  folgt. Wir schreiben  $\varphi: M \rightarrow N$ ,  $x (\in M) \mapsto y = x\varphi (\in N)$  und nennen  $y$  das Bild-element von  $x$  und  $x$  ein Urelement von  $y$ .

Die Menge  $D_\varphi \subset M$  aller Elemente  $x \in M$ , für die  $x\varphi \in N$  definiert ist, heißt die Definitionsmenge von  $\varphi$  und  $M \setminus D_\varphi$  heißt die Aus-nahmeme  $A_\varphi$  von  $\varphi$ . Eine Abbildung  $\varphi: M \rightarrow N$  heißt global (eine Abbildung von  $M$ ), wenn  $D_\varphi = M$  gilt. Ist  $\varphi$  für kein Element von  $M$  definiert, also  $D_\varphi = \emptyset \subset M$ , so heißt  $\varphi: M \rightarrow N$  eine leere Abbildung.

Für eine Teilmenge  $M_1 \subset M$  von  $M$  heißt  $M_1\varphi := \{y \in N \mid y = x\varphi \wedge x \in M_1\} \subset N$  die Bildmenge<sup>1</sup> von  $M_1$  unter  $\varphi$  und  $\varphi|_{M_1}: M_1 \rightarrow N$  mit  $x \mapsto x\varphi$  für  $x \in M_1$  die Einschränkung von  $\varphi$  auf  $M_1$ . Für  $M_1 \cap D_\varphi = \emptyset$  ist  $\varphi|_{M_1}: M_1 \rightarrow N$  eine leere Abbildung.

Die Menge  $\text{im } \varphi := D_\varphi\varphi \subset N$  heißt die Bildmenge von  $\varphi: M \rightarrow N$ . Eine Abbildung  $\varphi: M \rightarrow N$  heißt surjektiv (eine Abbildung auf  $N$ ), wenn  $\text{im } \varphi = N$  gilt.

Für  $y \in \text{im } \varphi \subset N$  heißt  $(y\varphi^{-1}) := \{x \in D_\varphi \mid x\varphi = y \in N\} \subset M$  die Faser von  $y$ ; genau die Elemente einer Faser haben dasselbe Bildelement. Eine Abbildung  $\varphi: M \rightarrow N$  heißt injektiv, wenn jede Faser aus genau einem Element besteht, also aus  $x_1, x_2 \in D_\varphi$  mit  $x_1 \neq x_2$  stets  $x_1\varphi \neq x_2\varphi$  folgt.

Eine globale, injektive und surjektive Abbildung  $\varphi: M \rightarrow N$  heißt eine Bijektion von  $M$  auf  $N$ . Zwei Mengen heißen gleichmächtig ( $|M| = |N|$ ), wenn eine Bijektion  $\varphi: M \rightarrow N$  existiert. Ist  $M$  eine nichtleere Menge und existiert eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $|M| = |\{1, 2, \dots, n\}|$ , so schreiben wir  $|M| = n$  (endliche Menge aus  $n$  Elementen) und sonst  $|M| = \infty$  (unendliche Menge); für  $M = \emptyset$  gilt  $|M| = 0$ .

<sup>1</sup> Da die Abbildung  $\varphi$  nur für Elemente von  $M$  und nicht für Teilmengen von  $M$  definiert ist, müßte streng genommen anstelle  $M_1\varphi$  eine andere Schreibweise, etwa  $M_1\varphi_*$  verwendet werden. Wir benützen, wie üblich, dasselbe Symbol, doch muß für  $x \in D_\varphi$  dann zwischen  $x\varphi \in N$  und  $\{x\}\varphi \subset N$  unterschieden werden; für  $x \in M \setminus D_\varphi$  ist  $x\varphi$  nicht definiert und  $\{x\}\varphi = \emptyset \subset N$ .

Sind  $M, N, W$  Mengen und  $\varphi: M \rightarrow N, \psi: N \rightarrow W$  Abbildungen, so heißt die Abbildung  $\psi \circ \varphi: M \rightarrow W$  mit  $x (\in M) \mapsto x \varphi \psi := (\varphi(x)) \psi (\in W)$  die Zusammensetzung<sup>2</sup> von  $\varphi$  und  $\psi$ ; die Zusammensetzung ist für  $\text{im } \varphi \cap \mathbb{D}_\psi = \emptyset$  eine leere Abbildung. Die Zusammensetzung von Abbildungen ist assoziativ, aber nicht notwendig kommutativ. Zu jeder injektiven Abbildung  $\varphi: M \rightarrow N$  existiert die inverse Abbildung  $\varphi^{-1}: N \rightarrow M$  mit  $\varphi \varphi^{-1} = \text{id}_{\mathbb{D}_\varphi}$  und  $\varphi^{-1} \varphi = \text{id}_{\text{im } \varphi}$ .

Wir diskutieren diese Begriffe anhand der Projektion:

$M$ : projektiv abgeschlossener Anschauungsraum

$N \subset M$ : projektiv abgeschlossene Bildebene

$c: M \rightarrow N \dots$  Projektion mit dem Augpunkt  $Z \notin N$ .

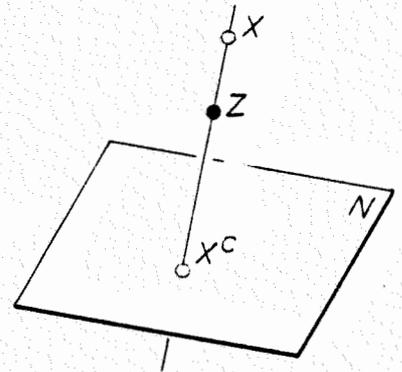
Ausnahmemenge  $A_c = \{Z\} \Rightarrow c$  ist nicht global.

Definitionsmenge  $\mathbb{D}_c = M \setminus \{Z\}$ .

Bildmenge  $\text{im } c = N \Rightarrow c$  ist surjektiv.

$X^c \in N: (X^c c^{-1}) = ZX^c \setminus \{Z\} \Rightarrow$  Jede Faser ist eine im Augpunkt  $Z$  punktierte projizierende Gerade  $\Rightarrow c$  ist nicht injektiv.

$$X (\in \mathbb{D}_c) \mapsto X^c := X^c = ZX \cap N$$



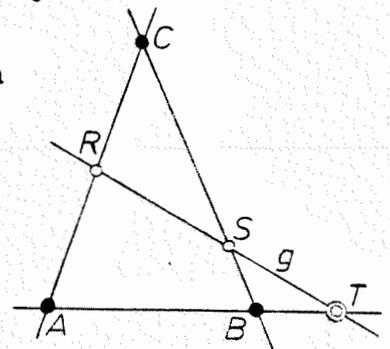
1.1.2<sup>3</sup> Sind  $\mathcal{P}(A, B, \dots)$  eine Menge, deren Elemente Punkte heißen und  $\mathcal{G}(a, b, \dots)$  eine Menge von Teilmengen aus  $\mathcal{P}$ , deren Elemente Geraden heißen, so ist das Paar  $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$  ein projektiver Raum, wenn gilt:

(PR 1) zu  $A, B \in \mathcal{P}, A \neq B$  existiert genau eine Gerade  $a \in \mathcal{G}$  mit  $A \in a \wedge B \in a$  (Verbindungsgerade  $a = AB$ ).

(PR 2) zu jedem Dreieck  $\{A, B, C\}$  und jeder Geraden  $g \in \mathcal{G}$  mit  $g = RS \wedge R \in AC \setminus \{A, C\} \wedge S \in BC \setminus \{B, C\}$  existiert ein Punkt  $T \in AB$  mit  $T \in g$ .

(Planaritäsaxiom)

(PR 3) Für  $a \in \mathcal{G}$  ist  $|a| \geq 3$ .



<sup>2</sup> Verwendet man wie in der Analysis anstelle von  $x\varphi$  die Schreibweise  $\varphi(x)$ , so wird die Zusammensetzung  $\psi \circ \varphi$  mit  $\psi \circ \varphi(x) = \psi(\varphi(x))$  geschrieben. In der Geometrie haben sich die Schreibweisen  $x\varphi$  oder  $x^{\varphi}$  weitgehend durchgesetzt.

<sup>3</sup> Aussagen über projektive Geometrie können in H. BRAUNER, Geometrie projektiver Räume I und II (zitiert mit I, II) nachgelesen werden. Grundlegende Begriffsbildungen werden in diesem Skriptum wiederholt; Definitionen und Sätze sind nur dann durch Nummern hervorgehoben, wenn sie in der Vorlesung über projektive Geometrie nicht vorkommen.

Beispiele sind der leere projektive Raum  $(\emptyset, \emptyset)$ , einpunktige projektive Räume  $(\{A\}, \emptyset)$ , eingeradige projektive Räume  $\{\mathcal{R}, \{\mathcal{R}\}\}$  mit  $|\mathcal{R}| \geq 3$ , die projektiv abgeschlossene Anschauungsebene  $\Pi_{AE}$  und der projektiv abgeschlossene Anschauungsraum  $\Pi_{AR}$  (I, 122).

Eine Teilmenge  $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}$  heißt ein Unterraum von  $\Pi(\mathcal{R}, \mathcal{G})$ , wenn für  $A, B \in \mathcal{R}_1$  mit  $A \neq B$  stets  $AB \subset \mathcal{R}_1$  gilt. Dann ist  $\Pi(\mathcal{R}_1) := (\mathcal{R}_1, \mathcal{G}_1 := \{g \in \mathcal{G} \mid g \subset \mathcal{R}_1\})$  ein projektiver Raum. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{u}\Pi$  die Menge aller Unterräume von  $\Pi$ ; ein von  $\mathcal{R}$  verschiedener Unterraum heißt echter Unterraum.

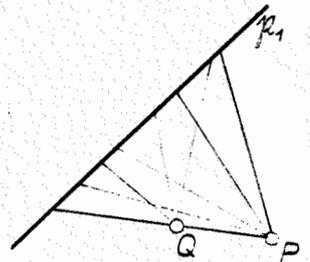
Sind  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}$  zwei Unterräume, so sind der Schnitt (Durchschnitt)  $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$  mit

$$(1) \quad \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 := \{P \in \mathcal{R} \mid P \in \mathcal{R}_1 \wedge P \in \mathcal{R}_2\}$$

und die Verbindung  $\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2$  mit

$$(2) \quad \mathcal{R}_1 \vee \emptyset = \emptyset \vee \mathcal{R}_1 := \mathcal{R}_1, \\ \mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2 := \{P \in \mathcal{R} \mid P \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \text{ oder } P \in \cup P_1 P_2 \text{ für } P_1 \in \mathcal{R}_1, P_2 \in \mathcal{R}_2, P_1 \neq P_2\}.$$

Unterräume von  $\Pi$ . Die Verbindung  $\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2$  stimmt mit der Verbindungshülle  $[\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2]$  der Vereinigung  $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$  überein, also mit dem Durchschnitt aller Unterräume von  $\Pi$ , die  $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$  enthalten (I, 94). Das Schneiden und das Verbinden von Unterräumen ist kommutativ und assoziativ



(I, 86, 94). Weiters gelten die Austauschregel<sup>4</sup> (I, 88)

$$(3) \quad P, Q \in \mathcal{R}, \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R} \text{ mit } Q \in \{P\} \vee \mathcal{R}_1, Q \notin \mathcal{R}_1 \implies P \in \{Q\} \vee \mathcal{R}_1, \{P\} \vee \mathcal{R}_1 = \{Q\} \vee \mathcal{R}_1$$

und die Dedekindsche Regel (I, 98):

$$(4) \quad \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3 \in \mathcal{u}\Pi \text{ mit } \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_3 \implies \mathcal{R}_1 \vee (\mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3) = (\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2) \cap \mathcal{R}_3.$$

Zwei Unterräume  $\mathcal{R}_1, \overline{\mathcal{R}}_1 \in \mathcal{u}\Pi$  heißen komplementär in  $\Pi$ , wenn  $\mathcal{R}_1 \cap \overline{\mathcal{R}}_1 = \emptyset$ ,  $\mathcal{R}_1 \vee \overline{\mathcal{R}}_1 = \mathcal{R}$  gilt. Ein zu einem Punkt komplementärer Unterraum heißt eine Hyperebene; wir bezeichnen Hyperebenen mit kleinen griechischen Buchstaben und die Menge aller Hyperebenen von  $\Pi$  mit  $\mathcal{h}$ . Zwei

<sup>4</sup>In der projektiven Geometrie wird in der Schreibweise nicht zwischen dem Punkt  $P \in \mathcal{R}$  und dem einelementigen Unterraum  $\{P\} \subset \mathcal{R}$  unterschieden (I, 86), was jetzt nicht zweckmäßig ist. Da das Schneiden und Verbinden für Unterräume, also für Teilmengen von  $\mathcal{R}$  erklärt ist, müssen wir jetzt  $\{P\} \cap \mathcal{R}_1$  und  $\{P\} \vee \mathcal{R}_1$  anstelle von  $P \cap \mathcal{R}_1$  und  $P \vee \mathcal{R}_1$  schreiben. Für die Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte  $P, Q$  gilt dann  $PQ = \{P\} \vee \{Q\} \subset \mathcal{R}$ . Wir werden auch  $\{P\}$  einen Punkt nennen.

Unterräume von  $\Pi$  mit leerem Schnitt heißen windschiefe Unterräume.

Eine Punktmenge  $\{P_j \in \mathcal{P} \mid j \in J\}$  heißt unabhängig, wenn keiner ihrer Punkte in der Verbindungshülle der restlichen Punkte liegt. Eine unabhängige Punktmenge  $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$  heißt eine Basis von  $\Pi$ , wenn  $\mathcal{P} = [\mathcal{L}]$  ist. Je zwei Basen von  $\Pi$  sind gleichmächtig (I,89). Ein projektiver Raum  $\Pi$  heißt n-dimensional ( $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$ ), wenn er eine Basis aus  $n+1$  Punkten besitzt; existiert keine endliche Basis, so heißt  $\Pi$  unendlichdimensional. Wir schreiben  $\dim \Pi = n$  bzw.  $\dim \Pi = \infty$ . Ein leerer bzw. einpunktiger bzw. eingeradiger projektiver Raum hat die Dimension  $-1$  bzw.  $0$  bzw.  $1$ , eine projektive Ebene hat die Dimension  $2$  (I,92), sodaß jedes Dreieck (drei nichtkollineare Punkte) eine Basis einer projektiven Ebene ist; weiter gilt  $\dim \Pi_{AR} = 3$  (I,122), und in  $\Pi_{AR}$  ist jedes Tetraeder (vier nicht komplanare Punkte) eine Basis.

Sind  $\mathcal{P}_1$  und  $\mathcal{P}_2$  Unterräume eines endlichdimensionalen projektiven Raumes  $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ , so gilt der Dimensionssatz (I,100):

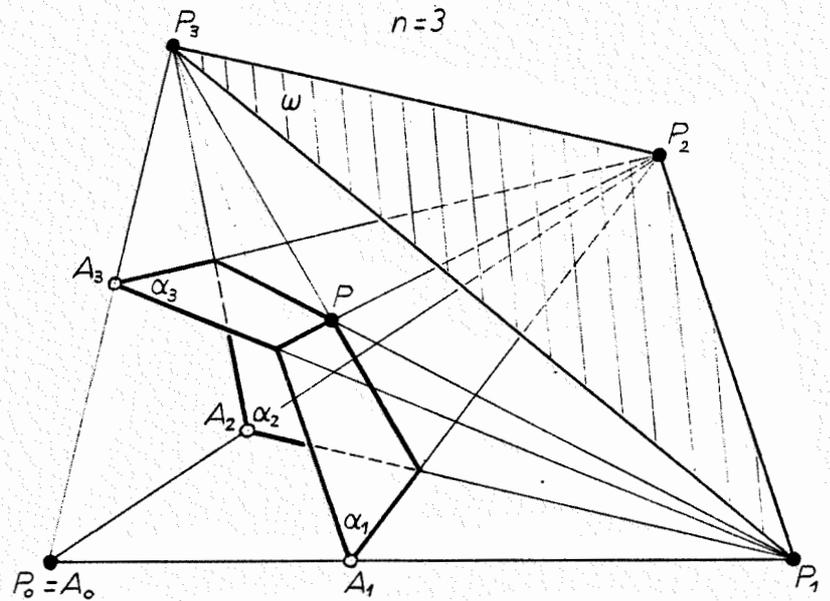
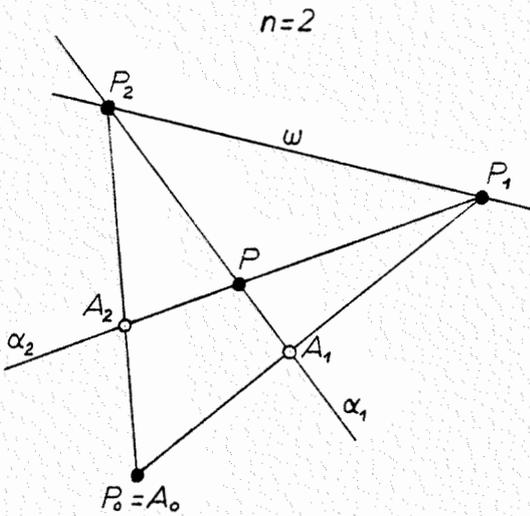
$$(5) \quad \dim \Pi(\mathcal{P}_1) + \dim \Pi(\mathcal{P}_2) = \dim \Pi(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) + \dim \Pi(\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2).$$

Für  $\dim \Pi = n < \infty$  ergibt sich aus dem Dimensionssatz:

1. Ein Unterraum  $\mathcal{P}_1$  ist genau dann zu einem Unterraum  $\mathcal{P}_2$  mit  $\dim \Pi(\mathcal{P}_2) = k$  komplementär, wenn  $\mathcal{P}_1$  und  $\mathcal{P}_2$  windschief sind und  $\dim \Pi(\overline{\mathcal{P}_1}) = n - k - 1$  gilt.
2. Die Hyperebenen sind genau die  $(n-1)$ -dimensionalen Unterräume.
3. Ist  $\mathcal{P}_1$  ein Unterraum und  $\omega$  eine Hyperebene mit  $\mathcal{P}_1 \not\subset \omega$ , so ist  $\mathcal{P}_1 \cap \omega$  eine Hyperebene des projektiven Raumes  $\Pi(\mathcal{P}_1)$ ; insbesondere schneidet jede Gerade eine Hyperebene, in der sie nicht liegt, in genau einem Punkt.

Die Aussage 3 gilt auch für  $\dim \Pi = \infty$  (I,99).

Ist  $\mathcal{L}$  eine Basis und  $\omega$  eine Hyperebene von  $\Pi$  mit  $\mathcal{L} \cap \omega = \emptyset$ , so heißt  $(\mathcal{L}; \omega)$  eine Fundamentalfigur von  $\Pi$ . In einem  $n$ -dimensionalen projektiven Raum mit  $1 \leq n < \infty$  ist die Angabe einer Fundamentalfigur äquivalent der Angabe einer Fundamentalmenge; dies sind  $n+2$  Punkte, von denen je  $n+1$  eine Basis bilden (I,153). Die Abb. veranschaulicht diese Aussage für  $n=2$  und  $n=3$ ; dabei ist  $\mathcal{L} = \{A_0, \dots, A_n\}$  eine Basis und  $\{P_0 := A_0, P_j := A_0 A_j \cap \omega \ (j=1, \dots, n), P = \bigwedge_{j=1}^n \alpha_j \text{ mit } \alpha_j := \{A_j\} \vee \{P_1\} \vee \dots \vee \{P_{j-1}\} \vee \{P_{j+1}\} \vee \dots \vee \{P_n\} \in \mathcal{G}\}$  eine Fundamentalfigur.



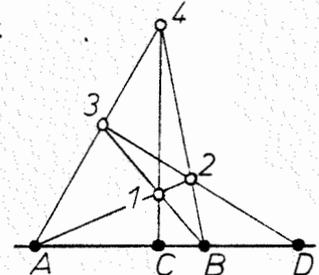
1.1.3 Sind  $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$  und  $\mathbb{P}' = (\mathcal{P}', \mathcal{G}')$  zwei projektive Räume, so heißt eine Abbildung  $\kappa: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  eine Kollineation, wenn gilt:

- (K1)  $\kappa$  ist eine Bijektion,
- (K2) kollineare Punkte gehen in kollineare Punkte über,
- (K3) nicht kollineare Punkte gehen in nicht kollineare Punkte über.

Zwei projektive Räume  $\mathbb{P}, \mathbb{P}'$  heißen genau dann isomorph, wenn eine Kollineation  $\kappa: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  existiert. Eine Kollineation führt Unterräume in Unterräume über und ist mit Verbinden und Schneiden verträglich (I,113). Komplementäre Unterräume gehen in komplementäre Unterräume und daher Hyperebenen in Hyperebenen über.

Eine Kollineation führt eine Basis bzw. Fundamentalfigur von  $\mathbb{P}$  in eine Basis bzw. Fundamentalfigur von  $\mathbb{P}'$  über; isomorphe projektive Räume haben gleiche Dimension  $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0, \infty\}$ . Gilt  $\dim \mathbb{P} = \dim \mathbb{P}' < \infty$  und erfüllt eine Abbildung  $\kappa: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  die Eigenschaften (K1) und (K2), so ist sie eine Kollineation (I,115). Für  $\dim \mathbb{P} = \dim \mathbb{P}' = 1$  ist jede Bijektion  $\kappa: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  eine Kollineation.

Sind  $(A, B)$  und  $(C, D)$  zwei Punktepaare einer Geraden eines mindestens zweidimensionalen projektiven Raumes  $\mathbb{P}$ , so heißt  $(C, D)$  harmonisch zu  $(A, B)$ -H(A,B;C,D)-, wenn ein Viereck  $\{1, 2, 3, 4\}$  so existiert, daß A und B zwei verschiedene Diagonalpunkte sind und C und D je auf einer der beiden Gegengeraden durch den dritten Diagonalpunkt liegen<sup>4</sup> (I,35). Jede



<sup>4</sup> Ein Viereck ist eine Fundamentalmenge einer projektiven Ebene. Je zwei Geraden, die zusammen alle Viereckpunkte enthalten, heißen Gegengeraden und die drei Schnittpunkte von je zwei Gegengeraden heißen Diagonalpunkte des Vierecks.

Kollineation führt harmonische Paare in harmonische Paare über.

Alle Kollineationen eines projektiven Raumes  $\Pi$  auf sich bilden seine Kollineationsgruppe  $PGL(\Pi)$ . Für  $\dim \Pi > 1$  heißt eine Kollineation  $\kappa \in PGL(\Pi)$  perspektive Kollineation, wenn es eine Hyperebene  $\alpha$  (Achse von  $\kappa$ ) gibt mit  $\kappa|_{\alpha} = id_{\alpha}$ . Jede nichttriviale perspektive Kollineation besitzt genau eine Achse und genau ein Zentrum  $Z \in \mathcal{P}$ , das mit zugeordneten Punkten  $X, X\kappa$  stets kollinear ist. Für  $Z \notin \alpha$  bzw.  $Z \in \alpha$  heißt  $\kappa$  eine Homologie bzw. eine Elation; die Identität  $id_{\mathcal{P}}$  ist eine perspektive Kollineation zu beliebigem Zentrum und beliebiger Achse. Alle perspektiven Kollineationen zu festem Zentrum  $Z$  und fester Achse  $\alpha$  ( $(Z, \alpha)$ -Kollineationen) bilden die Gruppe  $PGL(Z, \alpha) \subset PGL(\Pi)$  (I, 126).

Ist  $(\mathcal{L}; \omega)$  eine Fundamentalfigur von  $\Pi$  und  $\kappa \in PGL(\Pi)$  eine Kollineation, welche die Punkte von  $\mathcal{L}$  als Fixpunkte besitzt,  $\omega\kappa = \omega$  leistet, und deren Einschränkung auf die Verbindungsgerade zweier Punkte von  $\mathcal{L}$  die Identität ist, so gilt  $\kappa = id_{\mathcal{P}}$  (I, 155).

Als Beweishilfsmittel benötigen wir (vgl. die analoge Aussage in I, 127)

Satz 1.1.1: Ist  $\kappa: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  eine Kollineation von  $\Pi$  auf  $\Pi'$  und  $\sigma \in PGL(\Pi)$  eine  $(Z, \alpha)$ -Kollineation in  $\Pi$  mit  $P\sigma = \bar{P}$ , so ist  $\bar{\kappa} = \sigma^{-1}\kappa \in PGL(\Pi')$  eine  $(Z\kappa, \alpha\kappa)$ -Kollineation in  $\Pi'$  mit  $P\bar{\kappa} = \bar{P}\kappa$ .

Beweis. Für  $X \in \alpha$  gilt  $(X\kappa)\bar{\kappa} = X\sigma\kappa = X\kappa$ , sodaß  $\bar{\kappa}$  eine perspektive Kollineation in  $\Pi'$  mit der Achse  $\alpha\kappa$  ist; weiter gilt  $P\bar{\kappa} = P\kappa(\sigma^{-1}\kappa) = P\sigma\kappa = \bar{P}\kappa$ . Da stets  $X, X\sigma, Z$  kollinear sind, folgt  $X\kappa =: Y', X\sigma\kappa = Y'\bar{\kappa}$ ,  $Z\sigma\kappa = Z\kappa$  kollinear für alle  $Y' \in \mathcal{P}'$ .  $\square$

1.1.4 Ist  $\mathcal{W}$  ein Rechtsvektorraum über einem (nicht notwendig kommutativen) Körper  $K$  und  $u^1\mathcal{W} := \{\varphi K \mid \varphi \in \mathcal{W} \setminus \{0\}\}$  bzw.  $u^2\mathcal{W} := \{\varphi K + \eta K \mid \varphi, \eta \in \mathcal{W}, \{\varphi, \eta\} \text{ l.u.}\}$  die Menge seiner eindimensionalen bzw. zweidimensionalen Unterräume, so ist  $\Pi(\mathcal{W}) = (u^1\mathcal{W}, u^2\mathcal{W})$  ein projektiver Raum, falls jeder zweidimensionale Unterraum als Menge seiner eindimensionalen Unterräume aufgefaßt wird (II, 1). Weiter gilt  $\dim \Pi(\mathcal{W}) = \dim \mathcal{W} - 1$  für  $\dim \mathcal{W} < \infty$  (II, 3). Ist  $\mathcal{R}^{n+1}$  der  $(n+1)$ -dimensionale Rechtsvektorraum der  $(n+1)$ -Tupel  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  von Elementen aus  $K$ , so heißt der projektive Raum  $\Pi(\mathcal{R}^{n+1})$  der  $n$ -dimensionale arithmetische projektive Raum über dem Körper  $K$ ; seine Punkte sind die "homogenen" nicht trivialen  $(n+1)$ -Tupel  $(a_0, a_1, \dots, a_n)K$ .

Sind  $\Pi(\mathcal{W})$ ,  $\Pi'(\mathcal{W}')$  projektive Räume über Rechtsvektorräumen  $\mathcal{W}$  zum Körper  $K$  und  $\mathcal{W}'$  zum Körper  $K'$  mit  $\dim \Pi(\mathcal{W}), \dim \Pi'(\mathcal{W}') \geq 2$ , so ist eine Abbildung  $\kappa: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$  genau dann eine Kollineation, wenn ein  $\dot{f}$ -Vektorraumisomorphismus<sup>5</sup>  $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$  existiert mit  $(\varphi\kappa)\kappa = (\varphi f)K'$  (II, 20).

1.1.5 Ist  $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$  ein nichtleerer projektiver Raum und  $\omega \in \mathcal{P}$  eine Hyperebene von  $\Pi$ , so heißt das Paar  $(\overset{\circ}{\mathcal{P}}, \overset{\circ}{\mathcal{G}})$  mit  $\overset{\circ}{\mathcal{P}} := \mathcal{P} \setminus \omega$ ,  $\overset{\circ}{\mathcal{G}} := \{\overset{\circ}{g} := g \cap \overset{\circ}{\mathcal{P}} \mid g \in \mathcal{G}, g \neq \omega\}$

ein affiner Raum<sup>6</sup>  $\overset{\circ}{\Pi}$ ; wir schreiben auch  $\overset{\circ}{\Pi} = \Pi \setminus \omega$ . Nach Auszeichnung der Fernhyperebene  $\omega$  in  $\Pi$  heißen die Punkte von  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$  bzw. von  $\omega$  eigentliche Punkte bzw. Fernpunkte. Eine nichtleere Teilmenge  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_1$  von  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$  heißt ein affiner Unterraum, wenn sie aus den eigentlichen Punkten  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_1 \setminus (\overset{\circ}{\mathcal{P}}_1 \cap \omega)$  eines Unterraumes  $\mathcal{P}_1$  von  $\Pi$  besteht, und  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_1 \cap \omega$  heißt der Fernraum des affinen Unterraumes  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_1$ ; ist  $\alpha$  eine von  $\omega$  verschiedene Hyperebene von  $\Pi$ , so heißt  $\overset{\circ}{\alpha} := \alpha \setminus (\alpha \cap \omega)$  eine affine Hyperebene. Zwei affine Unterräume  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_1, \overset{\circ}{\mathcal{P}}_2$  von  $\overset{\circ}{\Pi}$  heißen parallele Unterräume ( $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_1 \parallel \overset{\circ}{\mathcal{P}}_2$ ), wenn  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_1 \cap \omega \subset \overset{\circ}{\mathcal{P}}_2 \cap \omega$  oder  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_2 \cap \omega \subset \overset{\circ}{\mathcal{P}}_1 \cap \omega$  gilt.

Ist  $\kappa: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  eine Kollineation eines projektiven Raumes  $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$  auf einen projektiven Raum  $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{G}')$  und  $\omega \in \mathcal{P}$  eine Hyperebene, so ist  $\omega\kappa \in \mathcal{P}'$  nach 1.1.3 eine Hyperebene von  $\Pi'$ ; die Abbildung  $\overset{\circ}{\kappa}: \overset{\circ}{\mathcal{P}} \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{P}}' \setminus \omega\kappa$  mit  $X\overset{\circ}{\kappa} := X\kappa$  für  $X \in \overset{\circ}{\mathcal{P}}$  des affinen Raumes  $\overset{\circ}{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  auf den affinen Raum  $\overset{\circ}{\Pi}' = \Pi' \setminus \omega\kappa$  heißt eine Affinität und  $\kappa$  ihre projektive Fortsetzung. Alle Affinitäten von  $\overset{\circ}{\Pi}$  bilden die Affinitätsgruppe  $A\Gamma L(\overset{\circ}{\Pi})$  von  $\overset{\circ}{\Pi}$ . Eine Affinität  $\overset{\circ}{\kappa} \in A\Gamma L(\overset{\circ}{\Pi})$  heißt eine perspektive Affinität, wenn ihre projektive Fortsetzung  $\kappa$  eine perspektive Kollineation ist. Ist die projektive Fortsetzung  $\kappa$  einer perspektiven Affinität  $\overset{\circ}{\kappa}$  eine  $(Z, \omega)$ -Homologie bzw. eine  $(Z, \omega)$ -Elation mit der Fernhyperebene  $\omega$  als Achse, so heißt  $\overset{\circ}{\kappa}$  eine Streckung zum Zentrum  $Z \in \overset{\circ}{\mathcal{P}}$  bzw. eine Translation in Richtung  $Z \in \omega$ .

<sup>5</sup> Ist  $\dot{f}: K \rightarrow K'$  eine Bijektion, so heißt eine Bijektion  $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$  ein  $\dot{f}$ -Vektorraumisomorphismus, wenn gilt  $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$ ,  $(\alpha a)f = (\alpha f)(af)$   $\alpha, \beta \in \mathcal{W}, a \in K$ . Die Bijektion  $\dot{f}: K \rightarrow K'$  ist dann ein Körperisomorphismus.

<sup>6</sup> In II, 75 wird ein affiner Raum axiomatisch definiert und in II, 78 gezeigt, daß aus einem projektiven Raum auf obige Weise ein affiner Raum entsteht.

## 1.2 Projektionen und Perspektivitäten

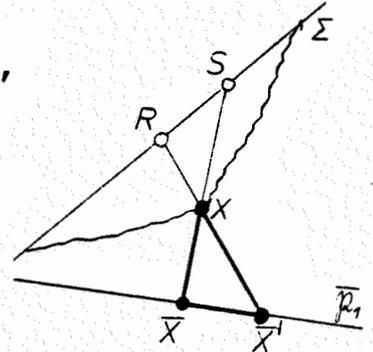
1.2.1 Wir verallgemeinern die in 1.1.1 als Beispiel vorgeführte Projektion.

Satz 1.2.1: Ist  $\Sigma \subset \mathcal{R}$  ein echter Unterraum eines projektiven Raumes  $\Pi = (\mathcal{R}, \mathcal{G})$  mit  $\dim \Pi \geq 2$  und  $\bar{\mathcal{F}}_1 \subset \mathcal{R}$  ein zu  $\Sigma$  komplementärer Unterraum in  $\Pi$ , so ist für alle Punkte  $X \in \mathcal{R} \setminus \Sigma$  der Unterraum  $(\{X\} \vee \Sigma) \cap \bar{\mathcal{F}}_1$  einpunktig.

Beweis<sup>1</sup>. Für  $\Sigma = \emptyset$  ist  $\bar{\mathcal{F}}_1 = \mathcal{R}$  und  $(\{X\} \vee \Sigma) \cap \bar{\mathcal{F}}_1 = \{X\}$ .

Für  $\Sigma \neq \emptyset$  existieren wegen  $\Sigma \neq \mathcal{R}$ , also  $\bar{\mathcal{F}}_1 \neq \emptyset$ , und  $\Sigma \cap \bar{\mathcal{F}}_1 = \emptyset$ ,  $\Sigma \vee \bar{\mathcal{F}}_1 = \mathcal{R}$  zu jedem Punkt  $X \in \mathcal{R} \setminus \Sigma$  zwei verschiedene Punkte  $S \in \Sigma$  und  $\bar{X} \in \bar{\mathcal{F}}_1$  mit  $X \in S\bar{X}$ . Damit gilt  $\bar{X} \in (\{X\} \vee \Sigma) \cap \bar{\mathcal{F}}_1$ . Die Gerade  $S\bar{X}$  trifft den Unterraum  $\bar{\mathcal{F}}_1$  nur in  $\bar{X}$  wegen  $S \notin \bar{\mathcal{F}}_1$ .

Trifft  $\{X\} \vee \Sigma$  dagegen  $\bar{\mathcal{F}}_1$  noch in einem Punkt  $\bar{X}' \neq \bar{X}$ , so schneidet  $X\bar{X}'$  den Unterraum  $\Sigma$  nach Definition der Verbindung  $\{X\} \vee \Sigma$  in einem Punkt  $R$  und nach (PR 2) existiert ein Punkt  $T$  mit  $T \in \bar{X}\bar{X}' \subset \bar{\mathcal{F}}_1$  und  $T \in RS \subset \Sigma$ , was  $\Sigma \cap \bar{\mathcal{F}}_1 = \emptyset$  widerspricht.  $\square$



Dieser Satz ermöglicht

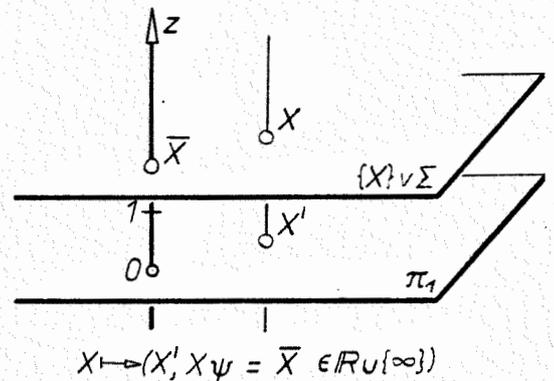
Def. 1.2.1: Ist  $\Sigma \subset \mathcal{R}$  ein echter Unterraum eines projektiven Raumes  $\Pi = (\mathcal{R}, \mathcal{G})$  mit  $\dim \Pi \geq 2$  und  $\bar{\mathcal{F}}_1 \subset \mathcal{R}$  ein zu  $\Sigma$  komplementärer Unterraum in  $\Pi$ , so heißt die Abbildung  $\psi: \mathcal{R} \rightarrow \bar{\mathcal{F}}_1$  mit  $X (\in \mathcal{R} \setminus \Sigma) \mapsto X_\psi =: \bar{X}$  und  $\{\bar{X}\} = (\{X\} \vee \Sigma) \cap \bar{\mathcal{F}}_1$  die Projektion aus  $\Pi$  mit dem Zentrum  $\Sigma$  auf den Unterraum  $\bar{\mathcal{F}}_1$  und  $\bar{X}$  der RiB von  $X$ .

Für  $\Sigma = \emptyset$  ist  $\psi = id_{\mathcal{R}}$ , also eine Bijektion; für  $\Sigma \neq \emptyset$  ist  $\psi$  nicht global mit der Ausnahmemenge  $A_\psi = \Sigma$ . Wegen  $\psi|_{\bar{\mathcal{F}}_1} = id_{\bar{\mathcal{F}}_1}$  ist  $\text{im } \psi = \bar{\mathcal{F}}_1$ , also  $\psi$  surjektiv. Jede Faser  $(\bar{X}_\psi^{-1}) = (\{\bar{X}\} \vee \Sigma) \setminus \Sigma$ ,  $\bar{X} \in \bar{\mathcal{F}}_1$  ist ein längs des Zentrums  $\Sigma$  aufgeschnittener projizierender Unterraum, so daß  $\psi$  für  $\Sigma \neq \emptyset$  nicht injektiv ist. Weiters ist  $\psi$  idempotent, d.h. es gilt  $\psi \psi = \psi$ ; dies folgt aus  $\psi|_{\bar{\mathcal{F}}_1} = id_{\bar{\mathcal{F}}_1}$ .

Nach Voraussetzung gilt  $\Sigma \neq \mathcal{R}$ . Ist  $\Sigma$  eine Hyperebene, so ist  $\bar{\mathcal{F}}_1$  ein Punkt und alle Punkte, die nicht in  $\Sigma$  liegen, haben denselben RiB  $\bar{A}$ . Ist  $\Sigma$  zu einer Geraden komplementär, was für  $\dim \Pi = n < \infty$  nach 1.1.2 bedeutet  $\dim \Pi(\Sigma) = n-2$ , so sind die projizierenden Unterräume Hyperebenen, und der RiB eines Punktes  $X \in \mathcal{R} \setminus \Sigma$  ist der Schnittpunkt der Hyperebene  $\{X\} \vee \Sigma$  mit der Geraden  $\bar{\mathcal{F}}_1$ .

<sup>1</sup>Für  $\dim \Pi < \infty$  kann der Beweis mit Hilfe des Dimensionssatzes geführt werden.

Eine Projektion auf eine Gerade heißt eine Kotierung<sup>1</sup>. Die kotierte Projektion in  $\Pi_{AR}$  ist die Kopplung einer Normalprojektion auf die Grundrißebene  $\pi_1$  mit einer Kotierung  $\psi$ , bei der die Ferngerade von  $\pi_1$  als Zentrum und die mit  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  identifizierte z-Achse als  $\text{im } \psi$  fungieren.



Für  $\dim \Pi(\bar{\mathcal{P}}_1) = 2$  und  $n=3$  liegt die elementare Projektion aus einem dreidimensionalen projektiven Raum auf eine projektive Ebene dieses Raumes vor, bei der alle projizierenden Unterräume ein Bündel von Geraden durch den Augpunkt  $\Sigma$  bilden. Für  $\dim \Pi(\bar{\mathcal{P}}_1) = 2$  und  $n=4$  ist das Zentrum  $\Sigma$  eine zur Bildebene windschiefe Gerade und die projizierenden Unterräume sind die Ebenen durch  $\Sigma$ .

Ist  $\bar{\mathcal{P}}_1$  eine Hyperebene, so existiert ein einpunktiges Zentrum  $\Sigma \subset \bar{\mathcal{P}}_1$  und die projizierenden Unterräume sind die Geraden durch  $\Sigma$ . Für  $n=4$  erhält man so die Projektion aus einem vierdimensionalen projektiven Raum auf einen dreidimensionalen Unterraum.

1.2.2 Ist  $\psi : \mathcal{P} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}_1$  eine Projektion mit Zentrum  $\Sigma$  und  $\bar{\mathcal{P}}_2$  ein zum Zentrum komplementärer Unterraum, so ist  $\psi|_{\bar{\mathcal{P}}_2} : \bar{\mathcal{P}}_2 \rightarrow \bar{\mathcal{P}}_1$  eine globale Abbildung.

Def. 1.2.2: Die Einschränkung einer Projektion  $\psi : \mathcal{P} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}_1$  auf einen zum Zentrum von  $\psi$  komplementären Unterraum  $\bar{\mathcal{P}}_2$  heißt Perspektivität  $\psi|_{\bar{\mathcal{P}}_2} : \bar{\mathcal{P}}_2 \rightarrow \bar{\mathcal{P}}_1$ .

Dann gilt:

Satz 1.2.2: Die Perspektivität  $\psi|_{\bar{\mathcal{P}}_2} : \bar{\mathcal{P}}_2 \rightarrow \bar{\mathcal{P}}_1$  ist eine Kollineation des projektiven Raumes  $\Pi(\bar{\mathcal{P}}_2)$  auf den projektiven Raum  $\Pi(\bar{\mathcal{P}}_1)$ .

Beweis. Wegen  $\bar{\mathcal{P}}_1 \cap \Sigma = \bar{\mathcal{P}}_2 \cap \Sigma = \emptyset$  ist  $\psi|_{\bar{\mathcal{P}}_2}$  nach 1.2.1 eine Bijektion, so daß für  $X, Y \in \bar{\mathcal{P}}_2$  mit  $X \neq Y$  folgt  $X\psi =: \bar{X} \neq Y\psi =: \bar{Y}$ .

Für die Punkte  $Z \in XY$  gilt  $(XY)\psi = \{(\{Z\} \vee \Sigma) \cap \bar{\mathcal{P}}_1 \mid Z \in XY\}$ . Nach 1.1.2, (2) ist  $\{(\{Z\} \vee \Sigma) \mid Z \in XY\} = \{X\} \vee \{Y\} \vee \Sigma = \{X\} \vee (\{Y\} \vee \Sigma)$ , da Verbinden assoziativ ist. Wegen  $(\{Y\} \vee \Sigma) \cap \bar{\mathcal{P}}_1 = \{\bar{Y}\}$  und  $\bar{Y} \neq \bar{X} \in \bar{\mathcal{P}}_1$  folgt  $\bar{X} \notin \{Y\} \vee \Sigma$ ;

<sup>1</sup> Diese Bezeichnung wird in 1.4.2 motiviert.

mit  $\{\bar{X}\} \in \{X\} \vee (\{Y\} \vee \Sigma)$  liefert 1.1.2, (3) dann  $\{X\} \vee (\{Y\} \vee \Sigma) = \{\bar{X}\} \vee (\{Y\} \vee \Sigma)$ .  
 Mit  $\{\bar{X}\} \subset \bar{\mathcal{P}}_1$  ergibt 1.1.2, (4) schließlich  $(\{\bar{X}\} \vee (\{Y\} \vee \Sigma)) \cap \bar{\mathcal{P}}_1 =$   
 $= \{\bar{X}\} \vee ((\{Y\} \vee \Sigma) \cap \bar{\mathcal{P}}_1) = \{\bar{X}\} \vee \{\bar{Y}\}$ , so daß insgesamt gilt  $(XY) \varphi = \bar{X}\bar{Y}$ .  
 Damit erhält  $\varphi|_{\bar{\mathcal{P}}_1}$  kollineare Lage und  $\varphi|_{XY:XY \rightarrow \bar{X}\bar{Y}}$  ist surjektiv

Ist<sup>2</sup>  $\{X, Y, Z\}$  ein Dreieck in  $\bar{\mathcal{P}}_2$  und gilt  $Z\varphi = \bar{Z} \in \bar{X}\bar{Y}$ , so  
 existiert ein Punkt  $P \in XY$  mit  $P\varphi = \bar{Z}$ , da  $\varphi|_{XY}$  surjektiv ist.  
 Aus  $P\varphi = Z\varphi$ ,  $P \neq Z$  folgt ein Widerspruch zur Bijektivität von  $\varphi|_{\bar{\mathcal{P}}_1}$ .  $\square$

Für  $\dim \Pi(\bar{\mathcal{P}}_1) = \dim \Pi(\bar{\mathcal{P}}_1') = 1$  ist die Bezeichnung Perspektivität  
 aus der projektiven Geometrie geläufig (I, 142) und  $\varphi|_{\bar{\mathcal{P}}_2}$  ist als  
 Bijektion dann auch eine Kollineation. Für  $\bar{\mathcal{P}}_1 \cap \bar{\mathcal{P}}_2 \neq \emptyset$  sind genau  
 die Punkte von  $\bar{\mathcal{P}}_1 \cap \bar{\mathcal{P}}_2$  Fixpunkte der Perspektivität<sup>3</sup>  $\varphi|_{\bar{\mathcal{P}}_1}$ . Die  
 Umkehrung  $(\varphi|_{\bar{\mathcal{P}}_2})^{-1}: \bar{\mathcal{P}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{P}}_2$  einer Perspektivität ist eine Per-  
 spektivität, nämlich die Einschränkung auf  $\bar{\mathcal{P}}_1$  der Projektion aus  $\Pi$   
 mit dem Zentrum  $\Sigma$  und dem Bildraum  $\bar{\mathcal{P}}_2$ .

Da isomorphe projektive Räume im Sinne der projektiven Geometrie  
 nicht wesentlich verschieden sind, ist es bei einer Projektion  
 gleichgültig, welchen zum Zentrum  $\Sigma$  komplementären Unterraum man  
 als Bildraum  $\bar{\mathcal{P}}_1$  wählt. Eine Projektion ist daher im wesentlichen  
 durch ihre Fasern festgelegt.

<sup>2</sup>Für  $\dim \Pi < \infty$  ist nach 1.1.3 der letzte Beweisschritt wegen  
 $\dim \Pi(\bar{\mathcal{P}}_1) = \dim \Pi(\bar{\mathcal{P}}_1')$  entbehrlich.

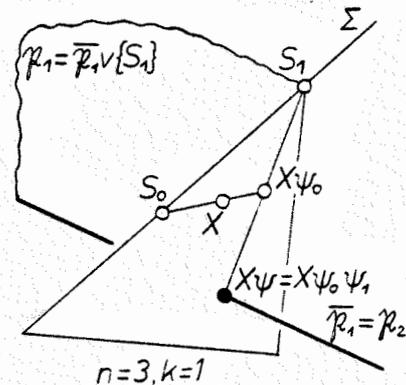
<sup>3</sup>Sind  $\bar{\mathcal{P}}_1$  und  $\bar{\mathcal{P}}_1'$  verschiedene Hyperebenen, so ist die Menge  $\bar{\mathcal{P}}_1 \cap \bar{\mathcal{P}}_2$  der  
 Fixpunkte eine Hyperebene des projektiven Raumes  $\Pi(\bar{\mathcal{P}}_1)$ . In diesem  
 Fall wird gelegentlich die Perspektivität eine perspektive  
 Kollineation der Hyperebene  $\bar{\mathcal{P}}_2$  auf die andere Hyperebene  $\bar{\mathcal{P}}_1$  genannt.  
 In der modernen Literatur über projektive Geometrie ist eine per-  
 spektive Kollineation aber stets eine Autokollineation eines pro-  
 jektiven Raumes mit einer Fixpunkthyperebene; bei einer Perspektivi-  
 tät gehören weder das Zentrum noch die projizierenden Unterräume  
 der Definitionsmenge an.

Perspektivitäten treten im Elementarunterricht der Darstellenden  
 Geometrie bei der Projektion ebener Figuren und bei ebenen Schnitten  
 von Pyramiden und Kegeln auf. Es ist zweckmäßig, auch hier zwischen  
 Perspektivität und perspektiver Kollineation zu unterscheiden. Die  
 durch eine Projektion vermittelte Perspektivität wird allein durch  
 Verbinden und Schneiden vervollständigt, während die Vervoll-  
 ständigung einer perspektiven Kollineation nur möglich ist, wenn  
 man auch die Eigenschaften einer Kollineation benützt.

1.2.3 Eine Projektion  $\psi: \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{P}}_1$  mit endlichdimensionalem Zentrum  $\Sigma$  und  $\Sigma \neq \emptyset$  kann stets auf ein endliches Produkt von Projektionen mit einpunktigen Zentren zurückgeführt werden:

Satz 1.2.3: Ist  $\{S_0, \dots, S_k\}$  eine Basis des  $k$ -dimensionalen Zentrums  $\Sigma$  ( $1 \leq k < \infty$ ) einer Projektion  $\psi: \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{P}}_1$  und  $\psi_j: \mathbb{P}_j \rightarrow \mathbb{P}_{j+1}$  die Projektion aus dem projektiven Raum  $\Pi(\mathbb{P}_j)$  zum Zentrum  $S_j$  auf die Hyperebene  $\mathbb{P}_{j+1}$  von  $\Pi(\mathbb{P}_j)$  mit  $\mathbb{P}_j := \overline{\mathbb{P}}_1 \vee \{S_j\} \vee \{S_{j+1}\} \vee \dots \vee \{S_k\}$  ( $j=0, \dots, k$ ),  $\mathbb{P}_{k+1} := \overline{\mathbb{P}}_1$ , so gilt  $\psi = \psi_0 \psi_1 \dots \psi_k$ .

Beweis. Für  $X \in \mathbb{P} \setminus \Sigma$  liegt  $X$  nicht im Ausnahmerraum von  $\psi_0, \dots, \psi_k$ , und es gilt  $X\psi_0 \dots \psi_k \in \overline{\mathbb{P}}_1$  wegen  $\overline{\mathbb{P}}_1 = \mathbb{P}_{k+1} = \text{im } \psi_k$ . Außerdem gilt  $X_j \in \{S_j\} \vee \{X_{j-1}\}$  für  $X_j := X\psi_0 \dots \psi_j$  ( $j=0, \dots, k$ ) mit  $X_{-1} := X$ , also  $X_k \in \{S_k\} \vee \{X_{k-1}\} \subset \{S_k\} \vee \{S_{k-1}\} \vee \{X_{k-2}\} \subset \dots \subset \{S_k\} \vee \dots \vee \{S_0\} \vee \{X\} = \Sigma \vee \{X\}$ , was  $\{X\} \subset (\Sigma \vee \{X\}) \cap \overline{\mathbb{P}}_1 = \{X\}$  und damit  $X\psi = X_k$  ergibt.  $\square$



1.2.4 In einem projektiven Raum  $\Pi = (\mathbb{P}, \mathcal{O}) = (u\mathcal{W}, u^2\mathcal{D})$  über einem Rechtsvektorraum  $\mathcal{W}$  zum Körper  $K$  ist eine Teilmenge  $\mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}$  genau dann ein Unterraum, wenn in der Menge  $u\mathcal{W}$  aller Untervektorräume von  $\mathcal{W}$  ein Vektorraum  $\mathcal{W}_1$  existiert mit  $\mathbb{P}_1 = \{q, K \in u\mathcal{W} \mid q \in \mathcal{W}_1 \setminus \{0\}\} =: \mathcal{W}_1 u$ . Die Abbildung  $\mu: u\mathcal{W} \rightarrow u\Pi(\mathcal{W})$  mit  $\mathcal{W}_1 \mapsto \mathbb{P}_1 = \mathcal{W}_1 u$ , die insbesondere  $\{0\} \in u\mathcal{W}$  auf den leeren Unterraum von  $\Pi$  abbildet, ist eine Bijektion (II,3). Für  $\mathbb{P}_1 = \mathcal{W}_1 u$ ,  $\mathbb{P}_2 = \mathcal{W}_2 u$  gilt

$$\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2 = (\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) u,$$

$$\mathbb{P}_1 \vee \mathbb{P}_2 = (\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) u \quad \text{mit} \quad \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 := \{q \in \mathcal{W} \mid q = q_1 + q_2, q_1 \in \mathcal{W}_1, q_2 \in \mathcal{W}_2\}.$$

Die Unterräume  $\mathbb{P}_1 = \mathcal{W}_1 u$ ,  $\overline{\mathbb{P}}_1 = \overline{\mathcal{W}}_1 u$  sind genau dann komplementär in  $\Pi(\mathcal{W})$ , wenn  $\mathcal{W}_1, \overline{\mathcal{W}}_1$  komplementär in  $\mathcal{W}$  sind, also  $\mathcal{W}_1 \cap \overline{\mathcal{W}}_1 = \{0\}$  und  $\mathcal{W}_1 + \overline{\mathcal{W}}_1 = \mathcal{W}$  gilt (II,3).

Zu komplementären Unterräumen  $\mathcal{W}_1$  und  $\overline{\mathcal{W}}_1$  von  $\mathcal{W}$  existiert für jedes  $q \in \mathcal{W}$  eine eindeutige Zerlegung<sup>4</sup> bezüglich  $\mathcal{W}_1$  und  $\overline{\mathcal{W}}_1$  der Gestalt  $q = q_1 + \overline{q}_1$  mit  $q_1 \in \mathcal{W}_1$  und  $\overline{q}_1 \in \overline{\mathcal{W}}_1$ . Die Abbildung  $pr: \mathcal{W} \rightarrow \overline{\mathcal{W}}_1$  mit  $q \mapsto \overline{q}_1$  ist ein linearer Vektorraumhomomorphismus<sup>5</sup> mit  $\ker pr = \mathcal{W}_1$  und heißt die Projektion aus  $\mathcal{W}$  auf  $\overline{\mathcal{W}}_1$  mit Zentrum  $\mathcal{W}_1$ .

<sup>4</sup>Aus  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 + \overline{\mathcal{W}}_1$  folgt die Existenz einer Zerlegung. Mit  $q = q_1 + \overline{q}_1 = q_1' + \overline{q}_1'$ , also  $q_1 - q_1' (\in \mathcal{W}_1) = \overline{q}_1 - \overline{q}_1' (\in \overline{\mathcal{W}}_1)$  folgt wegen  $\mathcal{W}_1 \cap \overline{\mathcal{W}}_1 = \{0\}$  die Eindeutigkeit.

<sup>5</sup>Für  $q = q_1 + \overline{q}_1$ ,  $\eta = \eta_1 + \overline{\eta}_1$  und  $a, b \in K$  ist  $qa + \eta b = (q_1 a + \eta_1 b) + (\overline{q}_1 a + \overline{\eta}_1 b)$ ; da die Zerlegung bezüglich  $\mathcal{W}_1$  und  $\overline{\mathcal{W}}_1$  eindeutig ist, ergibt sich  $(qa + \eta b)pr = \overline{q}_1 a + \overline{\eta}_1 b = (qpr)a + (\eta pr)b$ .

Ist  $\psi: \mathcal{P} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}_1$  eine Projektion aus  $\bar{\Pi}(\mathcal{W})$  auf  $\bar{\mathcal{P}}_1 = \bar{\mathcal{W}}_1 \bar{\mu}_1$  mit Zentrum  $\bar{\Sigma} = \bar{\mathcal{W}}_1 \bar{\mu}_1$ , so gilt mit  $pr: \mathcal{W} \rightarrow \bar{\mathcal{W}}_1$  dann  $(\varphi K)\psi = (\varphi pr)K$  für  $\varphi \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_1$ . Dies folgt für  $X = \varphi K \notin \bar{\Sigma} = \bar{\mathcal{W}}_1 \bar{\mu}_1$  mit  $\varphi = \varphi_1 + \bar{\varphi}_1$  aus  $(\{X\} \vee \bar{\Sigma}) \bar{\mu}_1^{-1} = \varphi K + \bar{\mathcal{W}}_1 = \varphi_1 K + \bar{\mathcal{W}}_1 + \bar{\varphi}_1 K$  und  $((\{X\} \vee \bar{\Sigma}) \cap \bar{\mathcal{P}}_1) \bar{\mu}_1^{-1} = ((\varphi_1 K + \bar{\mathcal{W}}_1) + \bar{\varphi}_1 K) \cap \bar{\mathcal{W}}_1 = \bar{\varphi}_1 K$ .

Satz 1.2.4: Ist  $\psi$  die Projektion aus  $\bar{\Pi}(\mathcal{W})$  auf  $\bar{\mathcal{W}}_1 \bar{\mu}_1$  mit Zentrum  $\bar{\mathcal{W}}_1 \bar{\mu}_1$  und  $pr: \mathcal{W} \rightarrow \bar{\mathcal{W}}_1$  die Projektion aus  $\mathcal{W}$  auf  $\bar{\mathcal{W}}_1$  mit Zentrum  $\bar{\mathcal{W}}_1$ , so gilt  $(\varphi K)\psi = (\varphi pr)K$  für  $\varphi \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_1$ .

1.2.5 Die Menge aller Hyperebenen durch einen zu einer Geraden komplementären Unterraum heißt ein Büschel von Hyperebenen.

Dann gilt (I,103):

Faßt man die Hyperebenen eines nicht leeren projektiven Raumes  $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$  als Punkte einer neuen Struktur auf, so ist die Menge  $\mathcal{P}^*$  dieser "neuen" Punkte und die Menge  $\mathcal{G}^*$  jener Teilmengen von  $\mathcal{P}^*$ , welche durch die Hyperebenen der Büschel in  $\Pi$  bestimmt werden, der zu  $\Pi$  duale projektive Raum  $\Pi^* = (\mathcal{P}^*, \mathcal{G}^*)$ . Die als Punkt  $X^* \in \mathcal{P}^*$  benannte Hyperebene von  $\Pi$  wird mit  $\mathcal{P}_{X^*} \subset \mathcal{P}$  bezeichnet. In  $\Pi^*$  sind alle Begriffsbildungen möglich, die wir in einem projektiven Raum erklärt haben. Erst wenn wir eine in  $\Pi^*$  spielende Aussage von  $\Pi$ , also von einem anderen Raum aus ansehen, entsteht eine neue Aussage, welche die zur gegebenen Aussage duale Aussage heißt.

Für  $\dim \Pi = n < \infty$  ist  $\dim \Pi^* = n$ , und die k-dimensionalen Unterräume von  $\Pi^*$  mit  $-1 \leq k \leq n$  sind von  $\Pi$  aus betrachtet genau jene Hyperebenenmengen, die aus allen Hyperebenen durch einen Unterraum von  $\Pi$  der Dimension  $n-k-1$  bestehen<sup>6</sup> (I,109,110). Ist  $u\Pi$  bzw.  $u\Pi^*$  die Menge der Unterräume von  $\Pi$  bzw.  $\Pi^*$ , so ist für  $\dim \Pi < \infty$  die Annulatorabbildung (I,105)

$$(1) \quad \lambda: u\Pi \rightarrow u\Pi^* \text{ mit } \mathcal{P}_\lambda := \{X^* \in \mathcal{P}^* \mid \mathcal{P}_{X^*} \supset \mathcal{P}_\lambda\} \in u\Pi^*$$

eine Bijektion und  $\dim \Pi^*(\mathcal{P}_\lambda) = k$  für  $\dim \Pi(\mathcal{P}_\lambda) = n-k-1$ ; insbesondere ist  $\emptyset \lambda = \mathcal{P}^*$ ,  $\mathcal{P} \lambda = \emptyset \subset \mathcal{P}^*$ ,  $\mathcal{P}_\lambda = \{X^*\}$ . Weiter gilt für  $\dim \Pi < \infty$  (I,108):

$$(2) \quad (\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2) \lambda = \mathcal{P}_1 \lambda \cap \mathcal{P}_2 \lambda, \quad (\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) \lambda = \mathcal{P}_1 \lambda \vee \mathcal{P}_2 \lambda.$$

<sup>6</sup>Für  $\dim \Pi = \infty$  ist diese Aussage falsch. Die Menge aller Hyperebenen von  $\Pi$  durch einen Unterraum  $\mathcal{P}_1$  von  $\Pi$  heißt ein Hyperebenenbündel, welches für  $\dim \Pi(\mathcal{P}_1) = n-2$  ein Hyperebenenbüschel und für  $\mathcal{P}_1 = \emptyset$  gleich  $\mathcal{H}$  ist.

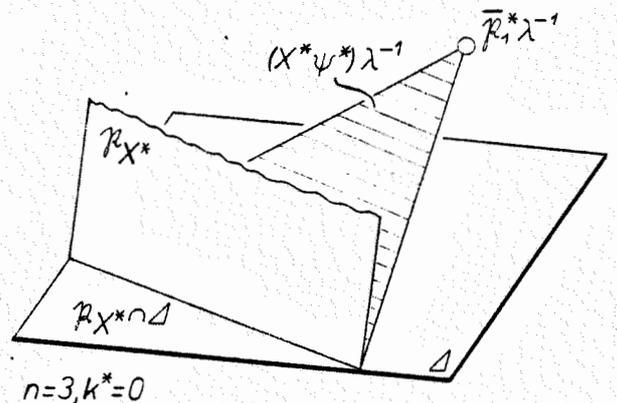
Sei  $\psi^*: \mathcal{P}^* \rightarrow \overline{\mathcal{P}}_1^*$  eine Projektion aus  $\Pi^*$  mit  $2 \leq \dim \Pi^* < \infty$  zum Zentrum  $\Sigma^* \subset \mathcal{P}^*$ . Von  $\Pi$  aus betrachtet ist  $\Sigma^*$  die Menge der Hyperebenen von  $\Pi$  durch den Unterraum  $\Sigma^* \lambda^{-1} =: \Delta \subset \mathcal{P}$  von  $\Pi$ . Für  $X^* \notin \Sigma^*$  gilt  $\{X^*\} \vee \Sigma^* = \mathcal{P}_{X^*} \lambda \vee \Delta \lambda = (\mathcal{P}_{X^*} \cap \Delta) \lambda$  und daher

$$(3) \quad (\{X^*\} \vee \Sigma^*) \cap \overline{\mathcal{P}}_1^* = (\mathcal{P}_{X^*} \cap \Delta) \lambda \cap (\overline{\mathcal{P}}_1^* \lambda^{-1}) \lambda \stackrel{(2)}{=} ((\mathcal{P}_{X^*} \cap \Delta) \vee \overline{\mathcal{P}}_1^* \lambda^{-1}) \lambda.$$

Nach 1.2.1 ist daher ein projizierender Unterraum  $\{X^*\} \vee \Sigma^*$  von  $\psi^*$  in  $\Pi^*$  von  $\Pi$  aus betrachtet die Menge der Hyperebenen durch den Schnitt der Hyperebene  $\mathcal{P}_{X^*}$  mit  $\Delta$ . Für  $\dim \Pi = \dim \Pi^* = n$  und  $\dim \Pi^*(\Sigma^*) =: k^*$  ( $-1 \leq k^* \leq n-1$ ) gilt  $\dim \Pi^*(\overline{\mathcal{P}}_1^*) = n - k^* - 1$  nach 1.1.2 und  $\dim \Pi(\Delta) = n - k^* - 1 \geq 0$ . Nennt man  $\mathcal{P}_{X^*} \cap \Delta$  die Spur der Hyperebene  $\mathcal{P}_{X^*}$  im Unterraum  $\Delta \subset \mathcal{P}$  - nach 1.1.2 ist die Spur  $\mathcal{P}_{X^*} \cap \Delta$  eine Hyperebene des projektiven Raumes  $\Pi(\Delta)$  - und beachtet man, daß  $\psi^*$  durch die Fasern in  $\Pi^*$  und damit durch die Spuren im wesentlichen festgelegt ist, so gilt mit (2):

**Satz 1.2.5:** Eine Projektion  $\psi^*: \mathcal{P}^* \rightarrow \overline{\mathcal{P}}_1^*$  aus dem zum projektiven Raum  $\Pi$  mit  $2 \leq \dim \Pi < \infty$  dualen projektiven Raum  $\Pi^*$  ist festgelegt, wenn man jeder Hyperebene, die einen festen nicht leeren Unterraum  $\Delta \subset \mathcal{P}$  von  $\Pi$  nicht enthält, ihre Spur in  $\Delta$  zuordnet. Die Ausnahmemenge  $A_{\psi^*}$  von  $\psi^*$  besteht von  $\Pi$  aus betrachtet aus allen Hyperebenen von  $\Pi$  durch  $\Delta$ , und  $\Delta \lambda \in \mathcal{U} \Pi^*$  ist das Zentrum  $\Sigma^*$  von  $\psi^*$ . Der Riß  $X^* \psi^* \in \overline{\mathcal{P}}_1^*$  von  $X^* \in \mathcal{P}^* \setminus \Sigma^*$  ist von  $\Pi$  aus betrachtet jene Hyperebene  $\mathcal{P}_{X^* \psi^*} \subset \mathcal{P}$ , welche die Spur von  $\mathcal{P}_{X^*}$  in  $\Delta$  mit dem Unterraum  $\overline{\mathcal{P}}_1^* \lambda^{-1} \subset \mathcal{P}$  verbindet.

Ist  $\dim \Pi^* = 3$ ,  $\dim \Pi^*(\Sigma^*) = k^* = 0$ , so gilt  $\dim \Pi^*(\overline{\mathcal{P}}_1^*) = 2$  und  $\dim \Pi(\Delta) = 2$ ; in  $\Pi$  wird dann jeder Ebene, die von der Ebene  $\Delta = \Sigma^* \lambda^{-1}$  verschieden ist, ihre Spur in  $\Delta$ , also eine Gerade, zugeordnet. Für  $X^* \notin \Sigma^*$  ist  $(\{X^*\} \vee \Sigma^*) \setminus \Sigma^*$  die Faser bezüglich  $\psi^*$ , und diese besteht von  $\Pi$  aus betrachtet aus allen von  $\Delta$  verschiedenen Ebenen durch die Spur der Ebene  $\mathcal{P}_{X^*}$  in  $\Delta$ . Eine zum Zentrum  $\Sigma^* \subset \mathcal{P}^*$  in  $\Pi^*$  komplementäre Bildebene  $\overline{\mathcal{P}}_1^*$  ist von  $\Pi$  aus betrachtet ein Ebenenbündel um den nicht in  $\Delta$  liegenden Punkt  $\overline{\mathcal{P}}_1^* \lambda^{-1} \in \mathcal{P}$ , und  $X^* \psi^* \in \overline{\mathcal{P}}_1^*$  ist nach (3) von  $\Pi$  aus betrachtet jene Ebene von  $\Pi$ , welche die Spur  $\mathcal{P}_{X^*} \cap \Delta$  mit dem Punkt  $\overline{\mathcal{P}}_1^* \lambda^{-1}$  verbindet.



1.2.6 Wird in einem projektiven Raum  $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{C})$  mit  $\dim \Pi \geq 2$  eine Fernhyperebene  $\omega$  ausgezeichnet, so ist in  $\Pi$  zwischen Zentralprojektion und Parallelprojektion zu unterscheiden, je nachdem für das Zentrum  $\Sigma \subset \mathcal{P}$  gilt  $\Sigma \not\subset \omega$  bzw.  $\Sigma \subset \omega$ ; das Bild einer Punktmenge unter einer Zentralprojektion bzw. Parallelprojektion heißt ihr Zentralriß bzw. Parallelriß.

Satz 1.2.6: Als Bildraum einer Zentralprojektion  $\psi$  kann ein in  $\Pi(\omega)$  zu  $\Sigma \cap \omega$  komplementärer Unterraum  $\tilde{\mathcal{P}}_1 \subset \omega$  gewählt werden. Jede Parallelprojektion definiert eine globale Abbildung  $\tilde{\psi}$  des affinen Raumes  $\tilde{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  auf einen affinen Unterraum von  $\tilde{\Pi}$ , dessen Fernraum in  $\Pi(\omega)$  zu  $\Sigma \subset \omega$  komplementär ist.

Beweis. (a) Aus  $\tilde{\mathcal{P}}_1 \cap (\Sigma \cap \omega) = \emptyset$  folgt  $\emptyset = (\tilde{\mathcal{P}}_1 \cap \omega) \cap \Sigma = \tilde{\mathcal{P}}_1 \cap \Sigma$  wegen  $\tilde{\mathcal{P}}_1 \subset \omega$ .

Aus  $\tilde{\mathcal{P}}_1 \vee (\Sigma \cap \omega) = \omega$  folgt  $\omega = (\tilde{\mathcal{P}}_1 \vee \Sigma) \cap \omega$  wegen  $\tilde{\mathcal{P}}_1 \subset \omega$  und 1.1.2, (4), woraus sich  $\tilde{\mathcal{P}}_1 \vee \Sigma \supset \omega$  und wegen  $\tilde{\mathcal{P}}_1 \vee \Sigma \neq \omega$  dann  $\tilde{\mathcal{P}}_1 \vee \Sigma = \mathcal{P}$  ergibt.

(b) Aus  $\Sigma \subset \omega$  folgt für einen zu  $\Sigma$  in  $\Pi$  komplementären Unterraum  $\tilde{\mathcal{P}}_1$  notwendig  $\tilde{\mathcal{P}}_1 \not\subset \omega$ , und  $\tilde{\mathcal{P}}_1 := \tilde{\mathcal{P}}_1 \setminus (\tilde{\mathcal{P}}_1 \cap \omega)$  ist nach 1.1.4 ein affiner Unterraum von  $\tilde{\Pi}$ . Für jeden Fernpunkt  $X \in \omega \setminus \Sigma$  gilt  $\{X\} \vee \Sigma \subset \omega$ , also  $X \psi \in \tilde{\mathcal{P}}_1 \cap \omega$ . Weiter ist  $\Sigma \cap \tilde{\mathcal{P}}_1 \cap \omega = \emptyset \cap \omega = \emptyset$  und wegen  $\Sigma \subset \omega$  und 1.1.2, (4) dann  $\Sigma \vee (\tilde{\mathcal{P}}_1 \cap \omega) = (\Sigma \vee \tilde{\mathcal{P}}_1) \cap \omega = \mathcal{P} \cap \omega = \omega$ .  $\square$

Im Falle einer Zentralprojektion erfüllen also die Risse aller Fernpunkte stets den vollen Bildraum  $\tilde{\mathcal{P}}_1$ , so daß  $\omega \psi = \tilde{\mathcal{P}}_1$  gilt, im Falle einer Parallelprojektion ist  $\omega \psi$  eine Hyperebene des projektiven Raumes  $\Pi(\tilde{\mathcal{P}}_1)$ . Ist das Zentrum einer Zentralprojektion  $\psi: \mathcal{P} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_1$  auf  $\tilde{\mathcal{P}}_1 \not\subset \omega$  k-dimensional mit  $1 \leq k < \infty$ , so gilt  $\Sigma \cap \omega \neq \emptyset$ ; nach 1.2.3 kann  $\psi$  als das Produkt einer Zentralprojektion mit einem Zentrum  $S_0 \in \Sigma \setminus (\Sigma \cap \omega)$  und k Parallelprojektionen mit Zentren in den Punkten einer Basis  $\{S_1, \dots, S_k\}$  der Hyperebene  $\Sigma \cap \omega$  von  $\Pi(\Sigma)$  dargestellt werden.

### 1.3 Definition linearer Abbildungen

1.3.1 Bei einer Projektion  $\psi: \mathcal{P} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_1$  gehen in  $\mathcal{P} \setminus \omega$  kollineare Punkte in kollineare Punkte von  $\tilde{\mathcal{P}}_1$  über, wobei aber verschiedene Punkte denselben Riß besitzen können. Damit erfüllt eine Projektion

<sup>7</sup>Für  $\Sigma = \emptyset$  ist die Projektion gleich  $id_{\mathcal{P}}$ . Die Identität ist wegen  $\emptyset \subset \omega$  als Parallelprojektion anzusprechen; für eine Zentralprojektion gilt wegen  $\Sigma \not\subset \omega$  stets  $\Sigma \neq \emptyset$ .

die Forderung (K2) in 1.1.3, für  $A_\varphi \neq \emptyset$  aber nicht (K1) und (K3). Unterwirft man  $\overline{\mathbb{P}}_1$  einer Kollineation  $\kappa: \overline{\mathbb{P}}_1 \rightarrow \mathbb{P}'_1$ , so gilt auch für  $\varphi\kappa: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'_1$  dann (K2), aber nicht notwendig (K1) und (K3).

Def. 1.3.1: Eine Abbildung  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  aus einem projektiven Raum  $\Pi = (\mathbb{P}, \mathcal{U})$  in einen projektiven Raum  $\Pi' = (\mathbb{P}', \mathcal{U}')$  mit  $\dim \Pi \geq 2$  heißt eine lineare Abbildung, wenn sie als Produkt einer Projektion  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{P}}_1$  aus  $\Pi$  auf einen Unterraum  $\overline{\mathbb{P}}_1$  von  $\Pi$  mit einer Kollineation  $\kappa: \overline{\mathbb{P}}_1 \rightarrow \mathbb{P}'_1$  von  $\Pi(\overline{\mathbb{P}}_1)$  auf einem Unterraum  $\Pi'(\mathbb{P}'_1)$  von  $\Pi'$  dargestellt werden kann; für  $X \in \mathbb{P} \setminus A_\varphi$  heißt  $X_\varphi = X + \kappa$  ein linearer RiB von X.

Eine lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ , welche durch eine Projektion  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{P}}_1$  aus  $\Pi$  und eine Kollineation  $\kappa: \overline{\mathbb{P}}_1 \rightarrow \mathbb{P}'_1$  in der Form  $\varphi = \varphi\kappa$  gegeben ist, besitzt den eindeutig bestimmten Ausnahmeraum  $A_\varphi = A_\varphi$ , aber verschiedene Darstellungen als Produkt einer Projektion aus  $\Pi$  mit Zentrum  $A_\varphi$  und einer Kollineation des Bildraumes dieser Projektion auf  $\text{im } \varphi \subset \mathbb{P}'$ . Ist nämlich  $\tilde{\varphi}: \mathbb{P} \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}_1$  die Projektion mit Zentrum  $A_\varphi$  auf einen beliebigen in  $\Pi$  zu  $A_\varphi$  komplementären Unterraum  $\tilde{\mathbb{P}}_1$ , so existiert nach Satz 1.2.2 eine Kollineation  $\tilde{\kappa}: \tilde{\mathbb{P}}_1 \rightarrow \text{im } \varphi$  mit  $\varphi = \tilde{\varphi}\tilde{\kappa}$ .

Jede lineare Abbildung erfüllt (K2), nicht aber notwendig (K1) und (K3). Durch (K2) werden aber die linearen Abbildungen nicht gekennzeichnet, wie folgende Gegenbeispiele zeigen:

- (1) Allen Punkten  $X \in \mathbb{P}$  wird derselbe Bildpunkt  $A \in \mathbb{P}'$  zugeordnet. Da bei einer Projektion mit einpunktigem Bildraum eine Ausnahmehyperebene existiert, ist diese globale Abbildung, die (K2) erfüllt, nicht linear.
- (2)  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  ist eine beliebige Abbildung mit  $\dim \Pi(\mathbb{P}') = 1$ .
- (3) Sei  $\mathbb{P}_1 \neq \mathbb{P}$  ein nichtleerer Unterraum von  $\Pi$  und  $A \in \mathbb{P}'_1$ . Die Abbildung  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'_1$  wird durch  $X_\varphi := X$  für  $X \in \mathbb{P}_1$ ,  $X_\varphi := A$  für  $X \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_1$  definiert.
- (4) Ist  $\Pi(\mathbb{R}^3) = (\mathbb{P}, \mathcal{U})$  bzw.  $\Pi(\mathbb{C}^3) = (\mathbb{P}', \mathcal{U}')$  die arithmetische projektive Ebene über  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$ , so erfüllt die globale Abbildung  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  mit  $X = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R} \mapsto X_\varphi = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}$  sicher (K2), ohne linear zu sein.

Wir suchen eine mit (K2) zusammenhängende Eigenschaft, die eine lineare Abbildung kennzeichnet.

Satz 1.3.1: Ist  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  eine lineare Abbildung, so gilt

- (1)  $(XY)_\varphi = \{X\}_\varphi \vee \{Y\}_\varphi$  für alle  $X, Y \in \mathbb{P}$  mit  $X \neq Y$ .

Beweis. Nach Def. 1.3.1 gilt  $\varphi = \varphi \kappa$ , wobei  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  eine Projektion aus  $\Pi$  und  $\kappa: \mathbb{P}' \rightarrow \mathbb{P}' \subset \mathbb{P}'$  eine Kollineation ist.

Nach 1.1.1 ist  $\{X\}\varphi = \{X\varphi\} \subset \mathbb{P}'$  für  $X \notin A_\varphi =: \Sigma$  bzw.  $\{X\}\varphi = \emptyset \subset \mathbb{P}'$  für  $X \in \Sigma$ . Für  $X, Y \in \Sigma, X \neq Y$  gilt  $\{X\}\varphi = \{Y\}\varphi = \emptyset$  und  $XY \subset \Sigma$ , also  $(XY)\varphi = \emptyset = \{X\}\varphi \vee \{Y\}\varphi$ . Für  $X \notin \Sigma, Y \in \Sigma$  ist  $XY \subset \{X\}\varphi \vee \Sigma$ , also wegen  $(\{X\} \vee \Sigma)\varphi = \{X\}\varphi = \{X\}\varphi$  und  $\{Y\}\varphi = \emptyset$  dann  $\{X\}\varphi \subset (XY)\varphi \subset (\{X\} \vee \Sigma)\varphi = \{X\}\varphi$  und somit  $(XY)\varphi = \{X\}\varphi \vee \{Y\}\varphi$ . Für  $XY \cap \Sigma = \emptyset$  schließlich ist  $\varphi|_{XY}$  nach 1.2.2 eine Bijektion auf  $\{X\}\varphi \vee \{Y\}\varphi$ .

$$\begin{aligned} \text{Nach 1.1.3 gilt daher } (XY)\varphi &= (XY)\varphi \kappa = (\{X\}\varphi \vee \{Y\}\varphi) \kappa = \\ &= \{X\}\varphi \kappa \vee \{Y\}\varphi \kappa = \{X\}\varphi \vee \{Y\}\varphi. \quad \square \end{aligned}$$

1.3.2 Der Satz 1.3.1 läßt sich wie folgt umkehren:

Satz 1.3.2: Eine Abbildung  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  aus einem projektiven Raum  $\Pi = (\mathbb{P}, \mathcal{G})$  in einen projektiven Raum  $\Pi' = (\mathbb{P}', \mathcal{G}')$  mit  $\dim \Pi \geq 2$  ist linear, wenn sie 1.3.1, (1) erfüllt und  $|\text{im } \varphi| \geq 2$  gilt (Hauptsatz über lineare Abbildungen).

Beweis. (a)  $A_\varphi =: \Sigma \subset \mathbb{P}$  ist ein Unterraum von  $\Pi$ .

Da: Für  $X, Y \in \Sigma, X \neq Y$  gilt  $\{X\}\varphi = \{Y\}\varphi = \emptyset$ , also  $(XY)\varphi = \{X\}\varphi \vee \{Y\}\varphi = \emptyset$ , was  $XY \subset \Sigma$  bedeutet.

(b) Jede Gerade  $g$ , die  $\Sigma$  in genau einem Punkt  $S$  trifft, ist projizierend, d.h. alle ihre Nichtausnahmepunkte haben dasselbe Bild.

Da: Mit  $g = XS$ , also  $X \notin \Sigma$ , gilt  $(XS)\varphi = \{X\}\varphi \vee \{S\}\varphi = \{X\}\varphi$  für alle  $X \in g \setminus \{S\}$ .

(c) Gilt für  $X, Y \in \mathbb{P} \setminus \Sigma$  mit  $X \neq Y$  dann  $X\varphi \neq Y\varphi$ , so ist  $XY \cap \Sigma = \emptyset$  und  $\varphi|_{XY}$  surjektiv auf die Gerade  $X\varphi Y\varphi \subset \mathbb{P}'$ .

Da: Aus  $|XY \cap \Sigma| > 1$  folgt  $XY \subset \Sigma$ , also der Widerspruch  $\{X\}\varphi = \emptyset$ , aus  $|XY \cap \Sigma| = 1$  entsteht ein Widerspruch zu (b). Damit ist  $XY$  windschief  $\Sigma$ . Da in 1.3.1, (1) rechts die Punktmenge der Geraden  $X\varphi Y\varphi \subset \mathbb{P}'$  steht, ist  $\varphi|_{XY}: XY \rightarrow X\varphi Y\varphi$  surjektiv.

(d)  $\text{im } \varphi \subset \mathbb{P}'$  ist ein Unterraum von  $\Pi'$ .

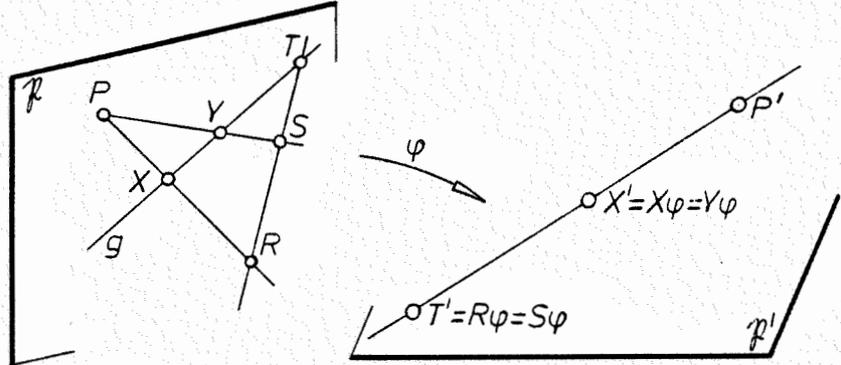
Da: Zu  $X', Y' \in \text{im } \varphi$  mit  $X' \neq Y'$  existieren Punkte  $X, Y \in \mathbb{P}$  mit  $X\varphi = X', Y\varphi = Y'$  und  $X \neq Y$  wegen  $X' \neq Y'$ . Nach (c) ist  $\varphi|_{XY}$  surjektiv auf  $X'Y'$ , woraus  $X'Y' \subset \text{im } \varphi$  folgt.

(e) Ist  $g \in \mathcal{G}$  eine zu  $\Sigma$  windschiefe Gerade in  $\Pi$ , so ist  $\varphi|_g: g \rightarrow g\varphi \subset \mathbb{P}'$  eine Bijektion.

Da: Nach (c) genügt es, die Injektivität von  $\varphi|_g$  zu zeigen.

(ind.) Sei  $g=XY$  mit  $X\varphi = Y\varphi =: X'$ . Wegen  $|im\varphi| \geq 2$  existiert ein Punkt  $P' \in im\varphi \setminus \{X'\}$ , also  $P \in \mathcal{P} \setminus \Sigma$  mit  $P\varphi = P'$ . Dann ist  $\{P, X, Y\}$  ein Dreieck, da aus  $P \in XY$  der Widerspruch  $\{P'\} = \{P\}\varphi \subset (XY)\varphi = \{X\}\varphi \vee \{Y\}\varphi = \{X'\}$  folgt.

Wegen Axiom (PR3) und (d) existiert ein Punkt  $T' \in (P'X' \setminus \{P', X'\}) \subset im\varphi$ . Nach (c) existiert ein Punkt  $R \in \mathcal{P} \setminus \Sigma$  mit  $R\varphi = T'$  und  $R \in PX \setminus \{P, X\}$ , sowie ein Punkt  $S \in \mathcal{P} \setminus \Sigma$  mit  $S\varphi = T'$  und  $S \in PY \setminus \{P, Y\}$ .



Dann existiert nach Axiom (PR2) ein Punkt  $\{T\} = RS \cap XY$ , also  $T \in \mathcal{P} \setminus \Sigma$ . Damit liefert (1) einerseits  $\{T\}\varphi \subset (XY)\varphi = \{X\}\varphi \vee \{Y\}\varphi = \{X'\}$ , also  $T\varphi = X'$ , und andererseits  $\{T\}\varphi \subset (RS)\varphi = \{R\}\varphi \vee \{S\}\varphi = \{T'\}$ , also  $T\varphi = T'$ , was den Widerspruch  $X' = T'$  ergibt.

(f) Ist  $\bar{\mathcal{P}}_1 \subset \mathcal{P}$  ein zu  $\Sigma$  komplementärer Unterraum von  $\Pi$  und  $\psi: \mathcal{P} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}_1$  die Projektion mit Zentrum  $\Sigma$ , so gilt  $\varphi = \psi(\varphi|_{\bar{\mathcal{P}}_1})$ .

Da: Für  $X \in \mathcal{P} \setminus \Sigma$  ist  $\{X\}\varphi =: \{\bar{X}\} = (\{X\} \vee \Sigma) \cap \bar{\mathcal{P}}_1$ , sodaß wegen  $\mathcal{P} = \Sigma \vee \bar{\mathcal{P}}_1$  ein Punkt  $S \in \Sigma$  mit  $\bar{X} \in SX$  existiert. Nach (b) ist  $X\varphi = \bar{X}\varphi$ .

(g) Die Abbildung  $\kappa := \varphi|_{\bar{\mathcal{P}}_1}: \bar{\mathcal{P}}_1 \rightarrow im\varphi \subset \mathcal{P}'$  ist eine Kollineation.

Da: Wegen  $\Sigma \cap \bar{\mathcal{P}}_1 = \emptyset$  ist  $\kappa$  global, nach (e) injektiv und nach (f) surjektiv, so daß (K1) gilt. Nach (e) ist (K2) erfüllt.

Sei  $\{\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\}$  ein Dreieck mit  $\bar{Z}\kappa \in \bar{X}\kappa \bar{Y}\kappa$ , so existiert nach (e) ein Punkt  $\bar{P} \in \bar{X}\bar{Y}$  mit  $\bar{P}\kappa = \bar{Z}\kappa$  im Widerspruch zu (K1). Damit gilt auch (K3).  $\square$

Die Voraussetzung  $|im\varphi| \geq 2$  geht in Beweisteil (e) ein. Für  $|im\varphi|=1$  ist der Hauptsatz falsch, wie Gegenbeispiel (1) in 1.3.1 zeigt.

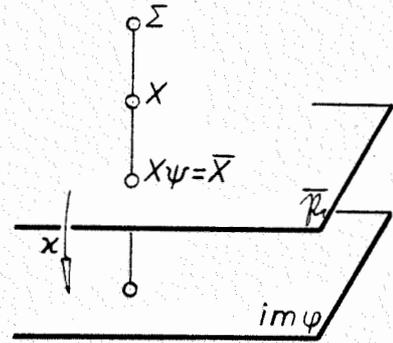
1.3.3 Wir wollen unter den linearen Abbildungen aus einem projektiven Raum in sich die Projektionen kennzeichnen.

**Satz 1.3.3:** Eine lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  ist genau dann eine Projektion, wenn  $\varphi$  idempotent ist.

**Beweis.** Nach 1.2.1 ist jede Projektion idempotent.

Ist  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  eine lineare Abbildung, so gilt  $\varphi = \psi \kappa$  in der Bezeichnung von Def. 1.3.1. Aus  $\varphi \varphi = \varphi$ , also  $\psi \kappa \psi \kappa = \psi \kappa$  folgt  $\psi \kappa \psi = \psi$ , was für  $\bar{x} \in \bar{\mathbb{P}}$ , wegen  $\bar{x} \psi = \bar{x}$  ergibt  $\bar{x} \kappa \psi = \bar{x}$ . Damit gilt  $\psi|_{\text{im } \varphi} = \kappa^{-1}: \text{im } \varphi \rightarrow \bar{\mathbb{P}}$ . Mit  $\kappa = (\psi|_{\text{im } \varphi})^{-1}: \bar{\mathbb{P}} \rightarrow \text{im } \varphi$  folgt  $\varphi = \psi \kappa = \psi(\psi|_{\text{im } \varphi})^{-1}$ , sodaß  $\varphi$  die Projektion aus  $\Sigma$  auf  $\text{im } \varphi \subset \mathbb{P}$  ist.  $\square$

Nach 1.3.2 ist für eine lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  stets  $\text{im } \varphi \subset \mathbb{P}'$  ein Unterraum von  $\Pi'$ ; es ist also keine Einschränkung  $\text{im } \varphi = \mathbb{P}'$ , also  $\varphi$  als surjektiv vorauszusetzen. Wir verwenden daher i.f. die



**Festsetzung:** Eine lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  wird stets als surjektiv vorausgesetzt.

Für  $\dim \Pi = n < \infty$  ist  $2 \leq n$  und  $\dim \Pi(\Sigma) = k$  mit  $-1 \leq k \leq n-1$ . Damit gilt  $\dim \Pi(\bar{\mathbb{P}}) = n-k-1 = \dim \Pi'$ . Der Hauptsatz gilt dann für  $n-k-1 \geq 1$ , also  $k \leq n-2$ . Für  $k=-1$  folgt aus 1.2.1 und dem Hauptsatz:

**Satz 1.3.4:** Jede globale und surjektive Abbildung  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  von  $\Pi$  auf  $\Pi'$  mit  $\dim \Pi \geq 2$ ,  $\dim \Pi' \geq 1$ , die 1.2.3, (1) erfüllt, ist eine Kollineation.

Für  $k = n-2$  ist  $\text{im } \varphi$  eine Gerade und der lineare Riß bi-jektiv zu einer Kotierung.

**1.3.4** Ist  $\varphi = \psi \kappa: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  eine lineare Abbildung aus einem projektiven Raum  $\Pi(\mathcal{W})$  über einem Rechtsvektorraum  $\mathcal{W}$  zum Körper  $K$  auf einen projektiven Raum  $\Pi'(\mathcal{W}')$  über einem Rechtsvektorraum  $\mathcal{W}'$  zum Körper  $K'$  mit Ausnahmeraum  $\Sigma \subset \mathbb{P}$ , so gilt für die Projektion  $\psi: \mathbb{P} \rightarrow \bar{\mathbb{P}}$  aus  $\Pi(\mathcal{W})$  nach 1.2.4 dann  $(\varphi \kappa) \psi = (\varphi \text{pr}) \bar{\kappa}$  für  $\varphi \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_1$  und  $\Sigma = \mathcal{W}_1 \mu$ ,  $\bar{\mathbb{P}} = \bar{\mathcal{W}}_1 \mu$ ; dabei ist  $\text{pr}: \mathcal{W} \rightarrow \bar{\mathcal{W}}$  die Projektion aus  $\mathcal{W}$  auf  $\bar{\mathcal{W}}$  zum Zentrum  $\mu$ . Gilt  $\dim \Pi \geq 2$ , so existiert nach 1.1.4 zur Kollineation  $\kappa: \mathcal{W}' \rightarrow \mathcal{W}$  ein  $\hat{f}$ -Vektorraumisomorphismus  $f_1: \bar{\mathcal{W}}_1 \rightarrow \mathcal{W}'$  mit  $(\bar{\varphi}_1 \kappa) \psi = (\bar{\varphi}_1 f_1) \bar{\kappa}$  für  $\bar{\varphi}_1 \in \bar{\mathcal{W}}_1 \setminus \{0\}$ . Damit gilt  $(\varphi \kappa) \psi = (\varphi \kappa) \psi \kappa = ((\varphi \text{pr}) \bar{\kappa}) \kappa = (\varphi \text{pr} f_1) \bar{\kappa}$  für  $\varphi \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_1$  und  $f := \text{pr} f_1: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$  ist ein surjektiver  $\hat{f}$ -Vektorraumhomomorphismus mit  $\ker f = \ker f_1 = \mathcal{W}_1$ .

Da umgekehrt jeder surjektive  $\mathbb{F}$ -Vektorraumhomomorphismus  $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  mit  $\ker f = \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{V}$  das Produkt einer Projektion aus  $\mathcal{V}$  zum Zentrum  $\mathcal{N}_1$  auf einen zu  $\mathcal{N}_1$  komplementären Unterraum  $\overline{\mathcal{N}}_1 \subset \mathcal{V}$  und eines  $\mathbb{F}$ -Isomorphismus  $f_1: \overline{\mathcal{N}}_1 \rightarrow \mathcal{V}'$  ist<sup>1</sup>, gilt:

Satz 1.3.5: Eine surjektive Abbildung  $\varphi: u^1 \mathcal{V} \rightarrow u^1 \mathcal{V}'$  aus einem projektiven Raum  $\Pi(\mathcal{V})$  auf einen projektiven Raum  $\Pi(\mathcal{V}')$  mit dem Ausnahmeraum  $\Sigma = \mathcal{N}_1, u \in u^1 \mathcal{V}$  und  $\dim \Pi(\mathcal{V}') \geq 2$  ist genau dann linear, wenn ein surjektiver  $\mathbb{F}$ -Vektorraumhomomorphismus  $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  mit  $\ker f = \mathcal{N}_1$  existiert, so daß gilt

$$(\varphi K) \varphi = (\varphi f) K' \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{N}_1.$$

Insbesondere ergibt Satz 1.3.5, daß aus der Existenz einer linearen Abbildung  $\varphi: u^1 \mathcal{V} \rightarrow u^1 \mathcal{V}'$  für  $\dim \Pi(\mathcal{V}') \geq 2$  die Isomorphie der Körper  $K$  und  $K'$  folgt. Für  $\dim \Pi(\mathcal{V}') \leq 1$  ist Satz 1.3.5 nicht richtig, da eine Bijektion  $\overline{\mathcal{P}}_1 \rightarrow \overline{\mathcal{P}}_1'$  nicht notwendig durch einen Vektorraumisomorphismus induziert werden muß.

1.3.5 Eine lineare Abbildung  $\varphi^*: \mathcal{P}^* \rightarrow \mathcal{P}'$  aus dem zu einem projektiven Raum  $\Pi$  dualen projektiven Raum  $\Pi^* = (\mathcal{P}^*, \mathcal{U}^*)$  auf den projektiven Raum  $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{U}')$  mit  $2 \leq \dim \Pi < \infty$  ist das Produkt einer in Satz 1.2.5 beschriebenen Projektion  $\psi^*: \mathcal{P}^* \rightarrow \overline{\mathcal{P}}_1^*$  mit einem Zentrum  $\Sigma^* \subset \mathcal{P}^*$  und einer Kollineation auf  $\Pi'$ . Von  $\Pi$  aus betrachtet wird bei  $\psi^*: \mathcal{P}^* \rightarrow \overline{\mathcal{P}}_1^*$  nach 1.2.5 jede Hyperebene  $\mathcal{P}_{X^*} \subset \mathcal{P}$ , welche den nichtleeren Unterraum  $\Delta = \Sigma^* \lambda^{-1} \subset \mathcal{P}$  nicht enthält, jene Hyperebene von  $\Pi$  zugeordnet, welche die Spur von  $\mathcal{P}_{X^*}$  in  $\Delta$  mit dem Unterraum  $\overline{\mathcal{P}}_1^* \lambda^{-1} \subset \mathcal{P}$  verbindet. Die Menge der Spuren in  $\Delta$ , also der Hyperebenen von  $\Pi(\Delta)$ , bestimmen die Punktmenge des zu  $\Pi(\Delta)$  dualen projektiven Raumes  $(\Pi(\Delta))^*$ ; jene Abbildung, welche jeder Hyperebene  $\mathcal{P}_{X^*} \cap \Delta$  von  $\Pi(\Delta)$  ihre Verbindung mit dem zu  $\Delta$  in  $\Pi$  komplementären Unterraum  $\overline{\mathcal{P}}_1^* \lambda^{-1} \subset \mathcal{P}$  zuweist, ist eine Kollineation des projektiven Raumes  $(\Pi(\Delta))^*$  auf jenen Unterraum von  $\Pi^*$ , der durch das Hyperebenenbündel durch  $\overline{\mathcal{P}}_1^* \lambda^{-1} \subset \mathcal{P}$  bestimmt ist (I, 116). Damit gilt für  $2 \leq \dim \Pi < \infty$  :

<sup>1</sup> Ist  $\overline{\mathcal{N}}_1$  in  $\mathcal{V}$  zu  $\mathcal{N}_1 = \ker f$  komplementär, so existiert in  $\mathcal{V}$  eine eindeutige Zerlegung bezüglich  $\mathcal{N}_1$  und  $\overline{\mathcal{N}}_1$ . Sei  $f_1 := f|_{\overline{\mathcal{N}}_1}: \overline{\mathcal{N}}_1 \rightarrow \mathcal{V}'$ . Dann ist  $\varphi f = (\varphi_1 + \overline{\varphi}_1) f = \varphi_1 f + \overline{\varphi}_1 f = \varphi + \overline{\varphi}_1 f = \varphi \text{ pr } f_1$  und mit  $f$  ist  $f_1$  surjektiv. Der  $\mathbb{F}$ -Homomorphismus  $f_1$  ist auch injektiv; aus  $\overline{\varphi}_1 = \overline{\varphi}_1 \text{ pr } f_1$  für  $\overline{\varphi}_1 \in \overline{\mathcal{N}}_1$  folgt nämlich  $\overline{\varphi}_1 f_1 = \overline{\varphi}_1 \text{ pr } f_1 = \overline{\varphi}_1 f$  und damit  $\overline{\varphi}_1 f_1 = \varphi$  genau für  $\overline{\varphi}_1 \in \ker f$ , also  $\overline{\varphi}_1 \in \mathcal{N}_1 \cap \overline{\mathcal{N}}_1 = \{0\}$ .

Satz 1.3.6: Jede lineare Abbildung  $\varphi^*: \mathbb{P}^* \rightarrow \mathbb{P}'$  aus dem zu einem projektiven Raum  $\Pi = (\mathbb{P}, \mathcal{G})$  dualen projektiven Raum  $\Pi^*$  entsteht so, daß man jeder Hyperebene von  $\Pi$  ihre Spur in einem nicht leeren projektiven Unterraum  $\Delta \subset \mathbb{P}$  zuordnet und anschließend den zu  $\Pi(\Delta)$  dualen projektiven Raum  $(\Pi(\Delta))^*$ , dessen Punkte von  $\Pi(\Delta)$  aus gesehen diese Spuren sind, einer Kollineation auf  $\Pi'$  unterwirft.

Da im Rahmen der projektiven Geometrie die Anwendung einer Kollineation keine wesentlich neue Figur liefert, gilt kurz: Jede lineare Abbildung aus  $\Pi^*$  ist abgesehen von einer Kollineation die Spurabbildung, bei der jeder Hyperebene von  $\Pi$  nicht durch einen Unterraum  $\Delta \subset \mathbb{P}$  mit  $\dim \Pi(\Delta) \geq 0$  ihre Spur in  $\Delta$  zugeordnet wird. Für  $\dim \Pi(\Delta) = 0$  ist jede Spur in  $\Delta$  die leere Menge.

Für die konstruktive Geometrie ist der Fall  $\dim \Pi = 3, \dim \Pi' = 2$  besonders wichtig. Jede lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  ist dann das Produkt einer Projektion aus  $\Pi$  mit einpunktigem Zentrum  $\Sigma$  auf eine zu  $\Sigma$  komplementäre Ebene und einer kollinearen Abbildung dieses Punktfeldes; jede lineare Abbildung  $\varphi^*: \mathbb{P}^* \rightarrow \mathbb{P}'$  ist das Produkt der Spurabbildung auf die Menge der Geraden einer Ebene  $\Delta \subset \mathbb{P}$  und einer kollinearen Abbildung dieses Geradenfeldes.

1.3.6 Wir zeichnen im projektiven Raum  $\Pi(\mathbb{P}, \mathcal{G})$  mit  $\dim \Pi \geq 2$  eine Fernhyperebene  $\omega$  aus und definieren

Def. 1.3.2: Eine Abbildung  $\tilde{\varphi}: \tilde{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}'$  aus einem affinen Raum  $\tilde{\Pi} = (\tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathcal{G}}) = \Pi \setminus \omega$  in einen projektiven Raum  $\Pi' = (\mathbb{P}', \mathcal{G}')$  mit  $\dim \Pi \geq 2$  heißt eine lineare Abbildung, wenn es eine lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  des projektiven Raumes  $\Pi$  auf  $\Pi'$  gibt mit  $\tilde{\varphi} = \varphi|_{\tilde{\mathbb{P}}}$ .

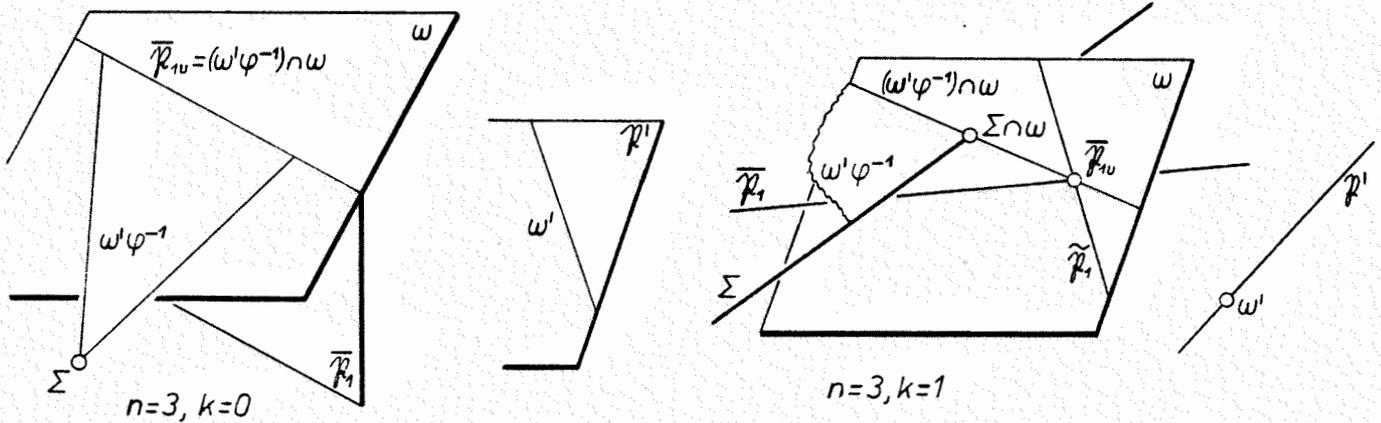
Nach Def. 1.3.1 gilt  $\varphi = \psi \kappa$  unter Benützung einer Projektion  $\psi: \mathbb{P} \rightarrow \bar{\mathbb{P}}$  aus  $\Pi$  mit einem Zentrum  $\Sigma \neq \mathbb{P}$  und einer Kollineation  $\kappa: \bar{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}'$ .

Für  $\Sigma = \emptyset$  ist  $\varphi = \kappa: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  eine Kollineation und  $\omega \varphi$  eine Hyperebene von  $\Pi'$ , die Fluchhyperebene von  $\varphi$  heißt. In diesem Fall ist  $\tilde{\varphi}: \tilde{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}'$  nicht surjektiv. Spricht man  $\omega \varphi$  als Fernhyperebene  $\omega'$  von  $\Pi'$  an, so stellt dann  $\tilde{\varphi}$  aufgefaßt als Abbildung von  $\tilde{\mathbb{P}}$  auf  $\tilde{\mathbb{P}}' = \mathbb{P}' \setminus \omega'$  nach 1.1.5 eine Affinität dar.

Für  $\Sigma \neq \emptyset$  sind nach 1.2.6 zwei Fälle zu unterscheiden: Ist  $\Sigma \notin \omega$ , so ist jede Projektion  $\psi$  aus  $\Pi$ , für die eine Darstellung der Gestalt  $\varphi = \psi \kappa$  existiert, eine Zentralprojektion; ist dagegen  $\Sigma \subset \omega$ , so liegt stets eine Parallelprojektion  $\psi$  aus  $\Pi$  vor. Unter Benützung

von Def.1.3.1 und 1.2.4 folgt, daß im ersten Fall  $\omega\varphi = \mathcal{R}'$  gilt und im zweiten Fall  $\omega\varphi$  eine Hyperebene von  $\Pi'$  ist; im ersten Fall ist  $\dot{\varphi}$  surjektiv auf  $\mathcal{R}'$ , im zweiten Fall existiert eine nicht zu  $\text{im}\dot{\varphi}$  gehörende Fluchhyperebene, nämlich  $\omega\varphi \subset \mathcal{R}'$ .

Nach Auszeichnung einer Fernhyperebene  $\omega' \subset \mathcal{R}'$  aus  $\Pi'$  entsteht der affine Raum  $\overset{\circ}{\Pi}' = \Pi' \setminus \omega'$ . Im Falle einer Zentralprojektion  $\psi$  in  $\Pi$ , also  $\Sigma \notin \omega$ , gilt  $\omega\varphi = \mathcal{R}'$  und damit  $\omega' \subset \omega\varphi$ . Es gibt dann stets einen Unterraum  $\bar{\mathcal{R}}_{nu} \subset \omega \subset \mathcal{R}$  mit  $\bar{\mathcal{R}}_{nu}\varphi = \omega'$ . Dieser ist für  $\Sigma \cap \omega = \emptyset$ , also eine Zentralprojektion  $\psi$  mit einpunktigem Zentrum, sogar eindeutig bestimmt, nämlich als die Hyperebene  $(\omega'\varphi^{-1}) \cap \omega$  von  $\Pi(\omega)$ ;



für  $\Sigma \notin \omega$ ,  $\Sigma \cap \omega \neq \emptyset$  ist  $\bar{\mathcal{R}}_{nu}$  jene Hyperebene eines nach 1.2.6 beliebigen, zu  $\Sigma \cap \omega$  in  $\Pi(\omega)$  komplementären Unterraumes  $\tilde{\mathcal{R}}_1 \subset \omega$ , die in  $(\omega'\varphi^{-1}) \cap \omega \subset \omega$  liegt. Wählt man als Bildraum  $\bar{\mathcal{R}}_1 \subset \mathcal{R}$  der Zentralprojektion  $\psi$  aus  $\Pi$  einen zu  $\Sigma$  komplementären Unterraum durch  $\bar{\mathcal{R}}_{nu}$  mit  $\bar{\mathcal{R}}_1 \notin \omega$  (die Existenz folgt aus I,96), so existiert eine Kollineation  $\kappa: \bar{\mathcal{R}}_1 \rightarrow \mathcal{R}'$  mit  $\varphi = \psi \kappa$ , und  $\kappa^{\circ}: \bar{\mathcal{R}}_1 \setminus \bar{\mathcal{R}}_{nu} \rightarrow \mathcal{R}' \setminus \omega'$  ist eine Affinität. Faßt man  $\dot{\varphi}$  als Abbildung von  $\dot{\mathcal{R}}$  auf  $\dot{\mathcal{R}}' = \mathcal{R}' \setminus \omega'$  auf, so kann  $\dot{\varphi}$  also durch geschickte Wahl des Bildraumes der Zentralprojektion stets als Produkt einer Zentralprojektion mit einer Affinität erzeugt werden.

Im Falle einer Parallelprojektion dagegen ist  $\omega\varphi$  eine Hyperebene in  $\Pi'$ . Je nachdem  $\omega\varphi$  die Fernhyperebene von  $\Pi'$  ist oder nicht, wird bei beliebiger Wahl von  $\bar{\mathcal{R}}_1$  komplementär  $\Sigma$  der lineare Riß affin oder kollinear zu einem Parallelriß sein.

**Satz 1.3.7:** Der lineare Riß bei einer linearen Abbildung  $\dot{\varphi}: \dot{\mathcal{R}} \rightarrow \dot{\mathcal{R}}'$  aus einem affinen Raum  $\overset{\circ}{\Pi}$  in einen projektiven Raum  $\Pi'$  ist kollinear zu einem Zentralriß oder einem Parallelriß, je nachdem bei der zugehörigen linearen Abbildung  $\varphi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  die Bilder aller

Fernpunkte ganz  $\mathcal{Q}'$  oder nur eine Hyperebene von  $\Pi'$  erfüllen; im ersten Fall ist  $\varphi: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}'$  surjektiv, im zweiten Fall gehört die Fluchthyperebene  $\omega\varphi$  nicht zur Bildmenge. Ist auch in  $\Pi'$  eine Fernhyperebene  $\omega'$  ausgezeichnet, und faßt man  $\varphi$  als Abbildung aus dem affinen Raum  $\overset{\circ}{\Pi}$  in den affinen Raum  $\overset{\circ}{\Pi}' = \Pi' \setminus \omega'$  auf, so ist der lineare Riß im ersten Fall stets affin zu einem Zentralriß und im zweiten Fall nur dann affin zu einem Parallelriß, wenn die Fluchthyperebene  $\omega\varphi$  in die Fernhyperebene  $\omega'$  von  $\Pi'$  fällt.

#### 1.4 Axonometrie

1.4.1 Jeder projektive Raum  $\Pi$  mit  $\dim \Pi \geq 3$  und jeder zweidimensionale Unterraum (Ebene) von  $\Pi$  ist ein Desarguesraum<sup>1</sup>. Ein zu einem projektiven Desarguesraum  $\Pi_{DE}$  isomorpher projektiver Raum ist ein Desarguesraum.

In  $\Pi_{DE} = (\mathcal{Q}, \mathcal{G})$  existiert zu jeder Angabe  $Z \in \mathcal{Q}$ ,  $\alpha \in \mathcal{G}$ ,  $P, P' \in \mathcal{Q} \setminus (\{Z\} \cup \alpha)$  mit  $\{Z, P, P'\}$  kollinear genau eine perspektive Kollineation  $\kappa \in PGL(Z, \alpha)$ , die  $P' = P\kappa$  leistet; für  $P = P'$  ist  $\kappa = id_{\mathcal{Q}}$ . Die Kollineationsgruppe  $PGL(\Pi_{DE})$  ist transitiv auf der Menge der geordneten Fundamentalfiguren von  $\Pi_{DE}$  (I, 155; II, 27). In  $\Pi_{DE}$  ist jede Elationsgruppe  $PGL(Z, \alpha \mid Z \in \alpha)$  kommutativ (I, 129).

In  $\Pi_{DE}$  ist jede Homologengruppe  $PGL(Z, \alpha \mid Z \notin \alpha)$  genau dann kommutativ, wenn  $\Pi_{DE}$  ein Papposraum<sup>2</sup> ist (I, 134). Ein zu einem projektiven Papposraum  $\Pi_{PP}$  isomorpher projektiver Raum ist ein Papposraum.

Sind  $A, B, C$  drei verschiedene Punkte einer Geraden  $g$  und  $A', B', C'$  drei verschiedene Punkte einer Geraden  $g'$  in einem projektiven Raum  $\Pi$  mit  $\dim \Pi \geq 2$ , so gibt es mindestens eine Projektivität<sup>3</sup>  $\pi: g \rightarrow g'$ , die  $A \mapsto A'$ ,  $B \mapsto B'$ ,  $C \mapsto C'$  leistet (I, 143); in  $\Pi_{PP}$  ist diese Projektivität eindeutig bestimmt (I, 46).

<sup>1</sup> In einem solchen projektiven Raum gilt der Satz von Desargues: Die durch zwei perspektive Dreiecke bestimmten Dreiseite sind perspektiv.

<sup>2</sup> In einem solchen projektiven Raum gilt der Satz von Pappos: Liegen sechs verschiedene Punkte 1, 2, ..., 6 im Sinne der Numerierung abwechselnd in zwei schneidenden Geraden, so sind 12.45, 23.56, 34.61 kollinear.

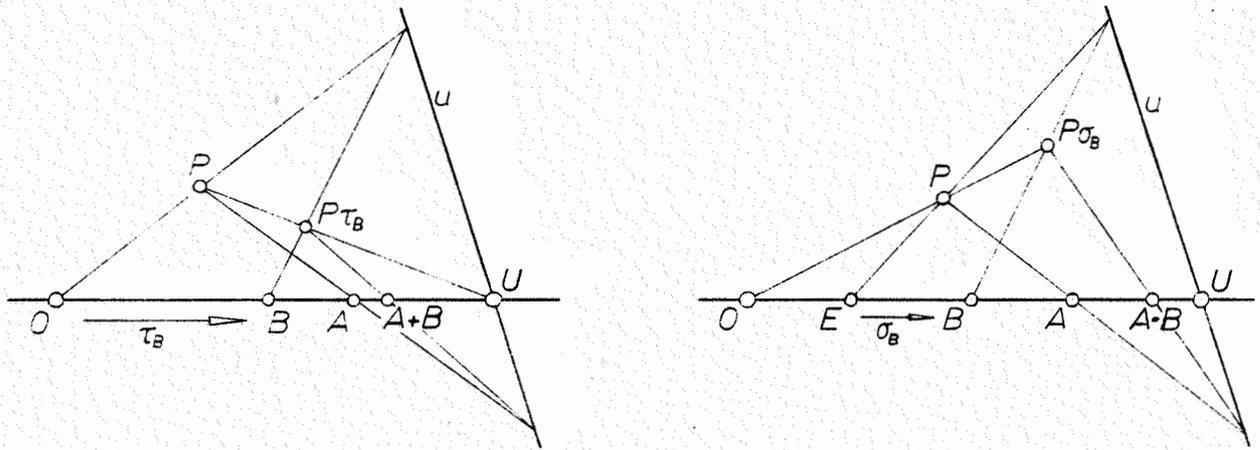
<sup>3</sup> Eine Projektivität ist Produkt von endlich vielen Perspektivitäten zwischen Geraden.

**1.4.2** Sind  $O, E \in \mathcal{P}$  zwei verschiedene Punkte und  $\omega$  eine Hyperebene von  $\Pi_{DE}$  mit  $O, E \notin \omega$ , so heißt  $\{O, E; \omega\}$  eine Algebraisierungsangabe. Nach 1.1.2 schneidet  $g := OE \in \mathcal{C}_g$  die Hyperebene  $\omega$  in genau einem Punkt  $U$ . Für  $\dot{g} := g \setminus \{U\}$  und  $X \in \dot{g}$  existiert genau eine Elation  $\tau_X \in PGL(U, \omega)$  mit  $O\tau_X = X$  und für  $X \in \dot{g} \setminus \{0\}$  genau eine Homologie  $\sigma_X \in PGL(O, \omega)$  mit  $E\sigma_X = X$ .

Wir definieren in der Punktmenge  $\dot{g}$  eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(1) \quad \begin{aligned} A + B &= A\tau_B \quad \text{für } A, B \in \dot{g}, \\ A \cdot B &= A\sigma_B \quad \text{für } A, B \in \dot{g} \setminus \{0\}, \quad A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0 \quad \text{für } A \in \dot{g}. \end{aligned}$$

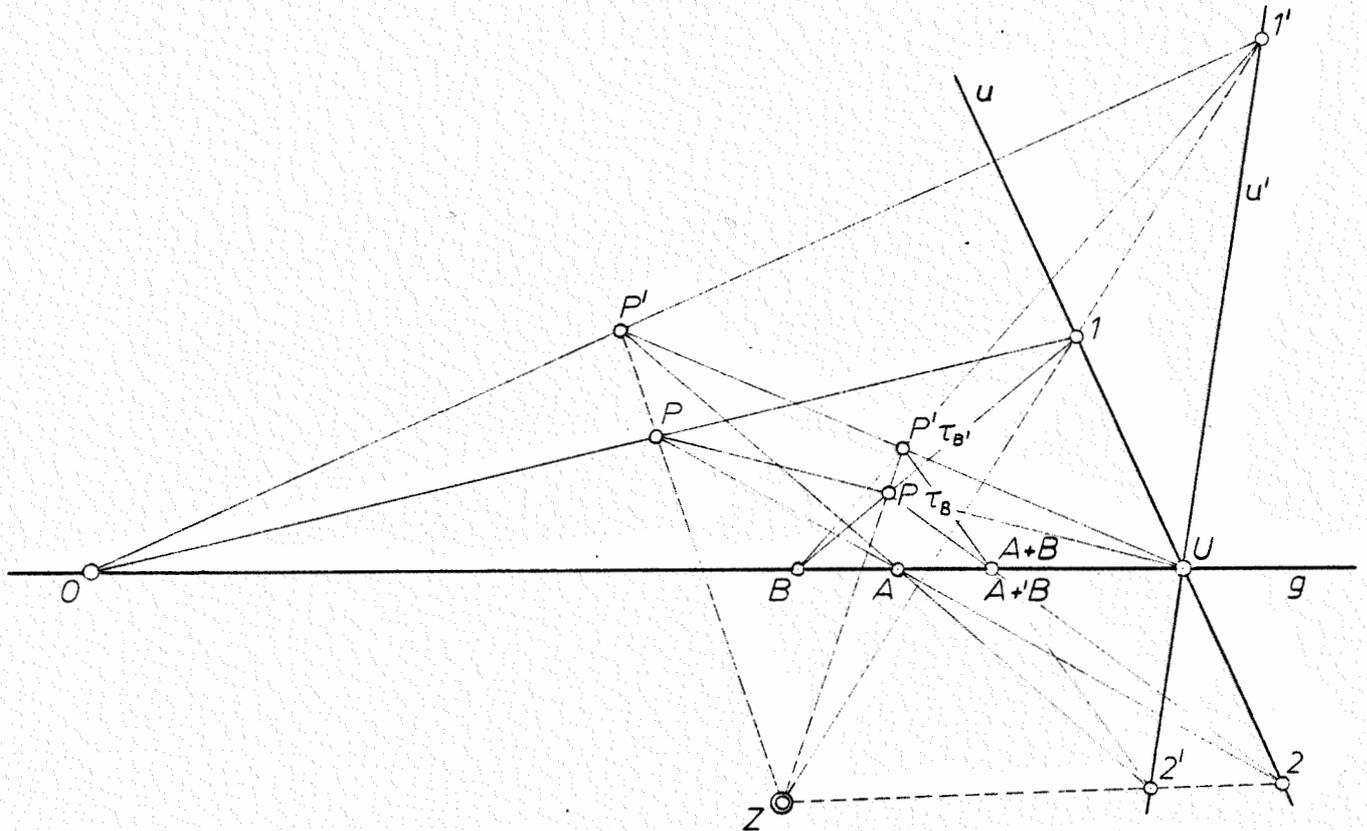
Die Abb. zeigen die Konstruktion von  $A+B$  und  $A \cdot B$  unter Benützung eines Hilfspunkts  $P \notin g \cup \omega$ ; da alle Konstruktionslinien in der Ebene  $\{P\} \vee g$  verlaufen, genügen ebene Figuren mit  $u := (\{P\} \vee g) \cap \omega$ .



Die algebraische Struktur  $(\dot{g}; +, \cdot)$  ist ein Körper mit  $O$  als Nullelement und  $E$  als Einselement, der genau in Papposräumen kommutativ ist (I, 137). Weiters gilt:

**Satz 1.4.1:** Der Körper  $(\dot{g}; +, \cdot)$  ist allein durch die Punkte  $O, E, U$  bestimmt und unabhängig von der zulässigen Wahl der Hyperebene  $\omega$ .

**Beweis.** Wir verwenden zwei verschiedene Hyperebenen  $\omega$  und  $\omega'$  mit  $g \cap \omega = \{U\} = g \cap \omega'$ , die Bezeichnungen  $\tau_X \in PGL(U, \omega)$  mit  $O\tau_X = X$  und  $\tau'_X \in PGL(U, \omega')$  mit  $O\tau'_X = X$ , sowie  $(\dot{g}; +, \cdot)$  und  $(\dot{g}; +', \cdot')$ . Zur Konstruktion von  $A+B$  werde ein Hilfspunkt  $P' \in (\{P\} \vee g) \setminus g$  mit  $P' \notin \omega \cup \omega'$ ,  $P' \notin PU$  benützt; in der Abb. ist  $u = (\{P\} \vee g) \cap \omega$ ,  $u' = (\{P\} \vee g) \cap \omega'$ . Wir zeigen  $A+B = A+B'$  für den nichttrivialen Fall  $B \neq O$ . Wegen  $P' \notin PU$  ist  $P\tau_B = P'\tau'_B$  und nach Axiom (PR2) existiert der Punkt  $\{Z\} := PP' \wedge P\tau_B P'\tau'_B$ .



In der Desarguesebene  $\{P\} \vee g$  existiert eine perspektive Kollineation mit Zentrum  $Z$  und Achse  $g$ , die  $P \mapsto P'$  leistet. Für diese gilt  $P\tau_B \mapsto P'\tau_{B'}$  also  $\{1\} := OP \cap BP\tau_B \in u \mapsto \{1'\} := OP' \cap BP'\tau_{B'} \in u'$  und daher  $u \mapsto u'$  wegen  $U \mapsto U$ . Damit folgt  $\{2\} := AP \cap u \mapsto \{2'\} := AP' \cap u'$  und  $2\tau_B \mapsto 2'\tau_{B'}$ , was  $A+B = A'+B$  nach sich zieht.

Der Nachweis im Falle der Multiplikation verläuft völlig analog.  $\square$

Wir bezeichnen den Körper  $(\mathfrak{g}; +, \cdot)$  mit  $K_{al}(O, E; U)$  und nennen ihn einen Algebraisierungskörper<sup>4</sup> von  $\Pi_{DE}$ . Je zwei Algebraisierungskörper eines projektiven Desarguesraumes sind isomorph (I, 141). Ist ein Algebraisierungskörper von  $\Pi_{DE}$  isomorph zum Körper der reellen bzw. der komplexen Zahlen, so heißt  $\Pi_{DE}$  ein reeller bzw. komplexer projektiver Raum. Die projektiven Räume  $\Pi_{AE}$  und  $\Pi_{AR}$  sind reelle projektive Räume.

Ist  $\Pi(\mathcal{W}) = (\mathfrak{g}, \mathcal{G})$  ein projektiver Raum über dem Vektorraum  $\mathcal{W}$  zum Körper  $K$ , so ist  $\Pi(\mathcal{W})$  für  $\dim \mathcal{W} \geq 3$  ein Desarguesraum (II, 4). Jeder Algebraisierungskörper von  $\Pi(\mathcal{W})$  ist zu  $K$  isomorph, und zwar ist für  $g = \alpha k + \varrho k \in \mathcal{G}$  mit  $\{\alpha, \varrho\}$  l.u. die Abbildung  $\xi: K_{al}(\alpha k, (\alpha + \varrho)k; \varrho k) \rightarrow K$  mit  $\xi = \varrho k = (\alpha + \varrho x)k (= g \setminus \{\varrho k\}) \mapsto x \in K$  ein Körperisomorphismus (II, 9).

<sup>4</sup>Bei einer Kotierung  $\varphi: \mathfrak{P} \rightarrow g = OE$  aus einem projektiven Desarguesraum kann jeder von  $U \in \omega$  verschiedene RiB mit einer Kote, einem Element aus  $K_{al}(O, E; U)$  identifiziert werden.

Jeder projektive Desarguesraum ist isomorph zu einem projektiven Raum über einem Rechtsvektorraum (II,16). Zwei projektive Desarguesräume sind genau dann isomorph, wenn sie gleichmächtige Basen und isomorphe Algebraisierungskörper besitzen (II,21). Jede reelle projektive Ebene bzw. jeder reelle dreidimensionale projektive Raum ist daher zu  $\Pi_{AE}$  bzw.  $\Pi_{AR}$  isomorph.

Kollineationen sind mit der Struktur der Algebraisierungskörper in folgendem Sinn verträglich:

**Satz 1.4.2:** Ist  $\kappa: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  eine Kollineation eines projektiven Desarguesraumes  $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{O})$  auf einen projektiven Desarguesraum  $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{O}')$  und  $K_{al}(A_0, A_1; \mathcal{P}_1)$  ein Algebraisierungskörper von  $\Pi$ , so ist  $\kappa|_{\mathcal{G}}$  mit  $\mathcal{G} := A_0 A_1 \setminus \{P_1\}$  ein Körperisomorphismus von  $K_{al}(A_0, A_1; \mathcal{P}_1)$  auf den Algebraisierungskörper  $K_{al}(A_0 \kappa, A_1 \kappa; \mathcal{P}_1 \kappa)$  von  $\Pi'$ .

**Beweis.** Sind  $+, \cdot$  bzw.  $+', \cdot'$  die Operationen in  $K_{al}(A_0, A_1; \mathcal{P}_1)$  bzw. in  $K_{al}(A_0 \kappa, A_1 \kappa; \mathcal{P}_1 \kappa)$ , so ist zu zeigen:

$$\begin{aligned} (A+B)\kappa &= A\kappa +' B\kappa && \text{für } A, B \in \mathcal{G}, \\ (A \cdot B)\kappa &= A\kappa \cdot' B\kappa && \text{für } A, B \in \mathcal{G} \setminus \{A_0\}, \\ (A \cdot A_0)\kappa &= A\kappa \cdot' A_0 \kappa, \quad (A_0 \cdot A)\kappa = A_0 \kappa \cdot' A\kappa && \text{für } A \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Wir führen den Beweis nur für die erste Zeile. Nach Satz 1.1.1 gilt  $\bar{\kappa}^{-1} \tau_B \kappa = \tau'_{B\kappa}$  mit  $A_0 \tau_B = B$ ,  $(A_0 \kappa) \tau'_{B\kappa} = B\kappa$ , also mit (1):  $(A+B)\kappa = A \tau_B \kappa = A \kappa \bar{\kappa}^{-1} \tau_B \kappa = A \kappa \tau'_{B\kappa} = A \kappa +' B \kappa$ . □

**1.4.3** Wir benötigen die eindeutige Festlegung einer Kollineation eines projektiven Desarguesraumes  $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{O})$  auf einen projektiven Desarguesraum  $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{O}')$ .

**Satz 1.4.3:** Ist  $(\mathcal{L}; \omega)$  bzw.  $(\mathcal{L}'; \omega')$  eine Fundamentalfigur eines projektiven Desarguesraumes  $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{O})$  bzw.  $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{O}')$  und existiert eine Bijektion  $\beta: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  mit  $A_0 \beta = A_0'$ ,  $A_1 \beta = A_1'$  sowie ein Körperisomorphismus  $\tilde{\alpha}: K_{al}(A_0, A_1; \mathcal{P}_1) \rightarrow K_{al}(A_0', A_1'; \mathcal{P}_1')$  mit  $\{P_1\} := A_0 A_1 \cap \omega$ ,  $\{P_1'\} := A_0' A_1' \cap \omega'$  so existiert genau eine Kollineation  $\kappa: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  mit  $A \kappa = A \beta$  für alle  $A \in \mathcal{L}$ ,  $\omega \kappa = \omega'$  und  $\kappa|_{(A_0 A_1 \setminus \{P_1\})} = \tilde{\alpha}$ .

**Beweis.** (a) Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Sind  $\kappa_1, \kappa_2: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  zwei in die Angabe passende Kollineationen, so ist  $\iota := \kappa_1 \kappa_2^{-1}$  aus  $PGL(\Pi)$  mit  $A \iota = A$  für alle  $A \in \mathcal{L}$ ,  $\omega \iota = \omega$  und  $\iota|_{A_0 A_1} = id_{A_0 A_1}$ , wegen  $P_1 \iota = P_1$  und  $\iota|_{(A_0 A_1 \setminus \{P_1\})} = \tilde{\alpha} \tilde{\alpha}^{-1}$ . Nach 1.1.3 gilt  $\iota = id_{\mathcal{P}}$ .

(b) Nach 1.4.2 existieren Kollineationen  $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  und  $\varphi': \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$  von  $\Pi$  bzw.  $\Pi'$  auf einen projektiven Raum über einem Rechtsvektorraum  $\mathcal{W}$  zum Körper  $K$  bzw.  $\mathcal{W}'$  zum Körper  $K'$ . Nach 1.1.3 ist  $(\mathcal{L}_\varphi; \omega_\varphi)$  bzw.  $(\mathcal{L}_{\varphi'}; \omega_{\varphi'})$  eine Fundamentalfigur von  $\Pi(\mathcal{W})$  bzw.  $\Pi'(\mathcal{W}')$  und  $\bar{\beta} := (\varphi' | \mathcal{L}_\varphi) \beta \varphi': \mathcal{L}_\varphi \rightarrow \mathcal{L}_{\varphi'}$  eine Bijektion mit  $A_0 \varphi \bar{\beta} = A_0' \varphi'$ ,  $A_1 \varphi \bar{\beta} = A_1' \varphi'$ . Nach Satz 1.4.2 stellt  $\varphi | (A_0 A_1 \setminus \{P_1\})$  einen Isomorphismus des Algebraisierungskörpers  $K_{al}(A_0, A_1; P_1)$  von  $\Pi$  auf den Algebraisierungskörper  $\bar{K}_{al}(A_0 \varphi, A_1 \varphi; P_1 \varphi)$  von  $\Pi(\mathcal{W})$  dar und nach 1.4.2 existiert ein Körperisomorphismus  $\bar{\xi}: \bar{K}_{al}(A_0 \varphi, A_1 \varphi; P_1 \varphi) \rightarrow K$ ; analoges gilt für die mit einem Akzent bezeichneten Räume. Dann ist  $\bar{f} := \bar{\xi}^{-1} \varphi^{-1} \alpha \varphi' \bar{\xi}: K \rightarrow K'$  ein Körperisomorphismus.

Zur Bijektion  $\bar{\beta}: \mathcal{L}_\varphi \rightarrow \mathcal{L}_{\varphi'}$  und zum Isomorphismus  $\bar{f}: K \rightarrow K'$  existiert ein  $\bar{f}$ -Vektorraumisomorphismus  $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$  derart, daß die Kollineation  $\bar{\kappa}$  mit  $\varphi K(\in \mathcal{U}(\mathcal{W})) \mapsto (\varphi f) K'(\in \mathcal{U}'(\mathcal{W}'))$  leistet  $\bar{A} \bar{\kappa} = \bar{A} \bar{\beta}$  für alle  $\bar{A} \in \mathcal{L}_\varphi$  und  $(\omega_\varphi \bar{\kappa} = \omega_{\varphi'})$  (II, 18). Dann ist  $\kappa := \varphi \bar{\kappa} \varphi'^{-1}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  eine Kollineation mit  $A \kappa = A \varphi \bar{\kappa} \varphi'^{-1} = A \varphi \bar{\beta} \varphi'^{-1} = A \varphi \varphi' / \beta \varphi' \varphi'^{-1} = A / \beta$  und  $\omega \kappa = \omega_\varphi \bar{\kappa} \varphi'^{-1} = \omega_{\varphi'} \varphi'^{-1} = \omega'$ . Es bleibt  $\kappa | (A_0 A_1 \setminus \{P_1\}) = \alpha$  zu zeigen.

Für  $X \in A_0 A_1 \setminus \{P_1\}$  und  $X \varphi \bar{f} = x \in K$  gilt  $x \bar{f} = X \varphi \bar{\xi} (\bar{\xi}^{-1} \varphi^{-1} \alpha \varphi' \bar{\xi}) = X \alpha \varphi' \bar{f}$ . Andererseits ist mit  $A_0 \varphi = \alpha K$ ,  $P_1 \varphi = \mu K$ ,  $A_1 \varphi = (\alpha + \mu) K$  dann  $X \varphi = \varphi K = (\alpha + \mu x) K$  für  $x = X \varphi \bar{f} \in K$  nach 1.4.2 und weiter  $X \varphi \bar{\kappa} = ((\alpha + \mu x) \bar{f}) K' = (\alpha \bar{f} + \mu \bar{f} (x \bar{f})) K'$ . Da  $A_0' \varphi' = A_0' \bar{\mu}' \varphi' \bar{\kappa} = A_0 \varphi \bar{\kappa} = (\alpha K) \bar{\kappa} = (\alpha \bar{f}) K'$  und analog  $P_1' \varphi' = (\mu \bar{f}) K'$ ,  $A_1' \varphi' = (\alpha \bar{f} + \mu \bar{f}) K'$  gilt, folgt  $x \bar{f} = X \varphi \bar{\kappa} \bar{f} = X \varphi \varphi' / \mu \varphi' = X \mu \varphi' \bar{f}$  und damit  $X \kappa = X \alpha$  für alle  $X \in A_0 A_1 \setminus \{P_1\}$ .  $\square$

Aus Satz 1.4.2 und Satz 1.4.3 folgt:

**Satz 1.4.4:** Eine Bijektion  $\gamma: g \rightarrow g'$  einer Geraden  $g$  eines projektiven Desarguesraumes  $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{O}_\Pi)$  auf eine Gerade  $g'$  eines zu  $\Pi$  isomorphen projektiven Raumes  $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{O}_{\Pi'})$  kann genau dann zu einer Kollineation  $\kappa: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  fortgesetzt werden, wenn für drei beliebige verschiedene Punkte  $A_0, A_1, P_1 \in g$  die Abbildung  $\varphi | (A_0 A_1 \setminus \{P_1\})$  ein Isomorphismus des Algebraisierungskörpers  $K_{al}(A_0, A_1; P_1)$  von  $\Pi$  auf den Algebraisierungskörper  $K'_{al}(A_0 \varphi, A_1 \varphi; P_1 \varphi)$  von  $\Pi'$  ist.

**1.4.4** Gestattet ein Algebraisierungskörper  $K_{al}$  von  $\Pi_{DE}$  - und dann auch jeder dazu isomorphe Körper - nur den trivialen

<sup>5</sup> Zunächst ist sicher  $A_1 \varphi = (\alpha + \mu a) K$  mit  $a \in K \setminus \{0\}$ . Ersetzt man  $\mu$  durch  $\mu a \in \mu K$ , so gilt  $A_1 \varphi = (\alpha + \mu) K$ .

Automorphismus<sup>6</sup> und weiß man, daß ein Algebraisierungskörper  $K'_{al}$  von  $\Pi'_{DE}$  isomorph zu  $K_{al}$  ist, so ist nach Satz 1.4.3 eine Kollineation durch Fundamentalfiguren  $(\mathcal{L}; \omega)$  und  $(\mathcal{L}'; \omega')$  sowie eine Bijektion  $\beta: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  eindeutig festgelegt. Dies trifft etwa für zwei reelle projektive Räume gleicher endlicher Dimension zu.

Sind  $A_0, A_1, P_1$  drei verschiedene kollineare Punkte eines projektiven Desarguesraumes  $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$  und  $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathcal{W}$  eine nach 1.4.2 existierende Kollineation auf einen projektiven Raum  $\Pi(\mathcal{W})$  über einem Vektorraum zum Körper  $K$ , so gilt mit  $A_0 \varphi = \alpha K$ ,  $P_1 \varphi = \mu K$  dann  $A_1 \varphi = (\alpha + \mu)K$  (vgl. Fußnote 5), und für jeden Punkt  $X \in A_0 A_1 \setminus \{P_1\}$  ist  $X \varphi = (\alpha + \mu x)K$  mit  $x \in K$  (Ist  $\Pi$  ein projektiver Raum über einem Vektorraum, so setzen wir  $\varphi = id_{\mathcal{P}}$ ). Gestatten die Algebraisierungskörper von  $\Pi$  und damit  $K$  nur den trivialen Automorphismus, so heißt  $x \in K$  das Doppelverhältnis  $DV(X, A_1, A_0, P_1)$ ; insbesondere ist  $DV(A_1, A_1, A_0, P_1) = 1 \in K$  und  $DV(A_0, A_1, A_0, P_1) = 0 \in K$ . Es ist üblich,  $DV(P_1, A_1, A_0, P_1) =: \infty$  zu definieren, wobei  $\infty$  ein der Menge  $K$  hinzugefügtes Symbol ist. Da  $\varphi|_{(A_0 A_1 \setminus \{P_1\})}$  nach Satz 1.4.2 ein Isomorphismus des Algebraisierungskörpers  $K'_{al}(A_0, A_1; P_1)$  von  $\Pi$  auf den Algebraisierungskörper  $K'_{al}(A_0 \varphi, A_1 \varphi; P_1 \varphi)$  von  $\Pi(\mathcal{W})$  und  $\xi: (\alpha + \mu x)K \mapsto x$  nach 1.4.2 ein Isomorphismus von  $K'_{al}(A_0 \varphi, A_1 \varphi; P_1 \varphi)$  auf den Körper  $K$  ist, stellt die Abbildung  $(\varphi|_{(A_0 A_1 \setminus \{P_1\})}) \xi: K'_{al}(A_0, A_1; P_1) \rightarrow K$  mit  $X \in A_0 A_1 \setminus \{P_1\} \mapsto DV(X, A_1, A_0, P_1)$  einen Körperisomorphismus dar<sup>7</sup>.

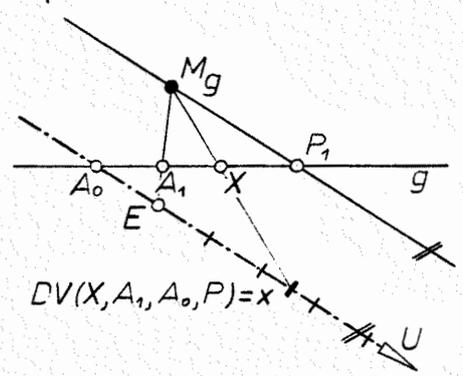
Mit Satz 1.4.2 folgt, daß jede Kollineation von  $\Pi_{DE}$  auf  $\Pi'_{DE}$  doppelverhältnistreue ist, falls die Algebraisierungskörper nur den trivialen Automorphismus gestatten. Insbesondere ist dann jede Perspektivität einer Geraden auf eine schneidende Gerade in  $\Pi_{DE}$  und damit jede Projektivität doppelverhältnistreue, da jede solche Perspektivität zu einer perspektiven Kollineation von  $\Pi_{DE}$  festgesetzt

<sup>6</sup> Dies trifft etwa für die Körper der rationalen und der reellen Zahlen, nicht aber für den Körper der komplexen Zahlen zu. Gestattet ein Körper  $K$  nur den trivialen Automorphismus, so ist er sicher kommutativ; für  $a \in K \setminus \{0\}$  ist nämlich  $x \mapsto a^{-1} x a$  stets ein Körperautomorphismus.

<sup>7</sup> Doppelverhältnisse können in beliebigen projektiven Desarguesräumen definiert werden (II, 32). Gestattet ein Algebraisierungskörper nur den trivialen Automorphismus, so ist das Doppelverhältnis ein Element des Körpers  $K$  und eine Eigenschaft allein der vier Punkte, also unabhängig von der zulässigen Auswahl von  $\varphi$ . Wir wollen den Doppelverhältnisbegriff hier nur in diesem Fall benutzen.

werden kann (I,143).

In  $\Pi_{AE}$  (oder  $\Pi_{AR}$ ) kann  $DV(X, A_1, A_0, P_1)$  mit Hilfe einer Perspektivität zu einer Meßskala mit  $A_0$  als Ursprung und Fernpunkt  $U \notin A_0 A_1$  bestimmt werden, wobei das Meßpunkt  $M_g$  von  $g = A_0 A_1$  genannte Perspektivitäts-



zentrum unter Benützung des Einheitspunkts E der Skala mit  $\overline{A_0 E} = 1$  im Schnittpunkt von  $A_1 E$  mit  $P_1 U$  liegt. Für den Ursprung  $A_0$  bzw. Fernpunkt U der x-Achse bzw. Einheitspunkt E der x-Achse gilt nämlich in homogenen kartesischen Koordinaten in  $\Pi_{AE}$  dann  $A_0 = (1, 0, 0) \mathbb{R} =: \alpha \mathbb{R}$ ,  $U = (0, 1, 0) \mathbb{R} =: \varphi \mathbb{R}$ ,  $E = (1, 1, 0) \mathbb{R} = (\alpha + \varphi) \mathbb{R}$ , so daß für den Punkt X mit der x-Koordinate x dieser Achse folgt  $(1, x, 0) \mathbb{R} = (\alpha + \varphi x) \mathbb{R}$ , also  $x = DV(X, A_1, A_0, P_1)$  für  $\{X \in g, (1, x, 0) \mathbb{R}, M_g\}$  kollinear.

1.4.5 Sei  $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{U})$  ein projektiver Raum mit  $3 \leq \dim \Pi = n < \infty$ , der also sicher ein Desarguesraum ist, und  $\{A_0, \dots, A_n\}; \omega$  eine Fundamentalfigur in  $\Pi$ . Wir setzen  $\{P_j\}_j := A_0 A_j \cap \omega$  ( $j=1, \dots, n$ ) analog zu 1.1.2.

Für jeden Punkt  $X \in \mathcal{P} \setminus \omega$  ist  $\{X\} \vee \{P_1\} \vee \dots \vee \{P_{j-1}\} \vee \{P_{j+1}\} \vee \dots \vee \{P_n\} =: \xi_j \in \xi_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) gemäß 1.1.2 eine Hyperebene in  $\Pi$ , welche  $P_j$  und damit  $A_0 P_j$  nicht enthält. Wir nennen die n Punkte  $\{X_{0j}\}_j := A_0 P_j \cap \xi_j \neq \{P_j\}$  die Koordinatenpunkte von X. Gibt man n Punkte  $X_{01}, \dots, X_{0n}$  mit  $X_{0j} \in A_0 P_j \setminus \{P_j\}$  beliebig vor, so ist gemäß 1.1.2 (vgl. I,153) genau ein Punkt  $X \in \mathcal{P} \setminus \omega$  festgelegt, der diese Koordinatenpunkte besitzt, für den also  $\{X\} = \bigcap_{j=1}^n \xi_j$  mit  $\xi_j := \{X_{0j}\} \vee \{P_1\} \vee \dots \vee \{P_{j-1}\} \vee \{P_{j+1}\} \vee \dots \vee \{P_n\} \in \xi_j$  gilt.

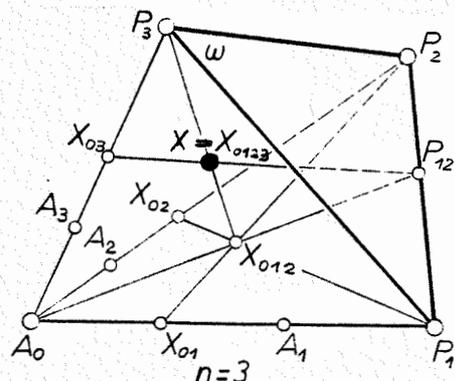
Man kommt ebenfalls von den Koordinatenpunkten  $X_{0j}$  ( $j=1, \dots, n$ ) zum Punkt X durch Eintragen eines Koordinatenweges  $\{X_{01}, X_{012}, X_{0123}, \dots, X_{01\dots n}\}$ , wobei gilt

$$(1) \quad \{X_{012}\} := X_{01} P_2 \cap X_{02} P_1, \dots, \{X_{01\dots k+1}\} := X_{01\dots k} P_{k+1} \cap X_{0k+1} P_{2\dots k} \text{ für } X_{01\dots k} \neq A_0$$

$$\text{mit } \{P_{2\dots k}\} := A_0 X_{01\dots k} \cap \omega, \quad X_{01\dots k+1} := X_{0k+1} \text{ für } X_{01\dots k} = A_0.$$

Die eindeutige Existenz von  $X_{01\dots k+1}$  folgt für  $X_{01\dots k} \neq A_0$  durch Induktion:

Existiert  $X_{01\dots k} \notin \omega$ , was für  $k=1$  zutrifft, so haben die Geraden  $X_{01\dots k} P_{k+1}$  und  $X_{0k+1} P_{2\dots k}$  den Punkt  $X_{01\dots k+1}$  gemeinsam und sind



wegen  $P_{12...k} \in \{A_0\} \vee \{P_1\} \vee \dots \vee \{P_k\}$  und  $X_{01...k} P_{k+1} \cap \omega = \{P_{k+1}\}$ ,  $X_{0k+1} P_{12...k} \cap \omega = \{P_{12...k}\}$  verschieden; nach (PR2) existiert  $X_{01...k+1}$  mit  $X_{01...k+1} \neq P_{k+1}, P_{12...k}$ , also  $X_{01...k+1} \notin \omega$ .

Unter Benützung der n Hyperebenen  $\xi_j = \{X_{0j}\} \vee \{P_1\} \vee \dots \vee \{P_{j-1}\} \vee \{P_{j+1}\} \vee \dots \vee \{P_n\}$  gilt  $X_{01...k+1} \in \xi_1 \cap \xi_2 \cap \dots \cap \xi_{k+1}$ , wie für  $X_{01...k} \neq A_0$  durch Induktion bewiesen wird: Gilt  $X_{01...k} \in \xi_1 \cap \dots \cap \xi_k$ , was für  $k=1$  zutrifft, so folgt  $X_{01...k} P_{k+1} \in \xi_1 \cap \dots \cap \xi_k$ ; aus  $X_{0k+1} P_{12...k} \subset \xi_{k+1}$  ergibt sich  $X_{01...k+1} \in \xi_1 \cap \dots \cap \xi_{k+1}$ . Für  $X_{01...k} = A_0$  dagegen ist nach (1) notwendig auch  $X_{01} = X_{02} = \dots = X_{01...k} = A_0$ , wie man indirekt sofort erkennt, und die Behauptung trivial.

Da  $\xi_1 \cap \dots \cap \xi_n$  jener Punkt  $X \in \mathbb{P} \setminus \omega$  ist, dessen Koordinatenpunkte mit  $X_{0j}$  ( $j=1, \dots, n$ ) übereinstimmen, fällt der letzte Punkt  $X_{01...n}$  des Koordinatenweges in den Punkt X.

Sei  $\pi' = (\mathbb{P}', \mathcal{O}')$  ein projektiver Desarguesraum mit  $2 \leq \dim \pi' = n-1$ , dessen Algebraisierungskörper zu jenen von  $\pi$  isomorph sind.

**Def.1.4.1:** Sind  $\pi$  und  $\pi'$  Desarguesräume mit isomorphen Algebraisierungskörpern und  $2 \leq \dim \pi' = \dim \pi - 1$ , so heißen  $2n+1$  Punkte

$A_0', A_1', \dots, A_n', P_1', \dots, P_n'$  von  $\pi'$  eine axonometrische Grundfigur, wenn

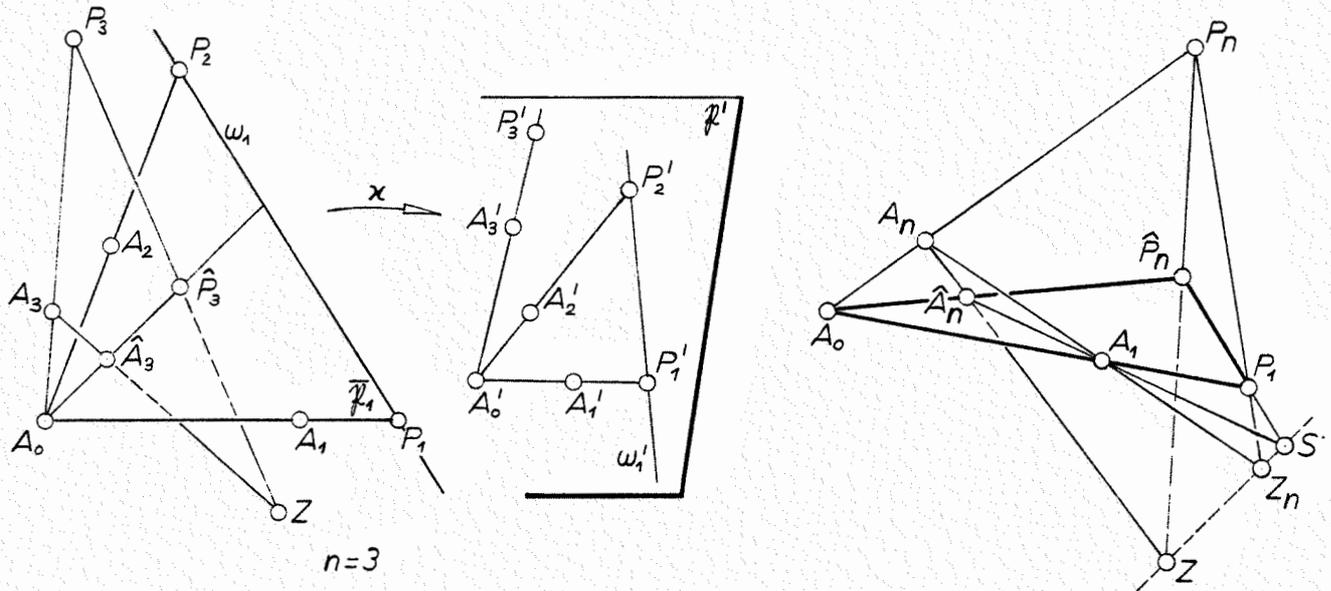
- (I) die Punkte  $A_0', A_j', P_j'$  für jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$  paarweise verschieden und kollinear sind,
- (II) die Punkte  $P_1', \dots, P_{n-1}'$  die Basis einer Hyperebene  $\omega_1'$  von  $\pi'$  bilden, der  $A_0'$  nicht angehört,
- (III) die Geraden  $A_0'P_1'$  und  $A_0'P_n'$  verschieden sind.

Natürlich genügt es, daß diese Eigenschaften nach einer Umnumerierung erfüllt sind.

Jeder Koordinatenpunkt  $X_{0k}$  ( $k=2, \dots, n$ ) wird durch eine Perspektivität  $\xi_k$  zum Zentrum  $Z_k := A_0A_k \cap P_1P_k$ , welches nach Axiom (PR2) existiert, in einen Punkt von  $A_0A_1 \setminus \{P_1\}$  abgebildet. Ebenso wird jeder Punkt aus  $A_0'A_1' \setminus \{P_1'\}$  ( $k=2, \dots, n$ ) einer axonometrischen Grundfigur in  $\pi'$  durch eine Perspektivität  $\xi_k'$  zum Zentrum  $Z_k' := A_0'A_k' \cap P_1'P_k'$ , welches wegen  $A_0'A_1' \neq A_0'A_2'$  und (PR2) existiert, in einen Punkt von  $A_0'A_1' \setminus \{P_1'\}$  abgebildet. Damit kann eine Axonometrie<sup>8</sup>  $\alpha: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  definiert werden; wir erklären  $\alpha$  zunächst für die Punkte  $X \notin \omega$ .

**Def.1.4.2:** Sei  $\{A_0', A_1', \dots, A_n', P_1', \dots, P_n'\}$  eine axonometrische Grundfigur in  $\pi'$  und  $\alpha$  ein Isomorphismus des Algebraisierungskörpers  $K_{al}(A_0, A_1; P_1)$  von  $\pi$  auf den Algebraisierungskörper  $K_{al}'(A_0', A_1'; P_1')$  von  $\pi'$ . Für  $X \in \mathbb{P} \setminus \omega$  werden die axonometrischen Bildpunkte  $X_{0j} \alpha$  der n Koordinatenpunkte  $X_{0j}$  ( $j=1, \dots, n$ ) von X durch  $X_{0j} \alpha := K_{0j} \alpha$ ,

<sup>8</sup>Axonometrie kann auch für  $2 \leq \dim \pi' < \dim \pi - 1$  definiert werden, doch sind die Konstruktionen dann weniger übersichtlich.



Die Abbildung  $\psi | A_0 A_n : A_0 A_n \rightarrow A_0 \hat{A}_n$  ist eine Perspektivität mit Zentrum  $Z$ . Bezeichnen wir die Perspektivität von  $A_0 \hat{A}_n$  auf die davon verschiedene Gerade  $A_0 A_1$  zum Zentrum  $\{S\} := A_1 \hat{A}_n \cap P_1 \hat{P}_n$  mit  $\sigma$ , so ist  $(\psi | A_0 A_n) \sigma : A_0 A_n \rightarrow A_0 A_1$  eine Perspektivität<sup>9</sup> mit  $A_n \mapsto A_1, P_n \mapsto P_1$ , also gleich  $\mathfrak{J}_n$ . Da  $\kappa | A_0 \hat{A}_n = \sigma \hat{\alpha} \mathfrak{J}'_n$  gilt, folgt schließlich  $\chi_{on} \psi = \chi_{on} \psi \kappa = \chi_{on} \psi \sigma \hat{\alpha} \mathfrak{J}'_n = \chi_{on} \mathfrak{J}_n \hat{\alpha} \mathfrak{J}'_n = \chi_{on} \alpha$ .

Aus  $\chi_{oj} \psi = \chi_{oj} \alpha$  ( $j=1, \dots, n$ ) ergibt sich  $\chi \psi = \chi \alpha$ , da die Konstruktion von  $\chi \alpha$  aus  $\chi_{oj} \alpha$  gemäß Def. 1.4.2 eindeutig ist und nach den Gesetzen einer linearen Abbildung erfolgt.

Der Ausnahmepunkt  $\{Z\} = A_n \hat{A}_n \cap P_n \hat{P}_n \notin \mathfrak{P}_1$  ist durch die Angabe eindeutig bestimmt. □

Da die Kollineation  $\kappa$  bei einer beliebigen Permutation der Ziffern  $2, 3, \dots, n-1$  ungeändert bleibt, erhält man nach Satz 1.4.5 das gleiche axonometrische Bild, wenn man einen Koordinatenweg verwendet, der aus (1) durch Anwendung einer solchen Permutation entsteht.

Unter Benützung von Satz 1.4.5 kann die Axonometrie auch für Punkte von  $\omega$  definiert werden, indem wir jeden Punkt  $X$  von  $\omega$  als Schnittpunkt von zwei nicht in  $\omega$  liegenden Geraden auffassen; insbesondere gilt dann  $P_j \alpha = P_j'$  ( $j=1, \dots, n$ ). Gilt speziell  $P_n' \in \omega_1'$ , so ist  $\omega \alpha = \omega_1'$ , also  $\omega$  projizierend und daher  $Z \in \omega$ ; dann

<sup>9</sup>Nach I, 144 gilt: Sind  $a_1, a_2, a_3$  drei verschiedene kopunktuale Geraden und  $\alpha_{12} : a_1 \rightarrow a_2, \alpha_{23} : a_2 \rightarrow a_3$  Perspektivitäten, so ist  $\alpha_{12} \alpha_{23} : a_1 \rightarrow a_3$  eine Perspektivität.

ist das axonometrische Bild  $X\alpha$  eines Punktes  $X \in \omega$  bereits als Schnittpunkt der Bildgeraden  $g\alpha$  einer Geraden  $g \notin \omega$  durch  $X$  mit der Hyperebene  $\omega_1'$  von  $\Pi'$  festgelegt. Für  $P_n' \in \omega_1'$  gilt  $\omega\alpha = \mathcal{R}'$ , und das axonometrische Bild von  $X \in \omega$  wird erst durch die Bilder von zwei Geraden durch  $X$  fixiert.

Im Falle reeller projektiver Räume  $\Pi$  und  $\Pi'$  kann nach 1.4.4 auf die Vorgabe des Körperisomorphismus  $\dot{\alpha}$  verzichtet werden. Die Koordinatenpunkte  $X_{0j}$  lassen sich dann mit Hilfe von Meßskalen für  $A_0 A_k$  und  $A_0' A_k'$  ( $k=1, \dots, n$ ) in die axonometrische Grundfigur übertragen, sodaß auf die Verwendung der Perspektivitäten  $\mathcal{F}_k$  und  $\mathcal{F}_k'$  verzichtet werden kann.

1.4.7 Spricht man  $\omega$  als Fernhyperebene von  $\Pi$  an, so ist  $\dot{\alpha} := \alpha|_{\mathcal{R}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}}$  eine durch Def. 1.4.2 festgelegte Axonometrie aus dem affinen Raum  $\overset{\circ}{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  in den projektiven Raum  $\Pi'$ , und  $\dot{\alpha}$  ist gemäß Satz 1.3.7 bis auf eine Kollineation eine Zentralprojektion oder eine Parallelprojektion, je nachdem  $P_n' \notin \omega_1'$  oder  $P_n' \in \omega_1'$  gilt; im zweiten Fall gibt  $\omega\alpha = \omega_1' \subset \mathcal{R}'$  die Fluchhyperebene ab. Ist auch in  $\Pi'$  eine Fernhyperebene  $\omega'$  ausgezeichnet und faßt man  $\dot{\alpha}$  als Abbildung aus dem affinen Raum  $\overset{\circ}{\Pi}$  in den affinen Raum  $\overset{\circ}{\Pi}' = \Pi' \setminus \omega'$  auf, so ist das Bild unter  $\dot{\alpha}$  nach Satz 1.3.7 im ersten Fall affin zu einem Zentralriß in einer Hyperebene  $\overline{\mathcal{R}}_1$  von  $\Pi$  mit  $\overline{\mathcal{R}}_1 \cap \omega = (\omega'\alpha^{-1}) \cap \omega$  und im zweiten Fall genau dann affin zu einem Parallelriß, wenn  $\omega_1' = \omega'$  gilt.

## 1.5 Lineare Abbildungen aus euklidischen Räumen

1.5.1 Sei  $\Pi = (\mathcal{R}, \mathcal{O}_\Pi)$  ein reeller projektiver Raum mit  $2 \leq \dim \Pi < \infty$ .

Wir geben in einer Hyperebene  $\omega \subset \mathcal{R}$  von  $\Pi$  eine elliptische Polarität  $\pi^\perp$  vor; die zugeordnete Dualität  $\hat{\pi}^\perp$  weist jedem Punkt  $X_u \in \omega$  eine Hyperebene  $X_u \hat{\pi}^\perp$  des projektiven Raumes  $\Pi(\omega)$  so zu, daß aus  $Y_u \in X_u \hat{\pi}^\perp$  stets  $X_u \in Y_u \hat{\pi}^\perp$  folgt und niemals  $X_u \in X_u \hat{\pi}^\perp$  gilt. Dadurch wird im affinen Raum  $\overset{\circ}{\Pi} = \Pi \setminus \omega = (\mathcal{R}, \mathcal{O}_\Pi)$  eine Orthogonalitäts-

<sup>1</sup>Eine Polarität  $\pi$  ist nach I, 163 eine Abbildung von  $\mathcal{R}$  auf  $\mathcal{R}^*$  und bestimmt als Korrelation (I, 164) eine Dualität  $\hat{\pi}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^*$  mit  $\hat{\pi} = \pi^{-1}$  (I, 160). Für  $X_\pi = X^*$  gilt  $\{X\} \hat{\pi} = \mathcal{R}_{X^*}$  und  $\mathcal{R}_1 \hat{\pi} = \mathcal{R}_{X_\pi}$ . Jeder Punkt von  $\{X\} \hat{\pi}$  heißt zu  $X$  konjugiert. Ist kein Punkt in  $\pi$  selbstkonjugiert, so heißt  $\pi$  eine elliptische Polarität. In einer elliptischen Polarität sind polare Unterräume  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_1 \hat{\pi}$  stets komplementär (I, 160 und I, 190).

Wir schreiben i.f.  $X \hat{\pi}$  anstelle  $\{X\} \hat{\pi}$ , was zwar Fn. 4 in 1.1.2 widerspricht, aber zu keinen Mißverständnissen führen kann.

Da  $\mathcal{R}$  nur den trivialen Automorphismus gestattet, ist jede Polarität eines reellen projektiven Raumes projektiv (II, 47).

struktur definiert<sup>2</sup>: Zwei Geraden  $\dot{g}, \dot{h} \in \dot{\mathcal{G}}$  heißen orthogonale Geraden ( $\dot{g} \perp \dot{h}$ ), wenn ihre Fernpunkte  $G_u, H_u$  in  $\pi^\perp$  konjugiert sind, also  $H_u \in G_u \hat{\pi}^\perp$  und daher auch  $G_u \in H_u \hat{\pi}^\perp$  gilt. Alle zu einer Geraden  $\dot{g} \in \dot{\mathcal{G}}$  mit dem Fernpunkt  $G_u$  orthogonalen Geraden sind parallel zu einer Hyperebene  $\dot{\alpha} = \alpha \setminus (\alpha \cap \omega)$  von  $\hat{\pi}$  mit  $G_u \hat{\pi}^\perp = \alpha \cap \omega$ . Für  $\dim \pi = 2$  ist  $\pi^\perp (= \hat{\pi}^\perp$  wegen  $\dim \pi(\omega) = 1$  und Fn.1) eine elliptische involutorische Projektivität. Ein reeller affiner Raum  $\hat{\pi} = \pi \setminus \omega$  mit  $2 \leq \dim \pi < \infty$ , der eine solche Orthogonalitätsstruktur besitzt, heißt ein euklidischer Raum und  $\pi^\perp$  seine absolute Polarität (für  $\dim \pi = 2$  auch absolute Involution).

Jeder mindestens zweidimensionale affine Unterraum  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1 \setminus (\mathcal{R}_1 \cap \omega)$  eines euklidischen Raumes  $\hat{\pi} = \pi \setminus \omega$  ist die Punktmenge eines euklidischen Raumes, dessen absolute Polarität die stets elliptische Spurpolarität<sup>3</sup> von  $\pi^\perp$  im Fernraum  $\mathcal{R}_1 \cap \omega$  von  $\mathcal{R}_1$  ist; für  $\dim \pi(\mathcal{R}_1 \cap \omega) = 1$ , also  $\dim \pi(\mathcal{R}_1) = 2$ , ist diese Spurpolarität die elliptische involutorische Projektivität der in  $\pi^\perp$  konjugierten Punkte auf der Geraden  $\mathcal{R}_1 \cap \omega$ .

Eine Affinität  $\dot{\kappa} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  eines euklidischen Raumes  $\hat{\pi}$  auf einen euklidischen Raum  $\hat{\pi}'$  heißt eine Ähnlichkeit, wenn sie stets orthogonale Geraden in orthogonale Geraden abbildet. Ist  $\kappa : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}' = \mathcal{R}' \cup \omega'$  die projektive Fortsetzung von  $\dot{\kappa}$  und  $\pi^\perp$  bzw.  $\pi'^\perp$  die absolute Polarität von  $\hat{\pi}$  bzw.  $\hat{\pi}'$ , so ist eine Ähnlichkeit durch  $\omega \kappa = \omega'$  und  $X_u \kappa \hat{\pi}'^\perp = X_u \hat{\pi}^\perp \kappa$  für alle  $X_u \in \omega$ , also  $(\alpha \cap \omega) \hat{\pi}'^\perp = \hat{\pi}^\perp (\alpha \cap \omega)$  gekennzeichnet (II,127). Dann gilt: Je zwei euklidische Räume gleicher Dimension sind ähnlich (II,143); insbesondere ist jede euklidische Ebene bzw. jeder dreidimensionale euklidische Raum ähnlich zur Anschauungsebene  $\hat{\pi}_{AE}$  bzw. zum Anschauungsraum  $\hat{\pi}_{AR}$  (II,151 und II,212).

Ist  $\pi$  eine hyperbolische Polarität<sup>4</sup> eines reellen projektiven Raum  $\pi$  mit  $2 \leq \dim \pi < \infty$ , so heißt die Menge der selbstkonjugierten Punkte  $X \in \mathcal{R}$  eine Quadrik  $\Phi$  (für  $\dim \pi = 2$  ein Kegelschnitt), und  $X \hat{\pi} \in \mathcal{H}$  heißt für  $X \in \Phi$  die Tangentialhyperebene (für  $\dim \pi = 2$  die Tangente) von  $\Phi$  in  $X$ ; die Polarität  $\pi$  ist dann das Polarsystem

<sup>2</sup> In II,122 werden Orthogonalitätsstruktur axiomatisch eingeführt.

<sup>3</sup> Ist  $\pi$  eine Polarität in einem projektiven Raum  $\pi$  und  $\mathcal{R}_1$  ein mindestens eindimensionaler, zu seinem Polarraum  $\mathcal{R}_1 \hat{\pi}$  windschiefer Unterraum von  $\pi$ , so ist die Abbildung  $\hat{\pi}_1$ , die jedem Punkt  $X$  von  $\mathcal{R}_1$  den Schnitt  $X \hat{\pi} \cap \mathcal{R}_1$  der Polaryhyperebene  $X \hat{\pi}$  von  $X$  mit  $\mathcal{R}_1$ , also eine Hyperebene von  $\pi(\mathcal{R}_1)$  zuordnet, die Dualität einer Polarität in  $\pi(\mathcal{R}_1)$  und  $\pi_1 : \mathcal{R}_1 \rightarrow (\mathcal{R}_1)^*$  heißt Spurpolarität von  $\pi$  in  $\pi(\mathcal{R}_1)$ ; mit  $\pi$  ist auch  $\pi_1$  elliptisch (I,165 und I,189).

<sup>4</sup> Das bedeutet, daß in  $\pi$  ein selbstkonjugierter Punkt und ein nicht selbstkonjugierter Punkt existiert.

von  $\Phi$ . Ist  $\kappa: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  eine Kollineation eines reellen projektiven Raumes  $\Pi$  auf einen reellen projektiven Raum  $\Pi'$  und  $\pi$  in  $\Pi$  eine hyperbolische Polarität, also das Polarsystem einer Quadrik  $\Phi$  bzw. eine elliptische Polarität, so bestimmt  $\hat{\kappa} \hat{\pi} \kappa$  in  $\Pi'$  eine hyperbolische Polarität, und zwar das Polarsystem der Quadrik  $\Phi \kappa$ , bzw. eine elliptische Polarität (I, 198). Die Polarität  $\pi^*$  mit  $\hat{\pi} \kappa^{-1} \hat{\pi} \kappa$  in  $\Pi'$  heißt das Bild der Polarität  $\pi$  unter  $\kappa$ . Eine Affinität  $\hat{\kappa}: \hat{\mathcal{R}} \rightarrow \hat{\mathcal{R}}'$  eines euklidischen Raumes  $\hat{\Pi}$  auf einen euklidischen Raum  $\hat{\Pi}'$  mit der projektiven Fortsetzung  $\kappa: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  ist also genau dann eine Ähnlichkeit, wenn die absolute Polarität  $\pi^*$  von  $\hat{\Pi}'$  das Bild unter  $\kappa/\omega$  der absoluten Polarität  $\pi^*$  von  $\hat{\Pi}$  abgibt, also  $\pi^* = (\pi^*)^{\kappa/\omega}$  gilt.

In jeder Hyperebene  $\omega \subset \mathcal{R}$ , die keine Tangentialhyperebene einer Quadrik  $\Phi$  ist, besitzt die  $\Phi$  festlegende hyperbolische Polarität  $\pi$  eine Spurpolarität  $\pi_\omega$ , wobei  $\hat{\pi}_\omega$  jedem Punkt  $X \in \omega$  die Spur  $X \hat{\pi} \cap \omega$  der Polarhyperebene von  $X$  in  $\omega$ , also eine gewisse Hyperebene von  $\Pi(\omega)$  zuweist; in  $\pi_\omega$  sind genau die Punkte  $\Phi \cap \omega$  selbstkonjugiert<sup>5</sup> (I, 166).

Ist  $\omega$  die Fernhyperebene des reellen affinen Raumes  $\hat{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  und  $\Phi$  eine Quadrik in  $\Pi$  mit elliptischer Spurpolarität  $\pi_\omega$  in der Fernhyperebene (Fernspurpolarität), so gilt  $\Phi \subset \hat{\mathcal{R}}$ , und  $\Phi$  heißt ein Ellipsoid (für  $\dim \Pi = 2$  eine Ellipse); der Punkt  $M \in \hat{\mathcal{R}}$  mit  $M \hat{\pi} = \omega$  heißt der Mittelpunkt der Polarität  $\pi$  und des Ellipsoids  $\Phi$ . Ist  $\Pi$  ein euklidischer Raum, so heißt ein Ellipsoid eine Sphäre  $\Omega$  (für  $\dim \Pi = 2$  ein Kreis), wenn ihre Fernspurpolarität mit der absoluten Polarität übereinstimmt (II, 129).

Eine Affinität  $\hat{\kappa}: \hat{\mathcal{R}} \rightarrow \hat{\mathcal{R}}'$  eines euklidischen Raumes  $\hat{\Pi}$  auf einen euklidischen Raum  $\hat{\Pi}'$  ist genau dann eine Ähnlichkeit, wenn sie eine (und dann jede) Sphäre in  $\hat{\Pi}$  auf eine Sphäre von  $\hat{\Pi}'$  abbildet (II, 131).

Ist  $\hat{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  ein reeller affiner Raum mit  $\dim \Pi \geq 2$  und  $\pi$  eine elliptische Polarität in  $\Pi$ , so existiert ein Ellipsoid  $\Phi \subset \hat{\mathcal{R}}$  so, daß  $\pi$  das Produkt des Polarsystems von  $\Phi$  mit der Spiegelung am Mittelpunkt<sup>6</sup> von  $\Phi$  ist (Antipolarsystem des Ellipsoids  $\Phi$ ) (II, 96).

<sup>5</sup>Für  $\dim \Pi = 2$  ist  $\omega$  eine Gerade und  $\pi_\omega (= \hat{\pi}_\omega)$  die involutorische Projektivität in  $\pi$  konjugierter Punkte auf dieser Geraden. Die in  $\pi_\omega$  selbstkonjugierten Punkte sind die Fixpunkte dieser Projektivität und fallen in die Schnittpunkte der Geraden  $\omega$  mit dem durch  $\pi$  bestimmten Kegelschnitt  $\Phi$ .

<sup>6</sup>Die projektive Fortsetzung  $\sigma$  der Spiegelung  $\hat{\sigma}$  an einem Punkt  $Z \in \hat{\mathcal{R}}$  ist eine harmonische  $(Z, \omega)$ -Homologie, d.h. die Achse von  $\sigma$  fällt in die Fernhyperebene  $\omega$  und für alle Punkte  $X \in \hat{\mathcal{R}} \setminus \{Z\}$  gilt  $H(X, X\sigma; Z, \omega)$ .

1.5.2 Mit Hilfe einer festen Sphäre  $\Omega_0$  eines euklidischen Raumes  $\overset{\circ}{\Pi}$ , die Eichsphäre heißt, kann ein Abstand definiert werden. Das ist eine Abbildung, die jeder Strecke, also jedem Punktepaar  $(X, Y) \in \overset{\circ}{\mathcal{P}} \times \overset{\circ}{\mathcal{P}}$ , eine nicht negative reelle Zahl  $\overline{XY} \in \mathbb{R}$  zuweist und folgende Forderungen erfüllt<sup>7</sup>:

- (D1) Ist  $\tau$  eine Translation, so gilt stets  $\overline{XY} = \overline{X\tau Y\tau}$ .
- (D2) Ist  $O$  der Mittelpunkt der Eichsphäre,  $X \in \overset{\circ}{\mathcal{P}} \setminus \{O\}$ ,  $U$  der Fernpunkt der Geraden  $OX$  und  $E \in OX \cap \Omega_0$ , so ist  $\overline{OX} := |DV(X, E, O, U)|$ .
- (D3)  $\overline{OO} = 0 \in \mathbb{R}$ .

Jeder Durchmesser  $OX$  schneidet  $\Omega_0$  in zwei Punkten  $E$  und  $\bar{E}$  (II, 54), wobei  $DV(X, E, O, U) = -DV(X, \bar{E}, O, U)$  gilt (II, 92). Für die Punkte  $E$  von  $\Omega_0$  gilt  $\overline{OE} = 1$ . Wir nennen  $\overline{XY}$  auch die Länge der Strecke  $(X, Y)$ .

Eine Ähnlichkeit, die den Abstand von zwei verschiedenen Punkten (und dann den Abstand von je zwei Punkten, II, 146) erhält, heißt eine Kongruenz. Eine Sphäre ist die Menge aller Punkte, die von einem Punkt festen positiven Abstand besitzen (II, 136). Jede orthogonale Symmetrie an einer Hyperebene<sup>8</sup>  $\overset{\circ}{\alpha}$  von  $\overset{\circ}{\Pi}$  ist eine Kongruenz; ebenso ist die Spiegelung an einem Punkt  $Z \in \overset{\circ}{\mathcal{P}}$  eine Kongruenz von  $\overset{\circ}{\Pi}$ .

Sind  $X, Y, Z \in \overset{\circ}{\mathcal{P}}$  verschiedene kollineare Punkte eines euklidischen Raumes und  $U$  der Fernpunkt von  $XY$ , so heißt  $DV(X, Y, Z, U) := TV(X, Y, Z)$  das Teilverhältnis der Punkte  $X, Y, Z$  (II, 109) und es gilt  $|TV(X, Y, Z)| = \overline{XZ} : \overline{YZ}$  (II, 138) und  $TV(X, Y, Z) < 0$  genau dann, wenn  $Z$  zwischen  $X$  und  $Y$  liegt (II, 113). Gemäß (D2) ist  $\overline{OX} = |TV(X, E, O)|$ .

Für die konstruktive Behandlung ist folgende Aussage wichtig:

Satz 1.5.1: Kennt man in einem euklidischen Raum eine Strecke  $(O, E)$  der Länge  $\overline{OE} = 1$ , so ist die Länge jeder Strecke  $(X, Y)$  bestimmt.

Beweis. Für  $X=Y$  ist  $\overline{XY} = 0 \in \mathbb{R}$ .

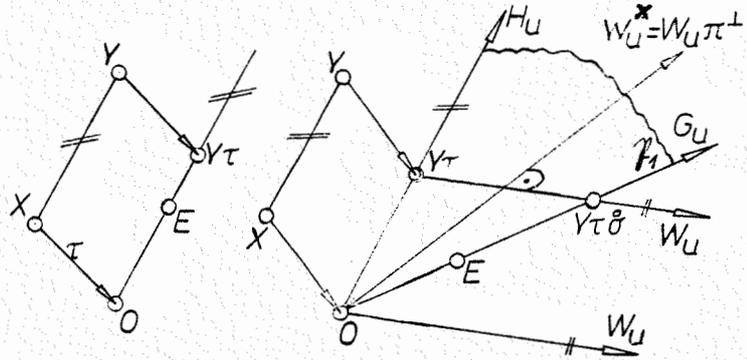
Ist  $X \neq Y$  und  $\overline{XY} \parallel \overline{OE}$  mit  $XY \neq OE$ , so existiert eine Translation  $\tau$  mit  $X \mapsto O$ , welche  $Y \mapsto Y\tau \in \overline{OE}$  leistet. Dann ist  $\overline{XY} = \overline{OY\tau} = |TV(Y\tau, E, O)|$  nach (D1) und (D2). Für  $XY=OE$  schalten wir eine Translation  $\tau_1$  davor,

<sup>7</sup>Anstelle der Distanz gemäß II, 135 kann in einem euklidischen Raum der Abstand (II, 136) definiert werden, da  $\mathbb{R}$  ein euklidischer Körper ist.

<sup>8</sup>Die projektive Fortsetzung<sup>σ</sup> der orthogonalen Symmetrie  $\overset{\circ}{\sigma}$  an einer Hyperebene  $\overset{\circ}{\alpha} = \alpha \setminus (\alpha \cap \omega)$  ist eine harmonische  $(Z, \alpha)$ -Homologie, wobei  $Z \in \omega$  und  $Z\overset{\circ}{\pi}^\perp = \alpha \cap \omega$  gilt. Für  $A \in \overset{\circ}{\mathcal{P}} \setminus \overset{\circ}{\alpha}$  ist dann  $AA\overset{\circ}{\sigma} \perp \overset{\circ}{\alpha}$  und  $AM = MA\overset{\circ}{\sigma}$  mit  $\{M\} = AA\overset{\circ}{\sigma} \cap \alpha$ .

die  $X \mapsto X\tau \notin OE$  leistet.

Für  $XY \neq OE$  existiert eine Translation  $\tau$  mit  $X \mapsto O, Y \mapsto Y\tau \notin OE$  (für  $X=O$  ist  $\tau = id_{\mathcal{P}}$ ) und  $\overline{XY} = \overline{OY\tau}$ . Auf der Ferngeraden  $u$  der Ebene  $\mathcal{P}_1 = OE \vee \{Y\tau\}$



gibt es genau zwei Punkte  $W_u, W_u^*$ , die einerseits zu den Fernpunkten  $G_u$  und  $H_u$  von  $g=OE$  und  $h=OY\tau$  harmonisch und andererseits konjugierte Punkte von  $\pi^\perp$  auf  $u$ , also Fernpunkte orthogonaler Geraden sind<sup>9</sup>. Die harmonische  $(W_u, W_u^*)$ -Homologie  $\sigma$  in  $\pi(\mathcal{P}_1)$  definiert eine orthogonale Symmetrie  $\sigma$  an der Geraden  $OW_u$  der euklidischen Ebene mit der Punktmenge  $\mathcal{P}_1 \setminus u$ , welche  $O \mapsto O$  und  $Y\tau \mapsto Y\tau\sigma \in OE$  leistet. Damit gilt  $\overline{XY} = \overline{OY\tau} = \overline{OY\tau\sigma} = |DV(Y\tau\sigma, E, O, G_u)| = |TV(Y\tau\sigma, E, O)|$  □

**1.5.3** Eine Parallelprojektion  $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_1$  mit dem Zentrum  $\Sigma \subset \omega$  und  $\mathcal{P}_1 \neq \omega$  definiert nach 1.2.6 eine globale Abbildung des affinen Raumes  $\mathring{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  auf den affinen Unterraum  $\mathring{\mathcal{P}}_1 := \mathcal{P}_1 \setminus \mathcal{P}_{\Sigma\omega}$ , wobei  $\mathcal{P}_{\Sigma\omega} := \mathcal{P}_1 \cap \omega$  in  $\Pi(\omega)$  zu  $\Sigma$  komplementär liegt. Ist  $\mathring{\Pi}$  ein euklidischer Raum mit der absoluten Polarität  $\pi^\perp$ , so sind zwei Typen von Parallelprojektionen zu unterscheiden.

**Def.1.5.1:** Ist  $\mathring{\varphi}: \mathring{\mathcal{P}} \rightarrow \mathring{\mathcal{P}}_1$  eine Parallelprojektion eines euklidischen Raumes  $\mathring{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  und gilt für das Zentrum  $\Sigma \subset \omega$  speziell<sup>10</sup>  $\Sigma \hat{\pi}^\perp = \mathcal{P}_{\Sigma\omega}$ , so heißt  $\mathring{\varphi}$  eine Normalprojektion, und sonst eine Schrägprojektion.

Das Bild einer Punktmenge unter einer Normalprojektion bzw. einer Schrägprojektion heißt ihr Normalriß bzw. Schrägriß. Die Identität ist wegen  $\emptyset \subset \omega$  und  $\emptyset \hat{\pi}^\perp = \omega$  als Normalprojektion anzusprechen.

Nach 1.3.6 ist eine lineare Abbildung  $\mathring{\varphi}: \mathring{\mathcal{P}} \rightarrow \mathring{\mathcal{P}}_1$  aus einem affinen Raum  $\mathring{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  in einen affinen Raum  $\mathring{\Pi}' = \Pi' \setminus \omega'$ , bei der die gemäß Def.1.3.2 zugehörige lineare Abbildung  $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  eine Ausnahmemenge  $\Sigma \subset \omega$  besitzt, global auf  $\mathring{\mathcal{P}}$  und für zusätzlich  $\omega\varphi = \omega'$  surjektiv auf  $\mathring{\mathcal{P}}_1$ .

<sup>9</sup>Die Punkte  $W_u, W_u^* \in u$  sind die Fernpunkte der beiden Winkelsymmetralen von  $\bar{g}$  und  $\bar{h}$  (II, 140). Ihre eindeutige Existenz folgt aus den beiden Aussagen: Sind  $\alpha$  und  $\beta$  zwei involutorische Projektivitäten einer Geraden  $u$  eines reellen projektiven Raumes, von denen mindestens eine elliptisch ist, so existiert genau ein Paar verschiedener Punkte, die in  $\alpha$  und  $\beta$  einander wechselseitig zugeordnet sind (II, 55); alle Paare verschiedener Punkte von  $u$ , die zu zwei verschiedenen Punkten  $W_u, W_u^*$  von  $u$  harmonisch sind, liegen in einer hyperbolischen involutorischen Projektivität mit den Fixpunkten  $W_u$  und  $W_u^*$  (I, 52).

<sup>10</sup>Nach 1.5.1 sind in  $\Pi^\perp$  polare Unterräume von  $\Pi(\omega)$  stets komplementär.

Dann gilt in Verschärfung von Satz 1.3.7:

Satz 1.5.2: Jede globale surjektive lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eines euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^n$  auf einen reellen affinen Raum  $\mathbb{R}^m$  ist das Produkt einer Normalprojektion und einer Affinität.

Beweis. Da der Fernraum  $\bar{\mathbb{R}}_m$  des Bildraumes  $\bar{\mathbb{R}}_n$  einer Projektion  $\psi: \bar{\mathbb{R}}_n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_m$  mit  $\varphi = \psi \circ \kappa$  für  $\omega \varphi = \omega'$  nach 1.2.6 in  $\Pi(\omega)$  beliebig komplementär zu  $\Sigma \subset \omega$  angenommen werden darf und  $\kappa$  dann stets eine Affinität  $\kappa: \bar{\mathbb{R}}_n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_m$  bestimmt, können wir  $\bar{\mathbb{R}}_m = \Sigma \hat{\perp}$  wählen.  $\square$

1.5.4 Sind  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \omega$  und  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \setminus \omega'$  euklidische Räume mit der absoluten Polarität  $\pi^\perp$  bzw.  $\pi'^\perp$ , so ist eine lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit einem Ausnahmeraum  $\Sigma$  und  $\Sigma \not\subset \omega$  nach Satz 1.3.7 das Produkt einer Zentralprojektion  $\psi: \bar{\mathbb{R}}_n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_m$  auf einen zu  $\Sigma$  komplementären Unterraum  $\bar{\mathbb{R}}_m \not\subset \omega'$  mit  $\bar{\mathbb{R}}_m \varphi = \omega'$  für  $\bar{\mathbb{R}}_n \cap \omega =: \bar{\mathbb{R}}_m$  und einer Affinität  $\kappa: \bar{\mathbb{R}}_n \setminus \bar{\mathbb{R}}_m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_m \setminus \omega'$ . Nach 1.3.6 ist  $\bar{\mathbb{R}}_m$  eine Hyperebene eines zu  $\Sigma \cap \omega$  in  $\Pi(\omega)$  komplementären Unterraumes, der in  $(\omega' \varphi^{-1}) \cap \omega$  liegt, und für  $\Sigma \cap \omega = \emptyset$  die Hyperebene  $(\omega' \varphi^{-1}) \cap \omega$  von  $\Pi(\omega)$  ist. Als Unterraum des euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^n$  stellt  $\bar{\mathbb{R}}_n := \bar{\mathbb{R}}_n \setminus \bar{\mathbb{R}}_m \subset \mathbb{R}^n$  die Punktmenge eines euklidischen Raumes dar, dessen absolute Polarität nach 1.5.1 die Spurpolarität  $\pi_m^\perp$  von  $\pi^\perp$  im Fernraum  $\bar{\mathbb{R}}_m$  von  $\bar{\mathbb{R}}_n$  ist. Die Affinität  $\kappa$  ist nach 1.5.1 genau dann eine Ähnlichkeit, wenn für ihre projektive Fortsetzung  $\kappa: \bar{\mathbb{R}}_n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_m$  gilt  $(\kappa | \bar{\mathbb{R}}_m) \hat{\pi}^\perp = \hat{\pi}_m^\perp (\kappa | \bar{\mathbb{R}}_m)$ . Da  $\kappa | \bar{\mathbb{R}}_m = \varphi | \bar{\mathbb{R}}_m$  wegen  $\psi | \bar{\mathbb{R}}_m = id_{\bar{\mathbb{R}}_m}$  ist, folgt  $\hat{\pi}^\perp = (\varphi | \bar{\mathbb{R}}_m)^{-1} \hat{\pi}_m^\perp (\varphi | \bar{\mathbb{R}}_m)$ ; dies bedeutet, daß  $\pi^\perp$  dann das Bild unter  $\varphi | \bar{\mathbb{R}}_m$  von  $\pi_m^\perp$  ist.

Im Falle eines Ausnahmeraumes  $\Sigma$  mit  $\Sigma \subset \omega$  ist nach 1.3.6 der lineare Riß, und zwar bei beliebiger Wahl des Bildraumes  $\bar{\mathbb{R}}_m$  der Projektion  $\psi$  in  $\Pi$  komplementär  $\Sigma$ , affin zu einem Parallelriß genau dann, wenn  $\omega \varphi = \omega'$  gilt. Diese Affinität ist genau dann eine Ähnlichkeit, wenn  $\pi'^\perp$  das Bild unter  $\varphi | \bar{\mathbb{R}}_m$  der Spurpolarität  $\pi_m^\perp$  von  $\pi^\perp$  im Fernraum  $\bar{\mathbb{R}}_m = \bar{\mathbb{R}}_n \cap \omega$  ist. Existiert ein solcher zu  $\Sigma$  in  $\Pi(\omega)$  komplementärer Fernraum  $\bar{\mathbb{R}}_m$ , so kann in  $\Pi$  jeder zu  $\Sigma$  komplementäre Unterraum durch  $\bar{\mathbb{R}}_m$  als Bildraum einer Parallelprojektion  $\psi$  verwendet werden.

Satz 1.5.3: Eine durch  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  bestimmte lineare Abbildung  $\varphi$  aus einem euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \omega$  mit der absoluten Polarität  $\pi^\perp$  in einen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \setminus \omega'$  mit der absoluten Polarität  $\pi'^\perp$ , bei der der Ausnahmeraum  $\Sigma$  nicht in  $\omega$  liegt,

kann genau dann als Produkt einer Zentralprojektion und einer Ähnlichkeit dargestellt werden, wenn  $\pi^+$  das Bild unter  $\varphi|_{\overline{\mathcal{F}}_{\mu}}$  der Spurpolarität  $\pi_{\mu}^+$  von  $\pi^+$  in einer Hyperebene  $\overline{\mathcal{F}}_{\mu}$  eines zu  $\Sigma \cap \omega$  komplementären Unterraumes in  $(\omega^{\perp} \varphi^{-1}) \cap \omega$  ist. Für  $\Sigma \subset \omega$  ist der lineare Riß genau dann ähnlich zu einem Parallelriß, wenn  $\omega \varphi = \omega'$  gilt und ein zu  $\Sigma$  in  $\Pi(\omega)$  komplementärer Unterraum  $\overline{\mathcal{F}}_{\mu} \subset \omega$  so existiert, daß  $\pi^+$  das Bild unter  $\varphi|_{\overline{\mathcal{F}}_{\mu}}$  der Spurpolarität  $\pi_{\mu}^+$  von  $\pi^+$  in  $\overline{\mathcal{F}}_{\mu}$  ist.

Wir werden in 1.5.5 für den Fall der Zentralprojektion mit einpunktigem Ausnahmeraum  $\Sigma \not\subset \omega$  ein Kriterium dafür gewinnen, wann ein in Satz 1.5.3 beschriebener Fernraum  $\overline{\mathcal{F}}_{\mu}$  existiert und in 1.5.6 zeigen, daß im Falle einer Parallelprojektion für  $n=3$  stets ein Unterraum  $\overline{\mathcal{F}}_{\mu} \subset \omega$  mit der in Satz 1.5.3 angegebenen Eigenschaft existiert.

1.5.5 Für  $\Sigma \not\subset \omega$  und  $\Sigma \cap \omega = \emptyset$  ist  $\Sigma$  einpunktig, und nach 1.3.6 muß der Bildraum  $\overline{\mathcal{F}}_1$  der Zentralprojektion  $\varphi: \mathcal{Q} \rightarrow \overline{\mathcal{F}}_1$  mit  $\varphi = \varphi \kappa$  die Bedingung  $\overline{\mathcal{F}}_1 \cap \omega =: \overline{\mathcal{F}}_{\mu} = (\omega^{\perp} \varphi^{-1}) \cap \omega$  erfüllen, damit  $\kappa$  eine Affinität bestimmt. Wir setzen  $\dim \Pi \geq 3$  voraus. Da  $\overline{\mathcal{F}}_1$  eine Hyperebene von  $\Pi$  ist, definiert  $\varphi: \mathcal{Q} \rightarrow \overline{\mathcal{F}}_1$  nach 1.2.2 die Perspektivität  $\varphi|_{\omega}: \omega \rightarrow \overline{\mathcal{F}}_1$  und  $(\pi^+)^{\varphi|_{\omega}}$  mit  $(\hat{\pi}^+)^{\varphi|_{\omega}} = (\varphi|_{\omega})^{-1} \hat{\pi}^+ (\varphi|_{\omega})$  ist in  $\Pi'$  das Bild der absoluten Polarität  $\pi^+$  unter der Kollineation  $\varphi|_{\omega}$ . Nach 1.5.1 stimmt die elliptische Polarität  $(\pi^+)^{\varphi|_{\omega}}$  in  $\Pi(\overline{\mathcal{F}}_1)$  mit dem Antipolarsystem eines Ellipsoids in  $\Pi(\overline{\mathcal{F}}_1)$  überein. Die Kollineation  $\kappa: \overline{\mathcal{F}}_1 \rightarrow \mathcal{Q}'$  liefert in  $\Pi'$  die elliptische Polarität  $(\pi^+)^{\varphi|_{\omega}}$  mit  $(\hat{\pi}^+)^{\varphi|_{\omega}} = \kappa^{-1} (\hat{\pi}^+)^{\varphi|_{\omega}} \kappa = (\varphi|_{\omega})^{-1} \hat{\pi}^+ (\varphi|_{\omega})$ , die das Antipolarsystem eines Ellipsoids in  $\Pi'$  ist und das Bild<sup>11</sup> von  $\pi^+$  unter der Kollineation  $\varphi|_{\omega}: \omega \rightarrow \mathcal{Q}'$  darstellt. Dann gilt:

Satz 1.5.4: Das Bild  $(\pi^+)^{\varphi|_{\omega}}$  der absoluten Polarität eines euklidischen Raumes  $\overset{\circ}{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  mit  $\dim \Pi \geq 3$  unter einer Zentralprojektion  $\varphi: \mathcal{Q} \rightarrow \overline{\mathcal{F}}_1$  auf eine Hyperebene  $\overline{\mathcal{F}}_1 \not\subset \omega$  ist das Antipolarsystem einer Sphäre in  $\Pi(\overline{\mathcal{F}}_1)$ . Ein linearer Riß aus einem euklidischen Raum  $\overset{\circ}{\Pi}$  auf einen euklidischen Raum  $\overset{\circ}{\Pi}'$  mit einpunktigem Ausnahmeraum  $\Sigma \not\subset \omega$  ist genau dann ähnlich zu einem Zentralriß, wenn das Bild  $(\pi^+)^{\varphi|_{\omega}}$  der absoluten Polarität  $\pi^+$  in  $\overset{\circ}{\Pi}$  unter  $\varphi|_{\omega}$  das Antipolarsystem einer Sphäre in  $\overset{\circ}{\Pi}'$  ist.

<sup>11</sup> Für  $\Sigma \not\subset \omega$  und  $\Sigma \cap \omega \neq \emptyset$  ist die Bildmenge jeder Hyperebene von  $\Pi(\omega)$ , die  $\Sigma \cap \omega$  nicht enthält, gleich  $\mathcal{Q}'$ , wie aus 1.2.6 folgt, so daß kein "brauchbares" Bild von  $\pi^+$  unter  $\varphi|_{\omega}$  existiert. Gleiches gilt für  $\emptyset \neq \Sigma \subset \omega$ , da dann nach 1.3.6 jede Hyperebene von  $\Pi(\omega)$ , die  $\Sigma$  nicht enthält, auf die feste Hyperebene  $\omega \varphi$  von  $\Pi'$  abgebildet wird.

Beweis. (a) Wegen  $\psi|_{\bar{\mathcal{F}}_{\mu}} = id_{\bar{\mathcal{F}}_{\mu}}$  besteht  $X_{\pi^{\perp}} \cap \bar{\mathcal{F}}_{\mu}$  für  $X \in \bar{\mathcal{F}}_{\mu}$  nur aus Fixpunkten von  $\psi$ . Damit ist im Fernraum  $\bar{\mathcal{F}}_{\mu}$  die Spurpolarität  $(\pi^{\perp})^{\perp}_{\mu}$  von  $(\pi^{\perp})^{\perp}$  gleich der Spurpolarität  $\pi^{\perp}_{\mu}$  von  $\pi^{\perp}$ , wobei  $\pi^{\perp}_{\mu}$  die absolute Polarität des euklidischen Raumes mit der Punktmenge  $\bar{\mathcal{F}}_1 \setminus \bar{\mathcal{F}}_{\mu}$  abgibt.

(b) Das Antipolarsystem  $(\pi^{\perp})^{\perp}$  eines Ellipsoids in  $\Pi'$  besitzt in der Fernhyperebene  $\omega'$  eine Spurpolarität, welche das Bild unter  $\varphi|_{\bar{\mathcal{F}}_{\mu}}$  der Spurpolarität  $\pi^{\perp}_{\mu}$  von  $\pi^{\perp}$  in  $\Pi(\bar{\mathcal{F}}_{\mu})$  ist. Nach Satz 1.5.3 muß diese mit  $\pi^{\perp}$  übereinstimmen, damit der lineare Riß ähnlich zu einem Zentralriß ist.  $\square$

1.5.6 Nach 1.5.3 ist eine globale, surjektive lineare Abbildung  $\tilde{\varphi}$  eines affinen Raumes  $\tilde{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  auf einen affinen Raum  $\tilde{\Pi}' = \Pi' \setminus \omega'$  so beschaffen, daß die zugehörige Abbildung  $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  eine Ausnahmemenge  $\Sigma \subset \omega$  besitzt und  $\omega\varphi = \omega'$  gilt.

Satz 1.5.5: Ist  $\tilde{\varphi}$  eine globale, surjektive lineare Abbildung eines dreidimensionalen euklidischen Raumes  $\tilde{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  auf eine euklidische Ebene  $\tilde{\Pi}' = \Pi' \setminus \omega'$ , so kann  $\tilde{\varphi}$  stets als Produkt einer Parallelprojektion und einer Ähnlichkeit dargestellt werden. Diese Parallelprojektion ist dabei eine Schrägprojektion bzw. eine Normalprojektion, je nachdem ihre Bildebene aus zwei Parallelbüscheln bzw. aus einem Parallelbüschel gewählt werden kann (Satz von POHLKE<sup>12</sup>).

Beweis. (1) Auf Grund der Voraussetzungen besitzt  $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  einen einpunktigen Ausnahmeraum  $\Sigma =: \{Z\} \subset \omega$  und es gilt  $\omega\varphi = \omega'$ . Ist  $\bar{u} (= \bar{\mathcal{F}}_{\mu}) \subset \omega$  eine in  $\Pi(\omega)$  zum Punkt  $Z$  komplementäre Gerade, so kann die Bildebene  $\bar{\mathcal{F}}_1 \subset \omega$  der Projektion  $\psi$  mit  $\varphi = \psi\kappa$  durch  $\bar{u}$  gewählt werden und  $\kappa$  bestimmt wegen  $\omega\varphi = \omega'$  nach 1.3.6 stets eine Affinität  $\tilde{\kappa}: \bar{\mathcal{F}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{F}}_1'$ . Auf  $\bar{u}$  existiert eine involutorische Projektivität  $\tilde{\beta}$  (= Spurpolarität  $\pi^{\perp}_{\mu}$ ) von in der absoluten Polarität  $\pi^{\perp}$  von  $\tilde{\Pi}$  konjugierten Punkten, und auf der Ferngeraden  $u'$  von  $\Pi'$  ist die absolute Involution  $\pi^{\perp}$  von  $\Pi'$  gegeben. Nach Satz 1.5.3 ist zu zeigen: Die Gerade  $\bar{u} \subset \omega$  kann stets so gewählt werden, daß  $\pi^{\perp}$  das Bild unter  $\varphi|_{\bar{u}}$  von  $\tilde{\beta}$  ist, also  $(\varphi|_{\bar{u}})^{-1}\tilde{\beta}(\varphi|_{\bar{u}}) = \pi^{\perp}$  gilt; wir nennen eine solche Ferngerade eine zulässige Ferngerade.

<sup>12</sup>Der 1853 von K. POHLKE angegebene Satz bezieht sich auf Axonometrie aus dem Anschauungsraum, jedoch ist Satz 1.5.5 sein eigentlicher Inhalt.

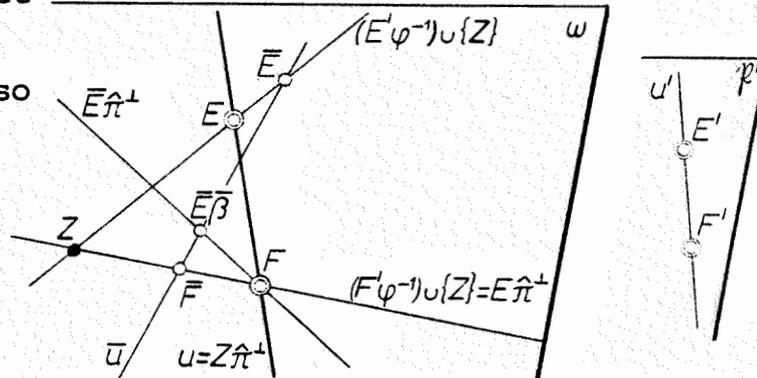
(2) Sei  $\beta$  die involutorische Projektivität (Spurpolarität) von in  $\pi^\perp$  konjugierten Punkten auf  $u := Z\hat{\pi}^\perp \subset \omega$ . Gilt  $(\varphi|u)^{-1}\beta(\varphi|u) = \pi^\perp$ , so ist  $u$  eine zulässige Ferngerade; dieser Fall wird in Beweisteil (6) weiter behandelt.

Gilt  $(\varphi|u)^{-1}\beta(\varphi|u) \neq \pi^\perp$ , so existiert nach 1.5.2, Fn.9 ein Paar verschiedener Punkte  $E', F' \in u'$ , die sowohl in der involutorischen Projektivität  $(\varphi|u)^{-1}\beta(\varphi|u)$  als auch in  $\pi^\perp$  wechselseitig zugeordnet sind. Wir zeigen zuerst, daß eine zulässige Ferngerade notwendig einen der verschiedenen Punkte  $E, F \in u$  mit  $E\varphi = E', F\varphi = F'$  enthält. Wegen  $E/\beta = F$  und  $E \in u = Z\hat{\pi}^\perp$  gilt  $E\hat{\pi}^\perp = ZF$ .

(3) Enthält eine zulässige Ferngerade  $\bar{u}$  den Punkt E nicht, so schneidet sie  $ZE = (E'\varphi^{-1}) \cup \{Z\}$

in einem Punkt  $\bar{E} \neq E, Z$  und ihr Schnittpunkt  $\bar{F}$  mit  $ZF = (F'\varphi^{-1}) \cup \{Z\}$

muß zu  $\bar{E}$  in  $\pi^\perp$  konjugiert sein, also  $\bar{F} = \bar{E}\beta$  gelten. Aus  $\{Z, E, \bar{E}\}$  kollinear folgt  $\{Z\hat{\pi}^\perp = u, E\hat{\pi}^\perp = ZF, \bar{E}\hat{\pi}^\perp\}$  kopunktal, also  $ZF \cap u = \{F\} \subset E\hat{\pi}^\perp$  und  $\bar{E}\hat{\pi}^\perp \neq ZF$  wegen  $E \neq \bar{E}$ ; dann ist aber notwendig  $F = \bar{F}$ .



(4) Wir setzen etwa  $E \in \bar{u}$  voraus. Dann haben die beiden involutorischen Projektivitäten  $(\varphi|\bar{u})^{-1}\beta(\varphi|u)$  und  $\pi^\perp$  auf  $u'$  das Punktepaar  $E', F'$  gemeinsam. Besitzen sie noch ein weiteres gemeinsames Punktepaar  $X', Y'$ , so sind sie identisch (I,52).

Sei  $Y' = X'\pi^\perp$  mit  $X' \neq E', F'$  und  $\bar{X}, \bar{Y} \in \bar{u}$  mit  $\bar{X}\varphi = X', \bar{Y}\varphi = Y'$ . Für  $x := Z\bar{X} = (X'\varphi^{-1}) \cup \{Z\}$  und  $y := Z\bar{Y} = (Y'\varphi^{-1}) \cup \{Z\}$  gilt  $x\hat{\pi}^\perp \in u = Z\hat{\pi}^\perp$ . Stimmt  $\{y\} := y \cap u$  mit  $x\hat{\pi}^\perp$  überein, so gilt  $X\hat{\pi}^\perp = y$  für  $\{X\} := x \cap u$ , also  $Y = X/\beta$ ; in diesem Fall haben  $(\varphi|u)^{-1}\beta(\varphi|u)$  und  $\pi^\perp$  die beiden Punktepaare  $(E', F')$  und  $(X', Y')$  gemeinsam, was der Voraussetzung widerspricht, daß  $u$  keine zulässige Ferngerade ist.

Wir wollen die zulässigen Ferngeraden  $\bar{u}$  aus dem Geradenbüschel  $\mathcal{G}_E$  in  $\omega$  als Fixgeraden einer involutorischen Projektivität festlegen. Dazu lassen wir  $\bar{X}$  in  $x$  variieren; die Gerade  $\bar{X}\hat{\pi}^\perp$  geht dann stets durch  $x\hat{\pi}^\perp \in u$  und schneidet  $y$  wegen  $x\hat{\pi}^\perp \neq y$  in einem Punkt  $\{Y_1\} := y \cap \bar{X}\hat{\pi}^\perp$ . Dann ist  $E\bar{X} \mapsto EY_1$  eine Projektivität  $\gamma_E$  in  $\mathcal{G}_E$ . Für  $EZ \in \mathcal{G}_E$

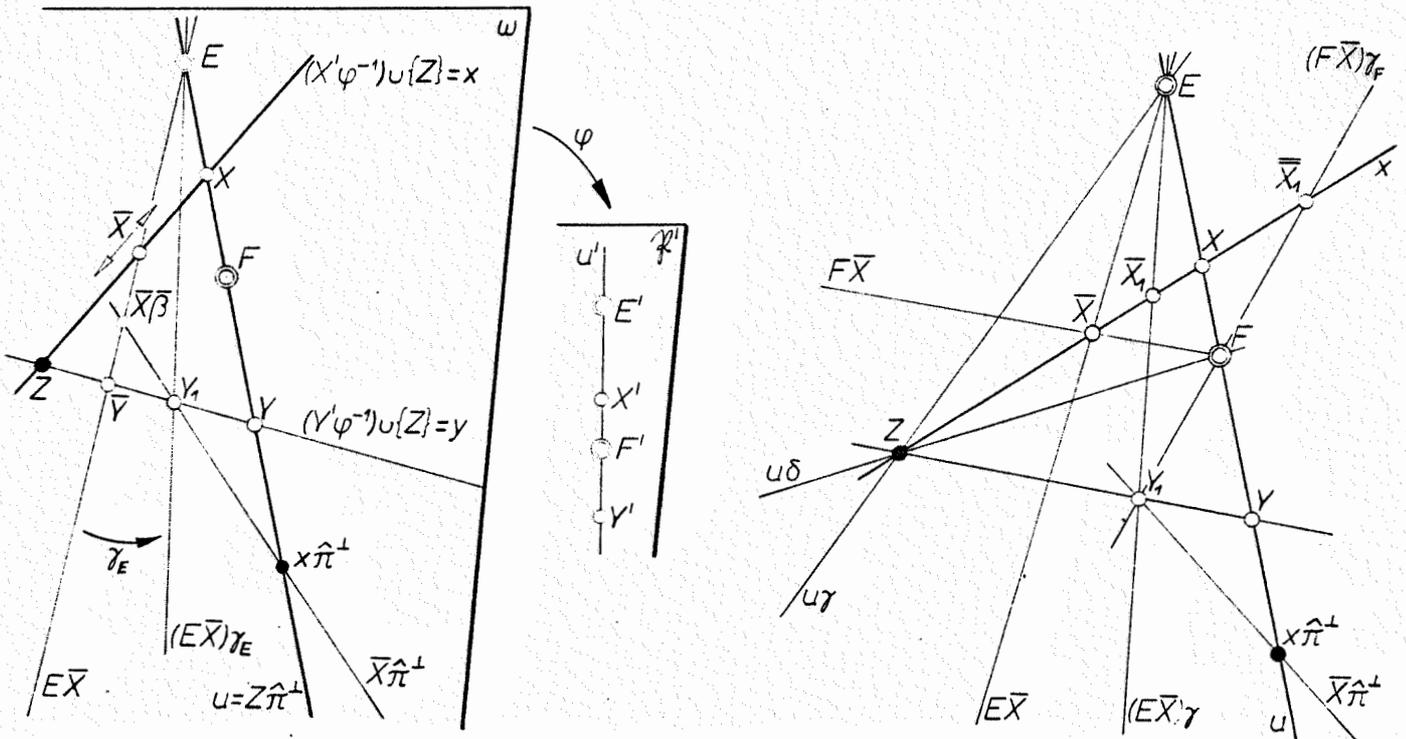
gilt  $(EZ)_\gamma = EY = EX$ , für  $EX \in \mathcal{O}_E$  folgt  $(EX)_\gamma = EZ$ . Damit gibt es zwei verschiedene Geraden von  $\mathcal{O}_E$ , die in  $\gamma$  wechselseitig zugeordnet sind, so daß  $\gamma_E$  involutorisch ist (I,52). Eine Gerade  $\bar{u}$  von  $\mathcal{O}_E$  ist genau dann zulässige Ferngerade, wenn  $\bar{Y} = \bar{X}\beta$ , also  $\bar{Y} = Y_\gamma$  gilt, was die Fixgeraden von  $\gamma_E$  kennzeichnet.

(5) Wir zeigen, daß eine dieser beiden involutorischen Projektivitäten  $\gamma_E: \mathcal{O}_E \rightarrow \mathcal{O}_E$  und  $\gamma_F: \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_F$  elliptisch und die andere hyperbolisch ist.<sup>13</sup>

Auf  $x$  liegen die Punkte  $Z, X, \bar{X}, \bar{X}_1, \bar{X}_2$  mit  $\{\bar{X}_1\} := (E\bar{X})_\gamma \cap x$ ,  $\{\bar{X}_2\} := (F\bar{X})_\delta \cap x$ ; nach dem Multiplikationssatz für Doppelverhältnisse (II,33) gilt

$$(1) \quad DV(\bar{X}, \bar{X}_1, X, Z) = DV(\bar{X}, \bar{X}_2, X, Z) \cdot DV(\bar{X}_1, \bar{X}_2, X, Z).$$

Da  $\pi^1$  elliptisch ist gilt  $DV(F, E, X', Y') < 0$  und damit  $DV(F, E, X, Y) < 0$ , da im Reellen nach 1.4.4 jede Kollineation doppelverhältnistreue ist. Projizieren wir  $F, E, X, Y$  aus  $Y_\gamma$  auf  $x$ , so folgt  $DV(\bar{X}_1, \bar{X}_2, X, Z) < 0$ , also  $\text{sgn } DV(\bar{X}, \bar{X}_1, X, Z) = \text{sgn } DV(\bar{X}, \bar{X}_2, X, Z)$  nach (1). Da  $(\bar{X}, \bar{X}_1)$  und  $(X, Z)$  von in  $\gamma_E$  zugeordneten Geraden und  $(\bar{X}, \bar{X}_2)$ ,  $(X, Z)$  von in  $\gamma_F$  zugeordneten Geraden auf  $x$  ausgeschnitten werden, ist genau eine dieser involutorischen



Projektivitäten hyperbolisch. Ihre beiden Fixgeraden sind die

<sup>13</sup> Nach II,62 ist in einem reellen projektiven Raum eine involutorische Projektivität genau dann elliptisch, wenn zwei verschiedene Paare von Nichtfixelementen existieren, die einander trennen. Nach II,8.5 ist das Trennen von zwei Paaren invariant gegen Perspektivitäten; vier verschiedene Punkte A, B, C, D einer Geraden eines reellen projektiven Raumes bilden genau dann trennende Paare (A, B) und (C, D), wenn  $DV(A, B, C, D) < 0$  gilt.

einzig zulässigen Ferngeraden  $\bar{u}$ ; da diese von  $u = Z\hat{\pi}^\perp$  verschieden sind, ist die Parallelprojektion auf eine Ebene durch  $\bar{u}$  stets eine Schrägprojektion.

(6) Ist dagegen  $(\varphi|u)^{-1}\beta(\varphi|u) = \pi^\perp$ , also  $u = Z\hat{\pi}^\perp$  eine zulässige Ferngerade, so ist die Parallelprojektion auf eine Ebene durch  $u$  eine Normalprojektion. Dann gibt es keine weitere zulässige Ferngerade  $\bar{u}$ . Nach (3) müßte nämlich eine solche von je zwei in  $\beta$  zugeordneten Punkten von  $u$  mindestens einen enthalten, was  $u = \bar{u}$  nach sich zieht.  $\square$

1.5.7 Wir zeigen, daß für  $n > 4$  kein Analogon zu Satz 1.5.5 existiert.

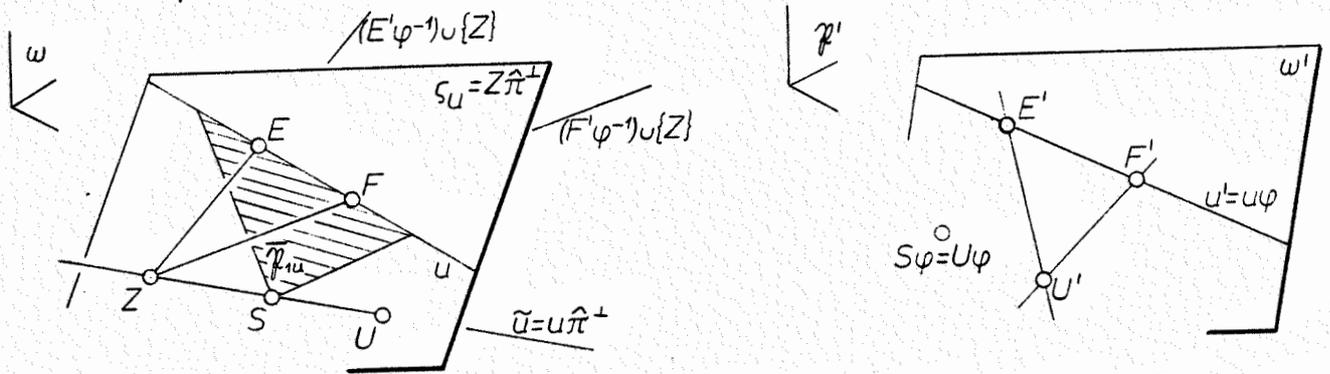
Sei  $\tilde{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  ein euklidischer Raum mit  $\dim \Pi = 4$  und der absoluten Polarität  $\pi^\perp$ . Die globale, surjektive lineare Abbildung  $\varphi: \tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{\Pi}'$  auf einen dreidimensionalen reellen affinen Raum  $\tilde{\Pi}' = \Pi' \setminus \omega'$  hat den Ausnahmepunkt  $Z \in \omega$  und es gilt  $\omega\varphi = \omega'$ . Für den zu  $Z$  in  $\Pi(\omega)$  bezüglich  $\pi^\perp$  polaren zweidimensionalen Unterraum  $Z\hat{\pi}^\perp =: \mathcal{J}_u \subset \omega$  ist dann  $\mathcal{J}_u\varphi = \omega'$ . Sei  $\pi_{\mathcal{J}_u}^\perp$  die Spurpolarität von  $\pi^\perp$  in  $\Pi(\mathcal{J}_u)$  und  $\beta$  die involutorische Projektivität in  $\pi^\perp$  konjugierter Punkte auf einer Geraden  $u \subset \mathcal{J}_u$ . Dann ist  $\beta' := (\varphi|u)^{-1}\beta(\varphi|u)$  eine elliptische involutorische Projektivität der Geraden  $u' := u\varphi \subset \omega'$ . Die in  $\pi^\perp$  zu  $u$  polare Gerade  $\tilde{u} := u\hat{\pi}^\perp \subset \omega$  geht wegen  $u \subset Z\hat{\pi}^\perp$  durch  $Z$  und schneidet die Hyper-ebene  $\mathcal{J}_u$  von  $\Pi(\omega)$  in einem Punkt  $U \notin u$ ; für  $E \in u, F := E\beta \in u$  ist  $\{E, F, U\}$  ein Poldreieck von  $\pi_{\mathcal{J}_u}^\perp$ .

Ist  $U' \in \omega' \setminus u'$  mit  $U' \neq U\varphi$ , so wird durch das Dreieck  $\{U', E' = E\varphi, F' = F\varphi\}$  als Poldreieck, der elliptischen involutorischen Projektivität  $\beta'$  auf  $u' = E'F'$ , die  $F' = E'\beta'$  leistet, und einer beliebigen elliptischen Projektivität auf  $E'U'$  mit  $E' \mapsto U'$  in der Fernebene  $\omega'$  von  $\Pi'$  eine elliptische Polarität  $\pi'$  definiert<sup>14</sup>. Wir zeigen, daß die gegebene Abbildung  $\varphi$ , aufgefaßt als Abbildung aus dem vierdimensionalen euklidischen Raum  $\tilde{\Pi}$  auf den dreidimensionalen euklidischen Raum  $\tilde{\Pi}'$  mit der absoluten Polarität  $\pi'$  nicht als Produkt einer Parallelprojektion und einer Ähnlichkeit dargestellt werden kann.

Im anderen Fall existiert eine zu  $Z$  in  $\Pi(\omega)$  komplementäre Ebene  $\bar{\mathcal{P}}_{Zu} \subset \omega$  mit  $Z \notin \bar{\mathcal{P}}_{Zu}$  so, daß das Bild unter  $\varphi|_{\bar{\mathcal{P}}_{Zu}}$  der Spurpolarität  $\pi_{\bar{\mathcal{P}}_{Zu}}^\perp$  von  $\pi^\perp$  in  $\Pi(\bar{\mathcal{P}}_{Zu})$  mit  $\pi'$  übereinstimmt. Nach Konstruktion ist  $\bar{\mathcal{P}}_{Zu} \neq \mathcal{J}_u$  und  $\bar{\mathcal{P}}_{Zu} \subset \omega$ .

<sup>14</sup>Eine Polarität  $\pi$  in einem reellen projektiven Raum  $\Pi$  mit  $\dim \Pi \geq 2$  ist durch eine Polbasis  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  (d.h.  $P_k\hat{\pi}^\perp = \{P_0, \dots, P_{k-1}\} \vee \{P_{k+1}, \dots, P_n\}$ ,  $k=0, \dots, n$ ) und die  $n$  involutorischen Projektivitäten  $\beta_j$  konjugierter Punkte auf  $P_0P_j$  mit  $P_0\beta_j = P_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) eindeutig festgelegt (I, 177), und  $\pi$  ist genau dann elliptisch, wenn die Projektivitäten  $\beta_j$  alle elliptisch sind (II, 54).

schneidet  $\xi_u$  in einer Geraden  $\bar{u}$ , und für die involutorische Projektivität  $\beta$  von in  $\pi^\perp$  konjugierten Punkten auf  $\bar{u}$  gilt notwendig



$(\varphi|\bar{u})^{-1}\beta(\varphi|\bar{u}) = \beta' = (\varphi|\omega)^{-1}\beta(\varphi|\omega)$ , was  $\bar{u} \subset \{Z\} \vee \{E\} \vee \{F\}$ , also  $u = \bar{u}$  nach sich zieht. Der Pol von  $u \subset \pi_{nu}^\perp$  in  $\pi_{nu}^\perp$  liegt im Schnittpunkt S von  $\tilde{u}$  mit  $\pi_{nu}^\perp$ ; aus  $S\varphi = U\varphi = u \hat{\pi}_{nu}^\perp \varphi$ ,  $U' = u' \hat{\pi}'$  und  $U\varphi \neq U'$  folgt der Widerspruch  $(\varphi|\pi_{nu}^\perp)^{-1} \hat{\pi}_{nu}^\perp (\varphi|\pi_{nu}^\perp) \neq \hat{\pi}'$ .

Nach 1.5.1 sind je zwei dreidimensionale euklidische Räume ähnlich. Die Zusammensetzung der eben diskutierten linearen Abbildung  $\varphi$  und der Ähnlichkeit von  $\hat{\pi}'$  auf einen gegebenen dreidimensionalen euklidischen Raum mit einer absoluten Polarität  $\pi^\perp$  kann sicher nicht als Produkt einer Parallelprojektion und einer Ähnlichkeit dargestellt werden. Für  $\dim \Pi > 4$  wird zuerst ein vierdimensionaler Unterraum betrachtet, der die Fernhyperebene  $\omega$  von  $\Pi$  in einem dreidimensionalen Unterraum durch  $Z \in \omega$  schneidet; für diesen kann obige Diskussion durchgeführt werden.

Ohne Beweis sei angeführt, daß für  $n \geq 4$  der Satz von POHLKE gilt, wenn die Dimension des Ausnahmeraumes ausreichend groß ist.

**1.5.8** Für eine Axonometrie aus einem affinen Raum  $\overset{\circ}{\Pi}$  ist es nach 1.4.6 zweckmäßig, die Fernhyperebene als Bestandteil der zugrundegelegten Fundamentalfigur zu verwenden. Für einen euklidischen Raum bietet sich zusätzlich die Verwendung einer speziellen Basis an, nämlich einer kartesischen Basis  $C = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ . Bei einer solchen sind die  $n$  Geraden  $A_0 A_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) paarweise orthogonal und alle Punkte  $A_j$  liegen auf einer Sphäre zum Mittelpunkt  $A_0$  (II, 143); nach 1.5.2 bedeutet das  $\overline{A_0 A_k} = \overline{A_0 A_l}$  ( $k, l \in \{1, \dots, n\}$ ). Unter Verwendung von Def.1.4.1 formulieren wir

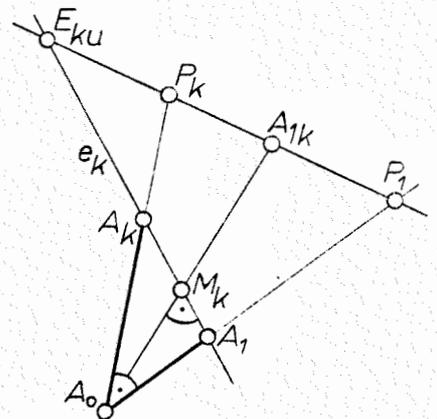
**Def.1.5.2:** Eine axonometrische Grundfigur  $\{A_0', A_1', \dots, A_n', P_1', \dots, P_n'\}$  eines reellen  $(n-1)$ -dimensionalen projektiven Raumes  $\overset{\circ}{\Pi}'$  ( $n \geq 3$ ) heißt eine kartesische axonometrische Grundfigur, wenn  $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$  eine kartesische Basis des euklidischen Raumes  $\overset{\circ}{\Pi}$  und  $\{P_1\} \vee \dots \vee \{P_n\}$  die Fernhyperebene von  $\overset{\circ}{\Pi}$  ist.

Gilt  $P_n' \notin \{P_1', \dots, P_{n-1}'\} =: \omega_1' \subset \mathbb{R}'$  und wird in  $\pi'$  eine Fernhyperebene  $\omega'$  ausgezeichnet, so ist das axonometrische Bild bei  $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}' = \mathbb{R}' \setminus \omega'$  nach 1.4.7 affin zu einem Zentralriß in einer Hyperebene  $\bar{\pi}'$  von  $\pi'$  mit  $\bar{\pi}' \cap \omega = (\omega_1' \alpha^{-1}) \cap \omega$ . Ist auch  $\bar{\pi}'$  ein euklidischer Raum mit der absoluten Polarität  $\pi^\perp$ , so ist das Bild unter  $\alpha$  nach Satz 1.5.4 genau dann ähnlich zu einem Zentralriß, wenn das Bild  $(\pi^\perp)^{\alpha|_\omega}$  der absoluten Polarität  $\pi^\perp$  unter  $\alpha|_\omega$  das Antipolarsystem einer Sphäre in  $\bar{\pi}'$  ist. Dann gilt:

**Satz 1.5.6:** Durch eine kartesische axonometrische Grundfigur mit  $P_n' \notin \omega_1'$  ist das Bild  $(\pi^\perp)^{\alpha|_\omega}$  der absoluten Polarität  $\pi^\perp$  wie folgt eindeutig mitbestimmt (vgl. Fn.14): Die Punkte  $P_1', \dots, P_n'$  bilden eine Polbasis von  $(\pi^\perp)^{\alpha|_\omega}$  und auf jeder der  $n-1$  Geraden  $P_1'P_k'$  ( $k=2, \dots, n$ ) ist die involutorische Projektivität  $\beta_k'$  in  $(\pi^\perp)^{\alpha|_\omega}$  konjugierter Punkte durch  $P_1' \mapsto P_k'$  und  $E_{ku}' \mapsto A_{1k}'$  mit  $\{E_{ku}'\}_k = A_1' A_k' \cap P_1' P_k'$  und  $H(P_1', P_k'; E_{ku}', A_{1k}')$  bestimmt.

**Beweis.** Wegen  $P_n' \notin \omega_1'$  ist  $\omega \cap \alpha = \mathbb{R}'$ , der Ausnahmeraum von  $\alpha$  ein Punkt  $Z \notin \omega$  und  $\alpha|_\omega: \omega \rightarrow \mathbb{R}'$  nach 1.2.6 eine Kollineation. Da  $\{P_1, \dots, P_n\} \subset \omega$  eine Polbasis von  $\pi^\perp$  ist, stellt  $\{P_1', \dots, P_n'\}$  eine Polbasis von  $(\pi^\perp)^{\alpha|_\omega}$  dar; damit gilt  $P_1' \beta_k' = P_k'$  ( $k=2, \dots, n$ ).

Der Fernpunkt  $E_{ku}$  der Geraden  $e_k := A_1 A_k$  ( $k=2, \dots, n$ ), also  $\{E_{ku}\}_k = A_1 A_k \cap \omega$ , liegt auf  $P_1' P_k' = (\{A_0\} \vee A_1 A_k) \cap \omega$  und ist von  $P_1'$  und  $P_k'$  verschieden, da  $A_0, A_1, A_k \in \mathbb{C}$  nicht kollinear sind. Die Fernspur  $\nu_k \cap \omega$  der zu  $e_k$  orthogonalen Hyperebene  $\nu_k$  durch  $A_0$  ist  $E_{ku} \hat{\pi}^\perp$ , und der Punkt  $\{M_k\}_k := \nu_k \cap e_k$  von  $A_0$  bzw.  $A_1$  und  $A_k$  verschieden<sup>15</sup>. Die Gerade  $A_0 M_k \subset \nu_k$  ist dann zu  $e_k$  orthogonal. Aus  $\overline{A_0 A_1} = \overline{A_0 A_k}$  und  $A_0 M_k \perp A_1 A_k = e_k$  folgt  $\overline{A_1 M_k} = \overline{M_k A_k}$  mit Hilfe des Satzes von PYTHAGORAS<sup>16</sup>. Wegen  $A_0 A_1 \perp A_0 A_k$  gilt nach 1.5.2, Fn.8 daher  $A_1 \mapsto A_k$  bei der orthogonalen Symmetrie  $\sigma$  an  $\nu_k$  und bei der harmonischen  $(E_{ku}, \nu_k)$ -Homologie  $\delta$  mit  $\delta = \sigma |_{\mathbb{P}}$  dann  $P_1' \mapsto P_k'$ , also  $H(P_1', P_k'; E_{ku}, \nu_k)$ . Der Schnittpunkt von  $P_1' P_k'$  mit  $\nu_k$  ist der zu  $E_{ku}$  in  $\pi^\perp$  konjugierte Punkt  $A_{1k} \in P_1' P_k'$ .



<sup>15</sup> Dies folgt aus  $\{A_0, A_1, A_k\}$  nicht kollinear bzw.  $E_{ku} \neq P_1, P_k$ .

<sup>16</sup> Ist  $\{A_0, A_k, M_k\}$  ein Dreieck eines euklidischen Raumes und  $A_0 M_k \perp A_1 M_k$ , so gilt  $\overline{A_1 M_k}^2 = \overline{A_0 A_1}^2 - \overline{A_0 M_k}^2$  (II, 137); mit  $\overline{A_0 A_1} = \overline{A_0 A_k}$  folgt  $\overline{A_1 M_k} = \overline{M_k A_k}$ .

Nach 1.4.6 gilt  $E_{ku}' = E_{ku} \alpha$ . Die Kollineation  $\alpha|_{\omega} : \omega \rightarrow \mathcal{R}'$  führt den zu  $E_{ku}$  in  $\pi^+$  konjugierten Punkt  $A_{1k}$  auf  $P_1 P_k$  in den zu  $E_{ku}'$  in  $(\alpha|_{\omega})^{-1} \hat{\pi}^+(\alpha|_{\omega})$  konjugierten Punkt auf  $P_1' P_k'$  über und erhält harmonische Lage.  $\square$

1.5.9 Gilt für eine axonometrische Grundfigur in  $\Pi'$  speziell  $P_n' \in \omega_1' \subset \mathcal{R}'$  und ist  $\omega_1'$  die Fernhyperebene  $\omega'$  des affinen Raumes  $\hat{\Pi}' = \Pi' \setminus \omega'$ , so ist das Bild unter der Axonometrie  $\tilde{\alpha} : \hat{\mathcal{R}} \rightarrow \hat{\mathcal{R}}'$  nach 1.4.7 affin zu einem Parallelriß. Sind  $\hat{\Pi}$  und  $\hat{\Pi}'$  euklidische Räume mit  $\dim \hat{\Pi} = 3$ , so kann  $\tilde{\alpha}$  nach Satz 1.5.5 stets als Produkt einer Parallelprojektion mit einer Ähnlichkeit dargestellt werden. Das ergibt die übliche Fassung des Satzes von POHLKE:

Satz 1.5.7: Liegen von einer kartesischen axonometrischen Grundfigur  $A_0', A_1', A_2', A_3', P_1', P_2', P_3'$  in einer euklidischen Ebene  $\hat{\Pi}'$  die Punkte  $P_1', P_2', P_3'$  auf der Ferngeraden von  $\hat{\Pi}'$ , so ist  $\{A_0', A_1', A_2', A_3'\}$  ähnlich zu einem Parallelriß einer kartesischen Basis eines dreidimensionalen euklidischen Raumes.

## 1.6 Lineare Abbildungen aus dreidimensionalen euklidischen Räumen

1.6.1 Eine Lageaufgabe betrifft das Schneiden oder Verbinden von nichtleeren, echten Unterräumen eines projektiven Raumes. Wegen  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2$  genau für  $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$  ist die Frage, ob ein Unterraum in einem anderen Unterraum enthalten ist, eine Lageaufgabe. In einem dreidimensionalen projektiven Raum  $\Pi = (\mathcal{P}; \mathcal{G})$  genügt es, die folgenden beiden Aufgaben zu beherrschen, um alle Lageaufgaben lösen zu können:

(11) Für welche Punkte  $P \in \mathcal{P}$  und Geraden  $g \in \mathcal{G}$  gilt  $P \in g$ ;

(12) Für welche Geraden  $g \in \mathcal{G}$  und Ebenen  $\alpha \in \mathcal{E}$  gilt  $g \subset \alpha$ .

Dann gilt  $P \in \alpha$ , wenn eine Gerade  $g \in \mathcal{G}$  existiert mit  $P \in g$  und  $g \subset \alpha$ .

Die wesentlichen sechs Lageaufgaben eines dreidimensionalen projektiven Raumes  $\Pi$  können paarweise dual gegenübergestellt werden:

<sup>1</sup>Die Aufgabe (11) ist durch die Angabe des projektiven Raumes bereits beantwortet.

- (L1):  $A, B \in \mathcal{P}$ ,  $A \neq B$ . Gesucht  $g \in \mathcal{G}$  mit  $g=AB$ .  
 (L1\*):  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ ,  $\alpha \neq \beta$ . Gesucht  $g \in \mathcal{G}$  mit  $g=\alpha \cap \beta$ .  
 (L2):  $g, h \in \mathcal{G}$  mit  $g \cap h = \{A\}$ . Gesucht  $\alpha \in \mathcal{L}$  mit  $\alpha = g \vee h$ .  
 (L2\*):  $g, h \in \mathcal{G}$  mit  $g \vee h = \alpha$ . Gesucht  $A \in \mathcal{P}$  mit  $\{A\} = g \cap h$ .  
 (L3):  $A \in \mathcal{P}$ ,  $g \in \mathcal{G}$ ,  $A \notin g$ . Gesucht  $\alpha \in \mathcal{L}$  mit  $\alpha = \{A\} \vee g$ .  
 (L3\*):  $\alpha \in \mathcal{L}$ ,  $g \in \mathcal{G}$ ,  $\alpha \not\supset g$ . Gesucht  $A \in \mathcal{P}$  mit  $\{A\} = \alpha \cap g$ .

Die Rückführung auf (11) und (12) ist nur für (L3) und (L3\*) nicht trivial. Es gilt aber:

Zu (L3): Für  $B \in g$  ist  $A \neq B$  und  $\alpha = \{A\} \vee g = AB \vee g$ .

Zu (L3\*): Für  $\beta \supset g$  ist  $\alpha \neq \beta$  und  $\{A\} = \alpha \cap g = (\alpha \cap \beta) \cap g$ .

Die in (L2) und (L2\*) formulierten Voraussetzungen werden durch die aus (11) und (12) folgende Schnittbedingung erfaßt: Welche Paare  $(g, h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$  bestehen aus schneidenden Geraden.

Zeichnet man in  $\Pi$  eine Fernebene  $\omega$  aus, so kann die Parallelität im affinen Raum  $\overset{\circ}{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  auf Lageaufgaben zur Ebene  $\omega$  zurückgeführt werden.

1.6.2 Durch die Orthogonalitätsstruktur eines euklidischen Raumes  $\overset{\circ}{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  wird für Geradenpaare ein Winkel definiert (II, 140).

Dies ist eine Abbildung  $\angle : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow [0, \pi/2] \subset \mathbb{R}$  mit

(W1)  $\angle \overset{\circ}{a}, \overset{\circ}{b} = 0$  für  $\overset{\circ}{a} \parallel \overset{\circ}{b}$

(W2)  $\angle \overset{\circ}{a}, \overset{\circ}{b} = \pi/2$  für  $\overset{\circ}{a} \perp \overset{\circ}{b}$

(W3)  $\tan \angle \overset{\circ}{a}, \overset{\circ}{b} = \sqrt{-DV(A_u, A_u^x, B_u, B_u^x)}$  mit  $0 < \angle \overset{\circ}{a}, \overset{\circ}{b} < \pi/2$  für  $\overset{\circ}{a} \not\parallel \overset{\circ}{b}$ ,  $\overset{\circ}{a} \not\perp \overset{\circ}{b}$ ,

wobei  $A_u$  bzw.  $B_u$  der Fernpunkt von  $\overset{\circ}{a}$  bzw.  $\overset{\circ}{b}$  und  $A_u^x$  bzw.  $B_u^x$  der jeweils in  $\pi^\perp$  konjugierte Punkt auf der Ferngeraden  $A_u B_u$  ist<sup>2</sup>.

In  $\overset{\circ}{\Pi}_{AR}$  stimmt dieser Winkelbegriff mit dem elementargeometrischen überein<sup>3</sup> (II, 139).

<sup>2</sup> Da die involutorische Projektivität auf  $A_u B_u$  in  $\pi^\perp$  konjugierter Punkte elliptisch ist, gilt  $DV(A_u, A_u^x, B_u, B_u^x) < 0$  für  $A_u \neq B_u \neq A_u^x$  nach 1.5.6, Fn.13.

<sup>3</sup> Im Elementarunterricht ist zwischen dem Winkel (genauer Winkelmaß) zweier Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangspunkt und dem Winkel zweier Geraden, der nur von ihren Fernpunkten abhängt und auch für windschiefe Geraden erklärt ist, zu unterscheiden. Der erste wird zur Beschreibung der Größe einer Drehung verwendet, mit Hilfe der Länge eines Kreisbogens erklärt und nimmt Werte im Intervall  $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ , nach Auszeichnung eines Drehsinnes sogar in  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$  an; der Winkel zweier Geraden liegt stets im Intervall  $[0, \pi/2]$ .

Jede Frage nach einem Abstand oder Winkel heißt eine Maßaufgabe.  
Dann gilt:

Satz 1.6.1: Jede Maßaufgabe eines dreidimensionalen euklidischen Raumes  $\overset{\circ}{\Pi} = \Pi \setminus \omega$ , in dem die absolute Polarität  $\pi^\perp$  und eine Strecke  $(O, E)$  der Länge  $\overline{OE} = 1$  gegeben sind, kann auf Lageaufgaben in  $\Pi$  zurückgeführt werden.

Beweis. Nach Satz 1.5.1 kann man die Länge jeder Strecke und nach (W1), (W2), (W3) den Winkel von je zwei Geraden bestimmen. Es bleibt, die anderen Maßaufgaben durch geeignete Definitionen auf diese beiden Maßaufgaben zurückzuführen.

Winkelaufgaben:

$$\sphericalangle \overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{\beta} := \pi/2 - \sphericalangle \overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{n_\alpha} \quad , \quad \sphericalangle \overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{\beta} := \sphericalangle \overset{\circ}{n_\alpha}, \overset{\circ}{n_\beta} \quad \text{mit } \overset{\circ}{n_\alpha} \perp \overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{n_\beta} \perp \overset{\circ}{\beta} .$$

Abstandsaufgaben:

$\overline{X\overset{\circ}{\alpha}} := \overline{XN}$  mit  $N \in \overset{\circ}{\alpha} \wedge \{X, N, (\alpha \cap \omega)\overset{\circ}{\Pi}^\perp\}$  kollinear,  $\overline{\overset{\circ}{\alpha}/\overset{\circ}{\beta}} := \overline{A\overset{\circ}{\beta}}$  für  $\overset{\circ}{\alpha} \parallel \overset{\circ}{\beta}$  mit  $A \in \overset{\circ}{\alpha}$ ,  
 $\overline{X\overset{\circ}{\alpha}} := \overline{XN}$  mit  $\{N\} = \alpha \cap \alpha \wedge \alpha := \{X\} \vee (\alpha \cap \omega)\overset{\circ}{\Pi}^\perp$ ,  $\overline{\overset{\circ}{\alpha}b^\circ} := \overline{Ab^\circ}$  für  $\overset{\circ}{\alpha} \parallel b^\circ$  mit  $A \in \overset{\circ}{\alpha}$ ,  
 $\overline{ab^\circ} := \overline{AB}$  für  $\overset{\circ}{\alpha} \not\parallel b^\circ$  mit  $\{A \in \overset{\circ}{\alpha}, B \in b^\circ, (A \cup B \cup \omega)\overset{\circ}{\Pi}^\perp\}$  kollinear<sup>4</sup>.  $\square$

Mit Hilfe der Lageaufgaben in  $\Pi$  kann man jede Maßaufgabe in  $\overset{\circ}{\Pi}$  auf die folgenden Maßaufgaben zurückführen:

- (M1) Länge von Strecken
- (M2) Gestalt (d.h. Festlegung bis auf Ähnlichkeiten) ebener Figuren
- (M3) Orthogonale Lage von Geraden und Ebenen.

Durch (M3) ist  $\pi^\perp$  bestimmt und (M2) liefert insbesondere den Winkel schneidender Geraden<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Die Treffgerade  $n$  aus  $N_u := (A_u B_u)\overset{\circ}{\Pi}^\perp \in \omega$  an  $a$  und  $b$ , also  $n = (\{N_u\} \vee a) \cap (\{N_u\} \vee b)$  ist die eindeutig bestimmte gemeinsame Normale von  $a$  und  $b$ . Die Bezeichnung Gemeinlot sollte man im Elementarunterricht vermeiden, da lotrecht stets die Richtung zum Erdmittelpunkt angibt und nicht anstelle von orthogonal (normal) verwendet werden darf.

<sup>5</sup>Im Elementarunterricht wird (M2) schärfer wie folgt formuliert: Abmessungen ebener Figuren (vgl. Baugeometrie I, 21). Wie die obigen Überlegungen zeigen, genügt die schwächere Fassung von (M2). Mit der schärferen Maßaufgabe (M2) kann die Abstandsaufgabe  $\overline{X\overset{\circ}{\alpha}}$  für  $X \in \overset{\circ}{\alpha}$  gelöst werden.

1.6.3 Ist  $\Pi = (\mathcal{R}, \mathcal{G})$  ein reeller projektiver Raum,  $\Pi' = (\mathcal{R}', \mathcal{G}')$  ein projektiver Raum mit  $\dim \Pi' \geq 2$  und  $\varphi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  eine surjektive lineare Abbildung, so ist  $\Pi'$  nach Def. 1.3.1 und Satz 1.4.2 ein reeller projektiver Raum. Für eine zu  $A_g$  windschiefe Gerade  $g$  stellt  $\varphi|_g: g \rightarrow g\varphi$  nach 1.3.2 eine Bijektion dar. Schärfer gilt:

Satz 1.6.2: Enthält eine Gerade  $g \in \mathcal{G}$  eines reellen projektiven Raumes  $\Pi = (\mathcal{R}, \mathcal{G})$  keinen Ausnahmepunkt einer linearen Abbildung  $\varphi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  mit  $\dim \Pi(\text{im } \varphi) \geq 2$ , so ist  $\varphi|_g: g \rightarrow g\varphi$  eine doppelverhältnistreue Bijektion.

Beweis. Ist  $\Sigma := A_\varphi \subset \mathcal{R}$  die Ausnahmemenge von  $\varphi$ , so existiert durch  $g$  wegen  $g \cap \Sigma = \emptyset$  ein zu  $\Sigma$  in  $\Pi$  komplementärer Unterraum  $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}$  (I, 96). Für  $\varphi = \varphi \circ \kappa$  ist die Perspektivität  $\varphi|_{\mathcal{R}_1}: \mathcal{R}_1 \rightarrow \text{im } \varphi =: \mathcal{R}'_1$  nach 1.2.2 eine Kollineation. Da  $\mathcal{R}$  nur den trivialen Automorphismus gestattet, ist  $\varphi|_g$  nach 1.4.4 doppelverhältnistreu. Wegen  $\dim \Pi(\mathcal{R}_1) = \dim \Pi(\text{im } \varphi) \geq 2$  ist  $\Pi'$  ein reeller projektiver Raum und  $\kappa|_g \varphi$  doppelverhältnistreu.  $\square$

1.6.4 Die Grundaufgaben der elementaren Darstellenden Geometrie behandeln die Lageaufgaben eines dreidimensionalen reellen projektiven Raumes  $\Pi$  und die Maßaufgaben eines dreidimensionalen euklidischen Raumes in linearen Abbildungen auf eine reelle projektive Ebene  $\Pi'$ . Nach 1.3.5 besitzt jede solche lineare Abbildung einen einpunktigen Ausnahmeraum. Zur Lösung der Lageaufgaben von  $\Pi$  in  $\Pi'$  werden Lageaufgaben in  $\Pi'$  benützt. Wir benötigen also Kriterien für (I1) und (I2) von  $\Pi$  ausgedrückt durch (I1) und (I2) in  $\Pi'$ . Wegen der fehlenden Injektivität lassen sich solche Kriterien erst nach Hinzunahme eines zweiten linearen Risses angeben, vgl. 2.

Beherrscht man die Lageaufgaben von  $\Pi$  in  $\Pi'$ , so benötigt man zur Lösung der Maßaufgaben von  $\tilde{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  nach Satz 1.6.1 den linearen Riß zweier Punkte  $O, E \in \mathcal{R} \setminus A_\varphi$  mit  $\overline{OE} = 1$  und  $O\varphi \neq E\varphi$  sowie das Bild der absoluten Polarität  $\pi^\perp$  unter  $\varphi|_\omega$ . Nach 1.5.5 existiert nur dann eine elliptische Polarität  $(\pi^\perp)^{\varphi|_\omega}$  mit  $(\hat{\pi}^\perp)^{\varphi|_\omega} = (\varphi|_\omega)^{-1} \hat{\pi}^\perp (\varphi|_\omega)$  in  $\Pi'$ , wenn  $\omega$  nicht projizierend ist, also  $\Sigma \not\subset \omega$  gilt; der lineare Riß ist dann kollinear zu einem Zentralriß. Da dann  $\varphi|_\omega: \omega \rightarrow \mathcal{R}'$  injektiv ist, können die Maßaufgaben von  $\tilde{\Pi}$  bereits in einem linearen Riß behandelt werden.

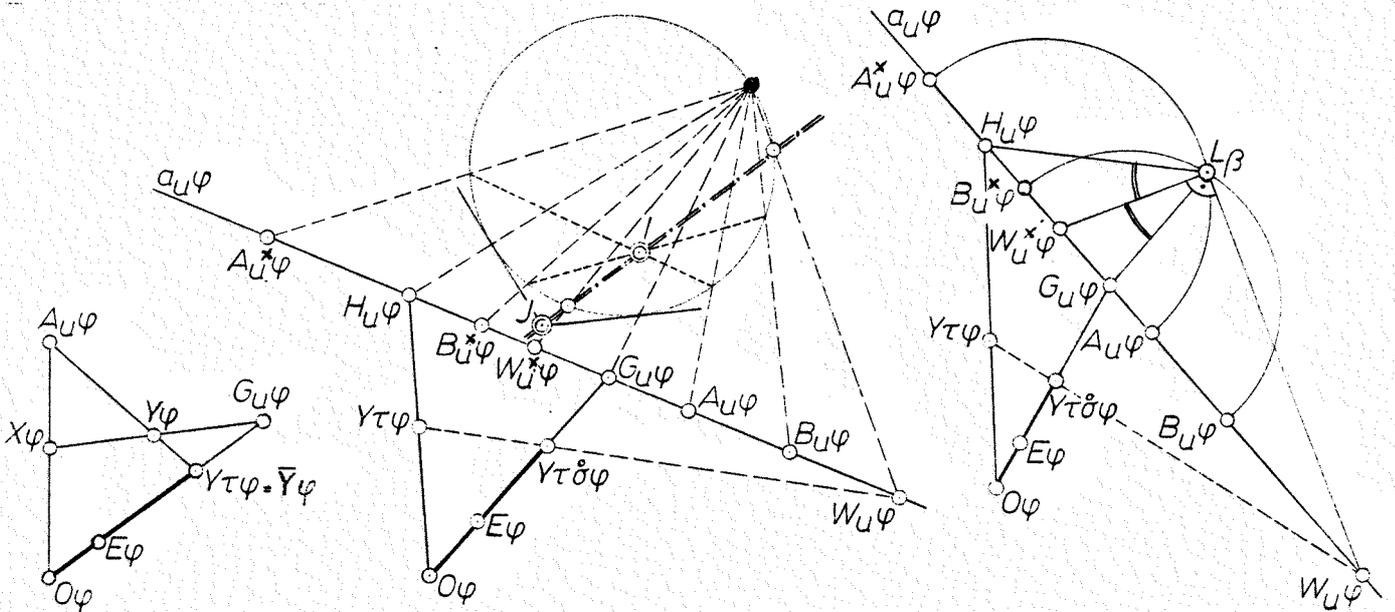
Der lineare Riß eines Fernpunkts  $G_u \in \omega$  bzw. einer Ferngeraden  $a_u \subset \omega$  von  $\Pi$  heißt Fluchtpunkt  $G_u \varphi$  aller Geraden des durch  $G_u$  in  $\Pi$  bestimmten Parallelbündels bzw. Fluchtgerade  $a_u \varphi$  aller Ebenen des durch  $a_u$  in  $\Pi$  bestimmten Parallelbüschels. Die Maßaufgabe (M3), also  $\tilde{g} \perp \tilde{\alpha}$ , wird dann durch  $(G_u \varphi) (\Pi^\perp)^{\varphi/\omega} = a_u \varphi$  gelöst.

Die Lösung von (M1) ist nur für eine Strecke  $(X, Y)$  auf einer nichtprojizierenden Geraden möglich und verwendet die Beweisidee von 1.5.2. Haben  $\tilde{X}\tilde{Y}$  und  $\tilde{O}\tilde{E}$  denselben Fluchtpunkt  $G_u \varphi$ , was  $X\tilde{Y} \cap \omega = O\tilde{E} \cap \omega$ , also  $\tilde{X}\tilde{Y} \parallel \tilde{O}\tilde{E}$  bedeutet, und gilt  $X \notin O\tilde{E}$ , so beherrscht man die Translation  $\tilde{\tau}: X \mapsto O$  im linearen Riß, wenn der Schiebfluchtpunkt  $R_u \varphi$ , also der lineare Riß von  $R_u := X\tilde{O} \cap \omega$  bekannt ist. Mit  $\tilde{Y} := Y\tilde{\tau}$  gilt  $DV(\tilde{Y}, E, O, G_u) = DV(\tilde{Y} \varphi, E \varphi, O \varphi, G_u \varphi)$  nach Satz 1.6.2, und dieses Doppelverhältnis bestimmt nach 1.5.2, (D2) den Abstand  $\overline{XY} = \overline{O\tilde{Y}}$ . Ist  $\Pi'$  eine projektiv abgeschlossene Anschauungsebene, so kann  $\overline{XY}$  mit Hilfe eines Meßpunkts von  $O \varphi E \varphi$  auf einer Meßskala abgelesen werden. Für  $\tilde{X}\tilde{Y} \parallel \tilde{O}\tilde{E}$  und  $X \in \tilde{O}\tilde{E}$  wird nach 1.5.2 eine Translation  $\tilde{\tau}$  mit  $X\tilde{\tau} \notin \tilde{O}\tilde{E}$  vorgeschaltet.

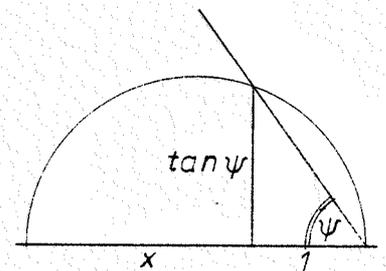
Nach 1.5.2 genügt es, noch den Fall  $X=O$ ,  $Y\tilde{\tau} := \tilde{Y} \notin \tilde{O}\tilde{E}$  zu behandeln. Auf der Fluchtgeraden  $a_u \varphi$  der in 1.5.2 mit  $\mathcal{R}_1$  bezeichneten Verbindungsebene von  $OE=g$  mit  $O\tilde{Y}=h$  sind die eindeutig bestimmten Punkte  $W_u \varphi$  und  $W_u^x \varphi$  von  $a_u \varphi$  zu suchen, welche in  $(\Pi^\perp)^{\varphi/\omega}$  konjugiert und harmonisch zu  $G_u \varphi$  und  $H_u \varphi$  liegen; die Kollineation  $\varphi/\omega: \omega \rightarrow \mathcal{R}'$  erhält nämlich harmonische Lage. Die Abb. zeigt die Ermittlung von  $\tilde{Y} \tilde{\sigma} \varphi \in \tilde{O}\tilde{E}$ , wobei  $\overline{XY} = \overline{O\tilde{Y} \tilde{\sigma} \varphi} = |DV(\tilde{Y} \tilde{\sigma} \varphi, O \varphi, E \varphi, G_u \varphi)|$  gilt; die involutorische Projektivität in  $(\Pi^\perp)^{\varphi/\omega}$  konjugierter Punkte ist durch Paare zugeordneter Punkte  $(A_u \varphi, A_u^x \varphi), (B_u \varphi, B_u^x \varphi)$  gegeben<sup>6</sup>.

<sup>6</sup> Gemäß 1.5.2, Fn.9 sind  $W_u \varphi$  und  $W_u^x \varphi$  das gemeinsame Punktepaar zweier involutorischer Projektivitäten auf  $a_u \varphi$ , welches in der projektiven Ebene  $\Pi'$  unter Benützung der Involutionen  $I$  und  $J$  einer elliptischen und einer hyperbolischen involutorischen Projektivität auf einem Steinerkegelschnitt gefunden wird (I,73).

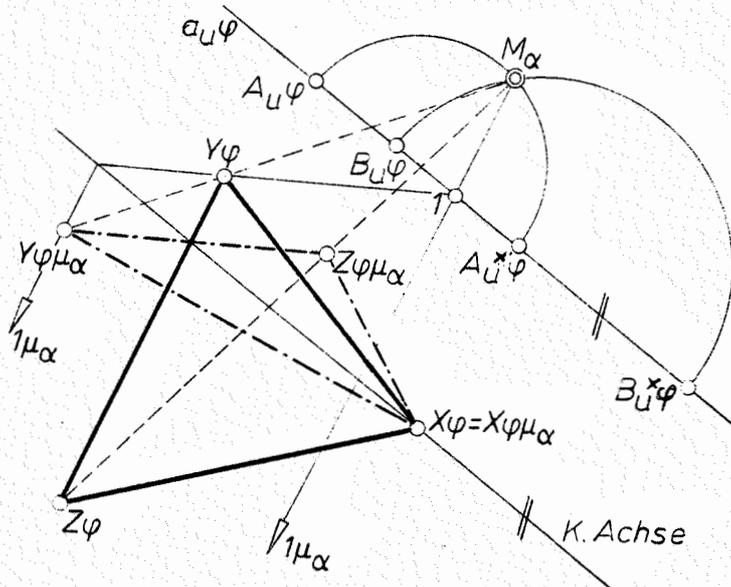
Ist  $\tilde{\Pi}' = \Pi' \setminus u'$  eine euklidische Ebene und  $a_u \varphi \neq u'$ , so existieren zur elliptischen involutorischen Projektivität  $\beta: a_u \varphi \rightarrow a_u \varphi$  in  $(\Pi^\perp)^{\varphi/\omega}$  konjugierter Punkte zwei zu  $a_u \varphi$  symmetrische Punkte  $L_\beta, \tilde{L}_\beta$ , aus denen  $\beta$  durch die Rechtwinkelinvolution in  $\tilde{\Pi}'$  projiziert wird. Diese LAGUERRE-Vertreter von  $\beta$  liegen auf allen Kreisen mit Durchmessern  $(P, P/\beta)$  für  $P, P/\beta \notin u'$  und auf der Normalen zu  $a_u \varphi$  im durch  $\{Z_\beta/\beta\} = a_u \varphi \cap u'$  festgelegten Zentralpunkt  $Z_\beta$  von  $\beta$  (II,158). Die Geraden  $L_\beta W_u \varphi, \tilde{L}_\beta W_u^x \varphi$  sind dann die Winkelsymmetralen von  $\angle L_\beta G_u \varphi, \angle \tilde{L}_\beta H_u \varphi$  (vgl. 1.5.2, Fn.9).



Für die Winkelaufgaben genügt nach 1.6.2 die Ermittlung des in (W3) auftretenden Doppelverhältnisses, welches im linearen Riß bestimmt werden kann, falls die Fernpunkte  $A_u, B_u$  der beiden Geraden verschiedene lineare Risse besitzen. In der projektiv abgeschlossenen Anschauungsebene kann  $-DV(A_{u\psi}, A_{u^*\psi}, B_{u\psi}, B_{u^*\psi}) =: x > 0$  auf einer Meßskala abgelesen und daraus mit Hilfe einer Strecke der Länge 1 und des Höhensatzes der Winkel  $\angle \hat{a}, \hat{b} =: \psi$  konstruiert werden.



Ist  $\hat{\pi}' = \pi' \setminus u'$  eine euklidische Ebene mit der absoluten Involution  $\pi^+$ , so kann für jede Figur  $\mathcal{F}$  in einer bei  $\varphi: \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}'$  nichtprojizierenden Ebene  $\hat{\alpha} \subset \hat{\mathcal{F}}$  die Maßaufgabe (M2) so gelöst werden, daß man auf die zu  $\mathcal{F}$  kollineare Figur  $\mathcal{F}_\varphi \subset \hat{\mathcal{F}}'$  eine Maßkollineation  $\mu_\alpha: \hat{\mathcal{F}}' \rightarrow \hat{\mathcal{F}}'$  anwendet, wobei  $\mathcal{F}_\varphi \mu_\alpha$  ähnlich  $\mathcal{F}$  ist. Für  $a_{u\psi} \neq u'$  mit  $a_u := \alpha \cap u$  wählen wir  $\mu_\alpha$  als perspektive Kollineation von  $\hat{\pi}'$ , deren Zentrum  $M_\alpha$  ein Laguerre-Vertreter der elliptischen involutorischen Projektivität in  $(\pi^+)^{\varphi|u}$  konjugierter Punkte auf  $a_{u\psi}$  ist, und die  $a_{u\psi} \rightarrow u'$  leistet. Wegen der letzten Forderung ist  $(\varphi|\hat{\alpha})\mu_\alpha: \hat{\alpha} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}'$  eine Affinität; da weiters die Fernpunkte der Schenkel jedes rechten Winkels in  $\hat{\alpha}$  bei  $\varphi\mu_\alpha$  in Fernpunkte von  $\hat{\mathcal{F}}'$  übergehen, die aus dem Meßpunkt  $M_\alpha$  von  $\alpha$  durch in  $\hat{\pi}'$  orthogonale Geraden projiziert werden, ist  $(\varphi|\hat{\alpha})\mu_\alpha: \hat{\alpha} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}'$  eine Ähnlichkeit. Die Achse der Maßkollineation  $\mu_\alpha$  kann parallel  $a_{u\psi}$  und von  $a_{u\psi}$  verschieden gewählt werden; ihre Wahl bestimmt den Ähnlichkeitsfaktor zwischen  $\mathcal{F} \subset \hat{\alpha}$  und  $\mathcal{F}_\varphi \mu_\alpha \subset \hat{\mathcal{F}}'$ .



Gilt dagegen  $a_u\varphi = u'$ , so ist  $\varphi|a^\circ: a^\circ \rightarrow \tilde{a}'$  eine Affinität und genau dann eine Ähnlichkeit, wenn  $\pi^\perp$  mit der elliptischen involutorischen Projektivität  $\beta$  in  $(\pi^\perp)^{\varphi\omega}$  konjugierter Punkte auf  $u'$  übereinstimmt. Für  $\beta \neq \pi^\perp$  gibt es genau ein Punktepaar  $G_u, H_u$ , das in  $\beta$  und  $\pi^\perp$  wechselseitig zugeordnet wird; die Projektivität  $\eta := \beta\pi^\perp: u' \rightarrow u'$  hat dann die Fixpunkte  $G_u, H_u$  und ist durch ein weiteres Punktepaar  $A_u \in u' \setminus \{G_u, H_u\} \mapsto A_u\beta\pi^\perp$  festgelegt. Wegen  $\beta = \beta^{-1}$  ist  $\beta\eta = \pi^\perp$ . Als Maßkollineation  $\mu_\alpha$  verwenden wir nun eine Homologie mit Zentrum  $G_u$ , deren eigentliche Achse durch  $H_u$  geht und deren Einschränkung auf  $u'$  mit  $\eta$  übereinstimmt.

1.6.5 Die angegebene Lösung der Maßaufgaben kann auch für Zentralprojektion aus einem dreidimensionalen euklidischen Raum  $\tilde{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  auf eine seiner Ebenen  $\tilde{\mathcal{P}}_1 \subset \mathcal{P}$  verwendet werden; wir benützen für eine solche Perspektive den Abbildungszeiger  $c$  und schreiben  $P \mapsto P^c :=: P^c$ . Der Kreis  $k$  in der euklidischen Ebene mit der Punktmenge  $\tilde{\mathcal{P}}_1 = \tilde{\mathcal{P}}_1 \setminus (\tilde{\mathcal{P}}_1 \cap \omega)$ , dessen Mittelpunkt der Hauptpunkt  $H$ , also die Normalprojektion des Augpunkts  $Z$  der Perspektive  $c$  auf  $\tilde{\mathcal{P}}_1$  und dessen Radius gleich dem Abstand  $d$  von  $Z$  und  $\tilde{\mathcal{P}}_1$  (Distanz von  $c$ ) ist, heißt Distanzkreis der Perspektive. Dann gilt:

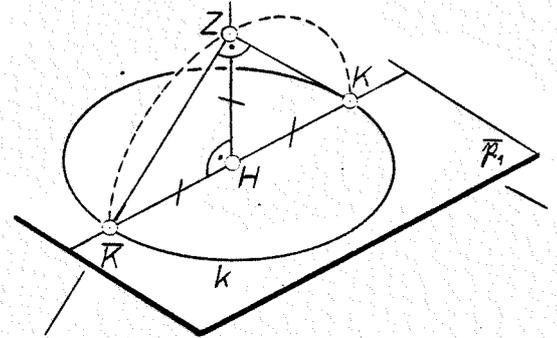
Satz 1.6.3: Bei einer Perspektive  $c$  ist das Bild  $(\pi^\perp)^{c\omega}$  der absoluten Polarität  $\pi^\perp$  das Antipolarsystem des Distanzkreises.

<sup>6a</sup>Für die folgenden Begriffsbildungen muß im euklidischen Raum  $\tilde{\Pi}$  ein Abstand mit Hilfe einer Eichsphäre erklärt sein. Da aber nur Aussagen vorkommen, die das Verhältnis zweier Längen, also insbesondere ihre Gleichheit betreffen, sind alle Begriffsbildungen von der Auswahl einer Eichsphäre unabhängig.

Die elementargeometrische Bezeichnung Distanz für Abstand entspricht nicht der Bezeichnung in (II,135).

Beweis. Nach Satz 1.5.4 ist  $(\pi^\perp)^{c/\omega}$  das Antipolarsystem eines Kreises.

Da  $H\bar{Z}$  orthogonal zu der zu  $\mathcal{K}$  parallelen Ebene durch  $Z$  ist, gibt  $H$  den Mittelpunkt von  $(\pi^\perp)^{c/\omega}$  ab. Es bleibt zu zeigen, daß auf jedem Durchmesser des Distanzkreises  $k$  die Punkte  $K$  und  $\bar{K}$  von  $k$  in  $(\pi^\perp)^{c/\omega}$  konjugiert sind, da dann bei jener hyperbolischen Polarität, welche das Produkt von  $(\pi^\perp)^{c/\omega}$  mit der Spiegelung an  $H$  ist, alle Punkte von  $k$  selbstkonjugiert sind.



Wegen  $\overline{KH} = \overline{H\bar{K}} = \overline{HZ}$  liegt  $Z$  auf einem Kreis mit dem Durchmesser  $(K, \bar{K})$  in der Ebene  $\{K\} \vee \{\bar{K}\} \vee \{Z\}$ ; aus dem Satz von THALES (II, 151) folgt  $Z\bar{K} \perp ZK$ .  $\square$

Für die konstruktive Behandlung benötigen wir einige Aussagen über das Antipolarsystem  $\pi$  eines Kreises  $k$  in einer euklidischen Ebene  $\mathcal{K}$  mit der absoluten Involution  $\pi^\perp$  auf der Ferngeraden  $u \subset \mathcal{K}$ .

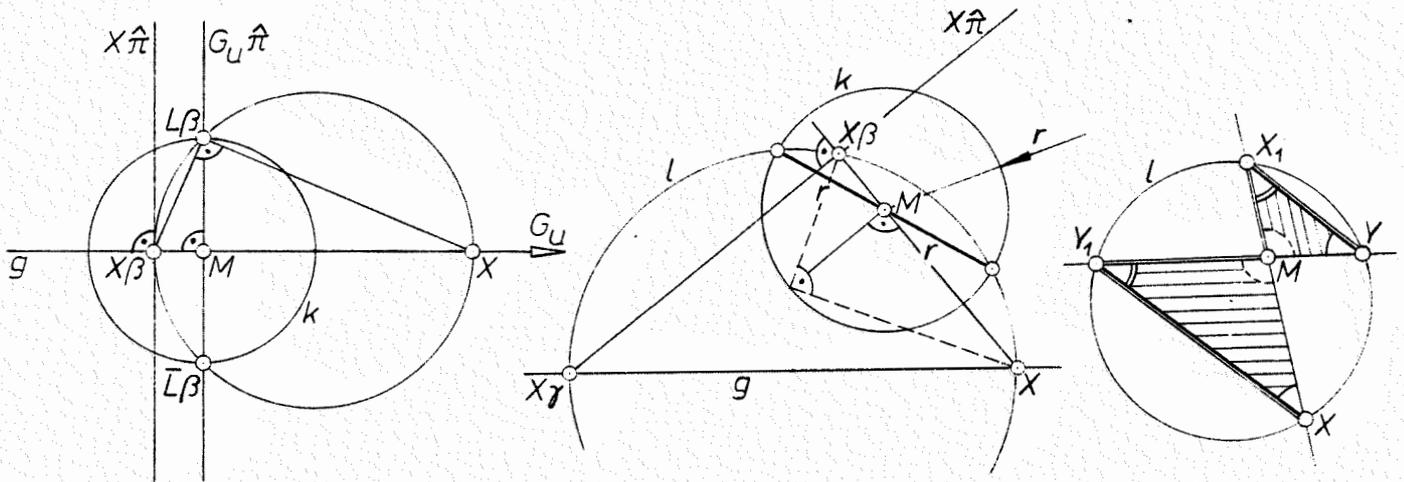
(I) Für einen Durchmesser  $g$  von  $k$  sind die Laguerrevertreter  $L_\beta, \bar{L}_\beta$  der elliptischen involutorischen Projektivität  $\beta$  in  $\pi$  konjugierter Punkte jene Punkte von  $k$ , die auf dem zu  $\bar{g}$  normalen Durchmesser liegen.

Beweis. Der Mittelpunkt  $M$  von  $k$  ist der Zentralpunkt von  $\beta$ , und die Schnittpunkte  $K, \bar{K}$  von  $g$  mit  $k$  sind in  $\beta$  zugeordnet. Die Behauptung folgt aus 1.6.4, Fn.6.  $\square$

Daraus folgt:

- (1)  $\beta$  kann mit Hilfe von in  $L_\beta \in k$  angebrachten "Rechtwinkelhaken" vervollständigt werden.
- (2) Sind  $X, X_\beta$  eigentliche Punkte des Durchmessers  $g$  von  $k$ , so schneidet der Kreis mit dem Durchmesser  $(X, X_\beta)$  den Kreis  $k$  in Gegenpunkten, nämlich in  $L_\beta$  und  $\bar{L}_\beta$  (vgl. 1.6.4, Fn.6).
- (3) Vervollständigung von  $\pi$ :  $M\hat{\pi} = u$ ; für  $G_u \in u$  ist  $G_u\hat{\pi}$  der zu  $MG_u =: g$  normale Durchmesser von  $k$  (die Spurpolarität von  $\pi$  auf  $u$  ist nämlich  $\pi^\perp$ ); für  $X \in \mathcal{K} \setminus \{M\}$  geht  $X\hat{\pi}$  durch den zu  $X$  in  $\pi$  konjugierten Punkt  $X_\beta$  auf  $MX =: g$  und ist zu  $g$  orthogonal ( $M, X, G_u$  sind kollinear, also  $u, X\hat{\pi}, G_u\hat{\pi}$  kopunktal).
- (4) Ist  $g$  eine eigentliche Gerade und  $\gamma$  die elliptische involutorische Projektivität in  $\pi$  konjugierter Punkte auf  $g$ , so schneidet für  $X, X_\gamma \notin u$  der Kreis mit dem Durchmesser  $(X, X_\gamma)$  den Kreis  $k$  in Gegenpunkten.

Beweis. Nach (1) ist dies für einen Durchmesser  $g$  von  $k$  richtig. Ist  $g$  kein Durchmesser, so geht der Kreis  $l$  über  $(X, X\beta)$  nach (3) und dem Satz von THALES (II,151) durch den Punkt  $\{X/\beta\} := XM \cap X\hat{\pi}$ , und nach (1) gilt nach dem Höhensatz  $\overline{XM} \cdot \overline{MX\beta} = r^2$ , wobei  $r$  der Radius von  $k$  ist. Somit ist  $r^2 > 0$  die Potenz<sup>7</sup> von  $M$  bezüglich  $l$ ; die durch  $M$  gehende kürzeste Sehne<sup>8</sup> von  $l$  ist daher ein Durchmesser von  $k$ .  $\square$



(II) Eine Polarität  $\pi$  in einer projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene  $\mathbb{R} \cup u$  ist genau dann das Antipolarsystem eines Kreises  $k$ , wenn in  $\pi$  ein Poldreieck aus eigentlichen Punkten existiert, dessen Höhenschnittpunkt<sup>9</sup> der Mittelpunkt  $M$  von  $\pi$  ist und in dem jede Höhe die gegenüberliegende Dreieckseite in einem Punkt zwischen den Dreiecksecken trifft<sup>10</sup>.

<sup>7</sup> Schneiden zwei Geraden durch  $M \notin l$  einen Kreis  $l$  in Punkten  $X, X_1$  bzw.  $Y, Y_1$ , so gilt  $\overline{MX} : \overline{MY} = \overline{MY} : \overline{MX_1}$ ; die nur von  $M$  und  $l$  abhängige Zahl  $\overline{MX} \cdot \overline{MX_1} > 0$  heißt die Potenz von  $M$  bezüglich  $l$ . Nach dem Peripheriewinkelsatz (II,162) gilt nämlich  $\sphericalangle X X_1, X Y_1 = \sphericalangle Y X_1, Y Y_1$  und  $\sphericalangle Y_1 X, Y_1 Y = \sphericalangle X_1 X, X Y$ , so daß die Dreiecke  $\{M, X, Y_1\}$  und  $\{M, Y, X_1\}$  ähnlich sind. Nach II,146 gilt dann  $\overline{MX} : \overline{MY} = \overline{MY_1} : \overline{MX_1}$ .

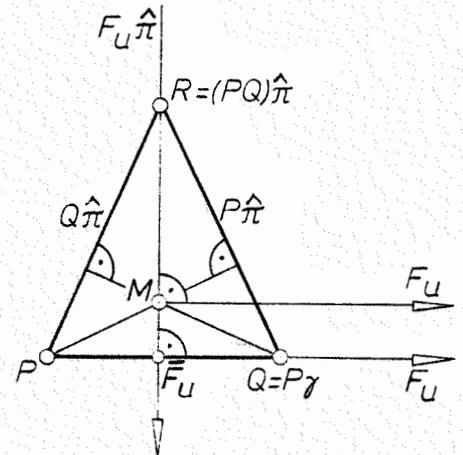
<sup>8</sup> Für einen Innenpunkt  $M$  von  $l$ , der bezüglich  $l$  die Potenz  $r^2 > 0$  besitzt, ist die Länge jeder Sehne gleich  $x + r^2/x$  mit  $x := \overline{MX} > 0$  für  $X \in l$ . Da  $l \subset \mathbb{R}^2$  kompakt und  $M \notin l$  ist, besitzt die stetige Funktion  $X \in l \mapsto x + r^2/x$  mit  $x = \overline{MX} > 0$  ein Minimum, und dieses wird für  $x=r$  angenommen.

<sup>9</sup> Nach II,152 sind in einer euklidischen Ebene die drei Höhen eines Dreiecks kopunktal.

<sup>10</sup> In der Anschauungsebene bedeutet diese Aussage, daß das Poldreieck spitzwinkelig ist.

Beweis. (a) Nach (3) ist in dem Antipolarsystem eines Kreises  $k$  der Mittelpunkt  $M$  der Höhenschnittpunkt jedes Poldreiecks  $\{P, Q, R\} \subset \hat{\mathcal{P}}$  von  $\pi$  und die Höhe  $RM$  die Polare  $F_u \hat{\pi}$  des Fernpunkts  $F_u$  von  $PQ$ . Dann fällt der Höhenfußpunkt  $\bar{F}_u$  auf  $PQ$  in den Zentralpunkt der von  $\pi$  auf  $PQ$  bestimmten involutorischen Projektivität konjugierter Punkte; wegen  $Q = P\gamma$  gilt  $DV(P, Q, \bar{F}_u, F_u) = TV(P, Q, \bar{F}_u) < 0$  nach 1.5.6, Fn.13, da  $\gamma$  elliptisch ist; damit liegt  $\bar{F}_u$  zwischen  $P$  und  $Q$  (vgl. 1.5.2). Analoges gilt für jede Seite des Poldreiecks.

(b) Ist der Höhenschnittpunkt des Poldreiecks  $\{P, Q, R\} \subset \hat{\mathcal{P}}$  der Mittelpunkt von  $\pi$ , so ist die Höhe  $RM$  die Polare des Fernpunkts  $F_u$  von  $PQ$ , da aus  $\{F_u\} = u \cap PQ$  folgt  $F_u \hat{\pi} = u \hat{\pi} \vee (PQ) \hat{\pi} = MR$ . Damit ist  $F_u$  in  $\pi$  auf  $u$  konjugiert zum Fernpunkt der zu  $PQ$  orthogonalen Höhe. Wiederholung für eine zweite Seite des Poldreiecks lehrt, daß die Spurpolarität von  $\pi$  auf  $u$  mit der absoluten Involution  $\pi^\perp$  übereinstimmt. Weiter ist der Fußpunkt  $\bar{F}_u$ , der Höhe  $RM$  auf  $PQ$ , der nach Voraussetzung zwischen  $P$  und  $Q$  liegt, der Zentralpunkt der involutorischen Projektivität  $\gamma$  in  $\pi$  konjugierter Punkte auf  $PQ$  und somit  $\gamma$  nach 1.5.6, Fn.13 elliptisch; da Analoges für die anderen Seiten des Poldreiecks  $\{P, Q, R\}$  gilt, ist  $\pi$  nach 1.5.7, Fn.14 elliptisch.  $\square$



Zur Lösung der Maßaufgaben in einem Zentralriß benötigt man nach Satz 1.6.3 und 1.6.4 den Distanzkreis  $k$  und den Zentralriß zweier Punkte  $O, E \in \hat{\mathcal{P}} \setminus \{Z\}$  mit  $\overline{OE} = 1$  und  $O^c \neq E^c$ ; da bei einer Perspektive  $c: \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \hat{\mathcal{P}}_1$  jede Strecke in  $\hat{\mathcal{P}}_1$  unverzerrt erscheint, kann man auf die zusätzliche Angabe des Zentralrisses einer Einheitsstrecke verzichten<sup>11</sup>.

(M1a):  $XY$  ist nicht projizierend und hat denselben Fluchtpunkt  $G_u^c$  wie eine Gerade  $g \subset \hat{\mathcal{P}}_1$ . Dann ist  $XY$  eine Hauptgerade parallel  $g$  und  $G_u^c$  ein Fernpunkt.

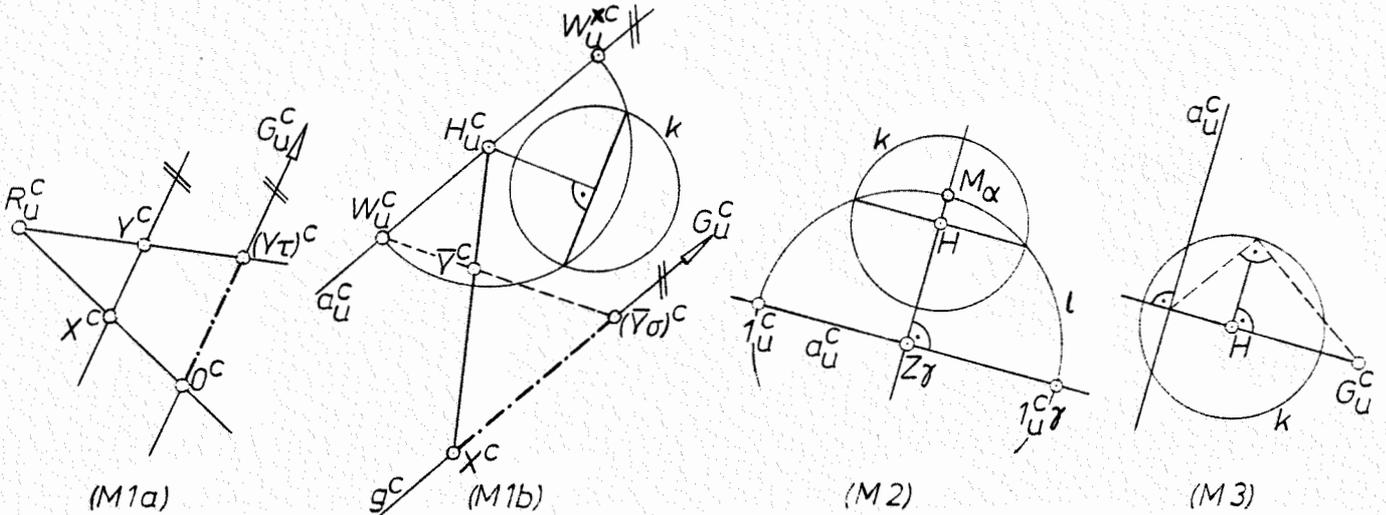
Man erhält  $\overline{XY}$  unter Benützung des Schiebfluchtpunktes  $R_u^c$  mit  $\{R_u\} = X O \omega$  für  $\tau: X \rightarrow O \in g$ . In der euklidischen Bildebene  $\hat{\mathcal{P}}_1 \subset \hat{\mathcal{P}}$  ist  $O^c \vee \tau^c = XY$ .

(M1b): Ist  $XY$  nicht projizierend und keine Hauptgerade, so genügt es nach 1.6.4,  $X \in \hat{\mathcal{P}}_1$  und  $Y \notin \hat{\mathcal{P}}_1$  anzunehmen. Eine Gerade  $g \subset \hat{\mathcal{P}}_1$  durch  $X$  ist Spur der Ebene  $\hat{\mathcal{P}}_1 = g \vee h$  mit  $h := XY$ , deren Fluchtgerade  $d_u^c$

<sup>11</sup> Die folgenden Konstruktionen sind aus dem Elementarunterricht der Perspektive geläufig und werden dort durch räumliche Deutung gewonnen.

durch  $H_u^c$  und den Fernpunkt  $G_u^c$  geht, also zu  $g$  parallel ist. Die Punkte  $W_u^c, W_u^{xc}$  sind jene Punkte von  $a_u^c$ , die in der Antipolarität des Distanzkreises  $k$  auf  $a_u^c$  konjugiert und harmonisch zu  $G_u^c$  und  $H_u^c$ , also symmetrisch zu  $H_u^c$  liegen. Damit gehören nach (4) die Punkte  $W_u^c, W_u^{xc}$  jenem Kreis um  $H_u^c$  an, der den Distanzkreis  $k$  in Gegenpunkten schneidet. Da auf  $g^c$  die Länge  $\overline{XY}$  abzulesen ist, sind die Punkte  $W_u^c, W_u^{xc}$  als Meßpunkte von  $XY$  zu bezeichnen.

(M2): Der Fußpunkt der Normalen aus dem Hauptpunkt  $H$  auf die Fluchtgerade  $a_u^c \neq u'$  der nicht projizierenden Ebene  $\alpha$  einer Figur  $\mathcal{F}$  ist der Zentralpunkt  $Z_\gamma$  der elliptischen involutorischen Projektivität  $\gamma: a_u^c \rightarrow a_u^c$  von in  $(\pi^\perp)^{c/w}$  konjugierten Punkten auf  $a_u^c$ .

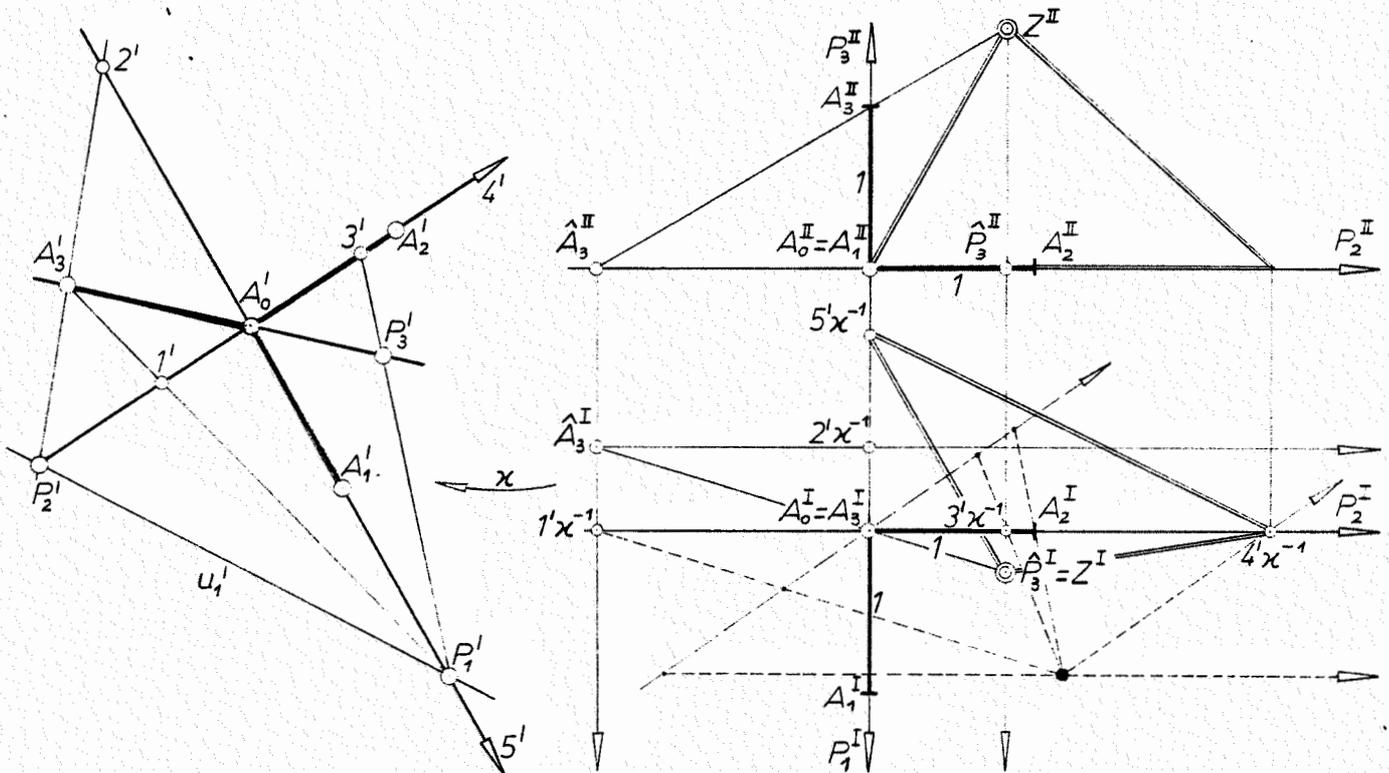


Da nach (4) jener Kreis  $l$  um  $Z_\gamma$ , der den Distanzkreis  $k$  nach Gegenpunkten schneidet, aus  $a_u^c$  in  $(\pi^\perp)^{c/w}$  konjugierte Punkte ausschneidet, liegt der Meßpunkt  $M_\alpha$  als Laguerrevertreter von  $\gamma$  auf  $l$  und auf  $Z_\gamma H$ . Wählt man als Achse der Maßkollineation  $\mu_\alpha$  den Zentralriß einer von der Spur verschiedenen Hauptgeraden bzw. der Spur von  $\alpha$ , so ist  $\mathcal{F}^c \mu_\alpha$  zu  $\mathcal{F}$  ähnlich bzw. kongruent.

Für  $a_u^c = u'$  ist  $\alpha$  eine Hauptebene. Da  $(\pi^\perp)^{c/w}$  die Antipolarität eines Kreises in der euklidischen Bildebene mit der absoluten Involution  $\pi^\perp$  ist, ist  $c|\tilde{\alpha}; \tilde{\alpha} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_1$  dann eine Ähnlichkeit bzw. eine Kongruenz, je nachdem  $\alpha \neq \tilde{\mathcal{F}}_1$  bzw.  $\alpha = \tilde{\mathcal{F}}_1$  gilt.

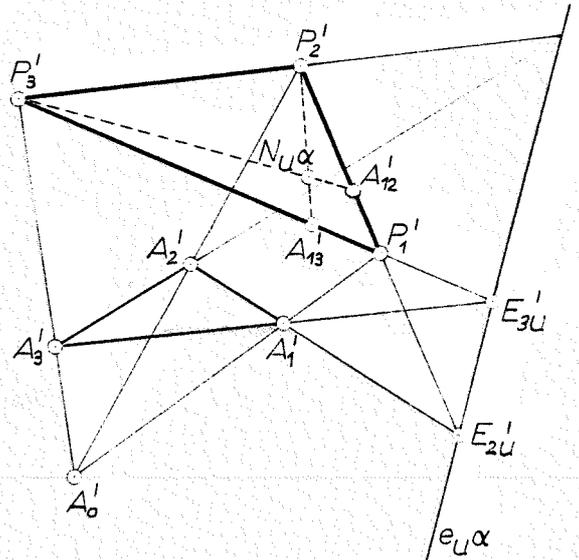
(M3): Die Vervollständigung des Antipolarsystems  $(\pi^\perp)^{c/w}$  des Distanzkreises  $k$  gemäß (3) liefert die elementare Konstruktion der Fluchtgeraden  $a_u^c$  der zu den Geraden mit dem Fluchtpunkt  $G_u^c$  normalen Ebenen.

**1.6.6** Sei  $\mathcal{C} = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$  eine kartesische Basis eines dreidimensionalen euklidischen Raumes  $\bar{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  mit der absoluten Polarität  $\pi^\perp$  und  $\{A_0', A_1', A_2', P_1', P_2', P_3'\}$  eine kartesische axonometrische Grundfigur in einer reellen projektiven Ebene  $\Pi'$  (vgl. 1.5.8). Für  $P_3' \notin P_1'P_2' =: u_1' \subset \mathcal{C}'$  besitzt die dadurch bestimmte Axonometrie  $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  einen Ausnahmepunkt  $Z \notin \omega$ , von dem gemäß 1.4.6 die Normalprojektion auf  $\{A_0\} \vee \{A_1\} \vee \{A_2\}$  (Grundriß) und die Normalprojektion auf  $\{A_0\} \vee \{A_2\} \vee \{A_3\}$  (Aufriß) gefunden werden kann (der Grundriß bzw. Aufriß ist in der Abb. mit dem Zeiger I bzw. II versehen): Ist  $u_1$  die Ferngerade der Grundrißebene  $\mathcal{C}_1 = \{A_0\} \vee \{A_1\} \vee \{A_2\} \subset \mathcal{P}$  und  $\kappa: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}'$  die durch  $A_j \kappa = A_j'$  ( $j=0,1,2$ ),  $u_1 \kappa = u_1'$  festgelegte Kollineation, so ist  $\{Z\} = A_3 \hat{A}_3 \cap P_3 \hat{P}_3$  mit  $\hat{A}_3 = A_3 \kappa^{-1}$ ,  $\hat{P}_3 = P_3 \kappa^{-1}$ . Die Punkte  $\hat{A}_3, \hat{P}_3$  können unter Verwendung von Hilfspunkten  $1', 2', 3' \in \mathcal{P}'$  mit Hilfe von Doppelverhältnisübertragungen gefunden werden (in der Abb. ist nur die Gerade  $A_0'A_2'$  kongruent in den Grundriß mit  $A_0' \mapsto A_0^I$  übertragen und der Meßpunkt dieser Geraden benützt).



Ist auch in  $\Pi'$  eine Ferngerade  $u'$  ausgezeichnet (in der Abb. die Ferngerade der Zeichenebene), so ist  $\tilde{\alpha}: \mathcal{P} = \mathcal{P} \setminus \omega \rightarrow \mathcal{P}' = \mathcal{P}' \setminus u'$  nach 1.4.7 affin zu einem Zentralriß in einer nichtprojizierenden Ebene  $\bar{\mathcal{P}}_1 \subset \mathcal{P}$  mit der Ferngeraden  $(u' \tilde{\alpha}^{-1}) \cap \omega$ . Verbindet man die Gerade  $u' \kappa^{-1} \subset \mathcal{P}_1$ , welche sich unter Verwendung der Punkte  $\{4'\} = u' \cap A_0'A_2'$  und  $\{5'\} = u' \cap A_0'A_1'$  mit Hilfe von Doppelverhältnisübertragung ergibt, mit  $Z$ , so erhält man die zu  $\bar{\mathcal{P}}_1$  parallele projizierende Ebene.

Für  $P_3' \notin P_1'P_2'$  ist  $\{P_1', P_2', P_3'\}$  ein Poldreieck der elliptischen Polarität  $(\pi^\perp)^{\alpha/\omega}$ . Nach 1.5.8 sind die Punkte  $\{E_{ku}'\} = A_1'A_2' \cap P_1'P_k'$  ( $k=2,3$ ) die axonometrischen Bilder der Fernpunkte der Geraden  $e_k = A_1A_k$  in der Einheitsebene  $\varepsilon := \{A_1\} \vee \{A_2\} \vee \{A_3\}$  von  $\mathcal{C}$  und liegen auf der Fluchtgeraden  $e_u\alpha$  von  $\varepsilon$ . Bilden die Punkte  $A_1', A_2', A_3'$  ein Dreieck, so ist dieses zum Dreieck  $\{P_1', P_2', P_3'\}$  bezüglich  $A_0'$  perspektiv und  $e_u\alpha$  ist die Desarguesachse dieser beiden Dreiecke; für  $A_3' \in A_1'A_2'$  gilt  $e_u\alpha = A_1'A_2'$ . Nach 1.5.8 liegt der durch  $H(P_1, P_k; E_{ku}, A_{1k})$  ( $k=2,3$ ) bestimmte Punkt  $A_{1k} \in P_1P_k$  in der zu  $e_k$  normalen Ebene  $\nu_k$  durch  $A_0$ , die auch durch  $P_1$  ( $1 \in \{2,3\}, 1 \neq k$ ) geht. Damit ist  $\nu_2 \cap \nu_3 \cap \omega =: \{N_u\}$  der Fernpunkt der zur Einheitsebene  $\varepsilon$  normalen Geraden durch  $A_0$ . Wegen  $\{N_u\alpha\} = P_3'A_{12} \cap P_2'A_{13}$  und  $H(P_1, P_k; E_{ku}, A_{1k})$  ( $k=2,3$ ) ist  $N_u\alpha$  der Dreieckspol von  $e_u\alpha$  bezüglich des Dreiecks  $\{P_1', P_2', P_3'\}$ .



**Satz 1.6.4:** Bei einer kartesischen axonometrischen Grundfigur

$\{A_0', A_1', A_2', P_1', P_2', P_3'\}$  mit  $P_3' \notin P_1'P_2'$  in einer reellen projektiven Ebene  $\pi'$  ist das Bild  $(\pi^\perp)^{\alpha/\omega}$  der absoluten Polarität  $\pi^\perp$  und das Paar  $(N_u\alpha, e_u\alpha)$  als Pol und Polare festgelegt, wobei  $e_u\alpha$  die Desarguesachse der Dreiecke  $\{P_1', P_2', P_3'\}$  und  $\{A_1', A_2', A_3'\}$  bzw. die Gerade  $A_1'A_2'$  für  $A_3' \in A_1'A_2'$  und  $N_u\alpha$  der Dreieckspol von  $e_u\alpha$  bezüglich  $\{P_1', P_2', P_3'\}$  ist.

Zur Lösung der Maßaufgaben stehen noch die Punkte  $A_0', A_1'$  mit  $A_0' \neq A_1'$ ,  $A_0'A_1' = 1$  zur Verfügung.

**1.6.7** Ist  $\tilde{\pi}' = \pi' \setminus u'$  eine euklidische Ebene mit der absoluten Involution  $\pi^\perp$ , so ist nach Satz 1.5.4 und Satz 1.5.6 die Axonometrie  $\alpha: \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}'$  mit  $P_3' \notin P_1'P_2'$  genau dann ähnlich zu einem Zentralriß in einer zu  $\{Z\} \vee u'\kappa^{-1}$  parallelen Ebene, wenn die nach Satz 1.6.4 bestimmte Polarität  $(\pi^\perp)^{\alpha/\omega}$  das Antipolarsystem eines Kreises in  $\tilde{\pi}'$  ist. Für  $\{P_1', P_2', P_3'\} \subset \tilde{\mathcal{C}}'$  muß nach 1.6.5, (II) dazu der Höhenschnittpunkt von  $\{P_1', P_2', P_3'\}$  der Mittelpunkt von  $(\pi^\perp)^{\alpha/\omega}$  sein und der Fußpunkt der Höhe auf  $P_1'P_k'$  ( $k=2,3$ ) in  $\tilde{\pi}'$  zwischen  $P_1'$  und  $P_k'$  liegen; ist einer oder sind zwei der Punkte  $P_1', P_2', P_3'$  Fernpunkte von  $\pi'$ , so muß die durch  $(\pi^\perp)^{\alpha/\omega}$  bestimmte involutorische Projektivität konjugierter Punkte auf  $u'$  mit  $\pi^\perp$  übereinstimmen und auf einer weiteren (und dann auch der dritten) Dreieckseite elliptisch sein.

Wir behandeln die Frage, was von einer kartesischen axonometrischen Grundfigur mit  $P_3' \notin P_1'P_2'$  in einer euklidischen Ebene  $\overset{\circ}{\pi}'$  vorgegeben werden kann, wenn man verlangt, daß das axonometrische Bild ähnlich zu einem Zentralriß ist.

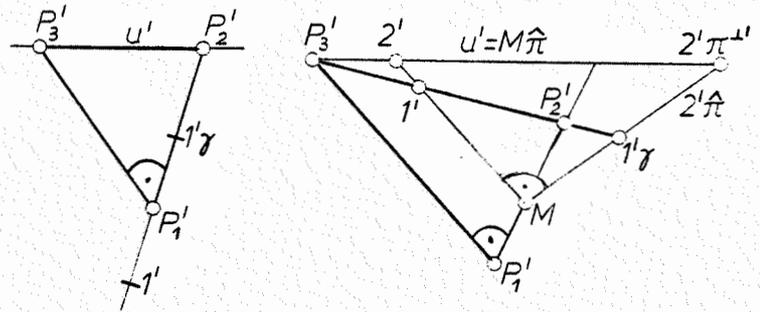
Satz 1.6.5: Gibt man von einer kartesischen axonometrischen Grundfigur in einer euklidischen Ebene  $\overset{\circ}{\pi}' = \overset{\circ}{\pi}' \setminus u'$  die Punkte  $A_0', A_1', P_1', P_2', P_3'$  so vor, daß  $\{P_1', P_2', P_3'\}$  ein Dreieck in  $\overset{\circ}{\mathcal{K}}'$  ist, in dem der Fußpunkt jeder Höhe zwischen zwei Dreieckspunkten liegt, so kann das Punktepaar  $A_2', A_3'$  vierdeutig so ergänzt werden, daß das axonometrische Bild ähnlich zu einem Zentralriß ist.

Beweis. Der Punkt  $N_u \alpha$  und die Gerade  $e_u \alpha$  müssen in  $\overset{\circ}{\mathcal{K}}'$  so eingepaßt werden, daß sie einerseits Pol und Polare in jener Antipolarität  $(\pi^\perp)^\alpha \setminus u'$  eines Kreises sind, welche durch das Poldreieck  $\{P_1', P_2', P_3'\}$  und den Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks als Mittelpunkt festgelegt ist, und andererseits dreieckspolar zu  $\{P_1', P_2', P_3'\}$  liegen. Die Punkte  $\{E_{2u'}\} = e_u \alpha \cap P_1'P_2'$  und  $\{A_{1u'}\} = P_3'N_u \alpha \cap P_1'P_2'$  sind daher einerseits gekoppelt in der involutorischen Projektivität in  $(\pi^\perp)^\alpha \setminus u'$  konjugierter Punkte auf  $P_1'P_2'$  und andererseits harmonisch zu  $P_1'$  und  $P_2'$ . Nach 1.5.2, Fn.9 existiert genau ein Paar solcher Punkte. Da jeder dieser beiden Punkte als  $E_{2u'}$  gewählt werden kann und eine analoge Überlegung für  $P_1'P_3'$  gilt, stehen vier Geraden  $e_u \alpha$  zur Verfügung. Zu jeder solchen Geraden sind  $N_u \alpha \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}'$  und damit nach Satz 1.6.4 auch  $(\pi^\perp)^\alpha \setminus u'$  und die Punkte  $A_2', A_3'$  eindeutig bestimmt.  $\square$

Ist  $\{P_1', P_2', P_3'\}$  ein Dreieck in der euklidischen Ebene  $\overset{\circ}{\pi}'$ , in dem der Fußpunkt jeder Höhe zwischen zwei Dreieckspunkten liegt, so existiert genau ein Antipolarsystem  $\pi$  eines Kreises mit  $\{P_1', P_2', P_3'\}$  als Poldreieck, und  $\pi$  ist festgelegt, wenn man den Höhenschnittpunkt von  $\{P_1', P_2', P_3'\}$  als Mittelpunkt von  $\pi$  anspricht. Sind dagegen zwei Dreieckspunkte, etwa  $P_2', P_3'$  Fernpunkte von  $\overset{\circ}{\pi}'$ , so muß die involutorische Projektivität konjugierter Punkte auf der Ferngeraden  $u' = P_2'P_3'$  notwendig mit der absoluten Involution  $\pi^\perp$  von  $\overset{\circ}{\pi}'$  übereinstimmen, damit  $\{P_1', P_2', P_3'\}$  Poldreieck des Antipolarsystems eines Kreises sein kann; insbesondere muß notwendig  $P_1'P_2' \perp P_1'P_3'$  gelten. Um  $\pi$  festzulegen, können noch etwa auf  $P_1'P_2'$  zwei in  $\pi$  konjugierte Punkte  $1', 1'' \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}'$  beliebig so vorgegeben werden, daß der Zentralpunkt  $P_1'$  zwischen ihnen liegt. Ist schließlich genau ein Dreieckspunkt

etwa  $P_3'$  ein Fernpunkt von  $\hat{\pi}'$ , so muß ebenfalls die involutorische Projektivität konjugierter Punkte auf  $u'$  mit  $\pi^L$  übereinstimmen, also insbesondere  $P_1'P_2' \perp P_1'P_3'$

nach 1.6.5, (3) gelten. Um ein Antipolarsystem  $\pi$  eines Kreises mit diesem Poldreieck festzulegen, kann man auf  $P_1'P_2'$  den Mittelpunkt  $M$  von  $\pi$  beliebig zwischen  $P_1'$  und  $P_2'$  vorgeben, da dann auch die involutorische Projektivität  $\gamma$  in  $\pi$



auf  $P_2'P_3'$  konjugierter Punkte mit Hilfe von  $M$  und  $\pi^L$  ergänzt werden kann und  $\gamma$  wie  $\pi^L$  elliptisch ist. Da die weiteren Überlegungen wie bei Satz 1.6.5 verlaufen, gilt:

**Satz 1.6.6:** Gibt man von einer kartesischen axonometrischen Grundfigur in einer euklidischen Ebene  $\hat{\pi}' = \pi' \setminus \omega'$  die Punkte  $A_0', A_1', P_1', P_2', P_3'$  so vor, daß  $\{P_1', P_2', P_3'\}$  ein Dreieck mit der Ferngeraden  $P_2'P_3'$  bzw. genau einem Fernpunkt  $P_3'$  ist und gilt  $P_1'P_2' \perp P_1'P_3'$ ; so kann nach zusätzlicher Vorgabe eines Paares in  $(\pi^L)^{\alpha/\omega}$  konjugierter Punkte, zwischen denen  $P_1'$  liegt, bzw. des Mittelpunkts von  $(\pi^L)^{\alpha/\omega}$  auf  $P_1'P_2'$  zwischen  $P_1'$  und  $P_2'$  das Punktepaar  $A_2', A_3'$  vierdeutig so ergänzt werden, daß das axonometrische Bild ähnlich zu einem Zentralriß ist.

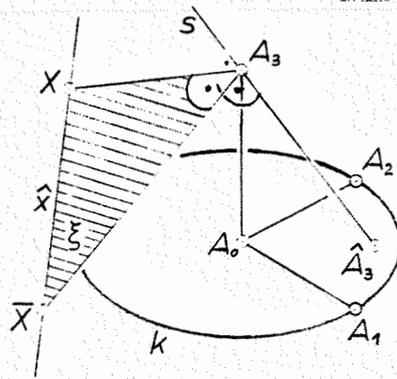
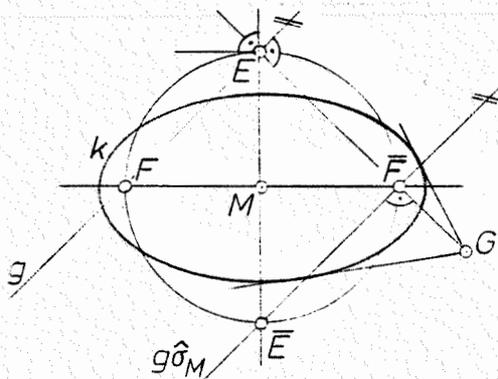
**1.6.8** Eine lineare Abbildung aus einem dreidimensionalen euklidischen Raum  $\hat{\pi} = \pi \setminus \omega$  mit der absoluten Polarität  $\pi^L$  auf eine reelle projektive Ebene  $\pi'$  mit einem einpunktigem Ausnahmeraum  $Z \in \omega$  ist nach Satz 1.3.7 das Produkt einer Parallelprojektion  $\rho: \mathcal{P} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}_1$  mit Zentrum  $Z \in \omega$  auf eine Ebene  $\bar{\mathcal{P}}_1 \neq \omega$  und einer Kollineation  $\kappa: \bar{\mathcal{P}}_1 \rightarrow \mathcal{P}'$ . Die Fernebene  $\omega$  ist projizierend, also  $\omega \cap \mathcal{P}' =: u, \varphi \subset \mathcal{P}'$  eine Gerade, welche der lineare Riß  $u, \varphi$  der Ferngeraden von  $\bar{\mathcal{P}}_1$  ist. Nach 1.5.5, Fn.11 existiert kein(nichtausgeartetes)Bild der absoluten Polarität  $\pi^L$ , welches zur Lösung der Maßaufgaben herausgezogen werden kann.

Ist  $\hat{\pi}' = \pi' \setminus \omega'$  eine reelle affine Ebene, so ist nach Satz 1.5.2 die lineare Abbildung mit  $Z \in \omega$  stets das Produkt einer Normalprojektion und einer Affinität. Wird  $\hat{\pi}'$  durch Vorgabe einer absoluten Involution  $\pi^L$  zu einer euklidischen Ebene, so kann diese Affinität speziell eine Ähnlichkeit sein. Es gilt:

**Satz 1.6.7:** Eine lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eines dreidimensionalen euklidischen Raumes  $\tilde{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  auf eine euklidische Ebene  $\tilde{\Pi}' = \Pi' \setminus \omega'$  mit einem Ausnahmefernpoint  $Z \in \omega$  ist genau dann das Produkt einer Normalprojektion und einer Ähnlichkeit, wenn eine kartesische Basis  $\mathcal{C} = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$  in  $\tilde{\Pi}$  so existiert, daß  $\{A_0\varphi, A_1\varphi, A_2\varphi\}$  nicht kollinear und  $A_3\varphi$  ein Brennpunkt<sup>12</sup> des Antipolarsystems jener Ellipse  $k\varphi$  ist, welche die konjugierten Halbmesser  $(A_0\varphi, A_1\varphi), (A_0\varphi, A_2\varphi)$  besitzt.

**Beweis:** Wir betrachten zunächst eine Parallelprojektion  $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  auf eine Ebene  $\tilde{\Pi}'_1$  von  $\Pi$ .

Ist  $\{A_0\rho, A_1\rho, A_2\rho, A_3\rho\}$  mit  $\{A_0\rho, A_1\rho, A_2\rho\}$  nichtkollinear der Parallelriß einer kartesischen Basis  $\mathcal{C} = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ , so sind  $(A_0\rho, A_1\rho), (A_0\rho, A_2\rho)$  konjugierte Halbmesser jener Ellipse  $k\rho$ , welche der Parallelriß des Kreises  $k$  um  $A_0$  durch  $A_1$  und  $A_2$ , also des Distanzkreises von  $A_3$  bezüglich der Grundrißebene  $\{A_0\} \vee \{A_1\} \vee \{A_2\}$  ist. Nach 1.6.5 schneidet der Sehstrahl  $s$  durch  $A_3$  die Grundrißebene im Antipol  $\hat{A}_3$  der Schnittgeraden der Grundrißebene mit der



<sup>12</sup>Ein Punkt  $F$  einer euklidischen Ebene  $\tilde{\Pi}$  heißt Brennpunkt einer Polarität  $\pi$  in der projektiv abgeschlossenen Ebene  $\tilde{\Pi} \cup \hat{u}$ , wenn die involutorische Projektivität in  $\pi$  konjugierter Geraden um  $F$  eine Rechtwinkelinvolution ist, also  $F\hat{X} \perp F\bar{X}$  für jede zwei in  $\pi$  konjugierte Punkte  $X, \bar{X}$  auf  $F\hat{\pi}$  gilt. Ist  $\pi$  Polarsystem eines Kegelschnitts  $k$ , so sind die Brennpunkte von  $\pi$  nach (II, 154) genau die Brennpunkte von  $k$ . Im Falle einer elliptischen Polarität  $\pi$ , also des Antipolarsystems einer Ellipse  $k$ , existieren zwei Brennpunkte  $E, \bar{E}$ , und diese liegen auf der Nebenachse von  $k$ , sowie auf einem mit  $k$  konzentrischen Kreis durch die Brennpunkte  $F, \bar{F}$  von  $k$ ; ist  $k$  speziell ein Kreis, ist der Mittelpunkt von  $k$  der einzige Brennpunkt von  $\pi$ . Existiert nämlich ein vom Mittelpunkt  $M$  verschiedener Brennpunkt  $E$ , und ist  $\hat{\sigma}_M$  die Spiegelung an  $M$ , so ist wegen  $\sigma_M \pi = \pi \hat{\sigma}_M^*$  (II, 93) und der Winkeltreue von  $\hat{\sigma}_M$  (II, 140) auch  $\bar{E} := E \hat{\sigma}_M$  ein Brennpunkt; die Gerade  $E\bar{E}$  ist notwendig eine Achse von  $k$ , da die zu  $E\bar{E}$  orthogonalen Geraden durch  $E$  und  $\bar{E}$  beide zu  $E\bar{E}$  konjugiert sind. Damit liegen alle Brennpunkte von  $\pi$  auf genau einer Achse der Ellipse  $k$  mit dem Polarsystem  $\pi_k$ . Liegt  $E$  auf der Nebenachse, so ist wegen  $\pi = \pi_k \sigma_M^* = \sigma_M \pi_k$  mit  $g := EF_0$  dann  $g\hat{\pi} = g\hat{\sigma}_M \hat{\pi}_k =: \hat{G}$ , wobei  $g\hat{\sigma}_M$  durch  $\bar{F}$  geht und zu  $\bar{F}G$  orthogonal ist; die zu  $g$  in  $\pi$  konjugierte Gerade  $EG$  ist daher genau dann zu  $g$  orthogonal, wenn  $E$  auf  $\bar{F}G$  liegt (vgl. Figur).

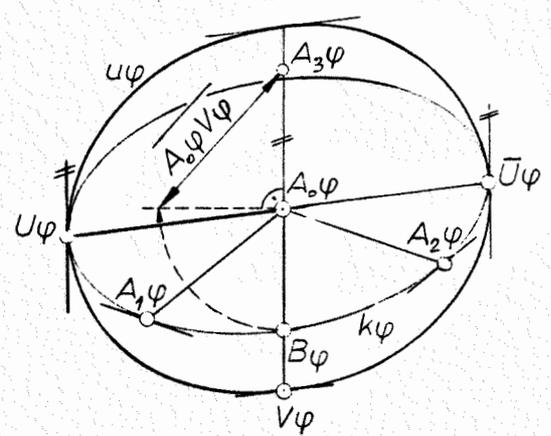
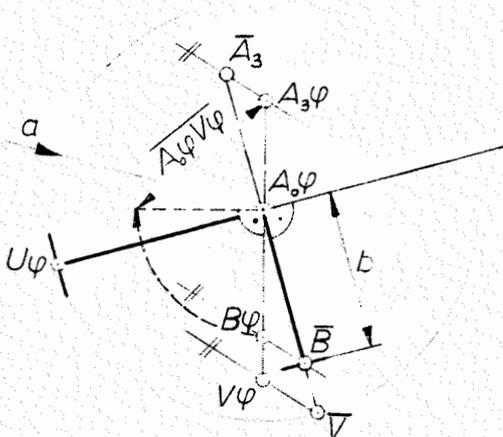
zu  $s$  orthogonalen Ebene  $\mathcal{F}$  durch  $A_3$ , und zwei Punkte  $X, \bar{X}$  von  $\hat{x}$  sind genau dann im Antipolarsystem  $\pi$  von  $k$  konjugiert, wenn  $A_3^{\circ}X \perp A_3^{\circ}\bar{X}$  gilt.

Die Projektion  $p$  ist genau dann eine Normalprojektion, wenn  $\mathcal{F}$  eine Hauptebene ist, was durch  $A_3^{\circ}X^p \perp A_3^{\circ}\bar{X}^p$  für jedes Paar  $(X, \bar{X})$  in  $\pi$  konjugierter Punkte auf  $\hat{x}$  gekennzeichnet wird; die Achse der Perspektivität  $p|_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \rightarrow \bar{\mathcal{F}}$  ist dann nämlich die gemeinsame Ferngerade der beiden parallelen Ebenen. Da die Perspektivität  $p|_{(\{A_0\} \vee \{A_1\} \vee \{A_2\})} \rightarrow \bar{\mathcal{F}}$  ein Fernzentrum besitzt, also eine Parallelperspektivität und damit mittelpunkttreu ist, ist nach 1.5.1 das Bild des Antipolarsystems  $\pi$  des Kreises  $k$  unter  $p|_{(\{A_0\} \vee \{A_1\} \vee \{A_2\})}$  das Antipolarsystem der Ellipse  $k^p$ . Genau im Falle einer Normalprojektion gilt also  $A_3^{\circ}X^p \perp A_3^{\circ}\bar{X}^p$  für irgend zwei im Antipolarsystem von  $k^p$  konjugierte Punkte  $X^p, \bar{X}^p$  auf der Antipolaren  $\hat{x}^p$  von  $A_3^p$ .

Die in Satz 1.6.7 genannte Bedingung bleibt bei Anwendung einer Ähnlichkeit erhalten. □

Gilt insbesondere  $A_0\varphi = A_3\varphi$ , so ist somit  $\varphi$  genau dann Produkt einer Normalprojektion und einer Ähnlichkeit, wenn die involutorische Projektivität konjugierter Durchmesser der Ellipse  $k_\varphi$  die Rechtwinkelinvolution und daher  $k_\varphi$  ein Kreis ist; genau dann ist  $\{A_0\varphi, A_1\varphi, A_2\varphi\}$  eine kartesische Basis in  $\bar{\mathcal{R}}_1$ .

Die Sphäre  $\Phi$  um  $A_0$  durch  $A_1, A_2, A_3$  besitzt genau dann einen kreisförmigen scheinbaren Umriß  $u_\varphi$ , wenn der lineare RiB zu einer Normalprojektion ähnlich ist. Falls die im Satz 1.6.7 ausgesprochene Bedingung nicht gilt, ist  $u_\varphi$  eine Ellipse, die für  $A_0\varphi = A_3\varphi$  mit  $k_\varphi$  übereinstimmt, da  $k$  dann der wahre Umriß  $u$  von  $\Phi$  ist. Zur Konstruktion der Ellipse  $u_\varphi$  benützen wir eine perspektive Affinität  $\eta: \bar{\mathcal{F}} \rightarrow \bar{\mathcal{F}}'$ , welche  $k_\varphi$  in eine Ellipse  $\bar{k} := k_\varphi\eta$  so überführt, daß  $\bar{A}_3 := A_3\varphi\eta$  ein Brennpunkt des Antipolarsystems  $\bar{\pi}$  von  $\bar{k}$  ist; in dieser affinen Hilfsfigur ist  $u_\varphi\eta$  dann ein Kreis.



Die Achse von  $\tilde{\eta}$  sei der zu  $A_0\varphi A_3\varphi$  konjugierte Durchmesser  $A_0\varphi U\varphi$  von  $k\varphi$ , und ein Punkt  $\{B\varphi\} \in k\varphi \cap A_0\varphi A_3\varphi$  soll in einen Nebenscheitel  $\bar{B}$  von  $\bar{k}$  übergehen. Dann erhält man die Fixgeraden von  $\tilde{\eta}$  wie folgt (vgl. Figur): Ist  $V\varphi \in A_0\varphi A_3\varphi$  mit

$$(1) \quad \overline{V\varphi A_0\varphi}^2 = \overline{B\varphi A_0\varphi}^2 + \overline{A_0\varphi A_3\varphi}^2,$$

so ist  $A_0\varphi U\varphi = A_0\varphi \bar{V}$  mit  $\bar{V} := V\varphi \tilde{\eta}$  die halbe Hauptachsenlänge  $a$  von  $\bar{k}$ ; dann gilt unter Verwendung der halben Nebenachsenlänge  $b$  von  $\bar{k}$  nämlich  $A_0\varphi A_3\varphi : A_0\varphi B\varphi : (\overline{B\varphi A_0\varphi}^2 + \overline{A_0\varphi A_3\varphi}^2)^{1/2} = A_0\varphi \bar{A}_3 : b : a$ , also  $\overline{A_0\varphi \bar{A}_3}^2 = a^2 - b^2$ .

Damit ist die Ellipse  $u\varphi$  durch die konjugierten Halbmesser  $(A_0\varphi, U\varphi)$ ,  $(A_0\varphi, V\varphi)$  mit (1) festgelegt. Der lineare RiB ist genau dann ähnlich zu einem NormalriB, wenn  $\{A_0\varphi, U\varphi, V\varphi\}$  eine kartesische Basis in  $\tilde{\mathbb{P}}_1$  ist.

Im Falle einer als Gaußschen Zahlenebene aufgefaßten euklidischen Ebene  $\tilde{\mathbb{P}}^1$  kann Satz 1.6.7 wie folgt ausgesprochen werden:

**Satz 1.6.8:** Seien  $A_j^i$  ( $i=0,1,2,3$ ) vier Punkte einer euklidischen Ebene  $\tilde{\mathbb{P}}^1$  und  $\{A_0^i, A_1^i, A_2^i\}$  nicht kollinear. Faßt man  $A_0^i$  als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems  $(x,y)$  auf und werden die Punkte  $A_j^i = (x_j, y_j)$  ( $j=1,2,3$ ) durch die komplexen Zahlen  $z_j := x_j + i y_j$  beschrieben, so ist  $\{A_0^i, A_1^i, A_2^i, A_3^i\}$  genau dann ähnlich zu einem NormalriB einer kartesischen Basis  $\mathcal{L} = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$  von  $\tilde{\mathbb{P}}^1$ , wenn

$$(2) \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$$

gilt (C.F. GAUSS).

Beweis. Liegt zunächst  $A_3'$  auf der y-Achse, so gestattet eine Ellipse in Hauptachsenlage mit der halben Hauptachsenlänge a bzw. der halben Nebenachsenlänge b die Parameterdarstellung  $t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) := (a \cos t, b \sin t) \in \mathbb{R}^2$ , wobei der zu  $(A_0', X(t))$  konjugierte Halbmesser die Strecke  $(A_0', X(t_1 + \pi/2))$  ist. Mit  $z_1 = a \cos t_1 + ib \sin t_1$  ist  $z_2 = -a \sin t_1 + ib \cos t_1$  für  $k^{\mathbb{R}}$  nach 1.6.7, also  $z_1^2 + z_2^2 = a^2 - b^2$ ; wegen  $z_3 = i \sqrt{a^2 - b^2}$  nach Satz 1.6.7 gilt (2). Dreht man das kartesische Koordinatensystem um  $A_0'$  durch den Winkel  $\delta$ , so wird der vorher durch z beschriebene Punkt dann durch  $z \exp(i\delta)$  beschrieben, so daß (2) ungeändert bleibt.

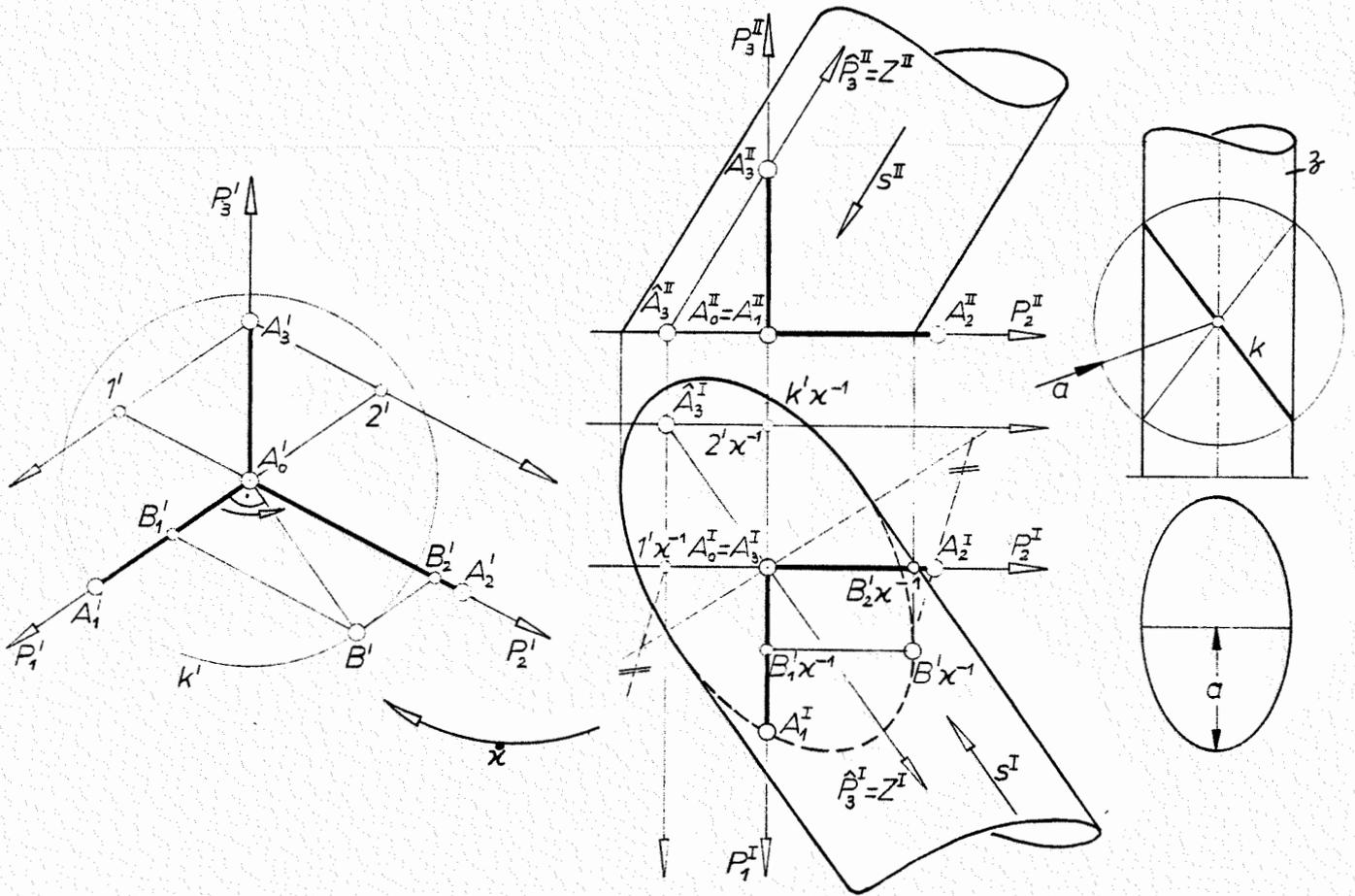
Sind umgekehrt  $z_1, z_2, z_3$  drei komplexe Zahlen, die (2) erfüllen und mit dem Ursprung  $A_0'$  drei Punkte  $A_1', A_2', A_3'$  so bestimmen, daß  $\{A_0', A_1', A_2'\} \subset \mathbb{P}^2$  nicht kollinear sind, so können  $(A_0', A_1'), (A_0', A_2')$  stets als konjugierte Halbmesser einer Ellipse angesprochen werden; genau die Brennpunkte des Antipolarsystems dieser Ellipse erfüllen dann (2), da  $|z_3|$  bzw.  $\arg z_3$  mit Hilfe von (2) eindeutig bzw. eindeutig mod  $\pi$  bestimmt ist.  $\square$

1.6.9 Gilt für eine kartesische axonometrische Grundfigur  $\{A_0', A_1', A_2', A_3', P_1', P_2', P_3'\}$  in einer reellen affinen Ebene  $\tilde{\Pi}' = \Pi' \setminus \omega'$  speziell  $P_3' \in P_1'P_2' = \omega' \subset \mathbb{P}'$ , so ist die Axonometrie  $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  nach 1.4.7 das Produkt einer Parallelprojektion mit einem Zentrum  $Z \in \omega$  auf eine Ebene des dreidimensionalen euklidischen Raumes  $\tilde{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  und einer Affinität. Gemäß 1.4.6 kann in Analogie zu 1.6.6 der Grundriß und der Aufriß der projizierenden Geraden durch  $Z \in \omega$  unter Verwendung der Affinität  $\tilde{\kappa}: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}'$  mit  $A_j' \tilde{\kappa} = A_j'$  ( $j=0,1,2$ ) gefunden werden, wobei  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_0 \cup \omega = \{A_0\} \cup \{A_1\} \cup \{A_2\}$  die durch die kartesische Basis  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}$  bestimmte Grundrißebene ist. Die Punkte  $\hat{A}_3, \hat{P}_3 \in \mathbb{P}_1$  werden mit Hilfe von Teilverhältnisübertragungen gefunden<sup>13</sup>.

Da für  $P_3' \in P_1'P_2' = \omega'$  die Fernebene  $\omega$  projizierend ist, gibt es nach 1.5.5, Fn.11 kein (nichtausgeartetes) Bild der absoluten Polarität  $\pi^d$ . Zur Lösung der Maßaufgaben verwendet man eine mit der kartesischen Basis verknüpfte Zentralprojektion. Ist etwa  $\{A_1', A_2', A_3'\}$  ein Dreieck, so

<sup>13</sup> Durch Auszeichnung einer Basis eines euklidischen Raumes  $\tilde{\Pi}$  als Rechtsbasis wird  $\tilde{\Pi}$  orientiert (II, 8.5). Einer Axonometrie aus einem orientierten euklidischen Raum legen wir stets eine Rechtsbasis  $\mathcal{C}$  zugrunde; die durch  $\mathcal{C}$  bestimmte Grundrißebene wird durch  $\{A_0, A_1, A_2\}$  orientiert. Je nachdem nach Wahl einer Orientierung von  $\tilde{\Pi}'$  die Basis  $\{A_0', A_1', A_2'\}$  eine Rechtsbasis bzw. eine Linksbasis von  $\tilde{\Pi}'$  ist, sprechen wir von Obersicht bzw. Untersicht; bei Übersicht ist die Affinität  $\tilde{\kappa}: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}'$  gleichsinnig. Im Falle des Anschauungsraumes sind bei Übersicht die projizierenden Geraden so orientiert, daß man die Oberseite der Grundrißebene sieht. Die zusätzliche Angabe der Orientierung der projizierenden Geraden, die dann Sehstrahlen heißen, ist bei Parallelprojektion für Sichtbarkeitsfragen nötig; bei Zentralprojektion genügt die Angabe des Augpunkts.

kann die Zentralprojektion  $\psi_0 : \mathbb{P} \rightarrow \varepsilon$  mit Zentrum  $A_0$  auf die Einheitsebene  $\varepsilon$  verwendet werden. Da  $\mathcal{C}$  eine kartesische Basis ist, stellt  $\{A_1, A_2, A_3\}$  ein Poldreieck der elliptischen Polarität  $(\pi^\perp)^\varepsilon$  mit  $(\hat{\pi}^\perp)^\varepsilon = (\psi_0 | \omega)^{-1} \hat{\pi}^\perp (\psi_0 | \omega)$  in  $\varepsilon$  dar, wobei die Ferngerade  $e_u$  von  $\varepsilon$  dem Schnittpunkt  $N_\varepsilon$  der Normalen aus  $A_0$  auf  $\varepsilon$  zugeordnet ist; nach 1.6.6 ist  $N_\varepsilon$  der Dreieckspol von  $e_u$  bezüglich  $\{A_1, A_2, A_3\}$ . Dann ist  $(\hat{\pi}^\perp)^\varepsilon \alpha | \varepsilon = (\pi^\perp)^\alpha | \varepsilon$  das Bild der absoluten Polarität  $\pi^\perp$  unter der Kollineation  $(\psi_0 | \omega) \alpha : \omega \rightarrow \mathbb{P}'$  und durch das Poldreieck  $\{A_1', A_2', A_3'\}$  und den Schwerpunkt von  $\{A_1', A_2', A_3'\}$  als Mittelpunkt festgelegt, da  $\alpha | \varepsilon : \varepsilon \rightarrow \mathbb{P}'$  eine Kollineation und  $e_u \alpha = \omega \alpha$  die Ferngerade  $u'$  von  $\mathbb{P}'$  ist. Jede Maßaufgabe in  $\hat{\pi}$  wird dann mit  $(\pi^\perp)^\alpha | \varepsilon$  und  $\overline{A_0 A_1} = 1$  auf Lageaufgaben bezüglich  $\varepsilon$  zurückgeführt. Für  $A_3' \in A_1' A_2'$  kann etwa die Zentralprojektion  $\psi_3 : \mathbb{P} \rightarrow \{A_0\} \vee \{A_1'\} \vee \{A_2'\}$  zum Zentrum  $A_3$  auf die Grundrißebene verwendet werden.



Ist  $\hat{\pi}' = \pi' \setminus u'$  eine euklidische Ebene, so ist nach Satz 1.5.5 die Axonometrie  $\hat{x} : \mathbb{P}' \rightarrow \mathbb{P}'$  mit  $P_3' \in P_1' P_2' = u' \subset \mathbb{P}'$  das Produkt einer Parallelprojektion auf eine geeignete Ebene  $\mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}'$  und einer Ähnlichkeit; je nachdem das axonometrische Bild ähnlich zu einem Schrägriß oder Normalriß ist, kann  $\mathbb{P}_1$  aus zwei oder einem Parallelbüschel

gewählt werden. Die Stellung dieser Ebenen wird wie folgt elementar gefunden<sup>14</sup>:

Ist  $k' \subset \mathbb{K}'$  ein Kreis um  $A_0'$  in  $\Pi'$ , so ist  $k'k^{-1} \subset \mathbb{K}$  eine Ellipse in der Grundrißebene; aus orthogonalen Radien von  $k$  entstehen bei  $k^{-1}$  konjugierte Halbmesser von  $k'k^{-1}$ . Der Zylinder  $\mathcal{Z}$  in  $\mathbb{K}$  mit der Leitellipse  $k'k^{-1}$  und der Fernspitze  $I \in \omega$  besitzt in  $\Pi$  Kreisschnittebenen, die zwei bzw. ein Parallelbüschel bilden, je nachdem  $\mathcal{Z}$  ein schiefer Kreiszyylinder bzw. ein Drehzylinder ist. Ist  $\mathbb{K}_1$  eine solche Kreisschnittebene<sup>15</sup> und  $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}_1$  die Parallelprojektion mit Zentrum  $I \in \omega$ , so gilt  $\tilde{\alpha} = f \circ k_1$ , wobei  $k_1: \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}'$  eine Affinität ist. Da  $k_1$  den Schnittkreis von  $\mathbb{K}_1$  mit  $\mathcal{Z}$  in den Kreis  $k'$  abbildet, ist  $k_1$  nach 1.5.1 eine Ähnlichkeit.

1.6.10 Ist  $\tilde{\Pi}' = \Pi' \setminus u'$  eine euklidische Ebene mit der absoluten Involution  $\pi^{1'}$ , so ist eine Axonometrie  $\tilde{\alpha}: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$  mit  $P_3' \in P_1'P_2' = u' \subset \mathbb{K}'$  das Produkt einer Schrägprojektion bzw. einer Normalprojektion und einer Ähnlichkeit.

Def.: 1.6.1: Eine Axonometrie eines dreidimensionalen euklidischen Raumes  $\tilde{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  auf eine euklidische Ebene  $\tilde{\Pi}' = \Pi' \setminus u'$  mit  $P_3' \in P_1'P_2' = u' \subset \mathbb{K}'$  heißt schiefe Axonometrie bzw. normale Axonometrie, je nachdem das axonometrische Bild zu einem Schrägriß bzw. Normalriß ähnlich ist.

Satz 1.6.7 kennzeichnet die kartesische axonometrische Grundfigur einer normalen Axonometrie.

Wir behandeln die Frage, was von einer kartesischen axonometrischen Grundfigur mit  $P_3' \in P_1'P_2' = u'$  in einer euklidischen Ebene  $\tilde{\Pi}' = \Pi' \setminus u'$  vorgegeben werden kann, wenn man verlangt, daß eine normale Axonometrie vorliegt. Wir führen die Untersuchungen ohne Einschränkung in der projektiv abgeschlossenen Anschauungsebene.

Satz 1.6.6: Gibt man von einer kartesischen axonometrischen Grundfigur  $\{A_0', A_1', A_2', A_3', P_1', P_2', P_3'\}$  mit  $P_3' \in P_1'P_2' = u' \subset \mathbb{K}'$  in einer euklidischen Ebene  $\tilde{\Pi}' = \Pi' \setminus u'$  die Punkte  $A_0', A_1', P_1', P_2', P_3'$  mit  $P_3' \in P_1'P_2' = u'$  so vor, daß nie zwei der Geraden  $A_0'P_j'$  ( $j=1,2,3$ ) orthogonal sind

<sup>14</sup>Die folgende Konstruktion enthält einen elementaren Beweis des Satzes von Pohlke.

<sup>15</sup>Ist ein Normalschnitt  $k_1$  von  $\mathcal{Z}$  ein Kreis, so ist  $\mathcal{Z}$  ein Drehzylinder. Ist dagegen  $k_1$  eine Ellipse mit der halben Hauptachsenlänge  $a$ , so gehen durch jeden Punkt der Achse von  $\mathcal{Z}$  zwei zur Verbindungsebene der Nebenachse von  $k_1$  mit der Zylinderachse normale Ebenen, welche  $\mathcal{Z}$  nach je einer Ellipse mit Achsen der Länge  $2a$ , also nach einem Kreis schneiden.

und jede durch den stumpfen Winkel der beiden anderen geht, so kann das Punktepaar  $A_2', A_3'$  vierdeutig derart ergänzt werden, daß eine normale Axonometrie vorliegt.

Beweis. Nach Satz 1.6.7 sind  $A_2' \in A_0'P_2'$  und  $A_3' \in A_0'P_3'$  so zu ergänzen, daß das Antipolarsystem der Ellipse  $u\alpha$  mit den konjugierten Halbmessern  $(A_0', A_1')$  und  $(A_0', A_2')$  den Punkt  $A_3'$  als Brennpunkt besitzt. Durch den Halbmesser  $(A_0', A_1')$ ,

die dazu konjugierte Durchmessergerade  $A_0'P_2'$  und eine zu  $A_0'P_3'$  normale Achse  $h\alpha$  ist aber genau eine Ellipse  $u\alpha$  bestimmt: Durch Anwendung einer perspektiven

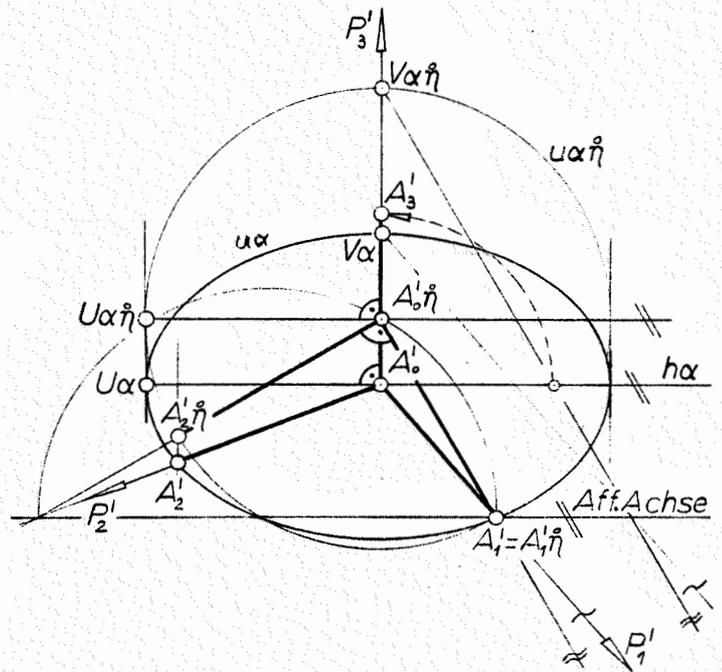
Affinität  $\eta: \tilde{\pi}' \rightarrow \tilde{\pi}'$  mit einer zu  $h\alpha$  parallelen, von  $h\alpha$  verschiedenen Achse und zu  $h\alpha$  orthogonalen

Fixgeraden, die  $A_0'P_1', A_0'P_2'$  in orthogonale Geraden überführt, geht nämlich jede in die Angabe passende Ellipse  $u\alpha$  in einer Ellipse mit

zwei Paaren orthogonaler konjugierter Durchmesser, also einen Kreis um  $A_0'\eta$  über. Wie die Abb. zeigt trägt  $h\alpha$  genau dann die Hauptachse von  $u\alpha$ ,

wenn  $\angle P_2'A_0'P_1'$  stumpf ist; diese Überlegungen können bei zyklischer Vertauschung der Zeiger 1,2,3 wiederholt werden.

Mit  $u\alpha$  sind die Punkte  $A_2'$  und  $A_3'$  nach Satz 1.6.7, und zwar je zweideutig bestimmt<sup>16</sup>.  $\square$



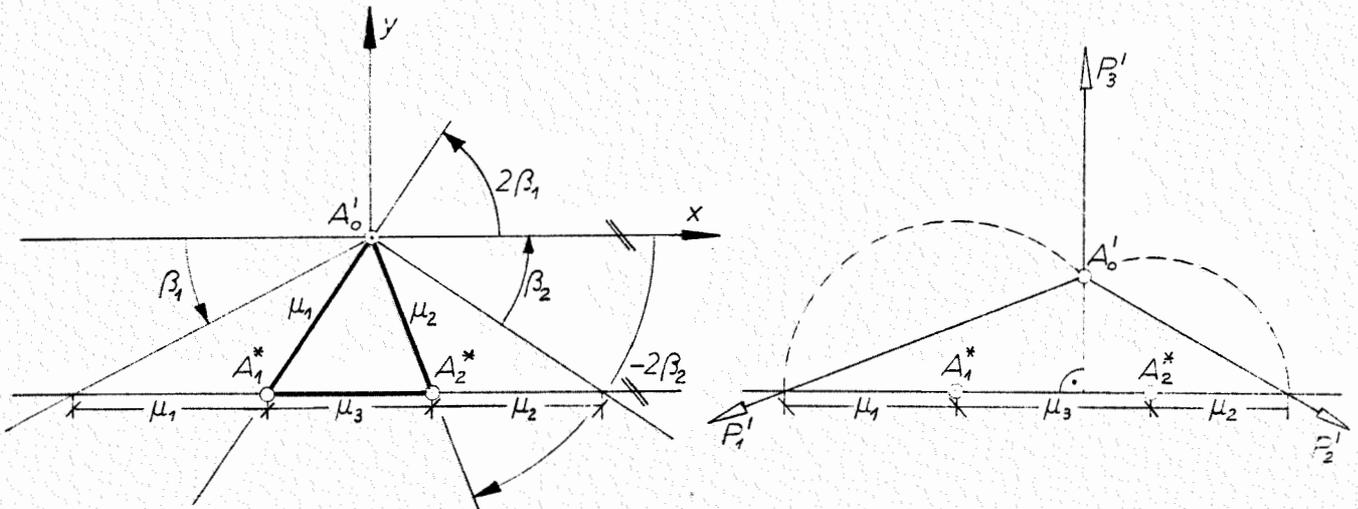
Bezeichnet man die in  $\tilde{\pi}$  gemessene Länge  $\overline{A_0'A_1} = \overline{A_0'A_2} = \overline{A_0'A_3}$  mit  $e > 0$  und die in  $\tilde{\pi}'$  gemessenen Längen  $\overline{A_0'A_j'}$  mit  $e_j' > 0$  ( $j=1,2,3$ ), so heißen die drei Zahlen  $\lambda_j := e_j' : e > 0$  ( $j=1,2,3$ ) die Verzerrungen<sup>17</sup> der Axonometrie. Dann gilt:

<sup>16</sup> Im Elementarunterricht werden nur die Geraden  $A_0'P_1', A_0'P_2', A_0'P_3'$ , aber nicht  $A_1'$  vorgegeben, da dort eine normale Axonometrie gesucht wird, die kongruent und nicht nur ähnlich zu einem Normalriß ist. Die in der Abb. enthaltenen Konstruktionslinien werden durch räumliche Überlegungen hergeleitet.

<sup>17</sup> Ist die normale Axonometrie kongruent zu einem Normalriß, so ist die halbe Hauptachsenlänge  $a$  der in 1.6.8 betrachteten Ellipse mit den konjugierten Halbmessern  $(A_0', A_1')$ ,  $(A_0', A_2')$  gleich  $e$ . Unter Benützung der im Beweis zu Satz 1.6.8 verwendeten komplexen Zahlen  $z_1, z_2, z_3$  mit  $|z_j| = e_j' = \lambda_j e$  folgt aus Satz 1.6.8, (2) dann  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 2$ .

**Satz 1.6.7:** Sind  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  drei positive Zahlen derart, daß die Summe der Quadrate zweier Zahlen stets größer als das Quadrat der dritten Zahl ist, so ist nach Vorgabe von  $e_1' > 0$  bis auf Bewegungen in  $\overline{\Pi}'$  genau je eine kartesische axonometrische Grundfigur mit Übersicht bzw. Untersicht einer normalen Axonometrie des orientierten dreidimensionalen euklidischen Raumes  $\overline{\Pi}$  auf die orientierte euklidische Ebene  $\overline{\Pi}'$  mit den Verzerrungsverhältnissen  $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$  bestimmt.

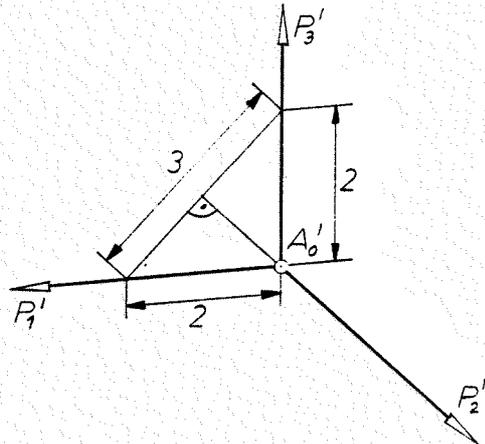
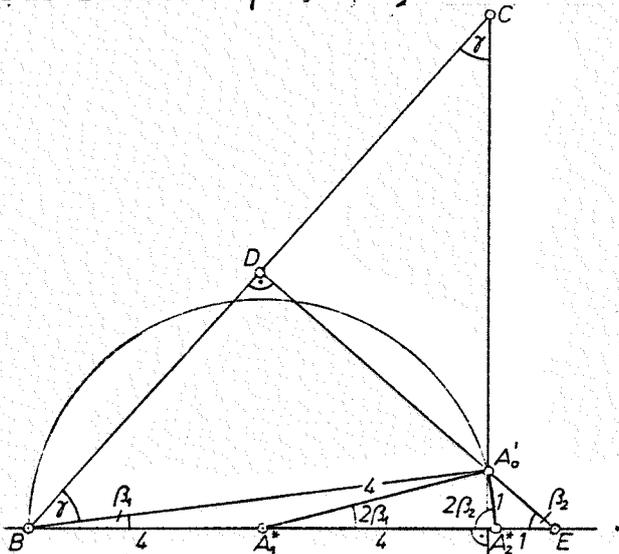
**Beweis.** Wir benützen zum Beweis die orientierte Anschauungsebene und setzen etwa Übersicht voraus. Nach Wahl der positiven y-Achse als Halbgerade zur orientierten Strecke  $(A_0', A_3')$  (II, 113) gilt für die  $A_1'$  bzw.  $A_2'$  bzw.  $A_3'$  beschreibende komplexe Zahl  $z_1$  bzw.  $z_2$  bzw.  $z_3$  dann  $z_1 = |z_1| \exp(i\alpha_1)$ ,  $z_2 = |z_2| \exp(i\alpha_2)$ ,  $z_3 = |z_3| i$  mit  $\pi < \alpha_1 < 3\pi/2$ ,  $3\pi/2 < \alpha_2 < 2\pi$ ,  $|z_j| = \lambda_j e$ . Mit  $\beta_1 := \alpha_1 - \pi$ , also  $0 < \beta_1 < \pi/2$  und  $\beta_2 := 2\pi - \alpha_2$ , also  $0 < \beta_2 < \pi/2$  folgt  $f_1 := z_1^2 = \lambda_1^2 e^2 \exp(2i\beta_1)$ ,  $f_2 := z_2^2 = \lambda_2^2 e^2 \exp(-2i\beta_2)$ ,  $f_3 := z_3^2 = -\lambda_3^2 e^2$ . Nach Satz 1.6.8, (3) ist  $f_1 + f_2 + f_3 = 0$ , so daß die durch  $f_1$  und  $f_2$  beschriebenen Punkte  $A_1^*$ ,  $A_2^*$  mit  $A_0'$  ein Dreieck  $\{A_0', A_1^*, A_2^*\}$  mit zur x-Achse paralleler Seite  $A_1^*A_2^*$  und den Seitenverhältnissen  $A_0'A_1^* : A_1^*A_2^* : A_2^*A_0' = \lambda_1^2 : \lambda_3^2 : \lambda_2^2$  bilden müssen; aus der Dreiecksungleichung folgt die in



**Satz 1.6.7 formulierte Zusatzbedingung:**

Legt man auf einer Geraden somit drei Strecken aneinander, deren Längen  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  sich wie  $\lambda_1^2 : \lambda_3^2 : \lambda_2^2$  verhalten, so können daraus ein zum Dreieck  $\{A_0', A_1^*, A_2^*\}$  ähnliches Dreieck und damit die Geraden  $A_0'B_1', A_0'B_2', A_0'B_3'$  gemäß Abbildung ergänzt werden. Mit  $A_0'A_1' = e_1'$ ,  $A_0'A_2' = \lambda_2/\lambda_1 e_1'$ ,  $A_0'A_3' = \lambda_3/\lambda_1 e_1'$  erhält man die axonometrische Grundfigur einer nach Satz 1.6.8 normalen Axonometrie.  $\square$

Speziell für die Ingenieuraxonometrie wird  $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 2:1:2$  verlangt. Mit Hilfe der obigen Konstruktion entstehen die Punkte  $A_0', B, C, D, E$  mit  $A_0'C = A_0'B$  (vgl. Abb.). Die Anwendung des Kosinussatzes auf das Dreieck  $\{A_0', A_1^*, A_2^*\}$  ergibt  $\frac{\cos 2\beta_1 = 3:32}{}$ , also  $\cos \beta_1 = \sqrt{63}:8$  und  $\cos 2/\beta_2 = 1:8$ , also  $\cos \beta_2 = 3:4$ . Wegen  $A_1^*B = A_1^*A_0' = A_1^*A_2^*$  ist  $\angle BA_0'A_2^* = \pi/2$ , also  $\beta_1 + 2/\beta_2 = \pi/2$ ; wegen  $A_0'C \perp BE$  folgt  $(\beta_1 + \beta_2) + \beta_2 = \pi/2$  und damit  $\beta_1 = \beta_2$ . Das Dreieck  $\{B, D, E\}$  hat daher bei  $D$  wegen  $(\beta_1 + \beta_2) + \beta_2 = \beta_1 + 2/\beta_2 = \pi/2$



einen rechten Winkel. Weiter ist  $\cos \beta = \cos \beta_2 = 3:4$ , was  $\overline{BC} : \overline{A_0'B} = 2\overline{BD} : \overline{A_0'B} = 6:4 = 3:2$  und damit die elementare Konstruktion von  $A_0'P_1', A_0'P_2', A_0'P_3'$  ergibt (vgl. Baugeometrie I, 25).

1.6.10 Da bei einer linearen Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  aus einem dreidimensionalen euklidischen Raum  $\tilde{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  auf eine euklidische Ebene  $\tilde{\Pi}' = \Pi' \setminus u'$  mit dem einpunktigen Ausnahmeraum  $Z \in \omega$ , also mit projizierender Fernebene  $\omega$ , kein (nichtausgeartetes) Bild der absoluten Polarität  $\pi^+$  existiert, können die Maßaufgaben von  $\tilde{\Pi}$  nicht nach den in 1.6.4 angegebenen Methoden in  $\tilde{\Pi}'$  gelöst werden. Als Ersatz dafür kann dienen<sup>18</sup>:

Zu (M1): Da bei Parallelprojektion jede Strecke auf einer Hauptgeraden unverzerrt abgebildet wird, bestimmt der lineare Riß einer solchen Strecke den Ähnlichkeitsfaktor. Mit Hilfe des Ähnlichkeitsfaktors kann (M1) als Sonderfall von (M2) behandelt werden<sup>19</sup>.

<sup>18</sup> Durch räumliche Überlegungen können bei bestimmten Abbildungen die folgenden Verfahren vereinfacht werden.

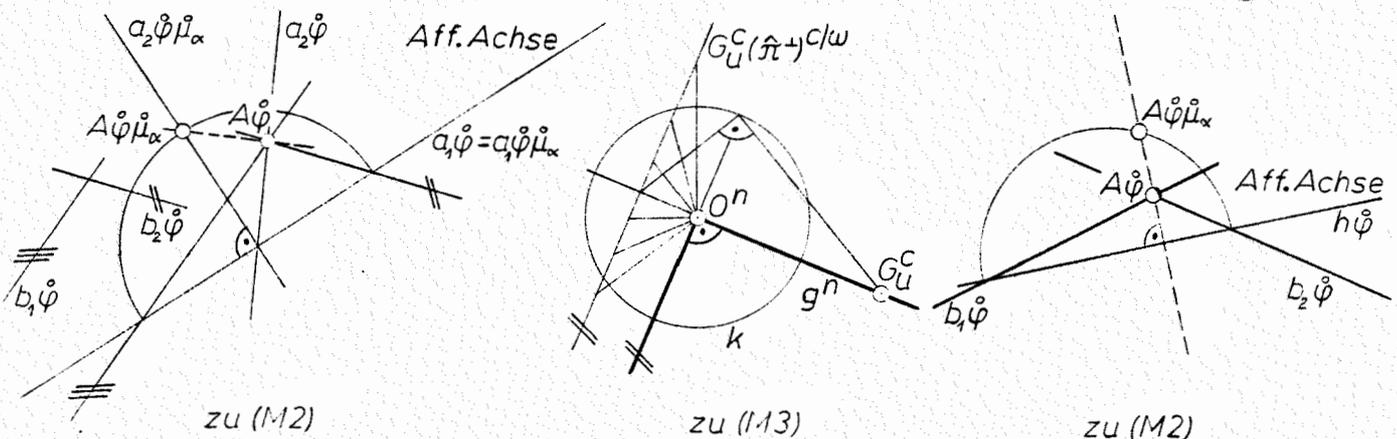
<sup>19</sup> Die Ermittlung des linearen Risses einer Hauptgeraden wird bei (M3) besprochen.

Zu (M2): Kennt man die linearen Risse von zwei rechten Winkel  $a_1 \perp a_2, b_1 \perp b_2$  in einer nichtprojizierenden Ebene  $\alpha$  und führt man diese durch eine perspektive Affinität  $\mu_\alpha: \mathbb{P}' \rightarrow \mathbb{P}''$  (Maßaffinität) in zwei rechte Winkel in  $\mathbb{P}''$  über, so ist für  $\mathcal{L} \subset \alpha$  dann  $\mathcal{L}' \mu_\alpha$  zu  $\mathcal{L}$  ähnlich. Anstelle von zwei rechten Winkeln in  $\alpha$  kann auch der lineare Riß einer kartesischen Basis  $\{A_0, A_1, A_2\}$  von  $\alpha$  gegeben sein, da die Diagonalen eines Quadrats orthogonal sind. Umgekehrt kann mit Hilfe einer Maßaffinität  $\mu_\alpha$  der lineare Riß einer kartesischen Basis konstruiert werden.

Zu (M3): Bei Normalprojektion  $n: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}_1$  gilt: Ein rechter Winkel erscheint genau dann unverzerrt, wenn ein Schenkel einer Hauptgeraden und der andere nicht projizierend ist. Dies folgt laut Abbildung, in der zusätzlich eine Zentralprojektion  $c: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}_1$  mit dem Zentrum  $O \notin \omega$  im Winkelscheitel und dem Distanzkreis  $k$  benützt ist.

Kennt man den linearen Riß einer kartesischen Basis  $\{A_0, A_1, A_2\}$  der nichtprojizierenden Ebene  $\alpha$ , und ist der lineare Riß speziell ähnlich zu einem Normalriß, so ist die Hauptachse der durch die konjugierten Halbmesser  $(A_0', A_1'), (A_0', A_2')$  bestimmten Ellipse der lineare Riß einer Hauptgeraden in  $\alpha$  und die Nebenachse der lineare Riß einer Normalen zu  $\alpha$ ; ist diese Ellipse ein Kreis, so ist  $\alpha$  eine Hauptebene, und die Normalen zu  $\alpha$  sind projizierend. Im Falle eines zu einem Schrägriß ähnlichen linearen Risses schaltet man eine affine Hilfsfigur, etwa gemäß 1.6.8 davor.

Kennt man bei einem zu einem Normalriß ähnlichen linearen Riß das Bild einer Hauptgeraden  $h$  der nichtprojizierenden Ebene  $\alpha$ , so genügt die Kenntnis des linearen Risses eines rechten Winkels, dessen Schenkel zu  $h$  nicht parallel sind, zur Angabe einer Maßaffinität  $\mu_\alpha$ .



2. LINEARE ZWEIBILDERSYSTEME

2.1 Grundbegriffe

2.1.1 Sind  $M$  und  $N$  zwei Mengen und  $\varphi_j : M \rightarrow N$  ( $j=1,2$ ) zwei Abbildungen, so heißt die Abbildung  $(\varphi_1, \varphi_2) : M \rightarrow N \times N$  mit  $x(\varphi_1, \varphi_2) := (x\varphi_1, x\varphi_2)$ ,  $x \in D_{\varphi_1} \cap D_{\varphi_2}$  eine Paarabbildung.

Def.2.1.1: Sind  $\varphi_j : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  ( $j=1,2$ ) zwei surjektive lineare Abbildungen aus einem projektiven Raum  $\Pi = (\mathcal{P}, \varphi_j)$  in einen projektiven Raum  $\Pi' = (\mathcal{P}', \varphi_j)$  mit  $3 \leq \dim \Pi < \infty$  und  $\dim \Pi' \geq 2$ , so heißt die Paarabbildung  $(\varphi_1, \varphi_2) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}' \times \mathcal{P}'$  ein lineares Zweibildersystem aus  $\Pi$ .

Nach Def.1.3.1 und 1.3.3 ist  $\varphi_j$  das Produkt einer Projektion  $\varphi_j : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathcal{P}}_j \subset \mathcal{P}$  mit Ausnahmeraum  $\Sigma_j \subset \mathcal{P}$  und einer Kollineation  $\kappa_j : \overline{\mathcal{P}}_j \rightarrow \mathcal{P}'$  ( $j=1,2$ ), wobei die projektiven Räume  $\Pi(\Sigma_1)$  und  $\Pi(\Sigma_2)$  bzw.  $\Pi(\overline{\mathcal{P}}_1)$ ,  $\Pi(\overline{\mathcal{P}}_2)$  und  $\Pi'(\mathcal{P}')$  je gleiche Dimension besitzen<sup>1</sup>. Wegen  $\dim \Pi \geq 3$  ist nach 1.4.1 der projektive Raum  $\Pi$  ein Desarguesraum; nach 1.4.2 und 1.3.4 sind die Algebraisierungskörper von  $\Pi$  und  $\Pi'$  isomorph.

Für eine Punktmenge  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}$  mit  $\mathcal{O} \cap (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = \emptyset$  ist  $(\varphi_1, \varphi_2)|_{\mathcal{O}}$  global; wir nennen  $X' := X\varphi_1 \in \mathcal{P}'$  den ersten linearen Riß und  $X'' := X\varphi_2 \in \mathcal{P}'$  den zweiten linearen Riß von  $X \in \mathcal{O}$ ; mit  $\overline{X} := X\kappa_1 \in \overline{\mathcal{P}}_1 \subset \mathcal{P}$ ,  $\overline{X} := X\kappa_2 \in \overline{\mathcal{P}}_2 \subset \mathcal{P}$  gilt dann  $X' = \overline{X}\kappa_1$ ,  $X'' = \overline{X}\kappa_2$ . Wir verwenden i.f. die

Festsetzung 1: Für ein lineares Zweibildersystem  $(\varphi_1, \varphi_2) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}' \times \mathcal{P}'$  ist stets  $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ .

Gilt nämlich  $\Sigma_1 = \Sigma_2 =: \Sigma$ , so ist für alle  $X \in \mathcal{P} \setminus \Sigma$  dann  $X' \mapsto X''$  eine Kollineation in  $\Pi'(\mathcal{P}')$ , nämlich  $\kappa_1^{-1}\kappa_2$ , wenn man nach 1.3.1 ohne Einschränkung  $\overline{\mathcal{P}}_1 = \overline{\mathcal{P}}_2$  wählt; da kollineare lineare Risse im Sinne der projektiven Geometrie nicht wesentlich verschieden sind, liegt dann nur ein linearer Riß vor. Insbesondere ist also weder  $\Sigma_1$  noch  $\Sigma_2$  gleich  $\emptyset$ , also weder  $\varphi_1$  noch  $\varphi_2$  injektiv. Stellt umgekehrt für alle  $X \in \mathcal{P} \setminus \Sigma_1$  die Zuordnung  $X' \mapsto X''$  eine Kollineation<sup>von  $\Pi'$</sup>  dar, so besitzen die beiden linearen Abbildungen denselben Ausnahmeraum; Für  $X \notin \Sigma_1$ ,  $X \in \Sigma_2$  existiert nämlich  $X'$ , aber nicht  $X''$ , also gilt  $\Sigma_2 \subset \overline{\Sigma_1}$ .

<sup>1</sup>Nach Def.2.1.1 ist keine der beiden Abbildungen eine Kotierung. Die elementare kotierte Projektion (vgl.1.2.1) ist ein Paar linearer Abbildungen, nämlich einer Normalprojektion und einer Kotierung, jedoch kein lineares Zweibildersystem im Sinne von Def.2.1.1. Natürlich können auch Paare linearer Abbildungen  $\varphi_1, \varphi_2$  aus  $\Pi$  mit  $\text{im } \varphi_1 \neq \text{im } \varphi_2$  studiert werden.

und wegen  $\dim \pi(\Sigma_1) = \dim \pi(\Sigma_2)$  daher  $\bar{\Sigma}_1 = \bar{\Sigma}_2$ .

Für  $\dim \pi = n \geq 3$  gilt mit  $\dim \pi(\bar{\Sigma}_1) = \dim \pi(\bar{\Sigma}_2) = k$  dann  $0 \leq k \leq n-3$  nach 1.2.1 und  $2 \leq \dim \pi' \leq n-1$ .

2.1.2 Nach 2.1.1 ist  $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$  und  $\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2 \neq \emptyset$ .

Def.2.1.2: Sind  $\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2$  die Ausnahmeräume eines linearen Zweibildersystems  $(\varphi_1, \varphi_2) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}' \times \mathcal{P}'$ , so heißt  $\bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2$  der Kernraum des linearen Zweibildersystems.

Dann gilt:

Satz 2.1.1: Die Ausnahmemenge eines linearen Zweibildersystems  $(\varphi_1, \varphi_2) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}' \times \mathcal{P}'$  ist die Menge  $\bar{\Sigma}_1 \cup \bar{\Sigma}_2$ . Für  $\bar{\Sigma}_1 \cap \bar{\Sigma}_2 = \emptyset$  ist die Einschränkung  $(\varphi_1, \varphi_2)|_{\mathcal{P} \setminus (\bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2)}$  injektiv und  $(\varphi_1, \varphi_2)|_{(\bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2) \setminus (\bar{\Sigma}_1 \cup \bar{\Sigma}_2)}$  nicht injektiv.

Beweis. Für  $Z \in \bar{\Sigma}_j$  ist  $\varphi_j$ , also  $(\varphi_1, \varphi_2)$  nicht definiert, für  $X \notin \bar{\Sigma}_1 \cup \bar{\Sigma}_2$  ist  $X(\varphi_1, \varphi_2) = (X\varphi_1, X\varphi_2) = (X', X'')$  definiert. Für  $X, Y \in \mathcal{P} \setminus (\bar{\Sigma}_1 \cup \bar{\Sigma}_2)$ ,  $X \neq Y$  mit  $X' = Y', X'' = Y''$  ist  $XY$  projizierend bezüglich  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ , so daß die Gerade  $XY$  sowohl  $\bar{\Sigma}_1$  wie auch  $\bar{\Sigma}_2$ , und zwar wegen  $\bar{\Sigma}_1 \cap \bar{\Sigma}_2 = \emptyset$  in verschiedenen Punkten schneidet; dann gilt  $XY \subset \bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2$  nach 1.1.2, (2).  $\square$

Wegen Satz 2.1.1 formulieren wir die

Festsetzung 2: Der Kernraum  $\bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2$  eines linearen Zweibildersystems ist ein echter Unterraum von  $\pi$  und die Zentren  $\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2$  sind windschief<sup>2</sup>.

Für  $\dim \pi(\bar{\Sigma}_1) = \dim \pi(\bar{\Sigma}_2) = k$  gilt dann  $\dim \pi(\bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2) = 2k+1$  nach 1.1.2, (5), also  $2k < n-1$ .

Bei der Projektion  $\varphi_1 : \mathcal{P} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}_1$  mit Zentrum  $\bar{\Sigma}_1 \neq \emptyset$  ist  $\bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2$  ein projizierender Unterraum und  $\bar{\Sigma}_2 \varphi_1 =: \bar{\Sigma}_2' = \bar{\mathcal{P}}_1 \cap (\bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2) \neq \emptyset$ , da  $\bar{\Sigma}_1$  zu  $\bar{\Sigma}_2$  windschief ist und  $\bar{\Sigma}_2 \neq \emptyset$  gilt. Der Unterraum  $\bar{\Sigma}_2'$  von  $\bar{\mathcal{P}}_1$  ist die Menge der  $\varphi_1$ -Bilder aller Punkte aus  $(\bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2) \setminus \bar{\Sigma}_1$  unter  $\varphi_1$  und  $\bar{\Sigma}_2'' = \bar{\Sigma}_2' \kappa_1 \subset \mathcal{P}'$  ist die Menge der ersten linearen Risse aller Punkte aus  $(\bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2) \setminus \bar{\Sigma}_1$ ; analoges gilt für den Index 2.

Def.2.1.3: Ist  $\bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2$  der Kernraum eines linearen Zweibildersystems  $(\varphi_1, \varphi_2) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}' \times \mathcal{P}'$  mit  $\varphi_i = \varphi_j \kappa_j$  und  $\varphi_i : \mathcal{P} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}_i \subset \mathcal{P}$ , so heißt  $\bar{\Sigma}_2' = \bar{\Sigma}_2 \varphi_1$  bzw.  $\bar{\Sigma}_2'' = \bar{\Sigma}_2 \varphi_1 = \bar{\Sigma}_2' \kappa_1$  der erste Kernraum in  $\bar{\mathcal{P}}_1$ .

<sup>2</sup> Diese Zusatzforderung ist bei allen konstruktiv wichtigen linearen Zweibildersystem erfüllt. Für  $\bar{\Sigma}_1 \cap \bar{\Sigma}_2 \neq \emptyset$  ist die Injektivität von  $(\varphi_1, \varphi_2)$  in "größerem Maße" gestört als im Fall  $\bar{\Sigma}_1 \cap \bar{\Sigma}_2 = \emptyset$  (vgl. Satz 2.1.1). Die Bezeichnung Kernraum verallgemeinert eine in der Geodäsie übliche Bezeichnung und hat nichts mit einem Kernraum eines Vektorraumhomomorphismus zu tun.

bzw.  $\mathcal{Q}'$  und  $\bar{\Sigma}_1 = \Sigma_1 \varphi_2$  bzw.  $\bar{\Sigma}_1'' = \Sigma_1 \varphi_2 = \bar{\Sigma}_1 \varphi_2$  der zweite Kernraum in  $\bar{\mathcal{Q}}_2$  bzw.  $\mathcal{Q}'$ .

Dann gilt nach oben:

$$\bar{\Sigma}_2 = ((\Sigma_1 \vee \Sigma_2) \setminus \Sigma_1) \varphi_1 \subset \bar{\mathcal{Q}}_1, \quad \Sigma_2' = ((\Sigma_1 \vee \Sigma_2) \setminus \Sigma_1) \varphi_2 \subset \mathcal{Q}' \text{ und analog f\u00fcr } \bar{\Sigma}_1, \Sigma_1''.$$

Der erste und der zweite Kernraum sind also nie leer. F\u00fcr  $\dim \Pi = n$ ,  $\dim \Pi(\Sigma_1) = \dim \Pi(\Sigma_2) = k$  folgt  $\dim \Pi(\bar{\Sigma}_2) = \dim \Pi(\bar{\Sigma}_1) = \dim \Pi(\Sigma_2') = \dim \Pi(\Sigma_1'') =$  nach 1.1.2, (5) wegen  $\bar{\mathcal{Q}}_1 \vee (\Sigma_1 \vee \Sigma_2) = \mathcal{Q}$ ,  $\dim \Pi(\Sigma_1 \vee \Sigma_2) = 2k+1$  und  $\dim \Pi(\bar{\mathcal{Q}}_1) = k$ , da  $\varphi_1 \upharpoonright \Sigma_2$  und  $\varphi_2 \upharpoonright \Sigma_1$  injektiv sind. Wegen  $\dim \Pi' = n-k-1$  und  $2k < n-1$  ist  $k < n-k-1$ ; der erste (zweite) Kernraum  $\Sigma_2' (\Sigma_1'')$  eines linearen Zweibildersystems ist daher ein echter Unterraum von  $\Pi'$ .

Nach Festsetzung 2 ist ein zum Kernraum  $\Sigma_1 \vee \Sigma_2$  in  $\Pi$  komplement\u00e4rer Unterraum  $\overline{\Sigma_1 \vee \Sigma_2} =: \Gamma$ , der ein Grundraum des Zweibildersystems hei\u00dft, nie leer; f\u00fcr  $\dim \Pi = n$  ist die Dimension eines Grundraumes nach 1.1.2, (1) gleich  $n - (2k+1) - 1 = n - 2k - 2 \geq 0$ . Durch jeden Grundraum existiert ein zu  $\Sigma_1$  bzw.  $\Sigma_2$  komplement\u00e4rer Unterraum (I, 96), der als Bildraum  $\bar{\mathcal{Q}}_1$  bzw.  $\bar{\mathcal{Q}}_2$  von  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  verwendet werden kann.

**2.1.3** F\u00fcr jeden Punkt  $X \in (\Sigma_1 \vee \Sigma_2) \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$  ist  $X' \in \Sigma_2'$  und  $X'' \in \Sigma_1''$ ; nach 2.1.2 ist  $(\varphi_1, \varphi_2) \upharpoonright ((\Sigma_1 \vee \Sigma_2) \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2))$  nicht injektiv. Ist  $X \notin \Sigma_1 \vee \Sigma_2$ , so hei\u00dft  $\{X\} \vee (\Sigma_1 \vee \Sigma_2)$  der doppelt projizierende Unterraum  $\sigma_X$  von X. Wegen  $X \notin \Sigma_1 \vee \Sigma_2$  und  $X \in \{\bar{X}\} \vee \Sigma_1 \subset \{\bar{X}\} \vee (\Sigma_1 \vee \Sigma_2)$  mit  $\bar{X} = X \varphi_1$  gilt nach 1.1.2 (3) dann  $\{X\} \vee (\Sigma_1 \vee \Sigma_2) = \{\bar{X}\} \vee (\Sigma_1 \vee \Sigma_2)$ , und aus  $\bar{X} \in \bar{\mathcal{Q}}_1$  folgt  $(\{X\} \vee (\Sigma_1 \vee \Sigma_2)) \cap \bar{\mathcal{Q}}_1 = (\{\bar{X}\} \vee (\Sigma_1 \vee \Sigma_2)) \cap \bar{\mathcal{Q}}_1 = \{\bar{X}\} \vee ((\Sigma_1 \vee \Sigma_2) \cap \bar{\mathcal{Q}}_1)$  nach 1.1.2, (4), also  $\bar{\sigma}_X := \sigma_X \cap \bar{\mathcal{Q}}_1 = \{\bar{X}\} \vee \bar{\Sigma}_2$  und analog  $\bar{\sigma}_X := \sigma_X \cap \bar{\mathcal{Q}}_2 = \{\bar{X}\} \vee \bar{\Sigma}_1$ ,  $\sigma_X' := \bar{\sigma}_X \varphi_1 = \{X'\} \vee \Sigma_2'$  und analog  $\sigma_X'' := \bar{\sigma}_X \varphi_2 = \{X''\} \vee \Sigma_1''$ .

F\u00fcr  $\dim \Pi = n$ ,  $\dim \Pi(\Sigma_1 \vee \Sigma_2) = 2k+1$  gilt  $\dim \Pi(\sigma_X) = 2k+2$  und  $\dim \Pi(\bar{\sigma}_X) = \dim \Pi(\bar{\sigma}_X') = \dim \Pi(\bar{\sigma}_X'') = \dim \Pi(\sigma_X') = \dim \Pi(\sigma_X'') = k+1$  nach 1.1.2, (5).

**Def. 2.1.4:** Ist  $\sigma_X$  der doppelt projizierende Unterraum von  $X \notin \Sigma_1 \vee \Sigma_2$  und sind  $\sigma_X'$  und  $\sigma_X''$  echte Unterr\u00e4ume von  $\Pi(\mathcal{Q}')$ , so hei\u00dft  $\sigma_X'$  bzw.  $\sigma_X''$  der erste Ordner bzw. der zweite Ordner von X.

Wir formulieren folgenden Hilfssatz der projektiven Geometrie:

**Satz 2.1.2:** Sind  $\mathcal{U}_1$  und  $\bar{\mathcal{U}}_1$  nicht leere komplement\u00e4re Unterr\u00e4ume eines projektiven Raumes  $\Pi$  mit  $\dim \Pi \geq 2$  und fa\u00dft man jeden Verbindungsraum von  $\mathcal{U}_1$  mit einem Punkt von  $\bar{\mathcal{U}}_1$  als Punkt und genau

jeden Verbindungsraum von  $\mathcal{O}_1$  mit einer Geraden von  $\overline{\mathcal{O}}_1$  als Gerade auf, so ist die Menge  $\tilde{\mathcal{K}}$  dieser Punkte und die Menge  $\tilde{\mathcal{G}}$  dieser Geraden ein zu  $\Pi(\overline{\mathcal{O}}_1)$  isomorpher projektiver Raum.

Beweis. Nach Satz 1.2.1 ist die Abbildung  $\gamma: \overline{\mathcal{O}}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}$  mit  $\bar{X} \in \overline{\mathcal{O}}_1 \mapsto \{\bar{X}\} \vee \mathcal{O}_1 \in \tilde{\mathcal{K}}$  eine Bijektion. Nach Def. bildet  $\gamma$  kollineare bzw. nichtkollineare Punkte von  $\overline{\mathcal{O}}_1$  in Elemente aus  $\tilde{\mathcal{K}}$  ab, die einer Geraden bzw. nicht einer Geraden aus  $\tilde{\mathcal{G}}$  angehören. Damit überträgt  $\gamma$  die Aussagen (PR1), (PR2), (PR3) auf  $(\tilde{\mathcal{K}}, \tilde{\mathcal{G}})$  und ist dann eine Kollineation von  $\overline{\mathcal{O}}_1$  auf  $\tilde{\mathcal{K}}$ .  $\square$

Damit können wir beweisen:

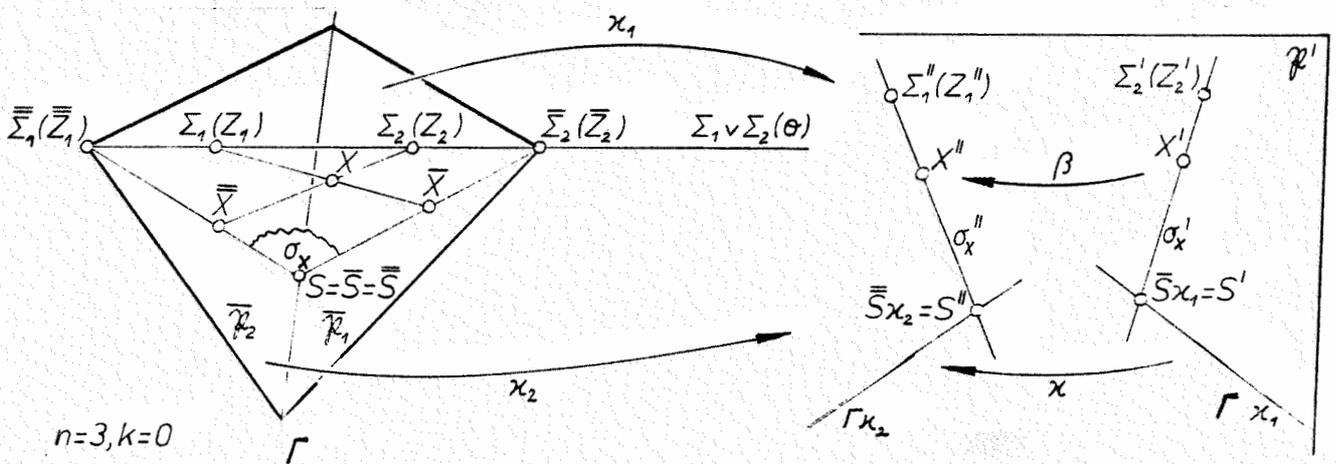
Satz 2.1.3: Ein lineares Zweibildersystem besitzt genau dann Ordner, wenn der Kernraum  $\Sigma_1 \vee \Sigma_2$  keine Hyperebene ist. Existieren Ordner, so kann die Menge der ersten bzw. zweiten Ordner als mindestens eindimensionaler projektiver Ordnerraum  $\mathcal{P}'$  bzw.  $\mathcal{P}''$  aufgefaßt werden, der zu jedem Grundraum  $\Gamma$  isomorph ist; das lineare Zweibildersystem definiert eine Ordnerkollineation  $\beta$  von  $\mathcal{P}'$  auf  $\mathcal{P}''$ .

Beweis. (a) Der doppelt projizierende Unterraum  $\sigma_X$  von  $X \in \mathcal{P}' \setminus (\Sigma_1 \vee \Sigma_2)$  schneidet  $\overline{\mathcal{P}}_1$  genau dann in einem echten Unterraum  $\overline{\sigma}_X = \{X\} \vee \Sigma_2 \neq \overline{\mathcal{P}}_1$ , wenn  $\Sigma_2$  wegen  $X \in \Sigma_2$  keine Hyperebene von  $\Pi(\overline{\mathcal{P}}_1)$  ist. Der Unterraum  $\overline{\Sigma}_2 = \overline{\mathcal{P}}_1 \cap (\Sigma_1 \vee \Sigma_2)$  ist aber genau dann eine Hyperebene von  $\Pi(\overline{\mathcal{P}}_1)$ , wenn  $\Sigma_1 \vee \Sigma_2$  eine Hyperebene von  $\Pi$  ist, weil aus  $\overline{\mathcal{P}}_1 \cap \sigma_X = \{X\} \vee (\Sigma_1 \vee \Sigma_2)$  und  $\overline{\mathcal{P}}_1 \vee \Sigma_1 = \mathcal{Q}$  folgt  $\sigma_X = \mathcal{Q}$ .

(b) Wie aus 1.2.1 folgt, erhält man die Menge aller ersten bzw. zweiten Ordner  $\sigma_X' \supset \Sigma_2'$  bzw.  $\sigma_X'' \supset \Sigma_1''$ , wenn X die Menge aller Punkte eines Grundraumes  $\Gamma$  durchläuft; existieren Ordner, so ist  $\dim \Pi(\Gamma) \geq 1$ . Auf Grund von Satz 2.1.2, angewendet auf die in  $\Pi'$  komplementären Unterräume  $\Sigma_2'$  und  $\Gamma \cap \mathcal{K}_1$  bzw.  $\Sigma_1''$  und  $\Gamma \cap \mathcal{K}_2$  erhält man die projektiven Ordnerräume  $\mathcal{P}', \mathcal{P}''$ , die zu  $\Pi(\Gamma)$  isomorph sind. Mit  $\gamma^1: \Gamma \cap \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{P}'$  und  $\gamma^2: \Gamma \cap \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{P}''$  gem. Satz 2.1.2 ist  $\beta_i = \gamma^1 \circ \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma^2: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}''$  die Ordnerkollineation.  $\square$

Für  $\dim \Pi = n$ ,  $\dim \Pi(\bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2) = 2k+1$  existieren genau für  $2k+1=n-1$ , also  $2k=n-2$  keine Ordner, was nur für  $n$  gerade möglich ist; für  $2k < n-2$  ist jeder Ordnerraum  $\mathcal{P}', \mathcal{P}''$  ein projektiver Raum der Dimension  $n-2k-2 \geq 1$ , dessen Punkte, von  $\Pi'$  aus betrachtet, die  $(k+1)$ -dimensionalen Unterräume von  $\Pi'$  durch den  $k$ -dimensionalen Unterraum  $\bar{\Sigma}_1'$  bzw.  $\bar{\Sigma}_1''$  von  $\Pi'$  sind. Für  $n$  ungerade existieren stets Ordner

Liegt der erste lineare RiB eines Punktes  $X \in \mathcal{P} \setminus (\bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2)$  im Ordner  $\sigma_X' = \{X'\} \vee \bar{\Sigma}_1'$ , so gehört der zweite lineare RiB  $X''$  von  $X$  dem Ordner  $\sigma_X'' = \{X''\} \vee \bar{\Sigma}_1''$  an, was den Namen "Ordner" motiviert. Ist  $\bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2$  eine Hyperebene von  $\Pi$ , so ist für jedes  $X \in \mathcal{P} \setminus (\bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2)$  dann  $\sigma_X' = \sigma_X'' = \mathcal{P}'$ , so daß außer  $X' \in \mathcal{P}' \setminus \bar{\Sigma}_1'$  und  $X'' \in \mathcal{P}' \setminus \bar{\Sigma}_1''$  keine weitere Bedingung zwischen den beiden linearen Rissen besteht.



Ist  $\dim \Pi = 3$ ,  $\dim \Pi' = 2$ , also  $\dim \Pi(\bar{\Sigma}_1) = \dim \Pi(\bar{\Sigma}_2) = k=0$ , so ist der Kernraum  $\bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2$  eine Gerade (Kernachse  $\sigma$ ) und der 1. bzw. 2. Kernraum in  $\bar{\mathcal{P}}_1 (\mathcal{P}'')$  bzw. in  $\bar{\mathcal{P}}_2 (\mathcal{P}')$  der Punkt  $\{\bar{Z}_2\} = \bar{\mathcal{P}}_1 \cap \sigma$  ( $\bar{Z}_2 \kappa_1 = Z_2' \in \mathcal{P}'$ ) bzw.  $\{\bar{Z}_1\} = \bar{\mathcal{P}}_2 \cap \sigma$  ( $\bar{Z}_1 \kappa_2 = Z_1'' \in \mathcal{P}''$ ). Der projizierende Unterraum  $\sigma_X$  eines Punktes  $X \in \mathcal{P} \setminus \sigma$  ist eine Ebene des Ebenenbüschels  $\mathcal{E}_\sigma$ , und die Ordner  $\sigma_X', \sigma_X''$  sind Geraden durch  $Z_2'$  bzw.  $Z_1''$ . In völlig analoger Weise sind die Fälle  $\dim \Pi = n \geq 4$ ,  $\dim \Pi' = n-1$ , also  $\dim \Pi(\bar{\Sigma}_1) = \dim \Pi(\bar{\Sigma}_2) = k=0$  zu behandeln.

Für  $\dim \Pi = 4$ ,  $\dim \Pi' = 2$ , also  $\dim \Pi(\bar{\Sigma}_1) = \dim \Pi(\bar{\Sigma}_2) = k=1$  ist der Kernraum  $\bar{\Sigma}_1 \vee \bar{\Sigma}_2$  eine von den windschiefen Geraden  $\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2$  aufgespannte Hyperebene von  $\Pi$ . Bei diesem Zweibildersystem mit  $2k=n-2$  gibt es keine Ordner und der erste bzw. zweite Kernraum in  $\mathcal{P}'$  ist die Gerade  $\bar{\Sigma}_2' = \bar{\Sigma}_2 \varphi_1 = \bar{\Sigma}_2 \kappa_1$  bzw.  $\bar{\Sigma}_1'' = \bar{\Sigma}_1 \varphi_2 = \bar{\Sigma}_1 \kappa_2$ , also eine Hyperebene von  $\Pi' (\mathcal{P}')$ .

2.2 Lineare Zweibildersysteme aus einem dreidimensionalen projektiven Raum

2.2.1 Für  $\dim \Pi = 3$  gilt  $\dim \Pi(\Sigma_1) = \dim \Pi(\Sigma_2) = 0$  nach 2.1.2 mit  $\Sigma_1 = \{Z_1\}, \Sigma_2 = \{Z_2\}$ , also  $\dim \Pi' = 2$ ; das in 2.1.3 beschriebene lineare Zweibildersystem mit  $\dim \Pi = 3$  ist also das einzig mögliche aus einem dreidimensionalen projektiven Raum  $\Pi$ . Nach 2.1.1 ist  $\Pi'$  eine Desarguesebene mit zu den Algebraisierungskörpern von  $\Pi$  isomorphen Algebraisierungskörpern. Die Ordnerräume  $\mathcal{O}', \mathcal{O}''$  sind von  $\Pi'$  aus betrachtet die Geradenbüschel  $\mathcal{O}'_{Z_2}, \mathcal{O}''_{Z_1}$ , welche Ordnerbüschel heißen, und die Ordnerkollineation  $\beta: \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}''$  ist eine Ordnerbijektion  $\beta: \mathcal{O}'_{Z_2} \rightarrow \mathcal{O}''_{Z_1}$ , welche von den doppelt projizierenden Ebenen stammt.

Jeder Grundraum  $\overline{\Sigma_1 \vee \Sigma_2} = \Gamma$  ist eine zur Kernachse  $\sigma = Z_1 Z_2$  windschiefe Gerade. Für  $Z \in \sigma \setminus \{Z_1, Z_2\}$  stellt  $\{Z\} \vee \Gamma = \alpha$  eine zu  $Z_1$  und zu  $Z_2$  komplementäre Ebene dar und  $(\varphi_1, \varphi_2) | \alpha: \mathcal{P}_\alpha \rightarrow \mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$  ist global. Mit  $\varphi_1 = \gamma_1 \kappa_1, \varphi_2 = \gamma_2 \kappa_2$  ist  $\varphi_j | \alpha: \alpha \rightarrow \mathcal{P}_j$  ( $j=1,2$ ) eine Perspektivität und daher  $\kappa_1^{-1}(\gamma_1 | \alpha)^{-1} \gamma_2 \kappa_2: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}''$  mit  $X' \mapsto X''$  für  $X \in \alpha$  eine Kollineation  $\kappa_\alpha$ , welche die Bildkollineation der nichtprojizierenden Ebene  $\alpha$  heißt. Wegen  $Z' = Z_2', Z'' = Z_1''$  und  $(X'Z_2')/\beta = X''Z_1''$  für  $X \in \alpha \setminus \{Z\}$  gilt  $\kappa_\alpha^* | \mathcal{O}'_{Z_2} = \beta$ , d.h. die Bildkollineation jeder nichtprojizierenden Ebene  $\alpha$  enthält die Ordnerbijektion. Nach 1.4.3 ist daher  $\beta$  eine spezielle Bijektion: Ist  $g \subset \alpha$  eine zu  $\sigma$  windschiefe Gerade, und sind  $A_0, A_1, P_1$  drei verschiedene Punkte von  $g$ , so gilt  $(Z_2'A_0')/\beta = Z_1'A_0''$  usw., und nach 1.4.3 bestimmt  $\beta$  daher einen Isomorphismus der Algebraisierungskörper  $K_\alpha' (A_0', A_1', P_1')$  und  $K_\alpha'' (A_0'', A_1'', P_1'')$  von  $\Pi'$ . Zusammenfassend gilt:

Satz 2.2.1: Eine zur Kernachse windschiefe Gerade  $g$  wird auf durch  $\beta: \mathcal{O}'_{Z_2} \rightarrow \mathcal{O}''_{Z_1}$  bijektiv gekoppelte Geraden  $g', g''$  abgebildet, wobei  $\beta$  einen Isomorphismus des durch die ersten linearen Risse dreier Punkte von  $g$  festgelegten Algebraisierungskörpers auf den durch ihre zweiten linearen Risse festgelegten Algebraisierungskörper bestimmt. Nichtprojizierende Ebenen definieren eine Bildkollineation, welche die Ordnerbijektion enthält.

Für eine von  $\sigma$  verschiedene, erstprojizierende Gerade  $s_1$  ist  $s_1' = \{X\varphi_1 | X \in s_1 \setminus \{Z_1\}\}$  ein von  $Z_2'$  verschiedener Punkt und  $(s_1' \vee \{Z_2'\})/\beta = s_1'' \in \mathcal{O}''_{Z_1}$ . Für eine erst-, aber nicht doppeltprojizierende Ebene  $\alpha_1$  ist  $\alpha_1' = \{X\varphi_1 | X \in \alpha_1 \setminus \{Z_1\}\}$  eine Gerade nicht durch  $Z_2'$  und  $\{X\varphi_2 | X \in \alpha_1'\} = \mathcal{P}'$ ;

für eine doppelt projizierende Ebene  $\sigma \in \mathcal{L}_\sigma$  ist  $\sigma' = \{X \in \sigma \setminus \{Z_1\}\}$  eine Gerade durch  $Z_2'$ , und  $\sigma'' = \{X \in \sigma \setminus \{Z_2\}\}$  ist eine Gerade durch  $Z_1''$ .

In der konstruktiven Geometrie sind spezielle lineare Zweibildersysteme von Bedeutung:

Def.2.2.1: Ist  $\Pi$  ein dreidimensionaler fanoischer Papposraum (klassischer dreidimensionaler projektiver Raum) und  $\beta: \mathcal{O}_{Z_2'} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_1''}$  eine Projektivität, so heißt  $(\varphi_1, \varphi_2)$  ein klassisches lineares Zweibildersystem.

Bei einem solchen ist nach Satz 2.2.1 die Bildkollineation jeder nichtprojizierenden Ebene projektiv.

Gestattet ein Algebraisierungskörper  $K$  eines dreidimensionalen projektiven Raumes  $\Pi$  nur den trivialen Automorphismus und ist  $\text{Char } K \neq 2$ , so existieren nach 1.4.4 nur klassische lineare Zweibildersysteme aus  $\Pi$ ; dies trifft speziell für  $K \cong \mathbb{R}$ , aber nicht für  $K \cong \mathbb{C}$  zu.

2.2.2 Die konstruktive Behandlung von Aufgaben in einem linearen Zweibildersystem aus  $\Pi$  mit  $\dim \Pi = 3$  stützt sich auf die Ordnerbijektion  $\beta: \mathcal{O}_{Z_2'} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_1''}$ .

Def.2.2.2: Das Tripel  $\{Z_2', Z_1''; \beta\}$  heißt die Hauptbildfigur von  $(\varphi_1, \varphi_2)$ . Ist  $Z_2' \neq Z_1''$  und  $\beta$  keine Perspektivität bzw. eine Perspektivität, so heißt  $(\varphi_1, \varphi_2)$  vom 1. Typ bzw. vom 2. Typ; ist  $Z_2' = Z_1''$  und  $\beta$  nicht die Identität bzw. die Identität, so heißt  $(\varphi_1, \varphi_2)$  vom 3. Typ bzw. vom 4. Typ.

Da  $\beta$  bei Typ 2 und Typ 4 eine Projektivität ist, ist bei diesen beiden Typen die Bildkollineation einer nicht projizierenden Ebene stets projektiv.

Beim 2. Typ verwendet man die Perspektivitätsachse (Ordnerachse)  $\mathcal{A}_\beta$  von  $\beta$  zur Vervollständigung von  $\beta$ . Ist  $(\varphi_1, \varphi_2)$  klassisch, so gibt es beim 1. Typ einen durch  $\beta$  erzeugten Ordnerkegelschnitt mit den Grundpunkten  $Z_2'$  und  $Z_1''$ , und beim 3. Typ kann  $\beta$  etwa unter Benützung eines STEINERkegelschnitts durch  $Z_2' = Z_1''$  vervollständigt werden.

Da  $(\varphi_1, \varphi_2) |_{\mathcal{P} \setminus \sigma}$  nach Satz 2.1.1 injektiv ist, können die Lageaufgaben in  $\Pi$ , soweit sie Elemente aus  $\mathcal{P} \setminus \sigma$  betreffen, in einem linearen Zweibildersystem gelöst werden.

Welcher Typ dabei zugrundeliegt ist für die konstruktive Behandlung gleichgültig und bedeutet nur, daß  $\beta$  verschiedenartig vervollständigt werden muß.

Nach 1.6.1 genügt es, die Aufgaben (1) und (2) von  $\Pi$  in  $\Pi'$  zu lösen:

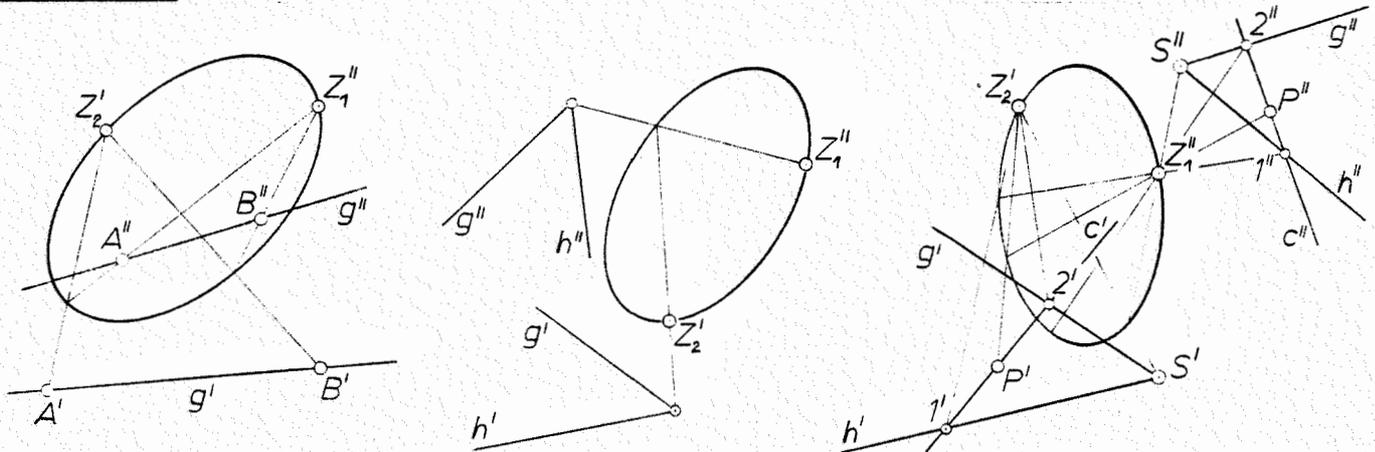
$$(1): P \in g \Leftrightarrow P' \in g', P'' \in g'', (P'Z_2')/\beta = P''Z_2''.$$

$$(2): g \subset \alpha \Leftrightarrow g' \kappa_\alpha = g'' \quad \text{für } \alpha \text{ nicht projizierend,}$$

$$g' = \alpha' \quad \text{für } \alpha \text{ erstprojizierend,}$$

$$g' \in \mathcal{G}_{Z_2}', g'' = g'/\beta \quad \text{für } \alpha \text{ doppelprojizierend.}$$

Die Figuren zeigen die Lösungen (L1) und die Schnittbedingung  $(g'h' \vee \{Z_2'\})/\beta = g''h'' \vee \{Z_2''\}$ , wobei ein klassisches Zweibildersystem vom 1. Typ gewählt wurde. Die Schnittbedingung ermöglicht es, eine nichtprojizierende Ebene  $\alpha$  durch einen Zwickel<sup>1</sup> festzulegen, was (L2) (L3) und (L2\*) erledigt; weiter kann dann (1) und  $P \in \alpha$  durch Angittern gelöst werden. Ist die nichtprojizierende Ebene  $\alpha$  durch



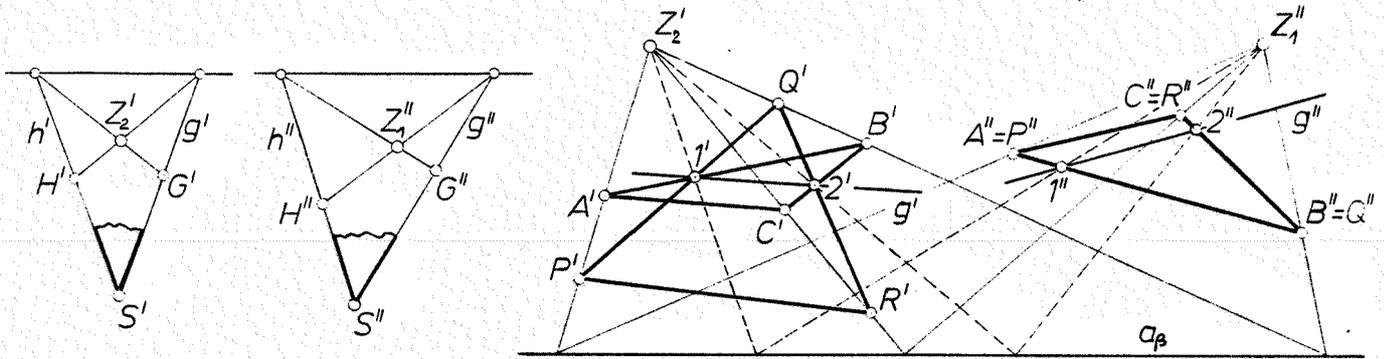
einen Zwickel gegeben, wird (L3\*) durch Angittern einer Geraden  $c \subset \alpha$  mit  $c' = g'$  und (L1\*) durch zweimalige Anwendung von (L3\*) gelöst.

Kennt man die Bildkollineation  $\kappa_\alpha$  einer nichtprojizierenden Ebene  $\alpha$ , so kann man sofort zu einem Zwickel in  $\alpha$  übergehen. Ist umgekehrt ein Zwickel von  $\alpha$  gegeben, so sind  $\{S' = g'h', G' \in g' \setminus \{S'\}, H' \in h' \setminus \{S'\}, Z_2'\}$  und  $\{S'' = g''h'', G'' \in g'' \setminus \{S''\}, H'' \in h'' \setminus \{S''\}, Z_2''\}$  zwei Vierecke, also zwei Fundamentalmengen in  $\Pi'$ , und  $\beta: \mathcal{G}_{Z_2}' \rightarrow \mathcal{G}_{Z_2}''$  definiert einen

<sup>1</sup> Im Elementarunterricht sollte man zur Festlegung einer Ebene stets einen Zwickel benützen, der, undurchsichtig angenommen, auch einfachen Figuren einen anschaulichen Charakter verleiht. Spuren und Spurpunkte haben bei der konstruktiven Behandlung einer Ebene nichts verloren.

Körperisomorphismus  $\alpha: K_{\alpha'}(S, G; g' \cap Z_2' H') \rightarrow K_{\alpha''}(S', G', g'' \cap Z_2'' H'')$ .

Nach Satz 1.4.3 und 1.1.2 ist damit  $\kappa_\alpha$  eindeutig bestimmt.



Anstatt mit einem Zwickel kann man auch direkt mit der Bildkollineation einer nichtprojizierenden Ebene  $\alpha$  arbeiten. Sind zum Beispiel  $\kappa_\alpha, \kappa_\beta$  die verschiedenen Bildkollineationen zweier verschiedener nichtprojizierender Ebenen, so ist  $(\kappa_\alpha \kappa_\beta^{-1})^* | \mathcal{U}_{Z_2}^1 = id_{\mathcal{U}_{Z_2}^1}$ , also  $\kappa_\alpha \kappa_\beta^{-1}: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}'$  eine perspektive Kollineation; für ihre Achse  $g'$  gilt  $g' \kappa_\alpha = g' \kappa_\beta$ , so daß  $g'$  nach (12) der erste lineare Riß von  $g = \alpha / \beta$  ist. Zur konstruktiven Durchführung dieser Lösung von (L1\*) sei  $A, B, C \in \alpha$ ,  $P, Q, R \in \beta$  mit  $A'' = P'', B'' = Q'', C'' = R''$ ; dann sind  $\{A', B', C'\}$  und  $\{P', Q', R'\}$  zwei  $Z_2'$ -perspektive Dreiecke, und  $g'$  ist ihre DESARGUES-Achse (in der Figur liegt ein Zweibildersystem vom 2. Typ zugrunde).

Lageaufgaben, bei denen projizierende Geraden oder Ebenen vorkommen, sind trivial.

2.2.3 Ein Punkt  $X \in \mathcal{P}$  mit  $X' = X''$  heißt ein Koinzidenzpunkt.  
Dann gilt:

Satz 2.2.2: Bei einem klassischen linearen Zweibildersystem erfüllen die Koinzidenzpunkte folgende, durch die Hauptbildfigur und  $Z_1, Z_2 \in \mathcal{K}$  bestimmten Punktmenge  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \setminus \{Z_1, Z_2\}$ :

1. Typ:  $\mathcal{K}$  ist eine in  $Z_1$  und  $Z_2$  punktierte Kubik,
2. Typ:  $\mathcal{K}$  ist ein in  $Z_1$  und  $Z_2$  punktiertes Kegelschnitt in einer doppelt projizierenden Ebene  $\mathcal{J}$  und eine zu  $o$  windschiefe Sekante  $l$  des Kegelschnitts.
3. Typ:  $\mathcal{K}$  ist  $o \setminus \{Z_1, Z_2\}$  oder  $o \setminus \{Z_1, Z_2\}$  und eine  $o$  nicht in  $Z_1, Z_2$  treffende Gerade oder  $o \setminus \{Z_1, Z_2\}$  und zwei windschiefe,  $o$  nicht in  $Z_1, Z_2$  treffende Geraden.
4. Typ:  $\mathcal{K}$  ist  $o \setminus \{Z_1, Z_2\}$  und eine nichtprojizierende Koinzidenzebene  $K$ .



(c) Wegen  $Z_2' = Z_2''$  besteht  $\sigma \setminus \{Z_1, Z_2\}$  beim 3. und 4. Typ aus Koinzidenzpunkten. Weitere Koinzidenzpunkte liegen nur dann vor, wenn ein erster Ordner auch ein zweiter Ordner ist, was bei Typ 3 höchstens zweimal und bei Typ 4 stets zutrifft.

Gilt für  $f' \in \mathcal{G}_{Z_1}'$ , dann  $f'' := f' \circ \beta = f'$ , so ist die in der doppeltprojizierenden Ebene  $f$  mit dem Bildpaar  $(f', f'')$  wie in (b) definierte Projektivität  $\delta: \bar{f} \rightarrow \bar{f}$  wegen  $Z_2' = Z_2''$ , also  $\bar{Z}_2 \delta = \bar{Z}_2$ , eine Perspektivität, die eine wegen  $Z_2' \in f'$  die Kernachse  $\sigma$  schneidende nichtprojizierende Gerade aus Koinzidenzpunkten erzeugt.

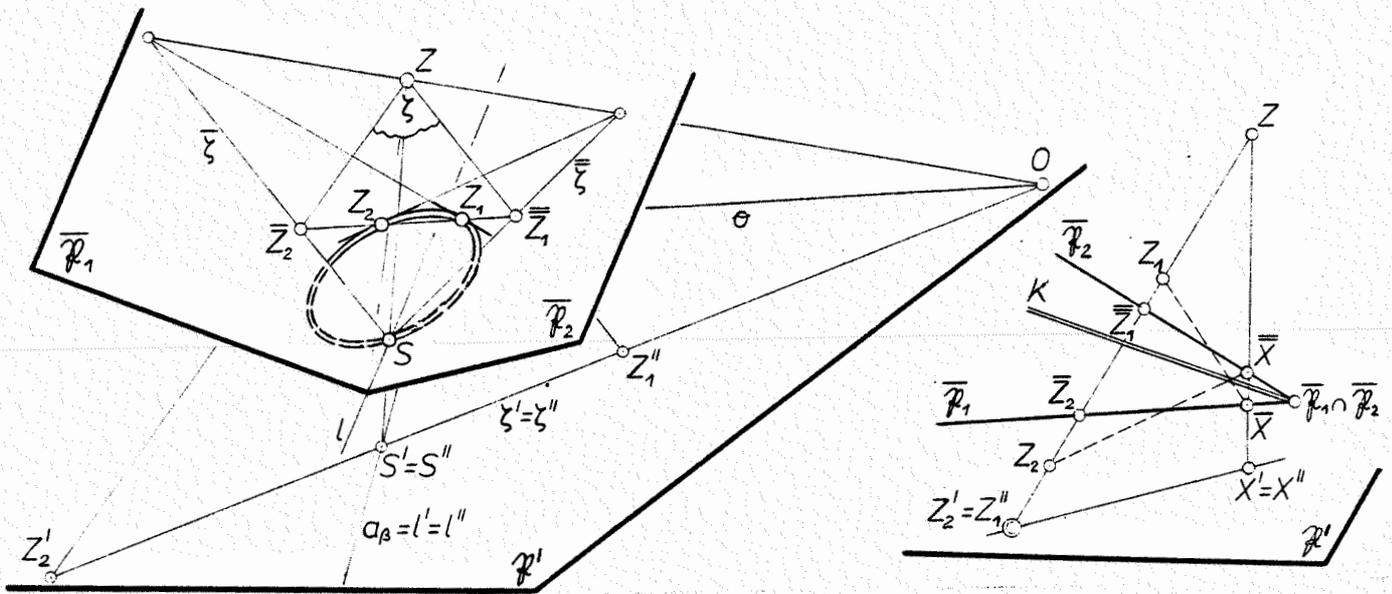
Existieren bei Typ 3 zwei Fixgeraden von  $\beta$ , so gibt es zwei nichtprojizierende Geraden aus Koinzidenzpunkten, welche in verschiedenen doppeltprojizierenden Ebenen liegen und  $\sigma$  in verschiedenen Punkten schneiden; spannen sie nämlich eine nichtprojizierende Ebene  $\alpha$  auf, so müßten die Identitäten auf den beiden Fixgeraden von  $\beta$  in die Bildkollineation  $k_\alpha$  passen, was mit  $k_\alpha = id_{\mathcal{K}}$ , den Widerspruch  $\beta = id_{\mathcal{G}_{Z_2}'}$  ergibt.

Bei Typ 4 ist  $id_{\mathcal{K}}$  die Bildkollineation einer nichtprojizierenden Ebene  $K$ , die nur aus Koinzidenzpunkten besteht.  $\square$

Ist  $\alpha$  eine nichtprojizierende Ebene mit der Bildkollineation  $k_\alpha$ , so sind genau die Fixpunkte von  $k_\alpha$  die Bilder der Koinzidenzpunkte in  $\alpha$ . Bei Typ 4 ist  $k_\alpha$  stets eine perspektive Kollineation, deren Achse die Bilder der Koinzidenzpunkte von  $\alpha$  trägt, welche auf der Geraden  $\alpha \cap K$  liegen.

2.2.4 Ist speziell  $\Pi'$  eine Ebene in  $\Pi$ , also  $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ , so erhält man ein lineares Zweibildersystem aus  $\Pi$ , wenn man die Kollineationen  $\mu_1$  und  $\mu_2$  als Perspektivitäten  $\bar{\mathcal{P}}_1 \rightarrow \mathcal{K}'$  bzw.  $\bar{\mathcal{P}}_2 \rightarrow \mathcal{K}'$  zum selben Zentrum  $Z \notin \bar{\mathcal{P}}_1, \bar{\mathcal{P}}_2, \mathcal{K}'$  wählt. Je nachdem  $Z$  nicht auf  $\sigma$  liegt und  $\bar{\mathcal{P}}_1 \neq \bar{\mathcal{P}}_2$  gilt bzw.  $Z$  auf  $\sigma$  liegt, entsteht ein lineares Zweibildersystem vom 2. bzw. 4. Typ; beim 2. Typ ist die Ordnerachse die Bildgerade von  $\bar{\mathcal{P}}_1 \cap \bar{\mathcal{P}}_2$  bei der Perspektivität aus  $Z$ .

Entsteht ein lineares Zweibildersystem vom 2. Typ auf diese Weise, so liegt der Koinzidenzkegelschnitt in der Ebene  $f = \{Z\} \vee \sigma$ , der durch  $Z_1, Z_2$  und dem Schnittpunkt  $S$  von  $f$  mit der Koinzidenzgeraden  $l = \bar{\mathcal{P}}_1 \cap \bar{\mathcal{P}}_2$  hindurchgeht; unter Benützung des Punktes  $O := \sigma \cap \mathcal{K}'$  können die Tangenten des Koinzidenzkegelschnitts in  $Z_1$  und  $Z_2$



als  $Z_1 \cdot (Z_0 \cap \bar{P}_1)$  bzw.  $Z_2 \cdot (Z_0 \cap \bar{P}_2)$  konstruiert und dieser damit festgelegt werden.

Entsteht ein lineares Zweibildersystem vom 4. Typ auf diese Weise und ist  $\bar{P}_1 = \bar{P}_2$ , so stellt diese Ebene die Koinzidenzebene  $K$  dar; für  $\bar{P}_1 \neq \bar{P}_2$  enthält die Koinzidenzebene  $K$  die Gerade  $\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2$  und ist durch einen weiteren Punkt  $X$  mit  $\{X\} = \bar{X}Z_1 \cap \bar{X}Z_2$  und  $\{X' = X'', \bar{X}, \bar{X}', Z\}$  kollinear festgelegt.

2.2.5 Da  $(\varphi_1, \varphi_2) | (\mathcal{P} \setminus \sigma)$  nach Satz 2.1.1 injektiv ist, kann jede Punktmenge  $K \subset \mathcal{P} \setminus \sigma$  aus der Menge der Bildpaare  $(X', X'') \in \mathcal{P}' \times \mathcal{P}'$  aller ihrer Punkte  $X \in K$  eindeutig rekonstruiert werden, wenn  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{P}_1, \bar{P}_2$  und die Kollineationen  $\kappa_1: \bar{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}', \kappa_2: \bar{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}'$  bekannt sind.

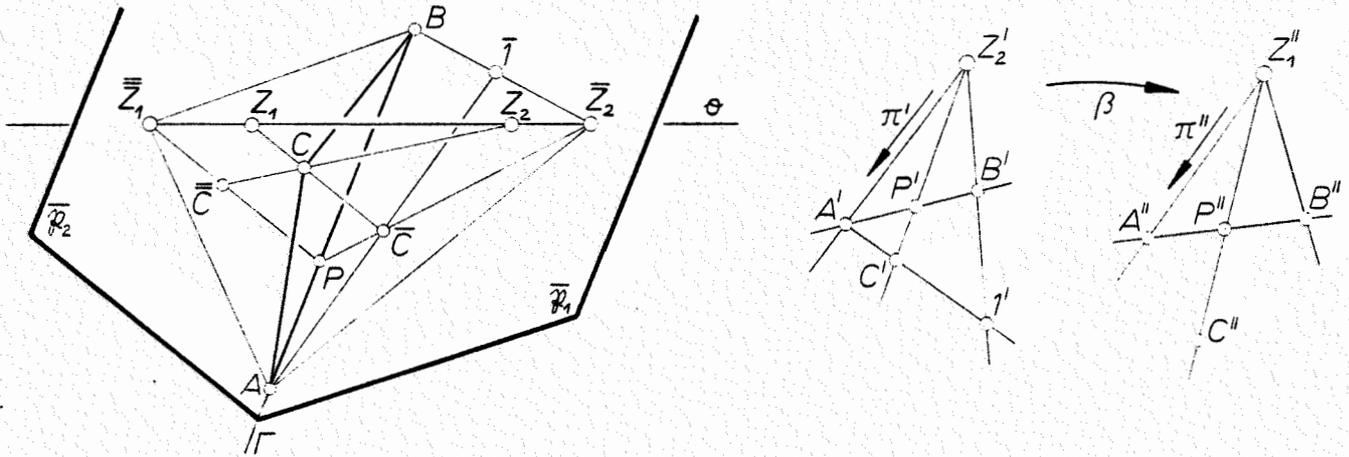
Genauer gilt:

Satz 2.2.3: Kennt man die Hauptbildfigur  $\{Z'_2, Z''_1\}$  eines linearen Zweibildersystems  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}' \times \mathcal{P}'$  aus einem dreidimensionalen projektiven Raum, so ist jede Punktmenge  $K \subset \mathcal{P}$  durch die Bildpaare  $(X', X'') \in \mathcal{P}' \times \mathcal{P}'$  ihrer Punkte  $X \in K$  bis auf Kollineationen eindeutig bestimmt, falls stets  $X' \neq Z'_2, X'' \neq Z''_1$  gilt.

Beweis. (a) Wir wählen ein Dreieck  $\{A, B, C\} \subset \mathcal{P}$  und die Bildpaare  $(A', A''), (B', B''), (C', C'') \in \mathcal{P}' \times \mathcal{P}'$  so, daß  $\{A', B', C', Z'_2\}, \{A'', B'', C'', Z''_1\}$  zwei Vierecke in  $\mathcal{P}'$  mit  $(Z'_2 A') \beta = Z''_1 A'', (Z'_2 B') \beta = Z''_1 B'', (Z'_2 C') \beta = Z''_1 C''$  sind. Dann liegen die verschiedenen Ausnahmepunkte von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  nicht in der Dreiecksebene und die Kernachse trifft keine Seite des Dreiecks  $\{A, B, C\}$ ; wir wählen  $Z_1, Z_2$  zulässig. Zu dieser Angabe ist

dann  $AB =: \Gamma$  ein Grundraum; nach 2.1.2 existiert durch  $\Gamma$  eine zu  $Z_1$  bzw.  $Z_2$  komplementäre Ebene  $\bar{\mathcal{P}}_1$  bzw.  $\bar{\mathcal{P}}_2$ . Die Projektion  $\psi_1: \mathcal{P} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}_1$  bzw.  $\psi_2: \mathcal{P} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}_2$  zum Zentrum  $Z_1$  bzw.  $Z_2$  leistet  $\bar{A} = A\psi_1 = A$ ,  $\bar{B} = B\psi_1 = B$  bzw.  $\bar{A} = A\psi_2 = A$ ,  $\bar{B} = B\psi_2 = B$ .

Die doppelt projizierenden Ebenen  $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$  sind nach Konstruktion paarweise verschieden und es gilt  $\{A\} = \Gamma \cap \sigma_A$ ,  $\{B\} = \Gamma \cap \sigma_B$ ; wir setzen  $\{P\} := \Gamma \cap \sigma_C$ . Durch  $(A, B; P)$  wird ein Algebraisierungskörper  $K$  von  $\Pi$  und durch  $(A', B; P')$  mit  $\{P'\} := A'B' \cap Z_2C'$  ein zu  $K$



isomorpher Algebraisierungskörper  $K'$  von  $\Pi'$  bestimmt; sei  $\alpha_1: K(A, B; P) \rightarrow K'(A', B; P')$  ein solcher Isomorphismus<sup>2</sup>. Weiter sind  $\{A', B; P'\}$  mit  $\{P'\} := Z_2'B' \cap A'C'$  und  $\{A, B; \bar{P}\}$  mit  $\{\bar{P}\} := \bar{Z}_2B \cap A\bar{C}$  Dreiecke. Nach Satz 1.4.3 existiert genau eine Kollineation  $\kappa_1: \bar{\mathcal{P}}_1 \rightarrow \mathcal{P}'$  mit  $A\kappa_1 = A'$ ,  $B\kappa_1 = B'$ ,  $\bar{P}\kappa_1 = P'$ ,  $(\bar{Z}_2P)\kappa_1 = Z_2'P'$  und  $\kappa_1|_{(AB) \setminus \{P\}} = \alpha_1$ , und diese leistet auch  $\bar{C}\kappa_1 = C'$ ,  $\bar{Z}_2\kappa_1 = Z_2'$ .

In analoger Weise definieren wir eine Kollineation  $\kappa_2: \bar{\mathcal{P}}_2 \rightarrow \mathcal{P}'$ , aber so, daß der Körperisomorphismus  $\alpha_2: K(\bar{A}, B; P) \rightarrow K''(A'', B''; P'')$  mit  $\{P''\} = A''B'' \cap Z_1''C''$  wie folgt erklärt wird: Sind  $\pi_1: \mathcal{O}_{Z_1}^1 \rightarrow A'B'$ ,  $\pi_2: \mathcal{O}_{Z_2}^2 \rightarrow A''B''$  Perspektivitäten, so setzen wir  $\alpha_2 = \alpha_1 \pi_1^{-1} / \beta \pi_2: K \rightarrow K''$ . Ist dann  $(X', X'') \in (\mathcal{P}' \setminus \{Z_1'\}) \times (\mathcal{P}'' \setminus \{Z_1''\})$  mit  $(Z_2'X') / \beta = Z_1''X''$  Bildpaar eines Punktes  $X \in \mathcal{P} \setminus \sigma$ , so gehören  $\bar{X} := X'\kappa_1^{-1}$  und  $\bar{X} := X''\kappa_2^{-1}$  wegen  $\alpha_1 \pi_1^{-1} / \beta \pi_2 \alpha_2^{-1} = id_\Gamma: \Gamma \rightarrow \Gamma$  einer doppelt projizierenden Ebene  $\sigma_X$  an und  $\{X\} = \bar{X}Z_1 \cap \bar{X}Z_2$  ist wegen  $\bar{X} \neq \bar{Z}_2$ ,  $\bar{X} \neq \bar{Z}_1$  eindeutig bestimmt. Damit ist  $\phi := (\sigma_1, \sigma_2) |_{(\mathcal{P} \setminus \sigma)}$  mit  $X \in \mathcal{P} \setminus \sigma \mapsto X\phi = (X', X'')$  und  $\sigma_1 = \psi_1 \kappa_1$ ,  $\sigma_2 = \psi_2 \kappa_2$  eine globale Injektion.

<sup>2</sup>Zur tatsächlichen Rekonstruktion muß ein solcher Körperisomorphismus bekannt sein. Satz 2.2.3 ist nur eine Existenzaussage.

(b) Nach zulässiger Auswahl der Vierecke  $\{A', B', C', Z_2'\} \subset \mathcal{P}'$ ,  $\{A'', B'', C'', Z_1''\} \subset \mathcal{P}'$ , des Dreiecks  $\{A, B, C\} \subset \mathcal{P}$ , der Zentren  $Z_1, Z_2$  und des Körperisomorphismus  $\alpha_1: K(A, B; P) \rightarrow K'(A', B'; P')$  ist das Rekonstruktionsergebnis unabhängig von der zulässigen Wahl der Bildebene von  $\psi_1$  und  $\psi_2$ . Ist nämlich  $\tilde{\mathcal{P}}_1$  bzw.  $\tilde{\mathcal{P}}_2$  eine andere zu  $Z_1$  bzw.  $Z_2$  komplementäre Ebene, so gilt für die Kollineationen  $\tilde{\alpha}_1: \tilde{\mathcal{P}}_1 \rightarrow \mathcal{P}'$ ,  $\tilde{\alpha}_2: \tilde{\mathcal{P}}_2 \rightarrow \mathcal{P}'$  notwendig  $\tilde{\alpha}_j = (\psi_j | \tilde{\mathcal{P}}_j)$  ( $j=1, 2$ ).

(c) Ist  $(\tilde{A}', \tilde{A}'')$ ,  $(\tilde{B}', \tilde{B}'')$ ,  $(\tilde{C}', \tilde{C}'') \in \mathcal{P}' \times \mathcal{P}'$ ,  $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\} \subset \mathcal{P}$ ,  $\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2$  eine andere zulässige Angabe und  $\tilde{\alpha}: \tilde{K}(\tilde{A}, \tilde{B}; \tilde{P}) \rightarrow \tilde{K}'(\tilde{A}', \tilde{B}'; \tilde{P}')$  mit  $\{\tilde{P}\} := \tilde{A}\tilde{B} \cap \tilde{\sigma}_{\tilde{C}}$ ,  $\tilde{\sigma}_{\tilde{C}} := \{\tilde{C}\} \vee \tilde{\sigma}$ ,  $\{\tilde{P}'\} := \tilde{A}'\tilde{B}' \cap \tilde{Z}_2'\tilde{C}'$  ein Körperisomorphismus, so wird jedem Bildpaar  $(X', X'') \in (\mathcal{P}' \setminus \{Z_2'\}) \times (\mathcal{P}' \setminus \{Z_1''\})$  mit  $(Z_2'X')/b = Z_1''X''$  nach (a) eindeutig ein Punkt  $\tilde{X} \in \mathcal{P} \setminus \tilde{\sigma}$  zugeordnet und  $\tilde{\phi}: \mathcal{P} \setminus \tilde{\sigma} \rightarrow \mathcal{P}' \times \mathcal{P}'$  mit  $\tilde{X} \in \mathcal{P} \setminus \tilde{\sigma} \mapsto X\tilde{\phi} = (X', X'')$  ist eine globale Injektion.

Die Abbildung  $\tilde{\mu} := \phi \tilde{\phi}^{-1}: \mathcal{P} \setminus \tilde{\sigma} \rightarrow \mathcal{P} \setminus \tilde{\sigma}$  ist eine Bijektion, da im  $\phi = \text{im } \tilde{\phi} \subset \mathcal{P}' \times \mathcal{P}'$  gilt. Wir konstruieren eine Kollineation  $\kappa: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  mit  $\kappa | (\mathcal{P} \setminus \tilde{\sigma}) = \tilde{\mu}$ .

Die Bijektion  $\tilde{\mu}$  führt drei kollineare Punkte  $X, Y, Z \in \mathcal{P} \setminus \tilde{\sigma}$  stets in drei kollineare Punkte  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \mathcal{P} \setminus \tilde{\sigma}$  über: Für  $XY \cap \tilde{\sigma} = \emptyset$  oder für  $Z_1 \in XY$  oder für  $Z_2 \in XY$  ist das trivial. Gilt  $XY \cap \tilde{\sigma} = \{Z\}$ ,  $Z \neq Z_1, Z_2$ , so ist  $XY \subset \sigma_X$ , also  $\{X', Y', Z', Z_2'\} \subset \sigma_X'$  und  $\{X'', Y'', Z'', Z_1''\} \subset \sigma_X'' = \sigma_X'/b$ . Ist  $\alpha$  eine von  $\sigma_X$  verschiedene Ebene durch  $X, Y$  und  $\kappa_\alpha: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}'$  die Bildkollineation von  $\alpha$  (vgl. 2.2.1), so gilt  $\kappa_\alpha^* | \mathcal{P}_{Z_2}' = /b$ . Durch  $\kappa_\alpha$  wird nach 2.2, Fn.1 eine Ebene  $\tilde{\alpha} \subset \mathcal{P}$  mit  $\tilde{X}, \tilde{Z}_2 \notin \tilde{\alpha}$  definiert, welche  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$  enthält und von  $\sigma_X$  verschieden ist. Wegen  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \tilde{\alpha} \cap \sigma_X$  sind die Punkte  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$  kollinear.

Wir definieren eine globale Abbildung  $\kappa: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  durch

$$X\kappa := X\tilde{\mu} \text{ für } X \in \mathcal{P} \setminus \tilde{\sigma}, \quad \tilde{Z}_i\kappa := \tilde{Z}_i \quad (i=1, 2),$$

$$\{G\kappa\} := \tilde{\sigma} \cap P\tilde{\mu}Q\tilde{\mu} \text{ für } G \in \tilde{\sigma} \setminus \{Z_1, Z_2\} \text{ und } G \in PQ, P, Q \in \mathcal{P} \setminus \tilde{\sigma}.$$

Diese Definition ist sinnvoll: Ist  $g=PQ$  und  $g_1 = P_1Q_1$  mit  $g \cap g_1 = \{G\}$  und  $\emptyset \neq g \vee g_1$ , so sind  $PP_1, QQ_1$  zwei zu  $\tilde{\sigma}$  windschiefe, einander schneidende Geraden; dann sind  $P\tilde{\mu}P_1\tilde{\mu}, Q\tilde{\mu}Q_1\tilde{\mu}$  zwei zu  $\tilde{\sigma}$  windschiefe, einander schneidende Geraden, die eine  $P\tilde{\mu}Q\tilde{\mu}$  und  $P_1\tilde{\mu}Q_1\tilde{\mu}$  enthaltende Ebene aufspannen. Da diese  $\tilde{\sigma}$  in genau einem Punkt schneidet, ist  $G\kappa$  für  $\emptyset \neq g \vee g_1$  unabhängig von der Auswahl der Punkte  $P, Q$  mit  $G \in PQ$ . Gilt dagegen  $\emptyset \subset g \vee g_1$ , so schalten wir zwei Punkte  $P_2, Q_2$  einer Geraden  $g_2$  dazwischen mit  $g \cap g_2 = g_2 \cap g_1 = \{G\}$  und  $\emptyset \neq g \vee g_2, \emptyset \neq g_2 \vee g_1$ .

Damit ist  $\alpha: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  eine Bijektion, die kollineare Lage in  $\mathbb{P}$  erhält, also nach 1.1.3 eine Kollineation.  $\square$

Kennt man die Zentren  $Z_1, Z_2$ , die Vierecke  $\{A', B', C', Z_2'\} \subset \mathbb{P}'$ ,  $\{A'', B'', C'', Z_1''\} \subset \mathbb{P}''$  und das Dreieck  $\{A, B, C\} \subset \mathbb{P}$ , so ist nach den Beweisteilen (a) und (b) die Rekonstruktion eindeutig durchführbar, falls der Körperisomorphismus  $\alpha$ , gegeben ist. Gestatten die Algebraisierungs-körper nur diesen trivialen Automorphismus, so kann auf die zusätzliche Angabe des Körperisomorphismus verzichtet werden.

Durch Satz 2.2.3 wird die Rekonstruktion einer Punktmenge aus der Menge der beschrifteten Bildpaare  $(X'X'')$  ihrer Punkte  $X$  beschrieben. Kennt man von einer Geraden  $g$  die linearen Risse  $g', g''$ , so muß diese nicht eindeutig rekonstruiert werden können, falls man nicht die Bildpaare zweier ihrer Punkte kennt: Trifft nämlich  $g$  die Kernachse  $\sigma$  in einem von  $Z_1, Z_2$  verschiedenen Punkt  $G$ , so ist  $G' = Z_2'$ ,  $G'' = Z_1''$  und  $g' = \sigma_X'$ ,  $g'' = \sigma_X''$  für  $X \in g \setminus \{G\}$ ; jede Punktmenge in der doppelt projizierenden Ebene  $\sigma_X$  hat aber das erste Bild auf  $\sigma_X'$  und das zweite Bild auf  $\sigma_X''$ . Kennt man aber zusätzlich die Bildpaare zweier Punkte  $X, Y \in g \setminus \{G\}$ , so ist  $g$  nach Satz 2.2.3 festgelegt<sup>3</sup> und die Abbildung  $\mathbb{P}' \rightarrow \mathbb{P}''$  für  $\mathbb{P} \in g$  paßt in die Bildkollineation jeder  $g$  enthaltenden nicht projizierenden Ebene. Im Reellen speziell ist daher  $DV(X', Y', P', Z_2') = DV(X'', Y'', P'', Z_1'')$ .

2.2.6 Bei einem linearen Zweibildersystem aus einem affinen Raum  $\overset{\circ}{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  sind folgende drei Fälle möglich:

Fall 1: Für  $Z_1, Z_2 \notin \omega$  besitzt die Fernebene  $\omega$  eine Bildkollineation  $h_\omega$  mit  $h_\omega^* | \sigma_{Z_i}^i = \beta$ , und  $\overset{\circ}{\varphi}_i: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}' (i=1,2)$  ist nach Satz 1.3.7 surjektiv. Wird in  $\overset{\circ}{\Pi}'$  eine Ferngerade  $u'$  ausgezeichnet und faßt man  $\overset{\circ}{\varphi}_i$  als Abbildung aus dem affinen Raum  $\overset{\circ}{\Pi}$  in die affine Ebene  $\overset{\circ}{\Pi}' = \overset{\circ}{\Pi}' \setminus u'$  auf, so sind beide lineare Risse nach 1.3.6 stets affin zu je einem Zentralriß.

Fall 2:  $Z_1 \in \omega, Z_2 \notin \omega$ : Dann ist  $\omega'$  eine Gerade nicht durch  $Z_2'$  und  $\overset{\circ}{\varphi}_2: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}''$  surjektiv. Ist  $\overset{\circ}{\Pi}' = \overset{\circ}{\Pi}' \setminus u'$  eine affine Ebene und gilt  $u' = \omega'$ , so ist nach Satz 1.3.7 dann  $\overset{\circ}{\varphi}_1: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  bzw.  $\overset{\circ}{\varphi}_2: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}''$  affin zu einem Parallelriß bzw. zu einem Zentralriß.

Fall 3:  $\omega$  ist doppeltprojizierend. Dann sind  $\omega', \omega''$  zwei in  $\beta$  zugeordnete Geraden. Genau dann, wenn für die Ferngerade  $u'$

<sup>3</sup> Dieser Fall tritt im Elementarunterricht bei Grund- und Aufriß einer dritten Hauptgeraden  $h_3$  auf. Legt man durch  $X, Y \in h_3$  etwa je eine Parallele zur y-Achse, so wird dadurch der Streifen einer drittprojizierenden Ebene  $\alpha$  durch  $h_3$  bestimmt, in der die Vervollständigungsaufgabe auf  $h_3$  durch Angittern gelöst wird.

der affinen Ebene  $\bar{\pi}' = \pi' \setminus \omega'$  gilt  $\omega' = \omega'' = \omega'''$ , sind beide linearen Risse  $\bar{\varphi}_i: \bar{\mathcal{F}} \rightarrow \bar{\mathcal{K}}'$  nach Satz 1.3.7 affin zu einer Parallelprojektion; wegen  $\omega'' = \omega'''/\beta$  kann dies nur bei einem linearen Zweibildersystem vom Typ 2, 3 oder 4 zutreffen: bei Typ 2 muß  $\omega' = \omega'' = \bar{z}_2' \bar{z}_1''$  gelten, bei Typ 3 muß  $\omega'$  Fixgerade von  $\beta$  sein und bei Typ 4 gilt stets  $\omega' = \omega''$ .

### 3. LINEARE ZWEISPURENSYSTEME

#### 3.1 Grundbegriffe

3.1.1 Ist  $\pi^*$  der zu  $\pi$  duale projektive Raum mit  $\dim \pi < \infty$ , so ist nach Satz 1.3.6 jede lineare Abbildung  $\varphi^*: \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}'$  auf einen projektiven Raum  $\pi'$  von  $\pi$  aus betrachtet das Produkt einer Spurabbildung, bei der jeder Hyperebene  $\mathcal{F}_{x^*} \in \mathcal{F}$  von  $\pi$  nicht durch einen Unterraum  $\Delta \subset \mathcal{F}$  ihre Spur  $\mathcal{F}_{x^*} \cap \Delta$  in  $\Delta$  zugeordnet wird, und einer Kollineation des zu  $\pi(\Delta)$  dualen projektiven Raumes  $(\pi(\Delta))^*$  auf  $\pi'$ .

Es ist anschaulicher, den Bildraum als den dualen projektiven Raum  $\pi^*$  eines zu  $\pi(\Delta)$  isomorphen projektiven Raumes aufzufassen, so daß der Hyperebene  $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{x^*} \in \mathcal{F}$  eine Hyperebene  $\mathcal{F}'$  von  $\pi'$  zugeordnet wird; wir bezeichnen die Menge der Hyperebenen von  $\pi'$  mit  $\mathcal{F}'$ . Unter Benützung der Annulatorabbildung (vgl. 1.2.5)  $\lambda$  von  $\pi$  und  $\lambda'$  von  $\pi'$  gilt dann  $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \lambda \varphi^* \lambda'^{-1} \in \mathcal{F}'$  für  $\mathcal{F} \not\subset \Delta$ .

Def. 3.1.1: Ist  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*): \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}' \times \mathcal{F}'$  eines linearen Zweibildersystem aus dem zu  $\pi$  dualen projektiven Raum  $\pi^*$  mit  $3 \leq \dim \pi < \infty$  und sind  $\lambda: a \pi \rightarrow a \pi^*$ ,  $\lambda': a \pi' \rightarrow a \pi'^*$  die Annulatorabbildungen von  $\pi$  und  $\pi'$ , so heißt  $(\beta_1, \beta_2) := \lambda(\varphi_1^* \lambda'^{-1}, \varphi_2^* \lambda'^{-1}): \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' \times \mathcal{F}'$  ein lineares Zweispurensystem aus  $\pi$ .

Nach Satz 1.3.6 wird jeder Hyperebene  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$  mit  $\mathcal{F} \not\subset \Delta_1, \Delta_2$  zunächst ihre Spur  $\bar{\mathcal{F}}$  in  $\pi(\Delta_1)$  bzw.  $\bar{\mathcal{F}}$  in  $\pi(\Delta_2)$  zugeordnet, welche Hyperebene in  $\pi(\Delta_1)$  bzw.  $\pi(\Delta_2)$  ist; weiters existieren Kollineationen  $\kappa_1: \Delta_1 \rightarrow \mathcal{P}'$ ,  $\kappa_2: \Delta_2 \rightarrow \mathcal{P}'$  so, daß  $\mathcal{F} \beta_1 = \bar{\mathcal{F}} \kappa_1 \in \mathcal{F}'$ ,  $\mathcal{F} \beta_2 = \bar{\mathcal{F}} \kappa_2 \in \mathcal{F}'$  gilt.

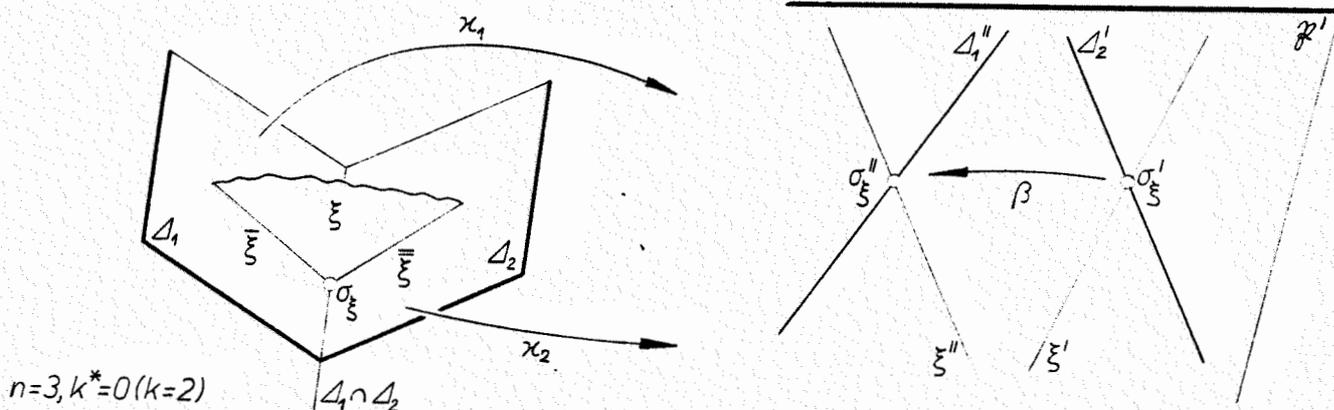
Sind  $\bar{\Sigma}_1^*, \bar{\Sigma}_2^* \subset \mathcal{F}^*$  die Ausnahmeräume von  $\varphi_1^*, \varphi_2^*$ , so ist  $\Delta_j = \bar{\Sigma}_j^* \lambda'^{-1} \subset \mathcal{F}$  nach 1.3.5. Auf Grund der Festsetzungen 1 und 2 in 2.1.1 und 2.1.2 gilt  $\bar{\Sigma}_1^* \neq \bar{\Sigma}_2^*$  und  $\bar{\Sigma}_1^* \vee \bar{\Sigma}_2^* \neq \mathcal{F}^*$ ,  $\bar{\Sigma}_1^* \wedge \bar{\Sigma}_2^* = \emptyset$ , also nach 1.2.5, (2) mit  $\mathcal{F} \lambda = \emptyset \subset \mathcal{F}^*$ ,  $\emptyset \lambda = \mathcal{F}^*$  dann

$$\Delta_1 \neq \Delta_2, \quad \Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset, \quad \Delta_1 \vee \Delta_2 = \mathcal{F}.$$

Für  $\dim \Pi = \dim \Pi^* = n \geq 3$  und  $\dim \Pi^*(\Sigma_1^*) = \dim \Pi^*(\Sigma_2^*) = k^*$ , also  $\dim \Pi(\Delta_1) = \dim \Pi(\Delta_2) = n - k^* - 1 =: k$  nach 1.2.5 gilt  $0 \leq k^* \leq n - 3$  nach 2.1.1, also  $2 \leq k \leq n - 1$ , und  $2k^* < n - 1$  nach 2.1.2, also  $n - 1 < 2k$ , was insgesamt  $n \leq 2k \leq 2(n - 1)$  ergibt. Wegen  $\dim \Pi(\Delta_1) = \dim(\Pi(\Delta_1))^* = \dim \Pi'$  ist  $\dim \Pi' = k$ .

**3.1.2** Der Kernraum  $\Sigma_1^* \vee \Sigma_2^* \neq \mathcal{R}^*$  von  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$  besteht wegen  $\Sigma_1^* \vee \Sigma_2^* = \Delta_1 \lambda \vee \Delta_2 \lambda = (\Delta_1 \cap \Delta_2) \lambda$ , von  $\Pi$  aus gesehen, aus allen Hyperebenen von  $\Pi$  durch den nichtleeren Unterraum  $\Delta_1 \cap \Delta_2$  von  $\Pi$ , welcher Doppelspurraum des linearen Zweispurensystems heißt; jede Hyperebene von  $\Pi$  durch  $\Delta_1 \cap \Delta_2$ , welche weder  $\Delta_1$  noch  $\Delta_2$  umfaßt, hat in  $\Delta_1$  und in  $\Delta_2$  eine Spur, die  $\Delta_1 \cap \Delta_2$  enthält. Wegen  $\dim \Pi^*(\Sigma_1^* \vee \Sigma_2^*) = 2k^* + 1$  nach 2.1.2 ist nach 1.2.5 dann  $\dim \Pi(\Delta_1 \cap \Delta_2) = n - (2k^* + 1) - 1 = n - (2n - 2k - 2 + 1) - 1 = 2k - n \geq 0$ .

Nach Satz 2.1.1 ist  $(\beta_1, \beta_2)$  eingeschränkt auf die Menge aller Hyperebenen, die nicht  $\Delta_1 \cap \Delta_2$  enthalten, injektiv. Jede Hyperebene  $\xi \in \mathcal{H}$  mit  $\Delta_1 \cap \Delta_2 \not\subset \xi$  schneidet  $\Delta_1$  bzw.  $\Delta_2$  in einer Hyperebene  $\xi^{\bar{1}}$  bzw.  $\xi^{\bar{2}}$  von  $\Delta_1$  bzw.  $\Delta_2$ , wobei  $\xi \cap (\Delta_1 \cap \Delta_2) = \xi^{\bar{1}} \cap (\Delta_1 \cap \Delta_2) = \xi^{\bar{2}} \cap (\Delta_1 \cap \Delta_2)$  gilt.



**Def. 3.1.2:** Ist  $\Delta_1 \cap \Delta_2 (\neq \emptyset)$  <sup>der</sup> Doppelspurraum von  $(\beta_1, \beta_2) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' \times \mathcal{H}'$ , so heißt  $\Delta_2' := (\Delta_1 \cap \Delta_2) \kappa_1 \subset \mathcal{H}'$  bzw.  $\Delta_1'' := (\Delta_1 \cap \Delta_2) \kappa_2 \subset \mathcal{H}'$  der erste Kernraum bzw. der zweite Kernraum des linearen Zweispurensystems.

**3.1.3** Ist  $\xi \in \mathcal{H}$  mit  $\Delta_1 \cap \Delta_2 \not\subset \xi$ , so heißt  $\xi \cap (\Delta_1 \cap \Delta_2)$  der doppelt inzidente Unterraum  $\sigma_\xi$  von  $\xi$  und es gilt  $\dim \Pi(\sigma_\xi) = 2k - n - 1 \geq -1$ .

**Def. 3.1.3:** Ist  $\sigma_\xi$  der doppelt inzidente Unterraum von  $\xi \not\subset \Delta_1 \cap \Delta_2$  und ist  $\sigma_\xi$  nicht leer, so heißt  $\sigma_\xi' := \sigma_\xi \kappa_1 \subset \Delta_1'$  bzw.  $\sigma_\xi'' := \sigma_\xi \kappa_2 \subset \Delta_2''$  der erste Ordner bzw. der zweite Ordner von  $\xi$ .

Wegen  $\sigma_{\xi} = \xi \cap (\Delta_1 \cap \Delta_2) = \bar{\xi} \cap (\Delta_1 \cap \Delta_2) = \bar{\xi} \cap (\Delta_1 \cap \Delta_2)$  gilt  $\sigma_{\xi}^1 = \xi^1 \cap \Delta_2^1$ ,  $\sigma_{\xi}^2 = \xi^2 \cap \Delta_1^2$ . Weiter ist  $\dim \Pi(\Delta_1 \cap \Delta_2) = 2k - n = \dim \Pi(\Delta_2^1) = \dim \Pi(\Delta_1^2)$ ,  $\dim \Pi(\xi^1) = \dim \Pi(\xi^2) = k - 1$  und  $\dim \Pi(\sigma_{\xi}^1) = \dim \Pi(\sigma_{\xi}^2) = \dim \Pi(\sigma_{\xi}^1) = 2k - n - 1$ . Genau für  $2k - n - 1 = -1$ , also  $2k = n$  existieren keine Ordner; für  $n$  ungerade existieren stets Ordner.

Die ersten bzw. zweiten Ordner sind Hyperebenen des ersten bzw. zweiten Kernraumes. Damit gilt:

**Satz 3.1.1:** Ein lineares Zweispurensystem besitzt genau dann Ordner, wenn  $n < 2k$  gilt. Existieren Ordner, so definiert das lineare Zweispurensystem eine Ordnerkollineation  $\beta$  der Menge der ersten Ordner auf die Menge der zweiten Ordner.

Beweis. Die Kollineation  $\kappa := (\kappa_1 | (\Delta_1 \cap \Delta_2))^{-1} \kappa_2 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  besitzt für  $\dim \Pi(\Delta_1 \cap \Delta_2) \geq 0$  eine duale Kollineation  $\kappa^*$  von  $(\Pi(\Delta_2^1))^*$  auf  $(\Pi(\Delta_1^2))^*$ . Ist  $\lambda_2 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  bzw.  $\lambda_1 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  die Annulatorabbildung des ersten bzw. zweiten Spurraumes, so ist  $\beta = \lambda_2 \kappa^* \lambda_1^{-1}$  eine Bijektion der Menge der Hyperebenen von  $\Delta_2^1$  auf die Menge der Hyperebenen von  $\Delta_1^2$ , wobei Hyperebenen eines Büschels in Hyperebenen eines Büschels übergehen.  $\square$

### 3.2 Lineare Zweispurensysteme aus einem dreidimensionalen projektiven Raum.

**3.2.1** Für  $\dim \Pi = n = 3$  gilt wegen  $n \leq 2k \leq 2(n-1)$  dann notwendig  $k=2$ , also  $n < 2k$ . Es gibt somit für  $n=3$  im wesentlichen nur ein lineares Zweispurensystem: Die Unterräume  $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{P}^3$  sind zwei verschiedene Ebenen; der Doppelspurraum  $\Delta_1 \cap \Delta_2$  ist eine Doppelspur genannte Gerade. Jeder Ebene  $\xi \in \mathcal{E}$  (wir bezeichnen die Ebenenmenge von  $\Pi$  mit  $\mathcal{E}$ ) verschieden von  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  wird ein Geradenpaar  $(\xi^1, \xi^2)$  in  $\Pi'$  zugeordnet, wobei  $\xi^1 = \bar{\xi} \kappa_1 = (\xi \cap \Delta_1) \kappa_1$ ,  $\xi^2 = \bar{\xi} \kappa_2 = (\xi \cap \Delta_2) \kappa_2$  gilt und  $\kappa_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ ,  $\kappa_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$  Kollineationen sind. Der erste bzw. zweite Kernraum  $\Delta_2^1$  bzw.  $\Delta_1^2$  ist eine Gerade in  $\Pi'$ ; die Menge der ersten bzw. zweiten Ordner sind die Punkte von  $\Delta_2^1$  bzw.  $\Delta_1^2$  und  $\beta : \Delta_2^1 \rightarrow \Delta_1^2$  ist eine Ordnerbijektion. Wie aus dem Beweis von Satz 3.1.1 folgt, ist  $\beta$  nach 1.4.3 eine spezielle Bijektion: Sind  $D_0, D_1, D_2$  drei verschiedene doppeltinzidente Punkte der Doppelspur, so bestimmt  $\beta$  einen Isomorphismus des Algebraisierungskörpers  $K'(\mathcal{D}_0 \kappa_1, \mathcal{D}_1 \kappa_1; \mathcal{D}_2 \kappa_1)$  auf den Algebraisierungskörper  $K''(\mathcal{D}_0 \kappa_2, \mathcal{D}_1 \kappa_2; \mathcal{D}_2 \kappa_2)$  von  $\Pi'$ .

Jeder Punkt und jede Gerade von  $\Delta_1$  bzw.  $\Delta_2$  heißt erstinzident

bzw. zweitinzident. Faßt man die Geraden in  $\Pi$  als Achsen von Ebenenbüschel und die Punkte in  $\Pi$  als Zentren von Ebenenbündel auf, so gilt in Analogie zu Satz 2.2.1:

Satz 3.2.1: Eine zur Doppelspur  $\Delta_1 \cap \Delta_2$  windschiefe Gerade  $g$  wird auf durch  $\beta: \Delta_2' \rightarrow \Delta_1''$  bijektiv gekoppelte Geradenbüschel  $\mathcal{G}'_g, \mathcal{G}''_g$  abgebildet. Jeder nicht inzidente Punkt  $A \notin \Delta_1 \cup \Delta_2$  definiert eine Bildkollineation  $\kappa_A: \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}''$  mit  $\mathcal{F}' \kappa_A = \mathcal{F}''$  für alle Ebenen  $\mathcal{F} \in \mathcal{L}_A$ , wobei  $\kappa_A | \Delta_2' = \beta$  gilt.

In Analogie zu Def.2.2.1 erklären wir:

Def.3.2.1: Ist  $\Pi$  ein klassischer dreidimensionaler projektiver Raum und  $\beta: \Delta_2' \rightarrow \Delta_1''$  eine Projektivität, so heißt  $(\beta_1, \beta_2)$  ein klassisches lineares Zweispurensystem.

Bei einem solchen ist nach Satz 3.2.1 die Bildkollineation jedes nichtinzidenten Punktes projektiv.

3.2.2 Die weitere Behandlung erfolgt in Analogie zu 2.2:

Def.3.2.2: Das Tripel  $\{\Delta_2', \Delta_1''; \beta\}$  heißt Hauptbildfigur von  $(\beta_1, \beta_2)$ . Ist  $\Delta_2' \neq \Delta_1''$  und  $\beta$  keine Perspektivität bzw. eine Perspektivität, so heißt  $(\beta_1, \beta_2)$  vom 1. Typ bzw. vom 2. Typ; ist  $\Delta_2' = \Delta_1''$  und  $\beta$  nicht die Identität bzw. die Identität, so heißt  $(\beta_1, \beta_2)$  vom 3. Typ bzw. vom 4. Typ.

Beim 2. Typ verwendet man das Perspektivitätszentrum (Ordnerzentrum)  $Z_\beta$  zur Vervollständigung von  $\beta$ . Ist  $(\beta_1, \beta_2)$  klassisch, so gibt es beim 1. Typ einen durch  $\beta$  erzeugten Ordnerkegelschnitt, dessen Tangenten die Projektivität  $\beta: \Delta_2' \rightarrow \Delta_1''$  definieren, und beim 3. Typ kann  $\beta$  unter Benützung eines STEINERkegelschnitts vervollständigt werden.

Da  $(\beta_1, \beta_2) | (\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_{\Delta_1 \cap \Delta_2})$  injektiv ist, kann jede Lageaufgabe in  $\Pi^*$ , soweit sie Elemente in  $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_{\Delta_1 \cap \Delta_2}$  betrifft, in einem linearen Zweispurensystem gelöst werden. Dazu hat man die duale Lageaufgaben in  $\Pi$  nach den Methoden von 2.2.2 in einem linearen Zweibildersystem zu lösen und das Ergebnis in  $\Pi'$  zu dualisieren. So gilt z.B.:

$$(I1): \alpha \supset g \Rightarrow \alpha' \ni G', \alpha'' \ni G'', (\alpha' \cap \Delta_2') / \beta = \alpha'' \cap \Delta_1''.$$

$$(I2): g \ni A \Rightarrow G'_A = G'' \quad \text{für A nicht inzident}$$

$$G'_A = A' \quad \text{für A erstinzident}$$

$$G' \in \Delta_2', G'' = G' / \beta \quad \text{für A doppelinzident.}$$

3.2.3 Eine Ebene  $f \in \mathcal{E}$  mit  $f' = f''$  heißt eine Koinzidenzebene des linearen Zweispurensystems. Dann gilt:

Satz 3.2.2: Bei einem klassischen linearen Zweispurensystem erfüllen die Koinzidenzebenen folgende durch die Hauptbildfigur

und  $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{E}$  bestimmte Ebenenmenge  $\mathcal{K}^* \subset \mathcal{E} \setminus \{\Delta_1, \Delta_2\}$  :

1. Typ:  $\mathcal{K}^*$  ist die in  $\Delta_1, \Delta_2$  aufgeschnittene Menge der Schmiegeebenen einer Kubik.
2. Typ:  $\mathcal{K}^*$  ist ein in  $\Delta_1, \Delta_2$  aufgeschnittener quadratischer Ebenenkegel (vgl. II, 172) und ein Ebenenbüschel, dessen zur Doppelspur windschiefe Achsen den Kegel berührt, aber keine Erzeugende ist.
3. Typ:  $\mathcal{K}^*$  ist das in  $\Delta_1, \Delta_2$  aufgeschnittene Ebenenbüschel um die Doppelspur vermehrt um 0, 1 oder 2 Ebenenbüschel, deren Achsen nicht inzident sind und die Doppelspur treffen.
4. Typ:  $\mathcal{K}^*$  ist das in  $\Delta_1, \Delta_2$  aufgeschnittene Ebenenbüschel um die Doppelspur und ein Ebenenbündel um einen nichtinzidenten Koinzidenzpunkt.

Diese Ergebnisse erhält man aus 2.2.3 durch Dualisieren.

3.2.4 Ist speziell  $\pi'$  eine Ebene in  $\Pi$ , so erhält man ein lineares Zweispurensystem aus  $\Pi$ , wenn man die Kollineationen

$\kappa_1: \Delta_1 \rightarrow \mathcal{P}'$ ,  $\kappa_2: \Delta_2 \rightarrow \mathcal{P}'$  als Perspektivitäten zum selben Zentrum  $Z \notin \Delta_1, \Delta_2, \mathcal{P}'$  wählt. Dabei entsteht stets ein lineares Zweispurensystem vom 4. Typ, da  $\Delta_2' = \Delta_1''$  und  $\beta = \text{id}_{\Delta_2}$  gilt. Der Punkt  $Z$  ist der Koinzidenzpunkt.

3.2.5 Da  $(\rho_1, \rho_2) | (\mathcal{E} \setminus \{\Delta_1, \Delta_2\})$  injektiv ist, kann jede Ebenenmenge aus  $\mathcal{E} \setminus \{\Delta_1, \Delta_2\}$  aus der Menge ihrer Bildpaare eindeutig rekonstruiert werden, wenn  $\Delta_1, \Delta_2$  und die Kollineationen  $\kappa_1: \Delta_1 \rightarrow \mathcal{P}'$ ,  $\kappa_2: \Delta_2 \rightarrow \mathcal{P}'$  bekannt sind. Genauer gilt:

Satz 3.1.3: Kennt man die Hauptbildfigur  $\{\Delta_2', \Delta_1'', \beta\}$  eines linearen Zweispurensystems  $(\rho_1, \rho_2): \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}' \times \mathcal{G}''$  aus einem dreidimensionalen projektiven Raum, so ist jede Ebenenmenge  $\mathcal{K}^* \subset \mathcal{E}$  durch die Bildpaare  $(\xi', \xi'') \in \mathcal{G}' \times \mathcal{G}''$  ihrer Ebenen  $\xi \in \mathcal{E}$  bis auf Kollineationen eindeutig bestimmt, falls stets  $\xi' \neq \Delta_2', \xi'' \neq \Delta_1''$  gilt.

Durch Dualisieren in  $\pi$  und  $\pi'$  erhält man die in 2.2.5 bewiesene Aussage von Satz 2.2.3.

Kennt man von einer Geraden  $g$  nur die Punkte  $G', G''$ , so muß diese nicht eindeutig rekonstruierbar sein, falls man nicht die Bildpaare zweier Ebenen durch  $g$  kennt: Schneidet  $g$  die Doppelspur  $A_1 \cap A_2$  und ist  $g$  nicht inzident, so gilt  $G' \in \Delta_2'$  und  $G'' = G'/b$ ; jede von  $\Delta_1, \Delta_2$  verschiedene Ebene durch den doppeltinzidenten Punkt  $G = g \cap (\Delta_1 \cap \Delta_2)$  besitzt ein erstes Bild durch  $G'$  und ein zweites Bild durch  $G''$ . Kennt man zusätzlich das Bildpaar zweier Ebenen  $\mathcal{F}, \eta \in \mathcal{L}_g \setminus \{g \vee (\Delta_1 \cap \Delta_2)\}$ , so ist  $g$  nach Satz 3.2.3 festgelegt, und die Abbildung  $\alpha' \mapsto \alpha''$  für  $\alpha \in \mathcal{L}_g$  paßt in die Bildkollineation jedes von  $G$  verschiedenen Punktes von  $g$ . Im Reellen speziell ist daher  $DV(\mathcal{F}', \eta', \alpha', \Delta_2') = DV(\mathcal{F}'', \eta'', \alpha'', \Delta_1'')$ .

3.2.6 Für ein lineares Zweispurensystem aus einem affinen Raum  $\tilde{\pi} = \pi \setminus \omega$  sind folgende drei Fälle möglich:

Fall 1: Für  $\omega \not\subset \Delta_1 \cap \Delta_2$  besitzt die Fernebene  $\omega$  ein Bildpaar  $(\omega', \omega'')$ .

Gilt speziell  $\omega' = \omega''$ , so ist  $\omega$  eine Koinzidenzebene; stimmt die Gerade  $\omega' = \omega''$  mit der Ferngeraden  $u'$  der affinen Ebene  $\tilde{\pi}' = \pi' \setminus u'$  überein, so wird dann jede von  $\Delta_1, \Delta_2$  verschiedene Ebene auf ein Geradenpaar der affinen Ebene  $\tilde{\pi}'$  abgebildet.

Fall 2:  $\omega = \Delta_1$ . Dann ist  $\mathcal{K}_1: \Delta_1 \rightarrow \mathcal{X}'$  eine Kollineation der Fernebene auf das erste Bildfeld und  $\omega'' = \Delta_1''$  eine Gerade.

Fall 3:  $\omega \neq \Delta_1, \Delta_2$  und  $\omega$  enthält die Doppelspur. Dann gilt  $\omega' = \Delta_2'$  und  $\omega'' = \Delta_1''$ . Da in diesem Fall die Fernebene  $\omega$  durch ihr Bildpaar nicht eindeutig festgelegt wird, kann keine Lageaufgabe zu  $\omega$  gelöst werden. Dieses lineare Zweispurensystem ist daher zur Erfassung eines affinen Raumes ungeeignet.

Da ein affiner Raum keine selbstduale Struktur ist, stehen die Ergebnisse von 3.2.6 jenen von 2.2.6 nicht dual gegenüber.

#### 4. Lineare Zweibildersysteme und Zweispurensysteme aus einem dreidimensionalen euklidischen Raum

##### 4.1 Lineare Zweibildersysteme mit nichtprojizierender Fernebene

4.1.1 Da  $\mathbb{R}$  nur den trivialen Automorphismus gestattet und  $\text{Char } \mathbb{R} = 0 \neq 2$  gilt, ist jedes lineare Zweibildersystem aus einem reellen dreidimensionalen projektiven Raum nach 2.2.1 stets klassisch, also insbesondere die Ordnerbijektion  $\beta: \mathcal{G}_{Z_1}^1 \rightarrow \mathcal{G}_{Z_2}^1$  eine Projektivität.

Gemäß 2.2.6 existieren drei Fälle eines linearen Zweibildersystems aus einem reellen dreidimensionalen affinen Raum  $\overset{\circ}{\Pi} = \Pi \setminus \omega$ . Im Fall 1 gilt  $Z_1, Z_2 \notin \omega$ . Dann ist  $\varphi_j|_{\omega}: \omega \rightarrow \mathcal{R}^1$  ( $j=1,2$ ) eine Kollineation und  $(\pi^\perp)^{\varphi_j|_{\omega}}: \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^{1*}$ , das Bild der absoluten Polarität  $\pi^\perp$  des euklidischen Raumes  $\overset{\circ}{\Pi}$ , das Antipolarsystem einer Ellipse der euklidischen Ebene  $\overset{\circ}{\Pi} = \Pi \setminus \omega$ . Da die Fernebene  $\omega$  nicht projizierend ist, besitzt  $\omega$  eine Bildkollineation  $\kappa_\omega: \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^1$ . Dann gilt:

Satz 4.1.1: Ist bei einem linearen Zweibildersystem aus einem dreidimensionalen euklidischen Raum  $\overset{\circ}{\Pi}$  die Fernebene nicht projizierend, so gilt für die beiden Bilder der absoluten Polarität  $\pi^\perp$  von  $\overset{\circ}{\Pi}$  dann  $(\hat{\pi}^\perp)^{\varphi_2|_{\omega}} = \kappa_\omega^{-1} (\hat{\pi}^\perp)^{\varphi_1|_{\omega}} \kappa_\omega$ .

Beweis. Nach Definition der Bildkollineation  $\kappa_\omega: \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^1$  von  $\omega$  ist  $(\varphi_1|_{\omega}) \kappa_\omega (\varphi_2|_{\omega})^{-1} = \text{id}_\omega$ , also  $(\varphi_1|_{\omega}) \kappa_\omega (\varphi_2|_{\omega})^{-1} \hat{\pi}^\perp = \hat{\pi}^\perp (\varphi_1|_{\omega}) \kappa_\omega (\varphi_2|_{\omega})^{-1}$ , was mit  $(\varphi_2|_{\omega})^{-1} \hat{\pi}^\perp (\varphi_2|_{\omega}) = \kappa_\omega^{-1} (\varphi_1|_{\omega}) \hat{\pi}^\perp (\varphi_1|_{\omega}) \kappa_\omega$  die Behauptung ergibt.  $\square$

4.1.2 Ist die Kernachse  $o$  eigentlich, so bestimmen die Paare orthogonaler Ebenen durch  $o$  eine involutorische Projektivität  $\varepsilon_1: \mathcal{G}_{Z_1}^1 \rightarrow \mathcal{G}_{Z_2}^1$ , bzw.  $\varepsilon_2: \mathcal{G}_{Z_1}^1 \rightarrow \mathcal{G}_{Z_2}^1$ , welche die erste bzw. zweite Orthogonalinvolution heißt und stets elliptisch ist. Ist  $\omega$  nicht projizierend, so stimmt  $\varepsilon_1$  bzw.  $\varepsilon_2$  mit der involutorischen Projektivität bezüglich  $(\pi^\perp)^{\varphi_1|_{\omega}}$  bzw.  $(\pi^\perp)^{\varphi_2|_{\omega}}$  konjugierter Geraden im Geradenbüschel  $\mathcal{G}_{Z_2}^1$ , bzw.  $\mathcal{G}_{Z_1}^1$  überein. Die Ordnerprojektivität  $\beta: \mathcal{G}_{Z_2}^1 \rightarrow \mathcal{G}_{Z_1}^1$ , die von den Ebenen durch  $o$  stammt, muß dann mit  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  verträglich sein, sodaß  $\varepsilon_1 \beta = \beta \varepsilon_2$  gilt. Wegen  $\kappa_\omega^* | \mathcal{G}_{Z_2}^1 = \beta$  steht das mit Satz 4.1.1 in Einklang. Weiters gilt:

Satz 4.1.2: Kennt man von einem linearen Zweibildersystem aus einem dreidimensionalen euklidischen Raum  $\overset{\circ}{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  die beiden Kernpunkte  $Z_1', Z_1'' \in \mathcal{R}^1$ , die beiden Orthogonalinvolutionen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  und zu einem ersten Ordner  $\sigma' \in \mathcal{G}_{Z_2}^1$ , den zugeordneten zweiten Ordner  $\sigma'' \in \mathcal{G}_{Z_1}^1$ , so ist die Ordnerprojektivität  $\beta: \mathcal{G}_{Z_2}^1 \rightarrow \mathcal{G}_{Z_1}^1$  zweideutig festgelegt.

Beweis. Für  $\sigma' \varepsilon_1 =: f'$  und  $\sigma'' \varepsilon_2 =: f''$  gilt notwendig  $f'/\beta = f''$ . Dann existieren genau zwei erste Ordner  $f_1', f_2'$  mit  $f_2' = f_1' \varepsilon_1$  und  $H(\sigma', f'; f_1', f_2')$  nach 1.5.2, Fn.9, da  $\varepsilon_1$  elliptisch ist, und analog zwei zweite Ordner  $f_1'', f_2''$  mit  $f_2'' = f_1'' \varepsilon_2$  und  $H(\sigma'', f''; f_1'', f_2'')$ . Da  $\varepsilon_1/\beta = \beta \varepsilon_2$  gefordert wird und  $\beta$  harmonische Lage erhält, muß für  $\beta$  notwendig  $f_1' \mapsto f_1''$  oder  $f_1' \mapsto f_2''$  gelten; durch jede dieser beiden Möglichkeiten ist genau eine Projektivität  $\beta$  festgelegt. Dann ist  $\varepsilon_1/\beta \varepsilon_2^{-1}: \mathcal{O}_{Z_2'} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_2'}$  eine Projektivität, die  $\sigma', f', f_1'$  gleich wie  $\beta$  abbildet, also mit  $\beta$  übereinstimmt.  $\square$

4.1.3 Satz 2.2.3 lehrt, daß die Hauptbildfigur eines linearen Zweibildersystems aus einem dreidimensionalen projektiven Raum eine Punktmenge aus den Bildpaaren ihrer Punkte bis auf Kollineationen festlegt. Im Falle eines euklidischen Raumes gilt:

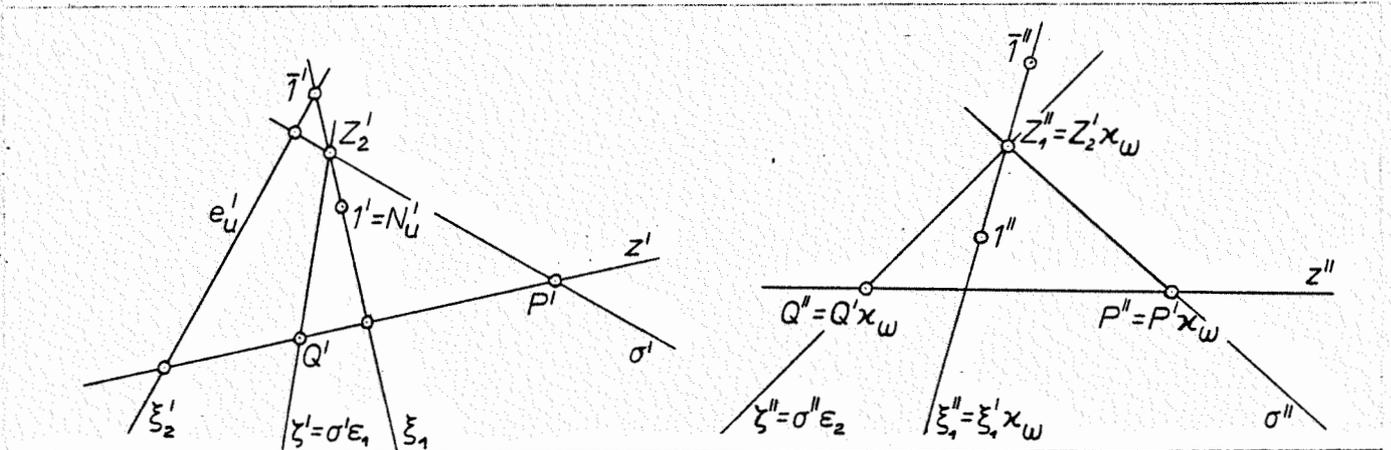
Satz 4.1.3: Kennt man von einem linearen Zweibildersystem aus einem dreidimensionalen euklidischen Raum  $\overset{\circ}{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  mit nicht-projizierender Fernebene  $\omega$  die beiden Kernpunkten  $Z_2', Z_1'' \in \mathcal{K}'$ , eine mit den beiden Orthogonalinvolutionen verträgliche Ordnerprojektivität  $\beta$  und die beiden Bilder  $(\pi^\perp)^{\mathcal{O}_1/\omega}, (\pi^\perp)^{\mathcal{O}_2/\omega}$  der absoluten Polarität  $\pi^\perp$  von  $\overset{\circ}{\Pi}$ , so ist jede Punktmenge  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{K}'$  durch die Menge der Bildpaare  $(X', X'')$  ihrer Punkte  $X$  bis auf Ähnlichkeiten eindeutig bestimmt, falls stets  $X' \neq Z_2', X'' \neq Z_1''$  gilt.

Beweis. (a) Da  $\omega$  nicht projizierend ist, existiert eine Bildkollineation  $\kappa_\omega$ ; wir bezeichnen die Polaritäten  $(\pi^\perp)^{\mathcal{O}_1/\omega}, (\pi^\perp)^{\mathcal{O}_2/\omega}: \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}''$  mit  $\lambda_1, \lambda_2$  und mit  $\sigma' \in \mathcal{O}_{Z_2'}$  einen ersten Ordner. Aus  $Z_1'' = Z_2' \kappa_\omega$  nach 2.2.1 folgt mit  $Z_2' \hat{\lambda}_1 =: z', Z_1'' \hat{\lambda}_2 =: z''$  dann  $z' \kappa_\omega = Z_2' \hat{\lambda}_1 \kappa_\omega = Z_2' \kappa_\omega \hat{\lambda}_2 = Z_1'' \hat{\lambda}_2 = z''$  nach Satz 4.1.1. Wegen  $\kappa_\omega^* | \mathcal{O}_{Z_2'} = \beta$  nach 2.2.1 gilt mit  $\sigma'/\beta = \sigma'', f' = \sigma' \varepsilon_1$ , also  $f'' = f'/\beta = \sigma'' \varepsilon_2$  und  $\{P'\} := z' \wedge \sigma', \{Q'\} := z' \wedge f'$  für  $P'' := P' \kappa_\omega, Q'' := Q' \kappa_\omega$  notwendig  $\{P''\} = z'' \wedge \sigma'', \{Q''\} = z'' \wedge f''$ . Damit ist  $\{Z_2', P', Q'\}$  bzw.  $\{Z_1'' = Z_2' \kappa_\omega, P'' = P' \kappa_\omega, Q'' = Q' \kappa_\omega\}$  ein Poldreieck der elliptischen Polarität  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$ .

Ist  $f_1' \in \mathcal{O}_{Z_2'}$  einer der beiden ersten Ordner  $f_1', f_2'$ , für die  $H(\sigma', f'; f_1', f_2')$  und  $f_2' = f_1' \varepsilon_1$  gilt, so ist für  $f_1'' := f_1'/\beta, f_2'' := f_2'/\beta$  nach 4.1.2 dann  $H(\sigma'', f''; f_1'', f_2'')$  und  $f_2'' = f_1'' \varepsilon_2$ , und es muß notwendig  $f_1' \kappa_\omega = f_1''$  sein. Ist  $N_u'$  einer der beiden in  $\lambda_1$  konjugierten Punkte  $1', \bar{1}'$  von  $f_1'$ , für die  $H(Z_2', f_1' \wedge z'; 1', \bar{1}')$  und  $1'', \bar{1}''$  einer der beiden in  $\lambda_2$  konjugierten Punkten von  $f_1''$ , für die  $H(Z_1'', f_1'' \wedge z''; 1'', \bar{1}'')$  gilt,

so kann nach Satz 4.1.1 der Punkt  $N_u'' := N_u' \kappa_\omega$  nur in  $1''$  oder  $\bar{1}''$  liegen. Zu jeder der beiden Möglichkeiten,  $N_u''$  zu wählen, gehört eine Bildkollineation  $\kappa_\omega$ , wobei stets  $\kappa_\omega^* | \mathcal{O}_\omega | z_1' = \beta$  gilt.

Die Polare  $e_u'$  von  $N_u' (= 1')$   $\in \mathcal{F}_r'$  bezüglich  $\lambda_1$  geht durch den Pol  $z_1' \wedge \mathcal{F}_2'$  von  $\mathcal{F}_r'$  in  $\mathcal{L}_r$  und trifft  $\mathcal{F}_r'$  im zu  $1'$  konjugierten Punkte  $\bar{1}'$ , sodaß  $e_u'$  die Dreieckspolare von  $N_u'$  bezüglich  $\{z_2', P', Q'\}$  ist; analoges gilt für die Polare von  $N_u''$  bezüglich  $\lambda_2$ . Da die Kollineation  $\kappa_\omega$  dreieckspolare Lage bezüglich der Dreiecke  $\{z_2', P', Q'\}$  und  $\{z_2'' = z_2' \kappa_\omega, P'' = P' \kappa_\omega, Q'' = Q' \kappa_\omega\}$  erhält, ist  $e_u' \kappa_\omega =: e_u''$  die Polare von  $N_u''$  bezüglich  $\lambda_2$ .



(b) Wir wählen verschiedene Punkte  $z_1, z_2 \in \mathcal{R} \setminus \omega$  und eine doppeltprojizierende Ebene  $\sigma$  durch  $o = z_1 z_2$ . Aus den Bildpaaren  $(P', P''), (Q', Q''), (N_u', N_u'')$  ist dann ein Dreieck  $\{P, Q, N_u\}$  in  $\omega$  wie folgt vierdeutig festgelegt: Der Punkt  $P$  ist der Schnittpunkt der Ferngeraden von  $\sigma$  mit der Ferngeraden einer zu  $\sigma$  normalen Ebene, auf der  $Q$  also absolut konjugierten Punkt zu  $P$  liegt; der Punkt  $N_u$  ist notwendig einer jener vier Punkte in  $\omega$ , denen nach dem Beweis in Satz 1.6.5 in  $\pi^\perp$  die Dreieckspolare  $e_u$  bezüglich  $\{\sigma \cap \omega, P, Q\} \subset \omega$  zugeordnet wird.

(c) Zu verschiedenen zulässigen Angaben von  $N_u'$  und  $N_u''$  gehört stets dieselbe Hauptbildfigur  $\{z_2', z_2''; \beta\}$ ; nach Satz 2.2.3 sind daher je zwei Rekonstruktionen kollinear. Eine solche Kollineation bestimmt in  $\mathcal{Q}$  eine Affinität, weil dabei ein Dreieck von  $\omega$  in ein Dreieck von  $\omega$  übergeht; diese Affinität ist sogar eine Ähnlichkeit, da  $\{\sigma \cap \omega, P, Q\}$  ein Poldreieck und  $(N_u, e_u)$  Pol-Polare von  $\pi^\perp$  sind und gleiches bei einer zweiten Rekonstruktion gilt.  $\square$

4.1.4 Die Situation von Satz 4.1.3 liegt vor, wenn ein Objekt des Anschauungsraumes aus zwei Photographien rekonstruiert werden soll. Da jede Photographie eine Zentralprojektion ist, sind dann die Polaritäten  $\lambda_1, \lambda_2$  nach Satz 1.5.4 und Satz 1.6.3 die Antipolarsysteme der Distanzkreise. Der Hauptpunkt wird dabei mit Hilfe von Marken fixiert, die im Bildrahmen angebracht und mitfotografiert werden, die Distanz (Kammerkonstante) ist durch die optischen Daten des Linsensystems bestimmt. Erkennt man auf jeder Aufnahme den Standpunkt der anderen Aufnahme, so sind die beiden Kernpunkte bekannt; da zwei Aufnahmen eines Raumobjekts vorliegen, ist die Ordnerprojektivität sicher mit  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  verträglich. Dies ergibt mit Satz 1.4.3 den Hauptsatz der Fotogrammetrie (S.FINSTERWALDER):

Satz 4.1.4: Durch zwei Perspektiven mit bekannten inneren Orientierungen und mit bekannter Hauptbildfigur ist ein Objekt bis auf den Maßstab bestimmt.

In der fotogrammetrischen Praxis kennt man allerdings die Kernpunkte fast nie, da etwa bei zwei Luftaufnahmen keine Photographie den anderen Aufnahmestandpunkt zeigt. In diesem Fall müssen aus den Bildpaaren entsprechend vieler Objektpunkte zuerst die beiden Kernpunkte ermittelt werden, und zwar so, daß aus ihnen alle Bildpaare  $(X', X'')$  durch projektive Büschel projiziert werden.

Bei speziellen Bildinhalten der beiden Photographien können die Kernpunkte einfach gefunden werden:

- (1) Besitzen zwei verschiedene Punkte A, B zusammenfallende erste Risse  $A'=B'$  und zusammenfallende zweite Risse  $A''=B''$ , so ist  $Z_2'=A'$ ,  $Z_1''=A''$ .
- (2) Besitzen zwei verschiedene Punkte A, B zusammenfallende erste Risse  $A'=B'$ , aber verschiedene zweite Risse  $A'' \neq B''$ , so geht  $A''B''$  durch  $Z_1''$ ; Wiederholung führt auf  $Z_1''$  und analog auf  $Z_2'$ .
- (3) Sind  $\{A', B', C', D'\}$ ,  $\{A'', B'', C'', D''\}$  zwei Vierecke und weiß man, daß  $\{A, B, C, D\} \subset \alpha$  ein ebenes Viereck ist, so ist die Bildkollineation  $\kappa_\alpha$  der Viereckebene  $\alpha$  bekannt. Kennt man die Rißpaare  $(P', P'')$ ,  $(Q', Q'')$  zweier verschiedener Punkte  $P, Q \notin \alpha$ , so ist  $(R' := P', R'' := R' \kappa_\alpha \neq P'')$  Bildpaar eines Punktes  $R \in \alpha$  und nach (2) gilt  $Z_1'' \in P'R''$ ; Wiederholung liefert den Kernpunkt  $Z_1''$  und analog findet man den Kernpunkt  $Z_2'$ .

(4) Kennt man einen Kernpunkt  $Z_2'$  und 5 Bildpaare  $(X_j', X_j'')$  ( $j=1, \dots, 5$ ), wobei  $\{Z_2', X_1', \dots, X_5'\}$  nicht einem Kegelschnitt angehören, nie drei der Punkte  $Z_2', X_j'$  ( $j=1, \dots, 5$ ) bzw.  $X_j''$  ( $j=1, \dots, 5$ ) kollinear sind und  $X_j' \leftrightarrow X_j''$  ( $j=1, \dots, 5$ ) in keine Kollineation paßt, so ist der zweite Kernpunkt  $Z_1''$  eindeutig bestimmt: Durch  $Z_2', X_1', X_2', X_3', X_4'$  ist genau ein Kegelschnitt  $k_1'$  festgelegt und durch  $X_k' \leftrightarrow X_k''$  ( $k=1, \dots, 4$ ) eine Kollineation  $\eta_1: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}''$ ; genau aus den Punkten des Kegelschnitts  $k_1'' := k_1' \eta_1$  werden die Punkte  $X_1'', \dots, X_4''$  durch vier Geraden projiziert, welche projektiv zu den vier Geraden  $Z_2', X_k'$  ( $k=1, \dots, 4$ ) sind. Wiederholt man die Überlegung für den Kegelschnitt  $k_2'$  durch  $Z_2', X_1', X_2', X_3', X_5'$ , so sind die Kegelschnitte  $k_1''$  und  $k_2'' := k_2' \eta_2$  nach den Voraussetzungen verschieden und haben außer  $X_1'', X_2'', X_3''$  noch genau einen Punkt gemeinsam; da nach Voraussetzung ein Kernpunkt  $Z_1''$  existiert, muß  $Z_1''$  notwendig dieser Restschnittpunkt sein.

Liegt keiner der genannten Sonderfälle vor, führt die geometrische Ermittlung des Kernpunkts auf das Problem der Projektivität: In einer reellen projektiven Ebene sind  $k$  Punktpaare  $(X_j', X_j'')$  ( $j=1, \dots, k$ ) gegeben; man bestimme alle Punkte  $Z_2'$  und  $Z_1''$ , für die  $Z_2'(X_1', \dots, Z_2'X_k') \propto Z_1''(X_1'', \dots, Z_1''X_k'')$  gilt. Eine endliche Anzahl von Lösungspaaren  $(Z_2', Z_1'')$  ist erst für  $k=7$  möglich<sup>1</sup>, und zwar liegt dann, falls tatsächlich nur endlich viele Lösungen existieren, eine kubische Aufgabe vor.<sup>1</sup> Hat diese über  $\mathbb{R}$  mehr als eine Lösung, so kann durch Auswahl anderer *Septupel* von Bildpaaren die richtige Lösung ausgesondert werden, außer wenn jedes solche *Septupel* stets auf dasselbe kubische Problem führt. In diesem Fall ist die Abbildung  $X' \leftrightarrow X''$  für alle Objektpunkte  $X$  in einer quadratischen Verwandtschaft in  $\Pi'$  enthalten; alle Punkte  $X$  gehören dann einer gefährlichen Fläche an, welche stets eine Regelfläche 2. Ordnung ist. Kennt man die inneren Orientierungen beider Photographien, so sind die gefährlichen Flächen nach J. KRAMES genau jene Flächen 2. Ordnung, die durch kongruente Ebenenbüschel erzeugt werden können; auf jeder Achse eines solchen Ebenenbüschels liegt dabei ein Aufnahmezentrum. Diese orthogonalen Flächen 2. Ordnung sind die Paare orthogonaler Ebenen, die Paare aus einer eigentlichen Ebene und der Fernebene, die Zylinder mit einem kreisförmigen oder gleichseitig-hyperbolischem Normalschnitt, die Kegel mit einer zu einem Kreisschnitt normalen Erzeugenden (orthogonale Kreiskegel), die hyperbolischen Paraboloid

<sup>1</sup>Nach E. KRUPPA genügt  $k=5$ , falls man die inneren Orientierungen beider Aufnahmen kennt, jedoch liegt dann ein Problem höheren Grades vor; im algebraischen Sinn existieren 11 Paare von Kernpunkten.

mit orthogonalen Richtebenen und die einschaligen Hyperboloide mit einem orthogonalen Kreiskegel als Richtkegel<sup>2</sup>.

Insgesamt lautet dann der Hauptsatz der Fotogrammetrie:

Satz 4.1.5: Durch zwei Perspektiven mit bekannter innerer Orientierung, in denen ausreichend viele Bildpaare von Objektpunkten bekannt sind, ist das Objekt bis auf den Maßstab bestimmt, falls es keinergefährlichen Fläche angehört.

#### 4.2 Lineare Zweibildersysteme mit projizierender Fernebene

4.2.1 Wir setzen zunächst  $\omega$  als zweit-, aber nicht erstprojizierend voraus. Dann ist  $\lambda_1 = (\pi^\perp) \circ \rho_1 \circ \omega$  das Antipolarsystem einer Ellipse in  $\tilde{\pi}^1$  und die Kernachse  $o = Z_1 Z_2$  eigentlich. Die Paare orthogonaler Ebenen durch  $o$  bestimmen die Orthogonalinvolutionen  $\varepsilon_1: \mathcal{O}_{Z_1}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{Z_2}^1$  und  $\varepsilon_2: \mathcal{O}_{Z_2}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{Z_1}^1$ , wobei in  $\varepsilon_1$  gekoppelte Geraden bezüglich  $\lambda_1$  konjugiert sind. Die Ordnerprojektivität  $\beta: \mathcal{O}_{Z_1}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{Z_2}^1$  muß dann mit den Orthogonalinvolutionen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  verträglich sein, also  $\varepsilon_1 \circ \beta = \beta \circ \varepsilon_2$  gelten. Aus Satz 4.1.2 folgt, daß bei bekannten Kernpunkten  $Z_2', Z_1'$  und bekannten Orthogonalinvolutionen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  zwei Ordnungsprojektivitäten existieren, welche einem gegebenen ersten Ordner  $\sigma'$  einen gegebenen zweiten Ordner  $\sigma''$  zuordnen. Weiters gilt:

Satz 4.2.1: Kennt man von einem linearen Zweibildersystem aus einem dreidimensionalen euklidischen Raum  $\tilde{\pi} = \pi \setminus \omega$  mit zweit- aber nicht erstprojizierender Fernebene  $\omega$  die beiden Kernpunkte  $Z_2', Z_1''$ , eine mit den beiden Orthogonalinvolutionen verträgliche Ordnerprojektivität  $\beta$ , die zweite Orthogonalinvolution  $\varepsilon_2: \mathcal{O}_{Z_2}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{Z_1}^1$ , das erste Bild  $(\pi^\perp) \circ \rho_1 \circ \omega$  der absoluten Polarität  $\pi^\perp$  von  $\tilde{\pi}$  und den zweiten linearen Riß  $\omega''$  von  $\omega$ , so ist jede Punktmenge  $O \subset \tilde{\pi}$  durch die Menge der Bildpaare  $(X', X'')$  ihrer Punkte  $X$  bis auf Ähnlichkeiten eindeutig bestimmt, falls stets  $X' \neq Z_2', X'' \neq Z_1''$  gilt.

Beweis. (a) Nach den Voraussetzungen ist  $\omega''$  eine Gerade, die  $Z_1''$  nicht enthält. Mit  $\sigma' \in \mathcal{O}_{Z_2}^1$  und  $f' = \sigma' \circ \varepsilon_1$  wird durch  $\lambda_1$  gemäß Beweisteil (a) in 4.1.3 ein Poldreieck  $\{Z_2', P', Q'\}$  bestimmt, und durch  $\varepsilon_2$  wird  $\{P''\} = \sigma'' \cap \omega''$  und  $\{Q''\} = f'' \cap \omega''$  festgelegt. Weiter wird

<sup>2</sup>Orthogonale Kreiskegel, Drehzylinder und orthogonale einschalige Hyperboloide sind auch durch projektive Ebenenbüschel, bei denen jede Ebene zur zugeordneten Ebene orthogonal ist, erzeugbar (das motiviert die Bezeichnung orthogonale Flächen 2. Ordnung). Sie bestehen aus allen Kreisen, deren Mittelpunkt auf einer Geraden liegen und die eine andere Gerade orthogonal schneiden.

ein Punkt  $N_u'$  wie in 4.1.3 ausgewählt, dessen Polare bezüglich  $\lambda_1$  die Dreieckspolare bezüglich  $\{Z_2', P', Q'\}$  ist; dann ist  $\{N_u'\} = (Z_2' N_u' / \beta \cap \omega''$ .

(b) Wir wählen  $Z_1 \in \mathcal{P} \setminus \omega$ ,  $Z_2 \in \omega$  und eine doppelprojizierende Ebene  $\sigma$  durch  $O = Z_1 Z_2$ . Wie in 4.1.3, Beweisteil (b) wird aus den Bildpaaren vierdeutig ein Dreieck  $\{P, Q, N_u\}$  in  $\omega$  gefunden.

(c) Dieser Beweisteil stimmt mit 4.1.3, Beweisteil (c) überein.  $\square$

4.2.2 Ist  $\omega$  doppelprojizierend und das Bildpaar  $(\omega', \omega'' = \omega' / \beta)$  von  $\omega$  bekannt, so ist die Kollineation, die eine Rekonstruktion des linearen Zweibildersystems mit der Hauptbildfigur  $(Z_2', Z_1''; \beta)$  in eine andere Rekonstruktion überführt, notwendig eine Affinität. Jede Punktmenge  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}$  ist dann durch die Menge der Bildpaare  $(X', X'')$  ihrer Punkte  $X$  bis auf Affinitäten eindeutig bestimmt, falls  $X' \neq Z_2', X'' \neq Z_1''$  gilt. Die absolute Polarität  $\pi^l$  besitzt weder ein erstes noch ein zweites Bild, und wegen  $O \subset \omega$  existieren keine Orthogonalinvolutionen. Will man ein Objekt bis auf Ähnlichkeiten eindeutig festlegen, müssen zusätzliche Informationen bekannt sein.

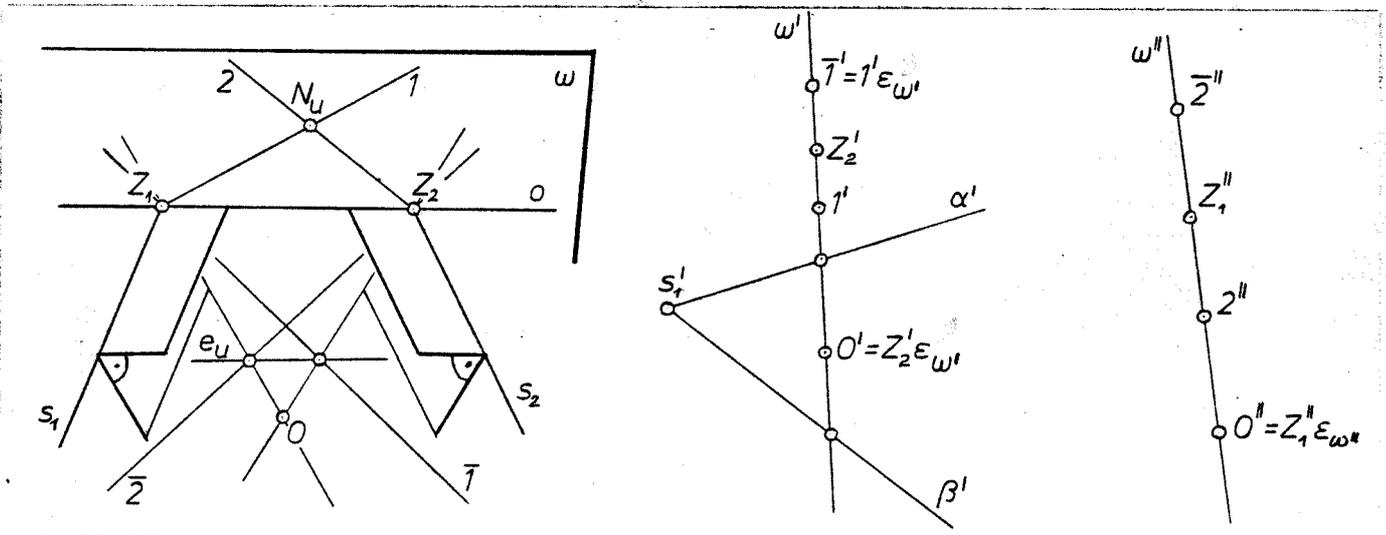
Die absolute Polarität  $\pi^l$  bestimmt eine involutorische elliptische Projektivität konjugierter erstprojizierender Ferngeraden durch  $Z_1 \in \omega$ , welche bei der linearen Abbildung  $\varphi_1$  eine involutorische elliptische Projektivität  $\varepsilon_\omega$  auf der Geraden  $\omega' \in \mathcal{O} \setminus Z_2'$  bestimmt; orthogonale Ebenen  $\alpha, \beta$  durch eine erstprojizierende Gerade  $s_1 \neq \omega$  besitzen geradlinige erste Risse durch den Punkt  $s_1' \neq Z_2'$ , welche  $\omega'$  in Punkten schneiden, die in  $\varepsilon_\omega$  zugeordnet sind. Analoges gilt für den Index 2. Dann gilt:

Satz 4.2.2: Kennt man von einem linearen Zweibildersystem aus einem dreidimensionalen euklidischen Raum  $\overline{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  mit doppelprojizierender Fernebene  $\omega$  die Hauptbildfigur  $(Z_2', Z_1''; \beta)$ , das Bildpaar  $(\omega', \omega'' = \omega' / \beta)$  der Fernebene  $\omega$ , die involutorischen Projektivitäten  $\varepsilon_\omega$  und  $\varepsilon_{\omega''}$  und weiß man, daß die erstprojizierenden Geraden orthogonal zu den zweitprojizierenden Geraden sind, so ist jede Punktmenge  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}$  durch die Menge der Bildpaare  $(X', X'')$  ihrer Punkte  $X$  bis auf Ähnlichkeiten eindeutig bestimmt, falls stets  $X' \neq Z_2', X'' \neq Z_1''$  gilt.

Beweis. Das Punktepaar  $(O', O'')$  mit  $O' = Z_2' \varepsilon_\omega$ ,  $O'' = Z_1'' \varepsilon_{\omega''}$  ist nach den Voraussetzungen Bildpaar eines Fernpunkts  $O$  so, daß  $\{Z_1'', Z_2', O\}$  ein Poldreieck in  $\pi^l$  abgibt. In der elliptischen involutorischen Projektivität  $\varepsilon_\omega$  gibt es genau zwei zugeordnete Punkte  $1', \bar{1}'$  mit  $H(Z_2', O', 1', \bar{1}')$ , welche die ersten Risse jener absolut konjugierten

Ferngeraden  $1, \bar{1} \in \mathcal{G}_{Z_1}$  sind, für die  $H(\sigma, Z_1, 0; 1, \bar{1})$  gilt; analog erhält man zwei Punkte  $2'', \bar{2}''$  auf  $\omega''$  und zwei Ferngeraden  $2, \bar{2} \in \mathcal{G}_{Z_2}$ . Der Schnittpunkt  $\{N_u\} = 1 \cap 2$  besitzt dann das Bildpaar  $(N_u', N_u'') = (1', 2'')$  und seine absolute Polare  $e_u$  enthält einerseits den Pol  $\bar{2} \cap Z_1, 0$  von 2 und andererseits den Pol  $\bar{1} \cap Z_2, 0$  von 1. Durch die Angabe ist also ein Poldreieck und einmal Pol und Polare von  $\pi^\perp$  mitbestimmt.

Wählt man  $Z_1, Z_2 \in \omega$  zulässig auf zwei verschiedenen Arten, so führt die Affinität, durch welche die erste Rekonstruktion in die zweite übergeht, ein Poldreieck und ein Paar Pol-Polare von  $\pi^\perp$  in ein Poldreieck und ein Paar Pol-Polare von  $\pi^\perp$  über und ist daher eine Ähnlichkeit.  $\square$



### 4.3 Lineare Zweispurensysteme aus einem dreidimensionalen euklidischen Raum

4.3.1 In diesem Fall ist jedes lineare Zweispurensystem klassisch und  $\beta: \Delta_2' \rightarrow \Delta_1''$  eine Ordnerprojektivität.

Gemäß 3.2.4 existieren im affinen Raum drei Fälle linearer Zweispurensysteme, wobei Fall 3, daß die Fernebene  $\omega$  die Doppelspur enthält und von  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  verschieden ist, nach 3.2.6 unbrauchbar ist.

Im Fall 2 ist  $\omega$  die erste Spurenebene  $\Delta_1$  und daher  $\omega''$  die Gerade  $\Delta_1''$ . Durch das lineare Zweispurensystem ist eine Kollineation  $\kappa: \omega = \Delta_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  auf das erste Bildfeld mitbestimmt, welche der absoluten Polarität  $\pi^\perp$  von  $\hat{\Pi}$  das Polarsystem  $\lambda$  einer Ellipse in  $\hat{\Pi}'$  mit  $\bar{\lambda}_1 = \kappa^{-1}(\hat{\Pi}^\perp) \kappa, \hat{\lambda}_1 = (\hat{\Pi}^\perp) \kappa$  zuweist. Auf der Doppelspur  $\Delta_1 \cap \Delta_2 \subset \omega$  existiert eine involutorische Projektivität von in  $\pi^\perp$  konjugierten Punkten, welche die erste bzw.

zweite Orthogonalinvolution  $\varepsilon_1 : \Delta_2' \rightarrow \Delta_2'$  bzw.  $\varepsilon_2 : \Delta_1'' \rightarrow \Delta_1''$  der ersten Kerngeraden  $\Delta_2'$  bzw. der zweiten Kerngeraden  $\Delta_1''$  ergibt. Die Ordnerprojektivität  $\beta : \Delta_2' \rightarrow \Delta_1''$ , die von den doppeltinzidenten Punkten stammt, muß mit  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  verträglich sein, so daß  $\varepsilon_1 \beta = \beta \varepsilon_2$  gilt. Die elliptische involutorische Projektivität  $\varepsilon_1$  ist die involutorische Projektivität in  $\lambda_1$  konjugierter Punkte auf  $\Delta_2'$ . Weiters gilt:

Satz 4.3.1: Kennt man von einem linearen Zweispurensystem aus einem dreidimensionalen euklidischen Raum  $\overset{\circ}{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  die für beiden Kerngeraden  $\Delta_2', \Delta_1'' \in \mathcal{K}'$ , die beiden Orthogonalinvolutionen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  und zu einem ersten Ordnerpunkt  $S' \in \Delta_2'$  den zugeordneten zweiten Ordnerpunkt  $S'' \in \Delta_1''$ , so ist die Ordnerprojektivität  $\beta : \Delta_2' \rightarrow \Delta_1''$  zweideutig festgelegt.

Der Beweis ist gleich dem Beweis von Satz 4.1.2 bei dualer Deutung.  $\square$

4.3.2 In Analogie zu 4.1.3 gilt:

Satz 4.3.2: Kennt man von einem linearen Zweispurensystem aus einem dreidimensionalen euklidischen Raum  $\overset{\circ}{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  mit der Fernebene als erster Spurenebene  $\Delta_1$  die beiden Kerngeraden  $\Delta_2', \Delta_1'' \in \mathcal{K}'$ , eine mit den beiden Orthogonalinvolutionen verträgliche Ordnerprojektivität  $\beta$ , das erste Bild  $\lambda_1 = (\pi^\perp)^\pi$  der absoluten Polarität  $\pi^\perp$  und die zweite Orthogonalinvolution  $\varepsilon_2 : \Delta_1'' \rightarrow \Delta_1''$ , so ist jede Ebenenmenge  $\mathcal{K}^* \in \mathcal{E} \setminus \omega$  durch die Menge der Bildpaare  $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$  ihrer Ebenen  $\mathcal{F}$  bis auf Ähnlichkeiten eindeutig bestimmt, falls stets  $\mathcal{F}' \neq \Delta_2', \mathcal{F}'' \neq \Delta_1''$  gilt.

Der Beweis ist jenem von Satz 4.2.1 analog; im Beweisteil (c) wird Satz 3.1.3 benötigt.  $\square$

4.3.3 Für  $\omega \not\subset \Delta_1 \cap \Delta_2$  besitzt die Fernebene  $\omega$  ein Bildpaar  $(\omega', \omega'')$ .

Kennt man die Hauptbildfigur  $(\Delta_2', \Delta_1''; \beta)$  und das Bildpaar  $(\omega', \omega'')$ , so ist die Kollineation, die nach Satz 3.1.3 eine Rekonstruktion in eine andere Rekonstruktion überführt, notwendig eine Affinität. In der Geraden  $\omega'$  existiert eine involutorische elliptische Projektivität  $\varepsilon_{\omega'} : \omega' \rightarrow \omega'$ , die von der involutorischen Projektivität von in  $\pi^\perp$  konjugierten Punkten auf  $\bar{\omega} = \omega \cap \Delta_1$  stammt; orthogonale Ebenen durch eine zu  $\Delta_1$  normale Gerade besitzen erste Risse durch einen Punkt nicht auf  $\omega'$  und schneiden  $\omega'$  in Punkten, die in  $\varepsilon_{\omega'}$  zugeordnet sind. Analoges gilt für den Index 2. Dann gilt:

Satz 4.4.3: Kennt man von einem linearen Zweispurensystem aus einem dreidimensionalen euklidischen Raum  $\overline{\Pi} = \Pi \setminus \omega$  mit eigentlicher Doppelspur die Hauptbildfigur  $(\Delta_2', \Delta_1''; \beta)$ , das Bildpaar  $(\omega', \omega'')$  der Fernebene  $\omega$ , die involutorischen Projektivitäten  $\varepsilon_{\omega'}$  und  $\varepsilon_{\omega''}$  und weiß man, daß die Spurebenen zueinander orthogonal sind, so ist jede Ebenenmenge  $\mathcal{E}^* \subset \mathcal{E} \setminus \omega$  durch die Menge der Bildpaare  $(\xi', \xi'')$  ihrer Ebenen  $\xi$  bis auf Ähnlichkeiten eindeutig bestimmt, falls stets  $\xi' \neq \Delta_2', \xi'' \neq \Delta_1''$  gilt.

Der Beweis entsteht durch geringfügige Änderungen aus dem Beweis zu Satz 4.2.2.  $\square$

Ein lineares Zweispurensystem vom 4. Typ entsteht, wenn man die beiden eigentlichen, nicht parallelen Ebenen  $\Delta_1, \Delta_2$  einer Zentralprojektion mit Augpunkt  $Z$  auf eine Ebene  $\Pi'$  von  $\overline{\Pi}$  unterwirft (vgl. 3.2.4). Kennt man die Hauptbildfigur  $(\Delta_2' = \Delta_1''; \beta = id_2)$ , das Bildpaar  $(\omega', \omega'')$  der nicht projizierenden Fernebene  $\omega$  und den Distanzkreis  $k$  von  $Z$  bezüglich  $\Pi'$ , so ist jede Ebenenmenge durch die Menge der Bildpaare  $(\xi', \xi'')$  ihrer Ebenen  $\xi$  mit  $\xi' \neq \Delta_2', \xi'' \neq \Delta_1''$  bis auf Ähnlichkeiten eindeutig bestimmt: Durch  $k$  sind zwei zu  $\Pi'$  symmetrische Punkte als mögliche Augpunkte festgelegt. Ist  $Z$  einer dieser beiden Punkte, so muß  $\Delta_1$  notwendig zur Ebene  $\{Z\} \vee \omega'$  und  $\Delta_2$  notwendig zur Ebene  $\{Z\} \vee \omega''$  parallel sein. Wählt man die Doppelspur  $\Delta_1 \cap \Delta_2$  parallel zur Geraden  $\{Z\} \vee (\omega' \cap \omega'')$  in  $\{Z\} \vee \Delta_2'$ , so ist die Aufnahmesituation eindeutig bestimmt und die eindeutige Rekonstruktion möglich. Zu verschiedenen zulässigen Angaben von  $\Delta_1 \cap \Delta_2$  gehören bezüglich  $Z$  zentrisch ähnliche Rekonstruktionsergebnisse; durch Spiegelung an der Ebene  $\Pi'$  erhält man alle Rekonstruktionen zum anderen Augpunkt.

Die Lösung der Maßaufgaben erfolgt im Zentralriß zum Augpunkt  $Z$  auf  $\Pi'$ . Der Zentralriß  $x_u^c$  der Ferngeraden  $x_u$  einer Ebene  $\xi$  mit dem Bildpaar  $(\xi', \xi'')$  verbindet die Punkte  $\xi' \cap \omega'$  und  $\xi'' \cap \omega''$ , da etwa  $\xi' \cap \omega'$  der Zentralriß des Fernpunkts der Geraden  $\xi \cap \Delta_1$  ist.

#### 4.4 Elementare Abbildungsmethoden der Darstellenden Geometrie

4.4.1 Def.4.4.1: Zwei Normalrisse heißen gepaart, wenn ihre Bildebenen zueinander normal sind. Zwei lineare Risse heißen in geordneter Lage, wenn ein lineares Zweibildersystem vom

4. Typ mit doppelt projizierender Ferngeraden vorliegt und  $Z_2' = Z_1''$  ein Fernpunkt von  $\Pi'$  ist; in geordneter Lage liegen somit die beiden Risse eines Punktes auf einem Ordner und alle Ordner sind parallel.

Ist  $\Pi'$  eine Ebene von  $\Pi$ , wie das in der elementaren Darstellenden Geometrie stets zutrifft, so können die Kollineationen:  $k_1: \overline{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{K}'$  und  $k_2: \overline{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{K}'$  speziell als Ähnlichkeiten gewählt werden. Im Falle eines linearen Zweibildersystem, das aus zwei gepaarten Normalrissen besteht, die je einer Ähnlichkeit unterworfen werden, ist nach Satz 4.2.2 jede Menge eigentlicher Punkte durch die Menge ihrer Bildpaare bis auf Ähnlichkeiten eindeutig bestimmt, wenn man den ersten linearen Riß einer kartesischen Basis  $\{A_0, A_1, A_2\}$  von  $\overline{\mathcal{K}}$  und den zweiten linearen Riß einer kartesischen Basis  $\{B_0, B_2, B_3\}$  von  $\overline{\mathcal{K}}$  kennt; damit sind nämlich die involutorischen Projektivitäten  $\varepsilon_{\omega'}$  und  $\varepsilon_{\omega''}$  auf der Ferngeraden  $\omega' = \omega''$  von  $\Pi'$  mitbestimmt. Insbesondere kann man die orthogonalen Ebenen  $\overline{\mathcal{K}}$  und  $\overline{\mathcal{K}}$  als Koordinatenebenen einer kartesischen Basis  $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$  von  $\Pi$  auffassen, sodaß  $B_0 = A_0, B_2 = A_2, B_3 = A_3$  gilt.

Sind zusätzlich die Ähnlichkeitsfaktoren von  $k_1$  und  $k_2$  bekannt, in dem man etwa das Bild einer Einheitsstrecke in  $\overline{\mathcal{K}}$  und  $\overline{\mathcal{K}}$  kennt, so ist die Rekonstruktion bis auf Kongruenzen möglich. Das trifft insbesondere dann zu, wenn  $k_1$  und  $k_2$  selbst Kongruenzen sind, also die gepaarten Normalrisse "in die Zeichenebene verlagert werden".

Bei zwei zu gepaarten Normalrissen ähnlichen linearen Rissen entsteht ein lineares Zweibildersystem vom 2., 3. oder 4. Typ. Im ersten Fall gibt es gebrochene Ordner, deren Knickpunkt auf der Ordnerachse, der Perspektivitätsachse von  $\beta$  liegen; diese Situation tritt etwa auf bei Einschneidegrundriß und Einschneideaufriß, die auch in verschiedenen Maßstäben gezeichnet sein können. Der 3. Typ ist nur so möglich, daß  $Z_2' = Z_1''$  ein Fernpunkt und  $\beta$  eine Projektivität mit der Ferngeraden  $\omega' = \omega''$  von  $\Pi'$  als Fixgeraden ist; legt man in verschiedenen Maßstäben gezeichneten Grund- und Aufriß so in die Zeichenebene, daß die y-Achse in beiden Rissen parallel sind, erhält man ein Beispiel.

Die geordnete Lage gepaarter Normalrisse<sup>1</sup>, wie etwa Grund- und Aufriß im Elementarunterricht, ergibt Typ 4; die Koinzidenzebene ist eine Symmetrieebene der beiden Bildebenen.

Die Lösung der Maßaufgaben kann gemäß 1.6.11 erfolgen.

Sind die Ebenen  $\bar{\pi}$  und  $\bar{\pi}'$  speziell die Grundrißebene bzw. die Aufrißebene, also die xy-Ebene bzw. die yz-Ebene eines kartesischen Rechtssystems<sup>2</sup> mit lotrechter z-Achse in  $\Pi$ , und wählt man speziell  $\mathcal{K}' = \bar{\mathcal{K}}$ ,  $\kappa_1 = id_{\bar{\mathcal{K}}}$  und  $\kappa_2$  als Parallelperspektivität, deren Perspektivitätsgeraden in zur y-Achse normalen Ebenen unter  $45^\circ$  gegen die Grundrißebene verlaufen, so entsteht Grund- und Aufriß in geordneter Lage; da diese Perspektivitätsgeraden als Drehsehnen einer Vierteldrehung um die y-Achse gedeutet werden können, erhält man so die MONGESche Drehung<sup>3</sup>.

#### 4.4.2 Gilt für eine kartesische axonometrische Grundrißfigur

$\{A_0', A_1', A_2', A_3', P_1', P_2', P_3'\}$  in einer euklidischen Ebene  $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}' \setminus \omega'$   
speziell  $P_3' \in P_1' P_2' = \omega'$ , wie das im Elementarunterricht stets zutrifft, so ist nach Satz 1.5.5 die Axonometrie das Produkt einer Parallelprojektion und einer Ähnlichkeit. Maßaufgaben können gemäß 1.6.9 behandelt werden, wenn man die Lageaufgaben beherrscht.

<sup>1</sup>"Geordnete Lage" bezieht sich auf die gegenseitige Lage des Risses in  $\Pi'$ , "gepaart" auf die Lage der Bildebenen im Raum. Zusammenfassung dieser beiden Situationen unter einer Bezeichnung, etwa "zugeordnete Normalrisse", ist nicht günstig. Einschneidegrundriß und Einschneideaufriß sind gepaart aber nicht in zugeordneter Lage, normalaxonometrischer Riß und normalaxonometrischer Grundriß sind in geordneter Lage, aber keine gepaarten Normalrisse.

<sup>2</sup>Dieses Rechtssystem in  $\Pi$  ist das einzige, in dem im Grundriß und im Aufriß je ein ebenes Rechtssystem vorliegt, und hat sich im deutschsprachigen Raum weitgehend durchgesetzt. Nur in einem einzigen Schullehrbuch Österreichs wird das Rechtssystem der ÖNORM verwendet.

<sup>3</sup>Erfahrungsgemäß erschwert die Überlappung der Projektionsbegriffe mit dieser Drehung dem Anfänger das Verständnis für die Erfassung eines räumlichen Objekts durch zwei ebene Figuren. Mit Hilfe des Koordinatensystems ist die Kopplung zum Raum leichter herzustellen. (!) ("Gedanken zum Schulunterricht in Darstellender Geometrie" Didaktikheft 6 der ÖMG, März 1981.

Fügt man dem axonometrischen Riß einen axonometrischen Nebenriß hinzu, der der axonometrische Riß der Normalprojektion auf eine Koordinatenebene ist, so liegt ein lineares Zweibildersystem vom 4. Typ vor; ein solcher axonometrischer Nebenriß entsteht beim Einmessen der Koordinaten der abzubildenden Punkte. Die Koinzidenzebene ist die betreffende Koordinatenebene.

Zwei axonometrische Nebenrisse bilden ein lineares Zweibildersystem vom 2. Typ. Die beiden linearen Risse entstehen aus zwei gepaarten Normalrissen durch Anwendung je einer Affinität  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$ ; nach Satz 4.2.2 ist durch zwei axonometrische Nebenrisse die Rekonstruktion bis auf Ähnlichkeiten möglich, da man durch die Bilder einer kartesischen Basis in jeder Koordinatenebene die involutorischen Projektivitäten  $\varepsilon_{\omega'}$  und  $\varepsilon_{\omega''}$  auf der Ferngeraden  $\omega' = \omega''$  von  $\Pi'$  beherrscht.

4.4.3 Um in einem Zentralriß Lageaufgaben behandeln zu können, fügt man etwa den Zentralgrundriß, also den Zentralriß des in der Grundrißebene liegenden Grundrisses hinzu. Wir wählen etwa  $\mathcal{P}' = \bar{\mathcal{P}}$  als Bildebene der Zentralprojektion zum Augpunkt O,  $\bar{\mathcal{P}}$  als die Grundrißebene, auf die aus dem Fernpunkt  $Z_u$  der z-Achse parallelprojiziert wird. Jeder Punkt P des projektiven Raumes, der nicht auf der Kernachse  $OZ_u$  liegt, ist dann durch sein Bildpaar  $(\mathcal{P}' = \mathcal{P}^c, \mathcal{P}'' = \mathcal{P}^{Ic})$ , wobei  $\mathcal{P}^I$  den Grundriß von P bedeutet, eindeutig bestimmt. Es liegt ein lineares Zweibildersystem vom 4. Typ vor, wobei  $Z_u^c = O^{Ic}$  der gemeinsame Kernpunkt und die Grundrißebene die Koinzidenzebene ist. Die Fernebene  $\omega$  ist zweit- aber nicht erstprojizierend. Nach Satz 4.2.1 benötigt man den zweiten Riß  $\omega''$  von  $\omega$ , also den Zentralriß der Schnittgeraden von  $\omega$  mit der Grundrißebene; diese Fluchtgerade  $p_u^c$  der horizontalen Grundrißebene wird Horizont genannt. Der Horizont enthält genau dann den Hauptpunkt (vgl. 1.6.5), wenn die Bildebene der Perspektive normal zur Grundrißebene, also lotrecht verläuft.

Schneidet man den Zentralgrundriß  $g^{Ic} = g''$  einer Geraden mit dem Horizont  $p_u^c = \omega''$ , so erhält man den Zentralgrundriß  $G_u^{Ic} = G_u''$  ihres Fernpunkts und im Schnitt von  $g^c = g'$  mit dem Ordner durch  $G_u^{Ic}$  den Fluchtpunkt  $G_u^c$  von g.

Die Maßaufgaben werden im Zentralriß mit Hilfe des Distanzkreises gemäß 1.6.5 gelöst. Zur Lösung von (M1) benötigt man das Bild einer Einheitsstrecke; dazu kann man den Zentralriß  $\rho^c$  der Spur  $\rho$  der Grundrißebene und den Maßstab, in dem der Zentralriß gezeichnet werden soll, angeben.

4.4.4 Mit gepaarten Normalrissen ist ein lineares Zweispurensystem vom 4. Typ mitbestimmt, wenn man die beiden Normalrisse so in die Zeichenebene kongruent verlagert, daß eine Rißachse entsteht: Jeder doppelt inzidente Punkt  $A \in \Delta_1 \cap \Delta_2$  hat zusammenfallende Risse auf der Rißachse  $\Delta_2' = \Delta_1''$ . Das Bildpaar  $(\omega', \omega'')$  der Fernebene  $\omega \not\perp \Delta_1 \cap \Delta_2$  fällt in die Ferngerade  $\omega'$  von  $\Pi'$  und die involutorischen elliptischen Projektivitäten  $\varepsilon_{\omega'}, \varepsilon_{\omega''}$  (vgl. 4.3.3) sind die absolute Involution der euklidischen Ebene  $\Pi'$  in  $\Pi$  (vgl. Satz 4.4.3)<sup>1</sup>.

4.4.5 Das Fluchtspur- und Spurprinzip verwendet die Fernebene  $\omega$  als erste Spurenebene  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  als Zeichenebene  $\Pi'$ ; die Kollineation  $\kappa_1: \omega \rightarrow \mathcal{K}'$  ist eine Perspektivität zu einem eigentlichen Zentrum  $Z$  und  $\kappa_2$  die Identität in  $\Delta_2 = \mathcal{K}'$ . Dann ist die gemeinsame Kerngerade  $\Delta_2' = \Delta_1''$  die Ferngerade von  $\Pi'$  und es liegt ein lineares Zweispurensystem vom 4. Typ vor: Die Fluchtspur  $q_u^c$  und die Spur  $a$  jeder eigentlichen Ebene  $\alpha$  sind stets parallel. Das erste Bild  $\lambda_1$  der absoluten Polarität ist das Antipolarsystem des Distanzkreises von  $Z$  bezüglich  $\Pi'$ , die zweite Orthogonalinvolution  $\varepsilon_2: \Delta_1'' \rightarrow \Delta_1''$  ist die absolute Involution der Bildebene  $\Pi'$  (vgl. Satz 4.3.2).

---

<sup>1</sup>Es ist im Elementarunterricht unzweckmäßig, Grund- und Aufrißmethode mit diesem Zweispurensystem zu koppeln. Arbeitet man in diesem Zweispurensystem, so kann man die Rißachse nicht weglassen.