

**Skriptum zur Vorlesung**

# **DIFFERENTIALGEOMETRIE**

von

**o.Prof DDr H. Brauner**

**Univ.Doiz Dr F. Manhart**

**1989/90**



E L E M E N T A R E  
D I F F E R E N T I A L G E O M E T R I E

*Skriptum zur Vorlesung*  
*"Elementare Differentialgeometrie"*  
*von Prof. Brauner*

*(c) 1989/1990 by*  
*Michael Schrott*

1. Auflage: Oktober 1990, 4 Exemplare.



## Inhaltsverzeichnis

- 0. Vorwort (7)
- 1. Lineare Geometrie
  - 1.1 Reelle Vektorräume (11)
  - 1.2 Euklidische Vektorräume (15)
  - 1.3 Reelle affine Räume (19)
  - 1.4 Euklidische Räume (22)
- 2. Kurventheorie
  - 2.1 Der Kurvenbegriff (27)
  - 2.2 Schmiegevektorräume einer Kurve (31)
  - 2.3 Normierte Wege (37)
  - 2.4 Begleitbasis (40)
  - 2.5 Ableitungsgleichungen (44)
  - 2.6 Hauptsatz der Kurventheorie (51)
  - 2.7 Berührung von Kurven (55)
- 3. Flächentheorie
  - 3.1 Flächenbegriff und Flächenkurven (63)
  - 3.2 Tangentialvektorraum einer  $m$ -Fläche (74)
  - 3.3 Metrische Grundform einer  $m$ -Fläche (76)
  - 3.4 Parallelverschiebung auf einer  $m$ -Fläche (85)
  - 3.5 Geodätische Linien einer  $m$ -Fläche (93)
  - 3.6 Wegunabhängigkeit der Parallelverschiebung (100)
  - 3.7 Abbildungen aus  $m$ -Flächen (106)
- 4. Krümmungstheorie der Hyperflächen
  - 4.1 Die WEINGARTEN-Abbildung (113)
  - 4.2 Eigenwerttheorie der WEINGARTEN-Abbildung (117)
  - 4.3 Krümmungsform einer regulären  $C^2$ -Hyperfläche (122)
  - 4.4 Normalkrümmung einer Flächentangente (128)
  - 4.5 Krümmung von Flächenkurven einer Hyperfläche (133)
  - 4.6 Grundgleichungen der Hyperflächentheorie (138)
  - 4.7 Hauptsatz der Hyperflächentheorie (141)
- 5. 2-Flächen im  $\mathbb{R}^3$ 
  - 5.1 Spezielle Parametrisierungen (151)
  - 5.2 Torsen (158)
  - 5.3 Minimalflächen (167)
  - 5.4 Orientierte geodätische Krümmung einer Flächenkurve (176)
  - 5.5 Die Integralformel von GAUSS-BONNET (179)



## 0. VORWORT

Das vorliegende Skriptum ist parallel zu den im Studienjahr 1989/90 abgehaltenen Vorlesungen aus Differentialgeometrie entstanden, die alle zwei Jahre am Institut für Geometrie der Technischen Universität Wien gelesen werden.

Die vom 5. Oktober 1989 bis 22. Juni 1990 andauernde Vorlesungsreihe war die letzte, die von Herrn Prof. Brauner begonnen wurde; bereits die zweite Vorlesung am 6. Oktober war die letzte von ihm selbst gehaltene. Die folgenden Vorlesungen wurden fast ausschließlich von Herrn Doz. Manhart nach dem Konzept von Brauner gelesen.

An dieser Stelle muß ich Herrn Manhart dafür danken, daß er den so umfangreichen Vorlesungsstoff in so angenehmer und bemerkenswert leicht verständlicher uns Studenten nähergebracht hat. Auch schulde ich ihm Dank für die von ihm am Großteil des Skriptums vorgenommenen Korrekturen.

Dieses Skriptum ist ursprünglich von mir selbst als Hilfe für die Hörer der folgenden Vorlesungsreihen aus Differentialgeometrie konzipiert worden; daher der recht ausführliche Stil. Zudem ist an mehreren Stellen Platz für Figuren vorgesehen; die Ausfertigung derselben bleibt dem Leser überlassen.

Abschließend bitte ich noch alle Leser des Skriptums, entdeckte Fehler mir nach Möglichkeit mitzuteilen. Vielleicht gibt es nämlich irgendwann eine zweite Auflage von hoffentlich mehr als vier Exemplaren.

Wien, im Oktober 1990

Michael Schrott



I

# **LINEARE GEOMETRIE**



## 1.1 Reelle Vektorräume

### 1.1.1 Bezeichnungen

Wir bezeichnen einen Vektorraum mit einem *großen lateinischen Buchstaben* (z.B.  $V, W, \dots$ ). Die Elemente eines Vektorraumes, also die Vektoren, bezeichnen wir stets mit *kleinen lateinischen Buchstaben* (z.B.  $a, b, \dots, u, v, \dots$ ). Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  (= reellen Zahlen) und  $a \in V$ . Wir setzen hier einen *Linksvektorraum* voraus, schreiben also:  $\alpha a \in V$ . Ferner sei  $\dim V = m$  ( $< \infty$ ) vereinbart. Für den Nullvektor von  $V$  schreiben wir  $0$ .

Einen *Untervektorraum* bezeichnen wir etwa als  $V_1, W_1$  usw.

Eine in einem Vektorraum  $V$  ausgezeichnete Vektormenge ist eine *Basis* von  $V$ . Basen seien hier etwa als  $\underline{A}, \underline{B}$  usw. bezeichnet. Wir können dann unter Verwendung der *Basisvektoren* schreiben:

$$\underline{A} = \{a_j \mid j = 1, \dots, m\} = \{a_j\}.$$

*Bemerkung:* Bezeichnen wir einen Index mit einem *kleinen lateinischen Buchstaben*, so läuft er automatisch von 1 bis  $m$ .

Nach Wahl der Basis besitzt ein Vektor  $v \in V$  die eindeutige Koordinatendarstellung (EINSTEIN-Konvention)

$$v = v^j a_j \quad (= v^k a_k).$$

Die Skalare  $v^j$  heißen die *Koordinaten* von  $v$  bezüglich  $\underline{A}$ .

### 1.1.2 Beispiel: Der arithmetische Vektorraum $\mathbb{R}^m$

Da im Skalarkörper des arithmetischen Vektorraums, also im Körper der reellen Zahlen die beiden Zahlen 0 und 1 ausgezeichnet sind, ist im arithmetischen Vektorraum eine Basis ausgezeichnet, die sogenannte *kanonische Basis*. Für deren Basisvektoren  $e_j$  gilt unter Verwendung des KRONECKER-Symbols  $\delta_{jk}$ :

$$e_j = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, \dots, \delta_{jm}), \quad j = 1, \dots, m.$$

In  $\mathbb{R}^m$  identifizieren wir den Vektor  $v \in \mathbb{R}^m$  mit dem aus seinen Koordinaten bestehenden  $m$ -Tupel; es gilt also

$$v = (v^1, v^2, \dots, v^m) = v^j e_j.$$

### 1.1.3 Basiswechsel in einem beliebigen Vektorraum

Gegeben seien die beiden Basen  $\underline{A} = \{a_j\}$  bzw.  $\underline{A}' = \{a'_j\}$ . Dabei beachte man die von SCHOUTEN stammende Schreibweise:

Das Grundsymbol für die Basis, also das "A", sowie für den Basisvektor, also das "a", sind in beiden Basen gleich. Der die Basen voneinander unterscheidende "Strich" wird bei der "gestrichenen" Basis dem *Index j* hinzugefügt: *j'*.

Der Basiswechsel läßt sich dann durch

$$a_{j'} = t_{j',j} a_j \quad (*)$$

beschreiben.

Ausführlich lautet (\*) so:

$$\begin{aligned} a_{1'} &= t_{1',1} a_1 + \dots + t_{1',m} a_m \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m'} &= t_{m',1} a_1 + \dots + t_{m',m} a_m \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man leicht, daß der Index *j* als *Spaltenindex*, der Index *j'* als *Zeilenindex* auftritt.

Die Matrix der  $(t_{j',j})$  ist *quadratisch* und *regulär*, da ein Basiswechsel als Vektorraumautomorphismus aufgefaßt werden kann (siehe später). Da wegen der Regularität der Matrix  $(t_{j',j})$  nun  $\det(t_{j',j}) \neq 0$  gilt, ist entweder

$$\begin{aligned} \det(t_{j',j}) > 0 &\dots\dots \textit{gleichsinniger} \text{ Basiswechsel} \\ &\text{oder} \\ \det(t_{j',j}) < 0 &\dots\dots \textit{gegensinniger} \text{ Basiswechsel.} \end{aligned}$$

Wie ändern sich nun bei einem Basiswechsel die Koordinaten eines Vektors  $v \in V$ :

$$\begin{aligned} v^j &\dots \text{Koordinaten von } v \text{ bez. } \underline{A}, \\ v^{j'} &\dots \text{Koordinaten von } v \text{ bez. } \underline{A}'. \end{aligned}$$

Mit (\*) folgt dann aus

$$v = v^j a_j = v^{j'} a_{j'} = v^{j'} t_{j',j} a_j$$

zusammen mit der Eindeutigkeit der Basisdarstellung die wichtige Beziehung

$$v^j = v^{j'} t_{j',j}$$

Bemerkung zur EINSTEIN-Konvention:

Die "laufenden" Indizes, d.h. die in der *Summe* laufenden Indizes "kürzen" sich weg, die festen Indizes bleiben über und müssen links und rechts in der Formel *übereinstimmen*.

Zum Beispiel obige Formel: der laufende Index ist offenbar das *j'*, da dieses "weggekürzt" werden kann. Somit verbleibt (links und rechts!) nur das *j*, also der feste Index.

Natürlich können in solchen Formeln mehrere laufende und feste Indizes vorkommen, die dann z.B. von Doppelsummen herrühren. Obige Kontrolle durch das "Wegkürzen" gilt aber auch hier.

#### 1.1.4 Orientieren eines Vektorraumes

Durch die Auszeichnung *einer* Basis wird es möglich, alle zu dieser Basis gleichsinnig äquivalenten Basen zu einer Klasse zusammenzufassen. Die Auszeichnung *einer* und damit einer ganzen Klasse von Basen heißt eine **Orientierung des Vektorraumes**.

Jede Basis der ausgezeichneten Klasse heißt **positiv orientiert**, jede andere **negativ orientiert**.

Beispiel: Die Orientierung des arithmetischen Vektorraumes  $\mathbb{R}^n$  geschieht durch Auszeichnung der kanonischen Basis. Die so erhaltenen positiv orientierten Basen des  $\mathbb{R}^n$  heißen **Rechtssysteme**. Jede andere Basis heißt ein **Linkssystem**.

#### 1.1.5 Homomorphismen

Gegeben seien zwei (nicht notwendig verschiedene) Vektorräume  $V$  und  $W$  sowie eine Abbildung

$$l : V \rightarrow W.$$

Gelten für  $l$  die Eigenschaften

- (1)  $l$  ist global, d.h. auf ganz  $V$  definiert,
- (2)  $l$  ist linear, d.h. es gilt

$$l(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha l(v_1) + \beta l(v_2) \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, v_1, v_2 \in V,$$

so nennen wir  $l$  einen **Homomorphismus**.

#### 1.1.6 Koordinatenmäßige Beschreibung eines Homomorphismus

Es sei  $\underline{A} = \{a_j\}$  bzw.  $\underline{B} = \{b_\alpha\}$  eine beliebige Basis von  $V$  bzw.  $W$ . Die Bilder  $l(a_j)$  der Basisvektoren  $a_j$  liegen in  $W$ , gestatten daher eine Darstellung der Bauart

$$l(a_j) = l_j^\alpha \cdot b_\alpha ; \alpha=1, \dots, n.$$

Schreibt man diesen Sachverhalt ausführlich nieder, so erkennt man, daß die Matrix  $(l_j^\alpha)$  eine  $(m, n)$ -Matrix ist.

Daraus folgt für einen beliebigen Vektor  $v \in V$  mit  $v = v^j \cdot a_j$  dann

$$l(v) = l(v^j \cdot a_j) = v^j l(a_j) = v^j l_j^\alpha \cdot b_\alpha =: w^\alpha \cdot b_\alpha.$$

Aus der Eindeutigkeit der Basisdarstellung von  $l(v)$  in  $W$  folgt:

$$w^\alpha = v^j l_j^\alpha .$$

Konvention: Läuft ein Index von 1 bis  $n$ , so bezeichnen wir ihn stets mit einem *kleinen griechischen Buchstaben*, z.B.  $\alpha$  in obiger Formel. Kleine lateinische Buchstaben, wie z.B. das  $j$  in obiger Formel, verwenden wir, wie schon erwähnt, nur dann, wenn der Index von 1 bis  $m$  läuft.

Sonderfälle: a)  $V=W$  :  $l$  heißt *Endomorphismus*.

b) Ist  $l$  bijektiv, so gilt  $m=n$  und  $\det(l_j^\alpha) \neq 0$ .

Hier heißt  $l$  *Isomorphismus*; gilt zusätzlich noch  $V=W$ , so nennen wir  $l$  einen *Automorphismus*.

## 1.2 Euklidische Vektorräume

### 1.2.1 Definition und Eigenschaften

(a) Eine Abbildung  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften

$$(1) \quad g(v,w)=g(w,v)$$

$$(2) \quad g(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha \cdot g(v_1, w) + \beta \cdot g(v_2, w) ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ und}$$

$$(3) \quad g(v,v) > 0 \text{ für } v \in V \setminus \{0\}$$

heißt ein *inneres Produkt*. Die Eigenschaft (1) heißt *Symmetrie*, die Eigenschaft (2) *Linearität* und die Eigenschaft (3) *positive Definitheit* von  $g$ . Wegen (1) herrscht sogar *Bilinearität* von  $g$  vor.

(b) Ein Vektorraum  $V$ , der mit einem inneren Produkt  $g$  ausgestattet ist, heißt ein *euklidischer Vektorraum*. Zur besseren Kennzeichnung von euklidischen Vektorräumen schreiben wir genauer  $(V;g)$ .

### 1.2.2 Koordinatenmäßige Erfassung von $g$

Es sei  $\underline{A}=\{a_j\}$  eine Basis eines euklidischen Vektorraumes  $(V;g)$ . Wir definieren zur Abkürzung

$$g_{\mathbf{jk}} := g(a_j, a_k)$$

Aus (1) folgt sofort

$$g_{\mathbf{jk}} = g_{\mathbf{kj}}$$

Aus (3) folgt sofort

$$g_{\mathbf{jj}} > 0.$$

Zur Berechnung von  $g(v,w)$  für beliebige Vektoren  $v, w \in V$  genügt es, die von den Skalaren  $g_{\mathbf{jk}}$  gebildete quadratische Matrix zu kennen, da dann für  $v = v^j \cdot a_j$  und  $w = w^k \cdot a_k$  folgt:

$$g(v,w) = g(v^j \cdot a_j, w^k \cdot a_k) = v^j \cdot w^k \cdot g(a_j, a_k) = v^j \cdot w^k \cdot g_{\mathbf{jk}}.$$

### 1.2.3 Das innere Produkt im arithmetischen Vektorraum

Wir bezeichnen das innere Produkt des arithmetischen Vektorraumes  $\mathbb{R}^m$  mit einem gewöhnlichen mal-Punkt. Dann schreiben wir  $(\mathbb{R}^m; \cdot)$ .

Für zwei Vektoren  $v = (v^1, \dots, v^m)$ ,  $w = (w^1, \dots, w^m)$  definieren wir

$$v \cdot w = v^j \cdot w^k \cdot \delta_{\mathbf{jk}}.$$

Ausführlich bedeutet dies

$$v \cdot w = v^1 w^1 + v^2 w^2 + \dots + v^m w^m.$$

Man erkennt unschwer, daß hier statt  $g_{jk}$  aus 1.2.2 einfach  $\delta_{jk}$  gesetzt wurde. Die von den Skalaren  $\delta_{jk}$  gebildete Matrix ist die Einheitsmatrix. Also erfüllt auch dieses spezielle innere Produkt die Eigenschaften (1), (2) und (3) aus 1.2.1.

#### 1.2.4 Längenmessung

Sei  $v \in (V; g)$ . Wir ordnen jedem Vektor  $v \neq 0$  die positive reelle Zahl  $\|v\|$  zu, welche durch

$$\|v\| := \sqrt{g(v, v)}$$

definiert ist. Dies ist wegen  $g(v, v) > 0$  möglich. Für den Nullvektor von  $V$  erklären wir ergänzend  $\|0\| = 0$ .

Wir nennen  $\|v\|$  *Norm (Länge, Betrag)* von  $v$ .

#### 1.2.5 Winkelmessung

Es seien  $v, w \in V \setminus \{0\}$ . Wir definieren die Abbildung  $\cos$  durch:

$$\begin{aligned} \cos : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \text{ mit} \\ (v, w) &\mapsto \cos(v, w) := g(v, w) \cdot \|v\|^{-1} \cdot \|w\|^{-1} \end{aligned}$$

Wir zeigen nun:  $-1 \leq \cos(v, w) \leq 1$  (\*)

Beweis:

$$0 \leq g(\|v\| \cdot w - \|w\| \cdot v, \|v\| \cdot w - \|w\| \cdot v) = \|v\|^2 \cdot g(w, w) - 2 \cdot \|v\| \cdot \|w\| \cdot g(v, w) + \|w\|^2 \cdot g(v, v)$$

Aus  $g(v, v) = \|v\|^2$  und  $g(w, w) = \|w\|^2$  folgt bei gleichzeitigem Herausheben

$$0 \leq 2 \cdot \|v\| \cdot \|w\| \cdot [\|v\| \cdot \|w\| - g(v, w)].$$

Wegen  $\|v\| > 0$  und  $\|w\| > 0$  gilt schließlich

$$\|v\| \cdot \|w\| - g(v, w) \geq 0.$$

Unter Benützung der Definition des  $\cos$  folgt unmittelbar die Beziehung

$$\cos(v, w) \leq 1.$$

Ersetzt man zu Beweisanfang den Vektor  $\|v\| \cdot w - \|w\| \cdot v$  durch den Vektor  $\|v\| \cdot w + \|w\| \cdot v$ , so folgt analog

$$-1 \leq \cos(v, w).$$

Insgesamt folgt die Behauptung.  $\square$

Vermöge  $\cos(v,w)$  definieren wir nun einen Winkel  $\alpha$  durch

$$\cos \alpha := \cos(v,w).$$

Wegen (\*) gilt  $0 \leq \alpha \leq \pi$ .

Gilt speziell  $g(v,w)=0$ , so schreiben wir  $v \perp w$ . Wir sagen:  
 $v$  ist zu  $w$  *orthogonal*

### 1.2.6 Spezielle Basen in euklidischen Vektorräumen $(V;g)$

Wir nennen  $\underline{A}=\{a_j\}$  eine *Orthonormalbasis* (kurz: ONB), wenn gilt:

$$g(a_j, a_k) = \delta_{jk}.$$

Dies bedeutet:

- (a) Jeder Basisvektor  $a_j$  hat die Länge 1,
- (b) Je zwei verschiedene Basisvektoren  $a_j, a_k$  sind zueinander orthogonal.

### 1.2.7 Basiswechsel in euklidischen Vektorräumen $(V;g)$

Gegeben seien zwei beliebige Basen  $\underline{A}=\{a_j\}$  und  $\underline{A}'=\{a'_j\}$  von  $(V;g)$ . Nach 1.1.3 gilt

$$a'_j = t_j^i a_i \text{ mit } \det(t_j^i) \neq 0.$$

Nun besitzt das innere Produkt  $g$  bezüglich *jeder* Basis *je eine* Koordinatendarstellung, welche nach 1.2.2 durch

$$g_{jk} := g(a_j, a_k) \text{ bzw. } g_{j'k'} := g(a'_j, a'_{k'})$$

eindeutig festgelegt ist. Daraus folgt der fundamentale Zusammenhang

$$g_{j'k'} = g(t_j^i a_i, t_{k'}^k a_k) = t_j^i t_{k'}^k g(a_i, a_k) = t_j^i t_{k'}^k g_{ik}.$$

Spezialisiert man sich hier nun auf zwei ON-Basen  $\underline{A}$  und  $\underline{A}'$ , so folgt wegen  $g_{jk} = \delta_{jk}$  und  $g_{j'k'} = \delta_{j'k'}$ , sofort

$$\delta_{j'k'} = t_j^i t_{k'}^k \delta_{ik}.$$

Dies ist nach 1.2.3 das kanonische innere Produkt des  $j'$ -ten Zeilenvektors von  $(t_j^i)$  mit dem  $k'$ -ten Spaltenvektor von  $(t_j^i)$ . Damit ist die Basistransformationsmatrix  $(t_j^i)$  eine *orthogonale* Matrix. Nach einem Ergebnis der Linearen Algebra gilt dann

$$\det(t_j^i) = \pm 1.$$

### 1.2.8 Spezielle Endomorphismen eines $(V;g)$

Sei  $l: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus von  $(V;g)$ . Gilt nun für alle Vektoren  $v \in V$  die Gleichung

$$\|v\| = \|l(v)\|,$$

so nennen wir den Endomorphismus *längentreu*. Aus dieser Gleichung folgt nebenbei sofort, daß

$$\ker l = \{0\}$$

gilt. Ein längentreuer Endomorphismus ist damit bijektiv, also ein *Automorphismus*. Aus der Längentreue folgt außerdem, daß  $l$  ein *orthogonaler* Automorphismus ist. Insbesondere können wir wieder zwischen gleichsinnigen und gegensinnigen orthogonalen Automorphismen unterscheiden.

Eine wichtige Eigenschaft von  $l$ , die aus der Längentreue folgt, ist die *Verträglichkeit* von  $l$  mit dem inneren Produkt  $g$  von  $V$ . Es gilt also

$$g(v,w) = g(l(v),l(w)).$$

Beweis:  $g(v+w,v+w) = \|v+w\|^2 = g(v,v) + 2 \cdot g(v,w) + g(w,w) =$  (Längentreue)

$$= \|l(v+w)\|^2 = g(l(v+w),l(v+w)) = g(l(v)+l(w),l(v)+l(w)) =$$

$$= g(l(v),l(v)) + 2 \cdot g(l(v),l(w)) + g(l(w),l(w)).$$
 Wegen  $g(v,v) = g(l(v),l(v))$  und

$g(w,w) = g(l(w),l(w))$  ist schließlich die Behauptung gezeigt.  $\square$

Eine geometrische Interpretation dieses Sachverhaltes wäre:

"Aus der Längentreue folgt die Winkeltreue."

### 1.3 Reelle affine Räume

#### 1.3.1 Begriffsbildungen

Gegeben sei ein Vektorraum  $V$  und ein *festgewählter* Vektor  $a \in V$ . Ferner sei  $V_1$  ein Untervektorraum von  $V$ . Die Vektormenge

$$a+V_1 := \{a+v \mid v \in V_1\}$$

heißt *Nebenklasse* mit *Ursprung*  $a$  und *Richtung*  $V_1$ . Wir definieren:

$$\dim(a+V_1) := \dim V_1 =: k$$

Setzt man in der Definition der Nebenklasse  $a=0$ , so folgt: Jeder Untervektorraum ist eine spezielle Nebenklasse.

#### Diskussion:

(a)  $k=0$ :  $V_1$  und damit  $a+V_1$  ist ein einzelner Vektor. Demnach sind die Vektoren eines Vektorraumes  $V$  seine 0-dimensionalen Nebenklassen; wir werden ab nun die Vektoren als *Punkte* ansprechen.

Wir nennen  $a+V_1$  einen *affinen Unterraum*, wenn wir ihn als Menge seiner Punkte auffassen.

(b)  $k=1$ : Wir nennen den eindimensionalen affinen Unterraum  $\{a+\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  eine *affine Gerade*.

(c)  $k=2$ : Wir nennen einen zweidimensionalen affinen Unterraum eine *affine Ebene*.

Es sei  $\dim V = m$ .

(d)  $k=m-1$ : Einen affinen Unterraum der Dimension  $m-1$  nennen wir *affine Hyperebene*.

(e)  $k=m$ :  $a+V$  heißt dann *affiner Raum*. Wir schreiben  $A(V)$ . Dabei wird  $A(V)$  stets als Menge seiner Nebenklassen aufgefaßt.

Ergebnis: Sei  $p \in A(V)$ . Dies bedeutet  $p \in a+V$ . Genau dann ist  $p-a \in V$ .

Speziell können wir dem arithmetischen Vektorraum  $\mathbb{R}^m$  den affinen Raum  $A(\mathbb{R}^m)$  zuordnen. Wir schreiben aber statt  $A(\mathbb{R}^m)$  wieder einfach  $\mathbb{R}^m$ .

#### 1.3.2 Parallelität

Zwei affine Unterräume  $a+V_1$  und  $b+V_2$  heißen *parallel*, wenn  $V_1 \subset V_2$  oder  $V_2 \subset V_1$  gilt.

Bemerkung: Das Inklusionszeichen  $\subset$  schließt Gleichheit nicht aus.

### 1.3.3 Koordinatensystem

Unter einem Koordinatensystem eines affinen Raumes verstehen wir das Paar  $(a, \underline{A})$ , wobei  $\underline{A} = \{a_j\}$  eine beliebige Basis von  $V$  ist und  $a \in V$  ein fest gewählter Vektor aus  $V$  ist. Damit folgt für alle Punkte  $p \in A(V)$  wegen  $p - a \in V$  sofort

$$p - a = p^j \cdot a_j, \text{ also } p = a + p^j \cdot a_j.$$

Wir nennen das  $m$ -Tupel  $(p^1, p^2, \dots, p^m)$  die *Koordinaten von  $p$  bezüglich  $(a, \underline{A})$* . Wollen wir für  $p$  speziell den Punkt  $a$  erhalten, so müssen wir  $p^1 = \dots = p^m = 0$  setzen. Dem Punkt  $a$  entspricht also das  $m$ -Tupel  $(0, 0, \dots, 0)$ , daher die Bezeichnung "Ursprung".

Im Übrigen ist die Zuordnung Punkt - Koordinaten eine bijektive Abbildung; der Nachweis dafür bleibt dem Leser überlassen.

### 1.3.4 Affinitäten

Es sei  $\alpha: A(V) \rightarrow A(V)$  eine Selbstabbildung von  $A(V)$ . Hat  $\alpha$  die Gestalt

$$\alpha(p) = s + l(p),$$

wobei (1)  $\exists s \in V$ , fest gewählt und

(2)  $l: V \rightarrow V$  ein Automorphismus von  $V$  ist,

so nennen wir  $\alpha$  eine *Affinität*.

### 1.3.5 Koordinatenmäßige Beschreibung von Affinitäten

Wir wählen zuerst ein Koordinatensystem  $(a, \underline{A})$  mit  $a \in V$  und  $\underline{A} = \{a_j\}$ . Sei dann  $\alpha: A(V) \rightarrow A(V)$  die betrachtete Affinität  $\alpha(s, l)$ . Der Automorphismus  $l$  von  $V$  sei durch

$$l(a_j) = l_j^k \cdot a_k$$

gegeben. Nennen wir für einen beliebigen Punkt  $p \in A(V)$  mit  $p = a + p^j \cdot a_j$  dann  $\alpha(p) =: \bar{p} = a + \bar{p}^k \cdot a_k$ , so folgt

$$\bar{p} = s + l(p) = s + l(a + p^j \cdot a_j) = s + l(a) + p^j \cdot l(a_j) = \alpha(a) + p^j \cdot l_j^k \cdot a_k.$$

Damit gilt:

$$a + \bar{p}^k \cdot a_k = \alpha(a) + p^j \cdot l_j^k \cdot a_k.$$

Setzen wir wegen  $\alpha(a) - a \in V$  einfach  $\alpha(a) - a =: c^k \cdot a_k$ , so folgt wegen der Eindeutigkeit der Basisdarstellung

$$\bar{p}^k = c^k + p^j \cdot l_j^k.$$

Diese Gleichung erklärt den Zusammenhang zwischen Urspunktskoordinaten  $p^j$  und Bildpunktskoordinaten  $\bar{p}^k$ . Die  $c_k$  sind die Bildkoordinaten des Ursprungs.

## 1.4 Euklidische Räume

### 1.4.1 Definition

Es sei  $(V^m; g)$  ein euklidischer Vektorraum der Dimension  $m$  mit innerem Produkt  $g$ . Bilden wir gemäß 1.3.1 den affinen Raum  $A((V^m; g))$ , so erhalten wir einen *euklidischen Raum*. Statt  $A((V^m; g))$  schreiben wir kürzer  $E^m$ .

### 1.4.2 Abstandsmessung im $E^m$

Die Abbildung

$$d: E^m \times E^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit} \\ (p, q) \mapsto d(p, q) := \|p - q\|$$

heißt *Abstand*.

### 1.4.3 Kartesisches Koordinatensystem

Ein Koordinatensystem  $(a, \underline{A})$  heißt *kartesisch*, wenn  $\underline{A}$  eine ON-Basis ist.

### 1.4.4 Kongruenzen

Eine Affinität  $\kappa: E^m \rightarrow E^m$  mit  $d(p, q) = d(\kappa(p), \kappa(q))$ , wobei  $p, q \in E^m$  gilt, heißt eine *Kongruenz*.

Eine Kongruenz ist somit eine *abstandstreue* Affinität.

Es gilt nun der Satz:

*Eine Affinität  $\kappa$  ist genau dann eine Kongruenz, wenn der zugehörige Vektorraumautomorphismus  $l$  ein orthogonaler Automorphismus ist.*

Beweis:

Es sei  $\kappa: p \mapsto s + l(p)$  eine Kongruenz. Dann gilt:

$$\|p - q\| = d(p, q) = d(\kappa(p), \kappa(q)) = \|\kappa(p) - \kappa(q)\| = \|s + l(p) - s - l(q)\| = \|l(p) - l(q)\| = \|l(p - q)\|.$$

$l$  erfüllt demnach für beliebige Punkte  $p, q$  die Gleichung

$$\|p - q\| = \|l(p - q)\|.$$

Ein Automorphismus mit dieser Eigenschaft heißt bekanntlich orthogonal.  $\square$

Wieder können wir zwischen gleich- und gegensinnigen Kongruenzen unterscheiden. Eine gleichsinnige Kongruenz nennen wir eine *Bewegung*. Die Menge aller Bewegungen bildet eine Gruppe, die *Bewegungsgruppe*.

Hier endet die Wiederholung der für uns interessanten algebraischen Begriffe. Es folgt nun ganz kurz eine Erklärung dessen, was wir zwei Semester hindurch betreiben wollen: Elementare Differentialgeometrie.

Im Jahr 1872 präsentiert F.KLEIN sein *Erlanger Programm*:

Es sei  $M$  eine beliebige Punktmenge und  $G$  eine Gruppe, die auf  $M$  transitiv operiert, d.h. für ein beliebiges Punktepaar  $(p,q)$  gibt es stets ein Element aus  $G$ , welches  $p$  in  $q$  überführt.

Beispiel:  $M = E^m$ ,  $G =$  Bewegungsgruppe.

Ferner seien  $F_1, F_2$  zwei Figuren (= Punktmenge) des  $E^m$ . KLEIN nennt die beiden Figuren (per definitionem) genau dann *äquivalent*, wenn es eine Bewegung mit  $F_1 \rightarrow F_2$  gibt. Wir können nun die vorhandenen Figuren  $F_i$  durch ein *vollständiges Invariantensystem* im Sinne der Gruppe (= eine Menge von Aussagen und Eigenschaften, die sowohl für eine Figur als auch für deren Bildfigur gelten) in *Klassen äquivalenter Figuren* einteilen.

Speziell:  $M = E^2$ , Bewegungsgruppe.

$F =$  Dreieck.

Ein Dreieck ist eine Menge von drei nichtkollinearen Punkten  $a,b,c$ , d.h. es ist l.u.  $\{b-a, c-a\}$ . Ferner werden bei  $v := b-a$  und  $w := c-a$  benötigt:  $\|v\|$ ,  $\|w\|$ ,  $\cos(v,w)$  sowie die Orientierungsklasse der Basis  $\{v,w\}$ .

Dies ist ein vollständiges Invariantensystem eines Dreiecks des  $E^2$  im Sinne der Bewegungsgruppe.

Elementare Differentialgeometrie ist also das Studium von Kurven und Flächen im  $E^m$  im Sinne der Bewegungsgruppe des  $E^m$ . Diese Geometrie ist eine sogenannte *KLEINsche Geometrie*, d.h. eine solche, die sich dem Erlanger Programm unterordnet.



**II**

# **KURVENTHEORIE**



## 2.1 Der Kurvenbegriff

Hier ist  $M = (\mathbb{R}^n; \cdot)$ , also ein euklidischer Vektorraum. Dazu gibt es den  $A((\mathbb{R}^n; \cdot))$ , einen euklidischen Raum. Jeder Punkt  $x$  ist dann mit seinem Koordinaten- $n$ -tupel zu identifizieren, d.h. es ist

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n).$$

Wir werden nun gewisse Punktmenge als Kurven bezeichnen.

**Def. 2.1.1:** Es sei  $I$  ein *offenes* Intervall und  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung mit  $t_0 \in I \rightarrow c(t_0) := (c^1(t_0), c^2(t_0), \dots, c^n(t_0))$ . Wir nennen  $c$  einen  $C^r(I)$ -**Weg**, hingegen die Bildmenge  $c(I) \subset \mathbb{R}^n$  eine  $C^r(I)$ -**Kurve**. Wir schreiben  $c \in C^r(I)$ . Ferner heißt  $r$  die **Differentiationsklasse** der Koordinatenfunktionen  $c^\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ .  $r=0$  bedeutet:  $c$  ist stetig. Wir setzen  $c$  mindestens einmal stetig differenzierbar, also  $r \geq 1$  voraus.

### Bemerkung:

- (a) Das Intervall  $I$  wird offen vorausgesetzt, damit die Randpunkte vernachlässigt werden können.
- (b) Unterscheide: Der "Weg" ist eine Abbildung, die "Kurve" selbst ist das Ergebnis der Abbildung (vgl. Projektion und Riß).
- (c) Manchmal werden wir auch  $r$  durch  $s$  ersetzen, wobei  $0 \leq s \leq r$  gelte.
- (d) *Anordnung* der Punkte einer Kurve: da im Parameterintervall  $I$  eine Anordnung gegeben ist, d.h. etwa  $t_0 < t_1$  usw. gilt, wollen wir auch die Kurve mit einer *Orientierung* (einem *Durchlaufungssinn*) versehen: gilt z.B.  $t_0 < t_1$ , so sagen wir " $c(t_0)$  kommt vor  $c(t_1)$ ". Dabei ist aber  $c(t_0) = c(t_1)$  nicht ausgeschlossen (siehe etwa Doppelpunkte einer Kurve).
- (e) Als *Trägermenge* bezeichnen wir die Punktmenge  $c(I) \subset \mathbb{R}^n$ , wenn die Abbildungsvorschrift nicht gegeben ist. Bei Bekanntsein der Abbildungsvorschrift heißt  $c(I)$  eine *Kurve*.

**Def. 2.1.2:** (1) Falls der Weg  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv ist, so heißt die Kurve  $c(I)$  eine **einfache Kurve**.

(2) Es sei  $c \in C^r(I)$ ,  $r \geq 1$ . Falls für  $t_0 \in I$  dann  $\dot{c}(t_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$  gilt, so heißt  $c(t_0)$  ein **singulärer Punkt des Weges (der Kurve)**. Im Fall  $\dot{c}(t_0) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  heißt  $c(t_0)$  ein **regulärer Punkt des Weges (der Kurve)**.

Falls  $\dot{c} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  in ganz  $I$  gilt (d.h.  $\forall t_0 \in I$  ist  $\dot{c}(t_0) \neq 0$ ), so heißt der Weg  $c$  eine  $C^r(I)$ -**Immersion**. Die Kurve heißt dann eine **reguläre Kurve**.

### Bemerkung:

- (a) **Spitze** eines Weges: hier gilt  $\dot{c}(t_0) = 0$ ; eine Spitze ist also ein singulärer Punkt.

Es stellt sich nun die Frage, ob man eine Spitze der *Trägermenge* ansieht oder nicht. Die Antwort lautet: nur manchmal, nicht immer. Die zwei nun folgenden Beispiele sollen die Problemstellung illustrieren:

Bsp. 1:  $c: t \in \mathbb{R} \rightarrow (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$ . (NEILLsche Parabel)  
Hier ist  $\dot{c}(0) = 0 \in \mathbb{R}^2$ , was man auch an Hand der Trägermenge erkennen kann.

Bsp. 2:  $c: t \in \mathbb{R} \rightarrow (t^3, 0)$ . (x-Achse). Hier ist zwar  $\dot{c}(0) = 0 \in \mathbb{R}^2$ , aber der Trägermenge merkt man nichts an.

Ergebnis: Eine Spitze eines Weges ist nicht notwendig eine Eigenschaft der Trägermenge. (Vgl. Ü2)

(b) Analog (a) wird man erkennen, daß man die *Differentiationsklasse* eines Weges der Trägermenge allein nicht notwendig ansieht. Dazu wieder zwei Beispiele:

Gegeben seien zwei einander in einem Punkt berührende Kreise  $k_1$  und  $k_2$ . Wir wollen nun die Trägermenge *verschiedenartig* durchlaufen.

Bsp. 1: Wir "wechseln" an der Berührstelle die Kreise nicht. Der Übergang von  $k_1$  nach  $k_2$  soll an einer anderen Stelle vermöge eines (sicher existierenden)  $C^\infty$ -Weges vollzogen werden. Da nun eine kreisförmige Kurve ihr eigener Krümmungskreis ist, folgt: der vorliegende Weg ist mindestens  $C^2$ .

Bsp. 2: Der Übergang von  $k_1$  nach  $k_2$  soll nun an der Berührstelle passieren. An einer anderen Stelle von  $k_2$  wechseln wir dann (vermöge eines  $C^\infty$ -Weges) nach  $k_1$ , laufen zurück zur Berührstelle und wechseln an der Berührstelle wieder nach  $k_2$ . Hier gilt: der vorliegende Weg ist höchstens  $C^1$ .

(c) Insgesamt können wir die Frage nach den *geometrischen* Eigenschaften einer Kurve stellen.

Nun die wichtige

#### **ZWISCHENBEMERKUNG 1:**

Gegeben seien zwei offene Intervalle  $I, I' \subset \mathbb{R}$  sowie eine Abbildung  $\gamma: I' \rightarrow I$ . Erfüllt  $\gamma$  die Eigenschaften

(1)  $\gamma$  ist *Bijektion*, d.h.  $\gamma$  ist global, injektiv und surjektiv,

(2)  $\gamma \in C^r(I')$  mit  $r \geq 1$  und

(3)  $\gamma^{-1} \in C^r(I)$  mit  $r \geq 1$ ,

so heißt  $\gamma$  ein  $C^r(I')$ -*Diffeomorphismus*, kurz:  $C^r(I')$ -DM.

Will man eine Abbildung  $\gamma$  als Diffeomorphismus identifizieren, so müssen (1) bis (3) für  $\gamma$  überprüft werden. Besonders schwierig erweist sich der Nachweis der Injektivität aus (1) sowie der Nachweis von (3).

Nach einem Satz der Analysis ist  $\gamma$  genau dann ein  $C^r(I')$ -DM, wenn  $\gamma$  die Eigenschaften

(1')  $\gamma$  ist global und surjektiv,

(2')  $\gamma \in C^r(I')$  mit  $r \geq 1$  und

(3')  $\gamma'(t_0') \neq 0 \quad \forall t_0' \in I'$

erfüllt.

(Beweisidee: aus (3') folgt:  $\gamma$  ist streng monoton, daher injektiv; nach dem Hauptsatz über Inverse Funktionen ist dann  $\gamma^{-1}$  aus derselben Differentiationsklasse wie  $\gamma$ .)

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

**Def. 2.1.3:** Es sei  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^r(I)$ -Weg,  $c': I' \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^r(I')$ -Weg und  $\gamma: I' \rightarrow I$  ein  $C^r(I')$ -Diffeomorphismus derart, daß  $c' = c \circ \gamma$  gilt. Dann heißen  $c$  und  $c'$  **äquivalente Wege**.  $\gamma$  heißt dann ein **Parameterwechsel**.

**Bemerkungen:**

(a) "Äquivalent sein" ist eine Äquivalenzrelation in der Menge von äquivalent heißen Wegen, da:

--reflexiv: setze  $\gamma := \text{id}_I$ .

--symmetrisch: nach Def. von  $\gamma$  ist auch  $\gamma^{-1}$  ein Diffeomorphismus, woraus mit  $c = c' \circ \gamma^{-1}$  die Behauptung folgt.

--transitiv: erfüllt, da die Zusammensetzung zweier Diffeomorphismen wieder ein Diffeomorphismus ist.

(b) In der Literatur ist es auch üblich, eine Kurve als *Klasse äquivalenter Wege* zu bezeichnen. Hier wird dann die Kurve *nicht* mehr als Punktmenge aufgefaßt. Wir wollen eine Kurve stets als Punktmenge auffassen.

(c) Es sei  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^r(I)$ -Weg und  $\beta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine *Bewegung*. Ferner sei  $\bar{c} := \beta \circ c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben. Dann heißen  $c(I)$  und  $\bar{c}(I)$  **bewegungsgleiche Kurven**,  $c$  und  $\bar{c}$  **bewegungsgleiche Wege**.

(d) Konvention: Das Hinzufügen von "Längsstrichen" (z.B.  $I'$ ) kennzeichnet stets einen *Parameterwechsel*, während das Verwenden von "Querstrichen" (z.B.  $\bar{c}$ ) stets eine *Bewegung* als Ursache hat.

**Def. 2.1.4:** (1) Eine Eigenschaft eines Weges heißt **parameterinvariant**, wenn sie auch jedem äquivalenten Weg zukommt.

(2) Eine Eigenschaft eines Weges heißt **bewegungsinvariant**, wenn sie auch jedem bewegungsgleichen Weg zukommt.

(3) Eine Eigenschaft einer Kurve heißt **geometrisch**, wenn sie parameterinvariant und bewegungsinvariant für einen die Kurve beschreibenden Weg ist (nach (1) und (2) folgt dann "für jeden die Kurve beschreibenden Weg").

### Beispiele:

(1) "Regularität" ist geometrisch, da:

Es sei  $\dot{c}(t_0) \neq 0$ . Dann ergibt die Zusammensetzung mit einem DM (=Immersion nach obiger Zwischenbemerkung)  $\neq 0$ .

(2) "Spitze" ist ein geometrischer Begriff, da bei  $\dot{c}(t_0) = 0$  auch die Zusammensetzung mit einem DM wieder  $= 0$  ergibt.

(3) "Injektivität" ist geometrisch, da ein DM bijektiv ist.

(4) "Differentiationsklasse" ist geometrisch, da nach Definition eines DM (Punkt (2) der Def.) bei Verkettung zweier Abbildungen der Differentiationsklasse  $C^r$  das Ergebnis wieder eine Abbildung aus  $C^r$  ist.

**Def. 2.1.5:** Es sei  $\gamma: I' \rightarrow I$  als  $C^r(I')$ -DM ein Parameterwechsel. Da  $\gamma$  nach ZB1 eine Immersion ist, gilt entweder  $\dot{\gamma}(t') > 0$  oder  $\dot{\gamma}(t') < 0$ , jeweils in ganz  $I'$ . Im ersten Fall heißt  $\gamma$  ein *gleichsinniger*, im zweiten Fall ein *gegensinniger Parameterwechsel*.

**Def. 2.1.6:** Eine Eigenschaft einer Kurve, die parameterinvariant bezüglich gleichsinniger Parameterwechsel und bewegungsinvariant ist, heißt eine geometrische Eigenschaft der *orientierten* Kurve.

### Satz 2.1.1: Hauptsatz der lokalen Kurventheorie

Sei  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c \in C^r(I)$ ,  $r \geq 1$ . Ferner sei  $t_0 \in I$  mit  $\dot{c}(t_0) \neq 0$  ( $\in \mathbb{R}^n$ ). Dann gibt es ein Intervall  $I_0 \subset I$  mit  $t_0 \in I_0$ , wobei gilt:  $c|I_0: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine injektive Immersion.

**Beweis:** Es sei für ein  $t_0 \in I$  nach Voraussetzung  $\dot{c}(t_0) = (\dot{c}^1(t_0), \dots, \dot{c}^n(t_0)) \neq 0$ . Dann ist also mindestens eine Koordinate von  $\dot{c}(t_0)$  von 0 verschieden. Es sei daher oBdA.  $\dot{c}^1(t_0) \neq 0$  ( $\in \mathbb{R}$ ). Nach einem Ergebnis der Analysis gibt es dann für die Koordinatenfunktion  $c^1: I \rightarrow \mathbb{R}$  ein Teilintervall  $I_0 \subset I$ , sodaß in ganz  $I_0$  gilt:  $\dot{c}^1 \neq 0$  (\*). Dann folgt aber  $\forall t_0 \in I_0: \dot{c}(t_0) \neq 0$  ( $\in \mathbb{R}^n$ ). Damit ist  $c|I_0$  eine Immersion.

Aus (\*) folgt außerdem:  $c^1|I_0: I_0 \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton, daher injektiv. Dann ist aber trivialerweise  $c|I_0: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  auch injektiv.  $\square$

### Bemerkung:

Dieser Satz gestattet es, *lokal im Parameterintervall* eine injektive Immersion zu erzeugen. Dadurch können z.B. Doppelpunkte eliminiert werden:

Arbeitet man hingegen *lokal im  $\mathbb{R}^2$*  (gegeben sei eine ebene Kurve), so wird dies nie gelingen:



**Def. 2.2.2:** Es sei  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^r(I)$  mit  $r \geq 1$ . Ferner sei  $t_0 \in I$  fest gewählt. Wir nennen

$$S^k(t_0) := H(\dot{c}(t_0), \dots, c^{(k)}(t_0)) \text{ mit } k \leq r$$

den  $k$ -Schmiegvektorraum von  $c(I)$  in  $c(t_0)$  (... in  $t_0$ ).

Wir nennen den affinen Raum

$$c(t_0) + S^k(t_0)$$

den  $k$ -Schmiegraum in  $c(t_0)$ .

Ist  $S^k(t_0)$  ein geometrischer Begriff? Dazu untersuchen wir:

(1) Parameterinvarianz:

$c$  sei wie in der Definition gegeben.  $\gamma: I' \rightarrow I$ ,  $t' \mapsto t$  sei ein  $C^r(I')$ -DM, der insbesondere  $t_0' \mapsto t_0$  leistet. Ferner sei  $c': I' \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $c' = c \circ \gamma$  ein zu  $c$  äquivalenter Weg. Es bleibt nun  $S'^k(t_0') = S^k(t_0)$  zu zeigen:

Nach (\*) ist trivialerweise  $S'^k(t_0') \subset S^k(t_0)$ .

Da aber auch  $\gamma^{-1}$  ein  $C^r$ -DM ist, können wir die Argumentation wiederholen, woraus zuerst  $S^k(t_0) \subset S'^k(t_0')$  und dann die Behauptung folgt.

(2) Bewegungsinvarianz:

Sei  $\beta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Bewegung und  $\bar{c} = \beta \circ c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein zu  $c$  bewegungsgleicher Weg. Es bleibt nun  $\bar{S}^k(t_0) = l(S^k(t_0))$  zu zeigen:

Unter Benützung von (\*\*\*) ist

$$\bar{S}^k(t_0) = H(\bar{c}'(t_0), \dots, \bar{c}^{(k)}(t_0)) = H(l(\dot{c}(t_0)), \dots, l(c^{(k)}(t_0))).$$

Da  $l$  mit der Hüllenbildung verträglich ist, ist letzterer Ausdruck gleich  $l(H(\dot{c}(t_0), \dots, c^{(k)}(t_0))) = l(S^k(t_0))$ . Damit ist der Nachweis erbracht.

Der Begriff "Schmiegvektorraum" ist also geometrisch. Dann ist aber auch der Begriff "Schmiegraum" geometrisch.

### Geometrische Interpretation der Schmiegräume für $k=1,2$ :

Vorerst die

#### **ZWISCHENBEMERKUNG 2:**

Gegeben sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(t)$ ;  $C^r(I)$  mit  $r \geq 1$ . Ferner sei  $t_0 \in I$  fest. Dann gilt für  $t_1 \in I$  nach TAYLOR die Gleichung

$$f(t_1) - f(t_0) = \dot{f}(t_0) \cdot (t_1 - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{f}(t_0) \cdot (t_1 - t_0)^2 + \dots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_0 + \delta(t_1 - t_0)) \cdot (t_1 - t_0)^k$$

mit  $0 < \delta < 1$ .

Im letzten Summanden wird also  $f^{(k)}$  an einer Zwischenstelle zwischen  $t_0$  und  $t_1$  ausgewertet.

Für  $k=1$  ergibt sich übrigens der Mittelwertsatz.

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Wir werden im folgenden diese ZB 2 für jede einzelne Koordinatenfunktion  $c^\alpha$  anwenden.

Fall 1:  $k=1$ : Sei  $\dot{c}(t_0) \neq 0$  ( $\in \mathbb{R}^n$ ). Dann ist  $\text{Dim } S^1(t_0) = 1$ . Die Punktmenge

$$c(t_0) + S^1(t_0) = c(t_0) + H(\dot{c}(t_0))$$

heißt *Tangente* von  $c(I)$  in  $c(t_0)$ .

Nach dem Hauptsatz 2.1.1 gibt es ein Intervall  $I_0$  mit  $t_0 \in I_0 \subset I$  derart, daß  $c|_{I_0}$  eine injektive Immersion ist. Wir wählen alsdann  $t_0 \neq t_1 \in I_0$ , woraus dann  $c(t_0) \neq c(t_1)$  folgt. Durch diese beiden verschiedenen Punkte ist eine *Kurvensehne* durch den regulären Kurvenpunkt  $c(t_0)$  festgelegt, deren Grenzwert für  $t_1 \rightarrow t_0$  interessiert:

Die Sehne  $s$  gestattet die Darstellung

$$s = c(t_0) + H(c(t_1) - c(t_0)).$$

Wir werden nun versuchen zu erklären, was  $\lims$  für  $t_1 \rightarrow t_0$  bedeuten soll (Grenzwert in einem Geradenbündel):

$$\lims = \lim(c(t_0) + H(c(t_1) - c(t_0))) = c(t_0) + \lim H(c(t_1) - c(t_0)).$$

Wir betrachten nun für jedes (zulässige)  $t_1$  einen geeigneten Repräsentanten aus  $H(c(t_1) - c(t_0))$ :

Nach ZB2 ist

$$c(t_1) - c(t_0) = (\dots, \dot{c}^\alpha(t_0 + \delta^\alpha \cdot (t_1 - t_0)) \cdot (t_1 - t_0), \dots) \text{ mit } 0 < \delta^\alpha < 1.$$

Dann ist in der betrachteten Hülle sicher auch der Vektor

$$c^* = (\dots, \dot{c}^\alpha(t_0 + \delta^\alpha \cdot (t_1 - t_0)), \dots)$$

enthalten. Wir definieren daher weiter:

$\lims = c(t_0) + H(\lim c^*) = c(t_0) + H(\dot{c}(t_0))$ , und damit ist die Tangente in einem regulären Punkt als Grenzwert einer Sehne aufzufassen.

Es bleibt allerdings noch eine Lücke zu schließen: War  $\lims$  von der Auswahl des Vektors  $c^*$  abhängig? Nein; wählt man nämlich einen anderen Repräsentanten  $c_1^*$  für die Hülle, so gilt jedenfalls l.a.  $\{\lim c_1^*, \lim c^*\}$ .

Fall2:  $k=2$ : Wir wollen nun den Begriff der "Schmiegeebene" einführen: Es gelte hierfür l.u.  $\{\dot{c}(t_0), \ddot{c}(t_0)\}$  (Damit ist insbesondere  $\dot{c}(t_0) \neq 0 \neq \ddot{c}(t_0)$  gewährleistet.). Wir nennen die Punktmenge

$$c(t_0) + S^2(t_0) = c(t_0) + H(\dot{c}(t_0), \ddot{c}(t_0)) = c(t_0) + \lambda \cdot \dot{c}(t_0) + \mu \cdot \ddot{c}(t_0) \text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

die *Schmiegeebene* von  $c(I)$  in  $c(t_0)$ .

Setzen wir in dieser Beziehung  $\mu = 0$ , so erkennt man, daß die Kurventangente in der Schmiegeebene enthalten ist.

Wir werden analog Fall1 zeigen, daß die Schmiegeebene als Grenzlage einer Ebene durch die Kurventangente und einen "fremden" Punkt  $c(t_1)$  anzusehen ist (solch ein "fremder" Punkt  $c(t_1)$  existiert wegen l.u.  $\{\dot{c}(t_0), \ddot{c}(t_0)\}$ .):

Jede derartige Ebene  $\varepsilon$  gestattet die Darstellung

$$\varepsilon = c(t_0) + H(\dot{c}(t_0), c(t_1) - c(t_0)).$$

Wieder interessiert  $\lim \varepsilon$  für  $t_1 \rightarrow t_0$  (Grenzwert im Ebenenbüschel); dazu erklären wir:

$\lim_{\varepsilon} = \lim(c(t_0) + H(\dot{c}(t_0), c(t_1) - c(t_0))) = c(t_0) + \lim(H(\dot{c}(t_0), c(t_1) - c(t_0)))$ .  
 Nach ZB2 ist

$$c(t_1) - c(t_0) = (\dots, \dot{c}^\alpha(t_0) \cdot (t_1 - t_0) + \ddot{c}^\alpha(t_0 + \delta^\alpha \cdot (t_1 - t_0)) \cdot (t_1 - t_0)^2 \cdot 1/2, \dots)$$

mit  $0 < \delta^\alpha < 1$ .

Als repräsentierendes Erzeugendensystem der betrachteten Hülle wählen wir die Vektoren

$$\dot{c}(t_0) \text{ und } c^{**}(t_0) := (\dots, \ddot{c}^\alpha(t_0 + \delta^\alpha \cdot (t_1 - t_0)), \dots).$$

Damit können wir weiter definieren:

$$\lim_{\varepsilon} = c(t_0) + H(\lim(\dot{c}(t_0), c^{**}(t_0))) = c(t_0) + H(\dot{c}(t_0), \lim c^{**}(t_0)) = c(t_0) + H(\dot{c}(t_0), \ddot{c}(t_0)),$$

und damit ist die Schmiegeebene tatsächlich als Grenzebene auffaßbar.

Analog Fall 1 überlegt man sich, daß  $\lim_{\varepsilon}$  unabhängig von der Wahl des Vektors  $c^{**}(t_0)$  ist.

**Bemerkung:**

Letzterer Sachverhalt könnte im Falle einer ebenen Kurve auch so aussehen:

Dies ist aber erlaubt, da nach dem Hauptsatz ein genügend kleines Intervall  $I_0$  um  $t_0$  ausgewählt werden kann.

**Neue Begriffe:**

Für den Kurvenpunkt  $c(t_0)$  gilt nach Def. 2.2.2 die Kette

$$S^1(t_0) \subset S^2(t_0) \subset \dots \subset S^k(t_0) \text{ und damit } \dim S^1(t_0) \leq \dim S^2(t_0) \leq \dots \leq \dim S^k(t_0).$$

Der Begriff "Schmiegrau" ist geometrisch; daher ist auch seine Dimension eine geometrische Aussage. Demnach ist die Aussage

$$\text{"in } c(t_0) \text{ gilt } \dim S^k(t_0) = \dim S^{k+1}(t_0)\text{"}$$

eine geometrische Aussage. Wir formulieren:

**Def. 2.2.3:** (1) Im Falle  $k=1$  erhalten wir

$$\dim S^1(t_0) = \dim S^2(t_0) = 1;$$

Wir nennen dann  $c(t_0)$  einen **Wendepunkt**.

(2) Im Falle  $k=n-1$  folgt

$$\dim S^{n-1}(t_0) = \dim S^n(t_0) = n-1;$$

Wir nennen  $c(t_0)$  dann einen **Henkelpunkt**.

(3) Die Punktmenge

$$c(t_0) + S^{n-1}(t_0)$$

heißt **Schmieghyperebene von  $c(I)$  in  $c(t_0)$** , falls  $\dim S^{n-1}(t_0) = n-1$  gilt.

Wir werden nun zeigen:

Ist der Defekt in der "Dimensionskette" lokal, **genau dann** liegt die Kurve  $c(I)$  in einem (echten) Unterraum. Genauer gilt:

**Satz 2.2.1:**  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^r(I)$  mit  $r \geq 1$ . Nun gilt:

Liegt  $c(I)$  in einem  $k$ -dimensionalen Unterraum, so ist  $\dim S^k(t_0) = \dim S^{k+1}(t_0) = k$  ( $r \geq k+1$ )  $\forall t_0 \in I$ .

**Beweis:** Sei vorerst  $t_0 \in I$  fest. Nach Voraussetzung ist  $c(I) \subset c(t_0) + V_1$  mit  $\dim V_1 = k$ .

Genau dann ist

$$c(t) - c(t_0) \in V_1 \text{ f\u00fcr alle } t \in I.$$

Wir betrachten nun den folgenden neuen Weg  $g$ :

$$g: I \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto g(t) := c(t) - c(t_0).$$

F\u00fcr den  $C^r(I)$ -Weg  $g$  gilt:  $g(I) \subset V_1$ . (\*)

Differentiation nach  $t$  ergibt:

$$g^{(l)}(t) = c^{(l)}(t), \quad l = 1, \dots, k+1.$$

$g$  und  $c$  haben also die gleichen Ableitungsvektoren. Daraus folgt:

$$S_g^{k+1}(t) = S_c^{k+1}(t). \quad (**)$$

Wegen (\*) gilt aber  $g^{(l)}(t) \in V_1$  f\u00fcr  $l = 1, \dots, k+1$ , daher ist nach (\*\*) dann

$$S^{k+1}(t) \subset V_1 \text{ f\u00fcr alle } t \in I.$$

Schlie\u00dflich ergibt sich mit  $\dim S^{k+1}(t) = \dim V_1 = k$  die Behauptung.  $\square$

Gewisserma\u00dfen als Umkehrung von Satz 2.2.1 zeigen wir

**Satz 2.2.2:**  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^{k+1}(I)$ . Nun gilt:

Wenn  $\dim S^k(t_0) = \dim S^{k+1}(t_0) = k$  f\u00fcr alle  $t_0 \in I$  gilt, dann liegt  $c(I)$  in einem  $k$ -dimensionalen Unterraum, aber in keinem kleineren.

**Beweis:** Zuerst zur zweiten Aussage: L\u00e4ge  $c(I)$  in einem  $(k-1)$ -dimensionalen Unterraum, so w\u00e4re nach Satz 2.2.1  $\dim S^{k-1}(t_0) = \dim S^k(t_0) = k-1$  und dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Nun zur ersten Aussage:

Sei vorerst  $t_0 \in I$  fest gew\u00e4hlt. Dann spannt nach Voraussetzung die linear unabh\u00e4ngige Vektormenge  $\{\dot{c}(t_0), \dots, c^{(k)}(t_0)\}$  den  $S^k(t_0)$  auf. Nach Voraussetzung ist l.a.  $\{\dot{c}(t_0), \dots, c^{(k)}(t_0), c^{(k+1)}(t_0)\}$ , genauer gilt

$$c^{(k+1)}(t_0) = a_1 \cdot \dot{c}(t_0) + \dots + a_k \cdot c^{(k)}(t_0).$$

Dann gilt aber f\u00fcr alle  $t_0 \in I$  die Gleichung

$$c^{(k+1)} = a_1 \cdot \dot{c} + \dots + a_k \cdot c^{(k)}.$$

Hierin sind die  $a_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a_i \in C^0(I)$ ,  $i = 1, \dots, k$  von  $t_0$  abh\u00e4ngige Funktionen.

Im Detail gilt daher f\u00fcr die Koordinatenfunktionen  $c^\alpha$ :

$$(c^\alpha)^{(k+1)} = a_1 \cdot \dot{c}^\alpha + \dots + a_k \cdot (c^\alpha)^{(k)}.$$

Setzen wir zur Abk\u00fcrzung  $y := \dot{c}^\alpha$ , so k\u00f6nnen wir schreiben:

$$y^{(k)} = a_1 \cdot y + \dots + a_k \cdot y^{(k-1)}.$$

Die L\u00f6sungsmenge dieser Differentialgleichung ist ein Vektorraum. Genaueres erkl\u00e4rt uns die

### ZWISCHENBEMERKUNG 3:

Gegeben seien Funktionen  $a_1, \dots, a_k, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ , jeweils  $\in C^0(I)$  und die Differentialgleichung

$$y^{(k)} = a_1 \cdot y + \dots + a_k \cdot y^{(k-1)} + b.$$

Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz gibt es zu den Anfangsbedingungen

$$\{0 \in I, y(0), \dots, y^{(k-1)}(0)\}$$

eine eindeutige Lösung (Vektorraum)

$$y: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } y \in C^{k+1}(I).$$

**Bemerkungen:** (a)  $y$  ist global über  $I$ .

(b) für  $a, b$  genügt es,  $C^0(I)$ , also Stetigkeit vorauszusetzen.

(c) Ist  $b=0$  in ganz  $I$ , so sprechen wir von einer *homogenen* Differentialgleichung.

(d) In obiger Anfangsbedingung ist ein gewählter Wert  $t_0 \in I$  oBdA mit  $0$  bezeichnet.

Wie erhält man nun diese (nach Wahl der Anfangsbedingungen eindeutige) Lösung  $y$ :

Wir wählen als *Basis* des Lösungsvektorraumes  $k$  spezielle Lösungen  ${}_{(1)}y, \dots, {}_{(k)}y$  zu folgenden Nebenbedingungen (in Form einer Einheitsmatrix):

$$\begin{array}{ccccccc} {}_{(1)}\dot{y}(0)=1, & {}_{(2)}\dot{y}(0)=0, & \dots, & {}_{(k)}\dot{y}(0)=0 \\ {}_{(1)}\dot{y}(0)=0, & {}_{(2)}\dot{y}(0)=1, & \dots, & {}_{(k)}\dot{y}(0)=0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}_{(1)}y^{(k-1)}(0)=0, & {}_{(2)}y^{(k-1)}(0)=0, & \dots, & {}_{(k)}y^{(k-1)}(0)=1 \end{array}$$

Dann gilt: Die Lösung  $y$  zur obigen Anfangsbedingung  $\{0 \in I, y(0), \dots, y^{(k-1)}(0)\}$  schreibt sich dann

$$y = y(0) \cdot {}_{(1)}y + \dot{y}(0) \cdot {}_{(2)}y + \dots + y^{(k-1)}(0) \cdot {}_{(k)}y.$$

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Aus der Gleichung

$$y^{(k)} = a_1 y + \dots + a_k y^{(k-1)}$$

folgt dann bei festem  $\alpha$  für die Lösung  $y = \dot{c}^\alpha$ :

$$\dot{c}^\alpha = \dot{c}^\alpha(0) \cdot {}_{(1)}y + \dots + (c^\alpha)^{(k)}(0) \cdot {}_{(k)}y;$$

dabei sind die  $k$  speziellen Lösungen  ${}_{(1)}y, \dots, {}_{(k)}y$  von  $\alpha$  unabhängig:

wir können nämlich in jedem Lösungsvektorraum (einer jeden Koordinatenfunktionsdifferentialgleichung) auf Grund der Nebenbedingungen dieselbe Basis  $\{{}_{(1)}y, \dots, {}_{(k)}y\}$  wählen - dies ist ein *Trick!*

Interpretiert man diese Gleichung für  $\alpha=1, \dots, n$ , so erhält man insgesamt

$$\dot{c} = \dot{c}(0) \cdot {}_{(1)}y + \dots + c^{(k)}(0) \cdot {}_{(k)}y.$$

Integration dieser Gleichung ergibt

$$c(t) - c(0) = \dot{c}(0) \cdot \int_0^t {}_{(1)}y(s) ds + \dots + c^{(k)}(0) \cdot \int_0^t {}_{(k)}y(s) ds \quad \forall t \in I,$$

und das ist eine Funktion der oberen Grenze  $t$ .

Der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen ist nach Definition in  $S^k(0)$  enthalten; es gilt also

$$c(t) \in c(0) + S^k(0) \quad \forall t \in I,$$

also

$$c(I) \subset c(0) + S^k(0) = k\text{-dimensionaler UR.}$$

Nun  $t_0 \in I$  variieren.  $\square$

### 2.3 Normierte Wege

**Def. 2.3.1:** Ein Weg  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c \in C^r(I)$  mit  $r \geq 1$  heißt *normiert*, wenn in ganz  $I$  gilt:  $\| \dot{c} \| = 1$ .

**Bemerkung:** Interpretiert man den Parameter  $t \in I$  als *Zeitparameter*, so kann man sagen, daß die Kurve mit *konstanter Geschwindigkeit* durchlaufen wird.

**Satz 2.3.1:**  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^r(I)$  mit  $r \geq 1$ ;  $c$  sei *Immersion* (d.h. in  $I$  gilt  $\dot{c} \neq 0$ ). Dann existiert ein zu  $c$  äquivalenter normierter Weg  $c'$ .

**Beweis:**  $c'$  sei äquivalent zu  $c$ ; genau dann existiert ein  $C^r(I')$ -DM  $\gamma: I' \rightarrow I$  mit  $c' = c \circ \gamma$  (Es gelte wieder  $t_0' \mapsto t_0$ ). Es folgt notwendig für  $c'$ :

$$\dot{c}'(t_0') = \dot{c}(\gamma(t_0')) \cdot \dot{\gamma}(t_0').$$

Dann folgt für die Normen

$$\| \dot{c}'(t_0') \| = \| \dot{c}(\gamma(t_0')) \| \cdot | \dot{\gamma}(t_0') |$$

Aus der Bedingung " $c'$  ist normiert" folgt notwendig

$$1 = \| \dot{c}(\gamma(t_0')) \| \cdot | \dot{\gamma}(t_0') | \quad (*).$$

Es gilt nun zu überprüfen, ob  $\gamma$  tatsächlich ein  $C^r(I')$ -DM ist (erst dann können wir  $c'$  äquivalent zu  $c$  nennen.); Zu diesem Zweck betrachten wir die Umkehrabbildung  $\psi$  von  $\gamma$ :

$$\psi: I \rightarrow I' \text{ mit } t \mapsto \int_0^t \| \dot{c}(s) \| ds;$$

$\psi$  ist ein  $C^r(I)$ -DM, da:

(1) global; surjektiv, da wir definieren:  $\psi(I) = I'$ .

(2)  $\psi \in C^r(I)$  trivial.

(3) Nach Voraussetzung ("Immersion") ist  $\dot{\psi} = \| \dot{c} \| \neq 0 \quad \forall t_0 \in I$ .

Damit ist auch  $\gamma$  ein  $C^r(I')$ -DM und es gilt:

$$\dot{\gamma}(t_0') = 1 / \dot{\psi}(t_0) \text{ mit } \gamma(t_0') = t_0.$$

Also ist  $c' = c \circ \gamma$  zu  $c$  äquivalent.  $\square$

**Bemerkungen:** (a)  $\gamma$  ist hier wegen  $\dot{\gamma}(t) = \| \dot{c} \|^{-1} > 0$  gleichsinnig.

(b) Es seien  $c, c'$  zwei äquivalente Wege und beide *normiert*. Dann folgt für  $\gamma$  notwendig

$$t' \mapsto t' + a \text{ oder } t' \mapsto -t' + a, \quad a \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Beweis: Nach (\*) in obigem Beweis ist dann  $\dot{\gamma}(t') = \pm 1$ .

**Def. 2.3.2:** Es sei  $c \in C^1(I)$ ; ferner sei  $I_1 \subset I$  das *abgeschlossene* Intervall  $I_1 = [a, b]$ . Wir schreiben

$$\int_a^b \| \dot{c} \| dt =: \int_{I_1} \| \dot{c} \| dt =: L_a^b(c)$$

und nennen diesen Ausdruck die *Bogenlänge des Weges  $c$  von  $a$  nach  $b$* ; wir sagen auch *Bogenlänge der Kurve  $c(I)$  von  $c(a)$  bis  $c(b)$* .

Ist der Begriff "Bogenlänge" ein geometrischer Begriff?

(1) *Bewegungsinvarianz:*

Es sei  $\beta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $p \mapsto \beta(p) = s + l(p)$  mit  $l$  als orthogonalem Vektorraumauto-

morphismus eine Bewegung und  $\bar{c} = \beta \circ c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein zu  $c$  bewegungsgleicher Weg. Es bleibt zu zeigen:

$$L_a^b(\bar{c}) = L_a^b(c) \text{ bei festem } a, b \in I.$$

Nach 2.2 ist  $\bar{c}'(t_0) = l(\dot{c}(t_0)) \quad \forall t_0 \in I$ , daher wegen der Orthogonalität von  $l$  sogar  $\|\bar{c}'(t)\| = \|\dot{c}(t)\|$ . Mit Def. 2.3.2 folgt schließlich vermöge

$$L_a^b(\bar{c}) = \int_a^b \|\bar{c}'\| dt = \int_a^b \|\dot{c}\| dt = L_a^b(c)$$

die Bewegungsinvarianz.

**(2) Parameterinvarianz:**

Dazu benötigen wir Information über die Auswirkungen eines Parameterwechsels in einem Integral. Deshalb vorerst die

**ZWISCHENBEMERKUNG 4:**

Seien  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^0(I)$ -Weg und  $\gamma: I' \rightarrow I$  ein  $C^1(I')$ -DM.

Ferner sei  $I_1 \subset I$  ein abgeschlossenes Intervall  $I_1 = [a, b]$  und  $I_1' := \gamma^{-1}(I_1)$ .

Dann gilt:

$$\int_{I_1} f \cdot dt = \int_a^b f \cdot dt = \int_{\gamma^{-1}(a)}^{\gamma^{-1}(b)} (f \circ \gamma) \cdot \dot{\gamma} \cdot dt',$$

wobei  $a < b$  gilt.

Bei gegensinnigem  $\gamma$  gilt  $\gamma^{-1}(a) > \gamma^{-1}(b)$ . Da dann aber auch  $\dot{\gamma} < 0$  ist, folgt

$$\int_{I_1} f \cdot dt = \int_{\gamma^{-1}(b)}^{\gamma^{-1}(a)} (f \circ \gamma) \cdot \dot{\gamma} \cdot dt' = - \int_{\gamma^{-1}(a)}^{\gamma^{-1}(b)} (f \circ \gamma) \cdot \dot{\gamma} \cdot dt' = \int_{I_1'} (f \circ \gamma) \cdot |\dot{\gamma}| \cdot dt'.$$

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Es seien  $c$  und  $c' := c \circ \gamma$  mit  $\gamma: I' \rightarrow I$  als  $C^1(I')$ -DM äquivalente Wege, beide  $\in C^1$ . Dabei gelte  $I' := \gamma^{-1}(I)$ .

Weiters sei  $I_1 := [a, b] \subset I$  ein abgeschlossenes Intervall.

Nach Def. 2.3.2 ist die Bogenlänge definiert durch

$$L_a^b(c) = \int_a^b \|\dot{c}\| dt = \int_{I_1} \|\dot{c}\| dt.$$

Außerdem gilt nach der Kettenregel

$$\dot{c}'(t') = \dot{c}(\gamma(t')) \cdot \dot{\gamma}(t'),$$

sodaß wir auch schreiben können

$$\dot{c}'(t') = (\dot{c} \circ \gamma)(t') \cdot \dot{\gamma}(t'),$$

also, bei Weglassen von  $t'$  dann

$$\dot{c}' = (\dot{c} \circ \gamma) \cdot \dot{\gamma}.$$

Daraus folgt

$$\|\dot{c}'\| = \|\dot{c} \circ \gamma\| \cdot |\dot{\gamma}|. \quad (*)$$

Nun folgt mit Hilfe von ZB 4

$$L_a^b(c) = \int_a^b \|\dot{c}\| dt = \int_{I_1'} (\|\dot{c}\| \circ \gamma) \cdot |\dot{\gamma}| dt'$$

und wegen  $\|\dot{c}\| \circ \gamma = \|\dot{c} \circ \gamma\|$ , was man leicht nachprüft, zusammen mit (\*)

$$L_a^b(c) = \int_{I_1'} \|\dot{c}'\| dt' = L_{a'}^{b'}(c')$$

Dabei ist  $I_1' := [a', b']$ . Ist  $\gamma$  *gleichsinnig*, so ist  $I_1' = [\gamma^{-1}(a), \gamma^{-1}(b)]$ , ist  $\gamma$  *gegensinnig*, so ist  $I_1' = [\gamma^{-1}(b), \gamma^{-1}(a)]$ .

Damit ist auch die Parameterinvarianz gezeigt.

**Bemerkungen:**

(a) Gilt speziell  $\|c\| = 1$  in ganz  $I$  und ist  $I_1 = [a, b]$ , so folgt

$$L_a^b(c) = \int_a^b 1 \cdot dt = b - a.$$

(b) Der Begriff "Bogenlänge" ist vom Durchlaufungssinn des Intervalls  $I_1 \subset I$  unabhängig:

Zum Nachweis betrachten wir den Parameterwechsel

$$\gamma: I \rightarrow I \text{ mit } t \mapsto -t + (a+b),$$

der wegen  $\dot{\gamma} = -1 < 0$  gegensinnig ist. Daher ist  $I_1' = [a, b]$ . Daraus folgt nach Vorherigem sofort

$$L_a^b(c) = L_a^b(c').$$

(c) Differenzengeometrische Interpretation des Begriffs "Bogenlänge":

Sei  $Z$  eine Zerlegung des Intervalls  $I_1 = [a, b]$  mit endlich vielen Teilungspunkten, für die  $a = a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$  gelten solle.

Wir definieren die "Sehnenlänge" von  $c(a)$  nach  $c(b)$  durch

$$L_Z := \sum_{j=2}^n \|c(a_j) - c(a_{j-1})\|.$$

Sei  $\{Z\}$  die Menge aller Zerlegungen dieser Bauart und  $\{L_Z\}$  die Menge aller möglichen Sehnenlängen. Bei  $\sup\{L_Z\} < \infty$  heißt  $c$  **rektifizierbar**.

Nach einem Ergebnis der Analysis gilt dann

$$\sup\{L_Z\} = L_a^b(c).$$

Beachte: Für die Rektifizierbarkeit von  $c$  ist  $c \in C^1(I)$  hinreichend, aber nicht notwendig. Genauer gilt: bei  $c \in C^0(I)$  genügt, daß die Koordinatenfunktionen beschränkte *Schwankung* besitzen.

## 2.4 Begleitbasis

Wir beginnen mit vier Zwischenbemerkungen:

### ZWISCHENBEMERKUNG 5:

Sei  $(V;g)$  ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit  $g$  als innerem Produkt.

Bei gegebenen  $k$  Vektoren  $\{a_1, \dots, a_k\}$  definieren wir

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) := \begin{vmatrix} g(a_1, a_1) & \dots & g(a_1, a_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ g(a_k, a_1) & \dots & g(a_k, a_k) \end{vmatrix}$$

$\Gamma(a_1, \dots, a_k)$  heißt *GRAMSche Determinante der Vektoren  $\{a_1, \dots, a_k\}$* .

Nach Ergebnissen der Linearen Algebra gelten folgende Eigenschaften:

- (a)  $\{a_1, \dots, a_k\}$  ist linear abhängig  $\Leftrightarrow \Gamma(a_1, \dots, a_k) = 0$ .
- (b)  $\{a_1, \dots, a_k\}$  ist linear unabhängig  $\Leftrightarrow \Gamma(a_1, \dots, a_k) > 0$ .
- (c)  $\{a_1, \dots, a_k\}$  ist orthonormiert  $\Leftrightarrow \Gamma(a_1, \dots, a_k) = 1$ .

### ZWISCHENBEMERKUNG 6:

Sei  $(V;g)$  ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum der Dimension  $m$  und  $\{v_1, \dots, v_m\}$  eine geordnete Basis von  $V$ .

Es folgen nun Vorschriften zur Konstruktion einer Orthonormalbasis  $\{c_1, \dots, c_m\}$  nach dem *Orthonormierungsverfahren von E.SCHMIDT*:

Wir fordern

- (1)  $c_k \in H(v_1, \dots, v_k)$  für  $1 \leq k \leq m$ , d.h. es ist  $H(c_1, \dots, c_k) = H(v_1, \dots, v_k)$  und
- (2) in  $H(v_1, \dots, v_k)$  gilt:

$$(v_1, \dots, v_k) \mapsto (c_1, \dots, c_k)$$

ist für jedes  $k$  ein *gleichsinniger* Basiswechsel.

Mit (1) und (2) existiert  $\{c_1, \dots, c_m\}$  eindeutig.

Für die explizite Bauart der  $c_i$  gilt dann

$$c_i = (\Gamma_{i-1}, \Gamma_i)^{-1/2} \cdot \begin{vmatrix} g(v_1, v_1) & \dots & g(v_1, v_i) \\ \dots & \dots & \dots \\ g(v_{i-1}, v_1) & \dots & g(v_{i-1}, v_i) \\ v_1 & \dots & v_i \end{vmatrix},$$

wobei  $\Gamma_i := \Gamma(v_1, \dots, v_i)$  für  $i=1, \dots, m$  und  $\Gamma_0 := 1$  definiert ist.

Obige Determinante ist eine sogenannte "formale Determinante", da in ihrer letzten Zeile keine Skalare, sondern Vektoren stehen. Erst die "formale Entwicklung" nach der letzten Zeile führt zu "echten" Determinanten.

### ZWISCHENBEMERKUNG 7:

Wir erklären hier das Vektorprodukt:

Gegeben seien der euklidische Vektorraum  $(\mathbb{R}^n; \cdot)$  und die  $n-1$  linear unabhängigen Vektoren  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ . Wir definieren das *Kreuz- oder Vektorprodukt* dieser Vektoren, im Zeichen

$$w := v_1 \times v_2 \times \dots \times v_{n-1}$$

durch die folgenden drei Vorschriften:

(1)  $w \cdot v_i = 0$  für  $i=1, \dots, n-1$

(2)  $\|w\|^2 = \Gamma(v_1, \dots, v_{n-1})$

(3)  $(v_1, \dots, v_{n-1}; w)$  ist (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem.

Wir wählen nun speziell die kanonische Basis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  von  $(\mathbb{R}^n; \cdot)$ . Jeder Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  besitzt dann die eindeutige Darstellung  $v = v^\alpha e_\alpha$ ,  $\alpha=1, \dots, n$ . Für das Kreuzprodukt der Vektoren  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  gilt dann unter Benützung von  $v_i = v_i^\alpha e_\alpha$  genauer (bei Verwendung einer formalen Determinante):

$$w = \begin{vmatrix} v_1^1 & \dots & \dots & \dots & v_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1}^1 & \dots & \dots & \dots & v_{n-1}^n \\ e_1 & \dots & \dots & \dots & e_n \end{vmatrix}$$

Spezialfälle:

n=3: Hier gilt für das Kreuzprodukt von  $v_1$  und  $v_2$ :

$$w = \begin{vmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

Nach formaler Entwicklung dieser Determinante nach der letzten Zeile erhält man die Koordinaten des Vektors  $w$ .

Nebenbei gilt die *Identität von LAGRANGE*:

$$\|v_1 \times v_2\|^2 = \Gamma(v_1, v_2) = \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 - (v_1 \cdot v_2)^2.$$

Unter Benützung der bekannten Formel

$$v_1 \cdot v_2 = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \cos(\angle v_1, v_2)$$

folgert man sofort

$$\|v_1 \times v_2\|^2 = \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 \cdot \sin^2(\angle v_1, v_2).$$

Also ist die Norm des Kreuzproduktes von  $v_1$  und  $v_2$  eine Maßzahl der Fläche jenes Parallelogrammes, welches von  $v_1$  und  $v_2$  aufgespannt wird.

n=2: Für den Vektor  $v_1 = (v_1^1, v_1^2) \neq 0$  gilt

$$w = (-v_1^2, v_1^1) =: v_1^\times.$$

**ZWISCHENBEMERKUNG 8:**

Im  $n$ -dimensionalen euklidischen Vektorraum  $(\mathbb{R}^n; \cdot)$  betrachten wir die  $n-1$  linear unabhängigen Vektoren  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  mit  $v_i = v_i^\alpha e_\alpha$  sowie den Vektor  $v = v^\alpha e_\alpha$ . Dann gilt unter Benützung von ZB 7:

$$(v_1 \times \dots \times v_{n-1}) \cdot v = \det(v_1, \dots, v_{n-1}, v).$$

Diese Gleichung beschreibt die Kopplung von Skalar- und Kreuzprodukt.

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNGEN.**

**Def. 2.4.1:** Ein Weg  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt ein *Haupttypweg*, kurz: *HTW*, wenn die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt sind:

(1)  $c \in C^n(I)$ ,

(2) Die Vektoren  $\{\dot{c}(t_0), \dots, c^{(n-1)}(t_0)\}$  sind l.u.  $\forall t_0 \in I$ .

$c(I)$  heißt dann *Haupttypkurve*, kurz: *HTK*.

**Bemerkungen:**

(a) Aus (2) folgt insbesondere  $\dot{c}(t_0) \neq 0$ ;  $c$  ist daher Immersion und  $c(I)$  eine reguläre Kurve.

(b) Aus (2) folgt nach Def.2.2.2:  $\dim S^{n-1}(t_0) = n-1$ . Es existiert also in jedem Punkt einer Haupttypkurve eine Schmieghyperebene.

(c) Def.2.4.1 ist geometrisch; daher ist es sinnvoll, von einer Haupttypkurve zu sprechen.

**Def. 2.4.2:** Sei  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Haupttypweg. Wir definieren an jeder Stelle  $t_0$  eine **Begleitbasis**  $c_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha=1, \dots, n$ , d.h. es gilt

$$t_0 \in I \mapsto \{c_1(t_0), \dots, c_n(t_0)\}$$

mit den Eigenschaften:

(1) die Vektoren  $c_1, \dots, c_{n-1}$  entstehen aus den Vektoren  $\dot{c}, \dots, c^{(n-1)}$  durch Orthonormieren nach SCHMIDT (siehe ZB 6).

(2)  $c_n := c_1 \times \dots \times c_{n-1}$  (siehe ZB 7).

**Bemerkungen:**

(a) Nach ZB 7 ist  $\|c_n\|^2 = \Gamma(c_1, \dots, c_{n-1}) = \det(\text{diag}(1, \dots, 1)) = \det(E_n) = 1$ . Also ist  $\|c_n\| = 1$ .

(b) Zur Differentiationsklasse der Begleitbasis  $c_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ :  
--für  $1 \leq j \leq n-1$  gilt nach ZB 6:  $c_j \in H(\dot{c}, \dots, c^{(j)})$ . Dann ist wegen  $c \in C^n(I)$   
 $c_j \in C^{n-j}(I)$ .

Speziell ist daher  $c_{n-1} \in C^1(I)$ .

--für  $c_n$  gilt:  $c_n \in C^1(I)$ , da beim Bilden eines Kreuzproduktes keine Differentiationsklasse verloren geht.

Insgesamt gilt also:  $c_\alpha \in C^1(I)$ .

**Satz 2.4.1:** Ist  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein HTW, so ist der Begriff "Begleitbasis" ein geometrischer Begriff der orientierten Kurve.

**Beweis:** (a) Nachweis der Bewegungsinvarianz:

Sei  $\bar{c} = \beta \circ c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein zu  $c$  bewegungsgleicher Weg, wobei die Bewegung  $\beta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $p \mapsto \beta(p) = s + l(p)$  mit  $l$  als gleichsinnigem orthogonalen Vektorraumautomorphismus erfaßt werde. Es gilt nach 2.2:

$$\bar{c}^{(k)}(t_0) = l(c^{(k)}(t_0)).$$

Nun sind die  $c_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha=1, \dots, n-1$ , geometrisch erklärt; sie entstehen nämlich durch Orthonormieren nach SCHMIDT wie folgt:

(1)  $c_k \in H(\dot{c}, \dots, c^{(k)}) = S^k(t_0) = \bar{S}^k(t_0)$ .

(2) Der Übergang  $\{\dot{c}(t_0), \dots, c^{(k)}(t_0)\} \rightarrow \{c_1(t_0), \dots, c_k(t_0)\}$  ist ein *gleichsinniger* Basiswechsel in  $H(\dot{c}(t_0), \dots, c^{(k)}(t_0)) = S^k(t_0)$ .

Da  $l$  aber gleichsinnig ist, folgt die Bewegungsinvarianz für  $\alpha=1, \dots, n-1$ .

Nun ist  $c_n: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch das Kreuzprodukt der bewegungsinvarianten Vorgänger definiert. Wegen der Verträglichkeit des Kreuzproduktes mit dem orthogonalen Automorphismus  $l$  folgt die Bewegungsinvarianz von  $c_n$ .  
Damit sind die  $c_\alpha$  bewegungsinvariant.

(b) Nachweis der Parameterinvarianz:

Sei  $c' = \gamma \circ c: I' \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein zu  $c$  äquivalenter Weg, wobei der Parameterwechsel  $\gamma: I' \rightarrow I$  ein  $C^n(I')$ -DM ist.

Nun sind die  $c_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha=1, \dots, n-1$ , bestimmt durch (SCHMIDT)

(1)  $c_k(t_0) \in S^k(t_0) = S^k(t_0')$  nach 2.2 bei  $\gamma(t_0') = t_0$ ;

(2) Der Übergang  $\{\dot{c}, \dots, c^{(k)}\} \rightarrow \{c_1, \dots, c_k\}$  ist ein *gleichsinniger* Basiswechsel.

Jetzt wird aber der Übergang

$$\{\dot{c}, \dots, c^{(k)}\} \rightarrow \{\dot{c}', \dots, c'^{(k)}\},$$

wie wir in 2.2 gezeigt haben, beschrieben durch

$$\dot{c}'(t_0') = \dot{c}(t_0) \cdot \dot{\gamma}(t_0')$$

.....

$$c'^{(k)}(t_0') = \dot{c}(t_0) \cdot \gamma^{(k)}(t_0') + \dots + c^{(k)}(t_0) \cdot (\dot{\gamma}(t_0'))^k.$$

$\gamma$  bestimmt also einen Basiswechsel im  $S^k(t_0)$ . Da dieser Basiswechsel durch eine reguläre Dreiecksmatrix beschrieben wird, gilt für dessen Determinante  $\Delta$  einfach

$$\Delta = \dot{\gamma}(t_0')^{1+2+\dots+k}.$$

Ist  $\gamma$  gleichsinnig, so ist  $\Delta > 0$ , woraus die Parameterinvarianz für  $\{c_1, \dots, c_{n-1}\}$  folgt. Da wir nach Voraussetzung Eigenschaften für die orientierte Kurve untersuchen, ist  $\gamma$  ohnehin gleichsinnig.

Für  $c_n$  gilt schließlich

$$c_n = c_1 \times \dots \times c_{n-1} = c_1' \times \dots \times c_{n-1}' = c_n'.$$

Damit ist der Nachweis der Parameterinvarianz für  $\{c_1, \dots, c_n\}$  erbracht.  $\square$

## 2.5 Ableitungsgleichungen

Gegeben sei ein HTW  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann gibt es nach 2.4 in jedem Punkt  $c(t_0)$  eine Begleitbasis  $c_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha=1, \dots, n$ . Aufgrund ihrer Entstehungsgeschichte bilden die  $c_\alpha$  eine ON-Rechtsbasis von  $\mathbb{R}^n$ . Wegen  $c_\alpha \in C^1$  ist folgender Ansatz möglich:

$$\dot{c}_\alpha(t_0) = \omega_\alpha^\beta(t_0) \cdot c_\beta(t_0) \text{ mit } \omega_\alpha^\beta: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ und } \alpha=1, \dots, n. \quad (*)$$

Dieses System von  $n$  Gleichungen mit der Koeffizientenmatrix  $(\omega_\alpha^\beta) := (\omega_{\alpha\beta})$  nennt man die **Ableitungsgleichungen**.

Wir wollen nun die Ableitungsgleichungen genauer studieren:

1.Schritt: Da die  $c_\alpha$  eine ON-Basis bilden, gilt in ganz  $I$  die Beziehung

$$c_\alpha \cdot c_\beta = \delta_{\alpha\beta}.$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  fest gewählt seien. Differentiation nach  $t$  ergibt mit  $(*)$

$$0 = \dot{c}_\alpha \cdot c_\beta + c_\alpha \cdot \dot{c}_\beta = (\omega_\alpha^\gamma \cdot c_\gamma) \cdot c_\beta + c_\alpha \cdot (\omega_\beta^\delta \cdot c_\delta) = \omega_\alpha^\gamma \cdot \delta_{\gamma\beta} + \omega_\beta^\delta \cdot \delta_{\alpha\delta} = \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha}.$$

Daher ist die Matrix der  $(\omega_{\alpha\beta})$  schiefsymmetrisch; in der Hauptdiagonale stehen also nur Nullen.

2.Schritt: Wir betrachten nun  $c_j(t_0)$  für  $1 \leq j \leq n-1$ :

Nach SCHMIDT ist

$$c_j(t_0) \in H(\dot{c}(t_0), \dots, c^{(j)}(t_0)).$$

Differentiation nach  $t$  ergibt

$$\dot{c}_j(t_0) \in H(\dot{c}(t_0), \dots, c^{(j+1)}(t_0)).$$

Nach ZB 6, 1. Teil ist dann

$$\dot{c}_j(t_0) \in H(c_1(t_0), \dots, c_{j+1}(t_0)),$$

d.h.  $\dot{c}_j$  ist allein durch die Vektoren  $c_1, \dots, c_{j+1}$  linearkombinierbar. Dann folgt für die allgemein angesetzte Linearkombination  $(*)$ :

$$\omega_{j,j+2} = \omega_{j,j+3} = \dots = \omega_{jn} = 0.$$

Aus der Schiefsymmetrie der Koeffizientenmatrix  $(\omega_{\alpha\beta})$  folgt sofort

$$\omega_{j+2,j} = \omega_{j+3,j} = \dots = \omega_{nj} = 0.$$

Die schiefsymmetrische Koeffizientenmatrix hat daher folgende Gestalt:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & * & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & * & 0 \end{array}$$

Def. 2.5.1: Wir nennen

$$\omega_{j,j+1} / \| \dot{c} \| =: \kappa_j : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq n-1$$

die  **$j$ -te Krümmung von  $c$** .

Diese Definition erklärt also die  $n-1$  Krümmungen  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  des HTW  $c$ .

Für die Ableitungsgleichungen folgt dann:



wegen  $(\tilde{c}) \in H(\dot{c}, \dots, c^{(j)})$  bleibt

$$\kappa_j = \|\dot{c}\|^{-1} \cdot (\Gamma_{j-1}/\Gamma_j)^{1/2} \cdot c^{(j+1)} \cdot c_{j+1} \quad (**)$$

Um den Ausdruck

$$c^{(j+1)} \cdot c_{j+1}$$

angeben zu können, wird der 1. Schritt benötigt; d.h. für den Index  $j+1$  muß demnach gelten:

$$j+1 \neq n-1;$$

daraus folgt  $j \neq n-2$ , sodaß Gleichung (\*\*) nur zur Berechnung von  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}$  taugt, nicht aber zur Berechnung der Windung  $\kappa_{n-1}$ .

3. Schritt: (jetzt für  $j \neq n-2$ )

Mit Schritt 1 folgt:

$$c^{(j)} \cdot c_j = c^{(j)} \cdot (\Gamma_{j-1} \cdot \Gamma_j)^{-1/2} \cdot \begin{vmatrix} \dot{c} \cdot \dot{c} & \dots & \dot{c} \cdot c^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots \\ c^{(j-1)} \cdot \dot{c} & \dots & c^{(j-1)} \cdot c^{(j)} \\ \dot{c} & \dots & c^{(j)} \end{vmatrix};$$

formale Entwicklung nach der letzten Zeile:

$$c^{(j)} \cdot c_j = (\Gamma_{j-1} \cdot \Gamma_j)^{-1/2} \cdot \begin{vmatrix} \dot{c} \cdot \dot{c} & \dots & \dot{c} \cdot c^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots \\ c^{(j-1)} \cdot \dot{c} & \dots & c^{(j-1)} \cdot c^{(j)} \\ c^{(j)} \cdot \dot{c} & \dots & c^{(j)} \cdot c^{(j)} \end{vmatrix} = (\Gamma_j / \Gamma_{j-1})^{1/2},$$

da der Wert der Determinante nach ZB 5 gleich  $\Gamma_j$  ist.

Damit folgt schließlich für  $1 \leq j \leq n-2$ :

$$\kappa_j = \|\dot{c}\|^{-1} \cdot (\Gamma_{j-1}/\Gamma_j)^{1/2} \cdot (\Gamma_{j+1}/\Gamma_j)^{1/2} = \|\dot{c}\|^{-1} \cdot (\Gamma_{j-1} \cdot \Gamma_{j+1})^{1/2} / \Gamma_j.$$

4. Schritt: ( $j=n-1$ , also Windung  $\kappa_{n-1}$ )

Mit Def. 2.5.1, ZB 7 und ZB 8 gilt:

$$\kappa_{n-1} = \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \dot{c}_{n-1} \cdot c_n = \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \dot{c}_{n-1} \cdot (c_1 \times \dots \times c_{n-1}) = \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \det(c_1, \dots, c_{n-1}, \dot{c}_{n-1}).$$

Weiter folgt (vgl. Schritt 1):

$$\kappa_{n-1} = \|\dot{c}\|^{-1} \det(\dot{c}, \ddot{c}, \dots, c^{(n-1)}, c^{(n)}) \cdot (\Gamma_0/\Gamma_1)^{1/2} \cdot (\Gamma_1/\Gamma_2)^{1/2} \cdot \dots \cdot (\Gamma_{n-2}/\Gamma_{n-1})^{1/2} \cdot (\Gamma_{n-2}/\Gamma_{n-1})^{1/2};$$

also bleibt:

$$\kappa_{n-1} = \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \det(\dot{c}, \dots, c^{(n)}) \cdot \Gamma_{n-2}^{1/2} / \Gamma_{n-1}.$$

Zusammenfassung:

$$\kappa_j = \|\dot{c}\|^{-1} \cdot (\Gamma_{j-1} \cdot \Gamma_{j+1})^{1/2} / \Gamma_j \quad \text{für } 1 \leq j \leq n-2. \quad (2.5.1)$$

Bemerkung:

Da  $c$  als HTW vorausgesetzt wurde, ist l.u.  $\{\dot{c}, \dots, c^{(n-1)}\}$ . Nach ZB 5 folgt dann  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1} > 0$ , sodaß wir

$$\kappa_j > 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq n-2$$

folgern können.

Für  $\kappa_{n-1}$  ergibt sich

$$\kappa_{n-1} = \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \det(\dot{c}, \dots, c^{(n)}) \cdot \Gamma_{n-2}^{1/2} / \Gamma_{n-1}. \quad (2.5.2)$$

Def. 2.5.2: Die  $(n-1)$ -te Krümmung  $\kappa_{n-1}$  eines Weges  $c$  heißt **Windung**.

**Bemerkung:** Wir unterscheiden zwei Fälle für die Windung  $\kappa_{n-1}$ :

(a)  $\kappa_{n-1}(t_0)=0$ : ist genau dann der Fall, wenn  $\det(\dot{c}(t_0), \dots, c^{(n)}(t_0))=0$  bei  $\det(\dot{c}(t_0), \dots, c^{(n-1)}(t_0)) \neq 0$  (nach Definition eines HTW). Genau dann ist aber  $c(t_0)$  nach Def.2.2.3,2 ein Henkelpunkt.

(b) Gilt für eine Stelle  $t_0$   $\kappa_{n-1} \neq 0$ , so unterscheiden wir

1.  $\kappa_{n-1} > 0$ : Dies ist nach (2.5.2) genau dann der Fall, wenn  $\det(\dot{c}, \dots, c^{(n)}) > 0$ .
2.  $\kappa_{n-1} < 0$ : Dies ist genau bei  $\det(\dot{c}, \dots, c^{(n)}) < 0$  der Fall.

Aus diesem Grund definieren wir:

**Def. 2.5.3:**  $c(I)$  heißt *positiv gewunden im Punkt*  $c(t_0)$ , wenn  $\kappa_{n-1}(t_0) > 0$ . Bei  $\kappa_{n-1}(t_0) < 0$  heißt  $c(I)$  *negativ gewunden*.

### Diskussion der Krümmungen und der Windung

(1)  $n \geq 3$ : Hier ist  $\kappa_1$  keine Windung und wir verwenden Formel (2.5.1), sodaß gilt:

$$\kappa_1 = \|\dot{c}\|^{-1} \cdot (\Gamma_0 \Gamma_2)^{1/2} / \Gamma_1.$$

Nach ZB 6 und ZB 5 ist  $\Gamma_0=1$ ,  $\Gamma_1 = \|\dot{c}\|^2$  und  $\Gamma_2 = \|\dot{c}\|^2 \cdot \|\ddot{c}\|^2 - (\dot{c}\ddot{c})^2$ , woraus folgt:

$$\kappa_1 = \|\dot{c}\|^{-3} \cdot [\|\dot{c}\|^2 \|\ddot{c}\|^2 - (\dot{c}\ddot{c})^2]^{1/2}. \quad (2.5.3)$$

Sonderfall:

Ist speziell  $c$  ein *normierter* HTW, gilt also  $\|\dot{c}\|=1$  in ganz  $I$ , so ist wegen  $\dot{c}^2=1$  dann nach Differentiation  $\dot{c}\ddot{c}=0$ . Dann gilt aber:

$$\kappa_1 = \|\ddot{c}\|. \quad (2.5.4)$$

(2)  $n=2$ : Hier ist  $\kappa_1$  Windung, sodaß wir Formel (2.5.2) verwenden müssen.

Wir setzen  $\kappa_1 =: \kappa$  und sprechen von der *Krümmung* schlechthin. Hier ist also  $\kappa < 0$ ,  $\kappa = 0$  oder  $\kappa > 0$  möglich. Die Formel liefert:

$$\kappa = \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \det(\dot{c}, \ddot{c}) \cdot \Gamma_0^{1/2} / \Gamma_1.$$

Aus  $\Gamma_0=1$  und  $\Gamma_1 = \|\dot{c}\|^2$  folgt

$$\kappa = \det(\dot{c}, \ddot{c}) / \|\dot{c}\|^3. \quad (2.5.5)$$

Sonderfall:

Im Falle eines normierten Weges gilt:  $\kappa = \det(\dot{c}, \ddot{c})$ . (2.5.6)

(3) Spezielle Hauttypwege: (Def.2.4.1)

1.  $n=2$ : Ein HTW  $c$  eines zweidimensionalen affinen Raumes ist aus  $C^2(I)$  mit l.u.  $\{\dot{c}\}$  in  $I$ , also  $\dot{c}(t_0) \neq 0 \forall t_0 \in I$ .  $c$  ist also *regulär*.

Die Begleitbasis  $\{c_1, c_2\}$  lautet:

$$c_1 = \dot{c} / \|\dot{c}\| =: (c_1^1, c_1^2), \quad c_2 = c_1^\perp = (-c_1^2, c_1^1).$$

Die Ableitungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \dot{c}_1 &= 0 + \kappa \cdot c_2 \\ \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \dot{c}_2 &= -\kappa \cdot c_1 + 0 \end{aligned}$$

2.  $n=3$ : Ein HTW  $c$  eines dreidimensionalen affinen Raumes ist aus  $C^3(I)$  mit l.u.  $\{\dot{c}, \ddot{c}\}$  in  $I$ . Nach Def.2.2.3,1 ist  $c(I)$  also eine *reguläre Wendepunktfreie*  $C^3$ -Kurve.

Wir nennen  $\kappa_1 =: \kappa$  *Krümmung* und  $\kappa_2 =: \tau$  *Torsion*. Nach ZB 7 läßt sich (2.5.3) schreiben als

$$\kappa = \|\dot{c} \times \ddot{c}\| / \|\dot{c}\|^3. \quad (2.5.7)$$

Nun zur Berechnung der Torsion  $\tau$ :

$\tau$  ist Windung, daher ist Formel (2.5.2) zu verwenden. Sie liefert

$$\tau = \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \det(\dot{c}, \ddot{c}, c^{(3)}) \cdot \Gamma_1^{1/2} / \Gamma_2$$

Die genaue Kenntnis von  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  liefert

$$\tau = \det(\dot{c}, \ddot{c}, c^{(3)}) / \|\dot{c} \times \ddot{c}\|^2. \quad (2.5.8)$$

Für die Begleitbasis  $\{c_1, c_2, c_3\}$  gilt ohne Benützung von SCHMIDT:

$$c_1 = \dot{c} / \|\dot{c}\|, \quad c_3 = \dot{c} \times \ddot{c} / \|\dot{c} \times \ddot{c}\|, \quad c_2 = c_3 \times c_1.$$

Die Ableitungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \dot{c}_1 &= \kappa \cdot c_2 \\ \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \dot{c}_2 &= -\kappa \cdot c_1 + \tau \cdot c_3 \\ \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \dot{c}_3 &= -\tau \cdot c_2 \end{aligned}$$

Man nennt diese Gleichungen auch *Ableitungsgleichungen von FRENET* oder *SERRET*.

Sonderfall:

Ist  $c$  ein *normierter* Weg, so folgt speziell

$$\kappa = \|\ddot{c}\| \quad \text{und} \quad \tau = \det(\dot{c}, \ddot{c}, c^{(3)}) / \|\ddot{c}\|^2.$$

**Satz 2.5.1:** *Es sei  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein HTW. Dann gilt:*

$\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}, |\kappa_{n-1}|$  sind geometrische Begriffe. Genauer gilt für die Windung  $\kappa_{n-1}$ :

(a) Ist  $\kappa_{n-1} = 0$ , so ist  $\kappa_{n-1}$  ein geometrischer Begriff.

(b) Ist  $\kappa_{n-1} \neq 0$ , so ist  $\kappa_{n-1}$  eine geometrische Eigenschaft der

1. Kurve, falls  $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$  bzw.
2. orientierten Kurve, falls  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ .

Beweis: Wir wissen:  $\kappa_j = \dot{c}_j \cdot c_{j+1} \cdot \|\dot{c}\|^{-1}$ .

(a) Nachweis der Bewegungsinvarianz:

Sei  $\bar{c} = \beta \circ c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein zu  $c$  bewegungsgleicher Weg, wobei die Bewegung  $\beta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $p \mapsto \beta(p) = s + l(p)$  mit  $l$  als gleichsinnigem orthogonalen Vektorraumautomorphismus und  $s \in \mathbb{R}^n$  beschrieben werde.

Nach Satz 2.4.1 ist die Begleitbasis  $c_\alpha$  bewegungsinvariant, d.h. es ist

$$\bar{c}_\alpha(t_0) = l(c_\alpha(t_0)), \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Da  $l$  selbst von  $t$  unabhängig ist, folgt nach Differentiation nach  $t$ :

$$\bar{c}'_\alpha(t_0) = l(\dot{c}_\alpha(t_0)).$$

Nun ist  $l$  orthogonal, d.h. es ist  $l(v) \cdot l(w) = v \cdot w$ . Damit folgt für  $\bar{\kappa}_j$  unter Benützung von  $\bar{c}' = l(\dot{c})$ :

$$\bar{\kappa}_j = \|\bar{c}'\|^{-1} \cdot \bar{c}'_j \cdot \bar{c}'_{j+1} = \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \dot{c}_j \cdot c_{j+1} = \kappa_j.$$

Damit sind alle  $\kappa_j$ , also auch die Windung bewegungsinvariant.

(b) Nachweis der Parameterinvarianz:

Sei  $c' = \gamma \circ c: I' \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein zu  $c$  äquivalenter Weg, wobei der Parameterwechsel  $\gamma: I' \rightarrow I$  ein  $C^n(I')$ -DM ist.

Nun ist  $c_\alpha(t_0) \in S^\alpha(t_0)$ , wobei bekanntlich gilt:

Die  $c_\alpha$  entstehen durch fortschreitendes Orthonormieren, d.h.  $c_\alpha$  ist orthogonal zu den Vorgängern  $c_1, \dots, c_{\alpha-1}$ . Dann liegt aber  $c_\alpha$  im *orthogonalen Komplement*  $(S^{\alpha-1})^\perp$  von  $S^{\alpha-1}$  bezüglich  $S^\alpha$ . Nach einem Ergebnis der Linearen Algebra ist  $(S^{\alpha-1})^\perp$  aber eindimensional.

$c_\alpha(t_0)$  ist normiert; daraus folgt:

$$c_\alpha'(t_0') = \varepsilon_\alpha \cdot c_\alpha(t_0) \text{ mit } \varepsilon_\alpha \in \{1, -1\} \text{ und } \gamma(t_0') = t_0.$$

Nun ist aber  $\varepsilon_\alpha$  von  $t_0$  unabhängig, also konstant in I, da in der obigen Gleichung rechts und links vom Gleichheitszeichen "stetige Vektoren" stehen.

Wir differenzieren nach  $t'$  und erhalten

$$(c_\alpha')'(t_0') = \varepsilon_\alpha \cdot \dot{c}_\alpha(t_0) \cdot \dot{\gamma}(t_0').$$

Ferner gilt wie immer

$$(c')'(t_0') = \dot{c}(t_0) \cdot \dot{\gamma}(t_0').$$

Daraus folgt für die zu  $c'$  gehörigen Krümmungen  $\kappa_j'$ :

$$\begin{aligned} \kappa_j'(t_0') &= (c_j')'(t_0') \cdot c_{j+1}'(t_0') / \| \dot{c}'(t_0') \|^2 = \\ &= [\varepsilon_j \dot{c}_j(t_0) \dot{\gamma}(t_0')] [\varepsilon_{j+1} c_{j+1}(t_0)] / [\| \dot{c}(t_0) \|^2 \cdot |\dot{\gamma}(t_0')|]. \end{aligned}$$

Man erkennt sofort:

$$|\kappa_j'(t_0')| = | \dot{c}_j(t_0) \cdot c_{j+1}(t_0) | \cdot |\dot{\gamma}(t_0')| / [\| \dot{c}(t_0) \|^2 \cdot |\dot{\gamma}(t_0')|].$$

Andererseits ist

$$|\kappa_j(t_0)| = | \dot{c}_j(t_0) \cdot c_{j+1}(t_0) | / \| \dot{c}(t_0) \|^2.$$

Es gilt daher:

$$|\kappa_j'(t_0')| = |\kappa_j(t_0)| \text{ für } 1 \leq j \leq n-1.$$

Genauer erkennen wir:

--für  $1 \leq j \leq n-2$ : Es ist  $\kappa_j$  bzw.  $\kappa_j' > 0$ , woraus sogar die Gleichheit

$$\kappa_j'(t_0') = \kappa_j(t_0) \text{ für } 1 \leq j \leq n-2 \quad \forall t_0 \in I$$

folgt.

--für  $j=n-1$  bleibt die Windung  $\kappa_{n-1}$  genauer zu untersuchen:

Nach Formel 2.5.2 steckt das Vorzeichen von  $\kappa_{n-1}$  in der Determinante, also in  $\det(\dot{c}, \dots, c^{(n)})$ . Nach dem Beweis zu Satz 2.4.1 gilt nach Rechenregeln mit Determinanten

$$\det(\dot{c}', \dots, c'^{(n)}) = \Delta \cdot \det(\dot{c}, \dots, c^{(n)}),$$

wobei

$$\Delta = (\dot{\gamma})^{1+2+\dots+n}$$

gilt. Wir unterscheiden für  $\kappa_{n-1} \neq 0$  (ansonsten trivial):

Ist  $\gamma$  gleichsinnig, so ist  $\Delta > 0$ , daher ist  $\kappa_{n-1}' = \kappa_{n-1}$ .

Ist  $\gamma$  gegensinnig, so ist  $\Delta > 0$  genau dann der Fall, wenn  $1+2+\dots+n$  gerade, also  $1+2+\dots+n = n(n+1)/2 =: 2m$  mit  $m \in \mathbb{N}$  ist. Dies bedeutet  $n(n+1) = 4m$ . Also ist  $\Delta > 0$  genau dann, wenn  $n \equiv 0 \pmod{4}$  oder  $n \equiv 3 \pmod{4}$  gilt.  $\square$

Ergebnis:  $\kappa_{n-1}$  ändert bei einem gegensinnigen Parameterwechsel  $\gamma$  das Vorzeichen, wenn  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$  gilt.

### Bemerkung:

n=2: Hier hängt das Vorzeichen der Krümmung  $\kappa$  vom Durchlaufungssinn der Kurve  $c(I)$  ab. Als Beispiel betrachten wir einen Kreis vom Radius  $r$ :  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $t \in \mathbb{R} \rightarrow c(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)$ . Bei positiver Durchlaufung (gegen den Uhrzeigersinn) ergibt sich  $\kappa = 1/r$ , also  $\kappa > 0$ .

Sei aber nun  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $t \mapsto -t$  ein gegensinniger Parameterwechsel, der den neuen Weg  $c': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $t \mapsto c'(t) = (r \cdot \cos t, -r \cdot \sin t)$  induziert, also den Durchlaufungssinn von  $k$  umdreht. Hier ergibt die Rechnung:  $\kappa' = -1/r$ , also  $\kappa' < 0$ .

n=3: Das Vorzeichen der Torsion  $\tau$  hängt nicht vom Durchlaufungssinn ab. Als Beispiel betrachten wir eine Schraublinie mit Radius  $r$  und Para-

meter  $p: c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $t \in \mathbb{R} \rightarrow c(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, p \cdot t)$  mit  $p, r \in \mathbb{R}$ .

Die Berechnung von  $\kappa$  und  $\tau$  liefert

$$\kappa = r / (r^2 + p^2), \quad \tau = p / (r^2 + p^2).$$

Allerdings hängt das Vorzeichen von  $\tau$  vom Vorzeichen von  $p$  ab.

### Diskussion von NICHTHaupttypkurven

Sei  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  aus  $C^n(I)$ . Allerdings sei nun die Forderung 2 von Def.2.4.1 verletzt: " $\dim S^{n-1}(t_0) = n-1$  gilt  $\forall t_0 \in I$ " sei nicht richtig. Wohl setzen wir aber  $\Gamma_1 \neq 0$  in  $I$ , also eine *reguläre* Kurve voraus.

Dann gibt es eine Stelle  $t_0$  und einen Index  $k$  mit

$$\Gamma_k(t_0) \neq 0, \text{ aber } \Gamma_{k+1}(t_0) = 0 \text{ mit } k+1 \leq n-1.$$

Dann ist

$$\Gamma_l(t_0) = 0 \text{ für } l \geq k+1.$$

Fall 1:  $\Gamma_{k+1} = 0$  in einem ganzen Intervall  $I^* \subset I$  mit  $t_0 \in I^*$ , d.h. es ist

$$\Gamma_k(t) \neq 0, \Gamma_{k+1}(t) = 0 \text{ für alle } t \in I^*.$$

Das bedeutet dann l.a.  $\{\dot{c}(t), \dots, c^{(k+1)}(t)\}$  bei l.u.  $\{\dot{c}(t), \dots, c^{(k)}(t)\}$  für alle  $t \in I^*$ . Folglich ist damit  $\dim S^{k+1}(t) = \dim S^k(t) = k \quad \forall t \in I^*$  und  $k \leq n-2$ . Nach Satz 2.2.2 liegt damit  $c(I^*)$  in einem genau  $k$ -dimensionalen Unterraum  $A^k$ .  $c(I^*)$  ist sogar henkelpunktfrei.

Ergebnis: In  $A^k$  ist  $c(I^*)$  henkelpunktfreie HTK.

Fall 2:  $t_0 \in I$  sei *isolierte* Nullstelle von  $\Gamma_{k+1}$ .

Wir betrachten ein abgeschlossenes Teilintervall  $I_1 \subset I$  mit  $t_0 \in I_1$ . Dann gibt es für alle  $t_1 \in I_1$  eine von  $t_1$  abhängige Zahl  $k(t_1)$  mit

$$\Gamma_{k(t_1)}(t_1) \neq 0, \text{ aber } \Gamma_{k(t_1)+1}(t_1) = 0.$$

Insbesondere ist unser  $k$  gleich dem  $k(t_0)$ .

Sei  $j := \max k(t_1)$  für alle  $t_1 \in I_1$  und  $t^* \in I_1$  eine Stelle, wo  $j$  tatsächlich angenommen wird ( $t^*$  existiert, da  $I_1$  ein *abgeschlossenes* Intervall ist).

Nach dem Gesagten ist  $\Gamma_j(t^*) \neq 0$  und  $\Gamma_{j+1}(t^*) = 0$ .

Wegen  $\Gamma_j \in C^0(I)$ , also der Stetigkeit von  $\Gamma_j$  in  $I$  gibt es ein *offenes* Intervall  $I^* \subset I_1$  mit  $t^* \in I^*$ , wo gilt:

$$\Gamma_j(t) \neq 0 \quad \forall t \in I^*.$$

Analog Fall 1 ist dann  $c|_{I^*}: I^* \rightarrow \mathbb{R}^n$  enthalten in einem  $j$ -dimensionalen affinen Unterraum  $A^j$  und dort HTW.

Wir fassen diese beiden Fälle zusammen in

**Satz 2.5.2:**  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei aus  $C^n(I)$  und regulär. Dann gilt:

Zu jedem  $t_0 \in I$  gibt es in jeder Umgebung  $I_1 \subset I$  von  $t_0$  ein  $t^*$  derart, daß für eine offene Umgebung  $I^* \subset I_1$  von  $t^*$   $c(I^*)$  eine HTK in einem gewissen affinen Unterraum ist.  $c(I^*)$  ist dort sogar henkelpunktfrei.

### Bemerkungen:

(a) Fall 1 ist nur ein Sonderfall von Fall 2:  $t_0 = t^*$ .

(b) Ist  $c$  selbst ein HTW, dann ist  $I^* = I$  und dieser besagte affine Unterraum der ganze  $\mathbb{R}^n$ .

(c) Satz 2.5.2 motiviert die Beschränkung auf Haupttypwege.

## 2.6 Hauptsatz der Kurventheorie

Wir stellen uns nun die Frage, ob die  $\kappa_j$  ( $j=1, \dots, n-1$ ) die Kurve der Gestalt nach festlegen (d.h. bis auf Bewegungen). Dann wären im Sinne des Erlanger Programmes die Krümmungen ein vollständiges Invariantensystem der Kurve im Sinne der Bewegungsgruppe. Genauer gilt:

**Satz 2.6.1:**  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\bar{c}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  seien beide normierte HTWe, wobei gelten solle:

$$\kappa_j(t_0) = \bar{\kappa}_j(t_0) \quad \forall t_0 \in I; \quad j=1, \dots, n-1.$$

Dann gibt es genau eine Bewegung  $\beta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\bar{c} = \beta \circ c$ .

**Bemerkung:** Es sei hier oBdA  $I=I'$  angenommen. Ist dies nicht der Fall, so muß man  $I$  und  $I'$  durch einen  $C^n(I')$ -DM  $\gamma: I' \rightarrow I$  koppeln.

**Beweis:** (a) Konstruktion von  $\beta$ :

Sei  $0 \in I$  und  $\{c_1(0), \dots, c_n(0)\}$  die Begleitbasis in  $c(0)$ . Analog sei in  $\bar{c}(0)$  die Begleitbasis mit  $\{\bar{c}_1(0), \dots, \bar{c}_n(0)\}$  beschriftet.

Falls  $\beta$  existiert, muß u.a.  $0 \in I$  "passen". Wir setzen  $\beta$  an mit

$$p \mapsto \beta(p) = l(p) + s.$$

Nun weiß man aus der Linearen Algebra, daß zu den beiden geordneten Vektor- $n$ -tupeln

$$\{c_1(0), \dots, c_n(0)\} \quad \text{und} \quad \{\bar{c}_1(0), \dots, \bar{c}_n(0)\}$$

genau ein gleichsinniger orthogonaler Vektorraumautomorphismus  $l$  existiert mit

$$\bar{c}_\alpha(0) = l(c_\alpha(0)), \quad \alpha=1, \dots, n.$$

Der Schiebanteil  $s$  von  $\beta$  ist durch die Forderung

$$c(0) \mapsto \bar{c}(0)$$

eindeutig bestimmt. Damit ist  $\beta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  *eindeutig* festgelegt.

Bisher wissen wir nur, daß  $\beta$  in  $0$  "paßt". Paßt  $\beta$  aber überall? Daher

(b) Ziel:  $\bar{c} = \beta \circ c$ .

Zu diesem Zweck benützen wir die Ableitungsgleichungen von  $c$  und  $\bar{c}$ :

$$c \dots \dot{c}_\alpha = \omega_\alpha^\gamma \cdot c_\gamma, \quad (\gamma \text{ als Summationsindex})$$

$$\bar{c} \dots \dot{\bar{c}}_\alpha = \bar{\omega}_\alpha^\gamma \cdot \bar{c}_\gamma.$$

Nun ist wegen  $\|\dot{c}\|=1$

$$\kappa_j = \omega_{j,j+1} \quad \text{mit} \quad \kappa_j \in C^{n-j-1}(I), \quad \text{also} \quad \kappa_j \text{ sicher stetig.}$$

Nach Voraussetzung ist  $\kappa_j = \bar{\kappa}_j$ , woraus

$$\omega_{\alpha\gamma} = \bar{\omega}_{\alpha\gamma}$$

folgt.

Die Begleitbasis von  $\beta \circ c$  ist  $\{l(c_1), \dots, l(c_n)\}$ .

Die Ableitungsgleichungen von  $\beta \circ c$  lauten, wenn man die Verträglichkeit von  $l$  mit der Differentiation nach  $t$  berücksichtigt:

$$(l(c_\alpha))' = l(\dot{c}_\alpha) = l(\omega_\alpha^\gamma \cdot c_\gamma) = \omega_\alpha^\gamma \cdot l(c_\gamma) = \bar{\omega}_\alpha^\gamma \cdot l(c_\gamma); \quad \alpha=1, \dots, n.$$

Andererseits ist

$$\bar{c}_\alpha' = \bar{\omega}_\alpha^\gamma \cdot \bar{c}_\gamma.$$

Es passen also  $\bar{c}_\alpha$  und  $l(c_\alpha)$  in dieselbe gewöhnliche *lineare* Differential-

gleichung 1. Ordnung, und zwar zu gleichen Anfangsbedingungen. Genauer liefert uns die

**ZWISCHENBEMERKUNG 9:**

Gegeben: Funktion  $v=(v^1, \dots, v^n): I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit den Koordinatenfunktionen  $v^\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Ferner kennt man ein System von  $n$  *gewöhnlichen linearen* Differentialgleichungen 1. Ordnung der speziellen Bauart

$$\dot{v}^\alpha = a_\gamma^\alpha \cdot v^\gamma + b^\alpha \text{ mit } a_\gamma^\alpha, b^\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}, \in C^s(I), s \geq 1; \alpha = 1, \dots, n$$

mit den Anfangswerten an der Stelle  $t_0 \in I$ :

$$\{v^1(t_0), \dots, v^n(t_0)\}.$$

Dann gibt es genau eine Lösung  $v=(v^1, \dots, v^n)$  dieses Gleichungssystems, welche über ganz I erklärt ist.

**Bemerkung:** Die allgemeine Bauart obiger Differentialgleichung wäre

$$\dot{v}^\alpha(t) = f^\alpha(t, v^1, \dots, v^n).$$

(a) Ist  $f^\alpha \in C^0$ , so ist die Lösung nur lokal definiert; ist hingegen zusätzlich  $f^\alpha$  noch linear, wie das bei uns der Fall ist, so existiert die Lösung global.

(b)  $f^\alpha \in C^0$  reicht für die Eindeutigkeit der Lösung nicht aus ( $C^1$  schon). Ist zusätzlich  $f^\alpha$  noch linear, so ist die Lösung eindeutig.

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Bei uns passen  $l(c_\alpha)$  und  $\bar{c}_\alpha$  in dieselbe gewöhnliche lineare Diff.glg. erster Ordnung zu denselben Anfangswerten in  $t_0=0$  (nach Konstruktion von  $\beta$ ). Nach ZB 9 ist dann

$$\bar{c}_\alpha(t_0) = l(c_\alpha(t_0)) = (\beta \circ c_\alpha)(t_0) \text{ für alle } t_0 \in I, \alpha = 1, \dots, n.$$

Es bleibt noch  $\bar{c} = \beta \circ c$  zu zeigen:

Es gilt speziell für  $\alpha=1$

$$\bar{c}_1(t_0) = (\beta \circ c_1)(t_0) = l(c_1(t_0)).$$

Daraus ergibt sich unter Benützung der Normiertheit von  $c$  und  $\bar{c}$ :

$$\bar{c}_1(t_0) = \bar{c}'(t_0) / \|\bar{c}'(t_0)\| = \bar{c}'(t_0) = l(c_1(t_0)) = l(\dot{c}(t_0)) = (\beta \circ c)'(t_0);$$

das letzte Gleichheitszeichen folgt nach 2.2.

Wir lesen insbesondere heraus:

$$\bar{c}'(t_0) = (\beta \circ c)'(t_0) \text{ für alle } t_0 \in I.$$

Wir integrieren:

$$\int_0^{t_0} \bar{c}' dt = \bar{c}(t_0) - \bar{c}(0) = \int_0^{t_0} (\beta \circ c)' dt = (\beta \circ c)(t_0) - (\beta \circ c)(0).$$

Nun ist  $(\beta \circ c)(0) = \bar{c}(0)$ , woraus

$$\bar{c}(t_0) = (\beta \circ c)(t_0) \quad \forall t_0 \in I$$

folgt.  $\square$

**Bemerkungen:**

(a) Die Forderung "normiert" könnte durch " $\|\dot{c}(t_0)\| = \|\bar{c}'(t_0)\| = \text{beliebig} \neq 0$ " abgeschwächt werden.

(b) Der Hauptsatz ist falsch, wenn die Krümmungen bei beliebigen Kurvenparametern übereinstimmen.

Als Anwendung des Hauptsatzes 2.6.1 untersuchen wir

## Haupttypkurven konstanter Krümmungen

Sei  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein HTW, den wir obdA normiert voraussetzen können. Ferner seien

$$\hat{\kappa}_1, \dots, \hat{\kappa}_{n-2}, \hat{\kappa}_{n-1}$$

die konstanten Krümmungen, deren Konstanz durch das Symbol " " ausgedrückt werde.

Nach einer Bemerkung ist

$$\hat{\kappa}_j > 0 \text{ für } 1 \leq j \leq n-2,$$

während

$$\text{sgn}(\hat{\kappa}_{n-1}) = -1, 0 \text{ oder } 1$$

möglich ist.

Dann bilden aber die Ableitungsgleichungen ein System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit *konstanten Koeffizienten*.

Wir fassen nun die  $\hat{\kappa}_j$  als *unendlich* oft stetig differenzierbare Funktionen über  $\mathbb{R}$  auf, also

$$\hat{\kappa}_j \in C^\omega(\mathbb{R}).$$

In den folgenden Untersuchungen von Kapitel 2.6 setzen wir

$$c \in C^\omega(\mathbb{R})$$

voraus.

(1)  $n=2$ : Hier ist eine HTK eine reguläre  $C^2$ -Kurve und  $\hat{\kappa} <, =$  oder  $> 0$  möglich.

(a)  $\hat{\kappa}=0$ : Dann ist  $\det(\dot{c}, \ddot{c})=0$  und nach Satz 2.2.2 ist  $c(\mathbb{R})$  geradlinig.

Da  $c$  über ganz  $\mathbb{R}$  erklärt ist und sogar normiert, folgt:  
 $c(\mathbb{R})$  ist eine Gerade.

(b)  $\hat{\kappa} > 0$ : Ein mögliches Beispiel dafür ist ein *positiv* durchlaufener Kreis vom Radius  $1/\hat{\kappa}$ . Nach dem Hauptsatz 2.6.1 sind alle anderen Beispiele dazu bewegungsgleich.

(c)  $\hat{\kappa} < 0$ : Analog (b) ein *negativ* durchlaufener Kreis vom Radius  $1/|\hat{\kappa}|$ .

(2)  $n=3$ : Hier ist eine HTK eine reguläre wendepunktfreie  $C^3$ -Kurve mit  $\hat{\kappa} > 0$  und  $\hat{\tau}$ .

(a)  $\hat{\tau}=0$ : Dann ist  $\det(\dot{c}, \ddot{c}, c^{(3)})=0$  bei l.u.  $\{\dot{c}, \ddot{c}\}$ . Daher ist  $\text{Dim}S^3(t_0)=\text{Dim}S^2(t_0)=2$  für alle  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Nach Satz 2.2.2 ist

$$c(\mathbb{R}) \subset A^2 \subset \mathbb{R}^3,$$

d.h.  $c(\mathbb{R})$  ist eine Kurve in einer Ebene des  $\mathbb{R}^3$  mit konstanter Krümmung  $\hat{\kappa}$ .

(b)  $\hat{\tau} \neq 0$ : Ein mögliches Beispiel ist eine Schraublinie  $(r, p)$  bei  $\text{sgn}(\tau) = \text{sgn}(p)$ . Nach der Bemerkung auf Seite 50 gilt

$$\hat{\kappa} = r/(r^2 + p^2) \text{ und } \hat{\tau} = p/(r^2 + p^2).$$

Umgekehrt existieren zu  $\hat{\kappa} > 0$  und  $\hat{\tau} \neq 0$  damit eindeutig

$$r = \hat{\kappa}/(\hat{\kappa}^2 + \hat{\tau}^2) \text{ und } p = \hat{\tau}/(\hat{\kappa}^2 + \hat{\tau}^2).$$

Nach dem Hauptsatz 2.6.1 sind alle anderen Beispiele dazu bewegungsgleich:

**Satz 2.6.2:** (1) HTK konstanter Krümmung für  $n=2$  sind genau die Geraden und Kreise (jeweils positiv bzw. negativ durchlaufen).

(2) HTK konstanter Krümmungen im  $\mathbb{R}^3$  sind genau die Kreise in Ebenen des  $\mathbb{R}^3$  und Schraublinien.

**Bemerkung:** Eine Gerade des  $\mathbb{R}^3$  ist wegen l.a.  $\{\dot{c}, \ddot{c}\}$  keine HTK im  $\mathbb{R}^3$ !

**Satz 2.6.3:** Sei  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  normierter HTW. Dann sind die beiden Aussagen äquivalent:

(1)  $c$  hat konstante Krümmungen.

(2)  $\forall a \in \mathbb{R}$  gibt es eine Bewegung  $\beta_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\beta_a(c(t_0)) = c(t_0 + a)$  für alle  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

**Bemerkung:** Dieser Satz besagt:

Die Abbildung

$$c(t_0) \mapsto c(t_0 + a)$$

paßt in eine Bewegung des  $\mathbb{R}^n$  hinein, oder:

" $c(\mathbb{R})$  gestattet stetige Bewegungen in sich".

Alle diese Bewegungen bilden trivialerweise eine Untergruppe der Bewegungsgruppe des  $\mathbb{R}^n$ . Es gilt sogar:

$$\{\beta_a \mid a \in \mathbb{R}\} \cong \{\mathbb{R}, +\},$$

d.h. es gibt einen *Isomorphismus*

$$i: a \in \mathbb{R} \mapsto \beta_a$$

derart, daß

$$\beta_{a+b} = \beta_b \circ \beta_a$$

gilt. Dies folgt aber sofort aus der Kette

$$(\beta_b \circ \beta_a)(c(t_0)) = \beta_b(c(t_0 + a)) = c(t_0 + a + b) = \beta_{a+b}(c(t_0)).$$

**Beweis zu 2.6.3:** (a) (1)  $\implies$  (2):

Dazu betrachten wir den Weg

$$\bar{c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \bar{c}(t_0) := c(t_0 + a).$$

$\bar{c}$  ist normiert, da er aus  $c$  durch den Parameterwechsel  $\gamma$  mit  $\dot{\gamma} = 1$  hervorgeht.

Ferner gilt

$$\bar{\kappa}_j(t_0) = \kappa_j(t_0 + a) = \hat{\kappa}_j = \kappa_j(t_0) \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}.$$

Nach dem Hauptsatz 2.6.1 sind  $c$  und  $\bar{c}$  bewegungsgleich; eine passende Bewegung ist  $\beta_a$ , welche  $c(t_0) \mapsto c(t_0 + a)$  leistet, sodaß  $\bar{c} = \beta_a \circ c$  gilt.

(b) (2)  $\implies$  (1):

Nun existiere also zu jedem  $a \in \mathbb{R}$  eine solche Bewegung  $\beta_a$  mit  $c(t_0) \mapsto c(t_0 + a)$ .

Nach dem Beweis zu Satz 2.5.1 sind die  $\kappa_j$  bewegungsinvariant.

Sei  $a$  vorerst fest gewählt. Dann ist

$$\kappa_j(t_0 + a) = \kappa_j(t_0) \text{ für alle } t_0 \in \mathbb{R}.$$

Dann folgt bei laufendem  $a$  die Unabhängigkeit der Krümmung von  $a$ , d.h. es ist

$$\kappa_j(t_0) = \text{const} =: \hat{\kappa}_j. \quad \square$$

## 2.7 Berührung von Kurven

**Def. 2.7.1:** Gegeben seien die beiden  $C^r$ -Wege

$c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c \in C^r(I)$  und  $\hat{c}: \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\hat{c} \in C^r(\hat{I})$  durch den gemeinsamen Punkt  $c(t_0) = \hat{c}(\hat{t}_0)$  und es gelte für die Ableitungen nach den entsprechenden Parametern

$$c^{(j)}(t_0) = \hat{c}^{(j)}(\hat{t}_0) \text{ für } 1 \leq j \leq k; \quad k \leq r.$$

Wir schreiben auch kurz:

$$c(t_0) =_{(k)} \hat{c}(\hat{t}_0).$$

Wir sagen:  $c(I)$  und  $\hat{c}(\hat{I})$  *stimmen in  $c(t_0)$  von  $k$ -ter Ordnung analytisch überein.*

### Bemerkungen:

(a) Durch obige Gleichheit der entsprechenden Ableitungen wird trivialeweise eine Äquivalenzrelation auf der Menge der  $C^r$ -Wege erklärt.

(b) Bei " $=_{(k)}$ " folgt auch " $=_{(l)}$ " für  $l \leq k$ .

(c) Bei " $=_{(k)}$ " gilt

$$S^j(t_0) = \hat{S}^j(\hat{t}_0) \text{ für } 1 \leq j \leq k,$$

da die betreffenden Ableitungsvektoren nach Definition übereinstimmen.

Dann folgt für die Schmiegräume sofort

$$c(t_0) + S^j(t_0) = \hat{c}(\hat{t}_0) + \hat{S}^j(\hat{t}_0) \text{ für } 1 \leq j \leq k.$$

(d) Beispiel:  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und es sei  $t_0 = 0 \in I$ .

Wir konstruieren einen Weg  $\hat{c}: \hat{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\hat{t} \in \hat{R} \rightarrow \hat{c}(\hat{t}) \in \mathbb{R}^n$  mit

$$\hat{c}(\hat{t}) := c(0) + \dot{c}(0) \cdot \hat{t} + \ddot{c}(0) \cdot \hat{t}^2/2 + \dots + c^{(k)}(0) \cdot \hat{t}^k/k! .$$

Für  $\hat{t} := 0$  folgt

$$\hat{c}(0) = c(0) \text{ und } \hat{c}(0) =_{(k)} c(0).$$

Nach Def. 2.7.1 stimmen  $c(I)$  und  $\hat{c}(\hat{R})$  in 0 von  $k$ -ter Ordnung analytisch überein. Wir nennen  $\hat{c}$  daher den  *$k$ -ten Näherungsweg von  $c$  in  $t_0$* ,  $\hat{c}(\hat{R})$  heißt dann  *$k$ -te Näherungskurve von  $c(I)$  in  $c(t_0)$* .

Außerdem gilt:

$$\hat{c}(\hat{R}) \subset c(0) + S^k(0).$$

(e) " $=_{(k)}$ " ist kein geometrischer Begriff:

--Die Bewegungsinvarianz ist erfüllt, da aus  $c^{(j)}(t_0) = \hat{c}^{(j)}(\hat{t}_0)$  für die Ableitungsvektoren von  $\beta \circ c$  sofort  $l(c^{(j)}(t_0)) = l(\hat{c}^{(j)}(\hat{t}_0))$  folgt.

--Die Parameterinvarianz ist i.a. nicht erfüllt, da nach der Kettenregel die Ableitungen der Parameterwechsel noch hinzukommen.

Unser Ziel ist ein geometrischer Begriff:

**Def. 2.7.2:** Gegeben  $c(I)$ ,  $\hat{c}(\hat{I})$  und  $p := c(t_0) = \hat{c}(\hat{t}_0)$  sei ein gemeinsamer Punkt.

Wir sagen, die Kurven  $c(I)$  und  $\hat{c}(\hat{I})$  *berühren einander in  $p$  von  $k$ -ter Ordnung*, wenn es zu  $c$  bzw.  $\hat{c}$  jeweils äquivalente Wege  $c' = c \circ \gamma$  ( $\gamma: I' \rightarrow I$ ,  $\gamma(t_0') = t_0$ ) bzw.  $\hat{c}' = \hat{c} \circ \hat{\gamma}$  ( $\hat{\gamma}: \hat{I}' \rightarrow \hat{I}$ ,  $\hat{\gamma}(\hat{t}_0') = \hat{t}_0$ ) gibt, für die

$$c'(t_0') =_{(k)} \hat{c}'(\hat{t}_0')$$

gilt.

### Bemerkungen:

(a) Berührung von  $k$ -ter Ordnung ist ein geometrischer Begriff.

(b) Die Berührung von k-ter Ordnung ist eine Äquivalenzrelation.

(c) Aus der analytischen Übereinstimmung (Def.2.7.1) folgt die Berührung der betreffenden Ordnung (Def.2.7.2). Die Umkehrung ist falsch: aus der Berührung k-ter Ordnung folgt nur, daß die jeweils äquivalenten Wege von k-ter Ordnung analytisch übereinstimmen, jedoch nicht die Ausgangswege.

(d) Aus der "Berührung k-ter Ordnung" folgt die "Berührung l-ter Ordnung" für  $l \leq k$ .

(e) Aus der "Berührung k-ter Ordnung" in  $p$  folgt: die  $j$ -Schmiegräume in  $p$  sind gleich für  $1 \leq j \leq k$ .

Sonderfall:  $k=1$ : Der 1-Schmiegraum in  $t_0$ , also die Tangente gestattet die Darstellung

$$c(t_0) + \dot{c}(t_0)R.$$

--Aus der Berührung 1.Ordnung folgt gemeinsame Tangente.

--Aus der gemeinsamen Tangente folgt die Berührung 1.Ordnung.

Bew.:  $c(I)$  berührt die Tangente von 1.Ordnung, und die Tangente berührt die zweite Kurve  $\hat{c}(\hat{I})$  von 1.Ordnung (jeweils im selben Punkt). Die Behauptung folgt aus der Transitivität des Berührungsbegriffes.  $\square$

Def. 2.7.3: Namensgebungen:

(a)  $k=1$ : *gewöhnliche Berührung.*

(b)  $k=2$ : *Oskulation.*

(c)  $k=3$ : *Hyperoskulation.*

Der folgende Satz stellt ein Kriterium für Berührung dar:

Satz 2.7.1:  $c(I)$  und  $\hat{c}(\hat{I})$  seien reguläre  $C^r$ -Kurven mit  $r \geq 1$ . Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(1)  $c(I)$  und  $\hat{c}(\hat{I})$  berühren einander im gemeinsamen Punkt  $p=c(t_0)=\hat{c}(\hat{t}_0)$  von  $k$ -ter Ordnung.

(2) Es existieren zu  $c$  und  $\hat{c}$  äquivalente normierte Wege  $c'=c \circ \gamma$  und  $\hat{c}'=\hat{c} \circ \hat{\gamma}$  mit  $c'(t_0')=_{(k)} \hat{c}'(\hat{t}_0')$  bei  $\gamma(t_0')=t_0$  und  $\hat{\gamma}(\hat{t}_0')=\hat{t}_0$ .

Bemerkung: Damit kann man sich bei Untersuchung der Berührordnung auf normierte Wege beschränken.

Beweis: (a) (2) $\implies$ (1) ist trivial nach Definition der Berührung.

(b) (1) $\implies$ (2): VOR:  $c(I)$  und  $\hat{c}(\hat{I})$  berühren einander in  $c(t_0)=\hat{c}(\hat{t}_0)$  von  $k$ -ter Ordnung.

Wir wählen  $\circ B d A$   $c$  und  $\hat{c}$  so, daß  $c(t_0)=_{(k)} \hat{c}(\hat{t}_0)$  gilt. (Ist dies nicht der Fall, so wenden wir erst Parameterwechsel  $\gamma$  und  $\hat{\gamma}$  an und nennen die so erhaltenen Wege  $c'$  und  $\hat{c}'$  erst recht wieder  $c$  und  $\hat{c}$ .)

Ziel: Beim Normieren bleibt analytische Übereinstimmung erhalten. Daher:

--Normieren von  $c$ :

$c'=c \circ \gamma$ ,  $\gamma: I' \rightarrow I$  mit  $\| \dot{c}' \| = 1$  in  $I'$ . Nach (2.3) gilt dann

$$\dot{\gamma}(t_0') = 1 / \| \dot{c}(\gamma(t_0')) \| \text{ bei } \gamma(t_0') = t_0. (*)$$

Wegen der Regularität von  $c$  in  $I$  ist  $\| \dot{c}(\gamma(t_0')) \| \neq 0$ .

--Normieren von  $\hat{c}$ :

$\hat{c}'=\hat{c} \circ \hat{\gamma}$ ,  $\hat{\gamma}: \hat{I}' \rightarrow \hat{I}$  mit  $\| (\hat{c}')' \| = 1$  in  $\hat{I}'$ . Wieder gilt

$$\hat{\gamma}'(\hat{t}_0') = 1/\|\hat{c}'(\hat{\gamma}(\hat{t}_0'))\|. (**)$$

Produkt- und Kettenregel liefern:

$$c^{(j)}(t_0') = \dot{c}(t_0) \cdot \gamma^{(j)}(t_0') + \dots + c^{(j)}(t_0) \cdot (\dot{\gamma}(t_0'))^j.$$

Analoges folgt für  $\hat{c}'(\hat{t}_0')$ .

Nach Voraussetzung sind die Vektorbestandteile in diesen Linearkombinationen gleich. Es sind aber auch die Skalare gleich, da:

in den Ausdrücken für  $\dot{\gamma}(t_0')$  und  $\hat{\gamma}'(\hat{t}_0')$  treten die nach Voraussetzung identischen Vektoren  $\dot{c}(t_0)$  und  $\hat{c}'(\hat{t}_0)$  auf, sodaß zuerst

$$\dot{\gamma}(t_0') = \hat{\gamma}'(\hat{t}_0')$$

folgt. Auch gilt

$$\ddot{\gamma}(t_0') = \hat{\gamma}''(\hat{t}_0'),$$

da die beiden Ausdrücke aufgrund der Kettenregel, die auf (\*) und (\*\*) anzuwenden ist, dieselbe Bauart haben und, da sie in allen Argumenten übereinstimmen, sogar gleich sind.

Man gelangt so bis zur Gleichheit  $\gamma^{(j)}(t_0') = \hat{\gamma}^{(j)}(\hat{t}_0')$ .  $\square$

**Bemerkung:** Die im Beweis zu Satz 2.7.1 durchgeführten Normierungen sind auf zwei Arten durchführbar: entweder ist  $\gamma$  *gleichsinnig* oder *gegensinnig*.

Daher kann u.U. analytische Übereinstimmung nicht sofort erkannt werden:

die betreffenden Ableitungsvektoren haben vielleicht entgegengesetztes Vorzeichen.

Daher ist eventuell die "Umpolung" eines Weges, etwa durch  $\gamma$  mit  $t \rightarrow -t$  erforderlich.

**Satz 2.7.2:**  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei aus  $C^2(I)$ ;  $c(t_0) =: p$  sei kein Wendepunkt von  $c(I)$ .

Dann existiert genau ein  $c(I)$  in  $p$  oskulierender Kreis.

Wir nennen diesen Kreis **Krümmungskreis** oder **Schmiegekreis**.

**Beweis:** Nach Voraussetzung ist  $p = c(t_0)$  kein Wendepunkt. Dann ist nach Definition l.u.  $\{\dot{c}(t_0), \ddot{c}(t_0)\}$  und damit  $\dot{c}(t_0) \neq 0$ .  $p$  ist also ein *regulärer* Punkt von  $c(I)$ .

Nach dem Hauptsatz der lokalen Kurventheorie 2.1.1 ist  $c$  *lokal*, d.h. in einem Intervall  $I_0$  um  $t_0$  *injektiv* und *regulär*. OBdA sei  $I$  dieses Intervall  $I_0$ .

Es gelte also:  $c$  ist in  $I$  *injektiv* und *regulär*, sodaß wir obdA  $c$  normiert voraussetzen dürfen:  $\|\dot{c}\| = 1$  in  $I$ .

Nun zur *Festlegung des Krümmungskreises*  $k$ :

Wir wählen  $a, b \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|a\| = \|b\| = 1$  und  $a \cdot b = 0$ , Mittelpunkt  $m \in \mathbb{R}^n$  und Radius  $r > 0$ . Diese vier den Kreis  $k$  festlegenden Bestimmungsstücke sind zu ermitteln. Dabei beachte man, daß  $c(I)$  orientiert ist.

Oskulation zwischen  $c(I)$  und  $k$  bedeutet *zweifache* Berührung. Nach Satz 2.7.1 brauchen wir nur die *analytische Übereinstimmung zweiter Ordnung* der  $c(I)$  und  $k$  beschreibenden normierten Wege  $c$  und  $\hat{c}$  fordern.

$c$  ist schon normiert.

Wir setzen

$$\hat{c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \hat{t} \mapsto \hat{c}(\hat{t}) := m + r \cdot \cos(\hat{t}/r) \cdot a + r \cdot \sin(\hat{t}/r) \cdot b$$

und erkennen sofort  $\|\hat{c}'\| = 1$  in  $\mathbb{R}$ , also die Normiertheit von  $\hat{c}$ .

Ferner gilt

$$\hat{c}(0) = p = c(t_0).$$

Es ist also  $\hat{c}(0) = {}_{(2)}c(t_0)$  zu fordern. Das bedeutet:

$$(1) \hat{c}(0) = m + r \cdot a = c(t_0)$$

$$(2) \hat{c}'(0) = (-\sin(\hat{t}/r) \cdot a + \cos(\hat{t}/r) \cdot b)(0) = b = \dot{c}(t_0)$$

$$(3) \hat{c}''(0) = (-1/r \cdot \cos(\hat{t}/r) \cdot a - 1/r \cdot \sin(\hat{t}/r) \cdot b)(0) = -1/r \cdot a = \ddot{c}(t_0).$$

Aus (3) folgt wegen  $\|a\| = 1$

$$r = \|\ddot{c}(t_0)\|^{-1}.$$

Damit folgt wieder aus (3)

$$a = -\ddot{c}(t_0) / \|\ddot{c}(t_0)\|.$$

Aus (1) ergibt sich

$$m = c(t_0) - r \cdot a = c(t_0) + \ddot{c}(t_0) / \|\ddot{c}(t_0)\|^2.$$

(2) lautet

$$b = \dot{c}(t_0).$$

Damit ist  $\hat{c}$ , also  $k$  eindeutig festgelegt.  $\square$

Die Existenz von  $k$  ist gesichert. Es folgt nun eine kurze

#### Geometrische Diskussion von $k$ :

Aus der Gleichung von  $k$  ergibt sich sofort

$$k \subset c(t_0) + S^2(t_0);$$

der Krümmungskreis liegt also in der Schmiegebene.

#### Fall $n \geq 3$ :

Formel (2.5.4) liefert  $\kappa_1 = \|\ddot{c}(t_0)\| > 0$ , also  $r = 1/\kappa_1$ .

#### Fall $n = 2$ :

(2.5.6) liefert  $\kappa(t_0) = \det(\dot{c}(t_0), \ddot{c}(t_0))$ .

Wegen  $\dot{c}(t_0) \perp \ddot{c}(t_0)$  spannen diese beiden Vektoren ein Rechteck auf, und  $|\det(\dot{c}(t_0), \ddot{c}(t_0))| = \|\ddot{c}(t_0)\|$  ist eine Maßzahl für die Fläche dieses Rechtecks.

Es ist also  $|\kappa| = \|\ddot{c}(t_0)\|$  und damit  $r = 1/|\kappa|$ .

Wir wollen nun eine Berührung zwischen einer Kurve  $c(I) \subset \mathbb{R}^n$  und einer Punktmenge  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  erklären. Dies geschieht in

**Def. 2.7.4:**  $M$  sei eine Punktmenge im  $\mathbb{R}^n$ , welche Kurven enthält.

$c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $c \in C^r(I)$  und  $r \geq 1$  bestimme die Kurve  $c(I)$  und es sei  $c(t_0) \in M$ .

$c(I)$  und  $M$  **berühren einander in  $c(t_0)$  von  $k$ -ter Ordnung** genau dann, wenn es in  $M$

eine "Ersatzkurve"  $\hat{c}(\hat{I})$  gibt, die  $c(I)$  in  $c(t_0)$  von  $k$ -ter Ordnung berührt.

**Bemerkung:**

(a) Die Berührung zwischen Punktmenge und Kurve ist ein geometrischer Begriff, da die Berührung von Kurven geometrisch ist.

(b) Jede  $C^r$ -Kurve  $c(I)$  berührt ihren  $k$ -Schmiegraum von  $k$ -ter Ordnung.

Bew.: In  $S^k$  liegt die  $k$ -te Näherungskurve  $\hat{c}(\hat{I})$ , die  $c(I)$  von  $k$ -ter Ordnung berührt.  $\square$

**Satz 2.7.3:**  $A^m$  sei ein  $m$ -dimensionaler affiner Raum und  $c:I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei aus  $C^r(I)$  bei  $r \geq 1$ . Ferner sei  $c(t_0) \in A^m$ .

Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(1)  $c(I)$  berührt  $A^m$  in  $c(t_0)$  von  $k$ -ter Ordnung ( $1 \leq k \leq r$ ).

(2)  $c(t_0) + S^k(t_0) \subset A^m$ .

Beweis: (a) (1)  $\implies$  (2):

Nach Def.2.7.4 existiert in  $A^m$  eine Ersatzkurve  $\hat{c}(\hat{I})$ , die  $c(I)$  in  $\hat{c}(\hat{t}_0) = c(t_0)$  von  $k$ -ter Ordnung berührt. Dann ist

$$c(t_0) + S^k(t_0) = \hat{c}(\hat{t}_0) + \hat{S}^k(\hat{t}_0). (*)$$

Wegen  $\hat{c}(\hat{I}) \subset A^m$  ist

$$\hat{c}(\hat{t}_0) + \hat{S}^k(\hat{t}_0) \subset A^m,$$

woraus mit (\*) die Behauptung folgt.

(b) (2)  $\implies$  (1):

In  $c(t_0) + S^k(t_0)$  und damit in  $A^m$  liegt die  $k$ -te Näherungskurve von  $c(I)$ .  $\square$

**Satz 2.7.4:** Für einen Weg  $c$  sind die beiden Aussagen äquivalent:

(1)  $\dim S^k(t_0) = \dim S^{k+1}(t_0)$ .

(2) Der  $k$ -Schmiegraum  $c(t_0) + S^k(t_0)$  wird von  $c(I)$  in  $c(t_0)$  von  $(k+1)$ -ter Ordnung berührt.

Beweis: Sei  $c(t_0) + S^k(t_0)$  der  $A^m$  aus Satz 2.7.3.

Nach Satz 2.7.3 ist Berührung  $(k+1)$ -ter Ordnung äquivalent mit

$$c(t_0) + S^{k+1}(t_0) \subset c(t_0) + S^k(t_0).$$

Da aber stets  $c(t_0) + S^k(t_0) \subset c(t_0) + S^{k+1}(t_0)$  gilt, folgt die Gleichheit der Schmiegräume und damit der Schmiegräume. Genau dann ist  $\dim S^k(t_0) = \dim S^{k+1}(t_0)$ .  $\square$

**Bemerkungen:**

(a)  $k=1$ :  $\dim S^1(t_0) = \dim S^2(t_0) = 1 \iff c(t_0)$  ist ein Wendepunkt.

Nach Satz 2.7.4 oskuliert  $c(I)$  die Tangente (=1-Schmiegraum) in  $c(t_0)$ .

(b)  $k=n-1$ :  $\dim S^{n-1}(t_0) = \dim S^n(t_0) = n-1$ . Das zweite Gleichheitszeichen ist eine Forderung. Wegen  $\dim S^{n-1}(t_0) = n-1$  existiert eine Schmieghyperebene in dem Henkelpunkt  $c(t_0)$ .

Nach Satz 2.7.4 folgt: In einem Henkelpunkt berührt die Kurve die Schmieghyperebene von  $n$ -ter Ordnung.

Sonderfall:

$n=3$ : Hier ist die Schmieghyperebene die Schmiegeebene.

Nach Satz 2.7.3 oskuliert  $c(I)$  die Schmiegeebene; ist  $c(t_0)$  ein Henkelpunkt, so hyperoskuliert  $c(I)$  die Schmiegeebene.



**III**

**FLÄCHENTHEORIE**



### 3.1 Flächenbegriff und Flächenkurven

Gegeben sei der n-dimensionale euklidische Raum  $R^n$ :

Ein Punkt  $p$  besitzt dann das Koordinaten-n-tupel  $(x^1, \dots, x^n) =: (x^\alpha)$  bei  $\alpha=1, \dots, n$  ( $\alpha$  als Index bei n-dimensionalen Räumen).

Ferner sei  $R^m$  ein m-dimensionaler euklidischer Raum und  $U \subset R^m$  eine offene Teilmenge von  $R^m$ . Für einen Punkt  $a \in U$  schreiben wir  $a = (u^1, \dots, u^m) =: (u^j)$  bei  $j=1, \dots, m$  ( $j$  als Index bei m-dimensionalen Räumen).  $f: U \rightarrow R^n$  bezeichne eine stets globale Abbildung von  $U$  in den  $R^n$ ; diese leistet:

$$a = (u^1, \dots, u^m) \mapsto f(u^1, \dots, u^m) =: (f^1(u^1, \dots, u^m), \dots, f^n(u^1, \dots, u^m))$$

mit den n **Koordinatenfunktionen**

$$f^\alpha: U \rightarrow R \text{ mit } (u^1, \dots, u^m) \mapsto f^\alpha(u^1, \dots, u^m).$$

**Def. 3.1.1:** Es sei  $f: U \subset R^m \rightarrow R^n$  eine r-mal stetig differenzierbare Abbildung bei  $r \geq 1$ . Dann heißt  $f$  ein  **$C^r(U)$ -m-Weg in den  $R^n$** ;  $f(U) \subset R^n$  heißt  **$C^r(U)$ -m-Fläche im  $R^n$** .

Ist speziell  $m=n-1$ , so heißt  $f$  ein **Hyperflächenweg** und  $f(U)$  eine **Hyperfläche**.

**Bem. 3.1.1:**

Ist  $f$  r-mal stetig differenzierbar, so existieren definitionsgemäß alle partiellen Ableitungen bis zur r-ten Ordnung und diese sind stetig.

#### **ZWISCHENBEMERKUNG 10:**

Es sei  $f: U \rightarrow R^n$  stetig differenzierbar und  $a = (u^1, \dots, u^m) \in U$ .

Der an der Stelle  $a$  berechnete Ausdruck

$$\partial f / \partial u \hat{=} (\partial f^1 / \partial u^j, \dots, \partial f^n / \partial u^j)$$

heißt **partielle Ableitung von  $f$  nach  $u^j$  an der Stelle  $a$** .

Die zugehörigen n Koordinatenfunktionen

$$\partial f^\alpha / \partial u^j: U \rightarrow R$$

sind Funktionen von  $U$  in  $R$  und wegen  $r \geq 1$  sicher **stetig**.

Zur Vereinfachung verwenden wir die folgenden Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \partial f / \partial u^j &:= f_{,j} \\ \partial f^\alpha / \partial u^j &:= f_{,j}^\alpha. \end{aligned}$$

Damit gilt:  $f_{,j}(a) = (f_{,j}^1, \dots, f_{,j}^n)(a)$ .

Die Matrix

$$J_f(a) := \begin{bmatrix} f_{,1}^1(a) & \dots & f_{,1}^n(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{,m}^1(a) & \dots & f_{,m}^n(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{,1}(a) \\ \dots \\ f_{,m}(a) \end{bmatrix}$$

heißt **JACOBI-Matrix von  $f$  in  $a$** .

Wir schreiben auch kurz:  $J_f(a) = (f_{,j}^\alpha)$ .

In den Zeilen dieser Matrix stehen jeweils die Ableitungsvektoren  $f_{,j}$  von  $f$ .

In  $f_{,j}^\alpha$  gibt  $j$  den Zeilenindex,  $\alpha$  den Spaltenindex an.

Da wir stets  $m < n$  voraussetzen, ist die  $m \times n$ -Matrix  $J_f(a)$  sicher nicht quadratisch. Daher gilt für den Rang von  $J_f(a)$ :

$$0 \leq \text{rg} J_f(a) \leq m.$$

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

**Def. 3.1.2:** (1)  $a \in U$  heißt ein *regulärer Punkt des Weges*  $f : \Leftrightarrow \text{rg} J_f(a) = m$ .

Genau dann heißt  $f(a) \in f(U)$  ein *regulärer Punkt der Fläche*  $f(U)$ .

(2)  $f$  heißt eine  $C^r(U)$ -*Immersion*, wenn  $\text{rg} J_f(a) = m \quad \forall a \in U$  gilt.

(3) Ist  $f$  injektiv, so heißt  $f(U)$  eine *einfache Fläche*.

(4) Ist  $U$  zusammenhängend, dann heißt  $f(U)$  eine *zusammenhängende Fläche*.

**Bem. 3.1.2:**

(a) Als Sonderfall reproduziert sich hier die Kurventheorie:

--  $m=1, U=I; u^1=:t;$

--  $c(t)=(c^1(t), \dots, c^n(t));$

--  $J_c(t_0)=(\dot{c}^1(t_0), \dots, \dot{c}^n(t_0))$  ist einzeilig wegen  $m=1;$

--  $t_0$  ist regulär  $\Leftrightarrow \text{rg} J_c(t_0)=1 \Leftrightarrow \dot{c}(t_0) \neq 0$ .

(b)  $a \in U$  heißt regulär, wenn  $\text{rg} J_f(a) = m$ . Genau dann ist

$$\text{l.u.}\{f_1(a), \dots, f_m(a)\}.$$

Nach ZB 5 ist genau dann

$$\Gamma(f_1(a), \dots, f_m(a)) > 0.$$

Reguläre Punkte  $a$  sind aber auch durch

$$f_1(a) \times f_2(a) \times \dots \times f_m(a) \neq 0$$

kennzeichenbar.

**Beispiel: Drehfläche im  $\mathbb{R}^3$ .**

Hier ist  $m=2, n=3$ .

Wir bestimmen nun den Drehflächenweg

$$f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Zu diesem Zweck wählen wir eine *Meridiankurve* in der  $x^1x^3$ -Ebene, welche durch den Weg

$$c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

mit  $c^1(t) =: g(t), c^2(t) =: 0, c^3(t) =: h(t)$  erfaßt werde.

Die Drehfläche entstehe durch Rotation der Meridiankurve  $c(I)$  um die  $x^3$ -Achse des kartesischen Koordinatensystems.

Bezeichnen wir den Drehwinkel mit  $u^2$  und setzen wir  $u^1 =: t$ , so gilt für  $f$ :

$$f(u^1, u^2) = (g(u^1) \cdot \cos u^2, g(u^1) \cdot \sin u^2, h(u^1)).$$

Insbesondere gilt hier  $U = I \times \mathbb{R}$ .

Es folgt nun eine Regularitätsuntersuchung von  $f$ :

Wir berechnen

$$\begin{aligned} f_{,1} &= (\dot{g}(u^1) \cdot \cos u^2, \dot{g}(u^1) \cdot \sin u^2, \dot{h}(u^1)), \\ f_{,2} &= (-g(u^1) \cdot \sin u^2, g(u^1) \cdot \cos u^2, 0). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$f_{,1} \times f_{,2} = (-\dot{g}h \cdot \cos u^2, -\dot{g}h \cdot \sin u^2, g\dot{g}).$$

Nun ist  $a = (u^1, u^2) \in U$  genau dann regulär, wenn  $f_{,1}(a) \times f_{,2}(a) \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ , ansonsten *singulär*. Daher zwei Fälle:

(a)  $g(u^1) = 0$ : Hier ist  $f_{,1} \times f_{,2} = 0$ , also  $a$  singulär.  $f(a)$  liegt auf der Drehachse der Drehfläche.

(b)  $g(u^1) \neq 0$  und  $\dot{g}(u^1) = 0$ : Soll  $a$  singulär sein, so folgt notwendig  $h(u^1) = 0$ .  $f(a)$  ist also ein singulärer Punkt des Meridians  $c(I)$ .

Wir haben also zwei Typen von singulären Stellen:

- (1) Punkte der Drehachse (durch  $g=0$  gekennzeichnet),
- (2) Singuläre Punkte der Meridiankurve (durch  $\dot{c}=0$  gekennzeichnet).

Beispiele: Ad 1)

(a) P heißt *konischer Knoten*.

(b) Drehkegel:

(c) Kugel:

Dem "Nordpol" sieht man  
seine Singularität nicht an.

(d) Hier ist  $c(I)$  die NEILLSche Parabel  
 $(t^2, 0, t^3)$ : (auch ad 2))

Ad 2) (a) Meridiankurve  $(a+t^2, 0, t^3)$ ,  $a \neq 0$ :  
Man spricht hier von einem  
"Singulären Breitenkreis".

(b) Drehzylinder mit Radius  $a$ :  
Meridiankurve  $(a, 0, t^3)$ .

Ergebnis: Eine Singularität von  $f$  sieht man der Trägermenge  $f(U)$  nicht  
notwendig an.

Bem. 3.1.3:

(a) Der Begriff "m-Fläche" ist keine Eigenschaft der Trägermenge:

Beispiel:  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  mit  $(u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, 0, 0)$  beschreibt nach Def.3.1.1 die  
2-Fläche  $f(U)$  im  $\mathbb{R}^4$ , jedoch  $g: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  mit  $(u^1, u^2, u^3) \mapsto (u^1, u^2, 0, 0)$  ist ein 3-Weg,  
der die 3-Fläche  $g(U) \subset \mathbb{R}^4$  erklärt. Die Trägermengen  $f(U)$  und  $g(U)$  stimmen  
aber überein.

(b) Auch ist der Begriff "Differentiationsklasse  $r$ " keine Eigenschaft der  
Trägermenge:

Beispiel: Wir wählen zwei Zylinder,  
beschrieben durch

$$f(u^1, u^2) = (c^1(u^1), c^2(u^1), u^2)$$

mit den Leitkurven  $c(I)$  aus den Beispielen 1 und 2 aus Bemerkung (b), Seite 28: Die zugehörigen Wege  $c$  sind aus  $C^1$  bzw.  $C^\infty$ . Damit ist  $f \in C^1$  bzw.  $C^\infty$ .

(c) Wir erhalten allgemeine Beispiele für Flächen, indem wir allgemeine Kurvenbeispiele mittels Zylindern zu Flächenbeispielen ausbauen.

**ZWISCHENBEMERKUNG 11:**

Es seien  $U, U'$  zwei offene Gebiete des  $R^m$  und  $\varphi: U' \rightarrow U$  eine Abbildung mit den Eigenschaften

- (1)  $\varphi$  ist Bijektion,
- (2)  $\varphi \in C^r(U')$ ,  $r \geq 1$ ,
- (3)  $\varphi^{-1} \in C^r(U)$ .

$\varphi$  heißt dann ein  $C^r(U')$ -Diffeomorphismus, kurz:  $C^r(U')$ -DM.

Was leistet  $\varphi$ :

$$a' = (u^1, \dots, u^m) \in U' \rightarrow \varphi(a') = (\varphi^1(u^1, \dots, u^m), \dots, \varphi^m(u^1, \dots, u^m)) =: (u^1, \dots, u^m) = a \in U.$$

Die Abbildungen

$$\varphi^j: U' \rightarrow R, \quad j=1, \dots, m$$

sind die Koordinatenfunktionen von  $\varphi$ .

Nach Obigem gilt also:

$$u^j = \varphi^j(u^1, \dots, u^m)$$

und wir schreiben kurz:

$$u^j = u^j(u^1, \dots, u^m) =: u^j(u^j).$$

Wir setzen  $\partial u^j / \partial u^k =: u^j_{,k}$ . Damit folgt

$$J_\varphi(a') = \begin{bmatrix} u^1_{,1} & \dots & u^m_{,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ u^1_{,m} & \dots & u^m_{,m} \end{bmatrix}.$$

Wegen (1) existiert  $\varphi^{-1}: U \rightarrow U'$  mit

$$a = (u^1, \dots, u^m) \in U \rightarrow (u^1(u^1, \dots, u^m), \dots, u^m(u^1, \dots, u^m)) = a' \in U',$$

kurz:  $u^j = u^j(u^1, \dots, u^m) = u^j(u^j)$ .

In analoger Weise setzen wir hier  $\partial u^j / \partial u^k =: u^j_{,k}$ .

Ferner ist

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}_{U'}, \quad U' \rightarrow U'.$$

Nun gilt:

$$\det J_\varphi(a') \neq 0 \text{ für alle } a' \in U'.$$

Beweis: In  $U'$  gilt für  $a' = (u^1, \dots, u^m)$  die Identität

$$u^j = u^j(u^1(u^1, \dots, u^m), \dots, u^m(u^1, \dots, u^m)).$$

Wir differenzieren beide Seiten der Gleichung partiell nach  $u^k$ , also:

linke Seite:  $(\partial u^j / \partial u^k)(a') = \delta_{k,j}$ ;

rechte Seite:  $(\partial u^j / \partial u^k)(a) \cdot (\partial u^k / \partial u^k)(a')$ . ( $k$  als Summationsindex)

Nun ist der Ausdruck  $(\partial u^j / \partial u^k)(a)$  bei festem  $j$  eine Spalte von  $J_{(\varphi^{-1})}(a)$

und  $(\partial u^k / \partial u^k)(a')$  bei festem  $k$  eine Zeile der Matrix  $J_\varphi(a')$ . Damit folgt:

$$J_{(\varphi^{-1})}(a) \cdot J_\varphi(a') = (\delta_{k,j}).$$

Dann gilt für die Determinanten

$$\det(J_{(\varphi^{-1})}(a)) \cdot \det(J_\varphi(a')) = 1. \quad \square$$

**Bem.:** Damit können die Forderungen (1), (2) und (3) aus ZB 11 abgeschwächt werden zu:

(1')  $\varphi$  ist Bijektion,

(2')  $\varphi \in C^r(U')$  mit  $r \geq 1$ ,

(3')  $\det J_\varphi(a') \neq 0 \quad \forall a' \in U'$ .

Dabei ist zu beachten, daß "Bijektion" im Gegensatz zu ZB1 hier nicht zu "global, surjektiv" abgeschwächt werden kann.

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

**Def. 3.1.3:** Es seien  $f:U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^r(U)$ - $m$ -Weg und  $f':U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^r(U')$ - $m$ -Weg.

Wir nennen  $f$  und  $f'$  **äquivalent**, wenn es einen  $C^r(U')$ -DM  $\varphi:U' \rightarrow U$  gibt, sodaß  $f' = f \circ \varphi$  ist.

$\varphi$  heißt dann ein **Parameterwechsel**.

**Bem. 3.1.4:**

(a) Damit wird auf der Menge der  $C^r$ - $m$ -Wege eine Äquivalenzrelation definiert.

(b) Man könnte eine Fläche auch als Äquivalenzklasse eines Weges  $f$  definieren. Wir tun das nicht. (Vgl. Kurventheorie)

(c) Für den Parameterwechsel  $\varphi:U' \rightarrow U$  ist nach ZB11  $\det J_\varphi(a') \neq 0 \quad \forall a' \in U'$ .  
Ist  $U$  ein zusammenhängendes Gebiet, so kann sich wegen der Stetigkeit von  $\det J_\varphi(a)$  das Vorzeichen der Determinante nicht ändern und es ist sinnvoll, zwischen **gleichsinnigen** ( $\det > 0$ ) und **gegensinnigen** ( $\det < 0$ ) Parameterwechseln auf der zusammenhängenden Fläche  $f(U)$  zu unterscheiden.

(d) Gegeben seien der Weg  $f:U \rightarrow \mathbb{R}^n$  und die Bewegung  $\beta:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  
Der Weg  $\bar{f} = \beta \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **zu  $f$  bewegungsgleich**;  $f(U)$  und  $\bar{f}(U)$  heißen dann **bewegungsgleiche Flächen**.

**Def. 3.1.4:** Eine Aussage über einen Weg  $f$  heißt

(a) **parameterinvariant**, wenn sie auch jedem zu  $f$  äquivalenten Weg  $f' = f \circ \varphi$  zukommt;

(b) **bewegungsinvariant**, wenn sie auch jedem zu  $f$  bewegungsgleichen Weg  $\bar{f} = \beta \circ f$  zukommt;

(c) **geometrisch**, wenn sie parameter- und bewegungsinvariant ist.

(d) Es sei  $f(U)$  eine zusammenhängende Fläche.

Eine geometrische Aussage über die Fläche  $f(U)$  heißt eine **geometrische Aussage über die orientierte Fläche**, wenn sie invariant gegenüber gleichsinnigen Parameterwechseln ist.

### Beispiele für geometrische Aussagen:

(a) m-Fläche;

(b) Differentiationsklasse r: da die Zusammensetzung mit einem  $C^r$ -DM an der Differentiationsklasse nichts ändert.

(c) Einfache Fläche (f injektiv): da  $\varphi$  bzw. der zu  $\beta$  gehörige Automorphismus  $l$  bijektiv ist.

(d) Regularität der Fläche:

Beweis:  $f:U \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei in  $a \in U$  regulär  $\Leftrightarrow \{f_{,1}(a), \dots, f_{,m}(a)\}$  l.u.

--Bewegungsinvarianz:

Sei  $\bar{f} = \beta \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $\beta = (s, l)$ ) ein zu  $f$  bewegungsgleicher Weg mit den  $n$  Koordinatenfunktionen

$\bar{f}^\alpha(u^1, \dots, u^m) = l_{, \gamma}^\alpha \cdot f_{, \gamma}(u^1, \dots, u^m) + s^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ ;  $\gamma$  als Summationsindex.

Daraus folgt (Ableiten nach  $u^j$ )

$$\bar{f}_{, j}^\alpha = l_{, \gamma}^\alpha \cdot f_{, j, \gamma}$$

Da  $l$  ein Automorphismus ist, erhält er Lineare Unabhängigkeit; es ist also l.u.  $\{\bar{f}_{,1}(a), \dots, \bar{f}_{,m}(a)\}$ . Damit ist  $a$  auch für  $\bar{f}$  regulär.

--Parameterinvarianz:

Sei  $f' = f \circ \varphi: U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein zu  $f$  äquivalenter Weg. Damit ist

$$u^j = u^j(u^{j'})$$

Nach ZB11 ist

$$\det((\partial u^j / \partial u^{j'})(a')) \neq 0. (*)$$

Ferner ist (Kettenregel):

$$(\partial f' / \partial u^{j'})(a') = (\partial f / \partial u^j)(a) \cdot (\partial u^j / \partial u^{j'})(a')$$

also in anderer Schreibweise

$$f'_{, j'}(a') = f_{, j}(a) \cdot u^{j, j'}(a')$$

Daraus folgt mit (\*) die L.U. von  $\{f'_{, j'}(a') \mid j' = 1, \dots, m\}$ .

Damit ist Regularität ein geometrischer Begriff für die Fläche, nicht aber für die bloße Trägermenge (hier ist  $f$  unbekannt).  $\square$

### Flächenkurven

Wieder sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^r(U)$ - $m$ -Weg. Ferner sei  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein  $C^s(I)$ -Weg derart, daß  $c(I) \subset U$  gilt. Dann ist also  $c(I)$  eine *Kurve im Parameterbereich*  $U$ .

Es heißt  $f \circ c(I)$  eine **Flächenkurve**,  $f \circ c$  ein **Flächenweg**.

Was passiert nun genau?

Sei  $t_0 \in I$ . Dann ist  $c(t_0) =: a \in U$ . Nun wird  $a$

$f$  unterworfen, d.h. es ist

$$f(a) = f(c(t_0)) = f \circ c(t_0) \in f(U) \subset \mathbb{R}^n.$$

### Eigenschaften:

(1) Aus  $c \in C^s(I)$  und  $f \in C^r(U)$  folgt  $f \circ c \in C^t(I)$  mit  $t := \min\{r, s\}$ .

(2)  $t_0 \in I$  ist regulär für  $f \circ c \Leftrightarrow t_0$  ist regulär für  $c$  und  $c(t_0) = a$  regulär für  $f$ .

Beweis: Es ist nach der Kettenregel für partielles Differenzieren

$(f \circ c)'(t_0) = (\partial f / \partial u^j)(a) \cdot (dc^j / dt)(t_0) \dots$  Summation über  $j$ , also

$$(f \circ c)'(t_0) = f_{, j}(a) \cdot \dot{c}^j(t_0). (*) \square$$

Wir definieren spezielle Flächenkurven in

**Def. 3.1.5:** Die Abbildung

$$f_{o_{(j)}c}: I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei  $o_{(j)}c: I \rightarrow U$ ,  $j=1, \dots, m$ , durch

$$o_{(j)}c(t_0) := (a^1, \dots, a^{j-1}, a^j + t_0, a^{j+1}, \dots, a^m)$$

bei festem  $a = (a^1, \dots, a^m)$  definiert sei, heißt *j-ter Parameterweg*, die Punktmenge  $f_{o_{(j)}c}(I)$  heißt *j-te Parameterkurve*.

**Folgerung:** OBdA sei  $t_0=0$ . Für den Ableitungsvektor  $(f_{o_{(j)}c})'(0)$  gilt als Sonderfall von (\*):

$$(f_{o_{(j)}c})'(0) = (\partial f / \partial u^k)_{o_{(j)}c(0)} \cdot o_{(j)}\dot{c}(0). \quad (k \text{ als Summationsindex})$$

Wegen  $o_{(j)}\dot{c}(0) = \delta_j^k$  und  $o_{(j)}c(0) = a$  ist

$$(f_{o_{(j)}c})'(0) = (\partial f / \partial u^j)(a) = f_{,j}(a).$$

Wir erkennen:

$a \in U$  ist regulär für  $f \iff$  die  $m$  Parameterkurven haben in  $f(a) \in f(U)$  linear unabhängige Ableitungsvektoren.

**Def. 3.1.6:**  $U \subset \mathbb{R}^m$  sei ein offenes Gebiet und  $z: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  ( $n-m \geq 1$ ) eine Abbildung mit  $z \in C^r(U)$  (also die  $n-m$  Koordinatenfunktionen  $z^k \in C^r(U)$ ).

Dann heißt  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$(u^1, \dots, u^m) \in U \mapsto (u^1, \dots, u^m, z^1(u^1, \dots, u^m), \dots, z^{n-m}(u^1, \dots, u^m)) \in \mathbb{R}^n$$

ein *EULER-Weg (MONGE)* und die Punktmenge  $f(U) \subset \mathbb{R}^n$  *Graph der Funktion z*.

**Beispiel:**  $n=3, m=2$ :

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $(u^1, u^2) \mapsto (x^1, x^2, x^3) = (u^1, u^2, z(u^1, u^2))$ ; man könnte also schreiben:

$$f^1(u^1, u^2) = u^1; \quad f^2(u^1, u^2) = u^2; \quad f^3(u^1, u^2) = z(u^1, u^2).$$

**Satz 3.1.1:** Der Graph  $f(U)$  einer  $C^r(U)$ -Funktion  $z: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  (f...Euler-Weg) ist eine einfache reguläre  $C^r(U)$ - $m$ -Fläche.

**Beweis:**  $f$  ist trivialerweise injektiv und  $f(U)$  daher definitionsgemäß einfach. Ferner ist  $f \in C^r$  wegen  $z \in C^r$ . Bleibt zu zeigen:  $f$  ist regulär.

Dazu müssen die Ableitungsvektoren

$$f_{,j} = (\delta_j^1, \dots, \delta_j^m, z_{,j}^1, \dots, z_{,j}^{n-m}), \quad j=1, \dots, m$$

mit  $z_{,j}^\Sigma := \partial z^\Sigma / \partial u^j$  untersucht werden. Nun ist aber

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & z_{,1}^1 & \dots & z_{,1}^{n-m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & z_{,m}^1 & \dots & z_{,m}^{n-m} \end{bmatrix} (a)$$

Die Matrix hat bereits Stufenform, daher ist  $\text{rg} J_f(a) = \text{Zeilenanzahl} = m$ .

Genau dann ist aber  $a$  regulär für  $f$ .  $\square$

#### ZWISCHENBEMERKUNG 12:

Es sei  $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  aus  $C^r(U)$  mit  $r \geq 1$  eine Abbildung aus dem offenen Gebiet  $U \subset \mathbb{R}^m$  in den  $\mathbb{R}^m$ . Ferner sei  $a \in U$  regulär für  $\psi$ , d.h. für die  $m \times m$ -Matrix  $J_\psi(a)$  gilt:  $\det J_\psi(a) \neq 0$ .

Dann gilt ("Hauptsatz über Inverse Funktionen"):

Es gibt eine Umgebung  $U_0 \subset U \subset \mathbb{R}^m$  mit  $a \in U_0$  derart daß

$$\psi|_{U_0}: U_0 \rightarrow \psi(U_0) =: U_0'$$

ein  $C^r(U_0)$ -DM ist.

Insbesondere ist  $\psi|_{U_0}$  injektiv, daher umkehrbar. Für die Umkehrabbildung  $\varphi$  gilt:

$$\varphi := (\psi|_{U_0})^{-1}: U_0' \rightarrow U_0$$

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

**Satz 3.1.2: Hauptsatz der lokalen Flächentheorie**

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei ein  $C^r(U)$ - $m$ -Weg mit  $r \geq 1$ .  $a \in U$  sei ein regulärer Punkt von  $f$ .

Dann gibt es eine offene Umgebung  $U_0 \subset U$  von  $a$  derart, daß  $f|_{U_0}$  eine injektive Immersion ist.

Beweis:  $a$  ist regulär für  $f \iff \text{rg} J_f(a) = m$ .

Dann gibt es in der Matrix  $J_f(a)$   $m$  l.u. Spalten; oBdA seien dies die ersten  $m$  Spalten, d.h. es ist

$$\text{rg} \begin{bmatrix} f_{,1}^1 & \dots & f_{,1}^m \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{,m}^1 & \dots & f_{,m}^m \end{bmatrix} (a) = m. \quad (*)$$

Wir zersplittern nun die Abbildung  $f$  wie folgt:

$$f = (\psi, \hat{f}): U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \text{ mit}$$

--  $(u^1, \dots, u^m) \in U \rightarrow \psi(u^1, \dots, u^m) := (f^1(u^1, \dots, u^m), \dots, f^m(u^1, \dots, u^m))$ , d.h.  $\psi$  wird durch die  $m$  ersten Koordinatenfunktionen von  $f$  festgelegt.

Für  $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist  $a$  wegen (\*) regulär.

--  $(u^1, \dots, u^m) \in U \rightarrow \hat{f}(u^1, \dots, u^m) := (f^{m+1}(u^1, \dots, u^m), \dots, f^n(u^1, \dots, u^m))$ , d.h.  $\hat{f}$  wird durch die  $n-m$  letzten Koordinatenfunktionen von  $f$  festgelegt.

Da  $\psi$  in  $a$  regulär ist, gibt es nach ZB12 ein offenes Gebiet  $U_0 \subset U \subset \mathbb{R}^m$  mit  $a \in U_0$  derart, daß  $\psi|_{U_0}: U_0 \rightarrow \psi(U_0) =: U_0'$  ein  $C^r(U_0)$ -DM ist.

Dann gibt es die eindeutig bestimmte Umkehrabbildung  $\varphi$  von  $\psi$  mit  $\varphi := (\psi|_{U_0})^{-1}: U_0' \rightarrow U_0$ .

Wir verwenden nun  $\varphi: U_0' \rightarrow U_0$  als Parameterwechsel und erhalten den neuen Weg

$$f' := f \circ \varphi: U_0' \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

für den auch

$$f' = (\psi, \hat{f}) \circ \varphi = (\psi \circ \varphi, \hat{f} \circ \varphi) =: (\text{id}_{U_0'}, z)$$

mit der Abbildung

$$z: U_0' \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$$

geschrieben werden kann.

Der neue Weg  $f'$  leistet nun:

$$(u^1, \dots, u^m) \in U_0' \mapsto (u^1, \dots, u^m, z^1(u^1, \dots, u^m), \dots, z^{n-m}(u^1, \dots, u^m)).$$

Nach Def.3.1.6 ist  $f'$  ein Euler-Weg und daher  $f'(U_0')$  Graph der Funktion  $z$ .

Nach Satz 3.1.1 ist  $f'(U_0')$  eine einfache reguläre Fläche, also die Abbildung  $f'|_{U_0'}$  eine injektive Immersion.  $\square$

**Bem. 3.1.5:**

(a) "Lokal" in Satz 3.1.2 bedeutet "lokal im Parametergebiet U", nicht im  $R^n$ .

(b) Ist speziell  $m=1$ , dann ist  $z:I \rightarrow R^{n-1}$  für  $I:=U_0$ . Dann folgt für f:

$$t \in I \rightarrow f(t) := (t, z^1(t), \dots, z^{n-1}(t)).$$

Damit ist, wenn also t regulär für f ist, die Kurve  $f(I) \subset R^n$  als Graph einer Funktion darstellbar (hier z).

$t \in I$  ist regulär für f  $\implies c(t)$  ist ein regulärer Punkt der Kurve.

Sonderfall:  $n=2$ :  $x=t, y=f(t)$  (siehe Schule).

**Def. 3.1.7:** Es sei  $A \subset R^n$  eine offene Teilmenge des  $R^n$ . Ferner sei  $F:A \rightarrow R^l$  ( $1 \leq l \leq n$ ) aus  $C^r(A)$  bei  $r \geq 1$ , d.h. die l Koordinatenfunktionen  $F^\Sigma:A \rightarrow R$  ( $\Sigma=1, \dots, l$ ) sind aus  $C^r(A)$ .

Die Punktmenge

$$M := \{p \in A \mid F(p) = 0 \in R^l\} =: F^{-1}0$$

heißt eine  $C^r(A)$ - $(n-l)$ -**Varietät**, falls M nicht leer ist.

Im Fall  $l=1$ , also bei  $F:A \rightarrow R$  heißt M  $C^r(A)$ -**Hypervarietät**.

Ein Punkt  $p \in F^{-1}0$  heißt **gewöhnlich**, wenn  $rg J_p(p) = l$  (also maximal), ansonsten **kritisch**.

**Bem. 3.1.6:**  $J_p(p)$  ist die Jacobi-Matrix von F in p, also

$$J_p(p) = \begin{bmatrix} F_{,1}^1 & \dots & F_{,1}^l \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{,n}^1 & \dots & F_{,n}^l \end{bmatrix} (p)$$

worin zur Abkürzung  $F_{,\alpha}^\Sigma := \partial F^\Sigma / \partial x^\alpha$  ( $\Sigma=1, \dots, l; \alpha=1, \dots, n$ ) definiert wurde.

**Beispiele:**

(1)  $A=R^n, l=1$ :  $F:R^n \rightarrow R$  mit  $F(x) := (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 + 1$ .

Offenbar ist  $F^{-1}0$  leer, also keine Varietät.

(2)  $A=R^n, l=1$ :  $F:R^n \rightarrow R$  mit  $F(x) := x \cdot a + c$  mit  $a \in R^n \setminus \{0\}, c \in R$ .

$F^{-1}0$  ist eine Hyperebene.

---Kritische Punkte? Zu betrachten ist  $(F_{,1}, \dots, F_{,n})$ :

Ausführlich gilt ja  $F(x^1, \dots, x^n) = x^1 a^1 + \dots + x^n a^n + c$ . Daraus folgt sofort

$$(F_{,1}, \dots, F_{,n})(p) = (a^1, \dots, a^n) = a \neq 0 \text{ nach Voraussetzung.}$$

Also treten nur gewöhnliche Punkte auf.

Die Gleichung

$$\bar{F}(x) := (ax+c)^2$$

beschreibt wegen  $\bar{F}^{-1}0 = F^{-1}0$  dieselbe Hyperebene. Jedoch ist

$$(\bar{F}_{,1}, \dots, \bar{F}_{,n}) = 2(ax+c) \cdot a = 0$$

für alle Punkte der Hyperebene; es treten also nur kritische Punkte auf.

**Bem.:** "gewöhnlich" und "kritisch" sieht man der Punktmenge allein i.a. nicht an; dies hängt meist von F ab.

(3)  $A=R^n, l=1$ :  $F:R^n \rightarrow R$  mit  $F(x) := \|x-m\|^2 - r^2$  bei fest gewähltem  $m \in R^n$  und  $r > 0$ .

$F^{-1}0$  heißt **Hypersphäre**  $S^{n-1} \subset R^n$ .

Ausführlich gilt:

$$F(x^1, \dots, x^n) = (x^1 - m^1)^2 + \dots + (x^n - m^n)^2 - r^2,$$

woraus sich

$$F_{,\alpha}(x) = 2 \cdot (x^\alpha - m^\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, n$$

ergibt.

Sei  $p$  ein Punkt der Hypersphäre mit  $(F_{,1}(p), \dots, F_{,n}(p)) = (0, \dots, 0)$ . Genau dann ist  $p^\alpha = m^\alpha \quad \forall \alpha$ , also  $p = m$  im Widerspruch zu  $r > 0$ . Damit treten nur gewöhnliche Punkte auf.

Hier speziell:  $n=2$ : 1-Sphäre  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  (...Kreis). Diese kann etwa beschrieben werden durch --  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$  oder  
 --  $(x^2 + y^2 - r^2)^2 = 0$  oder  
 --  $1 - \cosh(x^2 + y^2 - r^2) = 0$ .

**ZWISCHENBEMERKUNG 13:**

$F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  ( $l := n - m$ ) sei aus  $C^r(A)$  bei  $r \geq 1$ . Ferner gelte  $m = n - l \geq 2$ .

Nun sei  $p \in \mathbb{R}^n$ ;  $p \in F^{-1}0$ , also  $F(p) = 0 \in \mathbb{R}^1$ .  $p$  sei gewöhnlich, daher ist

$$\text{rg} \begin{bmatrix} F_{,1}^1 & \dots & F_{,1}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{,m+1}^1 & \dots & F_{,m+1}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{,n}^1 & \dots & F_{,n}^1 \end{bmatrix} (p) = l.$$

Diese Matrix besitzt also  $l$  l.u. Zeilenvektoren; oBdA seien dies die letzten  $l$  Zeilen, d.h. es sei

$$\det(F_{,\alpha}^\Sigma(p)) \neq 0 \quad \text{mit } \Sigma = 1, \dots, l; \quad \alpha = m+1, \dots, n.$$

Dann gilt ("Hauptsatz über Implizite Funktionen"):

(1)  $\exists$  offene Umgebung  $A_0 \subset A \subset \mathbb{R}^n$  von  $p = (p^1, \dots, p^n)$ ;

(2)  $\exists$  offene Umgebung  $U_0 \subset \mathbb{R}^m$  von  $(p^1, \dots, p^m)$ ;

(3)  $\exists$  Abbildung  $z: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $z \in C^r(U_0)$  mit

$$F^{-1}0 \cap A_0 = \{q = (q^1, \dots, q^n) \in \mathbb{R}^n \mid (q^1, \dots, q^m) \in U_0 \text{ und } (q^{m+1}, \dots, q^n) = (z^1(q^1, \dots, q^m), \dots, z^{n-m}(q^1, \dots, q^m))\}.$$

**Bem.:** Damit ist  $M = F^{-1}0$  lokal um den gewöhnlichen Punkt  $p \in M$  als Graph einer Funktion (hier:  $z$ ) darstellbar.

Dabei bedeutet hier "lokal": lokal im  $\mathbb{R}^n$  (vgl. früher: damals war "lokal im Parameterbereich" gemeint).

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Damit folgt

**Satz 3.1.3:**  $F^{-1}0$  sei eine  $C^r(A)$ - $(n-1)$ -Varietät.  $p \in A$  sei ein gewöhnlicher Punkt von  $F^{-1}0$ .  $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $l = n - m$ . Dann gilt:

Es existiert eine offene Umgebung  $A_0 \subset A$  von  $p$  derart, daß  $F^{-1}0 \cap A_0$  eine einfache reguläre  $m$ -Fläche ist

**Beweis:** Nach ZB13 kann  $F^{-1}0 \cap A_0$  als Graph einer Funktion geschrieben werden, woraus mit Satz 3.1.1 die Behauptung folgt.  $\square$

**Bem. 3.1.7:**

(a) Setzen wir formal  $m:=1$ , so erhalten wir

$$F:A \rightarrow \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^{n-1}.$$

Ist  $p \in F^{-1}0$  gewöhnlich, so kann nach ZB13 in einer offenen Umgebung  $A_0 \subset A$  von  $p$  die 1-Varietät  $F^{-1}0 \cap A_0$  als Graph einer Funktion  $z$  folgendermaßen geschrieben werden, da  $U_0=I$  wegen  $m=1$  eindimensional ist:

$$c: t \in I \mapsto (t, z^1(t), \dots, z^{n-1}(t)).$$

$c$  beschreibt aber die Kurve  $c(I)$ , sodaß eine Kurve in einem derartigen Intervall  $I$  als "1-Varietät" aufgefaßt werden kann.

Ist der Punkt  $c(t_0) := p \in c(I)$  gewöhnlich, so ist  $c(t_0)$  ein regulärer Punkt von  $c(I)$ . Die Umkehrung dieser Aussage ist nicht immer richtig!

(b) Wir betrachten die  $(n-1)$ -Varietät  $F^{-1}0$ , d.h.  $F=(F^1, \dots, F^l): A \rightarrow \mathbb{R}^l$ .

Ist nun  $p \in F^{-1}0$ , so ist  $F(p) = (F^1(p), \dots, F^l(p)) = (0, \dots, 0)$ .

Mit den Koordinatenfunktionen  $F^\Sigma: A \rightarrow \mathbb{R}$  folgt:

$$p \in F^{-1}0 \iff p \in \cap (F^\Sigma)^{-1}0.$$

$F^\Sigma$  kann ja als "spezielles  $F$ " mit  $l=1$  aufgefaßt werden, wodurch  $(F^\Sigma)^{-1}0$  als Hypervarietät angesprochen werden kann.

Wann ist nun  $p$  ein gewöhnlicher Punkt der *Schnittvarietaet*  $F^{-1}0$  ?

Jedenfalls genau bei  $\text{rg} J_F(p) = l$ .

Nach Bem.3.1.6 lautet eine der  $l$  Spalten von  $J_F(p)$

$$(F_{,1}^\Sigma(p), \dots, F_{,n}^\Sigma(p))^T =: \text{grad} F^\Sigma(p).$$

Damit gilt:

$p$  ist genau dann gewöhnlich von  $F^{-1}0$ , wenn die Vektoren  $\{\text{grad} F^1(p), \dots, \text{grad} F^l(p)\}$  linear unabhängig sind.

### 3.2 Tangentialvektorraum einer m-Fläche

Sei  $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^r(U)$  mit  $r \geq 1$ ;  $f_j: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Def. 3.2.1:** Sei  $a \in U$ . Die Punktmenge

$$f(a) + H(f_1(a), \dots, f_m(a))$$

heißt *Tangentialraum der Fläche  $f(U)$  im Flächenpunkt  $f(a)$* .

**Bemerkung 3.2.1:** Die Dimension des Tangentialraumes ist genau dann  $m$ , wenn  $a$  ein regulärer Punkt ist.

Nennen wir eine Tangente an eine Flächenkurve *Flächentangente*, so gilt

**Satz 3.2.1:** (1) Jede Flächentangente von  $f(U)$  in  $f(a)$  liegt im Tangentialraum von  $f(U)$  in  $f(a)$ .

(2) Jede Gerade  $g$  durch  $f(a)$  im Tangentialraum ist Flächentangente.

(3) Der Begriff "Tangentialraum" ist geometrisch.

**Beweis:** (Ad 1) Sei  $foc: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \mapsto foc(t)$  ein Flächenweg und  $0 \in I$ . Mit  $c(0) =: a$  gilt (siehe früher)

$$(foc)'(0) = f_j(a) \cdot \dot{c}^j(0) \in H(f_1(a), \dots, f_m(a)),$$

und damit ist die Flächentangente

$$f(a) + \lambda \cdot (foc)'(0)$$

im Tangentialraum von  $f(U)$  in  $f(a)$  enthalten.

(Ad 2) Sei  $g$  eine Gerade im Tangentialraum; z.z.:  $g$  ist Flächentangente.  $g$  gestattet jedenfalls die Darstellung

$$g = f(a) + \lambda \cdot v^j f_j(a).$$

Wir erraten nun einen Weg  $c: I \rightarrow U$  wie folgt:

$$I := ]-\varepsilon, \varepsilon[; \quad c(0) = a \text{ mit } t \mapsto c(t) := (a^1 + v^1 \cdot t, \dots, a^m + v^m \cdot t).$$

Für den Ableitungsvektor von  $foc$  folgt damit:

$$(foc)'(0) = f_j(a) \cdot \dot{c}^j(0) = f_j(a) \cdot v^j.$$

Damit ist  $g$  Tangente an die Flächenkurve  $foc(I)$ .

(Ad 3) Da der Begriff "Flächentangente" trivialerweise ein geometrischer ist, folgt die Behauptung aus (1) und (2).  $\square$

#### Tangentialvektorraum eines affinen Unterraumes

Sei  $V$  ein Vektorraum und  $V_1 \subset V$  ein Untervektorraum von  $V$ . Für  $a \in V$  heißt

$$a + V_1 := \{a + v_1 \mid v_1 \in V_1\}$$

gemäß 1.3.1 *Affiner Unterraum*. Im folgenden setzen wir

$$a + v_1 := (a; v_1)$$

und nennen  $a$  den "Auhängerpunkt" des Vektors  $v_1$ .

Wir müssen nun in der Menge  $\{(a; v_1)\}$  eine *Vektorraumstruktur* erklären:

$$\alpha \cdot (a; v_1) + \beta \cdot (a; v_2) := (a; \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2).$$

$V_a := (a; v_1)$  heißt *Tangentialvektor von  $A(V_1)$  im Punkt  $a$* ;

$T_a A(V_1) := \{(a; v_1) = V_a + v_1 \mid v_1 \in V_1\}$  heißt *Tangentialvektorraum von  $A(V_1)$  im Punkt  $a$* .

**Bem. 3.2.2:** (a) Ein geometrischer Zugang zu diesen Begriffen ist möglich:  $a$  ist ein ausgezeichnete Punkt ("Ursprung"). Wir können also jeden Punkt von  $A(V_1)$  durch einen in  $a$  angehefteten Vektor ("Ortsvektor") beschreiben. Dies ist etwas Geometrisches.

(b) Beispiel:  $V_1 = \mathbb{R}^2$ :

Seien  $a, b$  Punkte des  $\mathbb{R}^2$  mit den zugehörigen Tangentialvektorräumen  $T_a A(\mathbb{R}^2)$  und  $T_b A(\mathbb{R}^2)$ .

Dann gilt:

$$T_a A(\mathbb{R}^2) \cong T_b A(\mathbb{R}^2).$$

Diese Isomorphie ist z.B. durch die Translation  $a \rightarrow b$  realisierbar.

Für die Tangentialvektoren

$$V_a = a + v \in T_a A(\mathbb{R}^2) \text{ und } W_b = b + w \in T_b A(\mathbb{R}^2)$$

gilt:

$$V_a = W_b \iff v = w \text{ und } a = b.$$

(c) Im folgenden befinden wir uns im  $m$ -dimensionalen arithmetischen Vektorraum  $\mathbb{R}^m$  und schreiben statt  $A(\mathbb{R}^m)$  einfach wieder  $\mathbb{R}^m$ . Also:

Sei  $p \in \mathbb{R}^m$  und  $T_p \mathbb{R}^m$  der Tangentialvektorraum von  $\mathbb{R}^m$  im Punkt  $p$ . Einen Tangentialvektor beschriften wir mit

$$X_p = (p; v) \text{ mit } p \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^m.$$

### Tangentialvektorraum einer Fläche

Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $f(a) = H(f_1(a), \dots, f_m(a))$  der Tangentialraum von  $f(U)$  in  $f(a)$ .

**Def. 3.2.2:** Die Vektormenge

$$T_a f := \{(f(a); v) \mid v \in H(f_1(a), \dots, f_m(a))\} \subset T_{f(a)} \mathbb{R}^n$$

heißt **Tangentialvektorraum von  $f(U)$  in  $f(a)$**  und besteht aus allen Tangentialvektoren  $V_{f(a)} = (f(a); v)$ .

**Bem. 3.2.3:** (a) Es seien  $a$  und  $b$  reguläre Punkte von  $f$ .

Für die zugehörigen Tangentialvektorräume gilt

$$T_a f \subset T_{f(a)} \mathbb{R}^n; T_b f \subset T_{f(b)} \mathbb{R}^n.$$

Wegen der Regularität von  $a$  und  $b$  für  $f$  gilt

$$\dim T_a f = \dim T_b f = m.$$

Ferner gilt

$$T_a f \cong T_b f.$$

Allerdings geht bei der Translation  $f(b) \rightarrow f(a)$  ein Tangentialvektor aus  $T_b f$  i.a. nicht in einen Tangentialvektor aus  $T_a f$  über.

(b) Schreibweise: Wir schreiben " $T_a f$ " und nicht " $T_p f$ " bei  $p = f(a)$ . Ist nämlich  $f$  nicht injektiv, so ist zwar  $f(a) = f(b) = p$ , aber i.a. dann  $T_a f \neq T_b f$ , da die betrachteten Hüllen i.a. verschieden sind.

### 3.3 Metrische Grundform einer m-Fläche

Wir betrachten nun den euklidischen Vektorraum  $(\mathbb{R}^n; \cdot)$  mit dem inneren Produkt " $\cdot$ " und der kanonischen Basis  $\{e_\alpha = (\delta_\alpha^1, \dots, \delta_\alpha^n) \mid \alpha=1, \dots, n\}$ . Ferner seien

$$v = (v^1, \dots, v^n) = v^\alpha e_\alpha; \quad w = (w^1, \dots, w^n) = w^\beta e_\beta$$

zwei Vektoren aus  $\mathbb{R}^n$ . Für deren inneres Produkt gilt

$$v \cdot w = v^\alpha \cdot w^\beta \cdot \delta_{\alpha\beta}.$$

Sei nun  $p \in \mathbb{R}^n$  ein Punkt des  $\mathbb{R}^n$  und  $T_p \mathbb{R}^n$  der Tangentialvektorraum von  $\mathbb{R}^n$  um Punkt  $p$ , bestehend aus allen Tangentialvektoren  $(p; v)$  mit  $v \in \mathbb{R}^n$ .

Wir staten den Vektorraum  $T_p \mathbb{R}^n$  durch die folgende Festsetzung mit einem innerem Produkt (der Tangentialvektoren) aus:

Für die beiden Tangentialvektoren  $X_p = (p; v)$  und  $Y_p = (p; w)$  gelte

$$X_p \cdot Y_p := v \cdot w.$$

Genauer müßten wir ab nun schreiben:

$$(T_p \mathbb{R}^n; \cdot).$$

Wegen  $T_a f \subset T_p \mathbb{R}^n$  gilt: Auch  $(T_a f; \cdot)$  ist ein euklidischer Vektorraum.

**Def. 3.3.1:** Das innere Produkt " $\cdot$ " in  $T_a f \subset T_p \mathbb{R}^n$  ( $p=f(a)$ ) heißt die **metrische Grundform**  $G_{f(a)}$  der Fläche  $f(U)$  im Flächenpunkt  $f(a)$  und es gilt:

$$G_{f(a)}: T_a f \times T_a f \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Bem. 3.3.1:** (a) *Schreibweise:* Wir schreiben  $G_{f(a)}$ , und nicht  $G_p$ , da  $f$  nicht notwendig injektiv ist.

(b)  $G_{f(a)}$  hat geometrische Bedeutung, da:  
 -- Tangentialvektorraum  $T_a f$  ist geometrisch;  
 -- Das "Durchdrücken" von " $\cdot$ " in den Tangentialvektorraum ist von  $f$  unabhängig.

#### Diskussion:

##### (1) Koordinatenmäßige Beschreibung der Grundform

Gegeben:  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wir bereiten vor:

$$V_{f(a)} = (f(a); v^j f_{,j}(a)).$$

Definieren wir

$$F_j(a) := (f(a); f_{,j}(a)),$$

so folgt

$$V_{f(a)} = v^j F_j(a).$$

Analog gestattet ein anderer Tangentialvektor die Darstellung

$$W_{f(a)} = w^k F_k(a).$$

Damit folgt für die metrische Grundform:

$$G_{f(a)}(V_{f(a)}, W_{f(a)}) = V_{f(a)} \cdot W_{f(a)} = v^j F_j(a) \cdot w^k F_k(a) =: v^j w^k g_{jk}(a).$$

Dabei wurde

$$g_{jk}(a) := F_j(a) \cdot F_k(a)$$

gesetzt.  $g_{jk}(a)$  heißen **Koordinaten von  $G_{f(a)}$  bezüglich  $f$** .

Ferner gilt

$$g_{jk}(a) = f_{,j}(a) \cdot f_{,k}(a).$$

Aus der Symmetrie des in  $\mathbb{R}^n$  definierten Skalarproduktes folgt

$$g_{jk}(a) = g_{kj}(a).$$

## (2) Flächen- und Raumkoordinaten

Sei  $V_{f(a)} = v^j \cdot F_j(a) \in T_a f \subset T_p \mathbb{R}^n$  ein beliebiger Tangentialvektor von  $f(U)$  im Punkt  $f(a)$ . Dann ist die Vektormenge

$$\{F_j(a) \mid j=1, \dots, m\}$$

eine Basis des  $T_a f$ , wenn  $a$  ein regulärer Punkt ist.

Andererseits ist

$$E_\alpha := (p; e_\alpha), \quad \alpha=1, \dots, n$$

eine Basis des Vektorraumes  $T_p \mathbb{R}^n$ , wobei  $\{e_\alpha\}$  eine normierte Basis des  $\mathbb{R}^n$  darstellt. Bezüglich dieser Basis gestattet  $V_{f(a)}$  die Darstellung

$$V_{f(a)} = \hat{v}^\alpha \cdot E_\alpha.$$

Wir nennen  $(v^1, \dots, v^m)$  die **Flächenkoordinaten** von  $V_{f(a)}$  und  $(\hat{v}^1, \dots, \hat{v}^n)$  die **Raumkoordinaten** von  $V_{f(a)}$ .

Bem.: Im folgenden schreiben wir  $v^\alpha := \hat{v}^\alpha$ , da es sich um die gewöhnlichen Koordinaten im Gesamtraum handelt.

Wir vergleichen nun Flächen- und Raumkoordinaten:

$$V_{f(a)} = v^j \cdot F_j(a) = v^\alpha \cdot E_\alpha.$$

Damit gilt auch die Gleichheit

$$v^j \cdot f_{,j}(a) = v^\alpha \cdot e_\alpha,$$

da in beiden Basisdarstellungen der gleiche Aufhängerpunkt vorliegt.

Setzen wir  $f_{,j}(a) = f^\alpha_{,j}(a) \cdot e_\alpha$ , so folgt

$$v^j \cdot f^\alpha_{,j}(a) = v^\alpha; \quad \alpha=1, \dots, n.$$

### Parameterwechsel:

Was passiert mit den Raum- bzw. Flächenkoordinaten bei einem Parameterwechsel:

-- Die Raumkoordinaten  $v^\alpha$  bleiben gleich.

-- Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\varphi: U' \rightarrow U$  ein Parameterwechsel. Wir erhalten den neuen Weg  $f': U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f' = f \circ \varphi$ .

Nach Früherem gilt

$$f'_{,j'}(a') = f_{,j}(a) \cdot u^j_{,j'}(a') \quad \text{bei } \varphi(a') = a. \quad (*)$$

Für die zu  $f'$  gehörigen Flächenkoordinaten  $v^{j'}$  gilt

$$v^{j'} \cdot f'_{,j'}(a) = v^j \cdot f_{,j}(a').$$

Dann folgt mit (\*) sofort

$$v^{j'} \cdot f_{,j}(a) = v^j \cdot f_{,j}(a) \cdot u^j_{,j'}(a').$$

Aus der Eindeutigkeit der Basisdarstellung ergibt sich

$$v^{j'} = v^j \cdot u^j_{,j'}(a').$$

Unter Verwendung von  $\varphi^{-1}$  ergibt sich analog

$$v^j = v^{j'} \cdot u^j_{,j'}(a).$$

(3) Die metrische Grundform  $G_{f(a)}$  von  $f(U)$  in  $f(a)$  ist bestimmt, wenn die Skalare  $g_{jk}$ , also die symmetrische Matrix  $(g_{jk}(a))$  bekannt ist. Dabei können wir die

$$g_{jk}: U \rightarrow \mathbb{R}$$

als von  $a$  abhängige Funktionen, den sog. **Koordinatenfunktionen** von  $G_f$  auffassen. Wir können daher von der metrischen Grundform  $G_f$  der Fläche  $f(U)$  schlechthin sprechen und es ist  $G_f(a) = G_{f(a)}$ .

Ist ferner  $f \in C^r(U)$ , so ist wegen  $g_{jk} = f_{,j} \cdot f_{,k}$  dann  
 $g_{jk} \in C^{r-1}(U)$ .

**Bem. 3.3.2:** Man könnte die  $g_{jk}$  in  $U$  zum Ausmessen benützen, sodaß zwei verschiedene "Ausmeßvorschriften" in  $U$  zur Verfügung stehen:

Sei  $v \in U \subset \mathbb{R}^m$ ; wir berechnen  $\|v\|$  auf zwei Arten:

1.) euklidisch:  $\|v\|^2 = v^j \cdot v^k \cdot \delta_{jk} = (v^1)^2 + \dots + (v^m)^2$ . Diese Längenmessung ist orts-unabhängig. Oder

2.) "falsch": mittels der mit  $f(U)$  berechneten  $g_{jk}$ :

$(\text{Norm}(v))^2 = v^j \cdot v^k \cdot g_{jk}(a)$ . Ortsabhängige Längenmessung.

Daher der Vorschlag von RIEMANN: Man könne die  $g_{jk}$  überhaupt "frei" wählen.

(4) Nach Bem.3.3.1 hat  $G_{f(a)}$  geometrische Bedeutung.

Haben auch die  $g_{jk}$  geometrische Bedeutung:

(a) Bewegungsinvarianz:

Sei  $\bar{f} = \beta \circ f$  ein zu  $f$  bewegungsgleicher Weg. Dann gilt:

$$\bar{g}_{jk}(a) = \bar{f}_{,j}(a) \cdot \bar{f}_{,k}(a) = l(f_{,j}(a)) \cdot l(f_{,k}(a)).$$

Da  $l$  orthogonal ist, folgt

$$\bar{g}_{jk}(a) = f_{,j}(a) \cdot f_{,k}(a) = g_{jk}(a).$$

Damit sind die  $g_{jk}$  bewegungsinvariant.

(b) Parameterwechsel:

$\varphi: U' \rightarrow U$ ;  $f' = f \circ \varphi: U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei ein zu  $f$  äquivalenter Weg. Dann gilt:

$$g_{j'k'}(a') = f'_{,j'}(a') \cdot f'_{,k'}(a') = f_{,j}(a) \cdot u^j_{,j'}(a') \cdot f_{,k}(a) \cdot u^k_{,k'}(a')$$

für  $j', k' = 1, \dots, m$ . Daraus folgt das "Transformationsgesetz der  $g_{jk}$ ":

$$g_{j'k'}(a') = g_{jk}(a) \cdot u^j_{,j'}(a') \cdot u^k_{,k'}(a').$$

Offenbar sind die  $g_{jk}$  nicht parameterinvariant.

(5) Die Determinante der  $(g_{jk})$

Wir setzen für die von  $a$  abhängige Determinante

$$\Delta(a) := \det(g_{jk}(a)).$$

Genauer gilt:

$$\Delta(a) = \begin{vmatrix} f_{,1} \cdot f_{,1} & \dots & f_{,1} \cdot f_{,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{,m} \cdot f_{,1} & \dots & f_{,m} \cdot f_{,m} \end{vmatrix} (a) = \Gamma(f_{,1}(a), \dots, f_{,m}(a)).$$

Wir erhalten:

$$\Gamma(f_{,1}(a), \dots, f_{,m}(a)) > 0 \iff \text{l.u.}\{f_{,1}(a), \dots, f_{,m}(a)\} \iff a \text{ ist regulär für } f.$$

Nach (4) ist  $\Delta$  bewegungsinvariant, da die  $g_{jk}$  bewegungsinvariant sind.

Bleibt die Untersuchung der Parameterinvarianz:

$$\Delta'(a') = \det(g_{j'k'}(a')) = \det[g_{jk}(a) \cdot u^j_{,j'}(a') \cdot u^k_{,k'}(a')].$$

Nun gilt  $u^j_{,j'}(a') \in J_{\varphi}(a')$  und  $u^k_{,k'}(a') \in J_{\varphi}(a')$ , und deren Produkt beschreibt das Matrixprodukt  $J_{\varphi}(a') \cdot J_{\varphi}(a')$ . Damit ergibt sich

$$\Delta'(a') = \Delta(a) \cdot (\det J_{\varphi}(a'))^2,$$

also die Formel

$$\Delta'(a')^{1/2} = \Delta(a)^{1/2} \cdot |\det J_{\varphi}(a')|.$$

Daher hat  $\Delta$  keine geometrische Bedeutung.

## Geometrische Bedeutung der metrischen Grundform

### (1) Längen- und Winkelmessung

Benützen wir  $G_{f(a)}$  als ein "inneres Produkt" im Tangentialvektorraum  $T_a f$ , so wird  $T_a f$  zum euklidischen Vektorraum  $(T_a f; G_{f(a)})$ , sodaß Längen- und Winkelmessungen durchgeführt werden können.

#### (a) Längenmessung:

Ein Tangentialvektor aus  $T_a f$  gestattet die Darstellung

$$V_{f(a)} = v^j F_j(a).$$

Damit folgt unmittelbar nach Diskussionspunkt (1)

$$\|V_{f(a)}\|^2 = G_{f(a)}(V_{f(a)}, V_{f(a)}) = v^j v^k g_{jk}(a).$$

Speziell gilt für  $F_j(a)$

$$\|F_j(a)\|^2 = g_{jj}(a).$$

#### (b) Winkelmessung:

Für die beiden Tangentialvektoren

$$V_{f(a)} = v^j F_j(a) \text{ und } W_{f(a)} = w^k F_k(a)$$

kann durch

$$\cos(V_{f(a)}, W_{f(a)}) = G_{f(a)}(V_{f(a)}, W_{f(a)}) / [\|V_{f(a)}\| \cdot \|W_{f(a)}\|]$$

ein cos-Wert erklärt werden (vgl. 1.2.5) und nach Beschränkung auf ein Intervall auch ein Winkelwert. Einsetzen ergibt

$$\cos(V_{f(a)}, W_{f(a)}) = v^j w^k g_{jk}(a) / [(v^j v^k g_{jk}(a))^{1/2} \cdot (w^j w^k g_{jk}(a))^{1/2}].$$

**Bem. 3.3.3:** (a) Die Längen von Tangentialvektoren zu verschiedenen Aufhängerpunkten sind auch vergleichbar.

(b) Winkel können nur bei gleichem Aufhängerpunkt verglichen werden, da ein parallelverschobener Tangentialvektor an der neuen Stelle i.a. kein Tangentialvektor mehr ist (im  $R^m$  schon: dort steht die Parallelverschiebung zur Verfügung).

### (2) Längen von Flächenkurven

Gegeben sei der Flächenweg  $foc: I \rightarrow f(U) \subset R^n$  mit  $f: U \subset R^m \rightarrow R^n$ .

Bekanntlich gilt

$$(foc)'(t_0) = f_{,j}(a) \cdot \dot{c}^j(t_0) \text{ bei } c(t_0) =: a.$$

Damit folgt

$$\|(foc)'\|^2 = f_{,j}(a) \cdot \dot{c}^j(t_0) \cdot f_{,k}(a) \cdot \dot{c}^k(t_0) = \dot{c}^j(t_0) \cdot \dot{c}^k(t_0) \cdot g_{jk}(a).$$

Unter Benützung von Def.2.3.2 erhält man

$$L_{\mathbb{W}}^{\text{fl}}(foc) = \int_{t_0}^{t_1} [\dot{c}^j \cdot \dot{c}^k \cdot g_{jk}(oc)]^{1/2} dt$$

Speziell folgt damit für die  $j$ -te Parameterkurve  $fo_{(j)}c(I) \subset f(U)$  mit

$${}_{(j)}c(t) = (a^1, \dots, a^{j-1}, a^j + t, a^{j+1}, \dots, a^m), \quad {}_{(j)}c(0) = (a^1, \dots, a^m) = a \text{ und } {}_{(j)}\dot{c}^k = \delta_j^k:$$

$$L_{\mathbb{W}}^{\text{fl}}(fo_{(j)}c) = \int_{t_0}^{t_1} (g_{jj}(oc))^{1/2} dt;$$

man nennt diesen Wert *Länge einer Parameterkurve*.

### (3) Winkel von Flächenkurven

wird als Winkel von Tangentialvektoren erklärt.

1. Flächenweg: foc. Wegen

$$(\text{foc})'(t_0) = f_{,j}(a) \cdot \dot{c}^j(t_0)$$

gilt

$$V_{f(a)} = (f(a); v^j f_{,j}(a)) \text{ mit } v^j = \dot{c}^j (= \text{Flächenkoordinaten}).$$

Für den 2. Flächenweg gilt Analoges.

Anschließend kann unter Benützung des in  $T_a f$  definierten inneren Produktes der Winkel berechnet werden.

#### (4) Integralbegriff auf einer Fläche

**Def. 3.3.2:** Eine Abbildung  $F: f(U) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Funktion auf der Fläche**  $f(U)$ . Dann heißt  $\hat{F} := F \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}$  **Koordinatendarstellung von F bezüglich f**.

(a) Überprüfung der *Bewegungsinvarianz* der Koordinatendarstellung:

Sei  $\beta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Bewegung und  $\bar{f} = \beta \circ f$  ein zu  $f$  bewegungsgleicher Weg. Wir definieren sinnvollerweise:

$$\bar{F} := F \circ \beta^{-1}.$$

Damit folgt für die zu  $\bar{f}$  gehörige Koordinatendarstellung  $\hat{\bar{F}} = \bar{F} \circ \bar{f}$

$$\hat{\bar{F}} = (F \circ \beta^{-1}) \circ \beta \circ f = F \circ \beta^{-1} \circ \beta \circ f = F \circ f = \hat{F}.$$

Damit ist die Koordinatendarstellung ein bewegungsinvarianter Begriff.

(b) Überprüfung der *Parameterinvarianz* der Koordinatendarstellung:

Sei  $\varphi: U' \rightarrow U$  ein Parameterwechsel und  $f' = f \circ \varphi$  ein zu  $f$  äquivalenter Weg. Wir definieren

$$\hat{F}' := F \circ f'.$$

Damit folgt dann

$$\hat{F}' = F \circ (f \circ \varphi) = \hat{F} \circ \varphi.$$

Also liegt kein parameterinvarianter Begriff vor.

**Def. 3.3.3:**  $F: f(U) \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $f(a) \in f(U)$   $s$ -mal stetig differenzierbar  $\Leftrightarrow \hat{F}: U \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $a \in U$   $s$ -mal stetig differenzierbar.

**Folgerung:** "Differenzierbarkeit" ist ein geometrischer Begriff, da:

-- bewegungsinvariant, da  $\hat{F}$  bewegungsinvariant;

-- parameterinvariant;

Nach Früherem ist  $\hat{F}' = \hat{F} \circ \varphi$ , wobei  $\varphi \in C^r(U')$  ist. Ist nun  $\hat{F} \in C^s$  bei  $s \neq r$ , so folgt  $\hat{F}' \in C^s$ .

**Bem.:**  $s > r$  hat offenbar keinen Sinn; geht bei einem Parameterwechsel verloren.

#### **ZWISCHENBEMERKUNG 14:**

$U \subset \mathbb{R}^m$  sei eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$  und  $T \subset U$  sei beschränkt.

Ferner sei die Funktion

$$h: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } (u^1, \dots, u^m) \mapsto h(u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{R}$$

gegeben.

Hinreichend für die Existenz des *RIEMANN-Integrals*

$$\int_T h(u^1, \dots, u^m) du^1 \dots du^m$$

ist (1)  $T$  ist Jordan-meßbar ( $\Leftrightarrow \partial T$  ist vom  $m$ -dimensionalen Maß Null.

z.B.  $m=2$  und  $\partial T$  ist etwa eine  $C^1$ -Kurve)

Ein Gebiet erfüllt stets diese Bedingung.

(2)  $h$  ist stetig in  $T$ .

Transformation eines Integrals:

Sei  $\varphi: U' \rightarrow U$  ein Parameterwechsel. Dann gilt

$$\int_T h(u^1, \dots, u^m) du^1 \dots du^m = \int_{\varphi^{-1}(T)} h \circ \varphi(u^1, \dots, u^m) \cdot |\det J_\varphi| du^1 \dots du^m.$$

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Sei  $F: f(U) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf der Fläche  $f(U)$  und  $\hat{F}: U \rightarrow \mathbb{R}$  die Koordinatendarstellung von  $F$  bezüglich  $f$ . Wir betrachten das Integral

$$\int_T \hat{F}(u^1, \dots, u^m) du^1 \dots du^m.$$

Es ist sicher *bewegungsinvariant*, da  $\hat{F}$  *bewegungsinvariant* ist, jedoch *nicht parameterinvariant*. Aber es gilt

**Satz 3.3.1:** *Das Integral*

$$\int_T \hat{F} \cdot \Delta^{\frac{1}{2}} du^1 \dots du^m = \int_{f(T)} F \cdot d\sigma,$$

das sogenannte *Oberflächenintegral (Flächenintegral)* von  $F$  über  $f(T)$  ist *geometrisch*.

Beweis: (a) Nachweis der Bewegungsinvarianz:

gewährleistet, da  $\hat{F}$  und  $\Delta = \det(g_{jk})$  *bewegungsinvariant* sind.

(b) Nachweis der Parameterinvarianz:

Sei  $\varphi: U' \rightarrow U$  ein Parameterwechsel und  $f' = f \circ \varphi$  ein zu  $f$  äquivalenter Weg.

Hier ist " $\hat{F} \cdot \Delta^{\frac{1}{2}}$ " das "h" aus ZB14.

Ferner gilt:

$$(\hat{F} \cdot \Delta^{\frac{1}{2}}) \circ \varphi = (\hat{F} \circ \varphi) \cdot (\Delta^{\frac{1}{2}} \circ \varphi). \quad (*)$$

Nach Früherem gilt

$$\Delta'(a')^{\frac{1}{2}} = \Delta(a)^{\frac{1}{2}} \cdot |\det J_\varphi(a')|,$$

oder bei  $a = \varphi(a')$  dann

$$\Delta'^{\frac{1}{2}} = \Delta^{\frac{1}{2}} \circ \varphi \cdot |\det J_\varphi|.$$

Man erhält

$$\Delta^{\frac{1}{2}} \circ \varphi = \Delta'^{\frac{1}{2}} / |\det J_\varphi|$$

Damit ergibt sich unter Benützung von ZB14 und (\*):

$$\int_T \widehat{F} \cdot \Delta^{\frac{1}{2}} du^1 \dots du^m = \int_{\varphi^{-1}(T)} (\widehat{F} \cdot \Delta^{\frac{1}{2}} \circ \varphi) \cdot |\det J_\varphi| du^1 \dots du^m =$$

$$\int_{\varphi^{-1}(T)} \widehat{F} \circ \varphi \cdot (\Delta^{\frac{1}{2}} / |\det J_\varphi|) \cdot |\det J_\varphi| du^1 \dots du^m = \int_{\varphi^{-1}(T)} \widehat{F}' \cdot \Delta'^{\frac{1}{2}} du^1 \dots du^m. \quad \square$$

**Def. 3.3.4:** Speziell für  $F:=1$  (also  $f(a) \mapsto 1 \in \mathbb{R}$ ,  $\implies \widehat{F}=1$ , also  $a \in U \mapsto 1 \in \mathbb{R}$ ) heißt

$$\int_T \Delta^{\frac{1}{2}} \cdot du^1 \dots du^m = \int_{f(T)} d\sigma =: O(f(T))$$

*Oberfläche von  $f(T)$ .*

### Geometrische Motivation für $F=1$

$m=2, n=3$ : Wir verwenden ein kartesisches Koordinatensystem  $x^1 x^2 x^3$  und benutzen als Parametrisierung der Fläche den EULER-Weg  $f$ :

$$f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } f(x^1, x^2) := (x^1, x^2, z(x^1, x^2)).$$

Damit gilt insbesondere

$$f_{,1} = (1, 0, z_{,1}) \text{ und } f_{,2} = (0, 1, z_{,2}).$$

Nun betrachten wir die Rechtecksmasche um  $a$  mit den Seiten parallel zur  $x^1$  und  $x^2$ -Achse und den Seitenlängen  $2\alpha_1$  und  $2\alpha_2$ , also mit der Fläche

$$F' = 4\alpha_1 \alpha_2$$

Nun projizieren wir diese Rechtecksmasche parallel  $x^3$  in die Tangentialebene von  $f(U)$  in  $f(a)$ . Als Riß in der Tangentialebene entsteht ein Parallelogramm mit einer noch zu bestimmenden Fläche  $F$ .

Die Normalprojektion von  $f_{,j}$  auf die  $x^1 x^2$ -Ebene ist  $e_j$  ( $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ).

Damit hat das Parallelogramm in der Tangentialebene die Seitenlängen

$$|2\alpha_1 \cdot f_{,1}| \text{ und } |2\alpha_2 \cdot f_{,2}|.$$

Für dessen Fläche  $F$  gilt folglich:

$$F(a) = \|(2\alpha_1 \cdot f_{,1}) \times (2\alpha_2 \cdot f_{,2})\|(a) = 4\alpha_1 \alpha_2 \cdot \|f_{,1} \times f_{,2}\|(a).$$

Unter Benützung der Identität von LAGRANGE,  $\|f_{,j}(a)\|^2 = g_{jj}(a)$  und  $f_{,j}(a) \cdot f_{,k}(a) = g_{jk}(a)$  folgt

$$F(a) = 4\alpha_1 \alpha_2 \cdot (g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2)^{1/2}(a),$$

daher mit  $\Delta(a)$  dann

$$F(a) = F' \cdot \Delta(a)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir betrachten nun eine Überdeckung von  $T \subset U$  durch solche Rechtecksmaschen:

Da gibt es eine Indexmenge  $J=\{j\}$  derart, daß eine Masche  $F_j'$   
 $F_j' \cap T \neq \{\}$

erfüllt.

Dann ist

$$\lim_{j \in J} \sum F_j' = O(T) = \int_T dx^1 dx^2.$$

Hierin bedeutet "lim", daß die jeweiligen Rechtecksflächen gegen Null streben.

Man erhält:

$$O(f(T)) = \int_T \Delta^{1/2} dx^1 dx^2 = \lim_{j \in J} \sum F_j.$$

**Bemerkung:** (a) Die hier vorliegende Approximation ist keine Polyederapproximation, da die "Kanten" nur im Grundriß zusammenhängen: Mitte einer jeden Rechtecksmasche  $F_j$  ist ein Punkt  $a_j$ ; projiziert wird ja jeweils in die Tangentialebene von  $f(U)$  in  $f(a_j)$ , also in i.a. verschiedene Tangentialebenen.

(b) Approximation der Oberfläche durch umbeschriebene Polyeder ist möglich, durch einbeschriebene nicht (H. SCHWARZ).

(c) Wir haben uns hier auf einen Euler-Weg beschränkt, doch bedeutet dies keine Einschränkung.

**Beispiel:** Wir berechnen die Oberfläche  $O(S^2)$  einer 2-Sphäre  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ : Dabei fassen wir die Sphäre als Drehfläche auf.  $S^2$  werde erfaßt durch den Weg

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } f(u^1, u^2) = (r \cdot \cos u^1 \cdot \cos u^2, r \cdot \cos u^1 \cdot \sin u^2, r \cdot \sin u^1).$$

$u^1$  ist der Parameter für den Halbmeridian,  $u^2$  gibt den Drehwinkel an.

Wählt man  $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ , so erhält man  $S^2$  unendlich oft, daher auch die Oberfläche unendlich oft.

Wir legen  $T \subset U$  fest durch

$$\begin{aligned} -\pi/2 \leq u^1 \leq \pi/2 \\ -\pi \leq u^2 \leq \pi \end{aligned}$$

Die in der  $u^1 u^2$ -Ebene verlaufenden Geraden mit den Gleichungen

$$u^1 = -\pi/2 \text{ bzw. } u^1 = \pi/2$$

führen auf den "Nordpol" bzw. "Südpol" der Kugel, die beide unendlich oft erhalten werden; die Gleichungen

$$u^2 = -\pi \text{ bzw. } u^2 = \pi$$

führen, wie man ebenfalls leicht überprüft, auf denselben "Halbmeridian" der Kugel.

Wir erkennen: Die Injektivität von  $f$  ist längs Kurven gestört. Diese haben aber das zweidimensionale Maß Null, was für die Oberflächenberechnung nicht stört.

Zur Berechnung der Oberfläche brauchen wir gemäß vorheriger Überlegung  $\Delta = \det(g_{jk}) = (r^2 \cdot \cos u^1)^2$ .

Damit folgt für die Oberfläche  $O(S^2)$ :

$$O(S^2) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cdot \cos u^1 du^1 du^2.$$

Ausrechnen ergibt

$$O(S^2) = 4r^2\pi,$$

die bekannte Formel.

### 3.4 Parallelverschiebung auf einer m-Fläche

#### Definition eines Vektorfeldes

##### 1.Schritt: Vektorfeld auf einem affinen Raum

Sei  $A(V)$  ein affiner Raum über dem Vektorraum  $V$  und  $p \in A(V)$ . Ferner sei  $T_p A(V)$  der Tangentialvektorraum von  $A(V)$  im Punkt  $p$  und  $V_p = (p; v)$  ein Tangentialvektor mit  $v \in V$ .

**Def. 3.4.1:**  $(1) \cup T_p A(V) =: TA(V)$  heißt *Tangentialbündel* von  $A(V)$ .

(2) Die Abbildung  $\Pi$ , definiert durch

$$\Pi: TA(V) \rightarrow A(V) \text{ mit } V_p \mapsto p$$

heißt *Projektion*.

(3) Eine Abbildung  $V$ , definiert durch

$$V: A(V) \rightarrow TA(V) \text{ mit } \Pi \circ V = \text{id}_{A(V)}, \\ \text{also } p \mapsto V_p$$

heißt *Vektorfeld auf dem affinen Raum*  $A(V)$ .

##### Koordinatenmäßige Beschreibung eines Vektorfeldes:

Dazu setzen wir  $A(V) = \mathbb{R}^n$  voraus.

Sei  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $T_p \mathbb{R}^n$  der Tangentialvektorraum von  $\mathbb{R}^n$  im Punkt  $p$  und  $V_p = (p; v)$  ein Tangentialvektor aus  $T_p \mathbb{R}^n$ .

Ferner erklären wir wie in 3.3

$$E_\alpha(p) := (p; e_\alpha)$$

mit  $e_\alpha = (\delta_\alpha^1, \dots, \delta_\alpha^n)$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ . Dann kann für  $V_p$  gesetzt werden

$$V_p = v^\alpha \cdot E_\alpha(p).$$

Dabei sind

$$v^\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

von  $p$  abhängige Funktionen; wir nennen sie die *Koordinatenfunktionen des Vektorfeldes*  $V$ . Dies gestattet

**Def. 3.4.2:**  $V \in C^s(\mathbb{R}^n) : \Leftrightarrow v^\alpha \in C^s(\mathbb{R}^n)$ .

##### 2.Schritt: Vektorfeld längs eines Weges $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$

ist eine Abbildung

$$V_f: U \rightarrow TR^n \text{ mit } \Pi \circ V_f = f.$$

Also wird vermöge  $V_f$  einem Punkt  $a \in U$  ein im Flächenpunkt  $f(a)$  angehängter Vektor  $V_f(a)$  zugeordnet.

Damit kann man analog ein *Vektorfeld längs eines Flächenweges*  $f$  erklären:

$$V_{f \circ c}: I \rightarrow TR^n \text{ mit } \Pi \circ V_{f \circ c} = f \circ c.$$

##### Koordinatenmäßige Beschreibung:

Bezeichnet  $E_\alpha(f(a)) = E_\alpha \circ f(a)$  den in  $f(a)$  angehängten Vektor  $e_\alpha$ , so kann für die von  $f$  abhängigen Koordinaten  $v_f^\alpha$  von  $V_f(a)$  gesetzt werden

$$V_f(a) = v_f^\alpha \cdot (E_\alpha \circ f(a)).$$

Dabei sind

$$v_f^\alpha: U \rightarrow \mathbb{R} \quad (\alpha=1, \dots, n)$$

von  $a$  abhängige Funktionen, und wir definieren

**Def. 3.4.3:**  $V_f \in C^s(U) : \Leftrightarrow v_f^\alpha \in C^s(U).$

Analog folgt für den Vektor  $V_{f \circ c}(t_0)$ :

$$V_{f \circ c}(t_0) = v_c^\alpha \cdot E_\alpha \circ f \circ c(t_0).$$

Wieder sind

$$v_c^\alpha: I \rightarrow \mathbb{R} \quad (\alpha=1, \dots, n)$$

von  $t_0$  abhängige Funktionen, und wir definieren wieder

**Def. 3.4.4:**  $V_{f \circ c} \in C^s(I) : \Leftrightarrow v_c^\alpha \in C^s(I).$

### 3. Schritt: Tangentialvektorfeld längs $f$

ist eine Abbildung  $V_f$ , definiert durch

$$V_f: U \rightarrow T\mathbb{R}^n \text{ mit } \Pi \circ V_f = f \text{ und } V_f(a) \in T_a f \subset T_{f(a)} \mathbb{R}^n,$$

d.h. der einem Punkt  $a \in U$  zugeordnete Vektor  $V_f(a)$  ist im Flächenpunkt  $f(a)$  angehängt und liegt im Tangentialvektorraum  $T_a f$  von  $f(U)$  in  $f(a)$ .

**Def. 3.4.5:**  $\cup_{a \in U} T_a f =: T_f$  heißt *Tangentialbündel von  $f(U)$* .

Damit können wir das Tangentialvektorfeld einfacher durch

$$V_f: U \rightarrow T_f \text{ mit } \Pi \circ V_f = f$$

beschreiben.

Wieder können wir analog ein *Tangentialvektorfeld  $V_{f \circ c}$  längs eines Flächenweges  $f \circ c$*  definieren:

$$V_{f \circ c}: I \rightarrow T_f \text{ mit } \Pi \circ V_{f \circ c} = f \circ c.$$

Dies bedeutet anschaulich:

### Koordinatenmäßige Darstellung von $V_f$ :

Als Vektor im Tangentialvektorraum läßt sich  $V_f(a)$  durch

$$V_f(a) = v_f^i F_j(a)$$

beschreiben.

Als Vektor im Gesamttraum kann  $V_f(a)$  als

$$V_f(a) = v_f^\alpha \cdot E_\alpha \circ f(a)$$

angesetzt werden.

Dabei sind  $v_f^j$  bzw.  $v_f^\alpha$  die von  $a$  abhängigen Flächenkoordinaten bzw. Raumkoordinaten von  $V_f$ , also Funktionen

$$v_f^j: U \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad v_f^\alpha: U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nach 3.3 gilt

$$v_f^\alpha = f^\alpha_{,j} v_f^j, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Ist nun  $f \in C^r$ , so ist  $f^\alpha_{,j} \in C^{r-1}$ . Wir definieren daher

**Def. 3.4.6:**  $V_f \in C^s(U) \iff v_f^j \in C^s(U)$  bei  $s \leq r-1$ .

### Ableitung eines Tangentialvektorfeldes längs $f \circ c$

Nach Schritt 3 gilt

$$V_{f \circ c}(t_0) = v_c^j(t_0) \cdot F_{j \circ c}(t_0).$$

Dann folgt nach der Produktregel

$$(V_{f \circ c})'(t_0) = \dot{v}_c^j(t_0) \cdot F_{j \circ c}(t_0) + v_c^j(t_0) \cdot (F_{j \circ c})'(t_0).$$

Zur Berechnung von  $(F_{j \circ c})'$  bestimmen wir nach der Kettenregel

$$(f_{,j \circ c})'(t_0) = (\partial f_{,j} / \partial u^k)(t_0) \cdot (dc^k/dt)(t_0) = f_{,jk \circ c}(t_0) \cdot \dot{c}^k(t_0).$$

Für

$$F_j(a) = (f(a); f_{,j}(a))$$

erklären wir

$$F_{jk}(a) = (f(a); f_{,jk}(a)).$$

Damit ergibt sich

$$(V_{f \circ c})'(t_0) = \dot{v}_c^j(t_0) \cdot F_{j \circ c}(t_0) + v_c^j(t_0) \cdot \dot{c}^k(t_0) \cdot F_{jk \circ c}(t_0). \quad (3.4.1)$$

**Bem.:**  $(V_{f \circ c})'$  ist i.a. kein Tangentialvektorfeld, da der Vektor  $F_{jk \circ c}(t_0)$  i.a. nicht im Tangentialvektorraum  $T_a f$  von  $f(U)$  in  $f(a)$  liegt.

#### **ZWISCHENBEMERKUNG 15:**

Sei  $(V; g)$  ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt  $g$  und  $V_1 \subset V$  ein Untervektorraum von  $V$ . Die Vektormenge

$$V_1^\perp := \{v \in V \mid g(v, v_1) = 0 \quad \forall v_1 \in V_1\}$$

heißt **orthogonales Komplement von  $V_1$  bezüglich  $(V; g)$** .

Dann gilt die Darstellung

$$V = V_1 \oplus V_1^\perp$$

mit (1)  $V_1 \cap V_1^\perp = \{0\}$  und

$$(2) \quad \forall v \in V \quad \exists v_1 \in V_1, \exists v_1^\perp \in V_1^\perp \quad \text{mit} \quad v = v_1 + v_1^\perp.$$

Die Abbildung

$$V \rightarrow V_1 \quad \text{mit} \quad v = v_1 + v_1^\perp \mapsto v_1$$

heißt **orthogonale Projektion von  $V$  auf  $V_1$** . Sie ist ein Vektorraumhomomorphismus.

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Sei nun  $p = f(a) \in f(U)$  und  $T_{f(a)} \mathbb{R}^n$  der Tangentialvektorraum von  $\mathbb{R}^n$  im Punkt  $f(a)$ . Dann kann gesetzt werden

$$T_{f(a)}\mathbb{R}^n = T_a f \oplus T_a f^\perp;$$

$T_a f^\perp$  heißt *Normalvektorraum von f in a* und ist durch den Tangentialvektorraum  $T_a f$  von  $f(U)$  in  $f(a)$  eindeutig mitbestimmt.

Wir nennen die Orthogonalprojektion von  $T_{f(a)}\mathbb{R}^n$  auf  $T_a f$  *Tangentialprojektion in f(a)* und schreiben  $\text{tpr}_a$ .

Die Tangentialprojektion in  $f(a)$  ist nach ZB15 ein Vektorraumhomomorphismus und ordnet jedem in  $f(a)$  angehängten Vektor den in  $T_a f$  enthaltenen "Tangentialanteil" zu. Es gilt also

$$\text{tpr}_a: T_{f(a)}\mathbb{R}^n \rightarrow T_a f.$$

**Def. 3.4.7:** Der Ausdruck

$$\text{tpr}_a \left\{ (dV_{foc}/dt)(t_0) \right\} := (DV_{foc}/dt)(t_0)$$

heißt *kovariante Ableitung von  $V_{foc}$  in  $a=c(t_0)$* .

**Bem. 3.4.1:** (a) Wir betrachten eine  $m$ -Fläche im  $m$ -dimensionalen affinen Raum  $A^m = p + H(a_1, \dots, a_m)$ , also einen Teil des  $A^m$ : Diese kann durch

$$f: (u^1, \dots, u^m) \mapsto f(u^1, \dots, u^m) := p + u^j a_j$$

beschrieben werden. Offenbar ist

$$f_{,j} = a_j = \text{const},$$

folglich

$$f_{,jk} = 0, \text{ also } F_{jk} = 0.$$

Nach Formel (3.4.1) gilt dann

$$(dV_{foc}/dt)(t_0) = (DV_{foc}/dt)(t_0).$$

Hingegen besitzt eine "krumme" Fläche im  $A^m$  einen  $m$ -dimensionalen Tangentialraum. (Z.B. 2-Sphäre im  $\mathbb{R}^3$ .) Hier wird "d" von "D" verschieden sein.

**Ergebnis:** Die Abweichung von "d" gegenüber "D" "mißt" die Abweichung der Fläche vom Tangentialraum (Genauerer später).

(b) Die kovariante Ableitung ist kein geometrischer Begriff.

**Bew.:** (1) Bewegungsinvarianz:

Sei  $\bar{f} = \beta \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein zu  $f$  bewegungsgleicher Weg und  $\beta = (s, l): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Bewegung des  $\mathbb{R}^n$ .

Nach Kapitel 2 reproduzieren sich bei  $l$  die Ableitungsvektoren. Ferner ist die Tangentialprojektion ein Homomorphismus.

Die kovariante Ableitung ist also bewegungsinvariant.

(2) Parameterinvarianz:

Dazu müssen wir 2 Parameterwechsel betrachten: einen "zu  $c$  gehörigen" Parameterwechsel  $\gamma: I' \rightarrow I$ , der den zu  $c$  äquivalenten Weg  $c' = c \circ \gamma$  erzeugt, und einen "zu  $f$  gehörigen" Parameterwechsel  $\varphi: U' \rightarrow U$ , der den zu  $f$  äquivalenten Weg  $f' = f \circ \varphi$  erzeugt.

Also haben wir das Tangentialvektorfeld

$$V_{foc'} = V_{foc} \circ \gamma = V_{foc} \circ \gamma: I' \rightarrow T_f$$

zu untersuchen. Nach der Kettenregel folgt

$$(V_{foc} \circ \gamma)'(t_0') = (V_{foc})'(t_0) \cdot \dot{\gamma}(t_0').$$

Anwenden der Tangentialprojektion  $\text{tpr}_{c(t_0)}$  (=Homomorphismus) ergibt

$$(DV_{foc} \circ \gamma / dt')(t_0') = (DV_{foc} / dt)(t_0) \cdot \dot{\gamma}(t_0').$$

Da  $\dot{\gamma}$  i.a. von 1 verschieden ist, ist die kovariante Ableitung kein parameterinvarianter Begriff.

Da nach Eigenschaften eines DM  $\dot{\gamma} \neq 0$  ist, ist jedoch "D=0" eine geometrische Aussage.  $\square$

**Def. 3.4.8:** Das Tangentialvektorfeld

$$V_{foc}: I \rightarrow T_f \text{ mit } \Pi \circ V_{foc} = f \circ c$$

heißt genau dann ein **Parallelfeld**, wenn in I die Gleichung

$$DV_{foc}/dt = 0$$

gilt.

#### Diskussion:

(1) "Parallelfeld" ist eine geometrische Begriffsbildung, da "D=0" geometrisch ist.

#### (2) Motivation für den Namen:

Wir betrachten wieder eine m-Fläche im  $A^m$ :

Ein elementares Parallelfeld  $V_{foc}$  (in jedem Punkt wird ein festgewählter konstanter Vektor angehängt) ist durch

$$dV_{foc}/dt = 0$$

gekennzeichnet.

Nun beherrscht ein Bewohner dieser m-Fläche ("Flächler") die Begriffe

$$T_a f \text{ und } G_f(a) \quad \forall a \in U.$$

Man nennt daher alle Begriffe, die aus diesen beiden abgeleitet werden können, die **Innere Geometrie**.

So bedeutet z.B.

$$DV_{foc}/dt = 0,$$

daß  $dV_{foc}/dt \in T_a f^\perp$ ; d.h.: jede Änderung des Tangentialvektorfeldes  $V_{foc}$  spielt in  $T_a f^\perp$ , ist demnach für den Flächler nicht sichtbar.

Also ist der Begriff "Parallelfeld" ein Begriff der Inneren Geometrie.

#### (3) Koordinatenmäßige Beschreibung der kovarianten Ableitung:

Sei a regulär für  $f \in C^r(U)$  mit  $r \geq 2$ .

Gemäß Def.3.4.7 ist bei  $a=c(t_0)$

$$(DV_{foc}/dt)(t_0) = tpr_a [\dot{v}_c^i F_{joc}(t_0) + v_c^j(t_0) \cdot \dot{c}^k(t_0) \cdot F_{jkoc}(t_0)].$$

Da die Tangentialprojektion  $tpr_a$  ein Homomorphismus ist, gilt weiter

$$(DV_{foc}/dt)(t_0) = \dot{v}_c^i(t_0) \cdot F_{joc}(t_0) + v_c^j(t_0) \cdot \dot{c}^k(t_0) \cdot tpr_a [F_{jkoc}(t_0)].$$

Nun liegt  $\text{tpr}_a[F_{jk} \circ c(t_0)]$  im Tangentialvektorraum  $T_a f$  von  $f(U)$  in  $f(a)$ , gestattet daher die Darstellung

$$\text{tpr}_a F_{jk}(a) = \Gamma_{jk}^l(a) \cdot F_l(a). \quad (3.4.2)$$

Darin sind  $\Gamma_{jk}^l$  Funktionen

$$\Gamma_{jk}^l: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \Gamma_{jk}^l \in C^{r-2}(U).$$

**Def. 3.4.9:** Die Funktionen  $\Gamma_{jk}^l: U \rightarrow \mathbb{R}$  heißen *Christoffelsymbole 2.Art*.

Multiplizieren wir Gleichung (3.4.2) mit dem Tangentialvektor  $F_i(a)$ , so folgt

$$(\text{tpr}_a F_{jk}(a)) \cdot F_i(a) = \Gamma_{jk}^l(a) \cdot F_l(a) \cdot F_i(a).$$

Damit ergibt sich weiter

$$F_{jk}(a) \cdot F_i(a) = \Gamma_{jk}^l(a) \cdot g_{li}(a).$$

**Def. 3.4.10:** Die Ausdrücke

$$g_{li}(a) \cdot \Gamma_{jk}^l(a) = f_{,jk}(a) \cdot f_{,i}(a) =: \Gamma_{jki}$$

heißen *Christoffelsymbole 1.Art* und sind Funktionen

$$\Gamma_{jki}: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \Gamma_{jki} \in C^{r-2}(U).$$

$a$  sei regulärer Punkt für  $f$ .  $(g^{pq})$  sei die inverse Matrix zu  $(g_{pl})$ , d.h.

$$g_{pl} \cdot g^{qp} = \delta_l^q.$$

Dann folgt durch Multiplikation der Gleichung aus Def.3.4.10 mit  $g^{ip}$

$$\Gamma_{jki} \cdot g^{ip} = \Gamma_{jk}^l \cdot g_{li} \cdot g^{ip} = \Gamma_{jk}^l \cdot \delta_l^p = \Gamma_{jk}^p \quad (3.4.3) \text{ (j,k,p...feste Indizes).}$$

**Satz 3.4.1:** Die Christoffelsymbole 1. und 2.Art sind Begriffe der Inneren Geometrie.

**Beweis:** Definitionsgemäß gilt

$$g_{ji} = f_{,j} \cdot f_{,i}.$$

Wir differenzieren partiell nach  $u^k$  und erhalten

$$g_{j,k} = f_{,jk} \cdot f_{,i} + f_{,j} \cdot f_{,ik} \quad (1)$$

Zyklische Vertauschung der Indizes  $j \rightarrow i, i \rightarrow k, k \rightarrow j$  ergibt noch

$$g_{ik,j} = f_{,ij} \cdot f_{,k} + f_{,i} \cdot f_{,kj} \quad (2)$$

$$g_{kj,i} = f_{,ki} \cdot f_{,j} + f_{,k} \cdot f_{,ji} \quad (3)$$

Bilden wir die Linearkombination (1)+(2)-(3) dieser Gleichungen, so findet man

$$g_{j,k} + g_{ik,j} - g_{kj,i} = 2 \cdot f_{,jk} \cdot f_{,i} = 2 \cdot \Gamma_{jki}.$$

Da die Matrix  $(g_{jk})$  symmetrisch ist, folgt

$$\Gamma_{jki} = (g_{ki,j} + g_{ij,k} - g_{jk,i}) / 2.$$

Damit sind die Christoffelsymbole 1.Art und wegen Formel (3.4.3) auch 2.Art Begriffe der Inneren Geometrie.  $\square$

Betrachten wir noch einmal die kovariante Ableitung:

Mit (3.4.2) gilt:

$$(DV_{f \circ c} / dt)(t_0) = \dot{v}_c^j \cdot F_{j \circ c}(t_0) + v_c^j(t_0) \cdot \dot{c}^k(t_0) \cdot \Gamma_{jk}^l \circ c(t_0) \cdot F_l \circ c(t_0).$$

Benützen wir im ersten Summanden den Summationsindex  $l$  statt  $j$ , so folgt bei Herausheben

$$DV_{\text{foc}}/dt = [\dot{v}_c^l + v_c^j \cdot \dot{c}^k \cdot \Gamma_{jk}^l] \cdot F_{l0c} .$$

Ist  $V_{\text{foc}}$  ein Parallelfeld, so verschwinden nach Def.3.4.8 alle Koordinaten des Vektors  $DV_{\text{foc}}/dt$ ; für die Existenz eines Parallelfeldes  $V_{\text{foc}}$  ist also die Existenz der Lösung der  $m$  Differentialgleichungen

$$\dot{v}_c^l + v_c^j \cdot \dot{c}^k \cdot \Gamma_{jk}^l = 0, \quad l=1, \dots, m$$

notwendig.

Ergebnis: Gegeben:  $f, c$ ; gesucht sind die Funktionen

$$v_c^l: I \rightarrow \mathbb{R},$$

sodaß

$$V_{\text{foc}} = v_c^l \cdot F_{l0c}$$

ein Parallelfeld ist, also die Funktionen  $v_c^l$  obige Differentialgleichungen lösen.

#### Existenz von Parallelfeldern:

Wir betrachten die  $m$  linearen homogenen Differentialgleichungen 1.Ordnung

$$\dot{v}_c^l = -v_c^j \cdot \dot{c}^k \cdot \Gamma_{jk}^l \quad (l=1, \dots, m) \quad (3.4.4)$$

für die Funktionen  $v_c^l$  bei gegebenem  $c$  und  $f$ .

Nach ZB9 existiert zu gegebenen Anfangsbedingungen

$$\{t_0, v_c^1(t_0), \dots, v_c^m(t_0)\}$$

dann eine eindeutige globale Lösung, wenn die Koeffizienten

$$\dot{c}^k \cdot \Gamma_{jk}^l \in C^0(I)$$

erfüllen. Demnach muß  $r \geq 2$  und  $s \geq 1$  vorausgesetzt werden, wenn  $r$  bzw.  $s$  die Differentiationsklasse von  $f$  bzw.  $c$  bezeichnet.

Dann existiert genau eine Lösung  $V_{\text{foc}}$  über ganz  $I$  mit

$$V_{\text{foc}} \in C^t(I) \text{ mit } t := \min\{r-1, s\}.$$

Bem.: In obiger Anfangsbedingung könnte das  $m$ -Tupel  $(v_c^1(t_0), \dots, v_c^m(t_0))$  als ein "Anfangsvektor"  $\hat{V}$  angesprochen werden.

Wir fassen dies zusammen in

**Satz 3.4.2:** Für  $f \in C^r(U)$ ,  $r \geq 2$ ,  $f$  regulär und  $c \in C^s(I)$ ,  $s \geq 1$  gilt:

Zu jedem Anfangswert  $(t_0, \hat{V})$  mit  $t_0 \in I$  und  $\hat{V} \in T_{c(t_0)}f$  existiert genau ein Parallelfeld  $V_{\text{foc}}: I \rightarrow Tf$  mit  $V_{\text{foc}} \in C^t(I)$  bei  $t := \min\{r-1, s\}$  und  $V_{\text{foc}}(t_0) = \hat{V}$ .

#### (4) Was heißt Parallelverschiebung:

Eine Parallelverschiebung ist eine Abbildung

$$\lambda_{t_1}: T_{c(t_0)}f \rightarrow T_{c(t_1)}f \text{ mit } \hat{V} \in T_{c(t_0)}f \rightarrow \lambda_{t_1}(\hat{V}) := V_{\text{foc}}(t_1),$$

wo  $V_{\text{foc}}$  das durch  $(t_0, \hat{V})$  eindeutig bestimmte Parallelfeld ist.

Speziell: Ist  $\hat{V} = 0$ , so erhält man das "Nullfeld" als eindeutige Lösung, da die Differentialgleichung homogen ist.

Genauer verstehen wir unter "Parallelverschiebung" eine stetige Schar von Abbildungen  $\lambda_{t_1}$  bei laufendem  $t_1$  und festem  $t_0$ .

**Satz 3.4.3:** Die Parallelverschiebung  $\lambda_{t_1}: T_{c(t_0)}f \rightarrow T_{c(t_1)}f$  ist ein orthogonaler Vektorraumisomorphismus. "Der Tangentialraum wird wie ein starrer Körper bewegt, da Längen und Winkel erhalten bleiben."

Beweis: -- global, da nach Satz 3.4.2 zu jedem Anfangsvektor  $\hat{V}$  ein Parallelfeld existiert.

--  $\lambda_{t1}$  ist ein Homomorphismus, da:

Seien  $\hat{V}, \hat{W} \in T_{c(t_0)}f$ ; dann bleibt

$$\lambda_{t1}(\alpha \cdot \hat{V} + \beta \cdot \hat{W}) = \alpha \cdot \lambda_{t1}(\hat{V}) + \beta \cdot \lambda_{t1}(\hat{W})$$

zu zeigen. Dies gilt, da  $\lambda_{t1}(\hat{V})$  und  $\lambda_{t1}(\hat{W})$  Lösungen der linearen Differentialgleichung (3.4.4) sind, und die Lösungsmenge von (3.4.4) Vektorraumstruktur besitzt.

--  $\lambda_{t1}$  ist orthogonal:

Zum Nachweis studieren wir die Auswirkungen von  $\lambda_{t1}$  auf ein inneres Produkt: Seien  $\hat{V}$  bzw.  $\hat{W}$  Anfangsvektoren aus  $T_{c(t_0)}f$  und  $V_{\text{foc}}$  bzw.  $W_{\text{foc}}$  die zugehörigen Parallelfelder. Differentiation nach  $t$  gibt mit der Produktregel

$$(V_{\text{foc}} \cdot W_{\text{foc}})' = (V_{\text{foc}})' \cdot W_{\text{foc}} + V_{\text{foc}} \cdot (W_{\text{foc}})'. \quad (*)$$

Nun gilt

$$(dV_{\text{foc}}/dt) \cdot W_{\text{foc}} = (DV_{\text{foc}}/dt) \cdot W_{\text{foc}},$$

da der in  $dV_{\text{foc}}/dt$  enthaltene "Normalanteil" bei Skalarmultiplikation mit dem Tangentialvektor  $W_{\text{foc}}$  ohnehin Null ergibt.

Da ferner  $V_{\text{foc}}$  ein Tangentialfeld ist, gilt definitionsgemäß  $DV_{\text{foc}}/dt = 0$ .

Führt man dieselbe Überlegung für den zweiten Summanden in (\*) durch, so ergibt sich

$$(V_{\text{foc}} \cdot W_{\text{foc}})' = 0.$$

Damit ist das Produkt  $V_{\text{foc}} \cdot W_{\text{foc}}$  von  $t$  unabhängig, also konstant.

Aus der Orthogonalität folgt die Bijektivität.  $\square$

### 3.5 Geodätische Linien einer m-Fläche

Gegeben seien die Wege

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n, f \in C^r(U) \text{ mit } r \geq 3 \text{ und}$$

$$c: I \rightarrow U, c \in C^s(I) \text{ mit } s \geq 2.$$

Wir setzen im folgenden

$$f \circ c =: c_f: I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Mit dem ersten Ableitungsvektor  $\dot{c}_f(t_0)$  an einer Stelle  $t_0 \in I$  erklären wir den im Kurvenpunkt  $c_f(t_0)$  angehängten

$$\text{Tangentialvektor } \dot{C}_f(t_0) := (c_f(t_0); \dot{c}_f(t_0)).$$

**Def. 3.5.1:** (1) Die Abbildung

$$\dot{C}_f: I \rightarrow T_f$$

heißt *Tangentialvektorfeld des Flächenweges*  $c_f = f \circ c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

(2)  $c_f$  heißt genau dann *geodätischer Weg*, wenn gilt:

(a)  $c_f$  ist nicht konstant ( $\Leftrightarrow c_f(I)$  ist nicht einpunktig);

(b)  $\dot{C}_f$  ist ein Parallelfeld ( $\Leftrightarrow D\dot{C}_f/dt = 0$  in  $I$ ).

**Bem. 3.5.1:** (a) *Jeder geodätische Weg ist regulär (Immersion).*

**Bew.:** indirekt; angenommen es gibt eine Stelle  $t_0 \in I$  mit  $\dot{c}_f(t_0) = 0$ . Folglich ist  $\dot{C}_f(t_0) = 0 \Leftrightarrow \|\dot{C}_f(t_0)\| = 0$ . Da  $\dot{C}_f$  ein Parallelfeld ist, folgt

$$\|\dot{C}_f\| = 0 \text{ in } I \Rightarrow \dot{c}_f = 0 \text{ in } I \Rightarrow c_f = \text{konstant in } I,$$

und das ist ein Widerspruch zu Def.3.5.1.  $\square$

(b) Ist "Geodätischer Weg" ein geometrischer Begriff:

(1) *Bewegungsinvarianz:* liegt vor, da die Ableitungsvektoren bei 1 "reproduziert" werden.

(2) *Parameterinvarianz:*

Sei  $c_f' = c_f \circ \gamma$  ein zu  $c_f$  äquivalenter Flächenweg. Nach der Kettenregel gilt:

$$\dot{c}_f'(t_0') = \dot{c}_f(t_0) \cdot \dot{\gamma}(t_0') \text{ bei } \gamma(t_0') = t_0.$$

Wir benötigen

$$\ddot{c}_f'(t_0') = \ddot{c}_f(t_0) \cdot (\dot{\gamma}(t_0'))^2 + \dot{c}_f(t_0) \cdot \ddot{\gamma}(t_0').$$

Hängen wir diesen Vektor im Flächenpunkt  $c_f(t_0)$  an und unterwerfen ihn der Tangentialprojektion (=Homomorphismus), so folgt wegen

$$\ddot{c}_f'(t_0') = (d\dot{c}_f'/dt')(t_0')$$

$$(D\dot{C}_f'/dt')(t_0') = (D\dot{C}_f/dt)(t_0) \cdot (\dot{\gamma}(t_0'))^2 + \dot{C}_f(t_0) \cdot \ddot{\gamma}(t_0').$$

Da  $c_f$  geodätischer Weg ist, gilt

$$(D\dot{C}_f/dt)(t_0) = 0$$

und es bleibt

$$(D\dot{C}_f'/dt')(t_0') = \dot{C}_f(t_0) \cdot \ddot{\gamma}(t_0') \quad (3.5.1)$$

und dieser Ausdruck ist i.a. von Null verschieden, sodaß Def.3.5.1 für  $c_f'$  i.a. nicht erfüllt ist.

Der Begriff "Geodätischer Weg" ist also nicht parameterinvariant und daher nicht geometrisch.

**Def. 3.5.2:** (1)  $c_f(I)$  heißt *Geodätische (geodätische Linie, geodätische Flächenkurve)*, wenn es einen zu  $c_f$  äquivalenten geodätischen Weg gibt.

(2) Jeder Parameter eines solchen Weges heißt *natürlicher Parameter*:

**Bem.:** "Geodätische" ist ein geometrischer Begriff.

**Satz 3.5.1:** Ein Parameter  $t$  einer geodätischen Linie ist genau dann natürlich, wenn  $t$  proportional zur Bogenlänge ist.

**Beweis:** Wir führen den Beweis in zwei Schritten:

(a) 1.Schritt:

Sei  $c_f$  ein geodätischer Weg und  $c_f' = c_f \circ \gamma$  ein zu  $c_f$  äquivalenter Weg. Wir suchen nach Bedingungen für den Parameterwechsel  $\gamma$ , mit denen  $c_f'$  wieder ein geodätischer Weg ist.

Definitionsgemäß muß dazu

$$D\dot{C}_f'/dt' = 0 \text{ in } I'$$

erfüllt sein. Dies ist nach Formel (3.5.1) und Bemerkung 3.5.1,(a) äquivalent zu

$$\ddot{\gamma} = 0 \text{ in } I'.$$

Genau dann hat  $\gamma: I' \rightarrow I$  die Gestalt

$$\gamma(t') = \alpha \cdot t' + \beta \text{ mit } \alpha \neq 0,$$

da  $\dot{\gamma} \neq 0$  unerlässlich ist.

(b) 2.Schritt:

Wir zeigen: Die Bogenlänge ist ein natürlicher Parameter.

Sei zum Nachweis  $c_f(I)$  geodätische Linie und mit Def.3.5.2 oBdA  $c_f$  ein geodätischer Weg. Nach Def.3.5.1 gilt

$$D\dot{C}_f/dt = 0 \text{ in } I.$$

Daher kann

$$\|\dot{C}_f\| =: \alpha^{-1} \in \mathbb{R}, \alpha = \text{const. in } I$$

gesetzt werden.

Sei nun

$$\gamma: t' \mapsto \gamma(t') =: \alpha \cdot t' \quad (=t) \quad (*)$$

ein Parameterwechsel mit der Bauart aus Beweisschritt (a), der den Weg

$$c_f' = c_f \circ \gamma: I' \rightarrow \mathbb{R}^n$$

induziert.  $c_f'$  ist nach Schritt 1 ein geodätischer Weg.

Nun ist

$$\dot{c}_f'(t_0') = \dot{c}_f(t_0) \cdot \dot{\gamma}(t_0'),$$

folglich

$$\|\dot{c}_f'\| = \|\dot{c}_f\| \cdot |\dot{\gamma}| = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1 \text{ in } I'.$$

Damit ist die Bogenlänge und nach (\*) auch jeder zur Bogenlänge proportionale Parameter ein natürlicher Parameter.  $\square$

**Bem.:** Um zu erkennen, ob  $c_f(I)$  geodätische Linie ist, braucht daher nur die Bogenlängenparametrisierung untersucht zu werden.

### Diskussion:

(1) Sei  $c_f(I)$  geodätische Linie und  $c_f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  oBdA geodätischer Weg. Definitionsgemäß gilt  $D\dot{C}_f/dt = 0$  in  $I$ .

Man nennt  $c_f(I)$  auch *Autoparallellkurve*.

Bem.: Im  $R^n$  spielen die geraden Linien die Rolle der Geodätischen.

(2) Existenz von Geodätischen (Wegen):

Damit  $c_f: I \rightarrow R^n$  ein geodätischer Weg sein kann, muß notwendig für die Flächenkoordinaten  $\dot{c}^j$  von  $\dot{C}_f = \dot{c}^j \cdot F_{j0}$  gemäß Gleichung (3.4.4) die Differentialgleichung

$$\ddot{c}^l + \dot{c}^i \dot{c}^k \cdot \Gamma_{jk}^l = 0 \quad (3.5.2)$$

lösbar sein.

Genauer handelt es sich um ein System von  $m$  linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung, wo  $c^1, \dots, c^m$  die gesuchten Lösungen sind; denn damit ist  $c$  und folglich  $c_f = f \circ c$  bestimmt.

**ZWISCHENBEMERKUNG 16:**

Es sei  $I$  ein offenes Intervall und  $t \in I$ . Ferner sei  $U \subset R^m$  eine offene Teilmenge des  $R^m$  und  $w = (w^1, \dots, w^m) \in U$ . Dann heißt

$$dw/dt = f(t, w)$$

ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung, wo

$$f: I \times U \subset R^{m+1} \rightarrow R^m$$

eine vorgegebene Funktion mit  $f \in C^s(I \times U)$  und  $s \geq 1$  sei.

Im Falle der Lösbarkeit ist die "Lösung" eine Funktion

$$g: J \rightarrow R^m$$

mit (1)  $g(J) \subset U$ ,  $J \subset I$ ;

(2)  $dg/dt = f(t, g(t))$ .

Nach einem Ergebnis der Analysis existiert zu jeder Anfangsbedingung

$$\{t_0 \in I; (\hat{w}^1, \dots, \hat{w}^m) \in U\} \text{ mit } g(t_0) = (\hat{w}^1, \dots, \hat{w}^m)$$

lokal um  $t_0$  genau eine Lösung  $g \in C^{s+1}(J)$ .

Bem.: (a) I.a. ist  $J \neq I$ ; die "Größe" des Intervalls  $J$  hängt von  $t_0$  ab.

(b) --  $s \geq 1$ : eindeutige Lösung;

--  $s = 0$ : es existieren i.a. mehrere Lösungen ("C<sup>0</sup> + Lipschitzbedingung" reicht für die eindeutige Existenz).

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Wir schreiben Gleichung (3.5.2) um in eine Differentialgleichung 1. Ordnung, indem wir setzen

$$\dot{c}^l = v^l =: f_2(v^1, \dots, v^m); \text{ daraus folgt}$$

$$\dot{v}^l = -v^j \cdot v^k \cdot \Gamma_{jk}^l =: f_1(t, v^1, \dots, v^m, c^1, \dots, c^m).$$

Wegen  $l=1, \dots, m$  haben wir nun in Summe  $2m$  lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung erhalten.

Gemäß ZB16 bleibt nun

$$f_j \in C^1 \quad (j=1, 2)$$

zu untersuchen:

--  $f_2$  ist linear in  $v^l$ , daher  $\in C^\infty$ .

--  $f_1$  ist in  $v^j$  quadratisch; wegen  $\Gamma_{jk}^l \in C^{r-2}(U)$  für  $f \in C^r(U)$  müssen wir daher  $r \geq 3$  voraussetzen.

Als Anfangsbedingung wählen wir

$$\{t_0; c^1(t_0), \dots, c^m(t_0); \dot{c}^1(t_0), \dots, \dot{c}^m(t_0)\},$$

die offenbar einen Tangentialvektor festlegt.

Nach ZB16 gibt es dann lokal um  $t_0$  genau eine Lösung  
 $(c^1, \dots, c^m, \dot{c}^1, \dots, \dot{c}^m) \in C^{s+1}$ ;

dies bedeutet dann

$$(c^1, \dots, c^m) \in C^r(J).$$

Nach Vorherigem gibt es zu gegebenem Anfangsvektor genau einen *geodätischen Weg*; wodurch ist hingegen eine *geodätische Linie* festgelegt? Dazu die folgende Überlegung:

Sei  $c_f: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  der zu dem gegebenen Anfangsvektor  $\hat{V}$  eindeutig bestimmte geodätische Weg. Zu  $\lambda \cdot \hat{V}$  gibt es dann (wieder nach Vorherigem) genau einen geodätischen Weg  $\bar{c}_f$  mit  $c_f(J) = \bar{c}_f(J)$ .

Genauer gilt:  $c_f$  und  $\bar{c}_f$  sind äquivalente Wege.

Bew.: Wir definieren den Weg

$$c_f' := c_f \circ \gamma \text{ mit } \gamma(t') := \lambda \cdot t' = t.$$

Da  $\gamma$  linear ist, ist nach Satz 3.5.1  $c_f'$  wieder ein geodätischer Weg.

Es ist für die Anfangsstelle  $t_0 \in J$

$$\dot{c}_f'(t_0') = \dot{c}_f(t_0) \cdot \dot{\gamma}(t_0').$$

Wegen  $\dot{c}_f(t_0) = \hat{V}$  erhält man

$$\dot{c}_f'(t_0') = \lambda \cdot \hat{V}.$$

Ergebnis: Zu gegebener Flächentangente existiert lokal genau eine geodätische Linie.  $\square$

Wir fassen zusammen in

**Satz 3.5.2:** *Auf jeder regulären  $C^r$ -Fläche ( $r \geq 3$ ) existiert zu jedem Tangentialvektor als Anfangsbedingung lokal genau ein geodätischer Weg und zu jeder Flächentangente lokal genau eine geodätische Linie; diese sind  $\in C^r$ .*

(3) Geometrische Kennzeichnung von geodätischen Linien:

Wir formulieren zuerst

**Satz 3.5.3:** (1) *Jede geradlinige Flächenkurve ist Geodätische.*

(2) *In jedem Nichtwendepunkt einer Geodätischen ist die Schmiegebene zum Tangentialraum der Fläche orthogonal.*

Beweis: (Ad 1) Eine geradlinige Flächenkurve kann durch den Weg  $c_f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$c_f(t) := f(a) + t \cdot v$$

mit  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  und  $(f(a); v) \in T_a f$  beschrieben werden.

Damit folgt

$$\dot{c}_f = v = \text{const}, \quad \ddot{c}_f = 0,$$

und schließlich  $DC_f/dt = 0$  in  $I$ . Nach Def.3.5.2 ist  $c_f(I)$  Geodätische.

(Ad 2) Vorerst eine Anleihe aus der Kurventheorie:

Wenn  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  regulär, dann kann  $\|c\| = 1$  in  $I$  gesetzt werden. Für die Begleitbasis gilt dann jedenfalls  $c_1 = \dot{c}$ ,  $\dot{c}_1 = \kappa_1 \cdot c_2$ .

Zurück zu unseren Bezeichnungen:

Sei  $c_f = \text{foc}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein geodätischer Weg und  $c_f(t_0)$  kein Wendepunkt von  $c_f(I)$ , d.h. es ist nach (2.5.3)  $\kappa_1(t_0) \neq 0$ .

Aus der Tatsache l.u.  $\{\dot{c}_f(t_0), \ddot{c}_f(t_0)\}$  folgt, daß  $c_f(t_0)$  ein regulärer Punkt von  $c_f(I)$  ist. Wir können daher in einer Umgebung von  $t_0$   $\|\dot{c}_f\|=1$  voraussetzen.

Wegen  $\dot{c}_f(t_0) = (c_f)_1(t_0)$  folgt

$$d\dot{c}_f/dt(t_0) = (c_f)_1'(t_0) = \kappa_1(t_0) \cdot (c_f)_2(t_0).$$

$c_f$  ist geodätischer Weg, also

$$D\dot{C}_f/dt(t_0) = 0 \text{ in } I.$$

Genau dann ist

$$d\dot{C}_f/dt(t_0) = (c_f(t_0); \kappa_1(t_0) \cdot (c_f)_2(t_0)) \in T_{c_f(t_0)}^{\perp f};$$

also ist die Schmiegeebene, die von ja von  $(c_f)_1$  und  $(c_f)_2$  aufgespannt wird, zum Tangentialraum  $T_{c_f(t_0)}^f$  orthogonal.  $\square$

#### (4) Beispiele:

(a) Die Geodätischen einer  $m$ -Fläche in einem  $A^m$  sind genau die geradlinigen Flächenkurven.

Bew.: eine geradlinige Flächenkurve ist nach Satz 3.5.3 Geodätische.

Dies sind alle, da zu einem gegebenem Tangentialvektor genau eine Flächentangente (=Gerade des  $A^m$ ) und dazu nach Satz 3.5.2 genau eine Geodätische existiert.  $\square$

#### (b) $m=2, n=3$ :

Es sei  $c_f(I)$  eine ebene, wendepunktfreie Flächenkurve.

Vor.: Die Trägerebene  $\varepsilon$  von  $c_f(I)$  sei längs  $c_f(I)$  zur Tangentialebene normal.

Beh.:  $c_f(I)$  ist Geodätische.

Bew.: Satz 3.5.3.  $\square$

So sind z.B. die Meridiane einer euklidischen Drehfläche geodätische Linien.

(c) Gesimsflächen: Eine Fläche heißt **Gesimsfläche**, wenn eine stetige Schar von Ebenen existiert, die die Fläche orthogonal schneiden.

Nach (b) sind die so entstehenden Schnittkurven Geodätische.

Speziell: Verwenden als Ebenenschar die Ebenen eines Büschels, so erhalten wir als Gesimsflächen die Drehfläche mit dem Büschelträger als Achse:

Nach (b) sind die Meridiane einer Drehfläche Geodätische. Nun gilt weiters:

Ein Breitenkreis einer Drehfläche ist genau dann Geodätische, wenn die Meridiantangente parallel zur Drehachse ist.

Wir erhalten z.B. Äquator- und Kehlkreise.

Noch ein Hinweis: Bei Ansicht parallel zur Drehachse sind diese Kreise Konturkreise, jedoch berandet der Umriß nicht notwendig den Bildbereich; daher ist die Eigenschattengrenze nicht notwendig Beleuchtungsgrenze.

Beispiel: Drehzylinder:  $c_f(I) = \text{Geodätische} \iff$

- $c_f(I)$  ist -Erzeugende,
- Breitenkreis oder
- Schraublinie.

Bew.: (a) - eine Erzeugende ist Geodätische, da sie eine gerade Linie ist.

- ein Breitenkreis ist Geodätische, da die Meridiantangente = Erzeugende zur Achse parallel ist.

- Schraublinie  $k$ : Aus der Kurventheorie (Kap. 2.5) ist

$$\tau/\kappa = \text{const.}$$

bekannt. Damit ist  $k$  Böschungskurve (d.h. der Böschungswinkel  $\alpha$  ist konstant) (Ü11). Folglich gilt für die Hauptnormale

$$n = c_f(t_0) + H((c_f)_2(t_0)):$$

$n$  ist orthogonal  $v$  (d.h. parallel  $\pi$ ), wenn  $v$  einen Richtungsvektor der Zylinderachse bezeichnet.

Also ist die Schmiegeebene normal zur Tangentialebene, und nach Satz 3.5.3 ist  $k$  Geodätische.

(b) Erzeugenden, Breitenkreise und Schraublinien sind alle Geodätischen auf dem Drehzylinder: zu einer gegebenen Tangente existiert einerseits nach Satz 3.5.2 lokal genau eine Geodätische und andererseits genau eine der drei oben genannten Kurven.  $\square$

(5) "KÜRZESTE" (nach L. EULER):

Es sei  $c_f(I)$  eine Flächenkurve mit  $c_f(0) =: p$  und  $c_f(1) =: q$ . Dann kann die Bogenlänge  $L_0^1(c_f)$  berechnet werden. Daher die Frage:

Wann ist diese Bogenlänge minimal bezüglich Vergleichskurven?

Wir betrachten deshalb eine Schar  $\lambda c_f$  von Vergleichskurven:

$$\begin{aligned} \lambda c_f: \lambda I \rightarrow \mathbb{R}^n; \lambda \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \quad \text{mit} \\ \lambda c_f(0) = p, \lambda c_f(1) = q \quad \text{für alle } \lambda; \end{aligned}$$

ferner sei  $c_f = {}^0c_f$ , d.h.  $c_f$  gehört dieser Schar an.

Wir setzen voraus, daß  $\lambda c_f$  in allen Variablen, also auch in  $\lambda \in \mathbb{C}^1$  ist.

Was bedeutet nun die Ungleichung

$$L_0^1(\lambda c_f) \geq L_0^1(c_f) \quad \text{für alle } \lambda ?$$

(1767: ... ein Ansatz zur Variationsrechnung).

Unter diesen Voraussetzungen heißt  $c_f$  "Kürzeste".

Als eine notwendige Bedingung für die Kürzeste ergibt sich

$$(dL_0^1(\lambda c_f)/d\lambda)(0) = 0.$$

Bei weiterem Ausrechnen dieser Bedingung ergibt sich die EULERSche Differentialgleichung dieses Variationsproblems, und diese ist die Differentialgleichung der geodätischen Linien, sodaß gilt:

*Eine Kürzeste ist sicher Geodätische.*

Vorsicht: Die Umkehrung ist falsch; es gilt genauer:  
Wenn  $p, q$  "nahe", dann ist eine Geodätische auch Kürzeste.

Dazu ein Beispiel:

Wir betrachten eine 2-Sphäre  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  und zwei Punkte  $p, q \in S^2$ :

Die einzige Geodätische durch  $p$  und  $q$  ist der durch  $p$  und  $q$  bestimmte Großkreisbogen, da nur bei Großkreisen die Trägerebene (=Schmiegebene) zur Tangentialebene normal steht.

Liegen  $p$  und  $q$  nicht diametral auf der Kugel, so gibt es einen kürzeren und einen längeren Weg von  $p$  nach  $q$  längs des Großkreises.

Betrachtet man den längeren, so kann man leicht die obige Behauptung bestätigen.

### 3.6 Wegunabhängigkeit der Parallelverschiebung

Es sei  $V_{foc}: I \rightarrow T_f$  mit  $\Pi \circ V_{foc} = f_{oc}$  ein Tangentialvektorfeld längs des Flächenweges  $f_{oc}$ .

Nach 3.4 kann

$$V_{foc}(t_0) = v_c^l(t_0) \cdot F_{l,oc}(t_0)$$

gesetzt werden, wobei die Funktionen

$$v_c^l: I \rightarrow \mathbb{R}$$

die Flächenkoordinaten des Tangentialvektorfeldes darstellen.

Nach Def. 3.4.8 gilt:

$$V_{foc} \text{ ist ein Parallelfeld } \Leftrightarrow DV_{foc}/dt = 0 \text{ in } I.$$

Nach 3.4 lautet die Differentialgleichung eines Parallelfeldes

$$\dot{v}_c^l + v_c^j \cdot \dot{c}^k \cdot \Gamma_{jk}^l \circ c = 0, \quad l=1, \dots, m.$$

Da in dieser Differentialgleichung der Weg  $c$  eingeht, wird die Parallelverschiebung vermutlich vom Weg abhängig sein.

#### Beispiele:

(1) Wir betrachten eine  $m$ -Fläche im  $A^m$ :

Hier ist bekanntlich " $d$ " = " $D$ "; also ist ein Parallelfeld  $V_{foc}$  mit einem elementaren Parallelfeld identisch (in jedem Punkt wird ein festgewählter Vektor angehängt), d.h. es ist

$$\dot{v}_c^l = 0, \text{ also } v_c^l = \text{const.}$$

Damit ist hier die Parallelverschiebung wegunabhängig.

(2) Wir betrachten ein sphärisches Dreieck NAB auf einer Kugel (besteht aus drei Großkreisbögen):

Nach Satz 3.4.3 ist die Parallelverschiebung ein orthogonaler Vektorraumisomorphismus, d.h. der Winkel eines (beliebig gewählten) Tangentialvektors (hier zuerst  $90^\circ$ , dann  $0^\circ$ ) gegen die Großkreisbögen bleibt bei der Parallelverschiebung fest.

Also folgt:

Die Parallelverschiebungen längs der Großkreisbögen PAN und PBN liefern stets (d.h. auch bei Wahl eines anderen sphärischen Dreiecks) verschiedene Tangentialvektoren in  $N$ . Damit ist die Parallelverschiebung wegabhängig.

(3)

**Def. 3.6.1:** Eine Parametrisierung einer Fläche heißt *kartesisch*, wenn gilt:

$$g_{jk} = \delta_{jk}.$$

Damit folgt:

*Falls kartesische Koordinaten existieren, ist die Parallelverschiebung wegunabhängig.*

**Bew.:**  $g_{jk} = \delta_{jk}$  induziert  $\Gamma_{jk}^l = 0$ . Damit reduziert sich die Differentialgleichung eines Parallelfeldes auf  $\dot{v}_c^l = 0$ , also  $v_c^l = \text{const.}$ ; die Kurve ist damit weg.  $\square$

Beispiele für Flächen im  $\mathbb{R}^3$ , die kartesische Parameter gestatten:

(1) Zylinderflächen mit regulärem  $C^1$ -Normalschnitt"  $c(I)$ :

OBdA. gelte  $\| \dot{c} \| = 1$  in  $I$ ; oBdA. sei  $\| a \| = 1$ .

Normalschnitt heißt:

$$\dot{c} \cdot a = 0 \text{ in } I.$$

Für die Zylinderfläche

$$f(u^1, u^2) = c(u^1) + u^2 \cdot a$$

folgt damit

$$f_{,1} = \dot{c} \text{ und } f_{,2} = a.$$

Ergebnis:  $g_{jk} = \delta_{jk}$ .

(2) Halbkegel mit regulärer  $C^1$ -Richtkurve  $c(I)$ :

OBdA. gelte  $\| \dot{c} \| = 1$  in  $I$ ; die Richtkurve liege auf der im Ursprung zentrierten Einheitskugel, d.h. es gelte oBdA.  $\| c \| = 1$  in  $I$ .

Wir setzen die Kegelfläche an durch

$$f(u^1, u^2) = u^2 \cdot c(u^1) \text{ mit } U = I \times \mathbb{R}^+,$$

d.h. die Kegelspitze (=Kugelmittle) fällt weg.

Dann folgt

$$f_{,1} = u^2 \cdot \dot{c}, \quad f_{,2} = c.$$

Folglich gilt wegen  $c \cdot \dot{c} = 0$

$$g_{11} = (u^2)^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1.$$

Damit ist diese Parametrisierung der Fläche noch nicht kartesisch; letzteres werden wir durch einen Parameterwechsel erreichen:

Statt des Parameterwechsels  $\varphi: U' \rightarrow U$  betrachten wir lieber

$$\varphi^{-1}: U \rightarrow U' \text{ mit } u^1 := u^2 \cdot \sin u^1, \\ u^2 := u^2 \cdot \cos u^1. \text{ ("Polarkoordinaten").}$$

Nun muß aber zuerst nachgeprüft werden, ob  $\varphi^{-1}$  tatsächlich ein Parameterwechsel ist:

--Wegen  $\varphi^{-1} \in C^\infty$  paßt die Differentiationsklasse;

-- $\varphi^{-1}$  ist regulär, da:

Die Jacobimatrix  $J_{\varphi^{-1}}$  von  $\varphi^{-1}$  lautet

$$\begin{bmatrix} -u^2 \cdot \sin u^1 & u^2 \cdot \cos u^1 \\ \cos u^1 & \sin u^1 \end{bmatrix}$$

Wegen  $\det J_{\varphi^{-1}} = -u^2 \neq 0$  in  $I \times \mathbb{R}^+$  ist  $\varphi^{-1}$  und damit  $\varphi$  ein Parameterwechsel.

Bleibt zu zeigen:  $\varphi: U' \rightarrow U$  ist "der richtige":

Nach 3.3 gilt ja

$$g'_{j'k'} = g_{jk} \cdot u^j_{,j'} \cdot u^k_{,k'} \quad (*)$$

Wir benötigen also die Ableitungen  $u^j_{,j'}$  des Parameterwechsels  $\varphi$ , studieren daher die Jacobimatrix  $J_\varphi$  von  $\varphi$  (invers zu  $J_{\varphi^{-1}}$ ):

$$\begin{bmatrix} -\sin u^1 / u^2 & \cos u^1 \\ \cos u^1 / u^2 & \sin u^1 \end{bmatrix}$$

Unter Verwendung der vorhin berechneten  $g_{jk}$  ergibt sich schließlich gemäß (\*)

$$g'_{1,1} = (u^2)^2 \cdot (-\sin u^1 / u^2)^2 + 1 \cdot (\cos u^1)^2 = 1,$$

und analog

$$g'_{1,2} = 0, \quad g'_{2,2} = 1.$$

Ergebnis: Damit gestatten derartige Halbkegel kartesische Parameter.

Bem.: Der Flächler kann in solchen Fällen nicht unterscheiden, ob er lokal auf einem Kegel, einem Zylinder oder in einer Ebene ist.

Satz 3.6.1: *Auf einer regulären  $C^2$ - $m$ -Fläche ist die Parallelverschiebung genau dann lokal wegunabhängig, wenn in der Umgebung jedes Punktes  $a \in U$  stets eine kartesische Parametrisierung existiert, d.h. wenn die innere Geometrie "lokal euklidisch" ist.*

Beweis: Falls kartesische Koordinaten existieren, so ist nach Bsp.3 die Parallelverschiebung wegunabhängig.

Umkehrung:

VOR.: oBdA. sei nun die Parallelverschiebung im zusammenhängenden Gebiet wegunabhängig.

BEH.: in  $U$  existieren kartesische Koordinaten.

Unser Ziel ist daher ein geeigneter Parameterwechsel  $\varphi$ . Wir führen dazu den Beweis in 3 Schritten:

Schritt 1: Sei  $a \in U$  regulär; genau dann ist bekanntlich  $\{F_1(a), \dots, F_m(a)\}$  eine Basis des Tangentialvektorraumes  $T_a f$  von  $f(a)$  in  $f(U)$ . Nach SCHMIDT existiert in  $T_a f$  die ONB

$$\{({}_j V^{\hat{}} | j'=1, \dots, m)\}.$$

Wir betrachten nun Parallelfelder  $({}_j V_f$  zu diesen Anfangswerten  $({}_j V^{\hat{}}$ , d.h. es ist

$$({}_j V_f(a) = ({}_j V^{\hat{}}),$$

und zwar für beliebige Flächenkurven durch  $f(a) \in f(U)$ .

Nach Voraussetzung ist  $({}_j V_f$  nur von Anfangspunkt  $a \in U$  und Endpunkt  $b \in U$  abhängig:

$$({}_j V_f: U \rightarrow T_f \quad \text{mit} \quad ({}_j V_f = ({}_j V^{\hat{}})^{\vee} \cdot F_1,$$

wobei hier im Gegensatz zu 3.4

$$({}_j V^{\hat{}}: U \rightarrow R,$$

und nicht  $I \rightarrow R$  gilt.

Nach Satz 3.4.3 ist die Parallelverschiebung ein orthogonaler Vektorraumisomorphismus, damit ist

$$\{({}_j V_f(b) | j'=1, \dots, m\} \quad \text{für alle } b \in U$$

stets eine ONB in  $T_b f$ , d.h. es ist

$$({}_j V_f \cdot ({}_k V_f = \delta_{jk}, \quad \text{in } U. \quad (*)$$

Nach 3.4 ist ein Tangentialvektorfeld  $V_{foc}: I \rightarrow T_f$  (längs eines Flächenweges

foc) mit  $V_{\text{foc}} = v_c^l \cdot F_{l\text{oc}}$  genau dann ein Parallelfeld, wenn in  $I \dot{v}_c^l + v^j \cdot \dot{c}^k \cdot \Gamma_{jk}^l \text{oc} = 0$  (\*\*\*) gilt.

Wir schränken nun  $(j)V_f$  auf eine beliebige Flächenkurve  $\text{foc}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein, d.h. es ist

$$(j)V_{\text{foc}}(t) = (j)v^l \text{oc}(t) \cdot F_{l\text{oc}}(t) .$$

Wegen (Kettenregel)

$$\dot{v}_c^l = (j)v^l \text{oc} = (j)v^l_{,k} \text{oc} \cdot \dot{c}^k$$

lautet die Differentialgleichung (\*\*\*) nun wie folgt:

$$(j)v^l_{,k} \text{oc} \cdot \dot{c}^k + (j)v^j \dot{c}^k \cdot \Gamma_{jk}^l \text{oc} = 0 .$$

Umformen ergibt

$$\dot{c}^k \cdot (j)v^l_{,k} + (j)v^j \Gamma_{jk}^l \text{oc} = 0 .$$

Da diese Beziehung für beliebiges  $c$  und ferner für alle  $a \in U$  gilt, folgt die Bedingung

$$(j)v^l_{,k} = - (j)v^j \Gamma_{jk}^l \text{ mit } j', j, k, l = 1, \dots, m \text{ (***)}$$

*Bisheriges Ergebnis:* Die Parallelverschiebung ist genau dann wegunabhängig, wenn die Bedingung (\*\*\*) für die bekannt Funktionen  $(j)v^l: U \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt ist.

Diese Bedingung soll die Existenz eines PW  $\varphi$  (wie in Bsp.2) sichern:

Schritt 2: Wir wählen den Parameterwechsel  $\varphi$  so, daß die neuen Basisfelder  $F'_j$  die Parallelfelder  $(j)V_f$  aus Schritt 1 sind, d.h.

$$F'_j = (j)V_f \text{ für } j = 1, \dots, m .$$

Nach (\*) gilt dann nämlich  $g'_{j'k'} = \delta_{j'k'}$ , und das ist ja unser Ziel.

[Nach 3.3, Diskussionspunkt 2 besteht im Falle eines Basiswechsels wegen  $v^l_{,j'} = v^{k'} \cdot f'_{j'k}$ , die Umrechnung  $v^l = v^{k'} \cdot u^1_{,k}$ .]

Unsere geometrische Forderung lautet

$$(j)v^{k'} = \delta_j^{k'} .$$

Einsetzen ergibt

$$(j)v^l = \delta_j^{k'} \cdot u^1_{,k'} = u^1_{,j} .$$

Damit muß der Parameterwechsel  $\varphi: U' \rightarrow U$  mit

$$(u^1, \dots, u^m) \mapsto (u^1(u^1, \dots, u^m), \dots, u^m(u^1, \dots, u^m))$$

die Differentialgleichung

$$u^1_{,j'} = (j)v^1, \quad l = 1, \dots, m \quad (4*)$$

mit den bekannten Funktionen  $(j)v^1$  erfüllen.

Genauere Auskunft gibt uns

#### ZWISCHENBEMERKUNG 17:

Seien  $U \subset \mathbb{R}^m$  und  $\hat{U} \subset \mathbb{R}^n$  offene Gebiete (damit ist  $U \times \hat{U}$  offen in  $\mathbb{R}^{m+n}$ ).

Ferner seien

$$f_j = (f_j^1, \dots, f_j^n): U \times \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, m$$

$m$  Funktionen mit den  $n$  Koordinatenfunktionen

$$f_j^\alpha: U \times \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben, wobei wir  $f_j^\alpha \in C^s(U \times \hat{U})$  mit  $s \geq 1$  voraussetzen. Dann heißt

$$\partial z / \partial u^j = f_j(u, z) \text{ mit } u = (u^1, \dots, u^m) \in U, \quad z = (z^1, \dots, z^n) \in \hat{U},$$

$$\partial z^\alpha / \partial u^j = f_j^\alpha(u^1, \dots, u^m, z^1, \dots, z^n), \quad \alpha = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m$$

ein **totales System von partiellen Differentialgleichungen 1.Ordnung**.

Dabei sind alle 1.Ableitungen der zu bestimmenden Funktion  $z=(z^1, \dots, z^n)$  bekannt.

Gesucht sind  $n$  Funktionen

$$g^\alpha(u^1, \dots, u^m): U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha=1, \dots, n,$$

die in die Differentialgleichung passen, d.h. für die

$$\partial g^\alpha / \partial u^j = f_j^\alpha(u^1, \dots, u^m, g^1(u^1, \dots, u^m), \dots, g^n(u^1, \dots, u^m))$$

Zur Lösung benötigen wir Anfangsbedingungen

$$(\hat{u}^1, \dots, \hat{u}^m) \in U$$

$$(\hat{z}^1, \dots, \hat{z}^n) \in \hat{U}, \text{ also } g^\alpha(\hat{u}^1, \dots, \hat{u}^m) = \hat{z}^\alpha.$$

Für eine  $C^2(U)$ -Lösung  $z^\alpha$  ist nach SCHWARZ die

$$\text{Integrabilitätsbedingung} \quad z^\alpha_{,pq} = z^\alpha_{,qp}$$

notwendig.

Diese Bedingung muß später noch in Bedingungen für  $f_j^\alpha$  umformuliert werden.

Nach FROBENIUS ist die Integrabilitätsbedingung auch hinreichend (was für uns wichtig sein wird).

In Kurzform gilt also: Ist die Integrabilitätsbedingung in  $U \times \hat{U}$  erfüllt und ist  $f_j^\alpha \in C^s(U \times \hat{U})$ ,  $s \geq 1$ , dann existiert zu jeder Anfangsbedingung lokal eine eindeutige Lösung  $g^\alpha \in C^{s+1}$ .

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Schritt 3: Das System (4\*) ist also ein totales System. Um von den Bezeichnungen aus der Zwischenbemerkung zu unseren Bezeichnungen zu gelangen, muß gesetzt werden

$$z^\alpha \mapsto u^1, \quad (\alpha \mapsto 1, \quad n \mapsto m)$$

$$u^j \mapsto u^j,$$

$$f_j^\alpha \mapsto (j') v^1.$$

Jetzt sind nach ZB17 die Integrabilitätsbedingungen durch Nachrechnen zu überprüfen, d.h. ob  $u^1_{,p'q'} = u^1_{,q'p'}$ :

$$u^1_{,p'q'} = (u^1_{,p'})_{,q'} = (4*) = (p') v^1_{,q'} = (KR) = (p') v^1_{,k'} u^k_{,q'}.$$

Mit (\*\*\*) und (4\*) folgt

$$u^1_{,p'q'} = - (p') v^j_{,q'} \Gamma_{jk}^1 (q') v^k,$$

also

$$u^1_{,p'q'} = - (p') v^j_{,q'} v^k \Gamma_{jk}^1.$$

Da wir im Satz eine  $C^2$ -Fläche vorausgesetzt haben, gilt  $\Gamma_{jk}^1 = \Gamma_{kj}^1$ ; folglich sind die Integrabilitätsbedingungen erfüllt.

Nach ZB17 existiert lokal eine  $C^2$ -Lösung  $\varphi$ .

Abschließend bleibt der Nachweis der *Regularität* von  $\varphi$ :

Dazu betrachten wir

$$\det J_\varphi(a') = \det(u^k_{,k'}(a')) = (4*) = \det\left\{ (k') v^k(\varphi(a')) \right\}.$$

Da es sich hierbei um die Determinante des Basiswechsels

$$\{F_1(a), \dots, F_m(a)\} \mapsto \{ (1') \hat{V}, \dots, (m') \hat{V} \}$$

handelt, gilt

$$\det J_\varphi(a') \neq 0.$$

Dann ist  $\det J_\varphi$  sogar lokal um  $a'$  von Null verschieden.

Also ist  $\varphi$  ein Parameterwechsel, der nach Konstruktion  $g^j_{,jk} = \delta^j_k$  gewährleistet, sodaß kartesische Koordinaten existieren.  $\square$

**Bem.:** Im Schritt 1 des Beweises zu Satz 3.6.1 wurde das System

$${}_{(j)}v^l_{,k} = -{}_{(j)}v^j \Gamma_{jk}^l \quad (*)$$

betrachtet. Wir ersetzen die Bezeichnungen von ZB17 durch

$$z^{\alpha} \mapsto {}_{(j)}v^{\alpha} \quad (\alpha \mapsto l) \\ f_j^{\alpha} \mapsto -{}_{(j)}v^k \Gamma_{jk}^{\alpha}(u^1, \dots, u^m, {}_{(j)}v^1, \dots, {}_{(j)}v^m) .$$

(\*) ist nach Voraussetzung integrabel; uns interessiert daher die Gestalt der Integrabilitätsbedingungen:

Nach ZB17 (SCHWARZ) gilt für jede Lösung  $g(u)$  mit  $\partial g^{\alpha} / \partial u^j = f_j^{\alpha}(u, g(u))$

$$g^{\alpha}_{,pq} = g^{\alpha}_{,qp} .$$

Dies bedeutet:

$$(g^{\alpha}_{,p})_{,q} = (f_p^{\alpha}(u^1, \dots, u^m, g^1(u^1, \dots, u^m), \dots, g^n(u^1, \dots, u^m)))_{,q} .$$

Da  $u = (u^1, \dots, u^m)$  und  $z(u) = (g^1(u^1, \dots, u^m), \dots, g^n(u^1, \dots, u^m))$  unabhängige Variablen sind, folgt mit der Kettenregel

$$g^{\alpha}_{,pq} = f_p^{\alpha}_{,q} + (\partial f_p^{\alpha} / \partial z^{\beta}) \cdot (\partial z^{\beta} / \partial u^q) .$$

Vertauschen wir  $p$  mit  $q$  und benützen  $\partial z^{\beta} / \partial u^q = f_q^{\beta}$  und die Integrabilitätsbedingung, so folgt insgesamt

$$f_p^{\alpha}_{,q} - f_q^{\alpha}_{,p} + (\partial f_p^{\alpha} / \partial z^{\beta}) \cdot f_q^{\beta} - (\partial f_q^{\alpha} / \partial z^{\beta}) \cdot f_p^{\beta} = 0 \quad \text{in } U \times \hat{U} . (**)$$

Also: Die Parallelverschiebung ist genau dann wegunabhängig, wenn diese Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind.

Nun die angekündigte Substitution:

$$f_p^{\alpha}_{,q} \mapsto -{}_{(j)}v^j \Gamma_{jp}^{\alpha}{}_{,q} ; \\ \partial f_p^{\alpha} / \partial z^{\beta} \mapsto -\partial {}_{(j)}v^j \Gamma_{jp}^{\alpha} / \partial {}_{(j)}v^k = -\delta_{kj} \Gamma_{jp}^{\alpha} = -\Gamma_{kp}^{\alpha} \cdot (\beta \rightarrow k)$$

Damit folgt mit (\*\*):

$$-{}_{(j)}v^j \Gamma_{jp}^{\alpha}{}_{,q} + {}_{(j)}v^j \Gamma_{jq}^{\alpha}{}_{,p} + \Gamma_{kp}^{\alpha} \cdot {}_{(j)}v^s \Gamma_{sq}^{\alpha} - \Gamma_{kq}^{\alpha} \cdot {}_{(j)}v^s \Gamma_{sp}^{\alpha} = 0$$

Herausheben ergibt

$$-{}_{(j)}v^j (\Gamma_{jp}^{\alpha}{}_{,q} - \Gamma_{jq}^{\alpha}{}_{,p} + \Gamma_{kp}^{\alpha} \Gamma_{jq}^{\alpha} - \Gamma_{kq}^{\alpha} \Gamma_{jp}^{\alpha}) = 0 .$$

Nennen wir den Ausdruck in der Klammer

$$R_{jqp}^{\alpha} \quad (\text{i.d. Physik: } R_{jqp}^{\alpha}),$$

so ist obige Gleichung mit

$$R_{jqp}^{\alpha} = 0 \quad , \quad l, j, p, q = 1, \dots, m$$

äquivalent.

Wir fassen zusammen in

**Satz 3.6.2:** Die folgenden vier Aussagen sind äquivalent:

- (1) Die innere Geometrie einer regulären  $C^3$ -Fläche ist lokal euklidisch.
- (2) Die Parallelverschiebung ist lokal wegunabhängig.
- (3) Es existieren lokal kartesische Koordinaten.
- (4)  $R_{jqp}^{\alpha} = 0$  in  $U$  für alle  $j, p, q, l = 1, \dots, m$ .

### 3.7 Abbildungen aus m-Flächen

Es seien  $f(U)$  und  $\bar{f}(\bar{U})$  zwei  $m$ -Flächen aus  $C^r$  mit  $r \geq 1$ ;  $f, \bar{f}$  seien injektive Immersionen. Ferner sei

$$\alpha: f(U) \rightarrow \bar{f}(\bar{U})$$

eine Abbildung von  $f(U)$  in  $\bar{f}(\bar{U})$ .

**Def. 3.7.1:** (1) Die Abbildung

$$A := \bar{f}^{-1} \circ \alpha \circ f: U \rightarrow \bar{U}$$

heißt *Koordinatendarstellung von  $\alpha$  bezüglich  $f$  und  $\bar{f}$* .

(2)  $\alpha$  heißt in  $p=f(a) \in f(U)$   $s$ -mal stetig differenzierbar  $:\Leftrightarrow$   $A$  ist in  $a \in U$   $s$ -mal stetig differenzierbar (bei  $s \leq r$ ).

(3)  $\alpha$  heißt in  $p=f(a)$  regulär  $:\Leftrightarrow$   $A$  ist in  $a \in U$  regulär.

**Bem. 3.7.1:** Ist die Definition sinnvoll?

Wir wählen zwei  $C^r$ -DM  $\varphi, \bar{\varphi}$  als Parameterwechsel, d.h.

$$f' = f \circ \varphi, \quad \bar{f}' = \bar{f} \circ \bar{\varphi}.$$

(Ad 2) Dann gilt analog

$$A' = \bar{f}'^{-1} \circ \alpha \circ f' = \bar{\varphi}^{-1} \circ \bar{f}'^{-1} \circ \alpha \circ f \circ \varphi = \bar{\varphi}^{-1} \circ A \circ \varphi.$$

Wegen  $\bar{\varphi}^{-1}, \varphi \in C^r$  und  $A \in C^s$  gilt bei  $s \leq r$  ( $s > r$  sinnlos):

$$A \in C^s \Rightarrow A' \in C^s.$$

(Ad 3) Bekanntlich ist nach Rechenregeln mit Determinanten

$$\det J_{A'} = (\det J_{\bar{\varphi}^{-1}}) \cdot (\det J_A) \cdot (\det J_{\varphi});$$

da  $\varphi$  und  $\bar{\varphi}$  regulär sind, bleibt:

$$\det J_{A'} \neq 0 \Leftrightarrow \det J_A \neq 0.$$

**Ziel:** Für gegebenes  $\alpha$  wollen wir  $A$  "möglichst einfach" haben, d.h.  $u_j = \bar{u}_j$ , d.h.  $\alpha$  soll durch gleiche Parameter (Koordinaten) beschrieben werden.

**Bem.:** Ist  $f(U)$  eine  $C^r$ -Fläche und  $s \leq r$ , so werden wir in Hinkunft  $f(U)$  auch als  $C^s$ -Fläche auffassen; diese gestattet "mehr" Parameterwechsel.

**Satz 3.7.1:**  $f, \bar{f}$  seien injektive Immersionen  $\in C^r$  mit  $r \geq 1$ ; ferner sei  $\alpha: f(U) \rightarrow \bar{f}(\bar{U})$  regulär  $\in C^s$  ( $1 \leq s \leq r$ ). Dann gilt:  
*Faßt man  $f(U)$  und  $\bar{f}(\bar{U})$  als  $C^s$ -Flächen auf, so existieren lokal Parameterwechsel so, daß  $\alpha$  durch gleiche Parameter beschrieben wird.*

**Beweis:** Sei  $a \in U$  regulär für  $A \iff \alpha$  ist regulär in  $p=f(a)$ . Nach ZB12 ist  $A$  sogar lokal in  $U_a \subset U$  ein DM; wir nennen ihn  $A|U_a: U_a \rightarrow A(U_a) \subset \bar{U}$ .

Wir benützen nun  $A|U_a =: \bar{\varphi}$  als Parameterwechsel auf der Fläche  $\bar{f}(\bar{U})$ ; die Fläche  $f(U)$  bleibt unverändert.

Damit gilt in  $U_a$ :

$$A' = \bar{\varphi}^{-1} \circ A \circ \varphi = A^{-1} \circ A \circ \text{id}_U = \text{id}_{U_a},$$

woraus sofort  $\bar{u}_j = u_j$  für  $j=1, \dots, m$  folgt.

Also wird  $\alpha$  lokal um  $a$  durch gleiche Parameter beschrieben.  $\square$

**Bem. 3.7.2:** (a) Es ist auch  $f, \bar{f} \in C^\infty$ ,  $\alpha \in C^\infty$  möglich. Auch dann ist lokal die Beschreibung durch gleiche Parameter möglich.

(b) In Satz 3.7.1 wurden  $f, \bar{f}$  als injektive Immersionen vorausgesetzt. Sind die Immersionen  $f, \bar{f}$  nicht (global) injektiv, so sind sie jedenfalls in der Umgebung eines regulären Punktes  $a \in U$  bzw.  $\bar{a} \in \bar{U}$  lokal injektiv. Folglich ist auch in diesem Fall lokal die Beschreibung durch gleiche Koordinaten möglich.

### Abbildung von Tangentialvektoren

In  $p=f(a) \in f(U)$  existiere der Tangentialvektorraum  $T_a f$ . Sei  $X_p \in T_a f$  ein beliebig gewählter Vektor aus dem Tangentialvektorraum.

Wir wollen nun vermöge der Abbildung  $\alpha: f(U) \rightarrow \bar{f}(\bar{U})$  jedem solchen Vektor  $X_p$  einen Bildvektor im Tangentialvektorraum  $T_{A(a)} \bar{f}$  von  $\bar{f}(\bar{U})$  in  $\alpha(p) \in \bar{f}(\bar{U})$  zuordnen. Zu diesem Zweck legen wir durch  $p=f(a)$  eine Flächenkurve  $c_f(I) \subset f(U)$ , die in  $p$   $X_p$  als Tangentialvektor besitzt; anschließend wird  $c_f(I)$  abgebildet. Genauer in

**Def. 3.7.2:** Die Abbildung

$$\alpha_{*p}: T_a f \rightarrow T_{A(a)} \bar{f}$$

mit

$$X_p = (c_f'(0); \dot{c}_f(0)) \mapsto \alpha_{*p}(X_p) := (\alpha \circ c_f'(0); (\alpha \circ c_f)'(0))$$

heißt *derivierte Abbildung von  $\alpha$  in  $p$* .

**Satz 3.7.2:** (1)  $\alpha_{*p}$  ist ein von der zulässigen Auswahl der Flächenkurve  $c_f(I)$  unabhängiger Vektorraumhomomorphismus.

(2)  $\alpha_{*p}$  ist genau dann ein Isomorphismus, wenn  $\alpha$  in  $p$  regulär ist.

Beweis: Sei  $X_p$  ein Tangentialvektor aus  $T_a f$  mit der Darstellung

$$X_p = v^l F_{1l}(a) \text{ mit } p=f(a).$$

Als Flächenweg wählen wir  $c_f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$X_p = \dot{c}_f(0) = (c_f(0); \dot{c}_f(0)).$$

Damit gilt für die Flächenkoordinaten  $v^l$  von  $X_p$

$$v^l = \dot{c}^l(0). \quad (l=1, \dots, m) \quad (*)$$

Definitionsgemäß ist  $\alpha_{*p}(X_p)$  ein Vektor in  $T_{A(a)} \bar{f}$ , gestattet daher die Darstellung

$$\alpha_{*p}(X_p) = \bar{v}^l \bar{F}_{1l}(\bar{a}) \text{ bei } \bar{a} := A(a). \quad (**)$$

Wie sehen nun die Flächenkoordinaten  $\bar{v}^l$  aus?

Dazu betrachten wir

$$\alpha \circ c_f = \alpha \circ f \circ c = \bar{f} \circ \bar{f}^{-1} \circ \alpha \circ f \circ c = \bar{f} \circ A \circ c.$$

Differentiation nach  $t$  ergibt

$$(\alpha \circ c_f)'(0) = (\bar{f} \circ A \circ c)'(0) = \left[ \partial \bar{f} / \partial \bar{u}^l \right] (\bar{a}) \cdot \left[ \partial \bar{u}^l / \partial u^j \right] (a) \cdot \left[ \partial c^j / \partial t \right] (0),$$

also gilt

$$(\alpha \circ c_f)'(0) = \bar{f}_{,l}(\bar{a}) \cdot \bar{u}^l_{,j}(a) \cdot \dot{c}^j(0).$$

Ein Koeffizientenvergleich mit (\*\*) ergibt

$$\bar{v}^l = \bar{u}^l_{,j}(a) \cdot \dot{c}^j(0).$$

Wegen (\*) ist

$$\bar{v}^l = \bar{u}^l_{,j}(a) \cdot v^j \quad (***),$$

was die Unabhängigkeit des Vektors  $\alpha_{*p}(X_p)$  von  $c$  bedeutet.

Wegen der Darstellung (\*\*\*) ist  $\alpha_{*p}$  ein Vektorraumhomomorphismus.

$\alpha_{*p}$  ist ein Isomorphismus  $\Leftrightarrow \det J_A(a) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha$  ist in  $p=f(a)$  regulär.  $\square$

**Bem. 3.7.3:** Wird  $\alpha$  durch gleiche Koordinaten beschrieben, d.h. gilt  $\bar{u}^l_{,j} = \delta^l_j$ , so lautet (\*\*\*)  $\bar{v}^l = v^l$ , d.h. nun wird  $\alpha_{*p}$  durch gleiche Flächenkoordinaten beschrieben.

**Def. 3.7.3:** (1) Ist  $\alpha_{*p}$  für alle  $p$  ein orthogonaler Vektorraumisomorphismus, so heißt  $\alpha$  eine *lokale Isometrie*.

(2) Ist  $\alpha$  bijektiv, so heißt  $\alpha$  eine *Isometrie*.

**Bem. 3.7.4:** (a) Ist  $\alpha$  lokale Isometrie, so folgt mit Def.3.7.3 und Satz 3.7.2, daß  $\alpha$  für alle  $p$  regulär ist.

(b) In einer Umgebung ist jede lokale Isometrie eine Isometrie.

**Satz 3.7.3:**  $\alpha$  werde durch gleiche Koordinaten beschrieben. Dann gilt:  
 $\alpha$  ist genau dann lokale Isometrie, wenn  $g_{jk}(a) = \bar{g}_{jk}(a)$  gilt.

Beweis: (a) VOR:  $\alpha$  ist lokale Isometrie. BEH:  $g_{jk}(a) = \bar{g}_{jk}(a)$ .

BEW: Definitionsgemäß ist  $\alpha_{*p}$  für alle  $p=f(a)$  orthogonal, d.h. es ist

$$\|\alpha_{*p}(X_p)\|^2 = \|X_p\|^2 \text{ für alle } X_p \in T_a f \quad (*)$$

mit den Darstellungen

$$X_p = v^l F_{1l}(a), \quad \alpha_{*p}(X_p) = v^l \bar{F}_{1l}(a)$$

(gleiche Flächenkoordinaten nach Bem.3.7.3). Nach 3.3. gilt

$$\|\alpha_{*p}(X_p)\|^2 = v^j v^k \bar{g}_{jk}(a) \quad (**)$$

$$\|X_p\|^2 = v^j v^k g_{jk}(a) \quad (**)$$

Da (\*) für alle Tangentialvektoren aus  $T_a f$  richtig ist, können wir speziell  $(v^1, \dots, v^m) = (1, 0, 0, \dots, 0)$  wählen: dann ist

$$X_p = F_1(a) \text{ und } \alpha_{*p}(X_p) = \bar{F}_1(a).$$

Daraus ergibt sich

$$g_{11}(a) = \bar{g}_{11}(a).$$

Auf diese Weise gewinnt man jedenfalls

$$g_{jj}(a) = \bar{g}_{jj}(a). \quad (***)$$

Sei nun  $(v^1, \dots, v^m) = (1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ , so ist

$$X_p = F_1(a) + F_2(a) \text{ und } \alpha_{*p}(X_p) = \bar{F}_1(a) + \bar{F}_2(a).$$

Daraus ergibt sich mit (\*\*\*)

$$g_{12}(a) = \bar{g}_{12}(a) \text{ usw,}$$

sodaß sich auf diese Weise

$$g_{jk}(a) = \bar{g}_{jk}(a) \text{ für } j \neq k$$

bestätigen läßt.

Durch Abänderung der speziellen Wahl von  $(v^1, \dots, v^m)$  gelangt man (in endlicher Zeit) zur Behauptung.

(b) Unter der Voraussetzung  $g_{jk}(a) = \bar{g}_{jk}(a)$  folgt mit (\*\*) die Behauptung.  $\square$

**Bem. 3.7.5:** Falls eine lokale Isometrie existiert, so bedeutet dies nach Satz 3.7.3, daß die innere Geometrie lokal übereinstimmt.

**Def. 3.7.4:** Eine  $m$ -Fläche heißt **abwickelbar**, wenn sie lokal isometrisch zum  $m$ -dimensionalen euklidischen Raum ist.

**Bem. 3.7.6:** Sei  $f \in C^2(U)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $f(U)$  ist abwickelbar.
- (2) Die innere Geometrie von  $f(U)$  ist lokal euklidisch (Def.3.7.4, Bem.3.7.5).
- (3) Es existieren lokal kartesische Koordinaten (Satz 3.6.2).
- (4) Die Parallelverschiebung ist lokal wegunabhängig (Satz 3.6.2).
- (5)  $R_{jpk}^l = 0$  für alle Indexkombinationen (Satz 3.6.2).

Damit können wir formulieren:

**Satz 3.7.4:** Eine reguläre  $C^2$ -Fläche ist genau dann abwickelbar, wenn die Parallelverschiebung lokal wegunabhängig ist.

**Beispiele:**  $m=2, n=3$ :

- (a) Zylinderflächen mit regulärem  $C^1$ -Normalschnitt (nach 3.6).
- (b) Halbkegel mit regulärer  $C^1$ -Richtkurve (nach 3.6).
- (c) Halbtangentenflächen von regulären wendepunktfreien  $C^2$ -Kurven im  $R^3$ :

Bew.: Sei  $c(I) \subset R^3$  eine solche Kurve. Da  $c(I)$  regulär ist, kann  $oBdA.$   $\| \dot{c} \| = 1$  in  $I$  gesetzt werden. Da  $c(I)$  wendepunktfrei ist, gilt mit 2.5  $\kappa > 0$ .

Wir setzen für den Kurvenparameter  $u^1 = t$ . Dann gestattet die Halbtangentenfläche die Darstellung

$$f(u^1, u^2) = c(u^1) + u^2 \cdot \dot{c}(u^1)$$

mit  $u^1 \in I$  und  $u^2 \in R^+$  (der Kurvenpunkt ist also weggeschnitten).

Benützen wir aus der Kurventheorie die Beziehungen  $\dot{c} = c_1$  und  $\ddot{c} = \dot{c}_1 = \kappa \cdot c_2$ , so erhalten wir

$$f_{,1} = \dot{c} + u^2 \cdot \ddot{c} = c_1 + u^2 \cdot \kappa \cdot c_2 \text{ bzw. } f_{,2} = \dot{c} = c_1 .$$

Daraus folgt wegen  $\dot{c} \cdot \ddot{c} = 0$

$$g_{11} = 1 + (u^2 \cdot \kappa)^2, \quad g_{12} = 1, \quad g_{22} = 1. \quad (*)$$

Damit ist  $\Delta = (u^2 \cdot \kappa)^2 > 0$  und folglich  $f$  tatsächlich regulär.

Wir konstruieren nun eine lokale Isometrie in die euklidische Ebene:  
also: gesucht ist eine reguläre ebene Kurve  $\bar{c}(I)$  mit  $\bar{c} \in C^2(I)$  und  $\|\bar{c}'\| = 1$ .

Zusätzlich fordern wir  $\kappa(t_0) = \bar{\kappa}(t_0)$ .

Damit ist folgender Ansatz für  $\bar{c}$  möglich:

$$\bar{c}'(t_0) = (\cos \varphi(t_0), \sin \varphi(t_0)); \quad \varphi \in C^1(I).$$

Differentiation nach  $t$  ergibt

$$\bar{c}''(t_0) = (-\sin \varphi(t_0) \cdot \dot{\varphi}(t_0), \cos \varphi(t_0) \cdot \dot{\varphi}(t_0)).$$

Wegen  $\|\bar{c}'\| = 1$  in  $I$  ist

$$\bar{\kappa}(t_0) = \|\bar{c}''(t_0)\| = |\dot{\varphi}(t_0)|,$$

also nach Forderung

$$|\dot{\varphi}(t_0)| = \kappa(t_0) > 0 .$$

OBdA. sei sogar

$$\dot{\varphi}(t_0) = \kappa(t_0),$$

da wir andernfalls einen Parameterwechsel  $t \mapsto -t$  dazwischenschalten können.

Integrieren wir die letzte Gleichung, so gilt

$$\varphi(t_0) = \int_{\tau=0}^{\tau=t_0} \kappa(\tau) \cdot d\tau .$$

Wir erhalten schließlich:

$$\bar{c}(t_0) = \left( \int_0^{t_0} \left( \int_0^u \kappa(\tau) d\tau \right) du, \int_0^{t_0} \left( \sin \int_0^u \kappa(\tau) d\tau \right) du \right)$$

Nun folgt eine Parametrisierung eines Bereiches der euklidischen Ebene:  
Eine Halbtangentenfläche der ebenen Kurve  $\bar{c}(I)$  gestattet die Darstellung

$$\bar{f}(u^1, u^2) = \bar{c}(u^1) + u^2 \cdot \bar{c}'(u^1) .$$

In Analogie zum Vorherigen findet man

$$\bar{g}_{11} = 1 + (u^2 \cdot \bar{\kappa})^2 = 1 + (u^2 \cdot \kappa)^2, \quad \bar{g}_{12} = 1, \quad \bar{g}_{22} = 1.$$

Ein Vergleich mit (\*) zeigt

$$g_{jk} = \bar{g}_{jk} \text{ in entsprechenden Punkten.}$$

Da wir beide Halbtangentenflächen durch die gleichen Parameter  $u^1, u^2$  beschrieben haben, folgt aus Satz 3.7.3:

Die durch  $u^1, u^2$  beschriebene Abbildung  $\alpha$  ist eine lokale Isometrie. Gemäß Def.3.7.4 ist die Halbtangentenfläche abwickelbar.  $\square$

**Bemerkung:** Bisher haben wir drei Beispiele von abwickelbaren Flächen kennengelernt. Wir werden später zeigen, daß dies im wesentlichen alle abwickelbaren Flächen sind.

**IV**

**KRÜMMUNGSTHEORIE  
DER  
HYPERFLÄCHEN**



#### 4.1 Die WEINGARTEN-Abbildung

Sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  ein offenes Gebiet bei  $m=n-1$ . Ferner sei  $f:U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre  $C^r(U)$ -Abbildung mit  $r \geq 1$ . Bekanntlich gilt:

$a$  ist regulär für  $f \iff \{F_1(a), \dots, F_m(a)\}$  ist eine Basis von  $T_a f$ .

Da  $f$  regulär vorausgesetzt ist, gilt diese Äquivalenz für alle  $a \in U$ .

Da  $T_a f$  ein  $(n-1)$ -dimensionaler Vektorraum ist, muß der Normalvektorraum  $T_a f^\perp$  eindimensional sein; wir können ihn daher durch einen (vom Nullvektor verschiedenen) Vektor

$$N_f(a) = (f(a); n_f(a))$$

festlegen, wobei wir fordern:

(1)  $\|N_f(a)\| = 1$  für alle  $a \in U$ ;

(2)  $\{F_1(a), \dots, F_m(a), N_f(a)\}$  ist in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Nach ZB7 in 2.4 gilt

$$n_f(a) = f_{,1}(a) \times \dots \times f_{,m}(a) / \|f_{,1}(a) \times \dots \times f_{,m}(a)\|.$$

Ebenfalls nach ZB7 gilt

$$\|f_{,1}(a) \times \dots \times f_{,m}(a)\|^2 = \Gamma(f_{,1}(a), \dots, f_{,m}(a)) = \det(g_{jk}(a)) = \Delta(a);$$

Wir erhalten:

$$n_f(a) = \Delta(a)^{-1/2} (f_{,1}(a), \dots, f_{,m}(a)).$$

Def. 4.1.1: Die Abbildung

$$N_f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \Pi \circ N_f = f, \\ a \in U \mapsto N_f(a) \in T_{f(a)} \mathbb{R}^n$$

heißt *Normalvektorfeld längs f*.

Folgerung:  $N_f \in C^{r-1}(U)$ .

Bem. 4.1.1: (a) Ist  $N_f$  ein geometrischer Begriff?

-- $N_f$  ist bewegungsinvariant.

--Untersuchung der Parameterinvarianz:

Sei  $f' = f \circ \varphi$  ein zu  $f$  äquivalenter Weg. Nach 3.3 gilt

$$f'_{,j}(a') = f_{,j}(a) \cdot u^{j,j}(a'),$$

wo  $u^{j,j}(a')$  ein Element der Matrix  $J_\varphi(a')$  ist.

Wenn nun  $\det J_\varphi(a') > 0$ , dann ist

$$\{f_{,1}(a), \dots, f_{,m}(a)\} \mapsto \{f'_{,1}(a'), \dots, f'_{,m}(a')\}$$

ein gleichsinniger Basiswechsel in  $T_a f$ , woraus

$$N_f(a) = N_{f'}(a')$$

folgt.

Analog erhält man bei  $\det J_\varphi(a') < 0$  dann

$$N_f(a) = -N_{f'}(a').$$

Zusammenfassend gilt

$$N_f(a) = \text{sgn}(\det J_\varphi(a')) \cdot N_{f'}(a').$$

Wir erkennen:

$N_f$  ist ein geometrischer Begriff der orientierten Hyperfläche.

(b) Wir verwenden speziell eine EULER-Parametrisierung

$$f(u^1, \dots, u^m) = (u^1, \dots, u^m, z(u^1, \dots, u^m)).$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} f_{,1} &= (1, 0, \dots, 0, z_1) \\ f_{,2} &= (0, 1, \dots, 0, z_2) \\ &\dots \\ f_{,m} &= (0, 0, \dots, 1, z_m). \end{aligned}$$

Nach ZB7 folgt

$$f_{,1} \times \dots \times f_{,m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & z_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & z_m \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_m & e_{m+1} \end{bmatrix}$$

Nach formaler Entwicklung dieser Determinante erhält man

$$f_{,1} \times \dots \times f_{,m} = (-z_1, -z_2, \dots, -z_m, 1).$$

Daher gestattet  $n_f$  die Darstellung

$$n_f = (-z_1, \dots, -z_m, 1) / (z_1^2 + \dots + z_m^2 + 1)^{1/2}.$$

(c) Wir betrachten eine Hypervarietät  $F=0$  mit

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; F(x^1, \dots, x^n) = 0 \in \mathbb{R}.$$

Nach Bem.3.1.7,(b) ist ein Punkt  $p \in F=0$  genau dann gewöhnlich, wenn

$$(F_{,1}(p), \dots, F_{,n}(p)) \neq (0, \dots, 0)$$

ist ( $J_F(p)$  besteht hier nur aus einer Spalte); oBdA. gelte  $(\partial F / \partial x^n)(p) \neq 0$ .

Nach Satz 3.1.3 existiert lokal in einer Umgebung  $U$  von  $p$  eine EULERparametrisierung

$$f(u^1, \dots, u^m) = (u^1, \dots, u^m, z(u^1, \dots, u^m))$$

derart, daß

$$F \circ f = 0 \text{ in } U$$

gewährleistet ist. Setzen wir  $a := (u^1, \dots, u^m)$ , so können wir auch schreiben

$$F(a, z(a)) = 0 \text{ für alle } a \in U.$$

Differenzieren wir diese Identität partiell nach  $u^j$  (KR), so findet man

$$0 = (\partial F / \partial x^j)(p) + (\partial F / \partial x^n)(p) \cdot (\partial z / \partial u^j)(a).$$

Wegen  $\partial z / \partial u^j = z_{,j}$  gewinnt man daraus

$$z_{,j}(a) = -F_{,j}(p) / F_{,n}(p).$$

Verwenden wir die in (b) erhaltene Darstellung für  $n_f$ , so bleibt nach einfacher Umformung

$$n_f(a) = \text{grad}F(p) / \|\text{grad}F(p)\|.$$

### Sphärische Abbildung einer Hyperfläche

Sei  $N_f(a) = (f(a); n_f(a))$  der im Flächenpunkt  $f(a) = p$  angehängte Normalvektor von  $T_a f$ . Hängen wir für alle  $a \in U$  den Vektor  $n_f(a)$  im "Ursprung"  $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$  an, so wird dadurch eine Punktmenge auf der im Ursprung zentrierten Einheitssphäre  $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$  definiert. Nennen wir diese Abbildung  $\sigma$ , so wird also jedem Punkt  $p \in f(U)$  ein Punkt  $\sigma(p) \in S^m$  zugeordnet.

Nun besitzt die  $S^m$  in  $\sigma(p)$  einen Tangentialvektorraum  $T_{\sigma(p)} S^m$ . Folglich existiert auch die derivierte Abbildung  $\sigma_{*p}$  von  $\sigma$  in  $p$ , die jedem Tangentialvektor  $X_p \in T_p f$  den Tangentialvektor  $\sigma_{*p}(X_p) \in T_{\sigma(p)} S^m$  zuordnet.

**Def. 4.1.2:** Die Abbildung

$$\sigma : f(U) \rightarrow S^m$$

mit

$$f(a)=p \rightarrow \sigma(p) := n_f(a)$$

heißt *sphärische Abbildung von  $f(U)$* .

**Bem. 4.1.2:** (a) Die sphärische Abbildung wurde für  $n=3$  von GAUSS eingeführt.

(b)  $\sigma$  wird durch gleiche Parameter beschrieben, da  $S^m$  durch  $n_f$  parametrisiert wird; deshalb haben wir den Tangentialvektorraum von  $S^m$  in  $\sigma(p)$  mit  $T_a n_f$  und nicht mit  $T_{A(a)} n_f$  bezeichnet. Aus Bem.3.7.3 folgt:

Die *derivierete sphärische Abbildung*  $\sigma_{*p}$  wird durch gleiche Flächenkoordinaten beschrieben.

Identifiziert man die nach Entstehungsgeschichte parallelen Tangentialvektorräume  $T_a f$  von  $f(U)$  in  $p$  und  $T_a n_f$  von  $S^m$  in  $\sigma(p)$ , so erhält man die Selbstabbildung

$$\sigma_{*p} : T_a f \rightarrow T_a f ,$$

die nach Satz 3.7.2,(1) ein Vektorraumendomorphismus ist.

**Bem.:** Da  $\sigma$  nicht notwendig regulär ist, ist  $\sigma_{*p}$  nicht notwendig ein Automorphismus (vgl. Satz 3.7.2,(2)).

**Def. 4.1.3:** Die Abbildung

$$\omega_p : T_a f \rightarrow T_a f \text{ mit } \omega_p := -\sigma_{*p}$$

heißt *WEINGARTEN-Abbildung von  $f(U)$  in  $p$* .

**Bem. 4.1.3:** (a) Betrachten wir eine  $m$ -Fläche in einer Hyperebene, also einen Teil der Hyperebene. Dann gilt

$$n_f = \text{konstant};$$

also ist das sphärische Bild einpunktig.

Wir sagen: Die "Krümmung mißt" die Abweichung der Hyperfläche vom Tangentialraum; dies spiegelt sich in  $\omega_p$  wieder.

(b) Koordinatenmäßige Beschreibung von  $\omega_p$ :

Sei  $X_p \in T_a f$  bei  $p=f(a)$ ;  $X_p$  gestattet die Darstellung

$$X_p = v^j F_j(a) .$$

Da nach Bem.4.1.2  $\sigma_{*p}$  durch gleiche Flächenkoordinaten beschrieben wird, folgt für  $\sigma_{*p}(X_p) \in T_a f$

$$\sigma_{*p}(X_p) = v^j \bar{F}_j(a) .$$

Wegen  $N_{f^j}(a) = \bar{F}_j(a)$  gilt

$$\omega_p(X_p) = -v^j N_{f^j}(a) .$$

Speziell gilt daher

$$\omega_p(F_j(a)) = -N_{f^j}(a) .$$

(c) Nach Bem.4.1.1,(a) ist  $\omega_p$  ein geometrischer Begriff der orientierten Hyperfläche.

## 4.2 Eigenwerttheorie der WEINGARTEN-Abbildung

### ZWISCHENBEMERKUNG 18:

Gegeben sei ein  $m$ -dimensionaler reeller Vektorraum  $V$  und ein Endomorphismus

$$\alpha: V \rightarrow V.$$

Ein Vektor  $v \in V$  heißt **Eigenvektor** genau dann, wenn gilt

(1)  $v \neq 0 \in V$

(2)  $\alpha(v) = c \cdot v$ ;

$c$  heißt dann zugehöriger **Eigenwert**; dabei ist  $c=0$  möglich.

Sei  $\{a_1, \dots, a_m\}$  eine Basis von  $V$ . Für einen Eigenvektor  $v \in V$  mit der Darstellung  $v = v^j \cdot a_j$  gilt dann

$$\begin{aligned} \alpha(v) &= \alpha(v^j \cdot a_j) = v^j \cdot \alpha(a_j) = v^j \cdot h_j^k \cdot a_k; \\ c \cdot v &= c \cdot v^j \cdot a_j = c \cdot \delta_j^k \cdot a_k. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$v^j \cdot (h_j^k - c \cdot \delta_j^k) = 0, \quad k=1, \dots, m.$$

Dabei existiert genau dann eine nichttriviale Lösung dieses linearen Gleichungssystems, wenn

$$\det(h_j^k - c \cdot \delta_j^k) = 0.$$

Ausführlich bedeutet dies

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} h_1^1 - c & h_1^2 & \dots & h_1^m \\ h_2^1 & h_2^2 - c & \dots & h_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_m^1 & h_m^2 & \dots & h_m^m - c \end{bmatrix} = \\ &= (-1)^m \cdot c^m + (-1)^{m-1} \cdot c^{m-1} \cdot \sum_{i=1}^m h_i^i + \dots + \det(h_j^k) = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung heißt **Eigenwertgleichung**, der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen heißt **charakteristisches Polynom**.

Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms heißen auch **Krümmungsgrößen**.

**Bem.:** Eigenwerte, Eigenvektoren und Krümmungsgrößen haben basisunabhängige Bedeutung.

Namensgebungen:

(1)  $\sum_{i=1}^m h_i^i =: \text{Sp} \alpha \dots \text{Spur von } \alpha$  ;

(2)  $\det(h_j^k) =: \det \alpha$ .

Sei nun  $(V; g)$  ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt  $g$ . Ein Endomorphismus  $\alpha: V \rightarrow V$  heißt genau dann **selbstadjungiert**, wenn

$$g(v, \alpha(w)) = g(\alpha(v), w) \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Nach Ergebnissen der linearen Algebra gilt dann:

(1)  $\alpha$  besitzt nur reelle Eigenwerte  $c_1, \dots, c_m$  (nicht notwendig paarweise verschieden).

(2) Die Vielfachheit eines Eigenwerts ist gleich der Dimension des zugehörigen Eigenvektorraumes.

(3) Es existiert eine ONB von  $V$  aus Eigenvektoren von  $\alpha$ . In dieser Basis läßt sich  $\alpha$  durch  $\text{diag}(c_1, \dots, c_m)$  beschreiben.

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Nach 3.3 ist  $(T_a f; G_{f(a)})$  ein euklidischer Vektorraum der Dimension  $m$  mit  $G_{f(a)}$  als innerem Produkt. Es gilt

**Satz 4.2.1:**  $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  sei eine  $C^2$ -Immersion. Dann ist  $\omega_p$  für alle  $p \in f(U)$  selbstadjungiert.

**Beweis:** Wir betrachten die beiden Tangentialvektoren

$$X_p = v^j F_j(a) \text{ und } Y_p = w^k F_k(a)$$

aus  $T_a f$ . Da  $\omega_p: T_a f \rightarrow T_a f$  ein Endomorphismus ist, gilt:

$$\omega_p(X_p) = \omega_p(v^j F_j(a)) = v^j \omega_p(F_j(a)) = -v^j N_{f,j}(a) .$$

Analog gilt

$$\omega_p(Y_p) = -w^k N_{f,k}(a) .$$

Nach 3.3, Diskussionspunkt 1 folgt

$$G_{f(a)}(X_p, \omega_p(Y_p)) = -v^j F_j(a) \cdot w^k N_{f,k}(a) = -v^j w^k f_{,j}(a) \cdot n_{f,k}(a)$$

Da in  $U$  für alle  $j$  die Identität

$$f_{,j} \cdot n_f = 0$$

und daher nach partiellem Differenzieren nach  $u^k$  dann

$$f_{,jk} \cdot n_f + f_{,j} n_{f,k} = 0$$

gilt, folgern wir:

$$G_{f(a)}(X_p, \omega_p(Y_p)) = v^j w^k f_{,jk}(a) \cdot n_f(a) .$$

In völliger Analogie erhält man

$$G_{f(a)}(\omega_p(X_p), Y_p) = v^j w^k f_{,kj}(a) \cdot n_f(a) .$$

Da wir  $C^2$  vorausgesetzt haben, gilt  $f_{,jk}(a) = f_{,kj}(a)$ , sodaß der Satz bewiesen ist.  $\square$

**Folgerung 1:**  $\omega_p$  besitzt  $m$  reelle (nicht notwendig verschiedene) Eigenwerte. Da die Eigenwertgleichung unabhängig von der Wahl der Basis immer dieselbe Gestalt besitzt, sind die Krümmungsgrößen geometrische Begriffe der orientierten Hyperfläche. Wir formulieren

**Def 4.2.1: (1)** Die  $m$  Eigenwerte  ${}_{(1)}\kappa_p, \dots, {}_{(m)}\kappa_p$  von  $\omega_p$  heißen **Hauptkrümmungen von  $f(U)$  in  $p$** . Die zugehörigen Eigenvektoren heißen **Krümmungsvektoren von  $f(U)$  in  $p$** .

**(2)**  $\det \omega_p =: K$  heißt **GAUSSsche Krümmung** von  $f(U)$  in  $p$ .

$1/m \cdot \text{Sp} \omega_p =: H$  heißt **mittlere Krümmung** von  $f(U)$  in  $p$ .

Da  $\omega_p$  selbstadjungiert ist, existiert eine ONB aus Krümmungsvektoren; in dieser Basis kann  $\omega_p$  beschrieben werden durch

$$\text{diag}({}_{(1)}\kappa_p, \dots, {}_{(m)}\kappa_p).$$

Mit Def.4.2.1 folgt:

$$K: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } K(a) = {}_{(1)}\kappa_p \cdot \dots \cdot {}_{(m)}\kappa_p, \quad p = f(a),$$

$$H: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } H(a) = ({}_{(1)}\kappa_p + \dots + {}_{(m)}\kappa_p) / m .$$

**Bem. 4.2.1:**  $K(a) \neq 0 \iff \det \omega_p \neq 0 \iff \det \sigma_p \neq 0 \iff \sigma$  ist in  $p$  regulär.

Die letzte Äquivalenz gilt nach Satz 3.7.2.

**Folgerung 2:** Sei  $\omega_p$  die Nullabbildung, d.h. es ist

$$\omega_p(X_p) = 0 \in T_a f \text{ für alle } X_p \in T_a f.$$

$p=f(a)$  heißt dann ein **Flachpunkt**.

$\omega_p=0$  ist ein geometrischer Begriff der Hyperfläche; daher ist "Flachpunkt" ein geometrischer Begriff der Hyperfläche.

**BEH.:**  $p=f(a)$  ist Flachpunkt  $\Leftrightarrow n_{f,j}(a)=0 \forall j=1,\dots,m$   
 $\Leftrightarrow f_{,jk}(a) \in H(f_{,1}(a), \dots, f_{,m}(a)).$

**BEW.:** (1)  $p=\text{Flachpunkt} \Leftrightarrow \omega_p=0.$

Wir betrachten  $X_p = v^j \cdot F_j(a):$

$$\omega_p(X_p) = v^j \cdot \omega_p(F_j(a)) = -v^j \cdot n_{f,j}(a) .$$

(2) Bekanntlich gilt in U

$$f_{,j} n_f = 0.$$

Partielles Differenzieren ergibt

$$f_{,jk} \cdot n_f + f_{,j} \cdot n_{f,k} = 0 \text{ in } U.$$

Mit (1) folgt

$$p=\text{Flachpunkt} \Leftrightarrow f_{,jk}(a) \cdot n_f(a) = 0,$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**Folgerung 3:** Wir formulieren

**Satz 4.2.2:** (1) Jede reguläre  $C^2$ -Hyperfläche in einer Hyperebene besteht nur aus Flachpunkten.

(2) Besitzt eine reguläre zusammenhängende  $C^2$ -Hyperfläche nur Flachpunkte, so liegt sie in einer Hyperebene. ("Flache Hyperfläche")

**Beweis:** (Ad 1) Gegeben sei die reguläre Hyperfläche  $f(U)$  mit  $f \in C^2$ ;  $f(U)$  liege in einer Hyperebene. Nach Bem.4.1.3,(a) gilt

$$n_f = \text{konstant, daher } n_{f,j} = 0 \text{ in } U \forall j.$$

Nach Folgerung 2 existieren auf  $f(U)$  nur Flachpunkte.

(Ad 2) VOR.:  $f(U)$  trägt nur Flachpunkte.

BEH.:  $f(U)$  liegt in einer Hyperebene.

Nach Voraussetzung gilt in dem zusammenhängenden Gebiet U die Identität

$$n_{f,j} = 0 \text{ für alle } j=1,\dots,m.$$

Da U zusammenhängend ist, folgt

$$n_f = \text{const.} =: \hat{n} \in \mathbb{R}^n.$$

Wir definieren die Abbildung

$$b := f \cdot \hat{n} : U \rightarrow \mathbb{R}$$

("Ortsvektor  $\times$  Normalvektor"). Partielles Differenzieren liefert

$$b_{,j} = f_{,j} \cdot \hat{n} = 0 \text{ in } U.$$

Da U zusammenhängend ist, bleibt

$$b = \text{const.} =: \hat{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Schließlich definieren wir eine Hyperebene  $F^{-1}0$  durch

$$F(x) := x \cdot \hat{n} - \hat{b}.$$

Jetzt gilt  $f(U) \subset F^{-1}0$ , da dies mit

$$F \circ f = 0 \text{ in } U$$

äquivalent ist und letzteres wegen  $f \cdot \hat{n} - \hat{b} = 0$  nach Konstruktion von  $\hat{b}$  richtig ist.  $\square$

**Folgerung 4:** Sei  $\omega_p = \rho \cdot \text{id}_{T_a f}$  mit  $\rho \neq 0$  (sonst Folgerung 3), d.h. es ist

$$\omega_p(X_p) = \rho \cdot X_p \text{ für alle } X_p \in T_a f.$$

$p=f(a)$  heißt dann ein **Nabelpunkt**.

**Bem. 4.2.2:** In Flach- und Nabelpunkten gilt aufgrund der Gestalt von  $\omega_p$ : Jeder vom Nullvektor verschiedene Tangentialvektor ist ein Krümmungsvektor.

**Satz 4.2.3:** (1) Jede reguläre  $C^2$ -Hyperfläche in einer Hypersphäre besteht nur aus Nabelpunkten.

(2) Besitzt eine reguläre zusammenhängende  $C^3$ -Hyperfläche nur Nabelpunkte, so ist sie in einer Hypersphäre enthalten. ("Sphärische Hyperfläche")

**Beweis:** (Ad 1) VOR.:  $f(U)$  sei eine reguläre  $C^2$ -Hyperfläche mit

$$f(U) \subset S^m \subset \mathbb{R}^{m+1},$$

wo  $S^m$  eine Hypersphäre bezeichnet.

BEH.:  $f(U)$  trägt nur Nabelpunkte.

Nach 3.1 kann eine Hypersphäre  $S^m$  als eine Hypervarietät  $F^{-1}0$  mit

$$F(x) := \|x\|^2 - r^2$$

angesetzt werden. Wegen  $f(U) \subset S^m$  gilt

$$\|f\|^2 - r^2 = 0 \text{ in } U.$$

Wir differenzieren partiell nach  $u^j$ , sodaß sich

$$2 \cdot f \cdot f_{,j} = 0 \text{ in } U \quad \forall j=1, \dots, m$$

ableiten läßt. Mit dieser Kenntnis kann man

$$n_f = f / \|f\| = r^{-1} \cdot f$$

setzen. Wieder kann diese Identität differenziert werden:

$$n_{f,j} = r^{-1} \cdot f_{,j}.$$

Sei  $F_j(a)$  ein Basisvektor von  $T_a f$ . Für diesen folgt damit

$$\omega_p(F_j(a)) = -N_{F_j}(a) = -r^{-1} \cdot F_j(a).$$

Dabei ist  $\rho := -r^{-1}$  von  $j$  unabhängig.

Da  $F_j(a)$  ( $j=1, \dots, m$ ) eine Basis von  $T_a f$  ist, bleibt

$$\omega_p(X_p) = \rho \cdot X_p \quad \forall X_p \in T_a f.$$

(Ad 2) VOR.:  $f(U)$  sei eine reguläre zusammenhängende  $C^3$ -Hyperfläche, also  $U$  ein zusammenhängendes Gebiet;  $f(U)$  trage nur Nabelpunkte.

BEH.:  $f(U)$  ist in einer Hypersphäre  $S^m$  enthalten.

Sei  $X_p = v^j \cdot F_j(a)$  ein beliebiger Tangentialvektor aus  $T_a f$ . Da  $p$  ein Nabelpunkt ist, gilt in  $U$

$$\omega_p(X_p) = v^j \cdot \omega_p(F_j(a)) = -v^j \cdot N_{F_j}(a) = \rho \cdot X_p = \rho \cdot v^j \cdot F_j(a).$$

Dies gilt  $\forall X_p \in T_a f$  und  $\forall p \in f(U)$ . Daher ist

$$\rho \cdot f_{,j} + n_{f,j} = 0 \text{ in } U \quad (j=1, \dots, m) \quad (*)$$

Zunächst muß angenommen werden, daß

$$\rho : U \rightarrow \mathbb{R}$$

von der Stelle  $a \in U$  abhängt. Aber wir zeigen:

$$\rho = \text{constant, da:}$$

wir differenzieren (\*) partiell nach  $u^k$  und finden

$$\rho_{,k} \cdot f_{,j} + \rho \cdot f_{,jk} + n_{f,jk} = 0. \quad (1)$$

Vertauschen wir  $j$  mit  $k$ , so ergibt sich

$$\rho_{,j} \cdot f_{,k} + \rho \cdot f_{,kj} + n_{f,kj} = 0. \quad (2)$$

[Übrigens muß an dieser Stelle wegen  $n_{f,jk} = n_{f,kj}$   $C^3$  vorausgesetzt werden.]

Subtrahieren wir (2) von (1) und berücksichtigen  $n_{f,jk} = n_{f,kj}$  und  $f_{,jk} = f_{,kj}$ , so bleibt

$$\rho_{,k} \cdot f_{,j} - \rho_{,j} \cdot f_{,k} = 0,$$

woraus der Schluß

$$\rho_{,j} = 0 \text{ in } U \text{ für alle } j=1, \dots, m$$

gezogen werden kann.

Da  $U$  ein zusammenhängendes Gebiet ist, folgt

$$\rho = \text{const.} =: \hat{\rho} \in \mathbb{R}.$$

Daher lautet (\*)

$$\hat{\rho} \cdot f_{,j} + n_{f,j} = 0;$$

dies ist äquivalent mit

$$f_{,j} = -\hat{\rho}^{-1} \cdot n_{f,j}.$$

Wir können integrieren und finden

$$f = -\hat{\rho}^{-1} \cdot n_f + c \text{ mit } c \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

Schließlich definieren wir die Hypersphäre  $S^m = F^{-1}0$  durch

$$F(x) := \|x - c\|^2 - (1/\hat{\rho})^2.$$

Jetzt ist  $f(U) \subset S^m$ , da wegen

$$\|-\hat{\rho}^{-1} \cdot n_f + c - c\|^2 - (1/\hat{\rho})^2 = 0$$

$F \circ f = 0$  in  $U$  gilt.  $\square$

### 4.3 Krümmungsform einer regulären C<sup>2</sup>-Hyperfläche

In 3.3 wurde der Tangentialvektorraum  $T_a f$  mit dem inneren Produkt  $G_{f(a)}$  versehen: wir schreiben bekanntlich  $(T_a f; G_{f(a)})$ . Dabei ist  $G_{f(a)}$  eine Abbildung

$$G_{f(a)} : T_a f \times T_a f \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit} \\ G_{f(a)}(X_p, Y_p) := X_p \cdot Y_p .$$

**Def. 4.3.1:** Die Abbildung

$$H_{f(a)} : T_a f \times T_a f \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit} \\ H_{f(a)}(X_p, Y_p) := G_{f(a)}(X_p, \omega_p(Y_p))$$

heißt **Krümmungsform von  $f(U)$  in  $f(a)=p$** .

**Bem. 4.3.1:** (a)  $H_{f(a)}$  ist eine symmetrische Bilinearform, da:

--Die Bilinearität folgt aus der Linearität von  $\omega_p$  und  $G_{f(a)}$ ,

--Die Symmetrie folgt aus der Selbstadjungiertheit von  $\omega_p$  und der Symmetrie von  $G_{f(a)}$ , denn es ist nach Definition

$$H_{f(a)}(X_p, Y_p) = X_p \cdot \omega_p(Y_p) = \omega_p(X_p) \cdot Y_p = Y_p \cdot \omega_p(X_p) = H_{f(a)}(Y_p, X_p).$$

(b) Nach Bem.4.1.3,(c) ist  $H_{f(a)}$  ein geometrischer Begriff der orientierten Hyperfläche.

(c)  $G_{f(a)}$  bzw.  $H_{f(a)}$  heißen auch **Erste** bzw. **Zweite Grundform** einer Hyperfläche.

#### Folgerung 1: Koordinatenmäßig:

Gegeben seien die beiden Tangentialvektoren

$$X_p = v^j \cdot F_j(a) \text{ und } Y_p = w^k \cdot F_k(a).$$

Da  $H_{f(a)}$  bilinear ist, folgt

$$H_{f(a)}(X_p, Y_p) = v^j \cdot w^k \cdot H_{f(a)}(F_j(a), F_k(a)).$$

Mit ZB18 gilt

$$H_{f(a)}(F_j(a), F_k(a)) = F_j(a) \cdot \omega_p(F_k(a)) = F_j(a) \cdot h_k^l(a) \cdot F_l(a) = h_k^l(a) \cdot g_{jl}(a).$$

Wir setzen

$$h_k^l(a) \cdot g_{jl}(a) := h_{jk}(a) \cdot (*)$$

Vertauscht man  $j$  mit  $k$ , so folgt aus der Symmetrie von  $H_{f(a)}$  sofort

$$h_{jk}(a) = h_{kj}(a) .$$

Wir finden

$$H_{f(a)}(X_p, Y_p) = v^j \cdot w^k \cdot h_k^l(a) \cdot g_{lj}(a) = v^j \cdot w^k \cdot h_{jk}(a) .$$

Multipliziert man (\*) mit der zu  $(g_{lj}(a))$  inversen Matrix  $(g^{js}(a))$ , so folgert man

$$h_k^l(a) \cdot g_{lj}(a) \cdot g^{js}(a) = h_{jk}(a) \cdot g^{js}(a),$$

und schließlich

$$h_k^s(a) = h_{jk}(a) \cdot g^{js}(a); \quad (4.3.3)$$

darin sind die  $h_k^s(a)$  die Koordinatenfunktionen der WEINGARTEN-Abbildung bezüglich  $f$ .

#### Folgerung 2: Berechnung der $h_{jk}$ :

Mit Folgerung 1 gilt

$$h_{jk}(a) = H_{f(a)}(F_j(a), F_k(a)) = F_j(a) \cdot \omega_p(F_k(a)) = F_j(a) \cdot (-N_{f,k}(a)) , \quad (4.3.2)$$

also

$$h_{jk}(a) = -f_{,j}(a) \cdot n_{fk}(a).$$

Wie wir im Beweis zu Satz 4.2.1 gezeigt haben, gilt  $f_{,jk} \cdot n_f + f_{,j} n_{fk} = 0$ , sodaß wir folgern können:

$$h_{jk}(a) = f_{,jk}(a) \cdot n_f(a) \quad (4.3.1)$$

Mit 4.1 folgt

$$h_{jk}(a) = \Delta(a)^{-1/2} \cdot \{f_{,1}(a) \times \dots \times f_{,m}(a)\} \cdot f_{,jk}(a),$$

daher mit ZB8

$$h_{jk}(a) = \Delta(a)^{-1/2} \cdot \det(f_{,1}(a), \dots, f_{,m}(a), f_{,jk}(a)).$$

*Ergebnis:* Die Skalare  $h_{jk}$  sind Funktionen

$$h_{jk} : U \rightarrow \mathbb{R},$$

für die bei  $f \in C^r(U)$  dann  $h_{jk} \in C^{r-2}(U)$  gilt.

**Def. 4.3.2:** Die  $C^{r-2}$  Funktionen  $h_{jk}: U \rightarrow \mathbb{R}$  heißen *Koordinatenfunktionen der Krümmungsform  $H_f$  bezüglich  $f$* .

**Folgerung 3:** *Sind die  $h_{jk}$  geometrische Begriffe?*

Aufgrund ihrer Definition (Folgerung 1) sind sie bewegungsinvariant.

Untersuchung der Parameterinvarianz:

Sei  $f' = f \circ \varphi$  ein zu  $f$  äquivalenter Weg. In Analogie zu Formel (4.3.1) können wir ansetzen

$$h_{jk'}(a') = f'_{,jk'}(a') \cdot n_{f'}(a').$$

Bekanntlich gilt

$$f'_{,j'}(a') = f_{,j}(a) \cdot u^{j'}(a').$$

Partielles Differenzieren dieser Gleichung nach  $u^{k'}$  ergibt zusammen mit Produkt- und Kettenregel

$$f'_{,jk'}(a') = f_{,jk}(a) \cdot u^{k'}(a') \cdot u^{j'}(a') + f_{,j}(a) \cdot u^{j'k'}(a').$$

Unter Benützung von  $n_{f'}(a') = \varepsilon \cdot n_f(a)$ , wo  $\varepsilon := \text{sgn}(\det J_\varphi(a'))$  bedeutet, ergibt sich

$$h_{jk'}(a') = \varepsilon \cdot f_{,jk}(a) \cdot u^{j'}(a') \cdot u^{k'}(a') \cdot n_f(a),$$

da das skalare Produkt des Normalvektors  $n_f$  mit einem Tangentialvektor  $f_{,j}$  Null liefert. Mit (4.3.1) bleibt

$$h_{jk'}(a') = \varepsilon \cdot h_{jk}(a) \cdot u^{j'}(a') \cdot u^{k'}(a'),$$

sodaß zu den ursprünglichen  $h_{jk}$  im wesentlichen nur die Ableitungen des Parameterwechsels hinzukommen.

**Folgerung 4:** *Eine Kennzeichnung von Flachpunkten:*

Sei  $p = f(a)$  ein Flachpunkt, d.h.  $\omega_p = 0$ . Dann gelten folgende Äquivalenzen:

$$p = \text{Flachpunkt} \iff \omega_p = 0 \iff h_{jk}(a) = 0 \iff h_j^s(a) = 0 \quad (j, k, s = 1, \dots, m)$$

**Bew.:** (1) " $\implies$ ": Ist  $\omega_p = 0$ , so sind all deren Koordinatenfunktionen die Nullabbildungen, d.h. es ist  $h_j^s(a) = 0$ . Aus  $h_{jk}(a) = h_j^s(a) \cdot g_{sk}(a)$  folgt  $h_{jk}(a) = 0$ .

(2) " $\impliedby$ ": Aus  $h_{jk}(a) = 0$  folgt sofort  $0 = h_j^s(a) \cdot g_{sk}(a)$ . Dabei handelt es sich um ein lineares Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix  $(g_{sk}(a))$ , deren Determinante nicht verschwindet. Daher muß notwendig  $h_j^s(a) = 0$  und damit  $\omega_p = 0$  folgen.  $\square$

**Folgerung 5:** *Eine Kennzeichnung von Nabelpunkten:*

Sei  $p = f(a)$  ein Nabelpunkt, d.h.  $\omega_p = \mu \cdot \text{id}_{T_{af}}$  bei  $\mu \neq 0$  (sonst Folgerung 4).

$$p = \text{Nabelpunkt} \iff h_{jk}(a) = \rho(a) \cdot g_{jk}(a) \iff h_j^l(a) = \rho(a) \cdot \delta_j^l .$$

**Bew.:** (1) VOR.:  $h_{jk}(a) = \rho(a) \cdot g_{jk}(a)$ . Sei  $a$  fest gewählt. Sei  $X_p = v^j \cdot F_j(a)$  ein beliebiger Tangentialvektor aus  $T_a f$ . Dann folgt:

$$\omega_p(X_p) = v^j \cdot \omega_p(F_j(a)) = v^j h_j^l(a) \cdot F_l(a) .$$

Mit Formel (4.3.3) gilt weiter

$$\omega_p(X_p) = v^j h_{jk}(a) \cdot g^{kl}(a) \cdot F_l(a) ,$$

und dies ist nach Voraussetzung äquivalent mit

$$\omega_p(X_p) = v^j \rho(a) \cdot g_{jk}(a) \cdot g^{kl}(a) \cdot F_l(a) = v^j \rho(a) \cdot \delta_j^l \cdot F_l(a) = v^j \rho(a) \cdot F_j(a) = \rho(a) \cdot X_p \quad \forall X_p \in T_a f ,$$

sodaß  $p = f(a)$  ein Nabelpunkt ist.

(2) VOR.:  $p = f(a) = \text{Nabelpunkt}$ , d.h.  $\omega_p = \rho \cdot \text{id}_{T_a f}$ , also

$$\omega_p(F_k(a)) = \rho \cdot F_k(a) \quad \text{für } k=1, \dots, m .$$

Nach Gleichung (4.3.2) gilt

$$h_{jk}(a) = F_j(a) \cdot \omega_p(F_k(a)) = F_j(a) \cdot \rho(a) \cdot F_k(a) = \rho(a) \cdot g_{jk}(a) . \quad \square$$

### Folgerung 6:

Mit Def.4.2.1 und Gleichung (4.3.3) folgt

$$K(a) = \det \omega_p = \det(h_j^s(a)) = \det(h_{jk}(a) \cdot g^{ks}(a)) = \det(h_{jk}(a)) \cdot \det(g^{ks}(a)) .$$

Da die Matrix  $(g^{ks})$  die zu  $(g_{jk})$  inverse Matrix ist, bleibt

$$K(a) = \det(h_{jk}(a)) / \Delta(a) .$$

Weiters gilt

$$H(a) = 1/m \cdot \text{Sp} \omega_p = 1/m \cdot \sum_{j=1}^m h_j^j(a) = 1/m \cdot h_{jk}(a) \cdot g^{jk}(a) .$$

Speziell:  $m=2$ :

$$\text{GAUSSsche Krümmung: } K(a) = (h_{11} \cdot h_{22} - h_{12}^2) / (g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2)(a)$$

$$\text{MITTLERE Krümmung: } H(a) = 1/2 \cdot (h_{11} \cdot g^{11} + 2 \cdot h_{12} \cdot g^{12} + h_{22} \cdot g^{22})(a) .$$

Unter Benützung von

$$g^{11} = g_{22} / \Delta, \quad g^{12} = -g_{12} / \Delta, \quad g^{22} = g_{11} / \Delta$$

bleibt schließlich

$$H(a) = \left( (h_{11} \cdot g_{22} - 2 \cdot h_{12} \cdot g_{12} + h_{22} \cdot g_{11}) / 2\Delta \right) (a) .$$

**Bem.:** Die klassische Bezeichnung für  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  ist oft E, F, G (bei Gauß: L, M, N), für  $h_{11}$ ,  $h_{12}$ ,  $h_{22}$  oft L', M', N' (bei Gauß: L', M', N').

### Folgerung 7: Geometrische Begriffe der orientierten Hyperfläche:

Solche sind z.B.  $n_f$  (Bem.4.1.1,a),  $\omega_p$  (Bem.4.1.3,c),  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ , K, H (4.2,Folg.1).

Wir wollen aber nun das Transformationsverhalten bei einem Parameterwechsel genauer studieren:

Bekanntlich gilt

$$n_{f'}(a') = \varepsilon \cdot n_f(a) .$$

Nun ist

$$n_{f',j'}(a') = \varepsilon \cdot n_{f,j}(a) \cdot u^j_{j'}(a') \quad \text{und} \quad F'_{j'}(a') = F_j(a) \cdot u^j_{j'}(a') .$$

Vergleichen wir

$$\omega_p(F'_{j'}(a')) = u^j_{j'}(a') \cdot \omega_p(F_j(a)) = u^j_{j'}(a') \cdot (-N_{f,j}(a))$$

mit

$$\omega_p'(F'_{j'}(a')) = -N_{f',j'}(a') = -\varepsilon \cdot N_{f,j}(a) \cdot u^j_{j'}(a') ,$$

so finden wir leicht

$$\omega_p' = \varepsilon \cdot \omega_p .$$

Wählen wir speziell eine ONB aus Eigenvektoren von  $\omega_p$ , so folgert man leicht

$${}^{(j)}\kappa_p' = \varepsilon \cdot {}^{(j)}\kappa_p ,$$

da  $\omega_p'$  durch  $\text{diag}(\varepsilon \cdot {}^{(1)}\kappa_p, \dots, \varepsilon \cdot {}^{(m)}\kappa_p)$  beschrieben wird.  
Daraus folgt wiederum

$$K'(a') = \varepsilon^m \cdot K(a) \text{ bei } \varepsilon = \pm 1,$$

sodaß gilt:

Ist  $m \equiv 0 \pmod{2}$ , dann ist  $K$  ein geometrischer Begriff der Hyperfläche, im Fall  $m \equiv 1 \pmod{2}$  ein geometrischer Begriff der orientierten Hyperfläche.

Für die mittlere Krümmung  $H(a)$  findet man ebenfalls sofort

$$H'(a') = \varepsilon \cdot H(a) \text{ bei } \varepsilon = \pm 1,$$

sodaß gilt:

Die mittlere Krümmung  $H$  ist stets nur ein geometrischer Begriff der orientierten Hyperfläche. Die Aussage " $H=0$ " ist eine geometrische Aussage für die Hyperfläche.

Folgerung 8: Berechnung der Hauptkrümmungen und Krümmungsvektoren

Nach ZB18 lautet die EW-Gleichung von  $\omega_p$ :

$$\det(h_j^s(a) - c \cdot \delta_j^s) = 0 .$$

Nun ist aber

$$(h_j^s(a) - c \cdot \delta_j^s) \cdot g_{sk}(a) = h_{jk}(a) - c \cdot g_{jk}(a) ,$$

und wir erhalten die folgende Gleichung zur Bestimmung der Hauptkrümmungen:

$$\det(h_{jk}(a) - c \cdot g_{jk}(a)) = 0 .$$

Sei  $X_p = v^j \cdot F_j(a)$  ein Eigenvektor von  $\omega_p$  zum Eigenwert  $c_0$ . Dann erfüllen die Koordinaten  $v^j$  von  $X_p$  gemäß ZB18 die Gleichung

$$v^i (h_j^s(a) - c_0 \cdot \delta_j^s) = 0,$$

folglich

$$v^j \cdot (h_{jk}(a) - c_0 \cdot g_{jk}(a)) = 0 \text{ für } k=1, \dots, m.$$

Dabei bestimmt jede nichttriviale Lösung  $(v^1, \dots, v^m)$  dieses Gleichungssystems einen Eigenvektor zum Eigenwert  $c_0$ ; es handelt sich dabei um ein algebraisches Problem  $m$ -ten Grades.

Speziell:  $m=2$ :

Hier kann man, wie man gleich sehen wird, die Eigenvektoren direkt, also ohne Kenntnis der Eigenwerte bestimmen:

Dazu betrachten wir einen EV  $X_p = v^j \cdot F_j(a)$  zum EW  $c_0$ :  $\omega_p(X_p) = c_0 \cdot X_p$ .

Wir benützen nun

$$\omega_p(X_p) \times X_p = 0 ,$$

was aber zu

$$X_p \times \omega_p(X_p) = 0$$

äquivalent ist. Nun gilt bekanntlich

$$\omega_p(X_p) = v^s \cdot h_s^k(a) \cdot F_k(a) ;$$

setzen wir dies oben ein, so erhalten wir

$$0 = v^j \cdot F_j(a) \times v^s \cdot h_s^k(a) \cdot F_k(a) ,$$

also

$$0 = (F_1(a) \times F_2(a)) \cdot (v^1 \cdot v^s \cdot h_s^2(a) - v^2 \cdot v^s \cdot h_s^1(a)).$$

Da  $F_1(a)$  und  $F_2(a)$  linear unabhängig sind, bleibt

$$\text{in } a: 0 = v^1 \cdot v^1 \cdot h_1^2 + v^1 \cdot v^2 \cdot h_2^2 - v^2 \cdot v^1 \cdot h_1^1 - v^2 \cdot v^2 \cdot h_2^1 . (4.3.4)$$

Wir wollen dieses Ergebnis noch etwas umformen, indem wir  $h_j^s$  durch  $h_{jk}$  und  $g_{jk}$  ausdrücken; für  $h_2^1$  funktioniert dies z.B. so:

$h_2^1 = h_{22} g^{11} = h_{21} \cdot g^{11} + h_{22} g^{21} = h_{21} \cdot (g_{22}/\Delta) + h_{22} \cdot (-g_{12}/\Delta) = -(g_{12} h_{22} - g_{22} h_{21})/\Delta$ ;  
 unter Benützung einer Determinante lautet diese Umrechnung schließlich

$$h_2^1 = -1/\Delta \cdot \det \begin{pmatrix} g_{12} & g_{22} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}$$

Hat man diese Umformung für alle  $h_j^s$  durchgeführt, so lautet Gleichung (4.3.4) nun

$$0 = \det \begin{pmatrix} (v^2)^2 & -v^1 \cdot v^2 & (v^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} .$$

Man muß jetzt nur noch nach der ersten Zeile entwickeln.

**Folgerung 9: Geometrische Deutung der GAUSSschen Krümmung K:**

Sei  $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  regulär. Für einen Punkt  $a \in U$  erklären wir den

$\varepsilon$ -Ball  $B_\varepsilon(a) := \{u \in U \mid \|u - a\| \leq \varepsilon\}$ .

Damit ergibt sich einerseits auf der Fläche  $f(U)$  das Gebiet  $f(B_\varepsilon(a))$  um  $f(a) = p$  und andererseits das Gebiet  $n_f(B_\varepsilon(a))$  um  $\sigma(p) \in S^m$ .

Wir vergleichen nun die Oberflächen von  $f(B_\varepsilon(a))$  und  $n_f(B_\varepsilon(a))$  unter Benützung von Def.3.3.4:

$$O(f(B_\varepsilon(a))) = \int_{B_\varepsilon(a)} \Delta^{1/2} \cdot du^1 \dots du^m =: o$$

$$O(n_f(B_\varepsilon(a))) = \int_{B_\varepsilon(a)} \hat{\Delta}^{1/2} \cdot du^1 \dots du^m =: \hat{o} .$$

Sei zur Bestimmung von  $\hat{\Delta}$  die Stelle  $a \in U$  fest gewählt. Für die zum sphärischen Bild gehörigen  $\hat{g}_{jk}$  gilt, da  $S^m$  nach Def.4.1.2 durch  $n_f$  parametrisiert wird:

$$\hat{g}_{jk} = n_{f,j} \cdot n_{f,k} = (-\omega_p(F_j)) \cdot (-\omega_p(F_k)) = (-h_j^1 \cdot f_{,1}) \cdot (-h_k^s \cdot f_{,s}) = h_j^1 \cdot h_k^s \cdot g_{1s} .$$

Damit folgt für  $\hat{\Delta} := \det(\hat{g}_{jk})$

$$\hat{\Delta} = K^2 \cdot \Delta ,$$

beziehungsweise

$$\hat{\Delta}^{1/2} = |K| \cdot \Delta^{1/2} ,$$

wenn  $K$  die GAUSSsche Krümmung von  $f(U)$  in  $p$  bezeichnet.

Wir erhalten

$$\hat{o} = \int_{B_\varepsilon(a)} |K| \cdot \Delta^{1/2} \cdot du^1 \dots du^m .$$

Um unsere Betrachtungen zu Ende führen zu können, benötigen wir

**ZWISCHENBEMERKUNG 19:**

Sei  $T \subset \mathbb{R}^m$  eine kompakte Menge im  $\mathbb{R}^m$ . Ferner seien  $f, g: T \rightarrow \mathbb{R}$  vorgegebene Funktionen, von denen eine, etwa  $g$  positiv sei:  $g \geq 0$ . Dann gilt:

Es gibt stets einen Punkt  $b = (b^1, \dots, b^m) \in T \setminus \partial T$  derart, daß die folgende Beziehung gilt:

$$\int_T f(u^1, \dots, u^m) \cdot g(u^1, \dots, u^m) \cdot du^1 \dots du^m = f(b^1, \dots, b^m) \cdot \int_T g(u^1, \dots, u^m) \cdot du^1 \dots du^m .$$

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Dem  $f$  aus ZB19 entspricht hier  $|K|$ , dem  $g$  schließlich  $\Delta^{1/2} \geq 0$ .

Also gilt

$$\hat{o} = |K(b)| \cdot \int_{B_\varepsilon(a)} \Delta^{1/2} \cdot du^1 \dots du^m ,$$

folglich

$$\hat{o}/o = |K(b)| .$$

Führen wir nun den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  (und damit  $b \rightarrow a$ ) durch, so finden wir als "**Oberflächenverzerrung von  $\sigma$** "

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\hat{o}/o) = |K(a)| .$$

#### 4.4 Normalkrümmung einer Flächentangente

Sei  $\lambda \cdot X_p$  ( $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ ,  $X_p \neq 0 \in T_a f$ ) eine Flächentangente der Hyperfläche  $f(U)$ .

**Def. 4.4.1:** Die Abbildung

$$\kappa_p^N : T_a f \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\kappa_p^N(X_p) := H_{f(a)}(X_p, X_p) / G_{f(a)}(X_p, X_p)$$

heißt **Normalkrümmung** der durch  $X_p$  bestimmten Flächentangente.

**Bem. 4.4.1:** (a) Definitionsgemäß gilt  $\kappa_p^N(X_p) = (X_p \cdot \omega_p(X_p)) / (X_p \cdot X_p)$ .

(b) Da sich beim Übergang  $X_p \mapsto \lambda \cdot X_p$  ( $\lambda \neq 0$ ) der Wert  $\kappa_p^N$  nicht ändert, ist die Definition sinnvoll.

(c) Nach Bem. 4.1.3, c ist  $\kappa_p^N$  ein geometrischer Begriff der Flächentangente einer orientierten Hyperfläche.

(d) Speziell für  $\|X_p\| = 1$  folgt:

$$\kappa_p^N(X_p) = H_{f(a)}(X_p, X_p) = X_p \cdot \omega_p(X_p).$$

(e) Koordinatenmäßig:

Für  $X_p = v^j \cdot F_j(a)$  folgt mit 3.3, Diskussionspunkt 1 und 4.3, Folgerung 1

$$\kappa_p^N(X_p) = v^j \cdot v^k \cdot h_{jk}(a) / v^j \cdot v^k \cdot g_{jk}(a).$$

(f) In der klassischen Geometrie findet man auch  $G_{f(a)} =: I(a)$  bzw.  $H_{f(a)} =: II(a)$ , folglich  $\kappa_p^N(X_p) = II(a) / I(a)$ .

**Folgerung 1:** Wir definieren zuerst

**Def. 4.4.2:**  $\lambda \cdot X_p$  heißt **Krümmungstangente**  $\Leftrightarrow X_p \neq 0$  ist Krümmungsvektor.

**Satz 4.4.1:** Die Normalkrümmung einer Krümmungstangente ist die zugehörige Hauptkrümmung.

**Beweis:** Ist  $\lambda \cdot X_p$  Krümmungstangente, also  $X_p$  Krümmungsvektor, so folgt wegen  $\omega_p(X_p) = c_0 \cdot X_p$  mit  $\kappa_p^N(X_p) = (c_0 \cdot X_p \cdot X_p) / (X_p \cdot X_p) = c_0$  die Behauptung.  $\square$

**Folgerung 2:** Vorerst die

**Def. 4.4.3:**  $X_p \neq 0$  heißt **Schmiegtangentenvektor**, wenn  $\kappa_p^N(X_p) = 0$ .  $\lambda \cdot X_p$  heißt dann **Schmiegtangente**.

Man erkennt:  $\kappa_p^N(X_p) = 0 \Leftrightarrow H_{f(a)}(X_p, X_p) = 0 \Leftrightarrow X_p \cdot \omega_p(X_p) = 0$ .

Daher ist entweder  $\omega_p(X_p) = 0$  oder  $X_p \perp \omega_p(X_p)$ .

**Speziell:** Ist  $p$  ein Flachpunkt, so ist wegen  $\omega_p = 0$  dann  $\kappa_p^N(X_p) = 0$ , sodaß gilt:

*In einem Flachpunkt ist jeder Tangentialvektor Schmiegtangentenvektor und jede Flächentangente eine Schmiegtangente.*

**Koordinatenmäßig:** Es sei  $X_p = v^j \cdot F_j(a)$  beliebig aus  $T_a f$ . Dann ist

$$\kappa_p^N(X_p) = 0 \Leftrightarrow v^j \cdot v^k \cdot h_{jk}(a) = 0$$

und man erkennt: entweder existiert in  $p$  keine Schmiegtangente oder die

Schmiegtangenten bilden eine kegelige quadratische Varietät.

Z.B.:  $m=2$ : Hier besteht diese quadratische Varietät aus zwei (nicht notwendig verschiedenen) Geraden.

**Folgerung 3:** Wir formulieren

**Def. 4.4.4:** Eine Krümmungstangente, die zugleich Schmiegtangente ist, heißt **Schmiegekrümmungstangente**.

Der Tangentialvektor  $X_p$  bestimme die Schmiegekrümmungstangente  $\lambda \cdot X_p$ . Dann gilt einerseits, da  $\lambda \cdot X_p$  Krümmungstangente ist,

$$\omega_p(X_p) = c_0 \cdot X_p,$$

und andererseits, da  $\lambda \cdot X_p$  Schmiegtangente ist,

$$X_p \cdot \omega_p(X_p) = 0.$$

Folglich ist  $X_p \cdot c_0 \cdot X_p = 0$ , was wegen  $X_p \neq 0$  dann  $c_0 = 0$  zur Folge hat. Also gilt:

*Eine Schmiegekrümmungstangente ist eine Krümmungstangente, deren Hauptkrümmung Null ist.*

Daher ist die Bedingung " $K(a)=0$ " ein Kriterium für die Existenz einer Schmiegekrümmungstangente.

**Folgerung 4:** (für  $m=2$  von EULER durchgeführt)

Nach Satz 4.2.1 existiert in  $T_a f$  eine ONB aus Krümmungsvektoren, die wir mit

$$({}_j)K_p \in T_a f, \quad j=1, \dots, m$$

beschriften wollen.

Für die folgenden Untersuchungen in Folgerung 4 setzen wir kurz  $({}_j)K_p =: K_j$ .

Ein Tangentialvektor  $X_p \in T_a f$  gestattet daher die Darstellung

$$X_p = v^j \cdot K_j.$$

ObdA. setzen wir  $\|X_p\|=1$  voraus. Dann folgt wegen  $\|K_j\|=1$

$$X_p \cdot K_s = v^j \cdot K_j \cdot K_s = v^j \delta_{js} = v^s = \cos(X_p, K_s). (*)$$

Damit kann berechnet werden:

$$\kappa_p^N(X_p) = X_p \cdot \omega_p(X_p) = v^j K_j \cdot \omega_p(v^s K_s) = v^j K_j \cdot v^s \omega_p(K_s).$$

Da  $({}_s)\kappa_p$  der zu  $K_s$  gehörige Eigenwert ist, gilt weiter

$$\kappa_p^N(X_p) = v^j \cdot K_j \cdot v^s \cdot ({}_s)\kappa_p \cdot K_s.$$

Unter Verwendung des Summenzeichens bleibt

$$\kappa_p^N(X_p) = v^j \cdot K_j \cdot \sum_{s=1}^m v^s \cdot ({}_s)\kappa_p \cdot K_s$$

Wegen  $K_j \cdot K_s = \delta_{js}$  erhält man

$$\kappa_p^N(X_p) = \sum_{s=1}^m (v^s)^2 \cdot ({}_s)\kappa_p,$$

und wegen (\*) dann

$$\kappa_p^N(X_p) = \sum_{s=1}^m ({}_s)\kappa_p \cdot \cos^2(X_p, K_s).$$

**Bem. 4.4.2:** (a) Im Falle  $m=2$  lautet die Formel von EULER

$$\kappa_p^N(X_p) = ({}_1)\kappa_p \cdot \cos^2 \alpha + ({}_2)\kappa_p \cdot \sin^2 \alpha.$$

(b) Ist speziell  $X_p = v^s \cdot K_s$  ein Schmiegtangentenvektor, so erfüllen seine Flächenkoordinaten bezüglich der ONB  $\{K_s | s=1, \dots, m\}$  die Bedingung

$$0 = \sum_{s=1}^m (v^s)^2 \cdot {}_{(s)}\kappa_p .$$

**Folgerung 5: Geometrische Veranschaulichung der Formel von EULER:**

Ch. DUPIN (1813): *DUPINsche Indikatrix:*

Wir gehen aus von einer ONB in  $T_a f$ . Dann existieren in  $A(T_a f)$  kartesische Koordinaten, d.h.

$$y \in A(T_a f) \implies y = (y^1, \dots, y^m) = y^i \cdot K_i .$$

Sei nun  $X_p \in T_a f$  ein Tangentialvektor mit  $\|X_p\|=1$ , der kein Schmiegtangentenvektor (STV) ist, für den also  $\kappa_p^N(X_p) \neq 0$  ist.

Wir definieren jetzt in der Tangentialhyperebene  $T_a f$  eine Punktmenge, indem wir von  $p$  aus auf der Flächentangente  $\lambda X_p$  nach beiden Seiten jeweils die Länge  $|\kappa_p^N(X_p)|^{-\frac{1}{2}}$  auftragen. Die so erhaltene Punktmenge

$$y = \pm X_p \cdot |\kappa_p^N(X_p)|^{-\frac{1}{2}}$$

mit  $X_p \in T_a f$ ,  $\|X_p\|=1$  werden wir genauer studieren.

Verwenden wir  $X_p = v^j \cdot K_j = \sum \cos(X_p, K_j) \cdot K_j$ , so lautet die  $i$ -te Koordinate  $y^i$  von  $y$

$$y^i = \pm \cos(X_p, K_i) / |\kappa_p^N(X_p)|^{\frac{1}{2}} .$$

Damit gilt

$$({}_1)\kappa_p \cdot (y^1)^2 + \dots + ({}_m)\kappa_p \cdot (y^m)^2 = \left( \sum ({}_j)\kappa_p \cdot \cos^2(X_p, K_j) \right) / |\kappa_p^N(X_p)| .$$

Mit der EULERformel erhalten wir

$$({}_1)\kappa_p \cdot (y^1)^2 + \dots + ({}_m)\kappa_p \cdot (y^m)^2 = \pm 1 .$$

**Def. 4.4.5:** Mit den beiden Funktionen

$$Q_1 := ({}_1)\kappa_p \cdot (y^1)^2 + \dots + ({}_m)\kappa_p \cdot (y^m)^2 - 1$$

$$Q_2 := ({}_1)\kappa_p \cdot (y^1)^2 + \dots + ({}_m)\kappa_p \cdot (y^m)^2 + 1$$

heißt  $(Q_1^{-1}) \cup (Q_2^{-1}) =: D_p$  *DUPINsche Indikatrix in p*, falls  $D_p \neq \emptyset$ .

Ist  $D_p = \emptyset$ , so verschwinden notwendig alle Hauptkrümmungen  $({}_j)\kappa_p$ , sodaß  $p$  ein Flachpunkt sein muß. Bei  $D_p \neq \emptyset$  besteht  $D_p$  aus zwei quadratischen Varietäten im Tangentialraum.

**Bem.:**  $D_p$  ist ein geometrischer Begriff der Hyperfläche, da bei einem gegenseitigen Parameterwechsel die Punkt Mengen  $Q_1^{-1}$  und  $Q_2^{-1}$  miteinander vertauscht werden.

**Diskussion der DUPINschen Indikatrix für  $m=2$**

Sei  $p=f(a)$  kein Flachpunkt, also  $({}_1)\kappa_p \cdot ({}_2)\kappa_p \neq (0,0)$ .

**Fall 1:**  $({}_1)\kappa_p \cdot ({}_2)\kappa_p > 0$  ( $\implies K(a) > 0$ ).

OBdA. gelte  $({}_j)\kappa_p > 0$  (andernfalls einen Parameterwechsel dazwischenschalten).

Unter diesen Voraussetzungen gilt:

$$Q_1 = (1)^{\kappa_p} \cdot (y^1)^2 + (2)^{\kappa_p} \cdot (y^2)^2 - 1 ,$$

$$Q_2 = (1)^{\kappa_p} \cdot (y^1)^2 + (2)^{\kappa_p} \cdot (y^2)^2 + 1 ;$$

Folglich ist  $Q_1^{-1}0$  eine Ellipse und  $Q_2^{-1}0 = \{ \}$ .

$p$  heißt ein **elliptischer Flächenpunkt**.

Da eine Ellipse nur eigentliche Punkte besitzt, gilt:

*In einem elliptischen Flächenpunkt existieren keine Schmiegtangenten.*

**Fall 2:**  $(1)^{\kappa_p} \cdot (2)^{\kappa_p} < 0$ .

Es sei etwa  $(1)^{\kappa_p} > 0$ .

Wegen

$$Q_1 = (1)^{\kappa_p} \cdot (y^1)^2 + (2)^{\kappa_p} \cdot (y^2)^2 - 1$$

und

$$Q_2 = (1)^{\kappa_p} \cdot (y^1)^2 + (2)^{\kappa_p} \cdot (y^2)^2 + 1$$

sind die beiden Hyperbeln  $Q_1^{-1}0$  und

$Q_2^{-1}0$  ein **Paar konjugierter Hyperbeln**,

da sie die Asymptoten gemeinsam und

dieselbe lineare Exzentrizität  $e$  haben;

die Gleichung der Asymptoten lautet

nämlich

$$(1)^{\kappa_p} \cdot (y^1)^2 + (2)^{\kappa_p} \cdot (y^2)^2 = 0 ,$$

das Quadrat von  $e$  ist

$$e^2 = 1 / ((1)^{\kappa_p})^2 + 1 / ((2)^{\kappa_p})^2 .$$

$p$  heißt ein **hyperbolischer Flächenpunkt**.

Da eine Hyperbel genau zwei reelle Fernpunkte besitzt, folgt:

*In einem hyperbolischen Flächenpunkt existieren genau zwei Schmiegtangenten, welche die Asymptoten der Indikatrix sind.*

**Fall 3:**  $(1)^{\kappa_p} \cdot (2)^{\kappa_p} = 0$ .  $\Leftrightarrow K(a) = 0$ .

Da  $p$  kein Flachpunkt ist, wählen wir oBdA.  $(1)^{\kappa_p} > 0$ .

Dann ist  $D_p$  wegen

$$Q_1 = (1)^{\kappa_p} \cdot (y^1)^2 - 1 \text{ und } Q_2 = (1)^{\kappa_p} \cdot (y^1)^2 + 1$$

das Geradenpaar  $Q_1^{-1}0$ , bestehend aus zwei parallelen Geraden.

$p$  heißt ein **parabolischer Flächenpunkt**.

$K_2$  bestimmt eine Schmiegekrümmungstangente in  $p$ .

**Folgerung 6:** Wir formulieren

**Def. 4.4.6:** Seien  $X_p, Y_p \in T_a f \setminus \{0\}$  zwei Tangentialvektoren im Flächenpunkt  $p = f(a)$ . Die durch  $X_p$  und  $Y_p$  bestimmten Flächentangenten  $\lambda \cdot X_p$  und  $\lambda \cdot Y_p$  heißen **konjugiert**, wenn  $H_{f(a)}(X_p, Y_p) = X_p \cdot \omega_p(Y_p) = 0$ .

**Bem. 4.4.3:** (a) Da  $\omega_p$  selbstadjungiert ist, ist das Konjugiertsein ein symmetrischer Begriff.

(b) Sei  $\lambda \cdot X_p$  eine **selbstkonjugierte** Flächentangente, d.h. es gilt

$$X_p \cdot \omega_p(X_p) = 0 .$$

Dann ist aber  $\kappa_p^N(X_p) = 0$  und  $\lambda \cdot X_p$  damit eine Schmiegtangente (Def.4.4.3).

(c) Koordinatenmäßig:

Es seien  $X_p = v^j F_j(a)$  und  $Y_p = w^k F_k(a)$  zwei Vektoren aus  $T_a f$ . Sind  $\lambda X_p$  und  $\lambda Y_p$  konjugiert, so besteht nach 4.3, Folgerung 1 die Beziehung

$$v^j w^k h_{jk}(a) = 0.$$

Unter Benützung der aus EV von  $\omega_p$  gebildeten ONB von  $T_a f$  und mit  $X_p = v^j K_j$  bzw.  $Y_p = w^k K_k$  lautet die Bedingung

$$0 = X_p \cdot \omega_p(Y_p) = v^j K_j \cdot w^k \omega_p(K_k).$$

Wegen  $\omega_p(K_k) = \mu_{(k)p}$  und  $K_j \cdot K_k = \delta_{jk}$  bleibt

$$\sum_{j=1}^m v^j w^j \mu_{(j)p} = 0 \quad (4.4.1)$$

(d) Sonderfälle:

1) In einem Flachpunkt  $p$  sind wegen  $\omega_p = 0$  je zwei Flächentangenten konjugiert. Jede Flächentangente ist Schmiegtangente.

2) Sei  $\lambda X_p$  Schmiegekrümmungstangente in  $p$ , also  $\omega_p(X_p) = 0$ . Mit Def.4.4.6 folgt: Jede Flächentangente ist zu jeder Schmiegekrümmungstangente konjugiert.

**Satz 4.4.2:** Sei für  $m=2$   $p=f(a)$  kein Flachpunkt und kein parabolischer Punkt. Dann ist "konjugiert" im Sinne der Kegelschnittstheorie (bezüglich der Dupinschen Indikatrix) "konjugiert" im Sinne von Def. 4.4.6.

Beweis: Sei

$$Q = a \cdot (y^1)^2 + b \cdot (y^2)^2 - 1 = 0$$

die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel. Wir wählen den Punkt  $S_0 = (\hat{y}^1, \hat{y}^2) \in Q^{-1}0$ . Dann legt

$$v^1 : v^2 = \hat{y}^1 : \hat{y}^2$$

den durch  $S_0$  gehenden Durchmesser des Kegelschnitts fest.

Zur Bestimmung des dazu konjugierten Durchmessers (das ist jener Durchmesser von  $Q^{-1}0$ , der zur Tangente von  $Q^{-1}0$  in  $S_0$  parallel ist) ermitteln wir zuerst die Richtung der Normalen von  $Q^{-1}0$  in  $S_0$ :

$$(\partial Q / \partial y^1, \partial Q / \partial y^2) |_{S_0} = (2 \cdot a \cdot \hat{y}^1, 2 \cdot b \cdot \hat{y}^2) |_{S_0} = 2 \cdot (a \cdot \hat{y}^1, b \cdot \hat{y}^2).$$

Dann legt

$$(w_1, w_2) = (-b \cdot \hat{y}^2, a \cdot \hat{y}^1)$$

den zum ersten Durchmesser konjugierten Durchmesser fest.

Schließlich überprüft man

$$a \cdot v^1 \cdot w^1 + b \cdot v^2 \cdot w^2 = 0.$$

Mit unseren Bezeichnungen bedeutet dies

$$({}_1)\mu_p \cdot v^1 \cdot w^1 + ({}_2)\mu_p \cdot v^2 \cdot w^2 = 0.$$

Genau dann sind nach Bem.4.4.1 die Flächentangenten  $\lambda X_p$  und  $\lambda Y_p$  konjugiert im Sinne von Def.4.4.6.  $\square$

#### 4.5. Krümmung von Flächenkurven einer Hyperfläche

Sei  $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  eine  $C^2(U)$ -Immersion und der Flächenweg  $f \circ c: I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  eine  $C^2(I)$ -Immersion.

Ziel dieses Kapitels ist, einen Zusammenhang zwischen der ersten Krümmung  $\kappa_1$  von  $c_f(I)$  und den Krümmungsgrößen der Hyperfläche zu finden. Wegen  $T_p \mathbb{R}^n = T_a f \oplus T_a f^\perp$  kann jeder Vektor eindeutig in zwei Komponenten aus  $T_a f$  und  $T_a f^\perp$  zerlegt werden.

**Def. 4.5.1:** Die Abbildung

$$npr_a : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_a f^\perp$$

heißt *Normalprojektion im Punkt  $f(a)$* .

Der Vektor  $\ddot{C}_f(0) = (\dot{c}_f(0); \ddot{c}_f(0))$  gestattet daher die Darstellung

$$\ddot{C}_f(0) = tpr_a(\ddot{C}_f(0)) + npr_a(\ddot{C}_f(0)) \quad (*)$$

Dabei ist nach Def. 3.4.7

$$tpr_a(\ddot{C}_f(0)) = tpr_a\left\{\left(\frac{d\dot{C}_f}{dt}(0)\right)\right\} = \left(\frac{D\dot{C}_f}{dt}(0)\right).$$

Da  $T_a f^\perp$  eindimensional ist, kann

$$npr_a(\ddot{C}_f(0)) = \lambda \cdot N_f(a), \quad c(0) = a$$

gesetzt werden.

Zur Berechnung von  $\lambda$  multiplizieren wir (\*) mit  $N_f(a)$ :

$$\ddot{C}_f(0) \cdot N_f(a) = \lambda \cdot N_f(a) \cdot N_f(a) = \lambda.$$

Durch Differentiation der in  $I$  vorliegenden Identität

$$\dot{c}_f(n_f \circ c) = 0$$

erhält man als neue Identität

$$\ddot{c}_f(n_f \circ c) + \dot{c}_f(n_{f,j} \circ c) \cdot \dot{c}^j = 0.$$

Das ergibt

$$\lambda = -\dot{c}_f(0) \cdot n_{f,j}(a) \cdot \dot{c}^j(0) = -\dot{C}_f(0) \cdot N_{f,j}(a) \cdot \dot{c}^j(0) = \dot{C}_f(0) \cdot \omega_p(F_j(a)) \cdot \dot{c}^j(0).$$

Wegen  $\dot{C}_f(0) = \dot{c}^j(0) \cdot F_j(a)$  gilt

$$\lambda = \dot{C}_f(0) \cdot \omega_p(\dot{C}_f(0)) = \|\dot{C}_f(0)\|^2 \cdot \kappa_p^N(\dot{C}_f(0)),$$

wobei die letzte Gleichheit mit Bem. 4.4.1, a zu begründen ist.

Wir erhalten als wichtige Formel

$$\ddot{C}_f(0) = \frac{D\dot{C}_f}{dt}(0) + \|\dot{C}_f(0)\|^2 \cdot \kappa_p^N(\dot{C}_f(0)) \cdot N_f(a), \quad c(0) = a. \quad (4.5.1)$$

#### Diskussion:

(1) Um den folgenden Satz formulieren zu können, erklären wir in

**Def. 4.5.2:**  $\kappa_p^N(\dot{C}_f(0))$  heißt *Normalkrümmung* von  $c_f(I)$  in  $c_f(0)$ .

**Satz 4.5.1:** *Berührende Flächenkurven haben dieselbe Normalkrümmung.*

**Beweis:** Bem. 4.4.1, b.  $\square$

**Bem.:** Der Begriff "Normalkrümmung einer Flächenkurve" ist nach Bem. 4.4.1, c ein geometrischer Begriff der Flächenkurve auf der orientierten Hyperfläche.

(2) Wenn  $\kappa_p^N(X_p) \neq 0$ , so ist  $\lambda X_p$  Schmiegtangente. Es gilt

**Satz 4.5.2:** Eine reguläre Flächenkurve  $c_f(I)$  berührt eine Schmiegtangente  $g$  in  $c_f(0)$  genau dann, wenn entweder  $c_f(0)$  ein Wendepunkt von  $c_f(I)$  ist oder die Schmiegeebene von  $c_f(I)$  in  $c_f(0)$  im Tangentialraum enthalten ist.

**Beweis:** Nach Vorherigem ist  $\kappa_p^N(\dot{C}_f(0)) = 0$  äquivalent mit  $\ddot{c}_f(0) \cdot n_f(a) = 0$ . Wegen  $n_f(a) \neq 0$  unterscheiden wir: Im Falle  $\ddot{c}_f(0) = 0$  ist  $c_f(0)$  nach 2.7 ein Wendepunkt von  $c_f(I)$ . Bei  $\ddot{c}_f(0) \neq 0$  ist  $\ddot{c}_f(0) \perp n_f(a)$ , folglich  $\ddot{c}_f(0) \in T_a f$ ; damit liegt die Schmiegeebene von  $c_f(I)$  in  $c_f(0)$  tangential.  $\square$

(3) Wir formulieren

**Satz 4.5.3:** Eine Flächentangente  $g$  ist Schmiegtangente genau dann, wenn  $g$  die Hyperfläche  $f(U)$  oskuliert.

**Beweis:** (1) VOR.:  $g$  oskuliert  $f(U)$  in  $p$ .

Nach Def. 2.7.4 existiert auf  $f(U)$  eine Ersatzkurve, die  $g$  in  $p$  oskuliert. Nach 2.7 besitzt diese  $p$  als Wendepunkt. Aus Satz 4.5.2 folgt, daß  $g$  Schmiegtangente ist.

(2) VOR.:  $g$  ist Schmiegtangente.

Sei  $\gamma$  eine Ebene durch  $g$ , die nicht im Tangentialraum von  $f(U) =: \Phi$  in  $p$  liegt. Dann ist  $\gamma$  in jedem Punkt der ebenen Kurve  $\gamma \cap \Phi$  Schmiegeebene, wobei  $\gamma \cap \Phi$  die Schmiegtangente  $g$  in  $p \in \Phi$  berührt.

Nach Satz 4.5.2 hat  $\gamma \cap \Phi$  in  $p$  einen Wendepunkt, sodaß  $\gamma \cap \Phi$   $g$  in  $p$  oskuliert. Also oskuliert  $g$  die Hyperfläche  $\Phi$ .  $\square$

(4)  $g$  sei Nichtschmiegtangente,  $c_f(I)$  berühre  $g$  in  $c_f(0)$ . Nach Satz 4.5.2 ist  $c_f(0)$  kein Wendepunkt von  $c_f(I)$  und die Schmiegeebene von  $c_f(I)$  in  $c_f(0)$  nicht im Tangentialraum enthalten. Dann gilt:

**Satz 4.5.4:** Alle regulären Flächenkurven, die in  $p=f(a)$  dieselbe Nichtschmiegtangente  $g$  berühren, oskulieren eine die Hyperfläche  $f(U)=\Phi$  in  $p$  berührende Sphäre. Diese Sphäre  $S^m(\dot{C}_f(0))$  heißt **MEUSNIER-Sphäre**, wo  $g$  durch den Vektor  $\dot{C}_f(0)$  bestimmt ist.

**Beweis:** Die Sphäre  $S^m(\dot{C}_f(0))$  werde zweckmäßigerweise als quadratische Varietät  $F^{-1}0$  angesetzt mit

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, F(x) := \|x - m\|^2 - r^2.$$

Da die Sphäre  $\Phi$  berühren soll, kann

$m = p + \rho \cdot n_f(a)$  mit  $\rho > 0$  bzw.  $\rho < 0$  angesetzt werden. Dabei ist  $\rho^2 = r^2$ .

Eine beliebige (zugelassene) Flächenkurve  $c_f(I)$  berühre  $F^{-1}0$  in  $p=f(a)=c_f(0)$  von 2. Ordnung; nach (Ü14) ist dies mit  $\text{Foc}_f(0) =_{(2)} 0$  äquivalent. Explizit bedeutet dies:

- $\text{Foc}_f(0)=0$ : diese Forderung ist aufgrund obigen Ansatzes wegen  $\|c_f(0)-m\|^2-r^2=\rho^2-r^2=0$  gewährleistet;
- $(\text{Foc}_f)'(0)=0$ : stimmt auch wegen  $2 \cdot (c_f(0)-m) \cdot \dot{c}_f(0)=0$ ;
- $(\text{Foc}_f)''(0)=0$ : Es ist

$$\frac{1}{2}(\text{Foc}_f)''(0) = \dot{c}_f(0) \cdot \dot{c}_f(0) + (c_f(0)-m) \cdot \ddot{c}_f(0).$$

Da oBdA.  $\|\dot{c}_f\|=1$  in  $I$  angenommen werden kann, folgt wegen  $c_f(0)-m=-\rho \cdot n_f(a)$  und (4.5.1) als Bedingung

$$\rho = (\kappa_p^N(\dot{C}_f(0)))^{-1},$$

und folglich

$$m = p + n_f(a) \cdot (\kappa_p^N(\dot{C}_f(0)))^{-1},$$

d.h. Radius und Mitte der Sphäre sind eindeutig festgelegt.

Da nach Konstruktion alle derartigen regulären Flächenkurven  $c_f(I)$  die Sphäre  $S^m(\dot{C}_f(0))$  oskulieren, ist  $S^m(\dot{C}_f(0))$  die "richtige" Sphäre.

Da von  $c_f(I)$  nur die Normalkrümmung  $\kappa_p^N(\dot{C}_f(0))$  eingeht und diese nach Satz 4.5.1 für alle berührenden Flächenkurven dieselbe ist, ist  $S^m(\dot{C}_f(0))$  von der Auswahl der Flächenkurve  $c_f(I)$  unabhängig.  $\square$

(5) Es gilt

**Satz 4.5.5:** *Alle regulären Flächenkurven, die in  $p$  dieselbe Nichtschmiegtangente  $g$  berühren und dieselbe Schmiegeebene besitzen, haben in  $p$  denselben Krümmungskreis.*

Beweis: Nach Satz 4.5.4 existiert zur Nichtschmiegtangente  $g$  eindeutig die MEUSNIER-Sphäre  $S^m(\dot{C}_f(0))$ , die eine Hypervarietät  $F^{-1}0$  mit  $F:R^n \rightarrow R$  ist. Dabei oskuliert jede  $g$  berührende Flächenkurve  $c_f(I)$  die Sphäre  $S^m(\dot{C}_f(0))$  in  $p=c_f(0)$ , was mit  $\text{Foc}_f(0) =_{(2)} 0$  äquivalent ist.

Die Schmiegeebene  $\varepsilon$  ist als Durchschnitt von  $n-2$  Hyperebenen Nullstellenmenge einer Funktion  $G:R^n \rightarrow R^{n-2}$ , also  $\varepsilon=G^{-1}0$ .

Nach 2.7 oskuliert jede Kurve ihre Schmiegeebene (an der betreffenden Stelle), was hier zu  $\text{Goc}_f(0) =_{(2)} 0$  äquivalent ist.

Da  $g$  Nichtschmiegtangente ist, ist nach Satz 4.5.2  $c_f(0)=p$  kein Wendepunkt von  $c_f(I)$  und  $\varepsilon$  nicht tangential zu  $f(U)$ ; da die Hyperfläche  $f(U)$  von der MEUSNIER-Sphäre berührt wird, liegt  $\varepsilon$  nicht tangential zu  $S^m(\dot{C}_f(0))$ . Daher ist  $\varepsilon \cap S^m(\dot{C}_f(0)) =: k$  ein Kreis.

Es ist  $k$  der Krümmungskreis von  $c_f(I)$  in  $c_f(0)$ , denn:

Da  $k$  Durchschnitt von Schmiegeebene und Hypersphäre ist, genügen seine Koordinaten den beiden Gleichungen  $F=0$  und  $G=0$ . Nach obigem gilt dann  $(F,G)oc_f(0) =_{(2)} 0$ , sodaß  $k$  die Flächenkurve  $c_f(I)$  in  $c_f(0)$  oskuliert. Nach Satz

2.7.2 ist der Krümmungskreis einer Kurve eindeutig, sodaß  $k$  Krümmungskreis von  $c_f(I)$  in  $c_f(0)$  ist.  $\square$

**Bem.:** (a) Satz 4.5.5 ist für beliebige Raumkurven, die auf keiner gemeinsamen Hyperfläche  $f(U)$  liegen, falsch.

(b) Satz 4.5.5 ist auch auf zwei ebene einander berührende Kurven nicht anwendbar, da die gemeinsame Tangente im Berührungspunkt Schmiegtangente ist.

(6) Berechnung von  $\kappa_1$ :

Wir setzen für die Hyperfläche  $f(U) \subset \mathbb{R}^{m+1}$   $m \geq 2$  voraus; damit ist mit 2.5  $\kappa_1 > 0$ . OBdA. setzen wir für die Flächenkurve  $f \circ c_f: I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$   $\| \dot{C}_f \| = 1$  in  $I$  voraus.

Nach 4.5 ist dann

$$\kappa_p^N(\dot{C}_f(0)) = \ddot{C}_f(0) \cdot N_f(a) = \| \ddot{C}_f(0) \| \cdot \| N_f(a) \| \cdot \cos(\ddot{C}_f(0), N_f(a)) .$$

$N_f(a)$  ist normiert; also bleibt wegen  $\kappa_1(0) = \| \ddot{C}_f(0) \|$  die 1785 von MEUSNIER gefundene Formel

$$\kappa_p^N(\dot{C}_f(0)) = \kappa_1(0) \cdot \cos \varphi ,$$

wo  $\varphi$  der Winkel zwischen der orientierten Hauptnormalen von  $c_f(I)$  in  $c_f(0)$  und der orientierten Flächennormalen  $n_f(a)$  ist. Dabei ist die Hauptnormale die von  $(c_f)_2$  definierte Gerade  $A\{c_f(0) + H((c_f)_2(0))\}$  ist.

Zusammenfassung:

Sei  $\kappa_1$  die 1. Krümmung einer regulären Flächenkurve  $c_f(I)$  in  $c_f(0)$ ,  $g$  sei Tangente von  $c_f(I)$  in  $c_f(0)$ .

Fall 1:  $g$  ist NICHTschmiegtangente:

Der Krümmungskreis  $k = \varepsilon \cap S^m(\dot{C}_f(0))$  von  $c_f(I)$  in  $c_f(0)$  hat den Radius  $1/\kappa_1(0)$ .

Zur Festlegung der MEUSNIER-Sphäre  $S^m(\dot{C}_f(0))$  schneiden wir die **Normalschnittsebene**  $\gamma := g \vee A\{H(N_f(a))\}$  mit der Hyperfläche  $f(U)$  und erhalten den **Normalschnitt**  $\gamma \cap f(U) =: \tilde{c}_f(I)$ .

Wegen  $\varphi=0$  oder  $\varphi=\pi$  ist  $|\cos \varphi|=1$ , folglich

$$\kappa_p^N(\dot{C}_f(0)) = \bar{\kappa}_1(0) .$$

Damit ist der Radius  $\rho$  von  $S^m(\dot{C}_f(0))$  wegen  $\rho = 1/\kappa_p^N(\dot{C}_f(0))$  bestimmt.

Fall 2:  $g$  ist Schmiegtangente:

Nach Satz 4.5.2 ist entweder  $c_f(0)$  ein Wendepunkt von  $c_f(I)$ , was  $\kappa_1(0)=0$  zur Folge hat, oder die Schmiegeebene  $\varepsilon$  von  $c_f(I)$  in  $c_f(0)$  liegt tangential.

Um auch im 2. Fall den Krümmungskreis angeben zu können, wird allerdings ein "Flächenelement" 3. Ordnung nötig und man stößt nach BONNET auf die **kubische Indikatrix**.

(7) Im Falle eines normierten Weges erhält der Betrag der kovarianten Ableitung einen eigenen Namen:

**Def. 4.5.3:** Sei  $c_f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein normierter Weg.

Dann heißt  $\|D\dot{c}_f/dt(0)\| =: \kappa^G(0)$  *geodätische Krümmung von  $c_f(I)$  in  $c_f(0)$ .*

**Satz 4.5.6:** (1)  $\kappa^G$  ist ein Begriff der inneren Geometrie.

(2)  $\kappa^G=0$  in  $I \iff c_f(I)$  ist Geodätische.

(3)  $\kappa_1^2 = (\kappa_p^N)^2 + (\kappa^G)^2$ .

**Beweis:** (Ad 1) Nach 3.4 ist die kovariante Ableitung ein Begriff der inneren Geometrie. Insbesondere bleibt die geodätische Krümmung daher bei einer lokalen Isometrie unverändert.

(Ad 2)  $\kappa^G=0 \iff D\dot{c}_f/dt=0$  in  $I$ . Genau dann ist nach Def.3.5.1  $c_f$  ein geodätischer Weg.

(Ad 3) OBdA. gelte  $\|\dot{c}_f\|=1$  in  $I$ . Zusammen mit Gleichung (4.5.1) folgt

$$\|\ddot{c}_f(0)\|^2 = \|D\dot{c}_f/dt(0)\|^2 + \left( (\kappa_p^N(\dot{c}_f(0)))^2 \right).$$

Aus der Normiertheit von  $c_f$  folgt

$$\left( \kappa_1(0) \right)^2 = \left( \kappa^G(0) \right)^2 + \left( \kappa_p^N(\dot{c}_f(0)) \right)^2 . \quad \square$$

#### 4.6 Grundgleichungen der Hyperflächentheorie

Sei  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  eine  $C^r(U)$ -Immersion mit  $r \geq 2$ . Nach 4.1 ist  $\{F_1(a), \dots, F_m(a), N_f(a)\}$  für alle  $a \in U$  stets eine Rechtsbasis von  $\mathbb{R}^{m+1}$ . Sie ist allerdings i.a. nicht normiert.

**Def. 4.6.1:** Die Abbildung

$$U \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m+1}$$

mit

$$a \in U \mapsto \{F_1(a), \dots, F_m(a), N_f(a)\}$$

heißt *Begleitbasis längs f*.

Bekanntlich gilt  $\forall j, k$ :

$$F_j(a) \cdot F_k(a) = f_{,j}(a) \cdot f_{,k}(a) = g_{jk}(a)$$

$$F_j(a) \cdot N_f(a) = f_{,j}(a) \cdot n_f(a) = 0$$

$$N_f(a) \cdot N_f(a) = 1.$$

##### (1) Ableitungsgleichungen:

Es werden nun die Ableitungen  $f_{,jk}$  bzw.  $n_{f,j}$  in der gegebenen Begleitbasis ausgedrückt.

Ansatz:

$$f_{,jk} = \alpha_{jk}^1 f_{,1} + a_{jk} n_f \quad (*)$$

Da  $f \in C^2$  vorausgesetzt wurde, ist

$$\alpha_{jk}^1, f_{,1} \in C^0(U).$$

Wir multiplizieren (\*) mit  $f_{,s}$ :

$$f_{,jk} \cdot f_{,s} = \alpha_{jk}^1 f_{,1} \cdot f_{,s} + 0.$$

Mit Def.3.4.10 gilt

$$\Gamma_{jks} = \alpha_{jk}^1 g_{1s}.$$

Multiplikation mit der zu  $(g_{1s})$  inversen Matrix  $(g^{st})$  ergibt

$$\Gamma_{jks} \cdot g^{st} = \alpha_{jk}^1 \delta_1^t.$$

Mit Gleichung (3.4.3) bleibt

$$\Gamma_{jk}^t = \alpha_{jk}^1.$$

Multipliziert man (\*) mit  $n_f$ , so ergibt sich

$$f_{,jk} \cdot n_f = 0 + a_{jk}.$$

Gleichung (4.3.1) liefert

$$h_{jk} = a_{jk}.$$

Als ein Ergebnis erhält man die *Ableitungsgleichungen von GAUSS*:

$$f_{,jk} = \Gamma_{jk}^1 f_{,1} + h_{jk} n_f \quad (4.6.1)$$

Diese Gleichungen wurden 1827 von GAUSS für  $m=2$  angegeben.

Ansatz: Wegen  $-N_{f,j}(a) = \omega_p(F_j(a)) = h_j^1(a) \cdot F_1(a)$  ergeben sich sofort die

*Ableitungsgleichungen von WEINGARTEN (1861):*

$$n_{f,j} = -h_j^1 f_{,1} \quad (4.6.2)$$

**Bem. 4.6.1:** (a) Man beachte die Unterschiede zur Kurventheorie:

1. Die Begleitbasis  $f_{,1}$ ,  $n_f$  ist von  $f$  abhängig, also parameterabhängig (in der Kurventheorie nicht).

2. Die Begleitbasis ist i.a. keine ONB.

3. Die Koeffizienten in den Ableitungsgleichungen haben keine geometrische Bedeutung: Nach 4.3, Folgerung 3 sind z.B. die  $h_{jk}$  nicht parameterinvariant.

(b) In der Kurventheorie spielen die normierten Wege eine ausgezeichnete Rolle. Hingegen gibt es in der Flächentheorie bezüglich der Bewegungsgruppe keine ausgezeichneten Flächenwege  $f$ .

(c) Aus  $f \in C^2(U)$  folgt:  $f_{,jk} = f_{,kj}$ .

Für  $f \in C^3(U)$  folgen die **Integrabilitätsbedingungen**

$$f_{,jks} = f_{,jsk} \quad \text{und} \quad n_{f,jk} = n_{f,kj}.$$

(Diese kommen in der Kurventheorie nicht vor.)

## (2) Integrabilitätsbedingungen:

In diesem Abschnitt werden unter Benützung der Ableitungsgleichungen die Integrabilitätsbedingungen genauer studiert.

Zuerst die Integrabilitätsbedingungen von (4.6.1):

(4.6.1) lautet

$$f_{,jk} = \Gamma_{jk}^1 f_{,1} + h_{jk} n_f.$$

Partielle Differentiation nach  $u^s$  ergibt

$$f_{,jks} = \Gamma_{jk}^1 f_{,1s} + \Gamma_{jk}^1 f_{,1s} + h_{jk,s} n_f + h_{jk} n_{f,s}.$$

Die Ausdrücke  $f_{,1s}$  und  $n_{f,s}$  werden vermöge (4.6.1) und (4.6.2) ersetzt, sodaß man erhält:

$$f_{,jks} = \Gamma_{jk}^1 f_{,1s} + \Gamma_{jk}^1 (\Gamma_{1s}^t f_{,t} + h_{1s} n_f) + h_{jk,s} n_f + h_{jk} (-h_s^t f_{,t}).$$

Wir zerlegen in einen Normal- und Tangentialanteil:

$$f_{,jks} = f_{,t} (\Gamma_{jk}^t + \Gamma_{jk}^1 \Gamma_{1s}^t - h_{jk} h_s^t) + n_f (\Gamma_{jk}^1 h_{1s} + h_{jk,s}).$$

$f_{,jks}$  wird aus dieser Gleichung durch Vertauschung von  $k$  mit  $s$  erhalten. Denkt man sich auch  $f_{,jks}$  in einen Normal- und Tangentialanteil zerlegt, so ist die Integrabilitätsbedingung  $f_{,jks} - f_{,jks} = 0$  damit äquivalent, daß jeweils die Normal- und Tangentialanteile der Vektoren  $f_{,jks}$  und  $f_{,jks}$  übereinstimmen, also deren Differenz verschwindet.

Das Verschwinden der Differenz der Tangentialanteile bedeutet:

$$\Gamma_{jk}^t + \Gamma_{js}^t - \Gamma_{js}^t + \Gamma_{jk}^1 \Gamma_{1s}^t - \Gamma_{js}^1 \Gamma_{1k}^t = h_{jk} h_s^t - h_{js} h_k^t.$$

Nach 3.7 gilt

$$R_{jks}^t = h_{jk} h_s^t - h_{js} h_k^t.$$

Multipliziert man schließlich diese Gleichung mit  $g_{1t}$ , setzt man

$$R_{jks}^t g_{1t} =: R_{1jks},$$

und berücksichtigt 4.3, Folgerung 1, so bleibt

**Das System von Integrabilitätsbedingungen von GAUSS (1827):**

$$R_{1jks} = h_{jk} h_{s1} + h_{js} h_{k1} \quad (4.6.3)$$

Das Verschwinden der Differenz der Normalanteile bedeutet

$$\Gamma_{jk}^l h_{ls} - \Gamma_{js}^l h_{lk} + h_{jk's} - h_{js'k} = 0 ,$$

und man erhält die *Integrabilitätsbedingungen von D.CODAZZI (1868)*:

$$h_{jk's} - h_{js'k} = \Gamma_{js}^l h_{lk} - \Gamma_{jk}^l h_{ls} \quad (4.6.4)$$

**Bem.:** (4.6.4) findet sich schon 1856 bei G.MAINARDI.

In der russischen Literatur werden die Gleichungen (4.6.4) auch PETERSON zugeschrieben.

Nun zu den Integrabilitätsbedingungen von (4.6.2):

Setzt man hier in analoger Weise wegen  $n_{f,jk} - n_{f'kj} = 0$  die Tangential- bzw. Normalanteile gleich (bzw. deren Differenz gleich Null), so ergibt sich im ersten Fall wieder (4.6.4) und im zweiten Fall eine Identität.

**Satz 4.6:** *Bei einer regulären  $C^3$ -Hyperfläche sind die Integrabilitätsbedingungen von GAUSS und CODAZZI der Ableitungsgleichungen von GAUSS und WEINGARTEN erfüllt.*

**Bem. 4.6.2:** Die  $m \times m$ -Matrix  $(h_{jk})$  hat keine innergeometrische Bedeutung, da zur Definition von  $\omega_p$  die Flächennormale benutzt wurde.

Aufgrund ihrer Definition (siehe 3.7 und 4.6) sind die  $R_{ljk's}$  Begriffe der inneren Geometrie. Nach (4.6.3) haben daher alle zweireihigen Unterdeterminanten innergeometrische Bedeutung. Sie bleiben daher insbesondere bei einer (lokalen) Isometrie ungeändert.

#### 4.7. Hauptsatz der Hyperflächentheorie

**Satz 4.7.1: Hauptsatz der Hyperflächentheorie:**

Seien  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  und  $\bar{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  zwei reguläre  $C^3$ -Hyperflächenwege und  $U$  ein zusammenhängendes Gebiet. Es sei  $g_{jk} = \bar{g}_{jk}$  in  $U$  und  $h_{jk} = \bar{h}_{jk}$  in  $U$ .

Dann existiert genau eine Bewegung  $\beta: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  mit  $\bar{f} = \beta \circ f$ .

**Beweis: Schritt 1: Konstruktion von  $\beta$ :**

Dazu gehen wir von einer Anfangsstelle  $0 \in U$  aus.

$\beta = (s, l)$  soll leisten:  $f(0) \mapsto \bar{f}(0) = \beta(f(0))$ ,

$$l(f_{,j}(0)) = \bar{f}_{,j}(0) \quad \text{für } j=1, \dots, m.$$

Vorerst muß aber gezeigt werden, daß eine Bewegung existiert, die diese Forderungen erfüllt. Dazu

**ZWISCHENBEMERKUNG 20:**

Es sei  $(\mathbb{R}^n; \cdot)$  ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt " $\cdot$ ".

Ferner seien

$$\{a_1, \dots, a_n\} \quad \text{und} \quad \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$$

zwei Rechtsbasen, für die

$$a_j \cdot a_k = \bar{a}_j \cdot \bar{a}_k$$

gelten solle.

**Beh.:** Es existiert genau ein gleichsinnig orthogonaler Automorphismus  $l$  mit  $l(a_j) = \bar{a}_j$

**Bew.:** Nach einem Ergebnis aus der Linearen Algebra existiert genau ein Vektorraumautomorphismus  $l$ , der die geordnete Basis  $\{a_1, \dots, a_n\}$  in die geordnete Basis  $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$  überführt. Da beide Basen Rechtsbasen sind, ist  $l$  gleichsinnig.

Zum Nachweis der Orthogonalität von  $l$  berechnet man für zwei beliebige Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^n$  mit  $v = v^j \cdot a_j$  und  $w = w^k \cdot a_k$  das innere Produkt

$$l(v) \cdot l(w) = v^j \cdot l(a_j) \cdot w^k \cdot l(a_k) = v^j \cdot w^k \cdot \bar{a}_j \cdot \bar{a}_k = v^j \cdot w^k \cdot a_j \cdot a_k = v \cdot w \quad \square$$

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Bekanntlich sind

$$\{f_{,1}(0), \dots, f_{,m}(0), n_f(0)\} \quad \text{und} \quad \{\bar{f}_{,1}(0), \dots, \bar{f}_{,m}(0), n_{\bar{f}}(0)\}$$

zwei Rechtsbasen, die wegen

$$f_{,j} \cdot f_{,k} = g_{jk}, \quad f_{,j} \cdot n_f = 0, \quad n_f \cdot n_f = 1$$

bzw.

$$\bar{f}_{,j} \cdot \bar{f}_{,k} = \bar{g}_{jk}, \quad \bar{f}_{,j} \cdot n_{\bar{f}} = 0, \quad n_{\bar{f}} \cdot n_{\bar{f}} = 1$$

aufgrund von  $g_{jk} = \bar{g}_{jk}$  die Voraussetzungen aus ZB20 erfüllen.

Nach ZB20 existiert daher genau ein gleichsinnig orthogonaler Vektorraumautomorphismus  $l$  mit

$$\bar{f}_{,j}(0) = l(f_{,j}(0)) \quad \text{und} \quad n_{\bar{f}}(0) = l(n_f(0)).$$

Da  $\beta$  ferner  $f(0) \mapsto \bar{f}(0)$  leisten soll, ist wegen

$$\bar{f}(0) = \beta(f(0)) = l(f(0)) + s$$

der Schiebanteil  $s$  durch

$$s = \bar{f}(0) - l(f(0))$$

eindeutig festgelegt.

Also ist  $\beta$  mit  $\beta(p)=s+l(p)$  eindeutig festgelegt.

Schritt 2:  $\beta$  "paßt" überall:

Beh.:  $\{\bar{f}_j (j=1, \dots, m), n_{\bar{f}}\}$  und  $\{(lof)_j (j=1, \dots, m), lon_f\}$  passen in dieselbe Differentialgleichung zur selben Anfangsbedingung.

Zum Nachweis betrachtet man einerseits die Ableitungsgleichungen für  $\bar{f}$ :

$$\bar{f}_{,j} = \bar{\Gamma}_{jk}^1 \bar{f}_{,1} + \bar{h}_{jk} \cdot n_{\bar{f}} = \Gamma_{jk}^1 \bar{f}_{,1} + h_{jk} \cdot n_{\bar{f}},$$

und andererseits jene für  $\beta$ of:

$$\partial \left( (lof)_{,j} \right) / \partial u^k = l \left( \partial f_{,j} / \partial u^k \right) = l(f_{,jk}),$$

d.h. mit (4.6.1)

$$l(f_{,jk}) = l(\Gamma_{jk}^1 f_{,1} + h_{jk} \cdot n_f) = \Gamma_{jk}^1 l(f_{,1}) + h_{jk} \cdot l(n_f),$$

also

$$l(f_{,jk}) = \Gamma_{jk}^1 (lof)_{,1} + h_{jk} \cdot (lon_f).$$

Ebenso können die Ableitungsgleichungen für  $n_{\bar{f}}$  und  $lon_f$  aufgestellt werden.

Man erkennt also:

$\{\bar{f}_j (j=1, \dots, m), n_{\bar{f}}\}$  und  $\{(lof)_j (j=1, \dots, m), lon_f\}$  passen zu denselben Anfangsbedingungen in dieselbe lineare, homogene, totale Differentialgleichung mit den  $C^1(U)$ -Koeffizienten  $h_{jk}$  und  $\Gamma_{jk}^1$ .

Die Integrabilitätsbedingungen

$$f_{,jks} - f_{,jsk} = 0, \quad n_{f,jk} - n_{f,kj} = 0$$

sind erfüllt, da  $f$  und  $\bar{f}$  reguläre  $C^3$  Hyperflächenwege sind.

Nach ZB17 existiert lokal in  $U_0 \subset U$  mit  $0 \in U_0$  eine eindeutige Lösung,

d.h. in  $U_0$  gilt:

$$\bar{f}_{,j} = (lof)_{,j}, \quad j=1, \dots, m \quad \text{und} \quad n_{\bar{f}} = lon_f (*).$$

Schritt 3:

Um  $U_0=U$  nachweisen zu können, formulieren wir

#### ZWISCHENBEMERKUNG 21:

Sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$ .

Eine Teilmenge  $T \subset U$  heißt **offen in  $U$** , wenn  $T$  Durchschnitt von  $U$  mit einer in  $\mathbb{R}^m$  offenen Menge ist.

Bem.: Durch diese Definition wird  $U$  zu einem Teilraum des  $\mathbb{R}^m$ .

$U$  heißt **zusammenhängend** genau dann, wenn  $U$  nicht Vereinigung zweier disjunkter offener Mengen ist.

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Sei  $U_1 \subset U$  jene Teilmenge von  $U$ , die (\*) erfüllt. Dann gilt  $U_0 \subset U_1$ , sodaß  $U_1$  nicht leer ist. Durch

$$U := U_1 \cup (U \setminus U_1)$$

wird  $U$  in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt, d.h. es gilt

$$U_1 \cap (U \setminus U_1) = \emptyset .$$

Es wird gezeigt, daß  $U_1$  und  $U \setminus U_1$  offen sind in  $U$ :

-- $U_1$  offen in  $U$ :

Sei  $b \in U_1$ . Nach Definition von  $U_1$  gilt dann

$$\bar{f}_{,j}(b) = (\text{lof})_{,j}(b) \quad \forall j \quad \text{und} \quad n_{\bar{f}}(b) = \text{lon}_{\bar{f}}(b) .$$

Analog zu Schritt 2 (dort  $b=0$ ) gilt (\*) lokal in einer Umgebung von  $b$  in  $U_1$ , d.h. mit  $b \in U_1$  gehört eine in  $U$  (und daher in  $\mathbb{R}^m$ ) offene Umgebung zu  $U_1$ , sodaß  $U_1$  offen ist.

-- $U \setminus U_1$  ist offen in  $U$ :

Sei  $b \in U \setminus U_1$ . Da (\*) in  $U \setminus U_1$  nicht richtig ist, gilt z.B.

$$\bar{f}_{,1}(b) - (\text{lof})_{,1}(b) \neq 0 .$$

Dann ist die Abbildung  $\bar{f}_{,1} - (\text{lof})_{,1}$  lokal in einer offenen Umgebung von  $b$  von Null verschieden, sodaß  $U \setminus U_1$  offen ist.

Da  $U$  zusammenhängend vorausgesetzt wird, ist nach ZB21 entweder  $U_1$  oder  $U \setminus U_1$  notwendig leer. Da  $U_1$  nach Definition nicht leer ist, folgt, daß  $U \setminus U_1$  die leere Menge ist, sodaß  $U_1 = U = U_0$  folgt.

Ergebnis: (\*) gilt in ganz  $U$ .

#### Schritt 4:

In  $U$  gilt also

$$\bar{f}_{,j} = (\text{lof})_{,j} \quad \text{und} \quad n_{\bar{f}} = \text{lon}_{\bar{f}} .$$

Wir betrachten das Kurvenintegral

$$\int_0^a \sum_{j=1}^m \bar{f}_{,j} du^j = \left( \int_0^a \sum_{j=1}^m \bar{f}_{,j}^1 du^j, \dots, \int_0^a \sum_{j=1}^m \bar{f}_{,j}^n du^j \right) :$$

Wir betrachten exemplarisch

$$I^\alpha = \int_0^a (\bar{f}_{,1}^\alpha du^1 + \dots + \bar{f}_{,m}^\alpha du^m) ,$$

und zwar zunächst in einer Umgebung  $U_0 \subset U$  von  $0$ .  $U_0$  ist einfach zusammenhängend und  $I^\alpha$  genau dann wegunabhängig, wenn  $(\bar{f}_{,j}^\alpha)_{,k} = (\bar{f}_{,k}^\alpha)_{,j}$ . Dies ist bei uns der Fall, da wegen  $\bar{f} \in C^2$   $\bar{f}_{,jk} = \bar{f}_{,kj}$  gilt.

Da also  $I^\alpha$  nur von Anfangspunkt  $0$  und Endpunkt  $a$  abhängt, gilt:

$$I^\alpha = \bar{f}^\alpha(a) - \bar{f}^\alpha(0) .$$

Insgesamt bleibt:

$$\int_0^a \sum_{j=1}^m \bar{f}_{,j} du^j = \bar{f}(a) - \bar{f}(0) .$$

Da  $f \in C^2$ , gilt auch  $((\text{lof})_{,j})_{,k} = ((\text{lof})_{,k})_{,j}$ , sodaß in analoger Weise

$$\int_0^a \sum_{j=1}^m (\text{lof})_{,j} du^j = (\text{lof})(a) - (\text{lof})(0)$$

gefolgert werden kann.

Damit ergibt sich folgende logische Kette:

$$\begin{aligned} \bar{f}(a) - \bar{f}(0) &= \int_0^a \sum_{j=1}^m \bar{f}_{,j} du^j = \int_0^a \sum_{j=1}^m (\text{lof})_{,j} du^j = \int_0^a \text{lo} \sum_{j=1}^m f_{,j} du^j = \text{lo} \int_0^a \sum_{j=1}^m f_{,j} du^j = \\ &= \text{lo} \{ f(a) - f(0) \} . \end{aligned}$$

Schreiben wir statt  $\text{lof}(a)$  kürzer  $l(f(a))$ , so findet man

$$\bar{f}(a) = l(f(a)) + \bar{f}(0) - (lof)(0) .$$

Nach Beweisschritt 1 ergibt sich wegen  $s = \bar{f}(0) - l(f(0))$  schließlich

$$\bar{f}(a) = l(f(a)) + s ,$$

also die Behauptung  $\bar{f} = \beta \circ f$  in  $U_0$ . Für  $\bar{f} = \beta \circ f$  in  $U$  bleibt also  $U_0 = U$  zu zeigen.

### Schritt 5:

Wie in Schritt 3 benützen wir eine Zerlegung von  $U$  in

$$U = U_1 \cup (U \setminus U_1);$$

in  $U_1$  gelte  $\bar{f} = lof + s$ , sodaß  $U_1$  wegen  $U_0 \subset U_1$  nicht leer ist.

--In  $U \setminus U_1$  gilt

$$\bar{f} - lof - s \neq 0 ,$$

sodaß  $U \setminus U_1$  offen ist.

Zeigen wir wie in Schritt 3, daß auch  $U_1$  offen ist, so ist, da  $U$  zusammenhängend vorausgesetzt ist,  $U \setminus U_1$  leer, also  $U = U_1 = U_0$ .

-- $U_1$  ist offen, da:

Sei  $b \in U_1$ , also

$$\bar{f}(b) = (lof)(b) + s.$$

Daraus folgt

$$\bar{f}_{,j}(b) = (lof)_{,j}(b) \quad \text{für } j=1, \dots, m.$$

Dies gilt in ganz  $U$ , sodaß eine in  $U$  offene Umgebung  $U_b$  von  $b$  existiert, wo  $\bar{f}_{,j} = (lof)_{,j}$  gilt.  $U_b$  ist einfach zusammenhängend, also das Kurvenintegral von  $b$  nach  $b_1$  ( $b_1 \in U_b$ ) wegunabhängig.

Also gilt für  $b_1 \in U_b$ :

$$\bar{f}(b_1) = (lof)(b_1) + \bar{f}(b) - (lof)(b).$$

Wegen  $b \in U_1$  ist

$$\bar{f}(b) = (lof)(b) + \bar{f}(0) - (lof)(0) ,$$

also wegen  $s = \bar{f}(0) - (lof)(0)$  dann

$$\bar{f}(b) - (lof)(b) = s ,$$

sodaß

$$\bar{f}(b_1) = (lof)(b_1) + s \quad \text{in } U_b$$

gilt. Das heißt, daß mit  $b \in U_1$  eine offene Umgebung  $U_b$  von  $b$  zu  $U_1$  gehört und  $U_1$  damit offen ist.  $\square$

### Folgerung 1:

Wir betrachten zwei reguläre  $C^3$ -Wege  $f$  und  $\bar{f}$ , für die im zusammenhängenden Gebiet  $U$  die Bedingungen  $\bar{g}_{jk} = g_{jk}$  und  $\bar{h}_{jk} = -h_{jk}$  gelten. Wir zeigen, daß  $f(U)$  und  $\bar{f}(U)$  gegenseitig kongruent sind.

Bew.: Spiegeln wir  $f(U)$  an einer Hyperebene, so gilt für das Spiegelbild  $f^*(U)$  einfach  $g^*_{jk} = g_{jk}$ , da bei der Spiegelung  $f_{,j} \rightarrow f^*_{,j}$ . Mit der Voraussetzung bleibt  $g^*_{jk} = \bar{g}_{jk}$ .

Da bei einer derartigen Spiegelung ein Rechtssystem in ein Linkssystem übergeht, gilt  $h^*_{jk} = f^*_{,j} \cdot n_f^* = f_{,j} \cdot (-n_f) = -h_{jk} = \bar{h}_{jk}$ .

Also stimmen für die  $C^3$ -Wege  $f^*$  und  $\bar{f}$  Erste und Zweite Grundform überein, sodaß nach dem Hauptsatz 4.7.1  $\bar{f}(U)$  und  $f^*(U)$  bewegungsgleich sind. Das ergibt die Behauptung.  $\square$

### Folgerung 2:

In 3.7 wurden lokale Isometrien studiert: so ist nach Satz 3.7.3 bei Beschreibung durch gleiche Koordinaten eine lokale Isometrie durch  $g_{jk} = \bar{g}_{jk}$  gekennzeichnet. Nach Def.3.4.9 stimmen dann für beide Flächen die Christoffelsymbole 2.Art überein und nach 3.6 und 4.6 sind auch die Ausdrücke  $R_{\dots}$  identisch.

Unter Benützung von (4.6.3) gilt

$$R_{jkst} = h_{ks} \cdot h_{jt} - h_{js} \cdot h_{kt} = \bar{R}_{jkst} = \bar{h}_{ks} \cdot \bar{h}_{jt} - \bar{h}_{js} \cdot \bar{h}_{kt} \quad (*)$$

Es stellt sich nun die Frage, ob solche Abbildungen existieren bzw. wie sie aussehen:

Ein einfaches Beispiel dafür erhält man, wenn man eine Kongruenz auf die Hyperfläche einschränkt, was wir auch als *triviale Isometrie* bezeichnen wollen.

Bem.: Bei Beschreibung durch gleiche Koordinaten gilt:

$\alpha: f(U) \rightarrow \bar{f}(U)$  ist genau dann eine triviale Isometrie, wenn  $g_{jk} = \bar{g}_{jk}$  und  $h_{jk} = \varepsilon \cdot \bar{h}_{jk}$  mit  $\varepsilon \in \{+1, -1\}$  gilt. Bei Einschränkung einer *Bewegung* auf  $f(U)$  ist  $+1$ , bei Einschränkung einer *gegenseitigen Kongruenz* auf  $f(U)$  ist  $-1$  zu wählen, wie mit Folgerung 1 begründet werden kann.

*Existieren auch nichttriviale Isometrien ?*

Jedenfalls sind  $(h_{jk})$  und  $(\bar{h}_{jk})$  zwei symmetrische  $m \times m$ -Matrizen, für die nach (\*) alle entsprechenden zweizeiligen Unterdeterminanten denselben Wert haben und, da es nichttriviale Isometrien sein sollen,  $h_{jk} \neq \varepsilon \cdot \bar{h}_{jk}$  gilt. Ob diese Forderungen erfüllt werden können, beantwortet

### **ZWISCHENBEMERKUNG 22:**

$(h_{jk})$  sei eine symmetrische  $m \times m$ -Matrix mit  $3 \leq \text{rg}(h_{jk}) \leq m$ , von der alle zweizeiligen Unterdeterminanten bekannt sind. Dann gilt:

Alle Werte  $h_{jk}$  sind bis auf ein (gemeinsames) Vorzeichen eindeutig bestimmt. (L.P.EISENHART: Riemannian Geometry, Princeton 1966, S.200)

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Sei nun  $m \geq 3$ , also  $n \geq 4$ .

Nach 4.3, Folgerung 6 ist  $\det(h_{jk}) \neq 0$  mit  $K \neq 0$  äquivalent, und genau dann ist  $f(U)$  frei von parabolischen Punkten und Flachpunkten. Es folgt

**Satz 4.7.2:** (KILLING, 1885)

*Jede reguläre  $C^2$ -Hyperfläche im  $R^n$  ( $n \geq 4$ ), die frei von parabolischen Punkten und Flachpunkten ist, gestattet nur triviale Isometrien.*

Bem.:  $m=2$ ,  $n=3$ : Hier gibt es sicher zwei (wesentlich) verschiedene  $2 \times 2$ -Matrizen mit gleicher Determinante.

**Folgerung 3: 2-Flächen im  $R^3$ :**

Es gilt nach (4.6.3)

$$R_{1221} = h_{22} \cdot h_{11} - h_{12}^2 = \det(h_{jk}) .$$

Damit folgt für die GAUSSsche Krümmung  $K = R_{1221}/\Delta$  und es gilt

**Satz 4.7.3: THEOREMA EGREGIUM:**

*Die GAUSSsche Krümmung  $K$  einer 2-Fläche im  $R^3$  ist eine innergeometrische Größe.*

**Bem. 4.7.1: (a)** GAUSS selbst wurde durch die Geodäsie angeregt:

Betrachten wir etwa eine 2-Sphäre  $S^2 \subset R^3$  mit Radius  $r$ . Nach Satz 4.2.3 ist jeder Punkt von  $S^2$  ein Nabelpunkt und nach Bem.4.2.2 jede Flächentangente eine Krümmungstangente. Wegen

$$\kappa_p^N(X_p) = 1/r$$

ist  $K = 1/r^2 > 0$ .

Da die Ebene nur Flachpunkte enthält, gilt für sie  $K=0$ , und es folgt:

*Es kann keine lokale isometrische Abbildung der Sphäre auf die Ebene existieren, d.h. eine Sphäre ist nicht abwickelbar. Daher existieren keine verzerrungsfreien Landkarten.*

**(b)** Es gilt ferner (ohne Beweis):

$K$  bzw.  $|K|$  ist innergeometrisch für  $m$ -Flächen im  $R^{m+1}$  mit  $m \geq 0$  (2) bzw.  $m \geq 1$  (2).

**Folgerung 4:**

**Def. 4.7.1:** Eine reguläre  $C^2$ -Fläche im  $R^3$  mit  $K=0$  heißt eine *Torse*.

**Satz 4.7.4:** Eine reguläre  $C^3$ -Fläche im  $R^3$  ist genau dann abwickelbar, wenn sie eine  $C^3$ -Torse ist.

**Beweis:** (a) Nach Bem.3.7.6 ist eine 2-Fläche genau dann abwickelbar, wenn kartesische Koordinaten existieren, d.h. es ist  $g_{jk} = \delta_{jk}$ . Daraus folgt:

$$\Gamma_{..} = 0, \text{ daher } R_{....} = 0, \text{ folglich } R_{1221} = 0.$$

Nach Folgerung 3 ist  $K=0$  und  $f(U)$  definitionsgemäß eine Torse.

**(b)** Gegeben sei eine  $C^3$ -Torse.

Wegen  $K=0$  ist  $R_{1221}=0$ .

Da im Falle einer 2-Fläche alle anderen  $R_{....}$  entweder gleich  $R_{1221}$ , entgegengesetzt gleich  $R_{1221}$  oder identisch Null sind, folgt:  $R_{....}=0$ . Nach 4.6 gilt dann auch  $R_{jpk} = 0$  (für alle Indexkombinationen).

Nach Bem.3.7.6 ist  $f(U)$  abwickelbar.  $\square$

**Beispiele:**

(1) Nach 3.6 sind die Zylinder mit regulärem  $C^2$ -Normalschnitt und die Halbkugel mit regulärer  $C^2$ -Richtkurve TORSEN.

(2) Nach 3.7 ist die Halbtangentenfläche einer regulären wendepunktfreien  $C^2$ -Kurve im  $\mathbb{R}^3$  eine TORSE.

**Bem.:** Da Zylinder, Halbkegel und Halbtangentenfläche Erzeugenden tragen, nennt man sie auch *torsale Regelflächen*.

In 5.2 wird gezeigt: Diese drei Beispiele sind im wesentlichen alle Torsen.



**V**

# **2-FLÄCHEN IM $\mathbb{R}^3$**



## 5.1 Spezielle Parametrisierungen

Sei  $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein regulärer  $C^2(U)$ -Weg.

Bekanntlich ist ein Tangentialvektorfeld längs  $f$  eine Abbildung

$$V_f : U \rightarrow T_f \text{ mit } \Pi \circ V_f = f',$$

wobei ein Vektor  $V_f(a)$  angesetzt werden kann durch

$$V_f(a) = v^j F_j(a) \text{ mit } v^j: U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nach Def.3.4.6 gilt:

$$V_f \in C^s(U), s \leq r-1 \iff v^j \in C^s(U).$$

Ferner sei  $c_f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein regulärer  $C^1(I)$ -Weg.

Unter Benützung von  $\dot{C}_f(t_0) = (c_f'(t_0); \dot{c}_f(t_0))$  formulieren wir

**Def. 5.1.1:** Sei  $V_f$  ein  $C^2(U)$ -Tangentialvektorfeld längs  $f$  und  $c_f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^1(I)$ -Flächenweg.

$c_f$  heißt ein **Integralweg** von  $V_f$  genau dann, wenn für alle  $t_0 \in I$  die Gleichheit  $\dot{C}_f(t_0) = V_f(c_f(t_0))$  besteht, also auf der Fläche die Differentialgleichung 1. Ordnung  $\dot{C}_f = V_f \circ c_f$  gilt.

Gegeben sind also der Weg  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  sowie das Tangentialvektorfeld  $V_f: U \rightarrow T_f$ , gesucht ist ein Weg  $c: I \rightarrow U$  derart, daß der Flächenweg  $f \circ c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Integralweg ist.

**Def. 5.1.2:**  $V_f$  heißt **regulär**, wenn in  $U$  die Identität  $V_f \neq 0$  gilt.

**Def. 5.1.3:** Eine reguläre Flächenkurve  $c_f(I)$  heißt **Integralkurve** eines regulären Tangentialvektorfeldes  $V_f$ , wenn l.a.  $\{\dot{C}_f(t_0), V_f \circ c_f(t_0)\}$  für alle  $t_0 \in I$ .

**Satz 5.1.1:** Sei  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein regulärer  $C^r(U)$ -Weg,  $r \geq 2$ .  $(1)V_f$  und  $(2)V_f$  seien zwei reguläre  $C^s$ -Tangentialvektorfelder längs  $f$  mit  $1 \leq s \leq r-1$  und l.u.  $\{(1)V_f(a_0), (2)V_f(a_0)\}$  für eine Stelle  $a_0 \in U$ .

Dann existiert **lokal** um  $a_0$  ein  $C^s(U_0')$ -Diffeomorphismus  $\varphi: U_0' \rightarrow U_0$  mit  $a_0 \in U_0$  so, daß für  $f' = f \circ \varphi: U_0' \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Parameterkurven Integralkurven sind.

**Beweis:** Zu zeigen: Faßt man die  $C^r$ -Fläche als  $C^s$ -Fläche auf, so existiert ein derartiger Parameterwechsel.

Es gilt:  $(1)V_f = (1)v^j F_j = (1)v^j \cdot F'_j$  mit  $l=1,2$ .

Nach 3.3, Diskussionspunkt 2 besteht die Beziehung  $(1)v^j = (1)v^j \cdot u^j_{,j}$  (\*). Zum Beispiel gilt

$$({}_1)v^j \cdot F'_j = ({}_1)v^1 \cdot F'_1 + ({}_1)v^2 \cdot F'_2 = ({}_1)V_f.$$

Aus der geometrischen Forderung  $({}_1)v^2=0$  bzw.  $({}_2)v^1=0$  folgt aus (\*)

$$({}_1)v^1 \cdot u^2_{,1} + ({}_1)v^2 \cdot u^2_{,2} = 0 \quad (**)$$

bzw.

$$({}_2)v^1 \cdot u^1_{,1} + ({}_2)v^2 \cdot u^1_{,2} = 0.$$

Es stellt sich nun die Frage, ob bei Bekanntsein der Funktionen  $({}_j)v^j$  ( $j, l=1, 2$ ) ein Parameterwechsel  $\psi$ , also Funktionen  $u^j(u^j)$  existieren, die die beiden Gleichungen (\*\*) erfüllen. Dazu

### ZWISCHENBEMERKUNG 23:

Gegeben seien die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1(u^1, u^2) \cdot u^2_{,1} + \beta_1(u^1, u^2) \cdot u^2_{,2} &= 0 \\ \alpha_2(u^1, u^2) \cdot u^1_{,1} + \beta_2(u^1, u^2) \cdot u^1_{,2} &= 0, \end{aligned}$$

wo  $\alpha_j, \beta_j \in C^s(U)$  bei  $s \geq 1$  sind.

Dann gilt nach E.KAMKE (1937, Math. Zeitschriften):

Falls eine Stelle  $a_0 \in U$  mit

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1(a_0) & \beta_1(a_0) \\ \alpha_2(a_0) & \beta_2(a_0) \end{bmatrix} \neq 0$$

existiert, dann existieren lokal um  $a_0 \in U$   $C^s$ -Lösungen  $u^1(u^j)$ ,  $u^2(u^j)$  und  $\det J_\psi \neq 0$ .

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Nach Voraussetzung ist l.u.  $\{({}_1)V_f(a_0), ({}_2)V_f(a_0)\}$  und daher

$$\det \begin{bmatrix} ({}_1)v^1(a_0) & ({}_1)v^2(a_0) \\ ({}_2)v^1(a_0) & ({}_2)v^2(a_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Wegen  $({}_1)V_f \in C^s$  existiert nach ZB 23 lokal um  $a_0 \in U$  ein  $C^s(U_0)$ -DM  $\psi: U_0 \rightarrow \psi(U_0) =: U_0'$ . Dann existiert  $\varphi := \psi^{-1}: U_0' \rightarrow U_0$  und ist ein Parameterwechsel. Nach Konstruktion hat  $f \circ \varphi = f'$  Integralkurven in  $f'(U_0')$  als Parameterkurven.  $\square$

**Bem.:** Im Fall  $m > 2$  müssen die Vektorfelder  $({}_j)V_f$  gewisse Verträglichkeitsbedingungen erfüllen (JACOBI).

### Anwendungen:

**(I)** Wir benötigen

**Def. 5.1.4:**  $f(U)$  sei eine reguläre  $C^2$ -Hyperfläche. Eine **Krümmungslinie** ist eine reguläre Flächenkurve  $c_f(I)$  mit: die Tangente an  $c_f(I)$  ist stets Krümmungstangente, d.h. in  $I$  ist l.a.  $\{\dot{C}_f(t_0), \omega_p(C_f(t_0))\}$ .

**Satz 5.1.2:**  $f(U)$  sei eine reguläre  $C^r$ -2-Fläche im  $R^3$ ,  $r \geq 3$ .  $f(a_0)$  sei kein Nabelpunkt und kein Flachpunkt. Dann existiert eine Umgebung  $U_0 \subset U$  von  $a_0$  und ein  $C^{r-2}(U_0')$ -Diffeomorphismus  $\varphi: U_0' \rightarrow U_0$  so, daß für  $f' = f \circ \varphi$  die Parameterkurven Krümmungslinien sind.

**Bem.:** Faßt man  $f(U)$  als  $C^{r-2}$ -Fläche auf, so folgt:

Es existiert lokal ein Parameterwechsel  $\varphi$  mit obigen Eigenschaften.

Wir sprechen auch von einer lokalen **Krümmungsparametrisierung**.

**Beweis:** Es seien  $(1)V_f$  und  $(2)V_f$  zwei reguläre **Krümmungsvektorfelder**. Mit 4.3 ist in  $a_0$  verboten:  $h_{jk} = \mu \cdot g_{jk}$  mit  $\mu=0$  (Flachpunkt) bzw.  $\mu \neq 0$  (Nabelpunkt).

Damit ist

$$\text{rg} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} (a_0) = 2 .$$

Also ist lokal um  $a_0$  der Rang dieser Matrix gleich 2, d.h. es existiert eine Umgebung von  $a_0$ , die frei von Nabel- und Flachpunkten ist, wo stets zwei orthogonale Krümmungstangenten existieren.

Nach 4.3, Folgerung 8 ist ein Vektor  $X_p = v^j F_j(a_0)$  genau dann Krümmungsvektor, wenn für seine Koordinaten  $v^1, v^2$

$$\det \begin{bmatrix} (v^2)^2 & -v^1 \cdot v^2 & (v^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} (a) = 0 ,$$

gilt, für diese also eine quadratische Form verschwindet, welche über  $\mathbb{R}$  in zwei Linearfaktoren zerfällt:

$$\{ \alpha_1(u^1, u^2) \cdot v^1 + \beta_1(u^1, u^2) \cdot v^2 \} \cdot \{ \alpha_2(u^1, u^2) \cdot v^1 + \beta_2(u^1, u^2) \cdot v^2 \} = 0 .$$

$\alpha_j$  und  $\beta_j$  sind Kombinationen der  $g_{jk}$  und  $h_{jk}$  und folglich  $\alpha_j, \beta_j \in C^{r-2}(U)$ ,  $s=r-2$  (siehe ZB 23).

Dabei ist

$$(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0) \text{ und } (\alpha_2, \beta_2) \neq (0, 0) ,$$

da zwei verschiedene Krümmungstangenten existieren; also gilt auch

$$\alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1 \neq 0 .$$

Die Krümmungsvektorfelder werden nun beschrieben durch

$$(1)V_f : \alpha_1(u^1, u^2) \cdot v^1 + \beta_1(u^1, u^2) \cdot v^2 = 0$$

bzw.

$$(2)V_f : \alpha_2(u^1, u^2) \cdot v^1 + \beta_2(u^1, u^2) \cdot v^2 = 0 .$$

Nach Satz 5.1.1 existiert lokal um  $a_0$  ein  $C^{r-2}(U_0')$ -DM.  $\varphi: U_0' \rightarrow U_0$ .  $\square$

### Folgerung 1:

**Def. 5.1.5:** Zwei Scharen von Kurven auf einer Fläche heißen ein **Kurvennetz**, wenn gilt:

- (1) Durch jeden Punkt der Fläche geht genau eine Kurve jeder Schar.
- (2) In jedem Punkt sind die Tangenten an die beiden Scharkurven verschieden.

Mit Def.5.1.5 gilt:

*In der Umgebung eines Punktes, der kein Nabel- oder Flachpunkt ist, bilden die Krümmungslinien ein Kurvennetz.*

**Bem.:** Ist  $a_0' = \varphi^{-1}(a_0)$  regulär, so ist  $f'$  lokal injektiv, und es gilt:

Das Kurvennetz ist "topologisches Bild" eines Quadratrasters in  $U_0'$ .

**Folgerung 2: "Erkennungsdienst" für Krümmungsparameter:**

Liegt eine Krümmungsparametrisierung vor, so erfüllen notwendig auch die Basisvektoren (0,1) und (1,0) die Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} (v^2)^2 & -v^1 \cdot v^2 & (v^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} = 0 ,$$

sodaß in ganz U gilt:

$$g_{22} \cdot h_{12} - h_{22} \cdot g_{12} = 0$$

$$g_{11} \cdot h_{12} - h_{11} \cdot g_{12} = 0$$

Diese beiden Gleichungen können interpretiert werden als lineares homogenes Gleichungssystem für  $g_{12}$  und  $h_{12}$ . Die Determinante

$$-g_{22} \cdot h_{11} + g_{11} \cdot h_{22}$$

des Gleichungssystems muß von Null verschieden sein, da ansonsten mit den obigen beiden Gleichungen der Rang der Matrix

$$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{matrix}$$

nur 1 wäre im Widerspruch zur Voraussetzung.

Dann existiert in U nur die triviale Lösung

$$g_{12} = h_{12} = 0 \quad \text{in } U.$$

**Folgerung 3: Die Differentialgleichung der Krümmungslinien:**

Ein Weg  $c$  liefert dann eine Krümmungslinie, wenn für  $v^1: v^2 = \dot{c}^1: \dot{c}^2$  die Bedingung

$$\det \begin{bmatrix} (\dot{c}^2)^2 & -\dot{c}^1 \cdot \dot{c}^2 & (\dot{c}^1)^2 \\ g_{jk} \circ c & & \\ h_{jk} \circ c & & \end{bmatrix} = 0$$

erfüllt ist, die über  $R$  in zwei Linearfaktoren zerfällt; einer der beiden lautet:

$$(\alpha_1 \circ c) \cdot \dot{c}^1 + (\beta_1 \circ c) \cdot \dot{c}^2 = 0 ,$$

wo  $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0)$  für die Funktionen  $\alpha_1, \beta_1: U \rightarrow R$  gilt. Analog für  $\alpha_2$  und  $\beta_2$ .

Ist z.B.  $\beta_1(a_0) \neq 0$ , so ist  $\beta_1$  sogar lokal um  $a_0$  von Null verschieden, und es folgt

$$\dot{c}^2 / \dot{c}^1 = -(\alpha_1 \circ c) / (\beta_1 \circ c) =: \gamma \circ c \quad \text{mit } \gamma: U \rightarrow R.$$

Setzt man für  $c$  speziell die EULERparametrisierung

$$c(t) = (t, z(t))$$

voraus, so ist  $\dot{c}^1=1$ ,  $\dot{c}^2=z$ , und obige Differentialgleichung schreibt sich dann als

$$\dot{z}(t) = \gamma(t, z(t)).$$

Jede Lösung dieser Differentialgleichung 1. Ordnung für die Funktion  $z(t)$  liefert lokal eine Krümmungslinie.

Wegen  $\gamma \in C^{r-2}$  ist  $z \in C^{r-1}$  und es gilt:

*Krümmungslinien einer  $C^r$ -Fläche sind  $C^{r-1}$ -Kurven.*

**Folgerung 4: Geometrische Kennzeichnung der Krümmungslinien:**

Nach OLINDE RODRIGUES gilt

**Satz 5.1.3:**  $c_f(I)$  ist eine Krümmungslinie auf einer  $C^2$ -2-Fläche genau dann, wenn in  $I$  l.a.  $\{C_f(t_0), (dN_f \circ c/dt)(t_0)\}$ .

Beweis: Bekanntlich gilt

$$\dot{C}_f(t_0) = \dot{c}^j(t_0) \cdot F_{j0c}(t_0).$$

Wir berechnen für  $p=c_f(t_0)$ :

$$\omega_p(\dot{C}_f(t_0)) = \dot{c}^j(t_0) \cdot \omega_p(F_{j0c}(t_0)) = -(dN_f \circ c/dt)(t_0),$$

wo das letzte Gleichheitszeichen mit der Kettenregel zu begründen ist.  $\square$

(II) Wir benötigen

**Def. 5.1.6:**  $f(U)$  sei eine reguläre  $C^2$ -Hyperfläche. Eine *Schmieglinie* ist eine reguläre Flächenkurve, deren Tangenten stets Schmiegtangenten sind.

**Satz 5.1.4:**  $f(U)$  sei eine reguläre  $C^r$ -2-Fläche im  $R^3$ ,  $r \geq 3$ .  $f(a_0)$  sei ein hyperbolischer Flächenpunkt. Faßt man  $f(U)$  als  $C^{r-2}$ -Fläche auf, so existiert ein Parameterwechsel so, daß die Parameterlinien Schmieglinien sind.

Beweis: Nach 4.4 ist  $K(a_0) < 0$ , folglich ist  $K$  in einer Umgebung von  $a_0$  negativ, d.h. es existiert eine Umgebung von  $a_0$ , die nur aus hyperbolischen Flächenpunkten besteht.

Nach 4.4, Folgerung 2 bestimmt ein Vektor  $X_p = v^j \cdot F_j(a)$  genau dann eine Schmiegtangente, wenn  $v^j \cdot v^k \cdot h_{jk} = 0$ .

Ein Weg  $c$  beschreibt dann eine Schmieglinie, wenn mit  $v^j = \dot{c}^j$

$$\dot{c}^j \cdot \dot{c}^k \cdot h_{jk} \circ c = 0$$

gilt.

Das ist eine quadratische Form, die über  $R$  reduzibel ist:

$$[(\alpha_1 \circ c) \cdot \dot{c}^1 + (\beta_1 \circ c) \cdot \dot{c}^2] \cdot [(\alpha_2 \circ c) \cdot \dot{c}^1 + (\beta_2 \circ c) \cdot \dot{c}^2] = 0 (*);$$

wieder gilt für die  $C^{r-2}(U)$ -Funktionen  $\alpha_j, \beta_j$ :  $U \rightarrow R$ :

$$(\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0) \text{ und } (\alpha_2, \beta_2) \neq (0,0).$$

Ein jeder Linearfaktor von (\*) bestimmt dann ein Schmiegtangenten(vektor)feld: wir erhalten ein erstes und ein zweites Feld.

Da in jedem Punkt die beiden Schmiegtangenten verschieden sind, ist

$$\alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1 \neq 0,$$

sodaß wieder Satz 5.1.1 anwendbar ist.  $\square$

**Bem.:** In der Umgebung jedes hyperbolischen Flächenpunktes existiert daher eine sogenannte *Schmiegeparametrisierung*.

**Folgerung 1:**

In der Umgebung jedes hyperbolischen Flächenpunktes bilden die Schmiege-  
linien ein Kurvennetz.

**Folgerung 2: Erkennen einer Schmiegeparametrisierung:**

Die Vektoren mit  $v^1:v^2=0:1$  und  $1:0$  müssen die in ganz  $U$  gültige Gleichung  $v^j \cdot v^k \cdot h_{jk} = 0$  erfüllen; einsetzen ergibt

$$h_{11} = h_{22} = 0 \quad \text{in } U.$$

**Bem.:** Diese beiden Bedingungen sind - im Gegensatz zur Krümmungsparametrisierung - unabhängig voneinander:

Gilt z.B. nur  $h_{11}=0$ , so sind nur die 1-Linien Schmiege-  
linien.

**Folgerung 3: Differentialgleichung der Schmiege-  
linien:**

Diese lautet nach dem Beweis zu Satz 5.1.4:

$$\dot{c}^j \cdot \dot{c}^k \cdot h_{jk} \circ c = 0 \quad \text{mit } c: I \rightarrow U.$$

Sie zerfällt über  $\mathbb{R}$  in zwei Linearfaktoren; einer lautet:

$$\alpha_1(u^1, u^2) \circ c \cdot \dot{c}^1 + \beta_1(u^1, u^2) \circ c \cdot \dot{c}^2 = 0,$$

wo wieder  $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$  gilt.

Ist etwa  $\beta_1(a_0) \neq 0$ , dann ist  $\beta_1$  in einer Umgebung von  $a_0$  von Null verschieden und es folgt

$$\dot{c}^2 / \dot{c}^1 = -(\alpha_1(u^j) \circ c) / (\beta_1(u^j) \circ c) =: \gamma(u^j) \circ c, \quad \gamma: U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Schreiben wir  $c(I)$  als Graph der Funktion  $z$  (EULERparametrisierung), so bleibt

$$\dot{z}(t) = \gamma(t, z(t)).$$

Wegen  $\gamma \in C^{r-2}$  ist  $z \in C^{r-1}$  und es gilt:

Die Schmiege-  
linien einer  $C^r$ -Fläche sind  $C^{r-1}$ -Kurven.

**Folgerung 4: Geometrische Kennzeichnung der Schmiege-  
linien:**

**Satz 5.1.5:** Ist ein hyperbolischer Flächenpunkt  $f(a)=c_f(0)$  ein regulärer  
Nichtwendepunkt einer Schmiege-  
linie  $c_f(I)$  einer  $C^4$ -2-Fläche im  
 $\mathbb{R}^3$ , so gilt:

$$\tau^2(0) = -K(c(0))$$

(Formel von A. ENNEPER, 1870).

**Beweis:**  $p=f(a)$  sei ein regulärer hyperbolischer Flächenpunkt; nach 4.4 gilt  $K(a) < 0$  mit  $a=c(0)$ . O.B.d.A. sei  $\|\dot{c}_f\|=1$  in  $I$ . Gemäß Def.5.1.6 berührt  $c_f(I)$  in  $c_f(0)$  eine Schmiegetangente. Nach Satz 4.5.2 ist die Schmiegeebene von  $c_f(I)$  im Nichtwendepunkt  $c_f(0)$  mit der Tangentialebene in  $c_f(0)$  identisch (\*).

Bekanntlich ist  $K(a)=\det \omega_p$  bei  $p=f(a)$ , und  $\omega_p: T_a f \rightarrow T_a f$ . Der Endomorphismus  $\omega_p$  ist festgelegt, wenn die Bilder einer Basis von  $T_a f$  bekannt sind.

$c_f$  besitzt die Begleitbasis  $(c_f)_1, (c_f)_2, (c_f)_3$ , wobei  $(c_f)_1$  und  $(c_f)_2$  die Schmiegeebene von  $c_f(I)$  in  $c_f(0)$  aufspannen. Wegen (\*) wählen wir in  $T_a f$  die folgende Basis

$$(C_f)_1(0) := (c_f(0); (c_f)_1(0)) ,$$

$$(C_f)_2(0) := (c_f(0); (c_f)_2(0)) .$$

Wegen der Normiertheit von  $c_f$  folgt:

$$\omega_p((C_f)_1(0)) = \omega_p(C_f(0)) = \omega_p(\dot{c} \downarrow F_j \circ c(0)) = \dot{c}^j(0) \cdot \omega_p(F_j(a)) = -\dot{c}^j(0) \cdot N_{f,j}(a) .$$

Nach der Kettenregel gilt

$$\omega_p((C_f)_1(0)) = -(dN_{f \circ c}/dt)(0) .$$

Der Vektor  $(c_f)_3(0)$  hat im wesentlichen die Richtung des Flächennormalvektors  $n_f(a)$ , d.h. es ist

$$(c_f)_3(0) = \varepsilon \cdot n_f \circ c(0) \text{ mit } \varepsilon = \pm 1 .$$

Es kann jedoch oBdA.  $\varepsilon=1$  gesetzt werden, da ein andernfalls benötigter Parameterwechsel  $I \rightarrow -I$ , welcher  $(c_f)_3$  "umpolt", nach 4.2 die GAUSSsche Krümmung invariant läßt. Also ist  $(c_f)_3 = n_f \circ c(0)$  und es folgt weiter

$$\omega_p((C_f)_1(0)) = -(dN_{f \circ c}/dt)(0) = -[d(C_f)_3/dt](0) = \tau(0) \cdot (C_f)_2(0) \quad (**);$$

die letzte Gleichheit gilt wegen 2.5.

Für das  $\omega_p$ -Bild von  $(C_f)_2$  kann

$$\omega_p((C_f)_2(0)) = \alpha \cdot (C_f)_1(0) + \beta \cdot (C_f)_2(0)$$

mit vorerst unbekanntem  $\alpha, \beta$  angesetzt werden.

Durch Skalarmultiplikation dieser Gleichung mit  $(C_f)_1(0)$  ergibt sich

$$(C_f)_1(0) \cdot \omega_p((C_f)_2(0)) = \alpha .$$

Aus der Selbstadjungiertheit von  $\omega_p$  und (\*\*) folgt

$$\alpha = \omega_p((C_f)_1(0)) \cdot (C_f)_2(0) = \tau(0) .$$

Also bleibt

$$\omega_p((C_f)_2(0)) = \tau(0) \cdot (C_f)_1(0) + \beta \cdot (C_f)_2(0) ,$$

wobei  $\beta$  uninteressant ist.

Damit lautet die Matrix von  $\omega_p$

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau(0) \\ \tau(0) & \beta \end{bmatrix} ,$$

und für deren Determinante gilt:

$$\det \omega_p = K(a) = -\tau^2(0) . \quad \square$$

**Bem.:** Für die Torsion der beiden Schmieglinien im hyperbolischen Flächenpunkt  $f(a)$  gilt:

$$\tau(0) = (-K(a))^{1/2} \text{ bzw. } \tau(0) = -(-K(a))^{1/2} ,$$

d.h. die beiden Schmieglinien sind entgegengesetzt gewunden.

## 5.2 Torsen

Nach Def.4.7.1 ist eine Torse eine reguläre  $C^2$ -Fläche im  $R^3$ ; nach Satz 4.7.4 ist eine reguläre  $C^3$ -Fläche im  $R^3$  genau dann abwickelbar, wenn sie eine  $C^3$ -Torse ist.

**Def. 5.2.1:** (1)  $f: U \rightarrow R^3$  heißt  $C^r$ -*Regelflächenweg*, wenn gilt:

$$f(u^1, u^2) = l(u^1) + u^2 \cdot r(u^1) \quad \text{mit } l, r: I \rightarrow R^3, r \neq 0 \text{ als } C^r(I)\text{-Funktionen.}$$

(2)  $f(U)$  heißt *Regelfläche*, wenn ein zu  $f$  äquivalenter Regelflächenweg existiert.

Offenbar kann  $u^2$  beliebig gewählt werden, sodaß  $U = I \times R$  gilt.

Die Punkte der auf der Fläche verlaufende Kurve  $l(I) \subset f(U)$  sind durch  $u^2=0$  gekennzeichnet;  $l(I)$  heißt *Leitkurve*.

Da  $r$  nach Definition nicht die Nullabbildung ist, kann statt  $r$  auch  $r/\|r\|$  gewählt werden;  $(r/\|r\|)(I)$  liegt auf der Einheitssphäre und heißt *Richtkurve* der Regelfläche.

**Bem. 5.2.1:**

(a) Singuläre Punkte:

Singuläre Punkte sind durch

$$f_{,1} \times f_{,2} = 0$$

gekennzeichnet. Wegen  $f_{,1} = \dot{l} + u^2 \cdot \dot{r}$  und  $f_{,2} = r$  ist dies äquivalent mit

$$(\dot{l} + u^2 \cdot \dot{r}) \times r = \dot{l} \times r + u^2 \cdot \dot{r} \times r = 0.$$

Eine 2-Linie  $u^1 = \text{const.}$  ist geradlinig und heißt *Erzeugende* der Regelfläche.

Sei nun  $u^1 = \text{const.} =: u^1_0$ ;

Der Punkt  $a = (u^1_0, u^2_0)$  ist genau dann singulär, wenn

$$(\dot{l} \times r)(u^1_0) + u^2_0 \cdot (\dot{r} \times r)(u^1_0) = 0.$$

Also ist entweder

$$(\dot{l} \times r, \dot{r} \times r) = (0, 0),$$

oder

$$(\dot{l} \times r, \dot{r} \times r) \neq (0, 0).$$

Im ersten Fall heißt die durch  $u^1_0$  bestimmte Erzeugende  $e(u^1_0)$  eine *singuläre Erzeugende*.

Im zweiten Fall existiert eine Stelle  $(u^1_0, u^2_0)$  mit

$$(\dot{l} \times r)(u^1_0) + u^2_0 \cdot (\dot{r} \times r)(u^1_0) = 0,$$

d.h. es sind

$$\text{l.a. } \{(\dot{l} \times r)(u^1_0), (\dot{r} \times r)(u^1_0)\}.$$

Genau dann ist

$$(\dot{l} \times r) \times (\dot{r} \times r) |_{u^1_0} = 0.$$

**ZWISCHENBEMERKUNG 24:**

$$(a \times b) \times (c \times d) = c \cdot \det(a, b, d) - d \cdot \det(a, b, c).$$

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Folglich ist

$$(\dot{l} \times r) \times (\dot{r} \times r) = \dot{r} \cdot \det(\dot{l}, r, r) - r \cdot \det(\dot{l}, r, \dot{r}) = 0.$$

d.h. notwendig dafür, daß auf einer nicht singulären Erzeugenden  $e(u^1_0)$  ein singulärer Punkt existiert, ist

$$\det(\dot{l}, r, \dot{r})(u^1_0) = 0.$$

Daraus folgt:

*Auf einer nicht singulären Erzeugenden existiert höchstens ein singulärer Punkt.*

**(b)**

**Def. 5.2.2:** (1) Eine Erzeugende  $e_0$  heißt *torsal*, wenn gilt:

- (a)  $e_0$  ist eine nicht singuläre Erzeugende,
  - (b) In zwei verschiedenen regulären Punkten von  $e_0$  stimmen die Tangentialebenen überein.
- (2) Eine Regelfläche heißt *torsal*, wenn sie nur torsale Erzeugende trägt.

$e(u^1_0)$  sei eine torsale Erzeugende. Nach Definition gilt

(a)  $(\dot{l} \times r)(u^1_0), (\dot{r} \times r)(u^1_0) \neq 0, 0$  und

(b) Es sind l.a.  $\{(f_{,1} \times f_{,2})(u^1_0, \alpha), (f_{,1} \times f_{,2})(u^1_0, \beta)\}$ , wenn  $(u^1_0, \alpha)$  und  $(u^1_0, \beta)$

die beiden auf  $e(u^1_0)$  verschiedenen Punkte mit gleicher Tangentialebene bezeichnen.

Die zweite Bedingung bedeutet

$$[(\dot{l} + \alpha \cdot \dot{r}) \times r] \times [(\dot{l} + \beta \cdot \dot{r}) \times r] = 0.$$

Mit ZB24 folgt

$$(\dot{l} + \beta \cdot \dot{r}) \cdot \det(\dot{l} + \alpha \cdot \dot{r}, r, r) - r \cdot \det(\dot{l} + \alpha \cdot \dot{r}, r, \dot{l} + \beta \cdot \dot{r}) = 0$$

Weitere Umformung ergibt

$$\Leftrightarrow \det(\dot{l} + \alpha \cdot \dot{r}, r, \dot{l}) + \det(\dot{l} + \alpha \cdot \dot{r}, r, \beta \cdot \dot{r}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det(\alpha \cdot \dot{r}, r, \dot{l}) + \det(\dot{l}, r, \beta \cdot \dot{r}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det(\dot{l}, r, \dot{r}) \cdot (\beta - \alpha) = 0.$$

Wegen  $\beta \neq \alpha$  ist dies mit

$$\det(\dot{l}, r, \dot{r}) = 0$$

äquivalent.

Zusammenfassend gilt:

*Eine Erzeugende  $e(u^1_0)$  ist genau dann torsal, wenn  $(\dot{l} \times r)(u^1_0), (\dot{r} \times r)(u^1_0) \neq 0, 0$  und  $\det(\dot{l}, r, \dot{r})(u^1_0) = 0$ .*

Mit Bem. (a) folgt außerdem:

*Ein singulärer Punkt auf einer nicht singulären Erzeugenden liegt notwendig auf einer torsalen Erzeugenden.*

**Def. 5.2.3:** Existiert auf einer torsalen Erzeugenden ein ( $\Rightarrow$  genau ein) singulärer Punkt, so heißt dieser **Kuspidalpunkt**, existiert kein singulärer Punkt, so heißt die Erzeugende **zylindrisch**.

(c) Durch jeden Punkt einer Regelfläche existieren geradlinige Flächenkurven, nämlich die Erzeugenden; diese sind Schmieglinien. Folglich trägt die Fläche nur hyperbolische Flächenpunkte ( $K < 0$ ), parabolische Flächenpunkte ( $K = 0$ ) und Flachpunkte ( $K = 0$ ).

Nach 4.3, Folgerung 6 ist

$$K = (h_{11} \cdot h_{22} - h_{12}^2) / \Delta.$$

Da die 2-Linien Schmieglinien sind, ist nach 5.1, Folgerung 2  $h_{22} = 0$ , und es bleibt

$$K(a) = -h_{12}^2(a) / \Delta(a).$$

Mit 4.3, Folgerung 2 gilt:

$$K(a) = 0 \Leftrightarrow h_{12}(a) = 0 \Leftrightarrow \det(f_{,1}, f_{,2}, f_{,12})(a) = 0.$$

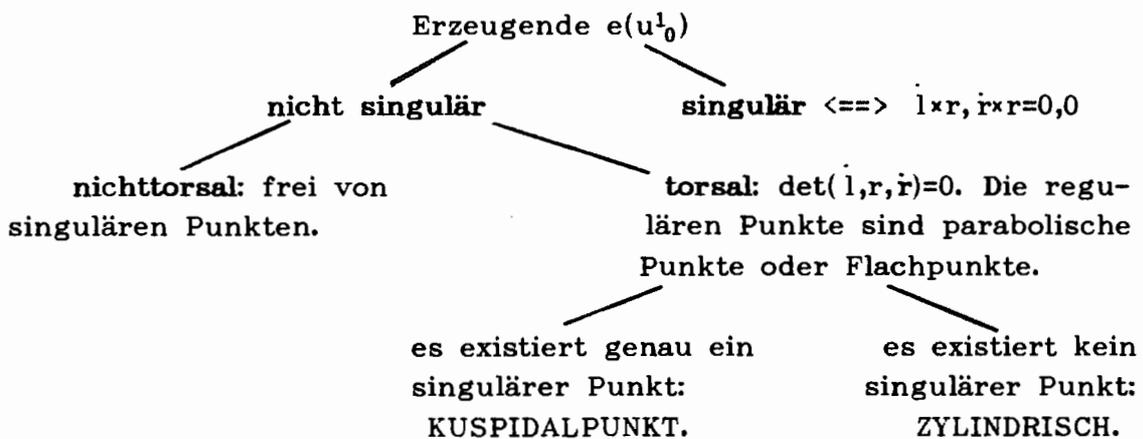
Für  $a = (u_0^1, u_0^2)$  bedeutet dies

$$K(a) = 0 \Leftrightarrow \det(\dot{l}(u_0^1) + u_0^2 \cdot \dot{r}(u_0^1), r(u_0^1), \dot{r}(u_0^1)) = 0 \Leftrightarrow \det(\dot{l}, r, \dot{r})(u_0^1) = 0$$

Also bestimmt  $u_0^1$  eine torsale Erzeugende, und es folgt:

*Ein regulärer Punkt einer Regelfläche ist genau dann parabolischer Punkt oder Flachpunkt, wenn er regulärer Punkt einer torsalen Erzeugenden ist.*

**Zusammenfassung:**



Da eine Torse nur reguläre Punkte trägt, folgt

**Satz 5.2.1:** Jede von singulären Punkten freie  $C^2$ -Fläche, die in einer torsalen Regelfläche liegt, ist eine Torse.

**Die Bestimmung aller torsalen  $C^2$ -Regelflächen**

Definitionsgemäß gibt es keine singuläre Erzeugende, d.h. es ist

$$(\dot{l} \times r, \dot{r} \times r) \neq (0, 0),$$

und jede Erzeugende ist torsal, d.h.  $\det(\dot{l}, r, \dot{r}) = 0$  in  $U = I \times R$ .

### 1. Schritt:

Wir setzen

$$\dot{r} \times r = 0 \text{ in } I \text{ mit } \dot{l} \times r \neq 0 \text{ in } I$$

voraus.

Wegen  $r \neq 0$  sei  $oBdA$ .  $\|r\|=1$ .

Aufgrund der Identität von LAGRANGE (ZB 7)

$$\|\dot{r} \times r\|^2 = \|r\|^2 \|\dot{r}\|^2 - (\dot{r} \cdot r)^2 = \|\dot{r}\|^2$$

bedeutet  $\dot{r} \times r = 0$  sofort  $\dot{r} = 0$  in  $I$ .

Also ist  $r = r_0 = \text{const.}$  in  $I$ , und  $f(U)$  ist eine zylindrische Regelfläche.

### 2. Schritt:

Jetzt sei

$$\dot{r} \times r \neq 0 \text{ in } I.$$

Da in  $U$   $\det(\dot{l}, r, \dot{r}) = 0$  ist, kann

$$\dot{l} = A \cdot r + B \cdot \dot{r} \quad (*)$$

mit den  $C^1(I)$ -Funktionen  $A, B: I \rightarrow \mathbb{R}$  angesetzt werden.

Wir definieren

$$s(u^1) := l(u^1) - B(u^1) \cdot r(u^1);$$

offenbar ist  $s(I)$  eine Flächenkurve.

Differenzieren ergibt mit (\*)

$$\dot{s} = \dot{l} - \dot{B} \cdot r - B \cdot \dot{r} = A \cdot r + B \cdot \dot{r} - \dot{B} \cdot r - B \cdot \dot{r} = (A - \dot{B}) \cdot r .$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

--  $A - \dot{B} = 0$  in  $I$ :

Dann ist  $\dot{s} = 0$  in  $I$ , d.h.  $s = \text{const.}$ , also  $s(I)$  ist einpunktig.

$f(U)$  ist daher eine kegelige Regelfläche.

--  $A - \dot{B} \neq 0$  in  $I$ :

Jetzt muß wegen  $r \neq 0$   $\dot{s} \neq 0$  in  $I$  gelten;  $f(U)$  ist tangentialflächige Regelfläche.

### 3. Schritt:

In Schritt 1 und 2 war eine stetige Funktion  $g: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  bzw.  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  entweder nirgends oder überall gleich Null.

Wir betrachten eine Stelle  $u^1_0 \in I$  und unterscheiden zwei Fälle:

--  $g(u^1_0) \neq 0$ : Dann ist  $g$  lokal um  $u^1_0$  von Null verschieden.

--  $g(u^1_0) = 0$ : Entweder ist  $g$  lokal um  $u^1_0$  gleich Null, oder  $u^1_0$  ist eine isolierte Nullstelle von  $g$ .

Im letzten Fall existiert in jeder offenen Umgebung  $I_0 \subset I$  von  $u^1_0$  ein  $\bar{u}^1 \in I_0$  mit: in einer offenen Umgebung  $\bar{I} \subset I_0$  von  $\bar{u}^1$  ist  $g \neq 0$ .

Dies liefert

**Satz 5.2.2:** Ist  $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein torsaler  $C^2$ -Regelflächenweg, so existiert zu jeder  $u^1_0 \in I$  in jeder offenen Umgebung  $I_0 \subset I$  von  $u^1_0$  ein Punkt  $\bar{u}^1 \in I_0$  derart, daß für eine offene Umgebung  $\bar{I} \subset I_0$  von  $\bar{u}^1$  dann  $f(\bar{I} \times \mathbb{R})$  zylindrisch, kegelig oder tangentialflächig ist.

**Bem.:** (a) Vgl. Kurventheorie 2.5: Argumentation wie bei "Nichtauptypweg".  
 (b) Auf ein und derselben Fläche kann der Typ wechseln, auch bei  $C^\infty$  (geht bei analytischen Funktionen nicht.).

(c) Menge der Kuspidualpunkte:

--Zylindrische Flächen: diese tragen keine Kuspidualpunkte.

--Kegelige Flächen: Die Kegelspitze  $S$  ist der einzige Kuspidualpunkt.

--Tangentenflächige Regelflächen:  
 Die *Gratlinie*  $s(I)$  besteht genau aus den Kuspidualpunkten.

### Die Bestimmung aller $C^4$ -Torsen

Bekanntlich ist eine Torse durch  $K=0$  gekennzeichnet, sodaß nur parabolische Punkte und Flachpunkte existieren.

**Satz 5.2.3:** *Auf jeder  $C^4$ -Torse gehört eine Umgebung eines parabolischen Punktes stets einer torsalen Regelfläche an.*

**Beweis:** Sei  $p=f(a)$  ein parabolischer Punkt. Folglich ist

$$K(a) = {}_{(1)}\kappa_p(a) \cdot {}_{(2)}\kappa_p(a) = 0.$$

O.B.d.A. sei etwa  ${}_{(1)}\kappa_p(a) \neq 0$  und  ${}_{(2)}\kappa_p(a) = 0$ .

Dann gilt lokal in einer Umgebung  $U$  von  $a$

$${}_{(1)}\kappa_p \neq 0, \quad {}_{(2)}\kappa_p = 0.$$

(ein parabolischer Punkt liegt also nie isoliert.)

In jedem Punkt von  $f(U)$  existieren jeweils zwei orthogonale Krümmungstangenten. Dabei werden die Krümmungstangenten durch zwei Tangentialvektorfelder

$${}_{(l)}V_f : U \rightarrow T_f \quad (l=1,2)$$

bestimmt;  ${}_{(1)}V_f(a)$  bestimme die Krümmungstangente,  ${}_{(2)}V_f(a)$  die Schmiegekrümmungstangente.

O.B.d.A. sei  $\|{}_{(1)}V_f\| = 1$  in  $U$ .

Nun betrachten wir die WEINGARTENabbildung:

$$\omega_p({}_{(1)}V_f(a)) = {}_{(1)}\kappa_p(a) \cdot {}_{(1)}V_f(a),$$

$$\omega_p({}_{(2)}V_f(a)) = {}_{(2)}\kappa_p(a) \cdot {}_{(2)}V_f(a) = 0 \quad \text{nach Voraussetzung.}$$

In  $U$  gilt also:

$$(a) \quad \{\omega_p({}_{(1)}V_f(a)), {}_{(1)}V_f(a)\} \text{ sind l.a.}$$

$$(b) \quad \omega_p({}_{(2)}V_f(a)) = 0 \quad (*)$$

Aus der Selbstadjungiertheit von  $\omega_p$  folgt

$$\omega_p({}_{(1)}V_f(a)) \cdot {}_{(2)}V_f(a) = 0 \quad \text{für alle } a \in U. (**)$$

Unsere beiden Ziele sind:

(1) Es existiert ein Parameterwechsel  $\varphi$  derart, daß für  $f'=f\circ\varphi$  gilt:

$$\text{l.a. } \{ {}_{(0)}V_f(a), F'_\varphi(a') \};$$

(2) Die 2-Linien sind lokal geradlinig.

(Ad 1) Setzen wir  ${}_{(0)}V_f \in C^2(U)$  voraus, so existiert nach Satz 5.1.2 die Krümmungsparametrisierung  $f'=f\circ\varphi \in C^2(U')$ .

Kehren wir wieder zur alten Bezeichnung zurück, so gilt:

$f$  ist  $C^2$ -Krümmungsparametrisierung mit

$$\text{l.a. } \{ F_1, {}_{(0)}V_f \} \text{ in } U.$$

(Ad 2) Nach Konstruktion von  $f$  sind die 2-Linien Schmieglinien.

Wir zeigen zuerst, daß die 2-Linien Geodätische sind. Dazu weisen wir nach, daß

$${}_{(2)}V_{f'2}(a) \perp {}_{(1)}V_f(a), {}_{(2)}V_f(a) \quad \forall a \in U \quad (***)$$

gilt: Bekanntlich bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \omega_p(F_1(a)) &= -N_{f'1}(a), \\ \omega_p(F_2(a)) &= -N_{f'2}(a) = 0 \text{ in } U \text{ wegen } (*). \end{aligned}$$

Daher ist auch

$$N_{f'21}(a) = 0 \text{ in } U.$$

Mit (\*\*) folgt

$$N_{f'1} \cdot {}_{(2)}V_f = 0 \text{ in } U.$$

Differenzieren ergibt

$$N_{f'12} \cdot {}_{(2)}V_f + N_{f'1} \cdot {}_{(2)}V_{f'2} = 0 \text{ in } U.$$

Da  $N_{f'1}$  und  ${}_{(1)}V_f$  proportional sind, bleibt:

$${}_{(1)}V_f \cdot {}_{(2)}V_{f'2} = 0.$$

Differenziert man ferner die in  $U$  anfangs vorausgesetzte Identität  $\|{}_{(2)}V_f\|=1$  partiell nach  $u^2$ , so bleibt

$${}_{(2)}V_f \cdot {}_{(2)}V_{f'2} = 0.$$

Damit folgt

$${}_{(2)}V_{f'2}(a) \in T_a f^\perp \text{ für alle } a \in U \quad (4*)$$

und damit ist (\*\*\*) gezeigt.

Wir betrachten nun die zum Parameterwert  $u^1=u^1_0$  gehörige 2-Linie durch  $p=f(a)$ , welche durch den Weg

$$c_f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

erfaßt werde.

Nach Konstruktion ist  $c_f(I)$  eine Integralkurve, sodaß o.B.d.A.  $c_f$  als ein Integralweg von  ${}_{(2)}V_f$  vorausgesetzt werden kann, d.h.

$$\dot{c}_f(u^2) = {}_{(2)}V_f(u^1_0, u^2).$$

Differenziert man diese Beziehung nach  $u^2$ , so folgt nach (4\*)

$$(d\dot{c}_f/du^2)(u^2_0) \in T_a f^\perp \text{ für } a=(u^1_0, u^2_0).$$

Nach Def. 3.5.1 ist  $c_f$  ein geodätischer Weg, sodaß gilt:

Die 2-Linie durch  $p=f(a)$  ist lokal eine geodätische Schmieglinie.

Nach Satz 3.5.3 ist in jedem Nichtwendepunkt einer Geodätischen die Schmiegebene zur Tangentialebene der Fläche orthogonal; nach Satz 4.5.2 liegt die Schmiegebene in jedem Nichtwendepunkt  $p$  einer Schmieglinie tangential oder  $p$  ist ein Wendepunkt. Folglich muß  $c_f(I)$  lokal nur Wendepunkte besitzen, ist also lokal geradlinig.

Damit ist  $f(U)$  lokal um  $p=f(a)$  eine Regelfläche, die wegen  $K=0$  torsal ist.  $\square$

**Bem. 5.2.2:** (a) Im Beweis zu Satz 5.2.3 wurde  $N_{f,12}$  benützt, ohne zu begründen, daß dieser Ausdruck existiert (mit der Bezeichnung " ' " müßte dieser Ausdruck  $N_{f,1,2}$  heißen); dies wird hier erledigt:

Aufgrund der Darstellungsmöglichkeit

$$n_f = n_f \circ \varphi = f_{,1} \times f_{,2} / \|f_{,1} \times f_{,2}\| \circ \varphi$$

ist wegen  $\varphi \in C^2$  und  $f \in C^4$  die Existenz gesichert.

(b) Sei  $p=f(a)$  ein Flachpunkt einer  $C^4$ -Torse.

Um analoge Untersuchungen wie in Satz 5.2.3 anstellen zu können, unterscheiden wir zwei Fälle:

**Fall 1:** Es existiert eine Umgebung von  $p$  aus Flachpunkten, d.h. lokal um  $p$  ist  $\omega_p$  die Nullabbildung. Daher ist die Torse lokal um  $p$  eben.

**Fall 2:** Es existiert keine Umgebung von  $p$  aus Flachpunkten.

Nach HARTMANN und NIERENBERG gilt:

*Es existiert durch  $p$  eine geradlinige Flächenkurve, die nur Flachpunkte trägt.*

### Anwendungen:

(1) Sei  $c_f(I)$  eine reguläre Flächenkurve der 2-Fläche  $f(U)$ . Die in den Kurvenpunkten angehängten Normalvektoren von  $f(U)$  definieren Geraden normal zur Fläche, und alle so erhaltenen Geraden definieren eine Regelfläche, die **Normalenfläche** längs der regulären Flächenkurve  $c_f(I)$ .

**Satz 5.2.4:** Die Normalenfläche längs einer regulären Flächenkurve  $c_f(I)$  ist genau dann torsal, wenn  $c_f(I)$  eine Krümmungslinie ist.

**Beweis:** Die Normalenregelfläche längs  $c_f(I)$  wird erfaßt durch

$$g(t,v) := c_f(t) + v \cdot n_{f,oc}(t) \quad \text{mit } (t,v) \in U = I \times \mathbb{R}.$$

$g(U)$  ist torsal genau dann, wenn

(1) keine singuläre Erzeugende existiert:  $\dot{l} \times r, \dot{r} \times r \neq 0, 0$  und

(2) jede Erzeugende torsal ist:  $\det(\dot{l}, r, \dot{r}) = 0$  in  $I$ .

Es ist hier

$$\dot{l} = \dot{c}_f \quad \text{und} \quad r = n_{f,oc};$$

wegen  $\dot{c}_f \neq 0$ ,  $\|n_f\|=1$  und l.u.  $\{\dot{c}_f, n_f\}$  ist  $\dot{c}_f \times n_{f,oc} \neq 0$ , sodaß keine singuläre Erzeugende existiert. Also ist  $g(U)$  genau dann torsal, wenn

$$\det(\dot{c}_f, n_{f,oc}, (n_{f,oc})') = 0.$$

Da  $(n_{f,oc})'$  tangential liegt, ist diese Gleichung äquivalent zu

$$\text{l.a. } \{\dot{C}_f(t_0), (dN_{f,oc}/dt)(t_0)\} \text{ in } I.$$

Nach Satz 5.1.3 (RODRIGUEZ) ist dies dazu äquivalent, daß  $c_f(I)$  Krümmungslinie ist.  $\square$

(2) Tangentiale Regelfläche längs einer regulären Flächenkurve  $c_f(I)$ :

$c_f(I)$  sei eine reguläre  $C^1(I)$  Flächenkurve auf der 2-Fläche  $f(U)$ .

Durch das Tangentialvektorfeld

$$W_c := W_c : I \rightarrow T_f \text{ mit } \Pi \circ W_c = c_f$$

werden die Erzeugenden einer  $f(U)$  längs  $c_f(I)$  berührenden Regelfläche festgelegt.

Wir fordern:

$$W_c(t_0) \times \dot{C}_f(t_0) \neq 0 \text{ in } I;$$

daher ist insbesondere  $W_c \neq 0$ , also nach Def.5.1.2 regulär.

**Satz 5.2.5:** Eine tangentielle Regelfläche längs  $c_f(I)$  mit obigen Eigenschaften ist genau dann torsal, wenn  $\dot{C}_f(t_0)$  und  $W_c(t_0)$  für alle  $t_0 \in I$  konjugierte Flächentangenten bestimmen.

**Beweis:** Mit der Abbildung

$$w: I \rightarrow \mathbb{R}^3, w \neq 0 \text{ und } W_c(t_0) := (c_f(t_0); w(t_0))$$

werde  $g(U)$  beschrieben durch

$$g(t, v) = c_f(t) + v \cdot w(t) \text{ mit } \dot{c}_f \times w \neq 0.$$

$g(U)$  trägt wegen  $\dot{c}_f \times w \neq 0$  keine singuläre Erzeugende.

Jede Erzeugende von  $g(U)$  ist torsal genau dann, wenn

$$\det(\dot{c}_f, w, \dot{w}) = 0 \text{ in } I.$$

Genau dann liegt  $\dot{w}$  tangential in  $I$ , d.h. es ist

$$\dot{w} \cdot n_{f \circ c} = 0 \text{ in } I. \quad (*)$$

Differenziert man

$$w \cdot n_{f \circ c} = 0 \text{ in } I$$

nach  $t$ , so ergibt sich

$$\dot{w} \cdot (n_{f \circ c}) + w \cdot (n_{f \circ c})' = 0 \text{ in } I.$$

Mit (\*) bleibt:

$$g(U) \text{ ist torsal} \iff w \cdot (n_{f \circ c})' = 0 \text{ in } I.$$

In anderer Schreibweise bedeutet dies

$$W_c(t_0) \cdot (dN_{f \circ c}/dt)(t_0) = 0 \quad \forall t_0 \in I.$$

Wegen  $\omega_p(\dot{C}_f(t_0)) = -(dN_{f \circ c}/dt)(t_0)$  ist dies äquivalent zu

$$W_c(t_0) \cdot \omega_p(\dot{C}_f(t_0)) = 0 \text{ in } I.$$

Nach Def.4.4.6 bestimmen  $W_c(t_0)$  und  $\dot{C}_f(t_0) \quad \forall t_0 \in I$  konjugierte Flächentangenten.  $\square$

**Bem. 5.2.3:** (a) Die für tangentielle Regelflächen gültige Voraussetzung

$$\text{l.u. } \{\dot{c}_f(t_0), w(t_0)\} \text{ in } I$$

ist dazu äquivalent, daß  $c_f(I)$  nirgends eine Schmiegtangente berührt.

(b) Ist die tangentielle Regelfläche  $\Psi$  torsal, so kann sie speziell ein Kegel sein:

Dann ist  $c_f(I)$  Kontur (wahrer Umriß, Eigenschattengrenze) für die Kegelspitze  $S$  als Projektionszentrum (Lichtquelle), d.h. die Tangente an die Kontur ist zur Sehgeraden konjugiert.

Der Kegel  $\Psi$  kann speziell ein Zylinder sein.

(3) Geometrische Interpretation der geodätischen Parallelverschiebung auf 2-Flächen im  $R^3$ :

$A_c: I \rightarrow T_f$  mit  $\Pi \circ A_c = c_f$  sei ein Parallelfeld längs der Flächenkurve  $c_f(I)$  (Def. 3.4.8);  $c_f(I)$  berühre nirgends eine Schmiegtangente. Dann existiert nach (2) die längs  $c_f(I)$  berührende torsale Regelfläche  $\Psi$ . Folglich ist  $A_c$  auch Parallelfeld für  $\Psi$ .

$\Psi$  ist torsal, nach Satz 4.7.4 daher abwickelbar, d.h. lokal isometrisch zur Ebene. Da "Parallelfeld" ein innergeometrischer Begriff ist, liefert die "Verebnung" von  $\Psi$  ein elementares Parallelfeld. (Konstruktive Behandlung.)

### 5.3 Minimalflächen

**Def. 5.3.1:** Eine *Minimalfläche* ist eine reguläre  $C^2$ -Fläche im  $\mathbb{R}^3$  mit  $H=0$ .

In jedem Punkt  $p=f(a)$  einer Minimalfläche gilt nach 4.2, Folgerung 1:

$$H = 1/2 \cdot ({}_{(1)}\kappa_p + {}_{(2)}\kappa_p).$$

**Beispiele:**

(a) Eine Ebene ist eine Minimalfläche wegen  ${}_{(1)}\kappa_p = {}_{(2)}\kappa_p = 0$ .

(b) Nach Ü37 sind auch die *Wendelfläche* und das *Katenoid* Minimalflächen:

Eine Wendelfläche entsteht durch Verschraubung einer Geraden, welche die Schraubachse rechtwinkelig schneidet, das Katenoid ist die Drehfläche der *Kettenlinie*; sie ist z.B. Bahn des Brennpunkts einer Parabel, welche auf einer Geraden rollt.

Ferner existiert eine einparametrische stetige Schar von Flächen, die die Wendelfläche und das Katenoid enthält, wobei gilt:

Alle Flächen der Schar sind Minimalflächen und Schraubflächen und zwar i.w. die einzigen Minimalschraubflächen.

Dabei ist das Katenoid die einzige Minimaldrehfläche und die Wendelfläche die einzige Minimalregelfläche.

**Bem. 5.3.1:** (a) Nach 4.3, Folgerung 6 ist

$$2 \cdot H = g^{jk} \cdot h_{jk} = 1/\Delta \cdot (g_{11} \cdot h_{22} - 2 \cdot g_{12} \cdot h_{12} + g_{22} \cdot h_{11}).$$

Damit lautet die

*Differentialgleichung der Minimalflächen:*

$$g_{11} \cdot h_{22} - 2 \cdot g_{12} \cdot h_{12} + g_{22} \cdot h_{11} = 0 \quad (5.3.1);$$

das ist eine partielle Differentialgleichung 2.Ordnung.

(b) *Eine Minimalfläche trägt nur Flachpunkte und hyperbolische Punkte.*

**Bew.:** Es ist bei  $p=f(a)$

$$H(a) = 1/2 \cdot ({}_{(1)}\kappa_p + {}_{(2)}\kappa_p)(a).$$

Ist  ${}_{(1)}\kappa_p = {}_{(2)}\kappa_p = 0$ , so ist  $p$  ein Flachpunkt. Gilt hingegen  ${}_{(1)}\kappa_p = -{}_{(2)}\kappa_p \neq 0$ , so muß  $p$  ein hyperbolischer Flächenpunkt sein.  $\square$

(c) Ist  $f$  eine Schmiegeparametrisierung, so ist nach 5.1, Folgerung 2

$$h_{11} = h_{22} = 0.$$

Falls nun  $p$  kein Flachpunkt ist, ist  $h_{12} \neq 0$ , sodaß in einem hyperbolischen Flächenpunkt  $p$  wegen (5.3.1) die Äquivalenz

$$H = 0 \iff g_{12} = 0$$

besteht.

Daher sind in jedem solchen Punkt die Schmiegtangenten orthogonal; die Schmieglinien bilden also ein orthogonales Kurvennetz.

Es folgt nun eine Motivierung des Begriffs "Minimal"flächen. Dazu vor-  
erst zwei Definitionen:

**Def. 5.3.2:** Ein Weg  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *periodisch*, wenn eine reelle Zahl  $w \in \mathbb{R}$  derart existiert, daß für alle  $t_0 \in \mathbb{I}$  dann  $c(t_0) = c(t_0 + w)$  gilt. Das kleinste  $w$  dieser Art heißt *Periode*.

Für die Einschränkung  $c|_{[a, b := a+w]}$  gilt dann  $c(a) = c(b)$ ;  $c([a, b])$  heißt *geschlossene Kurve*. Ist  $c|_{[a, b]}$  injektiv, so heißt  $c([a, b])$  *einfach geschlossen*.

**Def. 5.3.3:** Ein Weg  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *stückweise r-mal stetig differenzierbar*, wenn (1)  $c|_{[a, b]}$  stetig ist (also  $c \in C^0$ ) und

(2) eine endliche Zerlegung von  $[a, b]$  existiert derart, daß

$$a =: t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} := b$$

gilt, und mit  $I_j := [t_j, t_{j+1}]$  ( $0 \leq j \leq k$ ) die Einschränkung  $c|_{I_j} \in C^r(I_j)$  ist.  $c([a, b])$  kann somit "Ecken" besitzen.

Sei nun  $f$  eine  $C^2(U)$ -Immersion und  $U$  offen in  $\mathbb{R}^2$ . Ferner sei  $T \subset U$  ein beschränktes Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend), wobei  $\bar{T} := T \cup \partial T$  in  $U$  liege.  $f(\partial T)$  sei eine einfach geschlossene  $C^1$ -Kurve auf  $f(U)$ .

Es werden jetzt zulässige Vergleichsflächen betrachtet:

Diese werden erfaßt durch Flächenwege  $f^*: U^* \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

(1)  $f^*$  ist eine  $C^1(U^*)$ -Immersion, und

(2) es existiert ein beschränktes Gebiet

$T^* \subset U^*$  mit  $\bar{T}^* := T^* \cup \partial T^* \subset U^*$  und  $f^*(\partial T^*) = f(\partial T)$ .

Wir berechnen nun gemäß Def.3.3.4 zwei Oberflächen:  
einerseits

$$O(f(T)) = \int_T \Delta^{1/2} du^1 du^2 =: o,$$

und andererseits

$$O(f^*(T^*)) = \int_{T^*} (\Delta^*)^{1/2} du^{1*} du^{2*} := o^*.$$

**Satz 5.3.1:** Gilt für jede zulässige Vergleichsfläche  $f^*(T^*)$   $o^* \geq o$ , so ist  $f(T)$  eine Minimalfläche.

**Beweis:** Idee: Wir werden "geschickte" Vergleichsflächen so konstruieren, daß  $o^* \geq o$  schon  $H=0$  erzwingt.

Wir beschreiben diese durch

$$\varepsilon f: U \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } \varepsilon f(u^1, u^2) := f(u^1, u^2) + \varepsilon \cdot \alpha(u^1, u^2) \cdot n_f(u^1, u^2)$$

mit den Nebenbedingungen

$\alpha: U \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \in C^1(U), \alpha|_{\partial T} = 0; |\varepsilon| < \delta$  für hinreichend kleines  $\delta$ .

Insbesondere ist  $\alpha^* f = f$ .

Jetzt muß zuerst einmal überprüft werden, ob die so erfaßten Flächen zulässig sind:

Ad (2): Hier ist  $T^* = T$ . Wegen  $\alpha|_{\partial T} = 0$  ist  $\varepsilon^* f(\partial T) = f(\partial T)$ .

Ad (1): Nach Konstruktion ist  $\varepsilon^* f$  sicher aus  $C^1(U)$ . Bleibt der Nachweis der Regularität:

Jedenfalls besteht die Äquivalenz

$$\varepsilon^* f \text{ ist regulär in } T \Leftrightarrow \varepsilon^* \Delta > 0 \text{ in } T.$$

Zur Berechnung von  $\varepsilon^* \Delta$  benötigt man

$$\varepsilon^* f_{,j} = f_{,j} + \varepsilon \cdot (\alpha_{,j} \cdot n_f + \alpha \cdot n_{f,j}),$$

$$\varepsilon^* f_{,k} = f_{,k} + \varepsilon \cdot (\alpha_{,k} \cdot n_f + \alpha \cdot n_{f,k}).$$

Mit den Ableitungsgleichungen von WEINGARTEN (4.6.2) kann  $\varepsilon^* g_{jk} = \varepsilon^* f_{,j} \cdot \varepsilon^* f_{,k}$  berechnet werden, wobei nur die konstanten und die in  $\varepsilon$  linearen Glieder interessieren:

$$\varepsilon^* g_{jk} = g_{jk} + \varepsilon \cdot \alpha \cdot (f_{,j} \cdot (-h_k^p \cdot f_{,p}) + f_{,k} \cdot (-h_j^p \cdot f_{,p})) + \varepsilon^2 \cdot (\dots).$$

Mit

$$f_{,j} \cdot (-h_k^p \cdot f_{,p}) = -h_k^p \cdot g_{jp} = -h_{jk}$$

folgt

$$\varepsilon^* g_{jk} = g_{jk} - 2 \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot h_{jk} + \varepsilon^2 \cdot (\dots).$$

Dann ist  $\varepsilon^* \Delta$  die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} g_{11} - 2 \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot h_{11} + \varepsilon^2 \cdot (\dots) & g_{12} - 2 \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot h_{12} + \varepsilon^2 \cdot (\dots) \\ g_{12} - 2 \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot h_{12} + \varepsilon^2 \cdot (\dots) & g_{22} - 2 \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot h_{22} + \varepsilon^2 \cdot (\dots) \end{pmatrix},$$

also

$$\varepsilon^* \Delta = g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2 - 2 \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot (h_{11} \cdot g_{22} + g_{11} \cdot h_{22} - 2 \cdot g_{12} \cdot h_{12}) + \varepsilon^2 \cdot (\dots),$$

schließlich

$$\varepsilon^* \Delta = \Delta \cdot (1 - 4 \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot H) + \varepsilon^2 \cdot (\dots) \quad (*)$$

Endlich kann der Nachweis von  $\varepsilon^* \Delta > 0$  erbracht werden:

Es ist  $\Delta > 0$  in  $\bar{T}$ , und nach Voraussetzung ist  $\bar{T}$  eine kompakte, d.h. abgeschlossene und beschränkte Menge. Da  $\Delta$  stetig ist in  $\bar{T}$ , nimmt  $\Delta$  in  $\bar{T}$  das absolute Minimum  $\Delta_{\min} > 0$  an.

Wegen (\*) ist  $\varepsilon^* \Delta$  stetig in  $\varepsilon$ . Daher entsteht das Minimum  $\varepsilon^* \Delta_{\min}$  von  $\varepsilon^* \Delta$  stetig aus  $\Delta_{\min}$ , sodaß für hinreichend kleines  $\delta$  dann  $\varepsilon^* \Delta_{\min} > 0$  ist. Folglich ist  $\varepsilon^* \Delta > 0$  in  $T$  und  $\varepsilon^* f$  eine Immersion.

Also liegen zulässige Vergleichsflächen vor.

Wir bezeichnen die dem  $\alpha^*$  entsprechende Oberfläche mit  $\varepsilon^* \circ$ :

$$\varepsilon^* \circ = \int_T (\varepsilon^* \Delta)^{1/2} \cdot du^1 \cdot du^2.$$

Für die Bedingung  $\varepsilon^* \circ \geq \alpha^* \circ$  ist notwendig

$$(d\varepsilon^* \circ / d\varepsilon)(\varepsilon=0) = 0 \quad (**)$$

Mit (\*) folgt

$$(\varepsilon^* \Delta)^{1/2} = \Delta^{1/2} \cdot (1 - 2 \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot H) + \varepsilon^2 \cdot (\dots),$$

sodaß gilt:

$$\varepsilon^* \circ = \int_T [\Delta^{1/2} \cdot (1 - 2 \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot H) + \varepsilon^2 \cdot (\dots)] \cdot du^1 \cdot du^2.$$

Wegen (\*\*) ist die Bedingung

$$(d^{\varepsilon} o / d\varepsilon)(0) = -2 \cdot \int_T \alpha \cdot H \cdot \Delta^{1/2} \cdot du^1 du^2 = 0 \quad (***)$$

notwendig für  $\varepsilon_0 \geq 0$ .

Wir zeigen, daß daraus bereits  $H=0$  in  $T$  folgt.

Es ist  $\Delta^{1/2} > 0$  und  $\alpha$  beliebig (zulässig:  $\alpha \in C^1$ ,  $\alpha(\partial T) = 0$ ).

Wir führen den Beweis für obige Behauptung indirekt:

Angenommen, es existiert eine Stelle  $a_0 \in T$  mit  $H(a_0) \neq 0$ , und oBdA. sei sogar  $H(a_0) > 0$  (sonst gegensinnigen Parameterwechsel dazwischenschalten).

Dann ist  $H > 0$  in einer Umgebung  $U_1 \subset T$  von  $a_0 \in U_1$ .

Nun werde eine Kreisscheibe  $U_0 \subset U_1$  um den Punkt  $a_0$  vom Radius  $\eta > 0$  betrachtet, d.h.  $U_0 = \{a \mid \|a - a_0\| < \eta\}$ .

Durch die folgende Definition werde  $\alpha$  genau erklärt:

$$\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \begin{array}{l} (1) \alpha(a) := e^s \text{ mit } s := -1/(\eta^2 - \|a - a_0\|^2) \text{ für } \|a - a_0\| \leq \eta, \\ (2) \alpha(a) := 0 \text{ sonst.} \end{array}$$

Jedenfalls erfüllt  $\alpha$  die anfangs genannten Bedingungen.

Nach Definition ist

$$\alpha > 0 \text{ im Inneren von } U_0,$$

und an den Randstellen (d.h. in den Punkten von  $\partial U_0$ ) existieren alle Ableitungen. Also ist  $\alpha \in C^\infty$ .

Weiters ist nach Definition von  $\alpha$

$$\int_T \alpha \cdot H \cdot \Delta^{1/2} \cdot du^1 du^2 = \int_{U_0} \alpha \cdot H \cdot \Delta^{1/2} \cdot du^1 du^2,$$

und wegen  $\alpha \cdot H \cdot \Delta^{1/2} > 0$  ist dies ein Widerspruch zu (\*\*\*) .

Daher muß  $H(a_0) = 0$  gelten und alsdann  $H = 0$  in  $T$ .  $\square$

**Ergebnis:** Falls eine Fläche durch eine einfach geschlossene Kurve minimale Oberfläche hat, so ist sie eine Minimalfläche.

**Bem 5.3.2:** (a) Für die Bedingung  $\varepsilon_0 \geq 0$  war die Gleichung

$$(d^{\varepsilon} o / d\varepsilon)(\varepsilon=0) = 0$$

notwendig, sodaß für  $\varepsilon=0$  eine stationäre Oberfläche vorliegt:

Minimum, Maximum oder Wendepunkt.

1760 weist LAGRANGE nach, daß für ein Minimum die Differentialgleichung  $H=0$  notwendig ist.

(b) 1866 formulierte der belgische Physiker Josef PLATEAU sein "PLATEAUsches Problem":

Sei  $\Gamma$  eine einfach geschlossene  $C^1$ -Raumkurve und  $\bar{D}$  eine abgeschlossene Einheitskreisscheibe;  $D := \bar{D} \setminus \partial \bar{D}$ .

Gesucht ist eine Abbildung

$$f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } f(\partial \bar{D}) = \Gamma$$

derart, daß  $f(D)$  Minimalfläche ist (dieses Problem wurde schon 1762 von LAGRANGE im Rahmen der Variationsrechnung formuliert).

PLATEAU hat den Rand  $\Gamma$  durch einen Draht materialisiert und diesen in eine Seifenlösung eingetaucht. Bei Vernachlässigung der Gravitation erzwingt die Oberflächenspannung eine Fläche stationärer Oberfläche.

Nach T.RADO und Jesse DOUGLAS (1932) gilt:

Zu gegebenem Rand existiert stets ein Minimalflächenweg, der möglicherweise nicht überall regulär ist.

Ergänzend dazu findet Richard OSSERMANN (1970):

Falls dieser Minimalflächenweg ein absolutes Minimum liefert, ist er auch regulär.

### Zusammenhänge zur Funktionentheorie

#### **ZWISCHENBEMERKUNG 25:**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet und  $h: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, welche die LAPLACEsche partielle Differentialgleichung

$$\partial^2 h / (\partial u^1)^2 + \partial^2 h / (\partial u^2)^2 = 0$$

erfüllt. Dann gilt:

Jede Lösung  $h$  dieser Gleichung ist eine analytische Funktion (man schreibt  $C^\omega$ ).  $h$  heißt *harmonische Funktion*.

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

In Ü 29 wurde der Begriff der *isothermen Parametrisierung* erklärt: dazu muß  $g_{12}=0$  und  $g_{11}=g_{22}$  erfüllt sein.

**Satz 5.3.2:** *Es sei  $f=(f^1, f^2, f^3): U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre isotherme  $C^2$ -Parametrisierung und  $U$  ein beschränktes Gebiet. Dann gilt:*

*$f(U)$  ist Minimalfläche genau dann, wenn  $f^\alpha$  ( $\alpha=1,2,3$ ) harmonische Funktionen sind, d.h.  $f^\alpha_{,11} + f^\alpha_{,22} = 0$  gilt.*

Beweis: Definitionsgemäß ist

$$f \text{ isotherm} \iff g_{12}=0, g_{11}=g_{22} \neq 0.$$

Daraus folgt

$$g^{12}=0 \text{ und } g^{11}=g^{22}=:g \neq 0.$$

Das bedingt wiederum

$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 = 0,$$

wie Nachrechnen lehrt: benütze gemäß Satz 3.1.4

$$\Gamma_{jk}^i = 1/2 \cdot (g_{ki,j} + g_{ij,k} - g_{jk,i})$$

und dann

$$\Gamma_{jk}^1 = \Gamma_{jks} \cdot g^{s1}.$$

Die Ableitungsgleichungen (4.6.1) von GAUSS lauten

$$f_{,jk} = \Gamma_{jk}^1 \cdot f_{,1} + h_{jk} \cdot n_f.$$

Daraus folgt

$$g^{jk} \cdot f_{,jk} = g^{jk} \cdot \Gamma_{jk}^1 \cdot f_{,1} + g^{jk} \cdot h_{jk} \cdot n_f = g \cdot (\Gamma_{11}^1 \cdot f_{,1} + \Gamma_{11}^2 \cdot f_{,2} + \Gamma_{22}^1 \cdot f_{,1} + \Gamma_{22}^2 \cdot f_{,2}) + 2 \cdot H \cdot n_f.$$

Schreibt man auch die linke Seite der Gleichung ausführlich, so bleibt

$$g \cdot (f_{,11} + f_{,22}) = 2 \cdot H \cdot n_f.$$

Wegen  $g \neq 0$  findet man

$$f_{,11} + f_{,22} = 0 \iff H = 0. \quad \square$$

**Bem.:** Zu jeder regulären  $C^2$ -Fläche existiert lokal eine isotherme Parametrisierung. Also existiert für jede Minimalfläche lokal eine isotherme Parametrisierung. Nach Satz 5.3.2 existiert daher lokal eine analytische Parametrisierung. Jede Minimalfläche ist daher eine *analytische Fläche*.

**ZWISCHENBEMERKUNG 26:**

(a) Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet. Wir definieren für  $(u^1, u^2) \in U$

$$z := u^1 + i.u^2, \quad U \subset \mathbb{C}.$$

Ferner betrachten wir die Abbildung

$$\phi: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad z \mapsto \phi(z) = \operatorname{Re}\phi(z) + i.\operatorname{Im}\phi(z)$$

mit den Funktionen

$$\operatorname{Re}\phi(z), \operatorname{Im}\phi(z): U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Falls  $d\phi/dz$  existiert und stetig ist, heißt die Funktion  $\phi$  *holomorph*.

Dabei gilt:

$\phi$  ist holomorph  $\Leftrightarrow$  (1)  $\operatorname{Re}\phi$  und  $\operatorname{Im}\phi$  sind  $C^\omega$ .

(2) Nach RIEMANN und CAUCHY (ca. 1850) gilt:

$$(\operatorname{Re}\phi)_{,1} = (\operatorname{Im}\phi)_{,2},$$

$$(\operatorname{Re}\phi)_{,2} = -(\operatorname{Im}\phi)_{,1}.$$

Aus (1) und (2) folgt, daß  $\operatorname{Re}\phi$  und  $\operatorname{Im}\phi$  harmonische Funktionen sind; wir nennen sie *konjugiert harmonisch*.

Ist  $\phi$  holomorph, so ist

$$d\phi/dz = (\operatorname{Re}\phi)_{,1} + i.(\operatorname{Im}\phi)_{,1} = (\operatorname{Re}\phi)_{,1} - i.(\operatorname{Re}\phi)_{,2}.$$

(b) Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes und einfach zusammenhängendes Gebiet.

Ist  $\phi$  holomorph in  $U \subset \mathbb{C}$ , so gilt nach CAUCHY

$$\int_{z_0}^z \phi(\xi) d\xi = \Psi(z),$$

d.h. der Wert des Integrals ist wegunabhängig und nur vom Wert der oberen Grenze allein abhängig;  $\Psi$  ist holomorph.

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

**Satz 5.3.3:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet.  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei ein isothermer  $C^2(U)$ -Weg, und  $f(U)$  sei Minimalfläche. Ferner definieren wir die Funktionen  $\phi^\alpha := f^\alpha_{,1} - i.f^\alpha_{,2}$  ( $\alpha=1,2,3$ ) mit  $\phi^\alpha: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann gilt:

$\phi$  ist holomorph und es ist

$$(1) (\phi^1, \phi^2, \phi^3) \neq (0, 0, 0) \text{ und}$$

$$(2) (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 = 0 \text{ in } U.$$

**Beweis:** Nach Satz 5.3.2 sind die Funktionen  $f^\alpha$  harmonische Funktionen:

$$f^\alpha \in C^\omega \text{ und daher } f^\alpha_{,j} \in C^\omega.$$

Nach Definition gilt dann

$$\operatorname{Re}\phi^\alpha \in C^\omega \text{ und } \operatorname{Im}\phi^\alpha \in C^\omega. (*)$$

Daraus folgt

$$(\operatorname{Re}\phi^\alpha)_{,1} - (\operatorname{Im}\phi^\alpha)_{,2} = f^\alpha_{,11} + f^\alpha_{,22} = 0, (**)$$

da  $f^\alpha$  harmonische Funktion ist. Weiters ist

$$(\operatorname{Re}\phi^\alpha)_{,2} + (\operatorname{Im}\phi^\alpha)_{,1} = f^\alpha_{,12} - f^\alpha_{,21} = 0, (***)$$

da  $f \in C^2$  ist.

Nach ZB 26,a folgt aus (\*), (\*\*) und (\*\*\*) , daß die  $\phi^\alpha$  holomorphe Funktionen sind.

Ad (2): Wir berechnen

$$\sum (\phi^\alpha)^2 = \sum (f^\alpha_{,1} - i \cdot f^\alpha_{,2})^2 = \sum \left[ (f^\alpha_{,1})^2 - (f^\alpha_{,2})^2 - 2i \cdot f^\alpha_{,1} \cdot f^\alpha_{,2} \right].$$

Unter Benützung von  $f=(f^1, f^2, f^3)$  folgt weiter

$$\sum (\phi^\alpha)^2 = f_{,1}^2 - f_{,2}^2 - 2i \cdot f_{,1} \cdot f_{,2} = g_{11} - g_{22} + 2i \cdot g_{12} = 0 ,$$

da eine isotherme Parametrisierung vorausgesetzt wurde.

Ad (1): Jedenfalls gilt die Äquivalenz

$$(\phi^1, \phi^2, \phi^3) \neq (0, 0, 0) \iff \sum |\phi^\alpha|^2 > 0.$$

$$\sum |f^\alpha_{,1} - i \cdot f^\alpha_{,2}|^2 = \sum \left[ (f^\alpha_{,1})^2 + (f^\alpha_{,2})^2 \right] = f_{,1}^2 + f_{,2}^2 = g_{11} + g_{22} > 0 ,$$

da  $f(U)$  regulär parametrisiert wurde.  $\square$

**Satz 5.3.4:** *Es sei  $U$  ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet im  $\mathbb{R}^2$ ;  $U \subset \mathbb{C}$ . Ferner seien  $\phi^\alpha$  ( $\alpha=1,2,3$ ) holomorphe Funktionen mit  $(\phi^1, \phi^2, \phi^3) \neq (0, 0, 0)$  und  $\sum (\phi^\alpha)^2 > 0$  in  $U$ .*

Sei

$$f^\alpha(z) := \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi^\alpha(\xi) d\xi: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\alpha=1,2,3) \quad (z_0 \in U).$$

Dann gilt:

Die Abbildung  $f=(f^1, f^2, f^3): U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist eine isotherme Parameterdarstellung einer Minimalfläche.

**Beweis:** Nach ZB 26,b ist

$$\int_{z_0}^z \phi^\alpha(\xi) d\xi = \Psi^\alpha(z)$$

holomorph.

Definitionsgemäß ist  $f^\alpha := \operatorname{Re} \Psi^\alpha$ .

Mit ZB 26,a folgt

$$d\Psi^\alpha/dz = \phi^\alpha = (\operatorname{Re} \Psi^\alpha)_{,1} - i \cdot (\operatorname{Re} \Psi^\alpha)_{,2} = f^\alpha_{,1} - i \cdot f^\alpha_{,2} .$$

Laut Voraussetzung ist

$$0 = \sum (\phi^\alpha)^2 = \sum (f^\alpha_{,1} - i \cdot f^\alpha_{,2})^2 = g_{11} - g_{22} - 2i \cdot g_{12} .$$

Dies liefert sofort

$$g_{11} = g_{22} , \quad g_{12} = 0 ,$$

sodaß  $f$  ein isothermer Weg ist.

Zum Nachweis, daß  $f(U)$  Minimalfläche ist, benützen wir die nach Satz 5.3.2 bestehende Äquivalenz

$f(U)$  ist Minimalfläche  $\iff f^\alpha$  sind harmonisch und  $f$  ist regulär.

Es ist  $f^\alpha = \operatorname{Re} \Psi^\alpha$  und  $\Psi^\alpha$  ist holomorph. Nach ZB 26,a ist  $f^\alpha$  harmonisch.

Weiters ist laut Voraussetzung  $\sum |\phi^\alpha|^2 > 0$ :

$$\sum |f^\alpha_{,1} - i \cdot f^\alpha_{,2}|^2 = g_{11} + g_{22} > 0 ,$$

woraus  $\Delta > 0$  und die Regularität von  $f$  folgt.  $\square$

**Bem. 5.3.3:** (a) Aus den Sätzen 5.3.3 und 5.3.4 folgt:

Alle Minimalflächen mit einfach zusammenhängenden Parametergebiet sind bekannt, falls alle Tripel holomorpher Funktionen  $\phi^1, \phi^2, \phi^3$  bekannt sind, für die gilt:

$$\sum_{\alpha=1}^3 (\phi^\alpha)^2 = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha=1}^3 |\phi^\alpha|^2 > 0 . \quad (*)$$

**Beispiele:**

Sei  $F: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und nullstellenfrei, aber sonst beliebig. Ferner seien

$$\begin{aligned}\phi^1(z) &:= 1/2 \cdot F(z) \cdot (1-z^2) \\ \phi^2(z) &:= i/2 \cdot F(z) \cdot (1+z^2) \quad (**) \\ \phi^3(z) &:= z \cdot F(z)\end{aligned}$$

Ohne Beweis sei angegeben, daß diese drei Funktionen  $\phi^\alpha$ ,  $\alpha=1,2,3$  die Bedingung (\*) erfüllen.

Mit Satz 5.3.4 kann ein isothermer Weg  $f$  erklärt werden, und  $f(U)$  ist dann Minimalfläche. Mit obigen  $\phi^\alpha$  ist  $f(U)$  frei von Flachpunkten. Andererseits gilt nach K.WEIERSTRASS:

Alle holomorphen Funktionen, die nach Satz 5.3.4 auf eine flachpunkt-freie Minimalfläche führen, sind obige Beispiele (\*\*).

(b) "Pseudogeometrische" Interpretation von Satz 5.3.4 nach Sophus LIE:

Eine *Schiebfläche* im  $\mathbb{R}^3$  gestattet die Darstellung

$$f(u^1, u^2) := g(u^1) + h(u^2)$$

mit den die *Schiebkurven* beschreibenden Funktionen

$$g: I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad h: J \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Mit Satz 5.3.4 gilt

$$f^\alpha = \operatorname{Re} \Psi^\alpha,$$

und  $f^\alpha$  leistet

$$z \in U \subset \mathbb{C} \rightarrow \operatorname{Re} \Psi^\alpha(z) = 1/2 \cdot (\Psi^\alpha(z) + \overline{\Psi^\alpha(\bar{z})}) = 1/2 \cdot \Psi^\alpha(z) + 1/2 \cdot \overline{\Psi^\alpha(\bar{z})},$$

wo die Funktion

$$\overline{\Psi^\alpha}: \bar{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{durch} \quad \overline{\Psi^\alpha}(z) := \overline{\Psi^\alpha(\bar{z})}$$

definiert sei.

Mit

$$g = (g^1, g^2, g^3) : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3,$$

setzen wir

$$g^\alpha(z) := 1/2 \cdot \Psi^\alpha(z) \quad \text{bzw.} \quad \overline{g^\alpha}(\bar{z}) := 1/2 \cdot \overline{\Psi^\alpha(\bar{z})},$$

erhalten also

$$f^\alpha(z) = \operatorname{Re} \Psi^\alpha(z) = g^\alpha(z) + \overline{g^\alpha}(\bar{z}).$$

Damit ist durch

$$g(z) + \overline{g}(\bar{z})$$

eine Schiebfläche im komplexen euklidischen Raum mit konjugiert komplexen Schiebkurven definiert. Dabei ist  $f(U)$  die Menge der reellen Punkte dieser Schiebfläche.

$\Psi$  ist holomorph, folglich auch  $g$ . Der Nachweis, daß auch  $\overline{g}$  holomorph ist, folgt unter Benützung der CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen (ZB 26).

Bekanntlich ist

$$f^\alpha = \operatorname{Re} \Psi^\alpha \quad \text{und} \quad d\Psi^\alpha/dz = \phi^\alpha,$$

wobei die  $\phi^\alpha$  die Bedingung (\*) erfüllen.

Nach Definition ist  $g^\alpha$  zu  $\Psi^\alpha$  proportional, sodaß

$$dg/dz \neq (0,0,0)$$

und daher  $g$  regulär ist.

Wegen (\*) gilt  $\sum (\phi^\alpha)^2 = 0$ , sodaß

$$\|dg/dz\| = 0 \in \mathbb{C}^3$$

folgt. Damit sind die Tangentenvektoren von  $g(U)$  isotrop.

Zusammenfassend gilt nach

S.LIE (1867):

*Eine reelle Minimalfläche ist die Menge der reellen Punkte einer Schiebfläche im komplexen euklidischen Raum, wobei die Schiebkurven konjugiert komplexe isotrope Kurven sind.*

## 5.4 Orientierte geodätische Krümmung einer Flächenkurve

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei eine  $C^2(U)$ -Immersion;  $c_f = f \circ c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei eine  $C^2(I)$ -Immersion. OBdA. gelte  $\| \dot{c}_f \| = 1$  in  $I$ , woraus insbesondere  $\dot{c}_f \ddot{c}_f = 0$  in  $I$  folgt.

**Def. 5.4.1:** Das Vektorfeld

$$S_c: I \rightarrow T_f \text{ mit } \Pi \circ S_c = c_f$$

und

$$S_c(t_0) := N_f(c(t_0)) \times \dot{c}_f(t_0)$$

heißt *Seitenvektorfeld längs  $c_f(I)$* .

Jedenfalls ist der Vektor  $\ddot{c}_f(t_0) = (d\dot{c}_f/dt)(t_0)$  nach Definition 5.4.1 von den Vektoren  $N_{f \circ c}(t_0)$  und  $S_c(t_0)$  linear abhängig.

Aus der Normiertheit von  $c_f$  folgt:  
 $\{N_{f \circ c}, \dot{c}_f, S_c\}$  ist ein ON-Rechtssystem längs  $c_f(I)$ .

Ferner sei an die Namensgebung  $\|(d\dot{c}_f/dt)(t_0)\| = \kappa^G(t_0)$  für den normierten Weg  $c_f$  erinnert.

**Def. 5.4.2:** Sei  $\| \dot{c}_f \| = 1$  in  $I$ . Dann heißt

$$\kappa_g(t_0) \text{ mit } (d\dot{c}_f/dt)(t_0) = \kappa_g(t_0) \cdot S_c(t_0)$$

*orientierte geodätische Krümmung* von  $c_f(I)$  in  $c_f(t_0)$ .

**Bem. 5.4.1:** (a) Wegen  $\|S_c\| = 1$  gilt

$$|\kappa_g| = \|d\dot{c}_f/dt\| = \kappa^G.$$

(b) Wir multiplizieren die definierende Gleichung von  $\kappa_g$  skalar mit  $S_c(t_0)$  und erhalten

$$\kappa_g(t_0) = S_c(t_0) \cdot (d\dot{c}_f/dt)(t_0) = S_c(t_0) \cdot (d\dot{c}_f/dt)(t_0).$$

Mit Def. 5.4.1 folgt weiter

$$\kappa_g(t_0) = \{N_{f \circ c}(t_0) \times \dot{c}_f(t_0)\} \cdot (d\dot{c}_f/dt)(t_0).$$

Mit ZB 8 bleibt

$$\kappa_g(t_0) = \det\{n_{f \circ c}(t_0), \dot{c}_f(t_0), \ddot{c}_f(t_0)\},$$

bzw.

$$\kappa_g(t_0) = \det\{\dot{c}_f(t_0), \ddot{c}_f(t_0), n_{f \circ c}(t_0)\}. \quad (5.4.1)$$

(c) Das Vorzeichen von  $\kappa_g$  hängt vom Durchlaufungssinn von  $c_f(I)$  ab. Verwenden wir nämlich einen gegensinnigen Parameterwechsel, etwa  $t \mapsto -t$ , so leistet dieser  $\dot{c}_f \mapsto -\dot{c}_f$ ,  $\ddot{c}_f \mapsto \ddot{c}_f$  und  $n_f \mapsto -n_f$ , folglich  $\kappa_g \mapsto -\kappa_g$ .

Auch ändert ein gegensinniger Parameterwechsel auf der Fläche  $f(U)$  wegen  $n_f \mapsto -n_f$  das Vorzeichen von  $\kappa_g$ .

### Zusammenhang mit der Parallelverschiebung

Sei  $A_c: I \rightarrow T_f$  ein Parallelfeld längs  $c_f(I)$

mit Anfangsvektor  $A_c(t_0)$ ; oBdA. sei  $\|A_c\|=1$  in  $I$ .

Es existiert ein positiver Drehsinn in der Tangentialebene des Punktes  $c_f(t_0)$ , bestimmt durch die Drehung  $\dot{C}_f(t_0) \rightarrow S_c(t_0)$ . Mit diesem Drehsinn kann das orientierte Winkelmaß

$$\varphi(t_0) := \angle A_c(t_0), \dot{C}_f(t_0)$$

definiert werden.

Da  $A_c(t_0)$  und  $\dot{C}_f(t_0)$  Einheitsvektoren sind, gilt

$$\cos \varphi = A_c \cdot \dot{C}_f ; (1^*)$$

ferner gilt

$$\cos(\varphi + \pi/2) = A_c \cdot S_c = -\sin \varphi . (2^*)$$

Durch (1\*) und (2\*) ist die Lage von  $A_c$  im Tangentialraum eindeutig bestimmt. Deshalb ist  $\varphi$  auch stetig und differenzierbar in  $t$ :

Differenzieren wir (1\*) nach  $t$ , so folgt

$$-\sin \varphi \cdot (d\varphi/dt) = (dA_c/dt) \cdot \dot{C}_f + A_c \cdot \ddot{C}_f ;$$

Da  $\dot{C}_f$  tangential liegt, ist

$$(dA_c/dt) \cdot \dot{C}_f = (DA_c/dt) \cdot \dot{C}_f = 0 \cdot \dot{C}_f ,$$

da  $A_c$  Parallelfeld ist.

Damit ist

$$-\sin \varphi \cdot (d\varphi/dt) = A_c \cdot (d\dot{C}_f/dt) = A_c \cdot (DC_f/dt) = A_c \cdot \kappa_g \cdot S_c = \kappa_g \cdot (-\sin \varphi) ,$$

wobei die letzte Gleichheit mit (2\*) zu begründen ist.

Fall 1: Ist  $\sin \varphi(t_0) \neq 0$ , so darf gekürzt werden und wir erhalten

$$\kappa_g(t_0) = (d\varphi/dt)(t_0) . (5.4.2)$$

Fall 2: Bei  $\sin \varphi(t_0) = 0$  ersetzen wir  $A_c$  durch ein davon verschiedenes Parallelfeld  $B_c$ , und analog läßt sich ein Winkel

$$\Psi := \angle B_c, \dot{C}_f$$

erklären.

Da die Parallelverschiebung ein orthogonaler Vektorraumisomorphismus ist, ist  $\Psi - \varphi = \text{const}$ , ergo  $d\Psi/dt = d\varphi/dt$ , sodaß Formel (5.4.2) auch in diesem Fall gilt.

Bem. 5.4.2: (a) Sei  $c_f$  nicht normiert:  $s$  bezeichne die Bogenlänge und  $t$  einen allgemeinen Parameter. Nach der Kettenregel gilt:

$$d\varphi/dt = d\varphi/ds \cdot ds/dt ,$$

also

$$d\varphi/dt = \|\dot{C}_f\| \cdot \kappa_g . (5.4.3)$$

(b) Speziell:  $f(U)$  sei ebene Fläche und  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  die betrachtete (Flächen)kurve mit  $\|c\|=1$  in  $I$ . Wir wählen ein (elementares) Parallelfeld etwa parallel zur  $x^1$ -Achse. Dann ist folgender Ansatz möglich:

$$\dot{c}(t) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t)) \quad \text{mit } \varphi \in C^1.$$

Differentiation nach  $t$  ergibt

$$\ddot{c}(t) = (-\sin\varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t), \cos\varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t)) .$$

Mit 2.5 folgt

$$\kappa = \det(\dot{c}, \ddot{c}) = \dot{\varphi} = \kappa_g ,$$

wo die letzte Gleichheit mit (5.4.2) zu begründen ist.

(c) Geometrische Interpretation der Parallelverschiebung (Vgl. 5.2, Anw. 3):

$c_f(I)$  sei eine reguläre Flächenkurve auf  $f(U)$  und berühre nirgends eine Schmiegtangente. Nach 5.2, Anwendung 2 existiert die längs  $c_f(I)$  berührende torsale Regelfläche  $\Psi$ .

Ferner sei  $A_c$  ein Parallelfeld längs  $c_f(I)$ .

$\Psi$  gestattet eine lokale Isometrie in die euklidische Ebene, ist also abwickelbar. Dabei kann das Parallelfeld "mitgenommen" werden, wobei dieses in ein elementares Parallelfeld übergeht.

Da der Winkel  $\varphi$  erhalten bleibt, folgt mit (b)

$$\dot{\varphi} = \kappa_g = \kappa ;$$

$\kappa$  bezeichnet die Krümmung der abgewickelten Kurve  $(c_f(I))^V$ .

Man nennt  $\kappa_g$  daher auch **Abwickelkrümmung**.

## 5.5 Die Integralformel von GAUSS-BONNET

**Def. 5.5.1:** Ein Weg  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt *periodisch*, falls  $c(t) = c(t+w)$  mit  $w \in \mathbb{R}$ ,  $w > 0$ .  
Für die Einschränkung  $c|_{[a, b := a+w]}$  gilt  $c(a) = c(b)$ ;  $c|_{[a, b]}$  heißt *geschlossene Kurve*. Ist  $c|_{[a, b]}$  injektiv, so heißt  $c|_{[a, b]}$  *einfach geschlossen*.

**Def. 5.5.2:**  $c|_{[a, b]}$  heißt *stückweise  $C^2$ -Kurve*, falls  $c \in C^0$  und mit  

$$a := a_0 < \dots < a_l < a_{l+1} := b$$
 $c|_{I_j} \in C^2(I_j)$  mit  $I_j := ]a_j, a_{j+1}[$ ,  $j = 0, \dots, l$ .

**Def. 5.5.3:**  $c|_{[a, b]}$  heißt *stückweise regulär*, falls  $c|_{I_j}$  regulär und  
 $\dot{c}^-(a_k) \neq 0$  und  $\dot{c}^+(a_k) \neq 0$  mit  

$$\dot{c}^-(a_k) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{c}(a_k - \varepsilon), \quad \dot{c}^+(a_k) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{c}(a_k + \varepsilon), \quad k = 1, \dots, l.$$

OBdA. sei  $c(a) = c(b)$  keine Ecke von  $c|_{[a, b]}$ .

**Def. 5.5.4:** Eine Punktmenge  $B \subset \mathbb{R}^2$  des  $\mathbb{R}^2$  heißt *positiv orientierter ebener Fundamentalbereich*, falls gilt:  
**(1)**  $B$  ist kompakt und einfach zusammenhängend.  
**(2)**  $\partial B$  sei eine einfach geschlossene stückweise reguläre  $C^2$ -Kurve.  
**(3)**  $\partial B$  sei positiv durchlaufen.

Forderung 3 bedeutet, daß ein positiver Orientierungssinn gegeben sein muß.

Sei  $c(a) \in \partial B$ . "Positiv durchlaufen" soll bedeuten:

Der Durchschnitt einer  $\varepsilon$ -Scheibe um  $c(a)$  mit der positiv gedrehten Halbgeraden  $\dot{c}(a)$  gehört  $B$  an.

**Bem. 5.5.1:** (a) Unter Benützung einer festen Bezugsrichtung definieren wir den *historisch gemessenen Winkel*

$\Delta_a^b$  der orientierten Tangentenvektoren  $\dot{c}(a) = \dot{c}(b)$  in  $c(a) = c(b)$ :

Wir schreiben

$$\Delta_a^b := \vec{\angle}(\dot{c}(a), \dot{c}(b))$$

und meinen damit die Gesamtänderung des Winkels  $\delta$  des Tangentenvektors  $\dot{c}(t)$  gegen eine feste Bezugsrichtung bei einem Umlauf.

$\Delta_a^b$  ist berechenbar durch

$$\Delta_a^b = \sum_{j=0}^l \int_{a_j}^{a_{j+1}} (d\delta/dt) \cdot dt + \sum_{k=1}^l \alpha_k.$$

Dabei wird durch das Integral die Änderung des Winkels in einem Intervall  $I_j$  und durch den zweiten Summanden die Summe aller orientierten Eckenaußenwinkel erfaßt.

Jedenfalls gilt wegen  $\dot{c}(a) = \dot{c}(b)$

$$\Delta_a^b = 2\pi \cdot z,$$

wo  $z \in \mathbb{Z}$  die *Umlaufzahl* ist.

Bem.:  $z$  ist eine topologische Invariante.

Für den Einheitskreis ist  $z=1$ .

**Satz 5.5.1:** *Umlaufsatz von Heinz HOPF (1925):*

*Für jede positiv orientierte einfach geschlossene stückweise reguläre  $C^2$ -Kurve ist  $z=+1$ .*

Beweisidee: Man zeigt:

- (1) Jede solche Kurve ist topologisches Bild eines Kreises.
- (2) Es gibt eine Homotopie der Kurve zum Einheitskreis.
- (3)  $z$  variiert dabei stetig. Für den Kreis ist  $z=1$ ; wegen  $z \in \mathbb{Z}$  muß  $z$  auch für die Kurve  $+1$  sein.  $\square$

**Def. 5.5.5:**  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei eine injektive  $C^3(U)$ -Immersion.  $B \subset U$  sei ein positiv orientierter ebener Fundamentalbereich. Dann heißt  $f(B)$  *positiv orientierter Fundamentalbereich auf  $f(U)$* .

Die Orientierung von  $B$  wird vermöge  $f$  auf  $f(B) \subset f(U)$  übertragen: die Randkurve  $f(\partial B)$  ist orientiert.

Ziel: ("Inhalt" von GAUSS-BONNET)

Wir suchen eine Kopplung zwischen

$$\int_{f(B)} K \cdot d\sigma = \int_B K \cdot \Delta^{\frac{1}{2}} \cdot du^1 du^2$$

und

$$\int_{\partial B} \kappa_g \text{ längs } \partial B.$$

Wir gehen in 3 Schritten vor:

1. Schritt:

Das Bild  $f(\partial B)$  ist eine Flächenkurve  $c_f(R)$  mit  $c_f' = f \circ c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Sei  $A_c: \mathbb{R} \rightarrow T_f$  ein Parallelfeld längs  $f(\partial B) = c_f(R)$ , welches stetig "über die Ecken" von  $f(\partial B)$  erklärt sei: der Bildvektor im Endpunkt eines Kurvenstückes werde als Anfangsvektor für die Parallelverschiebung längs des angrenzenden verwendet.

OBdA. gelte  $\|A_c\|=1$  in  $R$ . Dann bezeichne

$$\Delta\omega := \angle(A_c(a), A_c(b))$$

den historisch gemessenen Winkel zwischen  $A_c(a)$  und  $A_c(b)$ , also die gesamte Richtungsänderung von  $A_c(t)$ , wenn  $t$  von  $a$  nach  $b$  läuft. Zur Messung von  $\Delta\omega$  benützen wir ein Vergleichstangentialvektorfeld, etwa

$$V := F_1/\|F_1\| : U \rightarrow T_f, \text{ also } V_c := V \circ c : R \rightarrow T_f$$

(es muß noch die Unabhängigkeit von  $\Delta\omega$  vom Vergleichsfeld  $V_c$  gezeigt werden).

Wir definieren

$$\omega := \angle(V_c, A_c) \text{ mit } \omega \in C^1(R)$$

und erhalten

$$\cos\omega = V_c \cdot A_c.$$

Differentiation nach  $t$  liefert

$$-\sin\omega \cdot \dot{\omega} = \dot{V}_c \cdot A_c + V_c \cdot \dot{A}_c;$$

Wegen  $V_c \cdot \dot{A}_c = V_c \cdot (dA_c/dt) = V_c \cdot (DA_c/dt) = V_c \cdot 0 = 0$  bleibt

$$-\sin\omega \cdot \dot{\omega} = A_c \cdot \dot{V}_c \quad (*).$$

Unser nächstes Ziel ist es,  $\dot{\omega}$  an jeder Stelle zu berechnen. Denn dann kann in

$$\Delta\omega = \int_a^b \dot{\omega} dt$$

eingesetzt werden.

Sei  $W_c := W \circ c : R \rightarrow T_f$ , wobei  $\{V, W, N_f\}$  ON-Rechtsbasis ist. Dann ist

$$A_c \cdot W_c = \cos(\pi/2 - \omega) = \sin\omega.$$

Dies ergibt mit (\*)

$$-A_c \cdot W_c \cdot \dot{\omega} = A_c \cdot \dot{V}_c,$$

also ist

$$A_c \cdot (W_c \cdot \dot{\omega} + \dot{V}_c) = 0 \in R \text{ für alle } t \in R.$$

$W$  bzw.  $W_c$  ist nach Definition vom ausgewählten Parallelfeld  $A_c$  unabhängig. Durch geeignete Wahl des Anfangsvektors  $A_c(a)$  ( $\Delta\omega$  ist von der Wahl des Anfangsvektors unabhängig) wird in  $T_{c_f(t_0)}$  jeder beliebige Tangentialvektor  $A_c(t_0)$  erreicht, sodaß

$$W_c(t_0) \cdot \dot{\omega}(t_0) + \dot{V}_c(t_0) \in T_{c_f(t_0)}^\perp \quad \forall t_0.$$

Dann liefert aber Skalarmultiplikation mit  $W_c(t_0)$

$$\dot{\omega} = -W_c \cdot \dot{V}_c \quad (**)$$

Damit folgt weiter

$$\dot{\omega} = -W_c \cdot (V_{c,1} \cdot \dot{c}^1 + V_{c,2} \cdot \dot{c}^2) = -\{[(W \cdot V_1) \circ c] \cdot \dot{c}^1 + [(W \cdot V_2) \circ c] \cdot \dot{c}^2\}.$$

Zur Abkürzung erklären wir zwei  $C^1(U)$ -Funktionen  $g, h: U \rightarrow R$  durch

$$g := -W \cdot V_1 \text{ und } h := -W \cdot V_2.$$

#### ZWISCHENBEMERKUNG 27:

Sonderfall des Satzes von STOKES:

$$\int_{\partial B} \{(g \circ c) \cdot \dot{c}^1 + (h \circ c) \cdot \dot{c}^2\} dt = \iint_B \{\partial h / \partial u^1 - \partial g / \partial u^2\} du^1 du^2,$$

wenn B einen orientierten ebenen Fundamentalbereich bezeichnet.

**ENDE DER ZWISCHENBEMERKUNG.**

Nun werden  $\partial g/\partial u^1$  und  $\partial h/\partial u^2$  berechnet:

$$\partial h/\partial u^1 = -\partial(W.V_{,2})/\partial u^1 = -W_{,1} \cdot V_{,2} - W.V_{,21}$$

$$\partial g/\partial u^2 = -\partial(W.V_{,1})/\partial u^2 = -W_{,2} \cdot V_{,1} - W.V_{,12}$$

Zur Berechnung von  $h_{,1}$  und  $g_{,2}$  berücksichtigt man, daß die Ableitungsgleichungen von  $\{V, W, N_f\}$  ein schief-symmetrisches Koeffizientenschema besitzen (vgl. Kurventheorie 2.4); daher ist folgender Ansatz möglich:

$$V_{,j} = 0 + \alpha_j W + \beta_j N_f$$

$$W_{,j} = -\alpha_j V + 0 + \gamma_j N_f \quad \text{für } j=1,2; \alpha_j, \beta_j, \gamma_j: U \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$N_{f,j} = -\beta_j V - \gamma_j W + 0.$$

Daher folgt wegen  $V_{,12} = V_{,21}$ :

$$h_{,1} - g_{,2} = -W_{,1} \cdot V_{,2} + W_{,2} \cdot V_{,1} = -(-\alpha_1 V + \gamma_1 N_f) \cdot (\alpha_2 W + \beta_2 N_f) + (-\alpha_2 V + \gamma_2 N_f) \cdot (\alpha_1 W + \beta_1 N_f)$$

Ausrechnen ergibt

$$h_{,1} - g_{,2} = \gamma_2 \beta_1 - \gamma_1 \beta_2.$$

Andererseits ist

$$N_{f,1} \times N_{f,2} = (-\beta_1 V - \gamma_1 W) \times (-\beta_2 V - \gamma_2 W) = (\gamma_2 \beta_1 - \gamma_1 \beta_2) \cdot N_f. \quad (3^*)$$

Außerdem gelten die Ableitungsgleichungen (4.6.2) von WEINGARTEN:

$$N_{f,j} = -h_j^1 \cdot F_1,$$

sodaß auch gilt:

$$N_{f,1} \times N_{f,2} = (-h_1^1 \cdot F_1 - h_1^2 \cdot F_2) \times (-h_2^1 \cdot F_1 - h_2^2 \cdot F_2) = (h_1^1 \cdot h_2^2 - h_1^2 \cdot h_2^1) \cdot F_1 \times F_2;$$

wegen  $h_1^1 \cdot h_2^2 - h_1^2 \cdot h_2^1 = \det \omega_p = K$  und  $N_f = F_1 \times F_2 / \Delta^{1/2}$  folgt

$$N_{f,1} \times N_{f,2} = K \cdot \Delta^{1/2} \cdot N_f.$$

Ein Vergleich mit (3\*) zeigt

$$h_{,1} - g_{,2} = K \cdot \Delta^{1/2}.$$

Mit ZB 27 folgt:

$$\Delta \omega = \int_a^b \dot{\omega} \cdot dt = \iint_B K \cdot \Delta^{1/2} du^1 du^2. \quad (5.5.1)$$

**Bem. 5.5.2:** (a) Offenbar geht das Vergleichsfeld in obiger Formel nicht ein, sodaß das Ergebnis von der Auswahl des Vergleichsfeldes  $V_c$  nicht abhängt.

(b) Geometrische Deutung von K:

Nach ZB 19 existiert stets ein  $b \in B \setminus \partial B$  mit

$$\iint_B K \cdot \Delta^{1/2} du^1 du^2 = K(b) \cdot \iint_B \Delta^{1/2} du^1 du^2.$$

Andererseits ist

$$O(f(B)) = \iint_B \Delta^{1/2} du^1 du^2.$$

Bildet man den Grenzübergang  $b \rightarrow a$ , zieht also B auf den Punkt a zusammen, so bleibt mit (5.5.1)

$$K(a) = \lim_{B \rightarrow a} [\Delta \omega / O(f(B))] .$$

(c) In 3.3 wurden Integrale auf Flächen studiert:

$F: f(U) \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Funktion auf der Fläche  $f(U) =: \Phi$  und  $\hat{F} = F \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}$  die Koordinatendarstellung von  $F$  bezüglich  $f$ .

Sei

$$\int_{f(B)} F \cdot d\omega = \iint_B \hat{F} \cdot \Delta^{1/2} du^1 du^2$$

das Oberflächenintegral von  $F$  über  $f(B)$ .

Wir setzen speziell  $\hat{F} =: K$  und erklären bei injektivem  $f$  als  $F$  die Abbildung

$$K_\Phi := K \circ f^{-1}: \Phi \rightarrow \mathbb{R}.$$

Mit (5.5.1) erhält man die "Gesamtkrümmung von  $f(B)$ " (GAUSS: CURVATURA INTEGRA)

$$\int_{f(B)} K_\Phi \cdot d\omega = \Delta\omega,$$

### 2. Schritt:

$V_c$  und  $A_c$  seien die Tangentialfelder aus Schritt 1. Neben

$$\omega = \mathfrak{z}(V_c, A_c) \quad \text{und} \quad \varphi = \mathfrak{z}(A_c, \dot{C}_f)$$

erklären wir das Winkelmaß

$$\delta := \omega + \varphi = \mathfrak{z}(V_c, \dot{C}_f).$$

Dabei gilt für die Gesamtänderung  $\Delta_a^b$  von  $\delta$  (historisch gemessen)

$$\Delta_a^b = \Delta\omega + \Delta\varphi = 2\pi z \quad \text{mit } z \in \mathbb{Z},$$

da  $V_c$  über die Fläche und nicht über die Kurve definiert wurde.

Mit (5.4.3) kann  $\Delta\varphi$  berechnet werden:

$$\Delta\varphi = \sum_{j=0}^1 \int_{I_j} \|\dot{C}_f\| \cdot \kappa_g \cdot dt + \sum_{j=1}^1 \alpha_j.$$

Mit (5.5.1) bleibt

$$\iint_B K \cdot \Delta^{1/2} du^1 du^2 + \sum_{j=0}^1 \int_{I_j} \|\dot{C}_f\| \cdot \kappa_g \cdot dt + \sum_{j=1}^1 \alpha_j = 2\pi z, \quad z \in \mathbb{Z}.$$

### 3. Schritt:

Wir zeigen:  $z=1$ .

Bekanntlich gilt für die Gesamtänderung  $\Delta_a^b$  von  $\delta$ :  $\Delta_a^b = 2\pi z$ . Nach Definition von  $\delta$  gilt

$$\cos \delta(t_0) = \frac{\langle V_c(t_0), \dot{C}_f(t_0) \rangle}{\|V_c(t_0)\| \cdot \|\dot{C}_f(t_0)\|}.$$

Wir setzen für die Flächenkoordinaten von  $C_f(t_0)$  kurz  $(\dot{c}^1, \dot{c}^2) =: (w^1, w^2)$ , für die von  $V_c(t_0)$   $(v^1, v^2)$ .

Da  $V_c$  normiert ist, bleibt mit 3.3

$$\cos \delta(t_0) = \frac{\langle v^j \cdot w^k \cdot g_{jk} \circ c(t_0) \rangle}{\langle w^j \cdot w^k \cdot g_{jk} \circ c(t_0) \rangle^{1/2}}.$$

Die folgenden Überlegungen gehen auf eine Idee von L.BIEBERBACH zurück: Wir definieren

$${}^{(\lambda)}g_{jk} := (1-\lambda) \cdot g_{jk} + \lambda \cdot \delta_{jk}, \quad \lambda \in [0,1].$$

Insbesondere folgt für

$$\lambda=0 : {}^{(0)}g_{jk} = g_{jk} \text{ sowie für}$$

$$\lambda=1 : {}^{(1)}g_{jk} = \delta_{jk}, \text{ das ist der euklidische Fall.}$$

Jetzt folgt der Nachweis dafür, daß die  ${}^{(\lambda)}g_{jk}$  Koeffizienten einer symmetrischen positiv definiten Bilinearform sind:

Die Symmetrie folgt unmittelbar aus der Symmetrie der  $g_{jk}$ .

Betrachten wir exemplarisch

$${}^{(\lambda)}g_{11} = (1-\lambda) \cdot g_{11} + \lambda :$$

$g_{11} > 0$ , und die beiden nichtnegativen Koeffizienten  $(1-\lambda)$  und  $\lambda$  können nicht beide gleichzeitig Null werden, sodaß  ${}^{(\lambda)}g_{11} > 0$  folgt. Analog:  ${}^{(\lambda)}g_{22} > 0$ .

Ausrechnen zeigt auch  $\det({}^{(\lambda)}g_{jk}) > 0$ .

Diese Tatsache gestattet es,  $\cos({}^{(\lambda)}\delta)$  zu berechnen; dabei variiert dieser Wert nach Definition von  ${}^{(\lambda)}g_{jk}$  stetig in  $\lambda$ , sodaß auch  ${}^{(\lambda)}\Delta_a^b$  stetig ist in  $\lambda$ .

Alsdann ist auch die zugehörige Umlaufzahl  ${}^{(\lambda)}z$  stetig in  $\lambda$ . Da aber  ${}^{(\lambda)}z \in \mathbb{Z}$  gelten muß, bleibt nur  ${}^{(\lambda)}z = \text{const.}$  Daher genügt es, die Umlaufzahl  ${}^{(1)}z$  für einen ebenen Fundamentalbereich zu ermitteln, und diese ist nach Satz 5.5.1 (HOPF)  $+1$ . Damit ist  $z=1$  für die gegebene Fläche  $f(U)$ .

Wir erhalten die

#### *Integralformel von GAUSS-BONNET*

$$\iint_B K \cdot \Delta^{\frac{1}{2}} du^1 du^2 + \sum_{j=0}^1 \int_{I_j} \| \dot{C}_f \| \cdot \kappa_g \cdot dt + \sum_{j=1}^1 \alpha_j = 2\pi \quad (5.5.2)$$

**Bem. 5.5.3:** (a) Die Formel wurde von Ossian BONNET 1848 für  $K=K_0=\text{const.}$  angegeben. Vermutlich war sie GAUSS schon 1827 bekannt.

(b) Unsere Fassung des Satzes ist nur eine lokale Fassung:  $B$  ist ein orientierter Fundamentalbereich. Die globale Fassung kann durch "Zusammenkleben" des Lokalen erhalten werden.

#### Anwendungen:

(1) Sei  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  eine 2-Sphäre im  $\mathbb{R}^3$  und  $c_f(\mathbb{R})$  eine einfach geschlossene Kurve auf  $S^2$ , die  $S^2$  in zwei "Teile"  $f(B_1)$  und  $f(B_2)$  zerlegt.

Je nachdem, ob  $c_f(I)$  als Randkurve von  $f(B_1)$  oder  $f(B_2)$  aufgefaßt wird, ergibt sich für  $c_f(I)$   $\kappa_g > 0$  bzw.  $\kappa_g < 0$ .

Wir berechnen unter Benützung des Oberflächenintegrals und zweimaliger Anwendung von (5.5.2)

$$\int_{S^2} K \cdot d\sigma = \iint_{B_1} K \cdot \Delta^{\frac{1}{2}} du^1 du^2 + \iint_{B_2} K \cdot \Delta^{\frac{1}{2}} du^1 du^2 = 4\pi,$$

da keine Ecken und daher keine Eckenwinkel auftreten.

Da in obiger Berechnung die Tatsache  $S^2$ -Sphäre nicht eingeht, gilt

$$\int_{S^2} K \cdot d\sigma = 4\pi$$

für jede Fläche vom topologischen Typ der Sphäre.

**Bem.:** Für Flächen vom topologischen Typ des Torus  $T^2$  gilt (o.B.):

$$\int_{T^2} K \cdot d\sigma = 0$$

**(2) Geodätische Zweiecke:**

sind aus maximal zwei Geodätischen aufgebaut.

Man unterscheidet drei Typen (je nachdem, ob 0, 1 oder 2 Eckenaußenwinkel auftreten):

Nach (5.5.2) gilt wegen  $\kappa_g=0$ :

$$\iint_B K \cdot \Delta^{\frac{1}{2}} du^1 du^2 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$$

mit  $-\pi < \alpha_j < \pi$ , da zu einer gegebenen Flächentangente genau eine Geodätische existiert; damit ist  $\alpha_1 + \alpha_2 < 2\pi$ , was

$$\iint_B K \cdot \Delta^{\frac{1}{2}} du^1 du^2 > 0$$

zur Folge hat.

Ist nun etwa für eine Fläche  $K < 0$ , was  $\iint K \cdot \Delta^{\frac{1}{2}} du^1 du^2 < 0$  bewirkt, so folgt aus obiger Überlegung:

*Auf einer Fläche mit  $K < 0$  existieren keine geodätischen Zweiecke, keine Selbstschnitte von geodätischen Linien und keine geschlossenen geodätischen Linien.*

**Beispiel:** Einschaliges Drehhyperboloid  $\Phi$ :

$\Phi$  ist eine Regelfläche mit  $K < 0$ . Der Kehlkreis  $k$  von  $\Phi$  ist eine geschlossene geodätische Linie, da er ein ebener Normalschnitt ist.

Dies bedeutet jedoch keinen Widerspruch zum letzten Ergebnis, da  $k$  keinen orientierten Fundamentalbereich auf der Fläche berandet.

**(3) Geodätische Dreiecke:**

bestehen aus genau drei Geodätischen.

Bezeichnen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  die orientierten Eckenaußenwinkel, so gilt nach (5.5.2) wegen  $\kappa_g=0$

$$\iint_B K \cdot \Delta^{\frac{1}{2}} du^1 du^2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi .$$

Wir ersetzen die Außenwinkel  $\alpha_j$  durch die orientierten Eckeninnenwinkel  $\beta_j$  mit  $\alpha_j + \beta_j = \pi$  ( $j=1,2,3$ ) und finden

$$\iint_B K \cdot \Delta^{\frac{1}{2}} du^1 du^2 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi ;$$

der Wert  $\varepsilon := \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi$  heißt **Exzeß** des Dreiecks. Also bleibt das nach GAUSS benannte

**THEOREMA ELEGANTISSIMUM:**

$$\int_{f(B)} K \cdot d\sigma = \varepsilon \quad (5.5.3)$$

Im Fall  $\varepsilon=0$  ist die Winkelsumme  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi$ , das ist der euklidische Fall. Man sagt:  $\varepsilon$  "mißt" die Abweichung der Winkelsumme vom euklidischen Fall.

Speziell:  $K=K_0=\text{const.}$

Beispiele solcher Flächen sind für  $K_0=0$  die Torsen, für  $K_0>0$  die 2-Sphären im  $R^3$  vom Radius  $R$  ( $K_0=1/R^2$ ) und für  $K_0<0$  die **Pseudosphären** (vgl. Ü30, Ü33): Eine Pseudosphäre ist die Drehfläche einer **Traktrix**; eine Traktrix ist die Schleppkurve einer Geraden: Eine Strecke der Länge  $a$  wird so bewegt, daß ein Endpunkt auf einer Geraden läuft und die Bahn des anderen Endpunktes die Strecke in jeder Lage berührt.

Es gilt (o.B.):

$$K_0 = -1/a^2 = \text{const.}$$

Ferner gilt (o.B.):

**Satz 5.5.2: Satz von F.MINDING:**

Seien  $\phi, \bar{\phi}$  Flächen konstanter Gaußscher Krümmung  $K, \bar{K}$ . Dann gilt:

Es existiert eine lokale Isometrie  $\phi \rightarrow \bar{\phi}$  genau dann, wenn  $K=\bar{K}$ .

**Bem.:** Für  $K, \bar{K}$  nicht konstant folgt aus  $K(p)=\bar{K}(\bar{p})$  nicht die Existenz einer lokalen Isometrie  $\phi \rightarrow \bar{\phi}$  (umgekehrt ist für lokal isometrische Flächen natürlich  $K=\bar{K}$ ).

Damit folgt:

Ist  $K_0=0$  ( $K_0>0, K_0<0$ ), dann ist die innere Geometrie euklidisch (sphärisch, pseudosphärisch) und die Winkelsumme ist  $\pi$  ( $>\pi, <\pi$ ), d.h. der Exzeß ist  $\varepsilon=0$  ( $\varepsilon>0, \varepsilon<0$ ).

Also sind diese drei Geometrien bis auf Isometrien alle Beispiele konstanter GAUSSscher Krümmung.

Gleichung (5.5.3) lautet

$$\iint_B K \cdot \Delta^{\frac{1}{2}} du^1 du^2 = \varepsilon ;$$

setzt man  $K=K_0=\text{const}$ , so bleibt

$$K_0 \cdot O(f(B)) = \varepsilon \quad (5.5.4),$$

d.h. bei gegebener GAUSSscher Krümmung ist durch die Winkel die Oberfläche bereits bestimmt.

**Bem.:** Eine Abbildung  $\alpha: f(U) \rightarrow f(U)$  heißt *lokal konforme Abbildung*, wenn  $\alpha_{*p}$  eine Ähnlichkeit ist.

Dies gestattet mit (5.5.4) folgende Aussage:

*Eine Fläche  $f(U)$  mit  $K_0=\text{const} \neq 0$  gestattet keine von einer Isometrie verschiedene lokal konforme Selbstabbildung.*

#### (4) Sphärische Geometrie:

Als "Punkte" der Geometrie dienen die Punkte einer 2-Sphäre  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , als "Geraden" die Geodätischen, d.h. die Großkreisbögen.

Der *Abstand*  $d(A,B)$  zweier Punkte  $A,B$  wird definiert als euklidische Länge des nicht längeren Großkreisbogens von  $A$  nach  $B$ . Daraus ergibt sich sofort die Einschränkung

$$0 \leq d \leq \pi .$$

Als *Winkel* von zwei Geraden  $a,b$  versteht man den euklidischen Winkel der Durchmesserebenen  $\alpha,\beta$  durch die beiden Flächentangenten in einem Schnittpunkt der Großkreisbögen, woraus

$$0 \leq \alpha(a,b) \leq \pi/2$$

abgeleitet werden kann.

#### Euklidische Bündelgeometrie:

Die Punkte sind die Bündelgeraden, die Geraden sind die Bündelebenen.

Der *Abstand* zweier Punkte ist definiert als euklidischer Winkel zweier Bündelgeraden, der *Winkel* zweier Geraden als euklidischer Winkel der Bündelebenen.

Damit ist die sphärische Geometrie lokal die euklidische Geometrie im Durchmesserbündel.

Global nicht, da es keine Bijektion von  $S^2$  zum Durchmesserbündel gibt.

Nach einer Idee von F.KLEIN benützt man die *Verheftete Halbsphäre*:

Als Punkte nimmt man die Punkte der oberen Halbsphäre sowie identifizierte Äquatorgegenpunkte; letzteres bewirkt, daß die Geraden jetzt geschlossene Kurven sind.

Nun existiert eine Bijektion dieser Halbsphäre zum Durchmesserbündel, d.h. es existiert eine Isometrie des euklidischen Bündels um  $M$  auf die verheftete Halbsphäre. Die euklidische Bündelgeometrie ist damit ein "Modell" der *elliptischen Geometrie*.

Insgesamt gilt:

*Die sphärische Geometrie ist lokal die elliptische Geometrie (global nicht).*

Nun ein anderes Modell für die elliptische Geometrie:  
Wir benützen eine Bijektion des Bündels um  $M$  auf eine Ebene nicht durch  $M$  (Bündelmodell einer projektiven Ebene  $\beta$ ):

Die **Punkte** sind die elementaren Punkte von  $\beta$ , vermehrt um die "Fernpunkte" (= "Schnittpunkte" von  $\beta$  mit Geraden durch  $M$ , die zu  $\beta$  parallel sind).

Die **Geraden** sind die elementaren Geraden vermehrt um die "Ferngerade" als Schnitt von  $\beta$  mit der zu  $\beta$  parallelen Ebene  $\bar{\beta}$  durch  $M$ .

Man gelangt so zum projektiven Modell der elliptischen Geometrie:

Der **Abstand** zweier Punkte ist definiert als euklidischer Winkel der Bündelgeraden, der **Winkel** zweier Geraden als euklidischer Winkel der Bündelebenen.

Nennt man eine Abbildung, die Geodätische in Geodätische überführt, eine **geodätische Abbildung**, so gilt:

**Satz 5.5.3:** *Jede Fläche konstanter positiver GAUSSscher Krümmung gestattet lokal eine geodätische Abbildung in die Ebene.*

**Beweis:** Ist  $K=K_0=\text{const}>0$ , so ist die Fläche nach Satz 5.5.2 (MINDING) isometrisch zur 2-Sphäre  $S^2$ . Ein Großkreisbogen von  $S^2$  liegt in einer Ebene des Durchmesserbündels, deren Schnitt mit  $\beta$  eine Gerade, also eine Geodätische der Ebene  $\beta$  liefert.  $\square$

**(5) Pseudosphärische Geometrie:**

Bei gegebener Pseudosphäre  $f(U)=\Phi$  existiert eine konforme Abbildung  $\alpha$  von  $\Phi$  in die Ebene ( $\mathbb{R}^2$ );  $\alpha$  ist winkeltreu.  $\Phi$  kann durch einen isothermen Weg beschrieben werden, nämlich  $g_{12}=0$ ,

$$g_{11}=g_{22}=1/(u^1)^2 \quad \text{mit } u^1 \geq 1, \quad -\pi < u^2 < \pi.$$

$\alpha$  heißt **POINCARÉsche Abbildung** und ist durch  $f$  mitbestimmt.

Die Bilder der Geodätischen von  $\Phi$  unter  $\alpha$  sind jene Geraden und Kreise, die die  $u^2$ -Achse rechtwinkelig schneiden (sie sind nur soweit zu gebrauchen, als sie in  $U$  liegen).

Benützen wir die "Ausmeßvorschrift"  $g_{jk}=\delta_{jk}/(u^1)^2$  für die ganze Halbebene  $u^1>0$ , so erhalten wir

**POINCARÉsche Halbebene:** Halbebene  $u^1>0$  mit  $g_{jk}=\delta_{jk}/(u^1)^2$ ,

welche ein Modell der **hyperbolischen Geometrie** darstellt:

Die **Punkte** sind Punkte der Halbebene  $u^1>0$ , die **Geraden** sind die Geraden und Kreise, welche die "Randgerade"  $u^1=0$  orthogonal schneiden.

Um den *Abstand* zweier Punkte A,B ermitteln zu können, bestimmt man die eindeutige durch A und B legbare Gerade;  $d(A,B)$  ist dann als Bogenlänge in obiger Metrik zu messen.

Der *Winkel* zweier Geraden wird euklidisch gemessen.

Also gilt nach BELTRAMI:

*Die innere Geometrie einer Pseudosphäre ist lokal hyperbolisch.*

Ein weiteres Modell ist das projektive Modell der hyperbolischen Ebene:

(a) Die POINCARÉsche Halbebene wird an einem Kreis invertiert: dabei geht die Randgerade in einen Kreis  $i$  über. Die Bilder der Geodätischen sind damit die  $i$  orthogonal schneidenden Kreise und Geraden.

(b)  $i$  kann als Äquator einer 2-Sphäre  $S^2$  verwendet werden: Wir projizieren stereographisch aus dem Kugelsüdpol auf  $S^2$ ; dabei gehen die Punkte der Geometrie (das sind die Innenpunkte von  $i$ ) in die Punkte auf der oberen Halbsphäre über. Die Geraden werden auf jene Halbkreise der oberen Halbsphäre abgebildet, die  $i$  rechtwinklig schneiden, d.h. in Ebenen normal zu  $\beta$  liegen (die stereographische Projektion ist bekanntlich winkel- und kreistreu).

(c) Jetzt wird auf  $\beta$  normalprojiziert:

Insgesamt gilt:

Unter dieser Kette von Abbildungen sind die Bilder der Geodätischen der Pseudosphäre die Sehnen von  $i$ :

**Satz 5.5.4:** *Jede Fläche konstanter negativer GAUSSscher Krümmung gestattet lokal eine geodätische Abbildung in die Ebene.*

Insgesamt gilt daher mit Satz 5.5.3 und Satz 5.5.4:

**Satz 5.5.5: Satz von BELTRAMI:**

*Eine reguläre  $C^3$ -Fläche gestattet eine geodätische Abbildung in die Ebene genau dann, wenn  $K=K_0=\text{const.}$*

**Ergebnis:**

Die drei einzigen Geometrien, d.h.

im Fall  $K_0 > 0$  die sphärische Geometrie (lokal elliptisch),

im Fall  $K_0 < 0$  die pseudosphärische Geometrie (lokal hyperbolisch) und  
im Fall  $K_0 = 0$  die euklidische Geometrie  
gestatten eine Realisierung in einem projektiven Modell.  
Die sphärische und die pseudosphärische Geometrie werden auch *nichteuklidische Geometrien* genannt.

Bem.: Diese Geometrien unterscheiden sich in der Existenz von Parallelen.  
Nennen wir zwei Geraden *parallel*, wenn sie gleich sind oder leeren Durchschnitt besitzen, so gilt im Falle der

*Euklidischen Geometrie* das *Euklidische Parallelnaxiom*:

Zu einer Geraden  $g$  und einem Punkt  $P \notin g$  existiert genau eine Gerade  $\bar{g}$  durch  $P$ , die zu  $g$  parallel ist.

In der *Hyperbolischen Geometrie* gibt es unendlich viele Parallele durch  $P$  zu  $g$  (diese füllen einen Winkelraum aus), da es mehr als eine gibt.

In der *Elliptischen Geometrie* schneiden einander je zwei Geraden, sodaß keine Parallele existiert.

Außerdem ist der Abstand zweier Punkte maximal  $\pi$ ; die Geraden sind geschlossene Kurven der Länge  $\pi$ .

Ferner gibt es keinen Zwischenbegriff und keine Anordnung.