

Technische Hochschule Wien
I.Institut für Geometrie

P R O J E K T I V E G E O M E T R I E I

o.Prof.Dr.Dr. Heinrich Brauner

Ausgearbeitet von
Mag.rer.nat. F. Anzböck und
Mag.rer.nat. R. Riesinger

ZUR VERFÜGUNG GESTELLT VON DER **ZENTRALSPARKASSE**

Inhaltsverzeichnis

§ 1.	Projektive Ebenen	
1.1.	Axiomatik	1
1.2.	Projektive Punktebenen und projektive Geradenebenen	6
1.3.	Isomorphe Inzidenzstrukturen, Kollineationen	9
1.4.	Perspektive Kollineationen	13
1.5.	Existenz nicht trivialer perspektiver Kollineationen, Desarguesebenen	20
1.6.	Pappus-Ebenen	26
1.7.	Perspektivitäten, Projektivitäten, Verkürzungssatz	31
1.8.	Projektive Kollineationen	42
1.9.	Der Fundamentalsatz	46
1.10.	Fanoebenen, harmonische Lage, harmonische Homologien und projektive Involutionen	55
1.11.	Korrelationen, Polaritäten	66
1.12.	Algebraisierung der Desarguesebenen	70
§ 2.	Kegelschnitte in Pappusebenen	
2.1.	Definition, Eigenschaften und die Sätze von PASCAL und BRIANCHON	79
2.2.	Projektive Abbildungen eines Punktkegelschnitts auf einen Punktkegelschnitt	89
2.3.	Kegelschnitte und Polarsysteme in klassischen projektiven Ebenen	96
2.4.	Staudtsche Kegelschnitte	102
2.5.	Kegelschnittbüschel, Kegelschnittscharen und Desarguesscher Involutionssatz in klassischen projektiven Ebenen	111
2.6.	Oskulationsbüschel und Hyperoskulationsbüschel in klassischen projektiven Ebenen	123
2.7.	Fixelementfiguren projektiver Kollineationen in Pappusebenen	134
§ 3.	Projektive Räume	
3.1.	Axiomatik	140
3.2.	Ebenen und Hyperebenen in einem projektiven Raum	149
3.3.	Der Satz von Desargues in projektiven Räumen	155
3.4.	Kollineationen in projektiven Räumen	157
3.5.	Desargues-, Pappus- und Fanoräume und ihre Algebraisierung	163

3.6. Perspektivitäten und Projektivitäten in projektiven Räumen	172
3.7. Der Dimensionsbegriff	175
3.8. Der duale projektive Raum	187
3.9. Korrelationen und Polaritäten	203

Bezeichnungen:

- \forall für alle
 \exists es gibt ein
 \exists^* es gibt genau ein
 \Rightarrow hat zur Folge
 \Leftrightarrow ist gleichbedeutend mit
 $:=$ ist definiert als
 \wedge und ($A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind)
 \vee oder ($A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist)
 \in ist Element von
 \subset ist Teilmenge von ($A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$)
 $\not\subset$ ist nicht Teilmenge von
 \emptyset leere Menge
 $\{x \in M \mid E(x)\}$ Menge aller Elemente aus M , die die Eigenschaft E besitzen
 $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$ Differenzmenge
 $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ Durchschnitt
 $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ Vereinigung
 $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ kartesisches Mengenprodukt
 $\alpha: A \rightarrow B$ Abbildung α aus A in B (Zusammensetzung zweier Abbildungen $\alpha: A \rightarrow B, B: B \rightarrow C \dots \alpha\beta: A \rightarrow C$)
 $a \mapsto \alpha a = b \quad b \in B$ ist α -Bild von $a \in A$
◆ Ende eines Beweises

L i t e r a t u r

- J. BLATTNER: Projective plane Geometry.
Holden - Day, San Francisco 1968.
- H. LENZ: Vorlesungen über projektive Geometrie. Akadem. Verlagsgesellschaft, Geest und Portig, Leipzig 1965.
- R. LINGENBERG: Grundlagen der Geometrie I.
HTB 158, Bibliographisches Institut, Mannheim 1969.
- O. TAMASCHKE: Projektive Geometrie I, II.
HTB 829, 838. Bibliographisches Institut,
Mannheim 1969, 1972.
- O. VEBLEN-J. YOUNG: Projective Geometry I, II.
Blaisdell, Publishing Company, London;
Nachdruck 1938 und 1946.

§ 1. Projektive Ebenen

1.1. Axiomatik

Seien $\mathcal{P}(A, B, \dots)$ und $\mathcal{G}(a, b, \dots)$ zwei nicht leere Mengen; die Elemente von \mathcal{P} heißen "Punkte", die Elemente von \mathcal{G} heißen "Geraden".

In der ersten Axiomatik der Elementargeometrie von EUKLID (ca. 300 v. Chr.) wurde der Versuch gemacht zu definieren, was ein Punkt ist: "Ein Punkt ist, was keine Teile hat". Bei uns bleibt der Inhalt dieser Grundbegriffe offen. Diese Idee wurde zuerst 1899 konsequent von D. HILBERT verfolgt. Die Grundelemente der Geometrie sind nicht explizit definiert.

Ferner sei zwischen Punkten und Geraden eine binäre Relation I gegeben, "Inzidenz" genannt. Sind M und N zwei Mengen, so heißt jede Teilmenge des kartesischen Produktes $M \times N$ eine binäre Relation zwischen den Elementen von M und den Elementen von N .

Speziell das kartesische Produkt $\mathcal{P} \times \mathcal{G}$ ist die Menge aller geordneten Paare von Elementen aus \mathcal{P} und \mathcal{G} : $(A, a) \in \mathcal{P} \times \mathcal{G}$.
Es gilt also: $I \subset \mathcal{P} \times \mathcal{G}$, d.h. man weiß, für welche $A \in \mathcal{P}$ und $a \in \mathcal{G}$ gilt: $(A, a) \in I$. Für $(A, a) \in I$ schreiben wir auch $A I a$ und sagen: "Der Punkt A inzidiert mit der Geraden a ", im anderen Fall schreiben wir $A \not I a$.

Zur Veranschaulichung zeichnen wir in der Anschauungsebene der Elementargeometrie, welche zunächst unkritisch aus der Schule übernommen wird. Später muß ihre genaue geometrische Struktur geklärt werden. Dann gilt: "Punkt A " $\circ A$
"Gerade a " $\text{---} a$ "A inzidiert mit a" (A liegt auf a) $\text{---} a$

Das Tripel $\{\mathcal{P}, \mathcal{G}, I\}$ nennen wir eine "Inzidenzstruktur".
Eine Inzidenzstruktur heißt "projektive Ebene" $\pi(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$,
wenn die Relation I die folgenden drei Axiome erfüllt:

i_1 : "Existenz der eindeutigen Verbindungsgeraden": Zu zwei
verschiedenen Punkten soll stets genau eine Gerade
existieren, die mit beiden Punkten inzidiert.
Oder formal: $A, B | \neq, \in \mathcal{P} : \exists! a \in \mathcal{G}$ mit $A I a \wedge B I a$. Wir
schreiben $a=AB$ (auch $a=A.B$).

i_2 : "Existenz des eindeutigen Schnittpunktes": Zu zwei
verschiedenen Geraden soll stets genau ein Punkt
existieren, der mit beiden Geraden inzidiert.
Oder formal: $a, b | \neq, \in \mathcal{G} : \exists! A \in \mathcal{P}$ mit $A I a \wedge A I b$. Wir
schreiben $A=a.b$ (auch $A=a.b$).

e : "Existenz- oder Reichhaltigkeitsaxiom": Es soll
mindestens vier verschiedene Punkte geben, von denen
niemals drei gleichzeitig mit einer Geraden inzidieren.

DEF.1.1: Das Tripel $\{\mathcal{P}, \mathcal{G}, I\}$ heißt eine Inzidenzstruktur;
erfüllt eine Inzidenzstruktur die Axiome i_1, i_2 und e ,
so heißt sie eine projektive Ebene π .

Bemerkungen: (a) Drei Punkte $A, B, C | \in \mathcal{P}$ heißen genau dann
"kollinear", wenn eine Gerade a existiert mit:
 $A I a \wedge B I a \wedge C I a$. Sonst heißen die Punkte nicht kollinear und
bilden ein "Dreieck".

(b) Ein "Viereck" ist eine Menge von vier Punkten,
von denen nie drei kollinear sind. Dann lautet e : Es gibt ein
Viereck, denn es gilt:

Sind drei Punkte A, B, C nicht kollinear, so sind sie paarweise
verschieden. Ist nämlich $A=B$ und $C \neq A \Rightarrow \exists! a=AC$; es gilt also
 $A I a \wedge B I a \wedge C I a$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Ist
dagegen $A=B=C \Rightarrow \exists D | \neq A, B, C \Rightarrow \exists! a=AD$; es gilt also
 $A I a \wedge B I a \wedge C I a$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Folgerungen:

1) Die Anschauungsebene ist keine projektive Ebene, denn
 i_2 ist nicht erfüllt: Zwei verschiedene parallele Geraden
haben keinen Schnittpunkt.

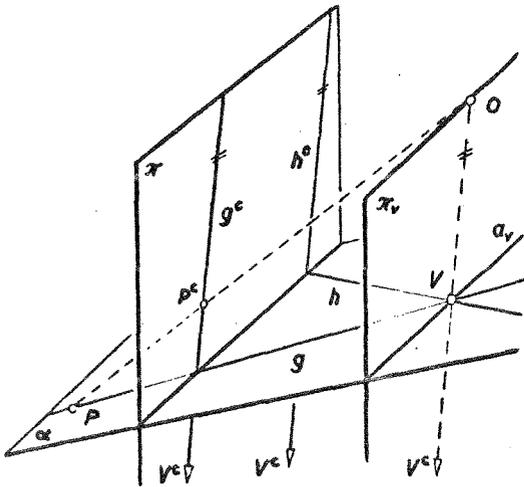
Wir erweitern die Anschauungsebene zur "projektiv abge-
schlossenen Anschauungsebene", indem wir zu den Punkten
und Geraden neue Punkte und Geraden hinzufügen, und das an-
schauliche Inzidieren erweitern durch die beiden Festsetzungen:

(I) Es gibt genau einen Fernpunkt, der mit einer Geraden inzidiert; je zwei verschiedene, parallele Geraden haben genau einen Fernpunkt gemeinsam; verschiedene, nicht parallele Geraden haben keinen gemeinsamen Fernpunkt.

(II) Alle Fernpunkte inzidieren mit genau einer Ferngeraden; kein Nichtfernpunkt inzidiert mit der Ferngeraden.

Es ist sofort einzusehen, daß die projektiv abgeschlossene Anschauungsebene i_1 , i_2 und e erfüllt, also eine projektive Ebene ist. Wir wollen sie im folgenden mit PAE bezeichnen.

Die Festsetzungen (I) und (II) können wie folgt motiviert werden:



Der historische Ausgangspunkt ist die Zentralprojektion einer Ebene α aus einem Auge O nicht in α auf eine zu α nicht parallele Bildebene π nicht durch O . Dabei wird jedem Punkt P aus α der Schnittpunkt des Sehstrahls OP mit der Bildebene π als Bild P^c und jeder Geraden g aus α die Schnittgerade der Sehebene Og mit der Bildebene π als Bild g^c zugewiesen. Aus PIg folgt dabei $P^c I g^c$, aus PIg folgt $P^c I g^c$. Die Abbildung ordnet jedoch nicht allen Punkten und Geraden aus α ein Bild zu: Nicht erklärt sind im Anschauungsraum das Bild eines "Verschwindungspunktes" V auf der Schnittgeraden a_v von α mit der zu π parallelen

"Verschwindungsebene" π_v durch O und das Bild dieser "Verschwindungsgeraden" a_v . Um die Abbildung $\alpha \rightarrow \pi$ ausnahmslos punkttreu, geradentreu und inzidentreu zu machen, muß man der Ebene π als Bild von a_v eine "Ferngerade" a_∞ und als Bilder der Verschwindungspunkte V "Fernpunkte" V^c hinzufügen, die alle mit a_∞ inzidieren. Da a_v nur Verschwindungspunkte trägt, inzidiert kein Nichtfernpunkt aus π mit der Ferngeraden a_∞ . Somit ist (II) motiviert. Jede von a_v verschiedene Gerade besitzt genau einen Verschwindungspunkt; zwei verschiedene Nichtverschwindungsgeraden g, h aus α besitzen genau dann parallele Bildgeraden g^c, h^c , wenn sie denselben Verschwindungspunkt V gemeinsam haben. Damit ist (I) motiviert.

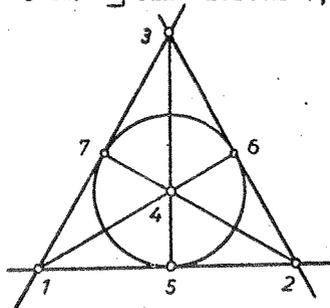
2) Im Anschauungsraum heißt die Menge aller Geraden durch einen festen Punkt "Geradenbündel", die Menge aller Ebenen durch einen festen Punkt "Ebenenbündel". Sei O der Bündelscheitel. Die Geraden durch O sollen "Punkte" heißen, die Ebenen durch O sollen

"Geraden" heißen. Das Inzidieren I sei das elementargeometrische Enthaltensein.

Das Bündel ist mit diesen Festsetzungen eine projektive Ebene.

Bew.: i_1 ist erfüllt, denn es gilt: Zu je zwei verschiedenen Bündelgeraden ("Punkten") gibt es genau eine Bündelebene ("Gerade"), die gleichzeitig beide Bündelgeraden enthält.
 i_2 ist erfüllt, denn je zwei verschiedene Bündelebenen haben genau eine Bündelgerade gemeinsam. Von den Kanten einer quadratischen Pyramide mit der Spitze O liegen nie drei in einer Bündelebene, also ist auch e erfüllt. ◆

3) Die Axiome i_1 , i_2 , e charakterisieren jedoch die PAE bei weitem noch nicht. Es gibt davon "wesentlich verschiedene" projektive Ebenen, z.B. das folgende "Minimalmodell", für welches \mathcal{R} bzw. \mathcal{G} möglichst wenig Punkte bzw. Geraden enthält.



$e \Rightarrow \exists$ ein Viereck 1,2,3,4. Wir wählen etwa die Ecken und den Mittelpunkt eines gleichseitigen Dreiecks zur Veranschaulichung. Nach i_1 müssen noch mindestens $\binom{4}{2}=6$ Geraden existieren, nämlich die Verbindungsgeraden von je zweien der Punkte 1,2,3,4. Wir zeichnen diese als (elementare) Geraden ein und überprüfen i_2 : 12 und 34 sind sicher verschieden, da sonst die Punkte 1,2,3,4 kollinear wären.

$12 \neq 34 \stackrel{i_2}{\Rightarrow} \exists$ Schnittpunkt und, da keiner der bisherigen Punkte in Frage kommt, fügen wir noch einen weiteren Punkt $5 = 12.34$ hinzu. Dieses Verfahren ist zyklisch fortzusetzen und man erhält die Punkte $6 = 23.14$ und $7 = 31.24$. Nun fehlen die nach i_1 existierenden Verbindungsgeraden 56 und 57 und 67. Sprechen wir den Inkreis, der durch 5 und 6 und 7 geht, als neue Gerade an, so ist i_1 für alle Punktepaare erfüllt und man überprüft leicht die Gültigkeit von i_2 . Damit ist das Minimalmodell einer projektiven Inzidenzebene konstruiert; es enthält sieben Punkte und sieben Geraden. Mit jeder Geraden inzidieren drei paarweise verschiedene Punkte und durch jeden Punkt gehen drei paarweise verschiedene Geraden.

Man interpretiere die obige Figur - wie auch Figuren im folgenden - zweckmäßig als Inzidenztabelle. Sie gibt in übersichtlicher Weise an, welche Punkte mit welchen Geraden inzidieren.

Bemerkungen: (a) Das Minimalmodell ist ein Beispiel einer "endlichen" projektiven Ebene, d.h. \mathcal{P} und \mathcal{G} sind dabei endliche Mengen. Die projektive MinimalsEbene ist also von der PAE wesentlich verschieden.

(b) Durch die Existenz des Minimalmodells ist die Widerspruchsfreiheit unseres Axiomensystems bewiesen.

(c) Drei Geraden $a, b, c \in \mathcal{G}$ heißen genau dann "kopunktal", wenn ein Punkt A existiert mit: $A \in a \wedge A \in b \wedge A \in c$. Sonst heißen die Geraden nicht kopunktal und bilden ein "Dreiseit". Wie oben folgt: Sind drei Geraden nicht kopunktal, so sind sie paarweise verschieden.

(d) Ein "Vierseit" ist eine Menge von vier Geraden, von denen nie drei kopunktal sind.

4) In jeder projektiven Ebene existiert ein Vierseit.

Bew.: $e \Rightarrow \exists$ Viereck $1, 2, 3, 4$. $i_1 \Rightarrow \exists 12, 23, 34, 41$. Diese vier Geraden sind paarweise verschieden: $(\text{ind.}) 12=23 \Rightarrow 1, 2, 3 \mid I 12 \Rightarrow 1, 2, 3$ kollinear im Widerspruch zur Vierecksdefinition. Weiters sind nie drei der Geraden $12, 23, 34, 41$ kopunktal: $(\text{ind.}) 12, 23, 34$ sind kopunktal. Da $12 \neq 23$ folgt nach i_2 die Eindeutigkeit des Schnittpunktes $12, 23$, und dieser ist notwendig 2 ; also muß auch 34 durch 2 gehen $\Rightarrow 2, 3, 4$ sind kollinear im Widerspruch zur Vierecksdefinition. ◆

5) Wir geben eine Methode an, die jeder projektiven Ebene $\{\mathcal{P}, \mathcal{G}, I; i_1, i_2, e\}$ eine andere Inzidenzstruktur zuordnet; diese soll "duale Inzidenzstruktur" heißen und wird mit $\{\mathcal{P}^*, \mathcal{G}^*, I^*\}$ bezeichnet. Wir definieren die Zuordnung durch:

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{G}, \mathcal{G}^* = \mathcal{P} \text{ und } I^* \subset \mathcal{P}^* \times \mathcal{G}^* \text{ mit } (a, A) \in I^* \iff (A, a) \in I.$$

Unter einer "Inzidenzaussage" \mathcal{A} versteht man eine Aussage über Punkte, Geraden und Inzidenzen. Man kann \mathcal{A} eine "duale Inzidenzaussage" \mathcal{A}^* zuordnen, indem man die Begriffe Punkt und Gerade unter Beibehaltung der Inzidenzen vertauscht.

Beispiele: i_1^* lautet: Zu zwei verschiedenen Geraden existiert genau ein Punkt, der mit beiden inzidiert, d.h. $i_1^* = i_2$. Ebenso gilt $i_2^* = i_1$.

e^* lautet: Es gibt ein Vierseit, denn dual zu einem Viereck ist eine Menge von vier Geraden, von denen nie drei mit einem Punkt inzidieren.

Die zu einer projektiven Ebene π duale Inzidenzstruktur ist auch eine projektive Ebene ("duale projektive Ebene" π^*).

Bew.: i_1^* , i_2^* , e^* bedeuten die in π richtigen Aussagen i_2 , i_1 und Folgerung 4. \blacklozenge

6) Wenn eine Inzidenzaussage \mathcal{A} für alle projektiven Ebenen wahr ist, so ist auch die duale Aussage \mathcal{A}^* für alle projektiven Ebenen wahr ("Dualitätsprinzip" projektiver Ebenen).

Bew.: Die Aussage \mathcal{A}^* in der projektiven Ebene π ist identisch mit der Aussage \mathcal{A} in π^* . Da \mathcal{A} in allen projektiven Ebenen gilt und π^* nach 5) eine projektive Ebene ist, gilt \mathcal{A} in π^* und damit \mathcal{A}^* in π . \blacklozenge

SATZ 1.1: Die projektiv abgeschlossene Anschauungsebene ist eine projektive Ebene. Das Minimalmodell einer projektiven Ebene enthält genau sieben Punkte und sieben Geraden. Die duale Aussage zu einer für alle projektiven Ebenen wahren Inzidenzaussage ist ebenfalls wahr.

1.2. Projektive Punktebenen und projektive Geradenebenen

Sei $\pi(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ eine projektive Ebene. Die Menge aller Punkte, die mit einer Geraden a inzidieren, nennt man die "Punktreihe \mathcal{P}_a ". $\mathcal{P}_a := \{ P \in \mathcal{P} \mid P I a \}$.

Die Menge aller Geraden, die mit einem Punkt A inzidieren, nennt man das "Geradenbüschel \mathcal{G}_A ". $\mathcal{G}_A := \{ a \in \mathcal{G} \mid A I a \}$.

Punktreihen und Geradenbüschel sollen als "Grundgebilde" in π bezeichnet werden; die Geradenbüschel sind dual zu den Punktreihen.

Im Minimalmodell gilt: Jede Punktreihe und jedes Geradenbüschel besteht aus genau drei Elementen.

Zwischenbemerkung:

Seien $M (\neq \emptyset)$ und N zwei Mengen. Eine **A b b i l d u n g** φ aus M in N ist eine Vorschrift, die gewissen Elementen von M in eindeutiger Weise je ein Element von N zuweist.

M heißt "Definitionsmenge der Abbildung φ ", N heißt "Zielmenge der Abbildung φ ". $D(\varphi)$ sei jene Teilmenge von M, für deren Elemente die Abbildung φ erklärt ist ("Definitionsbereich").

$\forall x \in D(\varphi)$ gilt: $x \mapsto x\varphi \in N$. Gilt speziell $D(\varphi) = M$,

so heißt φ eine globale Abbildung von M; wir sagen auch:

φ ist eine Abbildung von M in N.

Unter dem "Bildbereich im φ (image) von φ " verstehen wir

die Menge aller Bildelemente von φ . Gilt speziell $\text{im } \varphi = N$,

so heißt φ eine "surjektive Abbildung"; wir sagen auch: φ ist eine Abbildung aus M auf N.

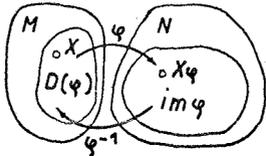
Eine Abbildung $\varphi: M \rightarrow N$ heißt "injektiv", wenn gilt:

$\forall x_1, x_2 \in D(\varphi)$ mit $x_1 \neq x_2 \implies x_1\varphi \neq x_2\varphi$. Zu jeder injektiven Abbildung existiert eine inverse Abbildung $\varphi^{-1}: N \rightarrow M$ mit

$D(\varphi^{-1}) = \text{im } \varphi$:

$\forall y \in \text{im } \varphi \implies \exists *y\varphi^{-1} \in D(\varphi)$ mit $(y\varphi^{-1})\varphi = y$.

Es gilt: $\varphi^{-1}\varphi = \cup_{D(\varphi)} (\cup_{D(\varphi)} \dots \text{Identität auf } D(\varphi))$.



Eine Abbildung $\varphi: M \rightarrow N$ heißt "bijektiv",

wenn sie

(I) global, (II) surjektiv, (III) injektiv ist.

Für eine Bijektion φ gilt:

(a) Zu jeder $x \in M$ existiert genau ein Bild $x\varphi \in N$.

"global"

"Abbildung"

(b) Jedes $y \in N$ ist Bild von genau einem $x \in M$.

"surjektiv"

"injektiv"

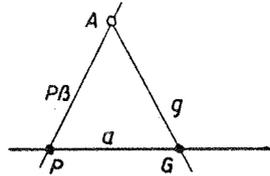
DEF.: Zwei Mengen M, N heißen genau dann "gleichmächtig" ($|M| = |N|$), wenn es eine Bijektion $\varphi: M \rightarrow N$ gibt.

Diese Begriffsbildung ist eine Äquivalenzrelation (RST-Relation), d.h. sie ist reflexiv ($|M| = |M|$), symmetrisch ($|M| = |N| \implies |N| = |M|$) und transitiv $|M| = |N| \wedge |N| = |R| \implies |M| = |R|$.

SATZ 1.2: Je zwei Grundgebilde einer projektiven Ebene sind gleichmächtig. Jedes Grundgebilde enthält mindestens drei Elemente. Die Punkt- und die Geradenmenge einer projektiven Ebene sind gleichmächtig.

Bew.: (1) $A \in \mathcal{R}$, $a \in \mathcal{G}$ mit $A \not\perp a$.

Wir definieren eine Abbildung $\beta: \mathcal{R}_a \rightarrow \mathcal{G}_A$ durch die Vorschrift: $P\beta = AP \quad \forall P \in \mathcal{R}_a$.



Die Gerade AP ist wegen i_1 eindeutig bestimmt, denn aus der Voraussetzung $A \not\perp a$ folgt $P \neq A$; β ist also eine Abbildung und nach Definition global.

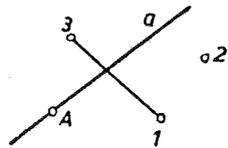
β ist surjektiv: Für jede Gerade $g \in \mathcal{G}_A$ gilt $g \neq a$ wegen $A \not\perp a$; nach i_2 gibt es daher genau einen Schnittpunkt $G := ag$, wobei $G\beta = g$ gilt.

β ist injektiv: Seien $P, Q \neq A \in \mathcal{R}_a$ mit $P\beta = p, Q\beta = q$. (ind.) $p = q \Rightarrow A, P, Q$ sind kollinear und wegen $P \neq Q$ folgt $A \perp PQ = a$: Widerspruch.

β ist also eine Bijektion und daher gilt $|\mathcal{R}_a| = |\mathcal{G}_A|$ unter den Voraussetzungen (1).

(2) $A \in \mathcal{R} \wedge a \in \mathcal{G}$ mit $A \perp a$.

$e \Rightarrow \exists$ Viereck 1,2,3,4. Da nie drei dieser Punkte kollinear sind inzidieren mindestens zwei dieser Punkte nicht mit a , z.B. 1,2



$\Rightarrow A \perp 1 \wedge A \perp 2$. Mindestens eine der Vierecksseiten 13,14 inzidiert nicht mit A (z.B. $A \not\perp 13$), da wegen $13 \neq 14$ nach i_2 genau 1 der eindeutige Schnittpunkt 13.14 ist und daher aus $A \perp 13 \wedge A \perp 14$ folgt $1=A$ im Widerspruch zu $A \perp 1$.

Wir können nun die Aussage von Beweisschritt (1) mehrmals anwenden:

$$|\mathcal{R}_a| \stackrel{!}{=} |\mathcal{G}_2| \stackrel{!}{=} |\mathcal{R}_{13}| \stackrel{!}{=} |\mathcal{G}_A|.$$

(1) $\wedge 2 \not\perp a$ (1) $\wedge 2 \not\perp 13$ (1) $\wedge A \not\perp 13$

Nach (1) und (2) gilt $|\mathcal{R}_a| = |\mathcal{G}_A| \quad \forall A \in \mathcal{R}, \forall a \in \mathcal{G}$.

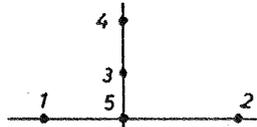
(3) $a, b \neq \emptyset, \in \mathcal{G}$.

$e \Rightarrow \exists 1 \in \mathcal{R}$. Dann gilt nach (1) und (2): $|\mathcal{R}_a| = |\mathcal{G}_1| = |\mathcal{R}_b| \Rightarrow |\mathcal{R}_a| = |\mathcal{R}_b|$.

(4) $A, B \neq \emptyset, \in \mathcal{R}$.

$e \Rightarrow \exists 12 \in \mathcal{G}$; nach (1) und (2) gilt: $|\mathcal{G}_A| = |\mathcal{R}_{12}| = |\mathcal{G}_B| \Rightarrow |\mathcal{G}_A| = |\mathcal{G}_B|$.

(5) Da nach (1) - (4) alle Grundgebilde gleichmächtig sind, genügt es für ein einziges Grundgebilde zu zeigen, daß es mindestens drei verschiedene Elemente enthält. Auf 12 liegt im stets vorhandenen Viereck 1,2,3,4 wegen i_2 noch der Punkt 5 := 12.34, der von 1,2 verschieden ist.



(6) $e \Rightarrow \exists$ ein Dreieck A_1, A_2, A_3 . Wir definieren eine

Abbildung $\gamma: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{G}$ mit

(I) $X \not\perp A_j A_k$ ($j+k$): $X\gamma := (A_1 X \cdot A_2 A_3) \cdot (A_2 X \cdot A_1 A_3) \Rightarrow A_s \not\perp X\gamma$ ($s=1,2,3$)

(II) $X \perp A_j A_k \wedge X \neq A_j, A_k$: $X\gamma := A_1 X$ (j, k, l pw.+) $\Rightarrow X\gamma \neq A_s A_t$ ($s+t$)

(III) $X = A_j$: $X\gamma := A_k A_l$ (j, k, l pw.+))

Man erkennt leicht, daß γ eine Bijektion ist, daher gilt $|\mathcal{R}| = |\mathcal{G}|$.

Bemerkungen : (a) Eine projektive Ebene heißt endlich, wenn eine Punktreihe endlich viele Punkte enthält; ist die Anzahl dieser Punkte $N+1$, so heißt N die "Ordnung der endlichen projektiven Ebene". Eine solche Ebene enthält N^2+N+1 Punkte bzw. Geraden, wie in den Übungen gezeigt wird. Nach Satz 1.2. gilt $N \geq 2$. Wir benützen i.f. die Sprechweise : Gilt eine Aussage für projektive Ebenen mit $N \geq N_0$, so soll dies heißen, daß sie auch für nicht endliche projektive Ebenen richtig ist.

(b) Keine Punktreihe ist leer, d.h. mit jeder Geraden inzidieren Punkte. Es kann also jede Gerade als die Menge der mit ihr inzidenten Punkte interpretiert werden. Ebenso gilt: Jeder Punkt kann als Träger eines Büschels aufgefaßt werden. Wir haben damit zwei neue zueinander duale Auffassungen einer projektiven Ebene:

Gewisse Teilmengen von \mathcal{P} sind als Punktreihen ausgezeichnet:

$$A \perp a \iff A \in \mathcal{P}_a.$$

Man nennt

$\pi = \{\mathcal{P}, \text{System von Teilmengen } \mathcal{P}_a \subset \mathcal{P}, I = \epsilon; i_1, i_2, e\}$ eine "projektive Punktebene".

Jede projektive Ebene kann als projektive Punktebene und als projektive Geradenebene aufgefaßt werden.

Gewisse Teilmengen von \mathcal{G} sind als Geradenbüschel ausgezeichnet: $A \perp a \iff a \in \mathcal{G}_A.$

Man nennt

$\pi^* = \{\mathcal{G}, \text{System von Teilmengen } \mathcal{G}_A \subset \mathcal{G}, I = \epsilon; i_1^*, i_2^*, e^*\}$ eine "projektive Geradenebene".

DEF.1.2: Eine projektive Punktebene ist eine Menge von Punkten, in der ein System von Teilmengen, Punktreihen genannt, ausgezeichnet ist und die Axiome i_1, i_2 und e erfüllt sind, wobei die Inzidenz das Enthaltensein eines Punktes in einer Punktreihe bedeutet. Die dazu duale projektive Geradenebene ist eine Menge von Geraden, in der ein System von Teilmengen, Geradenbüschel genannt, ausgezeichnet ist.

1.3. Isomorphe Inzidenzstrukturen, Kollineationen

Wir wollen eine Klasseneinteilung der projektiven Ebenen gewinnen. Dazu definieren wir allgemeiner für zwei Inzidenzstrukturen $\{\mathcal{P}, \mathcal{G}, I\}$ und $\{\mathcal{P}', \mathcal{G}', I'\}$:

DEF.1.3 a: Ein Paar von Abbildungen $(\varphi_{\mathcal{P}}, \varphi_{\mathcal{G}})$ mit $\varphi_{\mathcal{P}}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ und $\varphi_{\mathcal{G}}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ heißt ein "Isomorphismus" der Inzidenzstruktur $\{\mathcal{P}, \mathcal{G}, I\}$ auf die Inzidenzstruktur $\{\mathcal{P}', \mathcal{G}', I'\}$, wenn gilt:

(I) $\varphi_{\mathcal{P}}$ und $\varphi_{\mathcal{G}}$ sind Bijektionen,

(II) $\forall P \in \mathcal{P} \wedge \forall a \in \mathcal{G}$ mit $P \perp a$ folgt : $P \varphi_{\mathcal{P}} \perp a \varphi_{\mathcal{G}}$,

(III) $\forall P' \in \mathcal{P}' \wedge \forall a' \in \mathcal{G}'$ mit $P' \perp a'$ folgt : $P' \varphi_{\mathcal{P}}^{-1} \perp a' \varphi_{\mathcal{G}}^{-1}$.

Bemerkungen: (a) Isomorph heißt: nicht wesentlich verschieden. Jede wahre bzw. falsche Inzidenzaussage in der ersten Inzidenzstruktur bleibt nach Anwendung des Isomorphismus wahr bzw. falsch.

(b) Falls $\beta = \beta', \mathcal{U} = \mathcal{U}', I = I'$ gilt, so heißt das Paar $(\varphi_\beta, \varphi_{\mathcal{U}})$ ein "Automorphismus". Das Paar $(\iota_\beta, \iota_{\mathcal{U}})$ ($\iota \dots$ Identität) heißt der triviale Automorphismus; er existiert für jede Inzidenzstruktur.

(c) Obiger Isomorphiebegriff ist eine Äquivalenzrelation (RST-Relation) in der Menge aller Inzidenzstrukturen. Eine RST-Relation definiert eine Klasseneinteilung; dabei besteht eine Klasse aus allen zueinander isomorphen Elementen der Menge. Es genügt, von jeder Klasse einen Repräsentanten zu kennen.

Zwischenbemerkung:

Unter einer "Gruppe" versteht man eine nicht leere Menge G und eine Abbildung $\circ: G \times G \rightarrow G$, d.h. $(a, b) (\in G \times G) \mapsto (a, b) \circ =: c (\in G)$

(wir schreiben kurz: $c = a \cdot b$), wobei \circ global auf $G \times G$ ist und die folgenden Gruppenaxiome gelten:

(I) \circ ist assoziativ, d.h. $\forall a, b, c \in G$ gilt: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$,

(II) In G existiert ein "neutrales Element" i mit $i \circ a = a \circ i = a \forall a \in G$,

(III) Zu jedem $a \in G$ existiert ein "inverses Element" $a^{-1} \in G$ mit $a^{-1} \circ a = i$.

Zusatz: Die Gruppe $\{G, \circ\}$ heißt speziell kommutativ (abelsch), wenn gilt: $a \circ b = b \circ a \forall a, b \in G$.

Bemerkung: Wir werden die Operation \circ i.f. meist Produkt nennen.

Die Menge aller Automorphismen einer Inzidenzstruktur ist eine Gruppe bezüglich des Hintereinanderausführens als Gruppenoperation mit dem trivialen Automorphismus als neutralem Element ("Automorphismengruppe von $\{\beta, \mathcal{U}, I\}$ ").

Bew.: (1) $(\varphi_\beta, \varphi_{\mathcal{U}})$ und $(\psi_\beta, \psi_{\mathcal{U}})$ seien zwei Automorphismen der Inzidenzstruktur.

$$\sigma_\beta := \varphi_\beta \circ \psi_\beta \wedge \sigma_{\mathcal{U}} := \varphi_{\mathcal{U}} \circ \psi_{\mathcal{U}}$$

$(\sigma_\beta, \sigma_{\mathcal{U}})$ ist ein Automorphismus (trivial).

(2) Das Hintereinanderausführen ist assoziativ; es gilt nämlich sogar allgemeiner: Das Hintereinanderausführen von Bijektionen $\varphi, \psi, \eta: M \rightarrow M$ ist assoziativ.

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in M \text{ mit } x_1 \varphi =: x_2, x_2 \psi =: x_3, x_3 \eta =: x_4.$$

$$x_1 \varphi \psi = x_2 \psi = x_3 \Rightarrow x_1 (\varphi \psi) \eta = x_3 \eta = x_4.$$

$$x_1 \varphi = x_2 \Rightarrow x_1 \varphi (\psi \eta) = x_2 \psi \eta = x_3 \eta = x_4.$$

$$x_1 (\varphi \psi) \eta = x_4 = x_1 \varphi (\psi \eta); \text{ dies gilt } \forall x_1 \in M \Rightarrow (\varphi \psi) \eta = \varphi (\psi \eta).$$

(3) $(\iota_\beta, \iota_{\mathcal{U}})$ ist das neutrale Element (trivial).

(4) Zu $(\varphi_\beta, \varphi_{\mathcal{U}})$ ist der Automorphismus $(\varphi_\beta^{-1}, \varphi_{\mathcal{U}}^{-1})$ invers.



Seien π bzw. π' zwei projektive Ebenen mit den Punktmengen \mathcal{P} bzw. \mathcal{P}' .

DEF.1.3 b: Eine Abbildung $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ heißt eine Kollineation, wenn gilt:

- (I) α ist bijektiv,
- (II) kollineare Punkte gehen in kollineare Punkte über.

Folgerungen:

1) Ist $(\varphi_{\mathcal{P}}, \varphi_{\mathcal{P}'})$ ein Isomorphismus der projektiven Ebene π auf die projektive Ebene π' , dann ist $\varphi_{\mathcal{P}}$ eine Kollineation.

Bew.: $\varphi_{\mathcal{P}}$ ist nach Definition 1.3.a eine Bijektion. Sind die Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$ kollinear, d.h. $A, B, C \mid I g (g \in \mathcal{G})$, so gilt nach Def.1.3 a: $A \varphi_{\mathcal{P}}, B \varphi_{\mathcal{P}}, C \varphi_{\mathcal{P}} \mid I' g \varphi_{\mathcal{P}}$, d.h. die Bildpunkte sind kollinear. ◆

2) Umkehrung: Jede Kollineation $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ "bestimmt" einen Isomorphismus $\pi \rightarrow \pi'$.

Wir definieren eine Abbildung $\alpha^*: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ durch:

$$g \in \mathcal{G} \wedge g = PQ \text{ mit } P, Q \neq \#, \in \mathcal{P} : g \alpha^* := P \alpha \cdot Q \alpha.$$

Wir müssen zunächst zeigen, daß α^* eine Abbildung $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ ist. Da α injektiv ist, folgt aus $P \neq Q$ stets $P \alpha \neq Q \alpha$; also ist $g \alpha^*$ wegen i_1 eindeutig bestimmt. $g \alpha^*$ ist außerdem unabhängig von der Wahl der Punkte P, Q auf g : Seien $P_1, Q_1 \neq \#, \in \mathcal{P}$ mit $P_1 I g \wedge Q_1 I g$, so sind mit P_1, P, Q auch $P_1 \alpha, P \alpha, Q \alpha$ kollinear und ebenso mit Q_1, P, Q auch $Q_1 \alpha, P \alpha, Q \alpha \implies P_1 \alpha I' P \alpha Q \alpha \wedge Q_1 \alpha I' P \alpha Q \alpha \implies P_1 \alpha Q_1 \alpha = P \alpha Q \alpha$. Damit ist gezeigt, daß die Definition von α^* sinnvoll ist.

(α, α^*) ist ein Isomorphismus $\pi \rightarrow \pi'$.

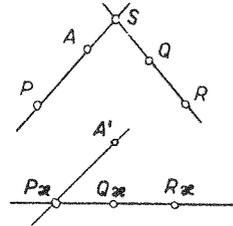
Bew.: (1) α ist eine Bijektion. Außerdem ist (II) in Def.1.3.a nach (II) in Def.1.3.b erfüllt.

(2) Zu drei kollinearen Punkten $P', Q', R' \in \mathcal{P}'$ existieren die Urbilder $P := P' \alpha^{-1}, Q := Q' \alpha^{-1}, R := R' \alpha^{-1}$ in \mathcal{P} , da α eine Bijektion ist. (III) in Def.1.3.a verlangt, daß P, Q, R

kollinear sind. Es genügt, die folgende logisch gleichwertige Behauptung zu zeigen:

Sind $P, Q, R \in \mathcal{P}$ nicht kollinear, so sind auch $P \alpha, Q \alpha, R \alpha \in \mathcal{P}'$ nicht kollinear.

(ind.) Angenommen $P\alpha, Q\alpha, R\alpha$ sind kollinear. Aus P, Q, R nicht kollinear $\Rightarrow P, Q, R$ paarweise verschieden und auch $P\alpha, Q\alpha, R\alpha$ sind paarweise verschieden, da α injektiv ist. Nach e existiert ein Punkt $A' \in \mathcal{P}'$ mit $A' \not\perp P\alpha Q\alpha$
 $\Rightarrow A' \not\perp P\alpha, Q\alpha \wedge A' \alpha^{-1} =: A \not\perp P, Q.$



Nach i_1 sind die Geraden AP und QR eindeutig bestimmt und verschieden, denn P, Q, R sind nicht kollinear. Es existiert also genau ein Schnittpunkt $S := AP \cdot QR$. A, P, S bzw. Q, R, S sind kollinear; daraus folgt nach (II) in Def. 1.3 b: $A', P\alpha, S\alpha$ bzw. $Q\alpha, R\alpha, S\alpha$ sind kollinear $\Rightarrow S\alpha \not\perp A'P\alpha \wedge S\alpha \not\perp Q\alpha R\alpha$. Da wegen $A' \not\perp P\alpha Q\alpha$ die Geraden $A'P\alpha$ und $Q\alpha R\alpha$ verschieden sind, muß nach i_2 ein eindeutiger Schnittpunkt existieren; dieser ist einerseits $P\alpha$ und andererseits $S\alpha$, also $P\alpha = S\alpha$. Dies widerspricht der Injektivität von α , weil wegen $S \not\perp QR \wedge P \not\perp QR$ gilt: $S \neq P$.
 Damit gilt (III) in Def. 1.3 a.

(3) α^* ist eine Bijektion $\mathcal{U} - \mathcal{U}'$:

α^* ist global, denn auf jeder Geraden $g \in \mathcal{U}$ liegen nach Satz 1.2 mindestens drei Punkte, also existieren sicher zwei Punkte $P, Q \not\perp, \in \mathcal{P}$ mit $P \not\perp g \wedge Q \not\perp g$, sodaß mit ihnen $g\alpha^*$ definiert werden kann.

α^* ist surjektiv, denn nach Satz 1.2 gibt es zu jeder Geraden $g' \in \mathcal{U}'$ sicher zwei Punkte $P', Q' \not\perp, \in \mathcal{P}'$ mit $P' \not\perp g' \wedge Q' \not\perp g'$, und zu diesen existieren $P'\alpha^{-1}, Q'\alpha^{-1} \in \mathcal{P}$ mit $P'\alpha^{-1} \not\perp Q'\alpha^{-1}$; die eindeutig bestimmte Gerade $g := P'\alpha^{-1} \cdot Q'\alpha^{-1}$ hat nach Definition von α^* die Gerade g' als Bild:

$$g\alpha^* = (P'\alpha^{-1})\alpha \cdot (Q'\alpha^{-1})\alpha = P'Q' = g'.$$

α^* ist injektiv: $a, b \not\perp, \in \mathcal{U}$ mit $a = PQ$ und $b = PR \Rightarrow P, Q, R$ sind nicht kollinear.

(ind.) $a\alpha^* = b\alpha^* \Rightarrow P\alpha Q\alpha = P\alpha R\alpha \Rightarrow P\alpha, Q\alpha, R\alpha$ sind kollinear: Widerspruch zu Beweisschritt (2). Damit ist auch die Bijektivität von α^* erwiesen. ◆

Bemerkungen: (a) Ausgehend von einer Kollineation $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ ist es möglich, eine bestimmte Abbildung $\alpha^*: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ so zu definieren, daß (α, α^*) ein Isomorphismus ist. Gilt $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ und $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$, so ist (α, α^*) ein Automorphismus. Die Menge aller Automorphismen ist eine Gruppe bezüglich des Hintereinanderausführens. Da ein Automorphismus bereits durch eine Kollineation bestimmt ist und dem Produkt zweier Automorphismen als Kollineation gemäß Folg.1 das Produkt der Kollineationen zugeordnet ist, bildet auch die Menge aller Kollineationen $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ bezüglich des Hintereinanderausführens eine Gruppe, die man mit $P\Gamma L(\mathcal{K})$ bezeichnet und "Kollineationsgruppe" von \mathcal{K} nennt.

(b) Bei der Definition einer Kollineation α haben wir die Punktmenge \mathcal{P} ausgezeichnet und im Beweis haben wir die Abbildung α der Punktebenen durch eine Abbildung α^* der Geradenebenen ergänzt. Man kann auch dual vorgehen:

Eine Abbildung $\alpha^*: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ heißt Kollineation der Geradenebene π auf die Geradenebene π' , wenn sie (I) bijektiv ist und (II) kopunktuale Geraden in kopunktuale Geraden überführt.

Dual zu oben kann man zu α^* eine Abbildung $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ konstruieren:

$$G \in \mathcal{P} \wedge G = pq \text{ mit } p, q \notin \alpha, \alpha \in \mathcal{U} : G\alpha := p\alpha^* . q\alpha^* .$$

Durch Dualisieren des obigen Beweises erkennt man, daß (α, α^*) ein Isomorphismus ist.

Wir werden im folgenden unter Kollineation meist eine Abbildung der Punktebenen gemäß Def.1.3.b verstehen.

SATZ 1.3: Zwei projektive Ebenen sind genau dann isomorph, wenn ihre Punktebenen (ihre Geradenebenen) kollinear sind. Die Menge aller Autokollineationen einer projektiven Ebene π bildet bezüglich des Hintereinanderausführens die Kollineationsgruppe $P\Gamma L(\pi)$ von π .

1.4. Perspektivische Kollineationen

In einer projektiven Ebene sind die Autokollineationen von besonderem Interesse; wir fragen, ob es außer der Identität noch weitere Autokollineationen gibt. Dazu untersuchen wir zunächst einen speziellen Typ von Autokollineationen:

DEF.1.4 a: Eine Autokollineation $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ heißt perspektivische Kollineation, wenn eine Punktreihe elementweise festbleibt.

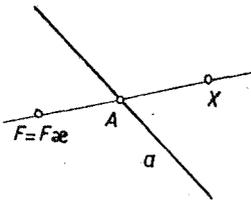
Bemerkung: Ist α eine Selbstabbildung einer Punktmenge, so heißt ein Punkt F mit $F\alpha = F$ ein "Fixpunkt" von α . In der Definition wird also die Existenz einer "Fixpunktgeraden" ("Achse") gefordert, d.h. $\forall A$ mit $A \notin a$ gilt $A\alpha = A$. Wir sagen kurz: "Eine Autokollineation heißt perspektiv, wenn eine Achse existiert". Die Identität ist eine perspektive Kollineation. Gibt es auch nicht triviale perspektive Kollineationen?

Folgerungen (diese ziehen wir zunächst ohne Rücksicht auf die Existenz):

1) Jede perspektive Kollineation besitzt ein "Zentrum" $Z \in \mathcal{P}$, d.h. es existiert ein Punkt Z mit der Eigenschaft: $\forall X \in \mathcal{P}$ sind $X, X\alpha, Z$ kollinear. (Kurz: Existiert eine Achse, so auch ein Zentrum; jede perspektive Kollineation ist eine "Zentralkollineation")

Bew.: Für $\alpha = \text{id}$ ist jeder Punkt Zentrum; wir dürfen also im folgenden $\alpha \neq \text{id}$ voraussetzen. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(a) Vor.: Es existiert ein Fixpunkt $F = F\alpha$ mit $F \notin a$.

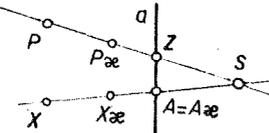


Dann gilt:

- (1) $X = F$: $X = X\alpha \Rightarrow X, X\alpha, F$ sind kollinear.
- (2) $X \in a$: $X = X\alpha \Rightarrow X, X\alpha, F$ sind kollinear.
- (3) $X \neq F \wedge X \notin a$: wegen i_1 ist XF eindeutig bestimmt und wegen $X \notin a$ gilt $XF \neq a$; also ist nach i_2 auch $A := XF.a$ eindeutig bestimmt, und es gilt $A\alpha = A$, da

$A \in a$. Nach Konstruktion sind F, X, A kollinear; da α eine Kollineation ist folgt: $F\alpha = F, X\alpha, A\alpha = A$ sind kollinear. Wegen $F \notin a$ gilt $F \neq A$, also ist FA eindeutig bestimmt, und es gilt: $F \in FA \wedge X \in FA \wedge X\alpha \in FA \Rightarrow F, X, X\alpha$ sind kollinear. Der Fixpunkt F ist also ein Zentrum.

(b) Vor.: Es existieren keine Fixpunkte außerhalb der Achse a .



$P \in \mathcal{P} \wedge P \notin a \Rightarrow P\alpha \neq P$.

$i_1 \Rightarrow]^* PP\alpha$ mit $PP\alpha \neq a$; $i_2 \Rightarrow]^* Z := PP\alpha.a$.

Dann gilt:

- (1) $X = P$: $X\alpha = P\alpha$ und $X, X\alpha, Z$ sind nach Konstruktion kollinear.
- (2) $X \in a$: $X = X\alpha \wedge X, X\alpha, Z$ sind kollinear.
- (3) $X \in PZ \wedge X \neq P \wedge X \notin a$: mit P, X, Z sind auch $P\alpha, X\alpha, Z\alpha = Z$ kollinear; d.h. $X\alpha \in P\alpha Z = PZ$. Man hat damit:
 $X \in PZ \wedge X\alpha \in PZ \Rightarrow X, X\alpha, Z$ sind kollinear.

(4) $X \notin PZ \wedge X \notin a$: $X \neq X\alpha \Rightarrow]^* XX\alpha$ mit $XX\alpha \neq a$. (Ind.): $Z \in XX\alpha \xrightarrow{i_2}$

\square^* $XX\alpha.a := A$ mit $A \neq Z$ und $A\alpha = A$. Nach Voraussetzung gilt $XX\alpha \neq PZ \xrightarrow{i} \square^*$ $S := XX\alpha.PZ$ mit $S \notin a$ (sonst müßte $Z=S=A$ im Widerspruch zur indirekten Beweisannahme gelten).

$S \in PZ \Rightarrow S\alpha \in P\alpha Z\alpha = PZ$ und $S \in XA \Rightarrow S\alpha \in X\alpha A\alpha = XA$.

Da $PZ \neq XA$ gilt, folgt $S\alpha = S$ mit $S \notin a$, was der Annahme im Fall (b) widerspricht. Die indirekte Beweisannahme $Z \notin XX\alpha$ ist also falsch, und daher sind $X, X\alpha, Z$ kollinear.

Der Punkt $Z \in a$ ist also ein Zentrum. ◆

Bemerkung: Geraden durch das Zentrum heißen "Kollineationsstrahlen". Die zu einer perspektiven Kollineation α nach 1.3. gehörende Kollineation $\alpha^*: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ läßt das Geradenbüschel \mathcal{U}_Z elementweise fest; perspektive Kollineation ist also ein selbst-dualer Begriff.

2) Ist $\alpha (\neq \iota)$ eine perspektive Kollineation, so existiert nach Definition mindestens eine Achse a und nach Folgerung 1 existiert mindestens ein Zentrum Z . Wir wollen nun zeigen, daß genau eine Achse und genau ein Zentrum Z existieren. Nach Folgerung 1 Beweisschritt (a) ist jeder Fixpunkt von α , der nicht auf a liegt, notwendig Zentrum von α ; falls α keinen Fixpunkt außerhalb a besitzt, gibt es nach Folgerung 1 Beweisschritt (b) genau ein Zentrum auf a ; es genügt daher zu zeigen, daß eine nicht triviale perspektive Kollineation niemals zwei verschiedene Fixpunkte außerhalb von a besitzt, oder anders formuliert:

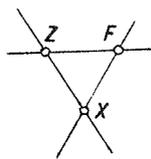
Besitzt eine perspektive Kollineation α einen vom Zentrum Z verschiedenen Fixpunkt, der nicht auf der Achse a liegt, so ist α notwendig die Identität ι .

Bew.: Ist $F \neq Z$, $F \notin a$ ein Fixpunkt von α , d.h. $F\alpha = F$, so ist F nach Folgerung 1 Beweisschritt (a) ein Zentrum.

(1) $X=Z \Rightarrow X\alpha = X$; $X=F \Rightarrow X\alpha = X$.

(2) $\forall X$ mit $X \notin ZF$ gilt, da Z, F Zentren sind:

$X, X\alpha, Z$ sind kollinear $\Rightarrow X\alpha \in XZ$
 $X, X\alpha, F$ sind kollinear $\Rightarrow X\alpha \in XF$ } $\Rightarrow X\alpha = X$,



denn wegen $X \notin ZF$ gilt $XZ \neq XF$.

(3) $X \in ZF \wedge X \neq Z, F$:

Wir benützen einen Punkt $Y \notin ZF$, welcher nach (2) Fixpunkt von α ist, anstelle von F in (2). Da Z und Y Zentren sind und $X \notin ZY$ gilt, folgt nach (2) dann $X\alpha = X$.

(1), (2) und (3) zeigen zusammengefaßt : $X\alpha = X \quad \forall X \in \mathcal{P}$, d.h. $\alpha = \iota$. ◆

Eine nicht triviale perspektive Kollineation besitzt also genau eine Achse und genau ein Zentrum; wir können somit unterscheiden:

DEF.1.4.b: Inzidiert bei einer nicht trivialen perspektiven Kollineation α das Zentrum mit der Achse bzw. nicht mit der Achse, so heißt α eine Elation bzw. eine Homologie. Die Identität ist eine Homologie und eine Elation für beliebiges Zentrum und beliebige Achse.

Bemerkung: Die Menge aller perspektiven Kollineationen mit dem festen Zentrum Z und der festen Achse a bezeichnen wir mit $PGL(Z,a)$. Soll noch angedeutet werden, ob es sich um eine Menge von Homologien bzw. Elationen handelt, so schreiben wir $PGL(Z,a|Z \nmid a)$ bzw. $PGL(Z,a|Z \mid a)$. Die Identität gehört nach Definition jeder solchen Menge an.

Zwischenbemerkung:

Eine Teilmenge einer Gruppe ist bezüglich der gleichen Operation wieder eine Gruppe ("Untergruppe"), wenn
(I) das Produkt von je zwei Elementen der Teilmenge wieder ein Element der Teilmenge ist und
(II) mit jedem Element der Teilmenge das inverse Element auch der Teilmenge angehört.

Kurz: Die Teilmenge muß gegenüber der Gruppenoperation und der Inversenbildung abgeschlossen sein.

3) $PGL(Z,a) \subset PGL(\pi)$ ist bezüglich des Hintereinanderausführens eine Gruppe.

Bew.: Z, a fest; $\alpha, \beta \in PGL(Z,a)$. Nach Satz 1.3 gilt: $\alpha\beta \in PGL(\pi)$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Zu (I): } \forall A \text{ mit } A \mid a \text{ gilt: } A\alpha = A \\ A\beta = A \end{array} \right\} \Rightarrow A\alpha\beta = A\beta = A \Rightarrow$$

$\alpha\beta$ ist perspektive Kollineation mit der Achse a . Da $Y, Y\beta, Z$ kollinear sind, sind mit $Y=X\alpha$ auch $X\alpha, X\alpha\beta, Z$ kollinear, was zusammen mit $X, X\alpha, Z$ kollinear ergibt, daß

$X, X\alpha\beta, Z$ kollinear sind. Damit ist Z auch Zentrum von $\alpha\beta$ und daher $\alpha\beta \in \text{PGL}(Z, a)$.

Zu (II): $\alpha \in \text{PGL}(Z, a) \Rightarrow \exists \alpha^{-1} \in \text{P} \cap \text{L}(a)$. $\forall A$ mit $A \perp a$ gilt:
 $A\alpha = A \Rightarrow A\alpha^{-1} = A \Rightarrow \alpha^{-1}$ ist perspektive Kollineation mit der Achse a . $X, X\alpha, Z$ sind kollinear und mit $X\alpha =: Y$ heißt das: $Y\alpha^{-1}, Y, Z$ sind kollinear $\Rightarrow Z$ ist Zentrum auch von $\alpha^{-1} \Rightarrow \alpha^{-1} \in \text{PGL}(Z, a)$. ◆

4) Festlegung einer perspektiven Kollineation

Gegeben: Zentrum Z , Achse a und $P, P' \in \beta$ mit
 $P, P' \mid \neq Z \wedge P, P' \mid \neq a \wedge P \neq P' \wedge P, P', Z$ kollinear.

Es existiert höchstens eine perspektive Kollineation α mit Zentrum Z , Achse a und $P' = P\alpha$.

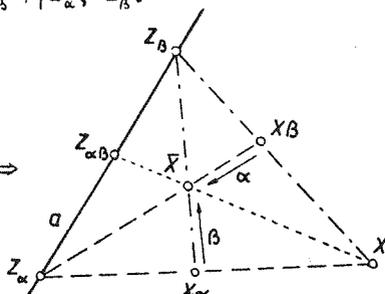
Bew.: Seien $\alpha, \bar{\alpha} \in \text{PGL}(Z, a)$ mit $P\alpha = P'$ bzw. $P\bar{\alpha} = P' \Rightarrow \bar{\alpha}^{-1} \in \text{PGL}(Z, a) \wedge P'\bar{\alpha}^{-1} = P \Rightarrow (P\alpha)\bar{\alpha}^{-1} = P'\bar{\alpha}^{-1} = P$, d.h. P ist Fixpunkt von $\alpha\bar{\alpha}^{-1} \in \text{PGL}(a)$. Nach Folgerung 3 ist jedoch $\text{PGL}(Z, a)$ eine Gruppe, also gilt: $\alpha\bar{\alpha}^{-1} \in \text{PGL}(Z, a)$. Damit besitzt die perspektive Kollineation $\alpha\bar{\alpha}^{-1}$ einen von Z verschiedenen Fixpunkt, nämlich P , der nicht auf der Achse a liegt; daher gilt nach Folgerung 2: $\alpha\bar{\alpha}^{-1} = \iota \Rightarrow \alpha = \bar{\alpha}$. ◆

5) Wir wollen in Folgerung 6 zeigen, daß die Gruppe $\text{PGL}(Z, a \mid Z \perp a)$ aller Elationen mit festem Zentrum Z und fester Achse a unter einer Zusatzvoraussetzung kommutativ ist.

Zusatzvoraussetzung: Es existieren zwei nicht triviale Elationen zur Achse a mit verschiedenen Zentren.

Für zwei solche Elationen $\alpha \in \text{PGL}(Z_\alpha, a \mid Z_\alpha \perp a)$ und $\beta \in \text{PGL}(Z_\beta, a \mid Z_\beta \perp a)$ mit $Z_\alpha \neq Z_\beta$ und $\alpha, \beta \mid \neq \iota$ gilt: $\alpha\beta = \beta\alpha$. Weiters ist $\alpha\beta \in \text{PGL}(Z_{\alpha\beta}, a \mid Z_{\alpha\beta} \perp a)$ mit $Z_{\alpha\beta} \neq Z_\alpha, Z_\beta$.

Bew.: (1) $\forall X$ mit $X \perp a$ gilt:
 $X\alpha = X \wedge X\beta = X \Rightarrow X\alpha\beta = X = X\beta\alpha$.
 $\forall X \in \beta$ mit $X \not\perp a$ gilt:
 X ist kein Fixpunkt von α bzw. $\beta \Rightarrow$
 $X\alpha \neq X \wedge X\alpha \not\perp a \wedge X\beta \neq X \wedge X\beta \not\perp a$.
 $(XZ_\beta)\alpha^* = X\alpha Z_\beta = X\alpha Z_\beta$ (wegen $Z_\beta \perp a$).



$$(XZ_\alpha)\beta^* = X\beta Z_\alpha = X\beta Z_\alpha \quad (\text{wegen } Z_\alpha \text{ I } a).$$

Der Schnittpunkt $\bar{X} := X\beta Z_\alpha \cdot X\alpha Z_\beta$ existiert wegen $Z_\alpha * Z_\beta$ und

$X\beta, X\alpha \mid Z_\alpha Z_\beta = a$ eindeutig. Es gilt:

$$\left. \begin{array}{l} X\alpha, X\alpha\beta, Z_\beta \text{ kollinear} \Rightarrow X\alpha\beta \text{ I } X\alpha Z_\beta \\ X\alpha \text{ I } XZ_\alpha \Rightarrow X\alpha\beta \text{ I } (XZ_\alpha)\beta^* = X\beta Z_\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{X} = X\alpha\beta.$$

Außerdem gilt:

$$\left. \begin{array}{l} X\beta, X\beta\alpha, Z_\alpha \text{ kollinear} \Rightarrow X\beta\alpha \text{ I } X\beta Z_\alpha \\ X\beta \text{ I } XZ_\beta \Rightarrow X\beta\alpha \text{ I } (XZ_\beta)\alpha^* = X\alpha Z_\beta \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{X} = X\beta\alpha.$$

Damit hat man:

$$\forall X \in \mathbb{P}^2 \text{ gilt: } X\alpha\beta = X\beta\alpha \Rightarrow \alpha\beta = \beta\alpha.$$

(2) $\alpha\beta$ ist eine perspektive Kollineation mit Achse a , denn alle Punkte von a sind unter $\alpha\beta$ fix. $\alpha\beta$ ist eine Elation, wenn außerhalb von a keine Fixpunkte existieren:

$$(\text{ind.}) F \notin a \text{ mit } F\alpha\beta = F =: \bar{F} \Rightarrow F = F\alpha \wedge F = F\beta.$$

$$F\alpha, F = F\alpha\beta = \bar{F}, Z_\beta \text{ kollinear} \Rightarrow Z_\beta \text{ I } F\alpha F \wedge Z_\beta \text{ I } a$$

$$F, F\alpha, Z_\alpha \text{ kollinear} \Rightarrow Z_\alpha \text{ I } F\alpha F \wedge Z_\alpha \text{ I } a$$

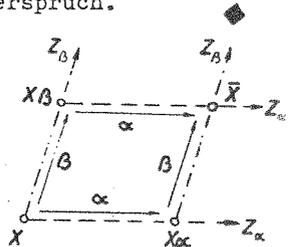
mit $a * \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow$
 $F\alpha F$

$Z_\alpha = Z_\beta$: Widerspruch.

Das Zentrum $Z_{\alpha\beta}$ von $\alpha\beta$ muß so auf a liegen, daß $X, \bar{X}, Z_{\alpha\beta}$ kollinear sind. Es gilt $Z_{\alpha\beta} * \mid Z_\alpha, Z_\beta$:

$$(\text{ind.}) Z_{\alpha\beta} = Z_\alpha \Rightarrow \bar{X} \text{ I } XZ_\alpha \Rightarrow X = X\beta: \text{ Widerspruch.}$$

Bemerkung: Die Kommutativität $\alpha\beta = \beta\alpha$ nennt man "Parallelogrammregel". Ist nämlich a im Sonderfall der PAE die Ferngerade $-\alpha, \beta$ sind dann Translationen, so ist $X, X\alpha, X\beta, \bar{X}$ ein Parallelogramm. $\alpha\beta = \beta\alpha$ bedeutet, daß sich das Parallelogramm schließt: Man gelangt unabhängig von der Reihenfolge durch die beiden Translationen stets in die Ecke \bar{X} .



6) $\text{PGL}(Z, a \mid Z \text{ I } a)$ ist eine kommutative Gruppe, falls die Zusatzvoraussetzung für die Achse a erfüllt ist.

Bew.: $\alpha, \beta \mid \in \text{PGL}(Z, a)$. Nach Folgerung 3 ist $\text{PGL}(Z, a)$ eine Gruppe. Nach Voraussetzung existiert eine Elation $\gamma (* \cup)$ mit der Achse a und dem Zentrum $Z_\gamma (* Z) \Rightarrow \exists \gamma^{-1} \in \text{PGL}(Z_\gamma, a) \wedge \gamma^{-1} * \cup$. Nun gilt:

(1) $\alpha\gamma = \gamma\alpha$ (für $\alpha * \cup$ nach Folgerung 5, für $\alpha = \cup$ trivialerweise).

Aus denselben Gründen gilt:

$$(2) \beta \gamma^{-1} = \gamma^{-1} \beta.$$

Nach Folgerung 5 ist $\alpha \gamma = \gamma \alpha$ eine Elation mit der Achse a , deren Zentrum $Z_{\alpha \gamma}$ von Z und Z_{γ} verschieden ist. Nach Folgerung 5 kommutieren daher $\gamma \alpha$ und β :

$$(3) (\gamma \alpha) \beta = \beta (\gamma \alpha). \text{ Es gilt:}$$

$$\alpha \beta = \alpha \gamma \gamma^{-1} \beta \stackrel{(1)}{=} \gamma \alpha \gamma^{-1} \beta \stackrel{(2)}{=} \gamma \alpha \beta \gamma^{-1} \stackrel{(3)}{=} \beta \gamma \alpha \gamma^{-1} \stackrel{(1)}{=} \beta \alpha \gamma \gamma^{-1} = \beta \alpha$$

7) Die Menge M aller Elationen mit fester Achse a und beliebigem Zentrum Z mit $Z \neq a$ bildet bezüglich des Hintereinanderausführens eine kommutative Gruppe, falls die Zusatzvoraussetzung für die Achse a erfüllt ist.

Bew.: $M \subset P \cap L(\pi)$ muß gegenüber Produkt- und Inversenbildung abgeschlossen sein. $\alpha, \beta \in M$:

Fall 1: α, β haben das gleiche Zentrum Z , d.h. $\alpha, \beta \in \text{PGL}(Z, a) \subset M \Rightarrow \alpha \beta, \alpha^{-1} \in \text{PGL}(Z, a)$ (nach Folgerung 3).

Fall 2: Haben α und β verschiedene Zentren, so ist nach Folgerung 5 $\alpha \beta$ eine Elation mit der Achse a , d.h. $\alpha \beta \in M$.
 $\alpha \in \text{PGL}(Z, a) \subset M \xrightarrow{F.3} \alpha^{-1} \in \text{PGL}(Z, a) \subset M$. Damit ist M eine Gruppe.

Es ist noch zu zeigen, daß die Gruppe M kommutativ ist:

Zu Fall 1: $\alpha, \beta \in \text{PGL}(Z, a)$; nach Folgerung 6 ist $\alpha \beta = \beta \alpha$.

Zu Fall 2: Nach Folgerung 5 gilt $\alpha \beta = \beta \alpha$.

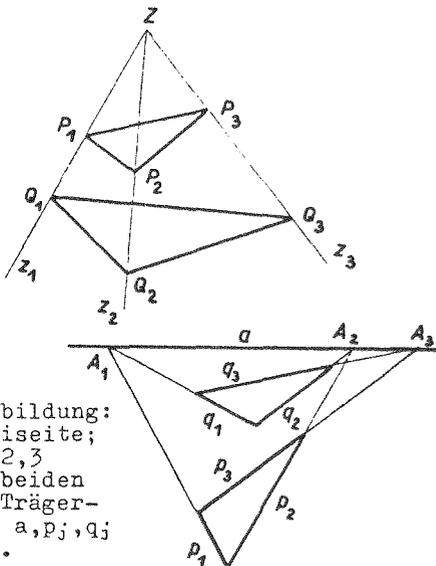
SATZ 1.4: Jede perspektive Kollineation ist eine Zentral-kollineation und besitzt, falls sie nicht trivial ist, außer dem Zentrum Z und den Punkten der Achse a keinen Fixpunkt. Nach Angabe des Zentrums Z und der Achse a existiert höchstens eine perspektive Kollineation, die einen Nichtfixpunkt P in einen mit P und Z kollinearen Nichtfixpunkt P' überführt. Alle (Z, a) -Kollineationen bilden eine Gruppe. Gilt speziell $Z \neq a$ und existieren zwei nicht triviale Elationen mit der Achse a und verschiedenen Zentren, so ist die Gruppe $\text{PGL}(Z, a | Z \neq a)$ kommutativ; in diesem Fall ist die Menge aller Elationen mit der Achse a ebenfalls eine kommutative Gruppe.

1.5. Existenz nicht trivialer perspektiver Kollineationen, Desarguesebenen

Zunächst einige Bezeichnungen :

(a) Drei nicht kollineare Punkte (\Rightarrow paarweise verschieden) P_1, P_2, P_3 heißen ein "Dreieck" (vgl. 1.1).
 Drei nicht kopunktale Geraden (\Rightarrow paarweise verschieden) p_1, p_2, p_3 heißen ein "Dreiseit" (vgl. 1.1).
 Nach i_1 gehört zu jedem Dreieck P_1, P_2, P_3 das Dreiseit $P_1 P_2 =: p_3$, $P_1 P_3 =: p_2$, $P_2 P_3 =: p_1$ und nach i_2 zu jedem Dreiseit ein Dreieck.

(b) P_j bzw. Q_j ($j=1,2,3$) seien zwei Dreiecke; $Z \in \mathcal{P}$.
 Wenn Z, P_j, Q_j für $j=1,2,3$ kollinear sind, so heißen die beiden Dreiecke "Z-perspektiv". Die Trägergeraden der kollinearen Punkte Z, P_j, Q_j bezeichnen wir mit z_j ($j=1,2,3$).
 Bemerkung: Die beteiligten Punkte müssen nicht paarweise verschieden sein.



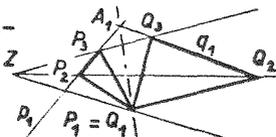
(c) Die zu (b) duale Begriffsbildung:
 p_j, q_j ($j=1,2,3$) seien zwei Dreiseite;
 $a \in \mathcal{Q}$. Wenn a, p_j, q_j für $j=1,2,3$ kopunktal sind, so heißen die beiden Dreiseite "a-perspektiv". Die Trägerpunkte der kopunktalen Geraden a, p_j, q_j bezeichnen wir mit A_j ($j=1,2,3$).

DEF. 1.5: Eine projektive Ebene heißt eine "DESARGUES-Ebene" π_{De} , wenn gilt: Zu je zwei Dreiecken, die Z-perspektiv bezüglich eines Punktes Z liegen, existiert eine Gerade a so, daß die zugehörigen Dreiseite a-perspektiv liegen.

Bemerkungen: (a) Folgt für zwei Z-perspektive Dreiecke die a-Perspektivität, so sagt man kurz: Für die beiden Dreiecke gilt der Satz von Desargues. Def. 1.5 lautet damit kurz:
 In π_{De} gilt der Satz von Desargues "überall". Diese Aussage wird i.f. mit \mathcal{D} bezeichnet. Die Existenz von Desarguesebenen ist zunächst offen.

(b) Die Z-Perspektivität von zwei Dreiecken zieht die a-Perspektivität der zugehörigen Dreiseite stets nach sich, wenn die sieben Punkte $P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3; Z$ oder die drei Geraden z_1, z_2, z_3 nicht paarweise verschieden sind.

Bew.: (1) Mindestens einmal stimmen zwei Punkte mit gleichem Index überein, z.B. $P_1 = Q_1$.
 $P_1 \cap P_1 P_2 \wedge P_1 \cap Q_1 Q_2, P_1 \cap P_1 P_3 \wedge P_1 \cap Q_1 Q_3$.

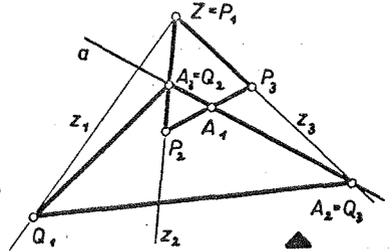


Setzt man $P_1 = A_2 = A_3$, so existiert stets eine Gerade a mit $A_1, A_2 = A_3 \mid I a$.

(2) Gilt $P_j \neq Q_j$ ($j = 1, 2, 3$) und stimmen z.B. z_1 und z_2 überein, so kann als A_3 jeder Punkt von $P_1 P_2 = Q_1 Q_2 = z_1 = z_2$ gewählt werden, und es existiert stets eine Gerade a mit $A_j \mid I a$ ($j = 1, 2, 3$).

(3) Gilt $P_j \neq Q_j$ und $z_j \neq z_k$ ($j, k = 1, 2, 3 \wedge j \neq k$) und stimmt Z mit einem Dreieckspunkt überein, z.B. $Z = P_1$, so gilt $A_3 = P_1 P_2 \cdot Q_1 Q_2 = Q_2$, $A_2 = P_1 P_3 \cdot Q_1 Q_3 = Q_3$. Wegen $A_1 \mid I Q_2 Q_3$ ist $a = Q_2 Q_3$.

(4) Gilt $P_j \neq Q_j, z_j \neq z_k, Z \neq P_j, Q_j$ ($j, k = 1, 2, 3 \wedge j \neq k$) und stimmen zwei nicht zugeordnete Dreieckspunkte überein, z.B. $P_1 = Q_2$, so folgt wegen $P_1 \mid I z_1, Q_2 \mid I z_2, z_1 \neq z_2$ dann $P_1 = Q_2 = z_1 z_2 = Z$ im Widerspruch zur Voraussetzung.



(c) Gilt der Satz von Desargues für je zwei Dreiecke, bei denen die Punkte A_1, A_3, Z nicht kollinear sind, so gilt er auch für je zwei Dreiecke, bei denen A_1, A_3, Z kollinear sind (vgl. Übungen).

(d) Da für $N = 2$ keine nicht triviale Desarguesfigur existiert, ist diese projektive Ebene eine Desarguesebene.

(e) Die Dualisierung des Satzes von Desargues bzw. von Def. 1.5 lautet: Sind zwei Dreiecke a -perspektiv, so existiert ein Punkt Z so, daß die zugehörigen Dreiecke Z -perspektiv sind. Die Dualisierung des Satzes von Desargues (De^*) ist also die Umkehrung des Satzes. In den zu (b) dualen Sonderfällen ist die Umkehrung des Satzes von Desargues trivial. Wir setzen daher i.f. voraus: p_j, q_j, a paarweise verschieden $\wedge A_j \neq A_k$ ($j, k = 1, 2, 3 \wedge j \neq k$).

Folgerungen (ohne Rücksicht auf die Existenz von Desarguesebenen):

1) In einer Desarguesebene π_p gilt die Umkehrung des Satzes von Desargues.

Bemerkung: Die Umkehrung ist der duale Satz, dessen Gültigkeit aber nicht trivial ist! Nur Inzidenzaussagen, die in allen projektiven Ebenen gültig sind, bleiben nach Dualisierung wahr (vgl. 1.1); nicht jede projektive Ebene ist aber eine Desarguesebene (vgl. Folgerung 4).

Bew.: Die Dreiecke p_j und q_j seien a -perspektiv. Wir setzen

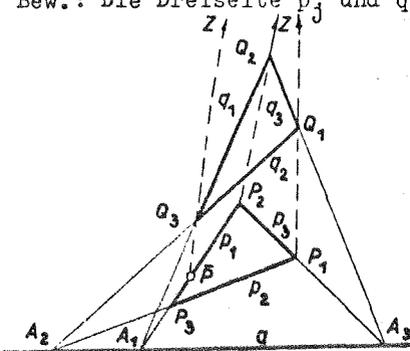
voraus, daß ein nichttrivialer Fall vorliegt: p_j, q_j, a pw. $\neq, A_j \neq A_k$.

Wegen $A_j \neq A_k$ gilt $P_j \neq Q_j$ und wegen $p_j \neq q_j \Rightarrow \exists Z = P_1 Q_1 \cdot P_2 Q_2$.

Die Behauptung lautet also:

Z, P_3, Q_3 sind kollinear, was für $Z = P_3$ oder $Z = Q_3$ trivial ist. In

jedem anderen Fall existiert ein Punkt \bar{P} mit $\bar{P} \mid I P_2 P_3 \wedge \bar{P} \mid I Q_2 Q_3 \wedge \bar{P} \mid I P_2 \Rightarrow \bar{P}, P_1, P_2$ sind nicht kollinear.



Die Dreiecke P_1, P_2, \bar{P} und Q_1, Q_2, Q_3 sind Z-perspektiv nach Konstruktion von Z und \bar{P} . Da nach Voraussetzung eine

Desarguesebene vorliegt, existiert eine Gerade \bar{a} mit:

$$\bar{a}, P_1P_2, Q_1Q_2 \text{ kopunktal} \Rightarrow A_3 \in \bar{a} \Rightarrow a = \bar{a} (A_1 \neq A_3 \text{ nach VS.}).$$

$$\bar{a}, \bar{P}P_2, Q_2Q_3 \text{ kopunktal} \Rightarrow A_1 \in \bar{a}$$

$$\bar{a}, P_1\bar{P}, Q_1Q_3 \text{ kopunktal.}$$

Da Q_1Q_3 die Gerade a in A_2 schneidet, muß $A_2 \in P_1\bar{P}$ wegen i_2 gelten.

Für \bar{P} gilt somit :

$$\left. \begin{array}{l} A_2, P_1, \bar{P} \text{ kollinear} \Rightarrow \bar{P} \in P_2 \\ P_2, P_3, \bar{P} \text{ kollinear} \Rightarrow \bar{P} \in P_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{P} = P_1P_2 = P_3.$$

Also sind auch P_3, Q_3, Z kollinear und die Dreiecke P_j und Q_j daher Z-perspektiv. ◆

Bemerkung: (a) Eine Inzidenzaussage, in der das "Schließen" einer bestimmten Figur behauptet wird, heißt ein Schließungssatz. Der Satz von Desargues ist ein Schließungssatz.

(b) Ist eine Inzidenzaussage in jeder Desarguesebene richtig, so ist auch die duale Aussage in jeder Desarguesebene richtig. In der Menge der Desarguesebenen gilt das Dualitätsprinzip.

Bew.: Gelten in einer Inzidenzstruktur die Axiome i_1, i_2, e und De , so gilt auch De^* . In der zur Desarguesschen Ebene dualen projektiven Ebene gilt also De , d.h.: Zu einer Desarguesebene ist auch die duale Inzidenzstruktur eine Desarguesebene. Der weitere Beweis ist wörtlich gleich mit jenem von 1.1, Folg.6, nur ist statt "projektive Ebene π " bzw. " π^* " nun "Desarguesebene π " bzw. " π^* " zu sagen. ◆

2) Existiert in einer projektiven Ebene π "jede mögliche" perspektive Kollineation, so ist π eine Desarguesebene.

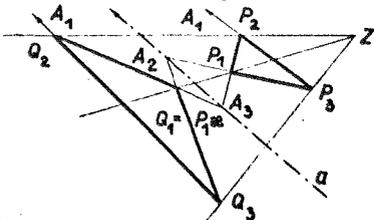
"Jede mögliche" soll heißen: Zu jeder Angabe Z, a, P, P' mit $P, P' \notin Z, \exists a \cap P \neq P' \cap P, P', Z$ kollinear gibt es eine perspektive Kollineation α mit Z als Zentrum, a als Achse und $P\alpha = P'$. Wegen 1.4, Folgerung 4 ist α automatisch eindeutig festgelegt.

Bew.: Es genügt nicht triviale Z-perspektive Lage zu betrachten. Für die gesuchte Gerade a gilt: $P_1P_2 \cdot Q_1Q_2 =: A_3 \cap a \wedge$

$P_1P_3 \cdot Q_1Q_3 =: A_2 \cap a$. Die Behauptung des Satzes von

Desargues lautet:

$$P_2P_3 \cdot Q_2Q_3 =: A_1 \cap a.$$



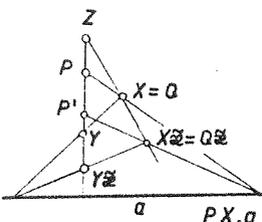
Nach Voraussetzung existiert in π genau eine perspektive Kollineation mit Zentrum Z , Achse a und $P_1\alpha = Q_1$. Wir wollen $P_2\alpha$ und $P_3\alpha$ konstruieren. Es müssen $Z, P_2, P_2\alpha$ kollinear sein; da P_1, P_2, A_3 kollinear sind, müssen auch $P_1\alpha = Q_1, P_2\alpha, A_3\alpha = A_3$ kollinear sein $\Rightarrow P_2\alpha = Q_2$. Analog folgert man $P_3\alpha = Q_3$.

Für die perspektive Kollineation α gilt also $P_j\alpha = Q_j (j=1,2,3)$, und daher gilt für die Dreiseite: $p_j\alpha^* = q_j (j=1,2,3)$. Insbesondere ist $(P_2P_3)\alpha^* = P_2\alpha.P_3\alpha = Q_2Q_3$, also $P_2P_3.Q_2Q_3 = A_1 I a$, da die perspektive Kollineation α die Achse a besitzt.

Bemerkung: Wegen 1.5, Bem.(c) gilt sogar: Existiert in einer projektiven Ebene π jede mögliche Homologie, so ist π eine Desarguesebene.

3) In einer Desarguesebene existiert "jede mögliche" perspektive Kollineation (Umkehrung von 2)).

Bew.: (1) Gegeben Z, a, P, P' (mit den Voraussetzungen von 2)).



Wir definieren eine Abbildung $\tilde{\alpha}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ so, daß dabei die Gesetze einer perspektiven Kollineation benützt werden:

$$(\alpha) X = Z : X\tilde{\alpha} := X$$

$$(\beta) X = P : X\tilde{\alpha} := P'$$

$$(\gamma) X \text{ mit } X I a : X\tilde{\alpha} := X$$

$$(\delta) X \text{ mit } X \not I a \wedge X \neq Z \wedge X \not I ZP :$$

$$X\tilde{\alpha} := ZX. [(PX.a).P']$$

Nach den Gesetzen einer perspektiven Kollineation gilt nämlich notwendig $Z, X, X\tilde{\alpha}$ kollinear, und aus $A := PX.a, P, X$ kollinear folgt notwendig $A\tilde{\alpha} = A, P\tilde{\alpha} = P', X\tilde{\alpha}$ kollinear.

$$(\epsilon) Y \text{ mit } Y \not I a \wedge Y \neq Z \wedge Y I ZP :$$

Sei Q ein fester Punkt, der die Voraussetzungen von (δ) erfüllt, so ist $Q\tilde{\alpha}$ erklärt. Wir definieren nun $Y\tilde{\alpha}$ so wie in (δ) $X\tilde{\alpha}$, indem wir P bzw. P' durch Q bzw. $Q\tilde{\alpha}$ ersetzen (Für alle Y auf ZP wählen wir denselben Punkt Q).

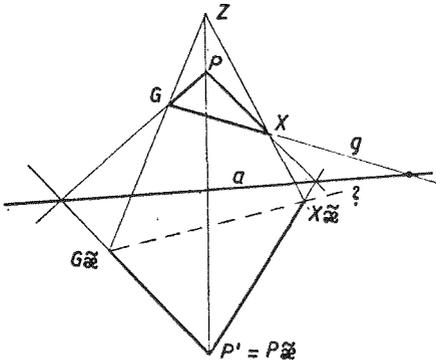
Die so erklärte Abbildung $\tilde{\alpha}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ist global. $\tilde{\alpha}$ ist bijektiv: $\forall X' \in \mathcal{P}$ gilt: $\exists^* X \in \mathcal{P}$ mit $X\tilde{\alpha} = X'$; man kann nämlich die obigen Konstruktionsvorschriften umkehren, und sie führen in eindeutiger Weise auf den Ursprung X .

$\tilde{\alpha}$ erhält kollineare Lage, d.h. $\forall g \in \mathcal{G}$ ist $\{X\tilde{\alpha} | X I g\}$ eine Punktreihe. Für $g=a$ und $g I Z$ ist dies nach Definition von $\tilde{\alpha}$ trivial.

$$g \text{ mit } g I P \wedge g \not I Z \text{ (z.B. für } PX): X\tilde{\alpha} I [(PX.a).P']$$

nach Definition.

g mit $g \neq a \wedge Z \notin g \wedge P \notin g$:



I.a. erhält $\tilde{\alpha}$ kollineare Lage von Punkten auf solchen Geraden nicht. Gilt jedoch der Satz von Desargues, so erhält $\tilde{\alpha}$ auch für Punkte von solchen Geraden kollineare Lage:

Ist $G \in g \wedge G \notin ZP$ (o.B.d.A.) und $X \in g$, so lautet die Behauptung:
 $\forall X$ mit $X \in g$ gilt: $G\tilde{\alpha}, X\tilde{\alpha}, g.a$ sind kollinear.

G, P, X und $G\tilde{\alpha}, P\tilde{\alpha}, X\tilde{\alpha}$ sind

Z -perspektive Dreiecke. Da nach

Voraussetzung der Satz von Desargues gilt, sind die zugehörigen Dreiseite $\tilde{\alpha}$ -perspektiv:

$$\left. \begin{array}{l} PG.P\tilde{\alpha}G\tilde{\alpha} \in \tilde{a} \\ PX.P\tilde{\alpha}X\tilde{\alpha} \in \tilde{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{a} = a \text{ (da die beiden Punkte auf } a \text{ nach den Voraussetzungen verschieden sind)}$$

$$\Rightarrow GX.G\tilde{\alpha}X\tilde{\alpha} \in a \Rightarrow G\tilde{\alpha}, X\tilde{\alpha}, g.a \text{ sind kollinear.}$$

Damit ist $\tilde{\alpha}$ eine bijektive Abbildung $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, welche kollineare Lage erhält und \mathbb{P}_a elementweise festläßt. $\tilde{\alpha}$ ist also eine

perspektive Kollineation und paßt nach Konstruktion in die Angabe.

Bemerkungen: (a) $\tilde{\alpha}$ ist nach Satz 1.4 die einzige perspektive Kollineation, die in die Angabe paßt, d.h. $\tilde{\alpha}$ ist insbesondere unabhängig von der Auswahl von Q im Fall (e).

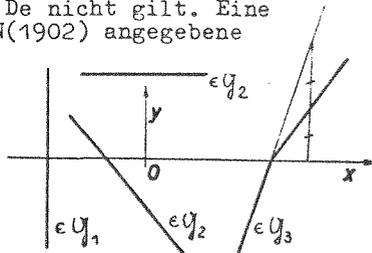
(b) Nach den Folgerungen 2 und 3 ist der Satz von Desargues ein Kennzeichen dafür, daß "jede mögliche" perspektive Kollineation existiert.

(c) Nach Folg.2, Bem. und Folg.3 gilt: Existiert in einer projektiven Ebene jede mögliche Homologie, so existiert auch jede mögliche Elation. Umgekehrt folgt aus der Existenz jeder möglichen Elation nicht die Existenz jeder möglichen Homologie. Projektive Ebenen, in denen jede mögliche Elation existiert, heißen MOUFANG-Ebenen.

4) Der Satz von Desargues ist keine Folge der Inzidenzaxiome i_1, i_2, e . Es existieren nichtdesarguessche projektive Ebenen.

Bew.: Wenn De aus i_1, i_2, e ableitbar wäre, müßte er in jeder projektiven Ebene gelten. Es genügt also eine projektive Ebene anzugeben, in dem De nicht gilt. Eine solche ist z.B. die von F.R.MOULTON(1902) angegebene projektive Ebene.

(1) Beschreibung der MOULTON-Ebene:
 Sei $\{0, x, y\}$ ein kartesisches Koordinatensystem der elementargeometrischen Anschauungsebene:



Die Menge \mathcal{G} sei die Vereinigung der folgenden Mengen:

- $\mathcal{G}_1 \dots$ Menge der elementaren Geraden normal zur x-Achse:
 $x=c$ (Anstieg $k=\infty$).
- $\mathcal{G}_2 \dots$ Menge der elementaren Geraden mit $y=kx+d$ mit $k \leq 0$;
 darunter kommen insbesondere die zur x-Achse parallelen Geraden $y=d$ ($k=0$) vor.
- $\mathcal{G}_3 \dots$ für $k > 0$ werden die elementaren Geraden wie folgt geknickt:
 $y=kx+d$ in \mathbb{N} ($y \leq 0 \dots$ "Untere Halbebene")
 $y=\frac{1}{2}x+d_2$ in \mathbb{O} ($y > 0 \dots$ "Obere Halbebene");
 k heie der "Anstieg der (geknickten) Moulton-Geraden".
- $\mathcal{G}_4 \dots \mathcal{G}_n = \{u\} \dots u$ ist die Ferngerade der PAE.

Wir setzen nun:

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{G}_i$$

\mathcal{P} sei Vereinigung von

- $\mathcal{P}_1 \dots$ Menge der Punkte der elementaren Anschauungsebene
- $\mathcal{P}_2 \dots$ Menge der Fernpunkte der PAE.

Die binäre Relation PIg werde wie folgt erklärt:

Für $P \in \mathcal{P}_1 \wedge g \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3$: $PIg \Leftrightarrow$ der Punkt P liegt im elementaren Sinn auf der (ev.geknickten) Geraden;

für $P \in \mathcal{P}_1 \wedge g = u$: kein eigentlicher Punkt inzidiert mit der Ferngeraden;

für $P \in \mathcal{P}_2 \wedge g \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$: $PIg \Leftrightarrow g$ hat die durch den Fernpunkt bestimmte Richtung.

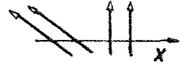
Bem.: Parallele Geraden aus $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ haben genau einen Fernpunkt gemeinsam.

Für $P \in \mathcal{P}_2 \wedge g \in \mathcal{G}_3$: $PIg \Leftrightarrow$ der untere Teil von g hat die durch den Fernpunkt bestimmte Richtung.

Bem.: Der elementare Fernpunkt des oberen Teiles von g inzidiert im Sinne der Moultonenebene nicht mit g .

Für $P \in \mathcal{P}_2 \wedge g = u$: $PIg \forall P \in \mathcal{P}_2$; d.h. jeder Fernpunkt inzidiert mit der Ferngeraden.

Bem.: Jede Moultongerade aus $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3$ hat also genau einen Fernpunkt.



(2) Die Moultonenebene ist eine projektive Ebene.

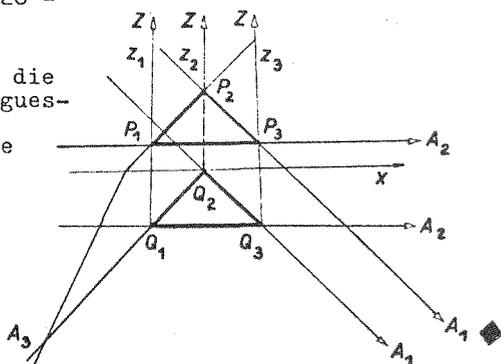
(a) Die Gültigkeit von e in der Moultonenebene ist eine triviale Folge der Gültigkeit von e in der elementaren Anschauungsebene.

(b) Der Nachweis von i_2 erfordert eine elementare Diskussion der verschiedenen Fälle.

(c) Um i_1 einzusehen, genügt es zu zeigen: Zwei verschiedene Punkte besitzen mindestens eine Verbindungsgerade; wegen i_2 muß dann nämlich die Verbindungsgerade eindeutig sein.

Damit ist gezeigt, daß die Moultonenebene eine projektive Ebene ist.

(3) Die Figur zeigt, daß die Moultonebene keine Desarguesebene ist; P_i, Q_i sind Z-perspektiv, während die A_j nicht kollinear sind.



Bemerkung: Die projektiven Inzidenzebenen zerfallen in zwei Klassen: Nichtdesarguesebenen (z.B. Moultonebene) und Desarguesebenen. Beispiele für Desarguesebenen sind die PAE, wie in 1.12 gezeigt wird, und das Minimalmodell in 1.1. In der PAE existiert daher jede mögliche perspektive Kollineation. Überigens gilt: Jede endliche projektive Ebene der Ordnung $N \neq 8$ ist desarguessch. Es existiert eine nichtdesarguessche projektive Ebene der Ordnung $N = 9$.

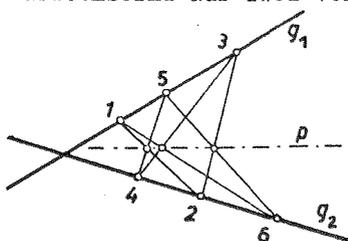
SATZ 1.5: In einer projektiven Ebene existiert jede mögliche perspektive Kollineation genau dann, wenn die Ebene desarguessch ist. In der Menge der Desarguesebenen gilt das Dualitätsprinzip. Es gibt desarguessche und nicht-desarguessche projektive Ebenen.

1.6. Pappus - Ebenen

Nach Satz 1.4 ist $PGL(Z, a | Z I a)$ bei einer gewissen Zusatzvoraussetzung immer kommutativ. Wir stellen die analoge Frage für $PGL(Z, a | Z \not\sim a)$: Unter welchen Bedingungen ist diese Gruppe kommutativ? Dies hängt von der Gültigkeit eines weiteren Schließungssatzes ab.

Zunächst einige Bezeichnungen:

(a) Ein n -Eck ($n \geq 3$) ist eine Menge von n nummerierten, paarweise verschiedenen Punkten $1, 2, \dots, n$, von denen nie drei zyklisch aufeinander folgende Punkte $1, 2, 3$ bzw. $2, 3, 4$ bzw. $\dots, n, 1, 2$ kollinear sind. Speziell für $n=3$ und $n=4$ sind dann nie drei Punkte kollinear. In jeder projektiven Ebene mit $N \geq 3$ existiert ein Sechseck, dessen Ecken speziell im Sinne der Numerierung abwechselnd auf zwei verschiedenen Geraden g_1, g_2 liegen.



Wir bilden im Sinne der Numerierung "Paare von Gegenseiten", nämlich 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61. Je zwei Gegenseiten eines Paares sind nach Voraussetzung verschieden, daher existieren die folgenden Schnittpunkte eindeutig: 12.45, 23.56, 34.61. Falls diese drei Schnittpunkte kollinear sind, wollen wir sagen, daß für dieses Sechseck

der Schließungssatz von PAPPUS-PASCAL gilt.

(b) Wir bilden das Schema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

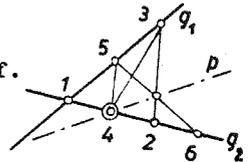
Aus dieser Matrix kann man die Schnittpunkte ablesen, indem man alle möglichen $(2,2)$ -Matrizen herausgreift:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

ihre "Determinanten" berechnet. Dieses Schema nennt man "Pappus-Schema".

DEF.1.6: Eine projektive Ebene heißt eine "Pappusebene" π_{pp} , wenn gilt: Zu jedem Sechseck, dessen Ecken abwechselnd auf zwei verschiedenen Geraden liegen, existiert eine Gerade p so, daß die drei Schnittpunkte der drei Gegenseitenpaare mit p inzidieren.

Bemerkungen: (a) In π_{pp} gilt also der Satz von PAPPUS-PASCAL "überall". Diese Aussage wird i.f. mit PP bezeichnet. Die Existenz von Pappusebenen ist zunächst offen.



(b) Für $N=2$ gibt es kein Sechseck im Sinne der Def. 1.6 und eine solche projektive Ebene ist daher in trivialer Weise eine Pappusebene.

(c) Wenn ein Sechseckpunkt im Schnittpunkt der beiden Trägergeraden liegt, so existiert eine Gerade p ("Pappus-Pascal - oder kurz FP-Achse") in jeder projektiven Ebene mit $N \geq 3$ trivialerweise. Von den drei Schnittpunkten der Gegenseitenpaare stimmen nämlich sicher zwei überein.

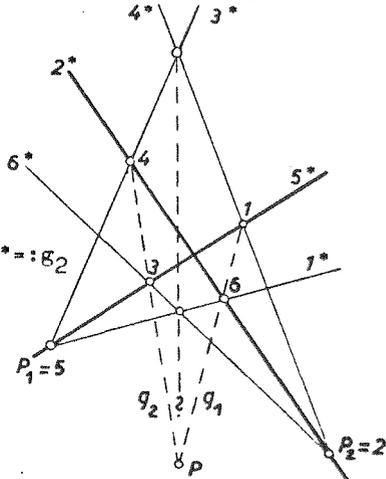
(d) Der zum Satz von Pappus-Pascal duale Satz PP* heißt "Satz von Pappus-Brianchon": Zu einem Sechseck, dessen Seiten abwechselnd durch zwei verschiedene Punkte gehen, existiert ein Punkt P so, daß die drei Verbindungsgeraden der Gegeneckenpaare mit P inzidieren.

Folgerungen (ohne Rücksicht auf die Existenz von Pappusebenen):

1) In einer Pappusebene π_{pp} gilt der Satz von Pappus-Brianchon.

Bemerkung: Dieser Satz kann nicht durch Dualisieren bewiesen werden. Das Dualitätsprinzip darf nämlich nur auf Inzidenzaussagen angewendet werden, die in allen projektiven Ebenen gelten (vgl. 1.1); nicht jede projektive Ebene ist eine Pappusebene (vgl. Folgerung 5)).

Bew.: In der nebenstehenden Figur (Inzidenztabelle) gehen die Geraden $1^*, \dots, 6^* \in \mathcal{U}$ eines Sechseits abwechselnd durch die Trägerpunkte P_1, P_2 . Die Geraden $1^*2^*.4^*5^* =: g_1$ und $2^*3^*.5^*6^* =: g_2$ sind nach Voraussetzung verschieden: $g_1 g_2 =: P$.



Die Punkte $1, \dots, 6 \in \mathcal{P}$ (vgl. Figur) bilden ein Sechseck, dessen Ecken im Sinne der Numerierung abwechselnd auf zwei verschiedenen

Geraden 5^* bzw. 2^* liegen. Da nach Voraussetzung eine Pappusebene vorliegt, sind die Punkte

$$\begin{array}{ccc} \underline{12.45}, & \underline{23.56}, & \underline{34.61} \\ 4^* 3^* & 6^* 1^* & P \end{array}$$

kollinear, sodaß auch

$3^*4^*.6^*1^*$ durch P geht und der Satz von Pappus-Brianchon für das gegebene Sechseck gilt. ◆

Bemerkung: Ist eine Inzidenzaussage in jeder Pappusebene richtig, so ist auch die duale Aussage in jeder Pappusebene richtig. In der Menge der Pappusebenen gilt das Dualitätsprinzip.

Bew.: Gelten in einer Inzidenzstruktur die Axiome i_1, i_2, e und PP , so gilt auch PP^* . In der zur Pappusebene dualen projektiven Ebene gilt also PP , d.h.: Zu einer PP -Ebene ist auch die duale Inzidenzstruktur eine PP -Ebene. Der weitere Beweis ist wörtlich gleich mit jenem von 1.1, Folgerung 6, nur ist statt "projektive Ebene π bzw. π^* " nun "Pappusebene π_{PP} bzw. π_{PP}^* " zu sagen. ◆

2) Satz von HESSENBERG: In jeder Pappusebene gilt der Satz von Desargues (kurz: $PP \Rightarrow De$). Der Beweis folgt in 1.7, Folg. 3.

Bemerkungen: (a) Die Umkehrung des Satzes von Hessenberg ist falsch: Aus De folgt nicht PP . In endlichen projektiven Ebenen gilt jedoch auch die Umkehrung (siehe 1.12).

(b) Aus Satz 1.5 und dem Satz von Hessenberg folgt, daß auch in jeder Pappusebene "jede mögliche" perspektive Kollineation existiert. Jede Gruppe $PGL(Z, a | Z \not\parallel a)$ besteht daher in jeder Pappusebene, deren Punktreihen mehr als drei Elemente enthalten, nicht nur aus der Identität.

3) In jeder Pappusebene ist $PGL(Z, a | Z \not\parallel a)$ kommutativ.

Bew.: $\alpha, \beta \in PGL(Z, a | Z \not\parallel a) \xrightarrow{\text{Satz 1.4}}$

$\alpha\beta, \beta\alpha \in PGL(Z, a | Z \not\parallel a)$.

$PP \xrightarrow{\text{Folg. 2}} De \xrightarrow{1.5, \text{Folg. 3}} \alpha$ bzw. β ist

eindeutig bestimmt durch: $Z, a,$

$P \mapsto P' = P\alpha$ bzw. $Z, a, Q \mapsto Q' = Q\beta$.

Wir konstruieren (nach 1.5, Folg. 3)

$P\alpha\beta = P'\beta$ und $Q\beta\alpha = Q''\alpha$. Aus dem Pappus-

Schema $\begin{bmatrix} Q & Q\beta\alpha & Q'' \\ P\alpha\beta & P & P' \end{bmatrix}$ und der

Gültigkeit von PP folgt: $QP \cdot Q\beta\alpha P\alpha\beta,$

$QP' \cdot P\alpha\beta Q''$ (I a), $Q\beta\alpha P' \cdot PQ''$ (I a) sind

kollinear $\implies a$ ist die PP-Achse und

es gilt: $QP \cdot Q\beta\alpha P\alpha\beta$ I a. $\alpha\beta$ ist durch $P \mapsto P\alpha\beta$ eindeutig fest-

gelegt; konstruieren wir damit nach 1.5, Folgerung 3 den Punkt

$Q\alpha\beta$, so erkennt man: $Q\alpha\beta = Q\beta\alpha$.

$\alpha\beta$ ist durch $Z, a, Q \mapsto Q\alpha\beta$ und $\beta\alpha$ ist durch $Z, a, Q \mapsto Q\beta\alpha = Q\alpha\beta$

eindeutig festgelegt $\implies \alpha\beta = \beta\alpha$. ◆

4) Ist in einer Desarguesebene π_{De} jede Gruppe $PGL(Z, a | Z \not\parallel a)$ kommutativ, so ist π_{De} eine Pappusebene (Umkehrung von 3)).

Bew.: Das Sechseck $1, \dots, 6 \in \mathcal{P}$ liege o.B.d.A. so auf beiden

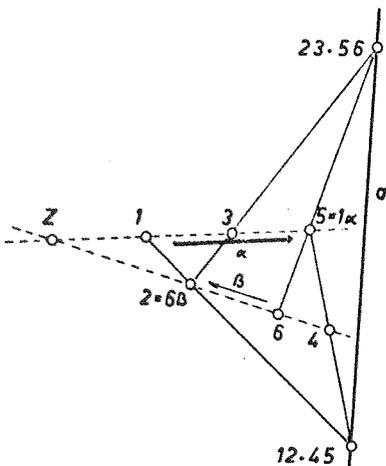
Trägergeraden, daß kein Punkt im Schnittpunkt Z der Trägergeraden liegt (sonst ist PP trivialerweise gültig). Die Verbindungsgerade von 12.45 mit 23.56 bezeichnen wir mit a . Je nach der Lage von Z zu a unterscheiden wir:

Fall 1: $Z \not\parallel a$.

$De \implies$ es existiert jede mögliche perspektive Kollineation \implies

$\exists^* \alpha \in PGL(Z, a | Z \not\parallel a)$ mit $1\alpha = 5 \wedge$

$\exists^* \beta \in PGL(Z, a | Z \not\parallel a)$ mit $6\beta = 2$.



Nach Konstruktion gilt:

$$\left. \begin{array}{l} 3=5\beta \text{ (wegen 23.56 I a)} \\ 4=2\alpha \text{ (wegen 12.45 I a)} \end{array} \right\} \implies 3=(1\alpha)\beta \wedge 4=(6\beta)\alpha \xrightarrow{\text{VS.: } \alpha\beta=\beta\alpha} 4=6\alpha\beta.$$

$\alpha\beta$ leistet also: $1 \mapsto 3$ und $6 \mapsto 4$. Da zugeordnete Geraden 16 und 34 einander auf der Achse schneiden, gilt 16.34 I a; also sind 12.45, 23.56 und 16.34 kollinear.

Fall 2: Z I a.

α und β sind jetzt Elationen und $\alpha\beta$ ist auch eine Elation. Da in einer Desarguesebene jede mögliche Elation existiert, gibt es sicher zwei verschiedene nicht triviale Elationen mit der Achse a und verschiedenen Zentren; nach Satz 1.4 ist dann die Gruppe $\text{PGL}(Z, a | Z \text{ I a})$ kommutativ.

Damit kann der obige Schluß auch in diesem Fall durchgeführt werden. ◆

Bemerkung: Die logische Äquivalenz von PP und der Kommutativität der Homologiegruppen $\text{PGL}(Z, a | Z \text{ I a})$ wurde zuerst von D. HILBERT erkannt.

5) Nicht jede projektive Ebene ist eine Pappusebene.

Bew.: (ind.) Wäre jede projektive Ebene pappussch, so wäre jede projektive Ebene nach dem Satz von Hessenberg desarguessch; dies widerspricht der Existenz der Moultonenebene (vgl. 1.5, Folg. 4). ◆

Bemerkung: In 1.12 werden wir zeigen, daß PAE eine Pappusebene ist und daß es Desarguesebenen gibt, die nicht pappussch sind. Die Menge der Desarguesebenen ist eine echte (nicht leere) Teilmenge der Menge der projektiven Ebenen; die Pappusebenen bilden eine echte (nicht leere) Teilmenge der Desarguesebenen.

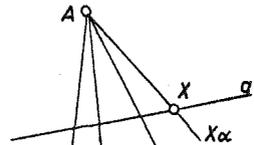
SATZ 1.6: In jeder Pappusebene gilt der Satz von Desargues, und jede Homologiegruppe $\text{PGL}(Z, a | Z \text{ I a})$ ist in einer Pappusebene kommutativ. Ist in einer Desarguesebene jede Homologiegruppe $\text{PGL}(Z, a | Z \text{ I a})$ kommutativ, so ist sie eine Pappusebene. In der Menge der Pappusebenen gilt das Dualitätsprinzip. Es gibt pappussche und nicht pappussche projektive Ebenen.

1.7. Perspektivitäten, Projektivitäten, Verkürzungssatz

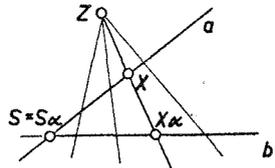
Sei π eine projektive Ebene. Im Beweis von Satz 1.2 haben wir spezielle Bijektionen zwischen Grundgebilden definiert; diese Abbildungen sollen "Perspektivitäten" heißen:

DEF.1.7: Eine Bijektion zwischen zwei ungleichartigen Grundgebilden heißt eine Perspektivität, wenn Ur- und Bildelement stets inzidieren; eine Bijektion zwischen zwei verschiedenen gleichartigen Grundgebilden heißt eine Perspektivität, wenn Ur- und Bildelement jeweils mit einem Element eines dritten Grundgebildes inzidieren. Eine Bijektion zwischen zwei Grundgebilden heißt eine Projektivität, wenn sie Produkt von endlich vielen Perspektivitäten ist.

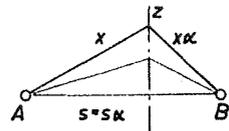
Bemerkungen: (a) Eine Perspektivität α einer Punktreihe ρ_a auf ein Geradenbüschel \mathcal{G}_A ordnet jedem $X \in \rho_a$ die Gerade $AX \in \mathcal{G}_A$ zu. Da α eine Bijektion ist, gilt notwendig: $A \notin a$. Wir schreiben auch $\rho_a \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}_A$ (oder $a \xrightarrow{\alpha} A$). Ebenso ist $\alpha^{-1}: \mathcal{G}_A \rightarrow \rho_a$ eine Perspektivität.



(b) Bei einer Perspektivität α einer Punktreihe ρ_a auf eine Punktreihe ρ_b mit $a \neq b$ bilden die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte ein Geradenbüschel \mathcal{G}_Z ; α ist Zusammensetzung zweier Perspektivitäten vom Typ (a): $\rho_a \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}_Z$ und $\mathcal{G}_Z \xrightarrow{\alpha} \rho_b$. Da α wegen Definition eine Bijektion ist, gilt notwendig $Z \notin a, b$. Z heißt das "Perspektivitätszentrum". Wir schreiben auch $\rho_a \xrightarrow{\alpha} \rho_b$ (oder $a \xrightarrow{\alpha} b$).



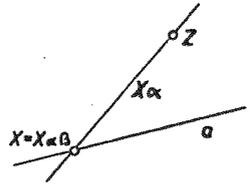
(c) Dual zu (b): Bei einer Perspektivität α eines Geradenbüschels \mathcal{G}_A auf ein Geradenbüschel \mathcal{G}_B mit $A \neq B$ bilden die Schnittpunkte zugeordneter Geraden eine Punktreihe ρ_z . z heißt die "Perspektivitätsachse". Wir schreiben auch $\mathcal{G}_A \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}_B$ (oder $A \xrightarrow{\alpha} B$).



(d) Bei einer Perspektivität zwischen zwei verschiedenen gleichartigen Grundgebilden ist das gemeinsame Element der beiden Grundgebilde sich selbst zugeordnet.

(e) Sind α_i ($i=1,2,\dots,n$) Perspektivitäten, so ist $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ eine Projektivität. Wir schreiben in den sechs möglichen Fällen:
 $\rho_a \xrightarrow{\alpha} \rho_b$, $\rho_a \xrightarrow{\alpha} \rho_a$, $\mathcal{G}_A \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}_B$, $\mathcal{G}_A \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}_A$, $\rho_a \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}_A$, $\mathcal{G}_A \xrightarrow{\alpha} \rho_a$
 (oder $a \times b$ usw.).

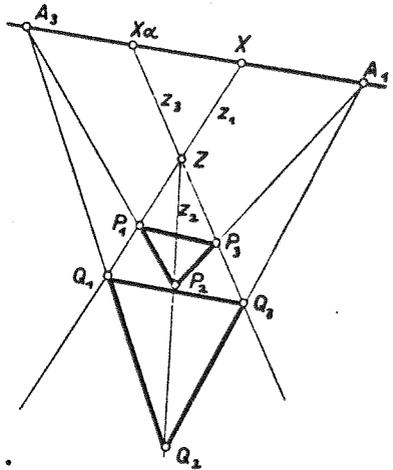
Speziell die Identität ι eines Grundgebildes (z.B. $\iota: \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_a$) ist eine Projektivität: $\exists Z \in \mathcal{P}$ mit $Z \notin a$, und für die eindeutig bestimmten Perspektivitäten $\alpha: \mathcal{P}_a \times \mathcal{U}_Z$ und $\beta: \mathcal{U}_Z \times \mathcal{P}_a$ gilt: $\alpha\beta = \iota$.



Folgerungen:

1) Ist das Produkt zweier Perspektivitäten $\alpha_{12}: z_1 \rightarrow z_2$, $\alpha_{23}: z_2 \rightarrow z_3$ zwischen paarweise verschiedenen kopunktalen Geraden z_1, z_2, z_3 stets eine Perspektivität, so ist die Ebene eine Desarguesebene.

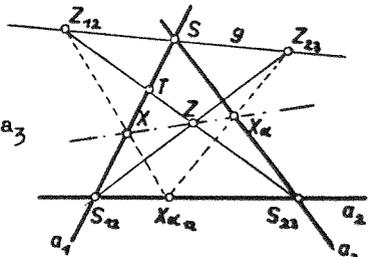
Bew.: Wegen 1.5, Bem.(b) genügt es, zwei Z-perspektive Dreiecke P_j, Q_j ($j = 1, 2, 3$) zu betrachten, wobei $P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3; Z$ und die Geraden z_1, z_2, z_3 paarweise verschieden sind. Mit $A_3 := P_1 P_2 \cdot Q_1 Q_2$ und $A_1 := P_2 P_3 \cdot Q_2 Q_3$ sind zwei Perspektivitäten definiert: $\alpha_{12} \dots z_1 \overset{A_1}{\rightarrow} z_2$ und $\alpha_{23} \dots z_2 \overset{A_1}{\rightarrow} z_3$. Wegen 1.5, Bem.(c) kann o.B.d.A. angenommen werden, daß A_1, A_3, Z nicht kollinear sind. Nach



Voraussetzung ist $\alpha_{12} \alpha_{23}$ eine Perspektivität α mit $P_1 \mapsto P_3$ und $Q_1 \mapsto Q_3$. Das Zentrum von α ist somit $A_2 := P_1 P_3 \cdot Q_1 Q_3$. Wendet man α auf $X := z_1 \cdot A_1 A_3$ an, so folgt wegen $X \neq Z$ dann $X\alpha \neq X$ und $A_2 \in XX\alpha = A_1 A_3$, sodaß A_1, A_2, A_3 kollinear sind. ◆

2) Sind in einer Pappusebene a_1, a_2, a_3 nicht kopunktale Geraden, und $\alpha_{12}: a_1 \overset{Z_{12}}{\rightarrow} a_2$, $\alpha_{23}: a_2 \overset{Z_{23}}{\rightarrow} a_3$ zwei Perspektivitäten so, daß $\alpha := \alpha_{12} \alpha_{23}: a_1 \rightarrow a_3$ den Punkt $S := a_1 a_3$ festläßt, so ist α eine Perspektivität.

Bew.: Da für $Z_{12} = Z_{23}$ die Behauptung nach Def.1.7 trivial ist, sei $Z_{12} \neq Z_{23}$. Weiters gilt $Z_{12} \notin a_1, a_2$ und $Z_{23} \notin a_2, a_3 \Rightarrow Z_{12}, Z_{23}, S$ sind pw. verschieden. Wegen $S\alpha = S$ gilt: $S \in Z_{12} Z_{23} =: g$ und



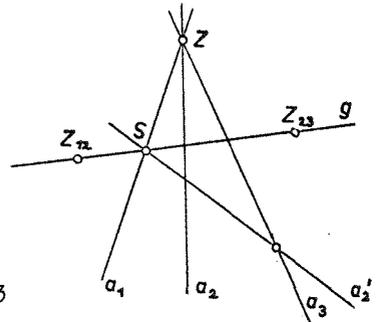
$g \neq |a_1, a_3 \Rightarrow Z_{12} \neq S_{23} := a_2 a_3$ und $Z_{23} \neq S_{12} := a_1 a_2$. Die Geraden $Z_{12} S_{23}$ und $Z_{23} S_{12}$ sind verschieden, da diese vier Punkte wegen $g \neq a_2$ nicht kollinear sind. Der Punkt $Z := Z_{12} S_{23} \cdot Z_{23} S_{12} \cdot Z_{12} S_{23} \cdot Z_{23} S_{12} \cdot Z$ (a_1, a_3 (z.B. $Z \in a_1 \Rightarrow Z_{23} \in a_1 \Rightarrow g = a_1$: Widerspruch)) und bestimmt daher eine Perspektivität $\beta : a_1 \xrightarrow{Z} a_3$. Auf Grund der Inzidenztabelle ist $S\alpha = S\beta \wedge S_{12}\alpha = S_{12}\beta \wedge T\alpha = T\beta$ mit $T := a_1 \cdot Z_{12} S_{23}$. Ist $X \in \mathbb{A}_{a_1}$ mit $X \neq |S, T, S_{12}$ (was nur für $N > 2$ möglich ist), so folgt nach PP aus dem Pappusschema

$$\begin{bmatrix} S_{12} & S_{23} & X\alpha_{12} \\ Z_{12} & Z_{23} & S \end{bmatrix} :$$

$S_{12} Z_{23} \cdot S_{23} Z_{12} = Z$, $S_{12} S \cdot Z_{12} X\alpha_{12} = X$, $S_{23} S \cdot Z_{23} X\alpha_{12} = X\alpha$ sind kollinear, sodaß α mit der Perspektivität β übereinstimmt. Für $N=2$ ist nach Konstruktion $\alpha = \beta$.

3) In jeder Pappusebene gilt der Satz von Desargues (vgl. 1.6, Folg.2).

Bew.: Nach Folg.1 und 1.5, Bem.(c) genügt es zu zeigen: Sind in einer Pappusebene a_1, a_2, a_3 paarweise verschiedene kopunktale Geraden und $\alpha_{12} : a_1 \xrightarrow{Z_{12}} a_2$, $\alpha_{23} : a_2 \xrightarrow{Z_{23}} a_3$ Perspektivitäten mit $Z_{12}, Z_{23}, Z := a_1 a_3$ nicht kollinear, so ist $\alpha := \alpha_{12} \alpha_{23} : a_1 \rightarrow a_3$ eine Perspektivität.



Die Gerade $g = Z_{12} Z_{23}$ ist wegen $Z \notin g$ von a_1 verschieden. Wir wählen eine Gerade $a'_2 \neq |a_1, g$ mit $S := g a_1 \cap a'_2$. Wegen $Z_{23} \notin a'_2$ gilt: $\alpha = a_1 \xrightarrow{Z_{12}} a_2 \xrightarrow{Z_{23}} a'_2 \xrightarrow{Z_{23}} a_3$. Da a_1, a_2, a'_2 nicht kopunktal sind und $S = a_1 a'_2$ beim Produkt der Perspektivitäten $a_1 \xrightarrow{Z_{12}} a_2$, $a_2 \xrightarrow{Z_{23}} a'_2$ festbleibt, ist wegen PP nach Folg.2 dieses Produkt eine Perspektivität $\beta : a_1 \xrightarrow{Z} a'_2$ mit einem Zentrum Z' . Für α gilt dann: $\alpha = a_1 \xrightarrow{Z'} a'_2 \xrightarrow{Z_{23}} a_3$, wobei a_1, a'_2, a_3 nicht kopunktal sind und $a_1 a_3 = Z$ bei diesem Produkt von zwei Perspektivitäten festbleibt, da $Z\alpha = Z$ gilt; nach Folg.2 ist daher α eine Perspektivität.

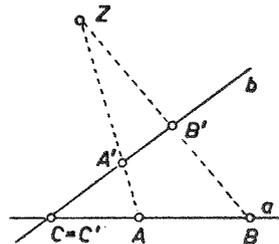
4) Die Menge aller Projektivitäten eines Grundgebildes auf sich ist bezüglich des Hintereinanderausführens eine Gruppe. Sie heißt projektive Gruppe der Punktreihe \mathcal{P}_a bzw. des Geradenbüschels \mathcal{U}_A und wird mit $\text{PGL}(\mathcal{P}_a)$ bzw. $\text{PGL}(\mathcal{U}_A)$ bezeichnet.

Bew.: Alle projektiven Selbstabbildungen von \mathcal{P}_a sind bijektiv und daher ist $\text{PGL}(\mathcal{P}_a)$ eine Teilmenge der Menge aller Bijektionen von \mathcal{P}_a , welche bezüglich des Hintereinanderausführens das Assoziativgesetz erfüllen (vgl. 1.3).

$\alpha, \beta \in \text{PGL}(\mathcal{P}_a) \Rightarrow \alpha = \pi_1 \dots \pi_n \wedge \beta = \pi_{n+1} \dots \pi_{n+m}$ (π_j sind Perspektivitäten); da α und β Selbstabbildungen von \mathcal{P}_a sind, ist auch $\alpha\beta$ eine Selbstabbildung von \mathcal{P}_a und wegen $\alpha\beta = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_{n+m}$ Produkt von endlich vielen Perspektivitäten, also eine Projektivität. Die Identität $\iota: \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_a$ ist wegen $\iota\alpha = \alpha$ ($\forall \alpha \in \text{PGL}(\mathcal{P}_a)$) das neutrale Element aus $\text{PGL}(\mathcal{P}_a)$. Mit α ist auch $\alpha^{-1} = \pi_n^{-1} \dots \pi_1^{-1}$ eine projektive Selbstabbildung von \mathcal{P}_a mit $\alpha^{-1}\alpha = \iota$ ($\forall \alpha \in \text{PGL}(\mathcal{P}_a)$).

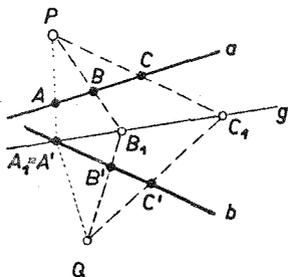
Für $\text{PGL}(\mathcal{U}_A)$ ist der Beweis analog.

5) Seien \mathcal{P}_a und \mathcal{P}_b zwei verschiedene Punktreihen. Eine Perspektivität $\mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_b$ ist eindeutig bestimmt, wenn zwei verschiedene Ursprünge $A, B \in \mathcal{P}_a$ und ihre verschiedenen Bildpunkte $A', B' \in \mathcal{P}_b$ mit $A, B, A', B' \neq C = ab$ gegeben sind; der Schnittpunkt C ist notwendig in jeder Perspektivität $\mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_b$ selbstzugeordnet. Durch wie viele Paare aus Ursprung und Bildpunkt ist eine Projektivität festgelegt?



Sind drei paarweise verschiedene Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}_a$ und drei paarweise verschiedene Punkte $A', B', C' \in \mathcal{P}_b$ ($a \neq b$) gegeben, so existiert mindestens eine Projektivität $\varepsilon: \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_b$ mit $A' = A\varepsilon$, $B' = B\varepsilon$, $C' = C\varepsilon$.

Bew.: $A, B, C \in \mathcal{P}_a$, pw. verschieden; $A', B', C' \in \mathcal{P}_b$, pw. verschieden.



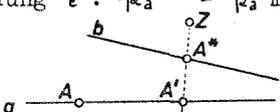
Wegen $a \neq b$ kann man o.B.d.A. annehmen, daß $A \neq A'$ gilt (sonst Bezeichnungsänderung). $\exists^* AA' \in \mathcal{U}$ und nach Satz 1.2 existiert sicher ein Punkt P mit $P \notin A, A' \wedge P \in \mathcal{P}_{AA'}$, also $P \not\perp a, b. \alpha$ sei die Perspektivität $\mathcal{P}_a \pi \mathcal{U}_P$.

Nach Satz 1.2 existiert im Büschel $\mathcal{U}_{A'}$ eine Gerade g mit $g \neq b \wedge g \neq AA' \implies P \perp g. \beta$ sei die Perspektivität $\mathcal{U}_P \pi \mathcal{P}_g. \alpha\beta$ leistet: $A \mapsto A_1 = A', B \mapsto B_1 = PB.g, C \mapsto C_1 = PC.g$. Da $B' \neq B_1 \wedge C' \neq C_1 \implies \exists^* Q: B'B_1.C'C_1$ mit $Q \perp b, g. \gamma$ sei die Perspektivität $\mathcal{P}_g \pi \mathcal{U}_Q$ und δ die Perspektivität $\mathcal{U}_Q \pi \mathcal{P}_b$.

$\epsilon = \alpha\beta\gamma\delta$ leistet: $A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'$. Somit ist eine Projektivität konstruiert, welche in die Angabe paßt, und es gilt $\mathcal{P}_a \stackrel{P}{\pi} \mathcal{P}_g \stackrel{Q}{\pi} \mathcal{P}_b$. ◆

Bemerkungen: (a) Folgerung 5 gilt in analoger Weise für eine Projektivität eines Geradenbüschels auf ein anderes Geradenbüschel, wie man durch Dualisieren jedes Beweisschrittes erkennt.

(b) Sind die Tripel $A, B, C \in \mathcal{P}_a$ bzw. $A', B', C' \in \mathcal{P}_a$ von jeweils pw. verschiedenen Punkten gegeben, so gibt es mindestens eine projektive Selbstabbildung $\epsilon: \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_a$ mit $A' = A\epsilon, B' = B\epsilon, C' = C\epsilon$. Es gibt nämlich sicher einen Punkt $Z \perp a$ und eine Gerade b mit $b \neq a \wedge Z \perp b$.

Die Perspektivität $\eta: \mathcal{P}_a \pi \mathcal{P}_b$ leistet $A' \mapsto A^*, \dots, C' \mapsto C^*$. Für $\mathcal{P}_a(A, \dots)$ und $a \perp A, A'$  $\mathcal{P}_b(A^*, \dots)$ können wir obigen Beweis führen und $\epsilon = \alpha\beta\gamma\delta\eta^{-1}$ leistet dann das Gewünschte. Analoges gilt für eine Projektivität eines Geradenbüschels auf sich.

Gibt man ein Ursprungstempel in einer Reihe \mathcal{P}_a vor und ein Bildpunktstempel in derselben Reihe \mathcal{P}_a , dann existiert mindestens eine Transformation aus $PGL(\mathcal{P}_a)$, die in die Angabe paßt, kurz: $PGL(\mathcal{P}_a)$ operiert dreifach transitiv auf \mathcal{P}_a .

Analoges gilt für $PGL(\mathcal{U}_A)$. Man kann übrigens Aufgaben über Geradenbüschel durch Schnitt mit einer Punktreihe nicht durch den Scheitel (Perspektivität!) in Aufgaben über Punktreihen überführen. Damit ist sichergestellt, daß auch bei verschiedenartigen Grundgebilden durch zwei Tripel pw. verschiedener Elemente stets mindestens eine Projektivität bestimmt ist.

(c) Sei σ eine Projektivität $\mathcal{P}_a \pi \mathcal{P}_b$ mit $a \neq b$. Nach Definition gilt: $\sigma: a \pi a_1 \pi a_2 \pi \dots \pi a_n \pi b$ ($a_1 := a, a_{n+1} := b$). Man nennt dies eine "n-gliedrige Kette von Perspektivitäten zwischen Punktreihen". Dann gilt:

Ist π eine endliche projektive Ebene der Ordnung zwei oder drei, so kann jede Projektivität zwischen verschiedenen Punktreihen durch eine höchstens zweigliedrige Kette von Perspektivitäten zwischen Punktreihen erzeugt werden.

Bew.: Ist die Ordnung von π gleich zwei, so enthält nach Satz 1.2 jede Punktreihe und jedes Geradenbüschel genau drei Elemente und die Konstruktion im Beweis von Folgerung 5 ist daher eindeutig durchführbar; jede Projektivität ist durch die zugeordneten Tripel eindeutig festgelegt. Aus der dortigen Inzidenztabelle erkennt man, daß jede Projektivität $\rho_a \rightarrow \rho_b (a \neq b)$ durch $a \overline{\times} g \overline{\times} b$ dargestellt werden kann.

Ist die Ordnung von π dagegen drei, so existiert in ρ_a noch genau ein weiterer Punkt D . $\alpha\beta\gamma\delta$ ist eine Bijektion und daher sind $A', B', C', D \rightarrow \beta\gamma\delta =: D'$ paarweise verschieden; D' ist notwendig der einzige weitere Punkt aus ρ_b . Die vierten Punkte auf ρ_a und ρ_b werden also automatisch einander zugeordnet. Die Projektivität $\rho_a \rightarrow \rho_b$ wird durch $A, B, C, D \rightarrow A', B', C', D'$ völlig beschrieben und ist eindeutig durch zugeordnete Tripel bestimmt; sie kann nach dem Beweis von Folgerung 5 durch $a \overline{\times} g \overline{\times} b$ dargestellt werden. ◆

6) Es stellt sich die Frage, ob dies für jede projektive Ebene zutrifft.

In einer Desarguesebene läßt sich jede durch eine n -gliedrige Kette erzeugte Projektivität σ einer Punktreihe auf eine andere Punktreihe durch eine höchstens zweigliedrige Kette von Perspektivitäten zwischen Punktreihen erzeugen (Verkürzungssatz).

Bew.:

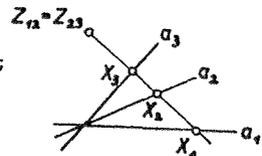
Bezeichnungen: $\sigma: \rho_a \overline{\times} \rho_b$ mit $a \neq b$ und $\sigma: a \overline{\times} a_2 \overline{\times} a_3 \overline{\times} \dots \overline{\times} a_n \overline{\times} b$ ($a =: a_1, b =: a_{n+1}$). Die Perspektivität $a \overline{\times} a_{k+1}$ werde i. f. mit $\alpha_{k, k+1}$ und ihr Perspektivitätszentrum mit $Z_{k, k+1}$ bezeichnet. Es ist zu zeigen: Ist σ keine Perspektivität, so existiert eine Gerade g mit $\sigma: a \overline{\times} g \overline{\times} b$.

Wegen der obigen Bemerkung (c) dürfen wir voraussetzen, daß jede Punktreihe mindestens fünf Punkte enthält (*). Wir zerlegen die Behauptung in fünf Einzelbehauptungen, die wir getrennt beweisen.

(I) In einer zweigliedrigen Kette $a_1 \overline{\times} a_2 \overline{\times} a_3$ aus drei pw. verschiedenen kopunktalen Geraden a_1, a_2, a_3 kann man die mittlere Gerade weglassen (Die Behauptung lautet umformuliert: $\alpha_{12} \alpha_{23} =: \alpha_{13}$ ist eine Perspektivität mit einem Zentrum Z_{13}).

Bew. von (I):

Fall 1: $Z_{12} = Z_{23}$. Setzt man $Z_{13} = Z_{12}$, so ist die Gültigkeit von (I) trivial.



Fall 2: $Z_{12} \neq Z_{23}$. Dann $\exists^* G_1 := Z_{12}Z_{23} \cdot a_1$.
 (*) $\implies \exists P_1, X_1 \in \mathcal{P}_a$, mit $P_1 + X_1 \wedge P_1 \neq O = a_1 \cdot a_2, G_1 \wedge X_1 \neq O, G_1$.

Die folgenden Punkte sind alle eindeutig bestimmt und entsprechend der nebenstehenden Inzidenztabelle zu konstruieren;

$$P_1 \alpha_{12} := P_2, \quad P_2 \alpha_{23} := P_3, \quad X_1 \alpha_{12} := X_2, \\ X_2 \alpha_{23} := X_3.$$

Wegen der getroffenen Voraussetzungen sind P_j und X_j ($j=1,2,3$) Dreiecke, die nach Konstruktion O -perspektiv liegen. Da in π nach Voraussetzung der Satz von Desargues gilt, existiert eine Achse a , auf der die folgenden Punkte liegen:

$$\left. \begin{array}{l} P_1 P_2 \cdot X_1 X_2 = Z_{12} \\ P_2 P_3 \cdot X_2 X_3 = Z_{23} \\ P_1 P_3 \cdot X_1 X_3 =: A_2 \end{array} \right\} \implies a = Z_{12}Z_{23} \text{ wegen } Z_{12} \neq Z_{23} \implies A_2 \text{ Ia.}$$

A_2 kann durch P_1 und P_3 und a eindeutig festgelegt werden:
 $A_2 = P_1 P_3 \cdot a$. Halten wir P_1 fest und lassen X_1 in \mathcal{P}_a laufen, so gilt:

$$\begin{array}{ll} \forall X_1 \text{ mit } X_1 \in \mathcal{P}_a \setminus \{O, G_1\} \implies X_3 \text{ I } X_1 A_2, \\ \text{für } X_1 = O \implies X_3 = O \implies X_3 \text{ I } X_1 A_2, \\ \text{für } X_1 = G_1 \implies X_3 = a \cdot a_3 \implies X_3 \text{ I } X_1 A_2. \end{array}$$

Insgesamt gilt $\forall X_1 \in \mathcal{P}_a : X_3 \text{ I } X_1 A_2$, d.h. α_{13} ist eine Perspektivität mit dem Zentrum $A_2 = Z_{13}$.



Bemerkung: Die Aussage (I) ist mit dem Satz von Desargues logisch äquivalent, da aus (I) umgekehrt der Satz von Desargues folgt (vgl. Folg.1).

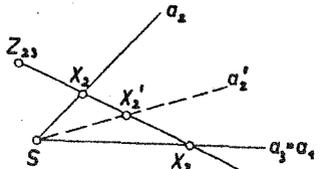
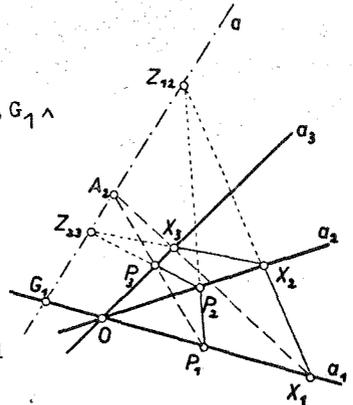
(II) In einer zweigliedrigen Kette $a_1 \bar{\wedge} a_2 \bar{\wedge} a_3$ mit $a_1 = a_3$ kann a_2 ersetzt werden durch eine Gerade a'_2 ($\neq a_2$) mit a_2, a'_2, a_3 kopunktal.

Bew. von (II):

$$a_1 \bar{\wedge} a_2 \implies a_1 \neq a_2 \implies \exists^* S := a_1 a_2.$$

$$Z_{23} \text{ I } | a_2, a_3; \text{ sei } a'_2 \text{ aus } \mathcal{G}_S \wedge Z_{23} \text{ I } a'_2 \wedge$$

$a'_2 \bar{\wedge} a_1, a_2$ (a'_2 existiert wegen (*)). Wir schieben eine Perspektivität $a_2 \bar{\wedge} a'_2$ mit dem Zentrum Z_{23} dazwischen: $a_1 \bar{\wedge} a_2 \bar{\wedge} a'_2 \bar{\wedge} a_2 \bar{\wedge} a_3$. An der Kette $a'_2 \bar{\wedge} a_2 \bar{\wedge} a_3$ sind drei kopunktuale Geraden beteiligt, daher darf man das mittlere Glied nach (I) weglassen $\implies a'_2 \bar{\wedge} a_3$; gleiches gilt für $a_1 \bar{\wedge} a_2 \bar{\wedge} a'_2 \implies a_1 \bar{\wedge} a'_2$.



Insgesamt bleibt $a_1 \bar{\wedge} a_2' \bar{\wedge} a_3$.



(III) In einer zweigliedrigen Kette $a_1 \bar{\wedge} a_2 \bar{\wedge} a_3$, wobei a_1, a_2, a_3 nicht kopunktal sind, kann a_2 durch eine Gerade a_2' ($\neq a_2$) ersetzt werden, welche durch einen gegebenen Punkt $P \in a_3$ mit $P \neq S_{13} := a_1 a_3$ geht.

Bew. von (III):

$a_i a_k =: S_{ik}$ ($i \neq k; i, k = 1, 2, 3$). Wir unterwerfen S_{12} der Kette: $S_{12} \alpha_{12} \alpha_{23} = S_{12} \alpha_{12} \alpha_{23} = S_{12} \alpha_{23} = S_{12} \alpha_{23} \cdot a_3 =: S^*$.
Wegen $Z_{23} \bar{\wedge} a_2$ gilt $S^* \neq S_{23}$.

Je nach Lage des gegebenen Punktes $P \in a_3$ unterscheiden wir:

Fall 1: $P \neq S^* \wedge P \neq S_{23}$: Wir wählen als Gerade a_2' die Verbindung $S_{12}P$ und schieben wie in Beweisschritt (II) eine Perspektivität $a_2 \bar{\wedge} a_2'$ mit dem Zentrum Z_{23} dazwischen: $a_1 \bar{\wedge} a_2 \bar{\wedge} a_2' \bar{\wedge} a_2 \bar{\wedge} a_3$. Da Z_{23} das Zentrum für $a_2' \bar{\wedge} a_2$ und das Zentrum für $a_2 \bar{\wedge} a_3$ ist, gilt nach Def. 1.7 $a_2' \bar{\wedge} a_3$. An der Kette $a_1 \bar{\wedge} a_2 \bar{\wedge} a_2'$ sind drei pw. verschiedene kopunktale Geraden beteiligt, daher darf das mittlere Glied nach (I) weggelassen werden: $a_1 \bar{\wedge} a_2'$. Insgesamt bleibt: $a_1 \bar{\wedge} a_2' \bar{\wedge} a_3$.

Fall 2: $P = S_{23}$: Nach (*) existiert ein Punkt

$Q \in \mathcal{P}_a$, mit $Q \neq S_{12}, S_{13}, S_{23} \wedge Z_{12} \cdot a_1 \Rightarrow$

$Q \alpha_{12} \alpha_{23} \neq S_{23}$. Da nur Bijektionen vorliegen, dürfen wir die gegebene Kette

verkehrt lesen: $a_3 \bar{\wedge} a_2 \bar{\wedge} a_1$; dabei erfüllt Q in bezug auf a_1 jene Voraus-

setzungen, die für P in bezug auf a_3 in Fall 1 zutreffen.

Wählen wir als a_2' die Gerade $S_{23}Q$, so gilt nach Fall 1:

$a_3 \bar{\wedge} a_2' \bar{\wedge} a_1$. Wir lesen die Kette wieder in der Urrichtung und

haben damit: $a_1 \bar{\wedge} a_2' \bar{\wedge} a_3$.

Fall 3: $P = S^*$: Hier versagt die Methode von

Fall 1, weil Z_{23} auf $S_{12}P$ liegt. Wir nehmen

zunächst wie in Fall 2 einen Punkt Q auf a_1

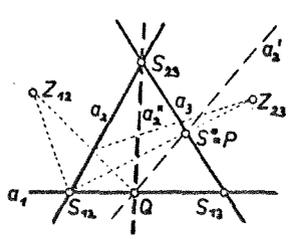
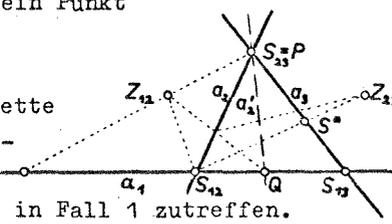
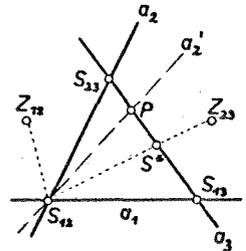
an und wählen als a_2'' die Geraden QS_{23} ;

nach Fall 2 gilt: $a_1 \bar{\wedge} a_2'' \bar{\wedge} a_3$. a_1, a_2'', a_3

erfüllen nun die Voraussetzungen von

Fall 1, denn sie sind pw. verschieden und es gilt für $P \in a_3: P \neq$

S_{13} und $P = S^* = S_{12} \alpha_{12} \alpha_{23} \neq (a_1 a_2'') \alpha_{12} \alpha_{23}$, da $a_1 a_2'' = Q \neq S_{12}$ ist



und α_{12}, α_{23} injektiv sind. Nach Fall 1 ist daher als a_2' die Gerade QP zu wählen und es gilt: $a_1 \bar{\wedge} a_2' \bar{\wedge} a_3$ mit $P \bar{\in} a_2'$.

◆

Bemerkung: Wir benötigen die Behauptung (III) noch schärfer: a_2' durch P kann sogar so gewählt werden, daß $a_2' \neq a_4$ ist, wobei gilt $a_4 \in \mathcal{O}_P \wedge a_4 \neq a_3$. Es genügt in den Fällen 2 und 3 zu zeigen, daß Q so gewählt werden kann, daß $Q \bar{\in} a_4$ gilt: Die Punkte $a_1, a_4, S_{12}, S_{13}, S_{23}, Z_{12}, a_1, Q$ müssen paarweise verschieden sein; nach (*) existiert sicher ein solcher Punkt Q . Im Fall 1 wäre für $S_{12} \bar{\in} a_4$ Fall 2 vorzuschalten.

(IV) Jede dreigliedrige Kette $a_1 \bar{\wedge} a_2 \bar{\wedge} a_3 \bar{\wedge} a_4$ mit $a_1 \neq a_4$ läßt sich verkürzen.

Bew. von (IV):

Ist speziell $a_2 = a_4$, so gibt es für die zweigliedrige Kette $a_1 \bar{\wedge} a_2 \bar{\wedge} a_3$ zwei Möglichkeiten:

(α) a_1, a_2, a_3 sind nicht kopunktal: Dann kann a_2 nach Beweisschritt (III) durch $a_2' (\neq a_2)$ ersetzt werden; man kann also o.B.d.A. $a_2' \neq a_4$ wählen.

(β) a_1, a_2, a_3 sind kopunktal

($\beta 1$) $a_1 = a_3$: Nach Beweisschritt (II) kann dann a_2 durch $a_2' (\neq a_2)$ ersetzt werden; wir wählen $a_2' \neq a_4$.

($\beta 2$) a_1, a_2, a_3 sind paarweise verschieden: Nach Beweisschritt kann man a_2 weglassen, womit die Behauptung von (IV) in diesem Fall bewiesen ist.

Man ist also bei $a_2 = a_4$ entweder schon fertig oder man kann a_2 so ändern, daß $a_2' \neq a_4$ gilt; dies sei im folgenden o.B.d.A. vorausgesetzt. Liest man die Kette von rechts nach links, so kann man analog zeigen, daß o.B.d.A. $a_3 \neq a_1$ vorausgesetzt werden darf. Da benachbarte Glieder stets verschieden sind, folgt aus $a_2 \neq a_4$ und $a_1 \neq a_3$: a_1, a_2, a_3, a_4 sind paarweise verschieden (nach Voraussetzung ist $a_1 \neq a_4$).

Weiters darf man o.B.d.A. voraussetzen, daß niemals drei aufeinanderfolgende Geraden kopunktal sind; sind nämlich drei aufeinanderfolgende Geraden kopunktal und o.B.d.A. pw. verschieden, so ist die Kette nach Beweisschritt (I) verkürzbar und man ist fertig.

Seien nun a_1, a_2, a_3, a_4 pw. verschieden und nie drei aufeinander folgende Geraden kopunktal $\Rightarrow \exists^* S_{jk} := a_j a_k (j \neq k \wedge j, k = 1, \dots, 4)$.

$S_{12} \neq S_{23}$ (sonst wären a_1, a_2, a_3 kopunktal),

$S_{23} \neq S_{34}$ (sonst wären a_2, a_3, a_4 kopunktal).

Der Fall $S_{13} = S_{34}$ bzw. $S_{12} = S_{24}$ ist möglich; daß beides zusammen eintritt, ist jedoch unmöglich.

Es gilt nämlich:

$S_{13} = S_{34} \left. \begin{array}{l} \Rightarrow a_1, a_3, a_4 \text{ kopunktal} \\ \Rightarrow a_1, a_2, a_3, a_4 \text{ kopunktal, da} \\ S_{12} = S_{24} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1, a_2, a_4 \text{ kopunktal} \\ a_j \neq a_k (j \neq k) \end{array} \Rightarrow a_1, a_2, a_3, a_4 \text{ kopunktal im Widerspruch zur Voraussetzung.}$

Wir wählen die Bezeichnung so, daß z.B. $S_{13} \neq S_{34}$ gilt. Die Geraden der Kette $a_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3$ sind nicht kopunktal, daher kann nach Beweisschritt (III) die Gerade a_2 durch a_2' ersetzt werden, wobei a_2' durch einen beliebigen Punkt P \cap a_3 mit $P \neq S_{13}$ geht; wir wählen $P = S_{34} \neq S_{13}$. Nach der Bemerkung zu (III) kann man a_2' insbesondere so wählen, daß a_2' von einer weiteren Geraden durch P verschieden ist; also z.B. $a_2' \neq a_4$. Nun gilt insgesamt:

$$a_1 \bar{a}_2' \bar{a}_3 \bar{a}_4.$$

Nach obiger Wahl sind a_2', a_3, a_4 paarweise verschieden und kopunktal, daher kann nach Beweisschritt (I) die mittlere Gerade a_3 weggelassen werden. Damit wurde die Ausgangskette zu einer zweigliedrigen Kette verkürzt: $a_1 \bar{a}_2' \bar{a}_4$.

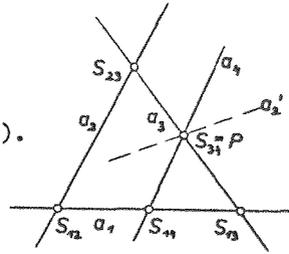


(V) Jede viergliedrige Kette $a_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 \bar{a}_5$ läßt sich verkürzen.

Bew. von (V): Gilt $a_1 = a_4$, so läßt sich bereits die dreigliedrige Anfangskette $a_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4$ nach (IV) zu einer zweigliedrigen Kette verkürzen. Ist dagegen $a_1 \neq a_4$, so gilt $a_1 \neq a_5$ und wir unterscheiden für $a_3 \bar{a}_4 \bar{a}_5$ die Fälle

(α) a_3, a_4, a_5 nicht kopunktal: Nach Beweisschritt (III) kann dann a_4 durch a_4' ($\neq a_4$) ersetzt werden. Die Kette $a_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4'$ ($a_1 \neq a_4'$) ist nun nach (IV) verkürzbar.

(β) a_3, a_4, a_5 kopunktal



(β1) $a_3 = a_5$: Nach (II) kann a_4 durch a'_4 ($\neq a_4$) ersetzt werden, und man kann die neue Kette nach (IV) verkürzen.

(β2) $a_3 \neq a_5$: Nach (I) darf man a_4 weglassen, und die Kette $a_1 \bar{x} a_2 \bar{x} a_3 \bar{x} a_5$ mit $a_1 \neq a_5$ ist nach (IV) verkürzbar.



Damit ist der Verkürzungssatz bewiesen: Ist die gegebene Kette dreigliedrig, so ist $a = a_1 + a_4 = b$ und die Kette nach (IV) zu einer zweigliedrigen verkürzbar. Ist $n+1 > 4$, so greift man aus der n -gliedrigen Kette viergliedrige Teilketten heraus, die nach (V) stets so verkürzt werden können, daß die Randgeraden der Teilketten ungeändert bleiben. Nach endlich vielen Schritten gelangt man zu einer dreigliedrigen Kette mit den verschiedenen Randgeraden a und b , und diese ist nach (IV) zu einer zweigliedrigen Kette $a \bar{x} g \bar{x} b$ verkürzbar. Falls speziell die drei paarweise verschiedenen Geraden a, g, b kopunktal sind, gilt nach (I) sogar $a \bar{x} b$.

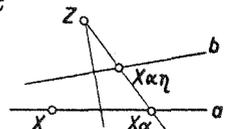
SATZ 1.7: In einer projektiven Ebene gibt es mindestens eine Projektivität eines Grundgebildes auf ein Grundgebilde, welche drei gegebene verschiedene Elemente des ersten Grundgebildes auf drei verschiedene gegebene Elemente des zweiten Grundgebildes abbildet. Die Gruppe der Projektivitäten eines Grundgebildes auf sich ist dreifach transitiv. In einer Desarguesebene läßt sich jede Projektivität zwischen zwei verschiedenen Punktreihen als Produkt von höchstens zwei Perspektivitäten zwischen Punktreihen erzeugen.

Bemerkungen: (a) Durch Dualisierung des obigen Beweises erhält man den Verkürzungssatz für zwei verschiedene projektive Geradenbüschel.

(b) Im Falle einer projektiven Selbstabbildung, z.B. $\alpha : \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_a$, schalten wir eine Gerade $b \neq a$ dazwischen: $b \neq a \wedge Z \nparallel a, b \wedge \eta : a \bar{x} b$. $\alpha \eta : \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_b$ ist eine Projektivität und $\alpha \eta$ kann nach dem Verkürzungssatz als Produkt von höchstens zwei Perspektivitäten β, γ erzeugt werden: $\alpha \eta = \beta \gamma \implies \alpha = \beta \gamma \eta^{-1}$.

Man hat damit:

Eine projektive Selbstabbildung eines Grundgebildes in einer Desarguesebene ist Produkt von höchstens drei Perspektivitäten.



1.8. Projektive Kollineationen

Wir wollen in der Gruppe aller Autokollineationen $PGL(\pi)$ einer projektiven Ebene gewisse Kollineationen auszeichnen.

DEF. 1.8: Eine Kollineation $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ heißt eine projektive Kollineation, wenn sie Produkt von endlich vielen perspektiven Kollineationen ist.

Bemerkung: Nicht jede Autokollineation ist projektiv; jede perspektive Kollineation ist natürlich eine projektive Kollineation.

Folgerungen:

Zwischenbemerkung: Ist G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe, so heißt H ein Normalteiler von G , wenn gilt: $\forall \alpha \in H \wedge \forall \beta \in G \Rightarrow \alpha \beta \alpha^{-1} \in H$.

1) Die Menge aller projektiven Kollineationen bildet gegenüber Hintereinanderausführen eine Gruppe. Diese "projektive Gruppe von π " wird mit $PGL(\pi)$ bezeichnet und ist Normalteiler der Kollineationsgruppe $PFL(\pi)$ von π .

Bew.: (I) $PGL(\pi) \subset PFL(\pi)$: Es ist die Abgeschlossenheit von $PGL(\pi)$ gegenüber der Gruppenoperation und Inversenbildung zu zeigen.

(a) $\alpha, \beta \in PGL(\pi) \stackrel{\text{Def.}}{\implies} \alpha = \pi_1 \dots \pi_k \wedge \beta = \pi_{k+1} \dots \pi_n$ (π_j sind perspektive Kollineationen) $\implies \alpha\beta = \pi_1 \dots \pi_k \pi_{k+1} \dots \pi_n$ und daher ist $\alpha\beta$ Produkt von endlich vielen perspektiven Kollineationen, also $\alpha\beta \in PGL(\pi)$.

(b) $\alpha^{-1} = \pi_k^{-1} \dots \pi_1^{-1}$ (π_j^{-1} sind perspektive Kollineationen nach Satz 1.4) $\implies \alpha^{-1} \in PGL(\pi)$.

(II) $\alpha \in PGL(\pi)$ mit $\alpha = \pi_1 \dots \pi_n$ (π_j sind perspektive Kollineationen mit den Achsen a_j). $\alpha \in PFL(\pi) \implies \alpha^{-1} \pi_j \alpha \in PFL(\pi)$. $\forall A \in a_j$ mit $A\alpha = A'$ gilt $A' \alpha^{-1} \pi_j \alpha = A \pi_j \alpha = A\alpha = A'$, d.h. $a_j \alpha^{-1} = a_j'$ ist eine Fixpunktgerade von $\alpha^{-1} \pi_j \alpha$ und $\alpha^{-1} \pi_j \alpha$ daher eine perspektive Kollineation. Wegen $\alpha^{-1} \alpha \alpha = \alpha^{-1} \pi_1 \dots \pi_n \alpha = (\alpha^{-1} \pi_1 \alpha) (\alpha^{-1} \pi_2 \alpha) \dots (\alpha^{-1} \pi_n \alpha)$ ist $\alpha^{-1} \alpha \alpha$ ein endliches Produkt perspektiver Kollineationen und daher $\alpha^{-1} \alpha \alpha \in PGL(\pi)$.



Zwischenbemerkung:

Abbildung $\varphi: M \rightarrow N$; $D(\varphi) \subset M \wedge D(\varphi) \neq \emptyset$. Sei M_1 eine Teilmenge von M : $M_1 \subset M$.

Wir definieren für $M_1 \cap D(\varphi) \neq \emptyset$ eine neue Abbildung $\varphi|_{M_1}$ aus M_1 in N , welche Beschränkung (Restriktion) von φ auf M_1 heißt, durch folgende Festsetzung:

$$\forall x \in M_1 \cap D(\varphi) \text{ soll gelten: } x\varphi|_{M_1} := x\varphi$$

(Kurz: Die Beschränkung $\varphi|_{M_1}$ gibt an, wie φ die Elemente der Teilmenge M_1 abbildet).

2) Ist die Beschränkung einer Autokollineation α von π auf eine Punktreihe \mathcal{P}_g projektiv, so ist die Beschränkung von α auf jede Punktreihe projektiv.

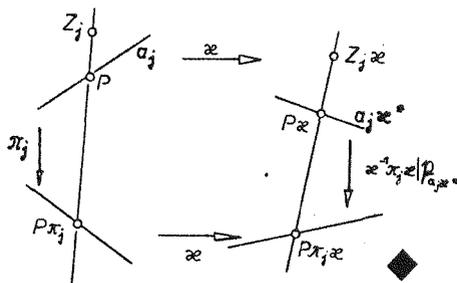
Bew.: $\alpha \in \text{PGL}(\pi)$ und $\alpha|_{\mathcal{P}_g} =: \alpha_g$ ist eine Projektivität $\mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_{g\alpha^*}$.

Sei $h \in \mathcal{U}$ und $h \neq g$, so gibt es nach Satz 1.7 sicher eine Projektivität $\alpha: \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_h$. Für alle Punkte $X' \in \mathcal{P}_{g\alpha^*}$ gilt dann

$X'\alpha^{-1}\alpha \in \mathcal{P}_{h\alpha^*}$, sodaß $\alpha^{-1}\alpha$ eine Abbildung $\beta: \mathcal{P}_{g\alpha^*} \rightarrow \mathcal{P}_{h\alpha^*}$ bestimmt. Nach Def. 1.7 ist α Produkt von endlich vielen Perspektivitäten π_j zwischen Punktreihen; ist \mathcal{P}_{a_j} die Definitionsmenge von π_j , so ist $\alpha^{-1}\pi_j\alpha|_{\mathcal{P}_{a_j\alpha^*}}$ wieder eine Perspektivität und damit

$\beta = \alpha^{-1}\alpha|_{\mathcal{P}_{g\alpha^*}}$ wegen $\alpha^{-1}\alpha = \alpha^{-1}\pi_1\alpha \dots \alpha^{-1}\pi_n\alpha = \alpha^{-1}\pi_1\alpha \alpha^{-1}\pi_2\alpha \dots \alpha^{-1}\pi_n\alpha$ eine Projektivität. Für jeden Punkt $Y \in \mathcal{P}_h$ gilt somit $Y\alpha = Y\alpha^{-1}\alpha \alpha^{-1}\alpha = Y\alpha^{-1}\alpha\beta$, d.h. $\alpha|_{\mathcal{P}_h} = \alpha^{-1}\alpha_g\beta$ ist als Produkt von Projektivitäten selbst projektiv.

...



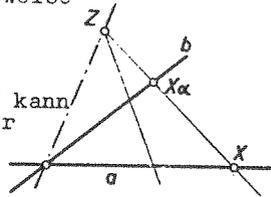
...

Bemerkung: Durch dualisieren des Beweises erhält man die analoge Aussage für $\alpha|_{\mathcal{U}_A}$.

3) In einer Desarguesebene läßt sich jede Projektivität einer Punktreihe auf eine Punktreihe zu einer projektiven Kollineation der Ebene fortsetzen.

Bew.: Es genügt zu zeigen, daß eine Perspektivität $\alpha: \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_b$ mit $a \neq b$ sich stets zu einer perspektiven Kollineation fortsetzen läßt. Ist Z das Zentrum von $a \overline{\wedge} b$, so existiert in π_{De} nach

Satz 1.5 genau eine Elation α mit dem Zentrum Z , der Achse $Z.ab$ und $X \mapsto X\alpha (X \neq ab)$, und es gilt trivialerweise $\alpha|_{\mathcal{P}_a} = \alpha$.



Bemerkung: (a) Nach obigem Beweis und 1.7 kann auch eine projektive Selbstabbildung einer Punktreihe stets zu einer projektiven Kollineation fortgesetzt werden.

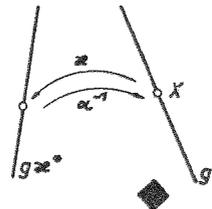
(b) Dual hat jede projektive Abbildung eines Geradenbüschels auf ein Geradenbüschel immer Platz in einer projektiven Kollineation $\alpha^*: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$.

4) In einer Desarguesebene ist eine Kollineation genau dann projektiv, wenn ihre Beschränkung auf ein Grundgebilde eine Projektivität ist.

Bew.: (o.B.d.A. für eine Punktreihe)

(1) Die Beschränkung einer perspektiven Kollineation auf ihre Achse ist die Identität, also eine Perspektivität; nach 2) ist daher die Beschränkung einer perspektiven Kollineation auf jede Punktreihe projektiv. Da eine projektive Kollineation Produkt von endlich vielen perspektiven Kollineationen ist, ist auch ihre Beschränkung auf jede Punktreihe projektiv.

(2) Sei $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ eine Kollineation und für eine Punktreihe \mathcal{P}_g sei $\alpha|_{\mathcal{P}_g}$ eine Projektivität $\stackrel{F.3}{\implies} \exists \alpha \in \text{PGL}(\pi)$ mit $\alpha|_{\mathcal{P}_g} = \alpha|_{\mathcal{P}_g} \implies \alpha|_{\mathcal{P}_g} \cdot \alpha^{-1}|_{\mathcal{P}_g} = (\alpha\alpha^{-1})|_{\mathcal{P}_g} = \iota$. Die Abbildung $\alpha\alpha^{-1}$ läßt also jeden Punkt X auf g fest, d.h. $\alpha\alpha^{-1} =: \beta$ ist eine perspektive Kollineation. $\alpha\alpha^{-1} = \beta \implies \alpha = \beta\alpha$ mit $\alpha, \beta \in \text{PGL}(\pi) \stackrel{F.1}{\implies} \alpha = \beta\alpha \in \text{PGL}(\pi)$.



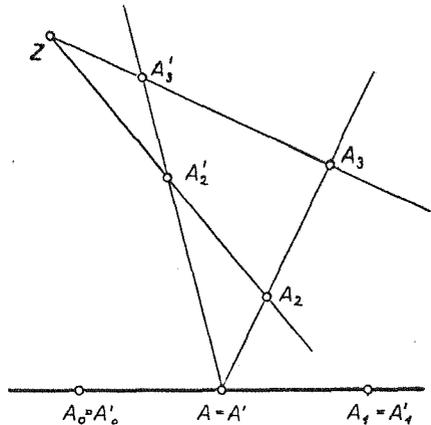
5) Die projektive Gruppe $\text{PGL}(\pi_{\text{De}})$ einer Desarguesebene ist viereckstransitiv.

"Viereckstransitiv" soll heißen: Zu je zwei gegebenen Vierecken A_j und A'_j ($j=0, \dots, 3$) gibt es mindestens eine projektive Kollineation $\alpha \in \text{PGL}(\pi_{2\epsilon})$ mit $A_j \alpha = A'_j$ ($j=0, \dots, 3$) (I.a. existieren jedoch mehrere projektive Kollineationen mit der gewünschten Eigenschaft).

Bew.: (1) Setzen wir $A_0 A_1 A_2 A_3 = A$ und $A'_0 A'_1 A'_2 A'_3 = A'$, so sind A_0, A_1, A bzw. A'_0, A'_1, A' pw. verschieden, da z.B. A_0, A_2, A_3 nicht kollinear sind. Nach Satz 1.7 existiert in π_{De} eine Projektivität, welche $A_0 \mapsto A'_0, A_1 \mapsto A'_1, A \mapsto A'$ leistet und nach 3) läßt sich diese zu einer projektiven Kollineation σ fortsetzen. Wir können also o.B.d.A. $A'_0 = A_0 \wedge A'_1 = A_1 \wedge A' = A$ voraussetzen und schreiben i.f. für $A_2 \sigma$ bzw. $A_3 \sigma$ wieder A_2 bzw. A_3 .

(2) Ist $A_2 A_3 \neq A'_2 A'_3$, so auch $A_2 A'_2 \neq A_3 A'_3$. Dann existiert eine perspektive Kollineation α mit dem Zentrum $Z := A_2 A'_2 \cdot A_3 A'_3$ und der Achse $A_0 A_1$, die $A_2 \mapsto A'_2$ leistet.

Wegen der Vervollständigung einer perspektiven Kollineation gilt auch $A_3 \mapsto A'_3$ und daher führt die perspektive Kollineation α das gegebene Urbviereck in das gegebene Bildviereck über.



(3) Ist $A_2 A_3 = A'_2 A'_3$, so wenden wir eine beliebige perspektive Kollineation β an mit der Achse $A_0 A_1$ und einem Zentrum $Z \notin A_2 A_3$. Setzen wir dann $A_2 \beta$ bzw. $A_3 \beta$ wieder A_2 bzw. A_3 , so liegen die Voraussetzungen von (2) vor. Die Kollineation $\alpha := \sigma \alpha$ bzw. $\alpha := \sigma \beta \alpha$ ist nach Konstruktion projektiv und leistet $A_j \mapsto A'_j$ ($j=0, \dots, 3$).



SATZ 1.8: Die projektiven Kollineationen einer projektiven Ebene π bilden die projektive Gruppe $PGL(\pi)$, welche Normalteiler der Kollineationsgruppe $P\Gamma L(\pi)$ von π ist. In einer Desarguesebene ist eine Kollineation genau dann projektiv, wenn ihre Beschränkung auf ein Grundgebilde eine Projektivität ist, und jede Projektivität läßt sich zu einer projektiven Kollineation fortsetzen. Die projektive Gruppe einer Desarguesebene ist viereckstransitiv.

1.9. Der Fundamentalsatz

Nach Satz 1.7 ist $PGL(\mathcal{P}_a)$ in jeder beliebigen projektiven Ebene dreifach transitiv. Wir wollen ermitteln, unter welchen Voraussetzungen genau eine Projektivität existiert, die vorgegebene Tripel zuordnet. Nach Satz 1.8 ist $PGL(\mathcal{P}_a)$ viereckstransitiv. Unter welchen Voraussetzungen gibt es zu vorgegebenen Vierecken genau eine projektive Kollineation, die die Ecken zuordnet?

DEF.1.9 a: In einer projektiven Ebene π ist der Fundamentalsatz (FS) gültig, falls gilt: Eine projektive Abbildung einer Punktreihe auf sich, die drei verschiedene Fixpunkte besitzt, ist notwendig die Identität.

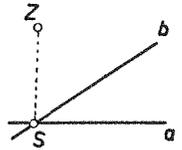
Bemerkung: Wir bezeichnen eine solche Ebene i.f.mit π_{FS} . In einer solchen Ebene ist jede projektive Selbstabbildung eines Geradenbüschels mit drei verschiedenen Fixgeraden die Identität, wie man durch Übergang zu einer perspektiven Punktreihe sofort erkennt.

Folgerungen:

1) In jeder π_{FS} gilt: $PGL(\mathcal{P}_a)$ ist scharf dreifach transitiv, d.h. zu $A, B, C \in \mathcal{P}_a$ (pw. verschieden) und $A', B', C' \in \mathcal{P}_a$ (pw. verschieden) existiert genau ein $\alpha \in PGL(\mathcal{P}_a)$ mit $A\alpha = A'$, $B\alpha = B'$, $C\alpha = C'$.

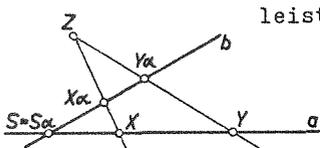
Bew.: Seien $\alpha, \beta \in PGL(\mathcal{P}_a)$ mit $A\alpha = A\beta = A'$, $B\alpha = B\beta = B'$, $C\alpha = C\beta = C'$
 $\implies \alpha\beta^{-1} \in PGL(\mathcal{P}_a)$ (nach 1.7). Außerdem gilt: $A\alpha\beta^{-1} = A'\beta^{-1} = A$,
 $B\alpha\beta^{-1} = B'\beta^{-1} = B$, $C\alpha\beta^{-1} = C'\beta^{-1} = C$, d.h. $\alpha\beta^{-1}$ hat drei verschiedene Fixpunkte $\xrightarrow{FS} \alpha\beta^{-1} = \iota \implies \alpha = \beta$.

2) Ist α eine Perspektivität: $\rho_a \xrightarrow{\alpha} \rho_b$ ($a \neq b$), so ist der Schnittpunkt $S := ab$ nach Definition selbstzugeordnet: $S\alpha = S$ (vgl. 1.7).



Ist $\alpha: \rho_a \rightarrow \rho_b$ mit $a \neq b$ eine Projektivität und der Schnittpunkt $S = ab$ in α selbstzugeordnet, so ist α in π_{FS} notwendig eine Perspektivität.

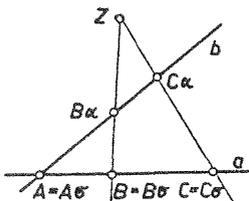
Bew.: $X, Y, S \in \rho_a$ (pw. verschieden) $\Rightarrow X\alpha, Y\alpha, S\alpha = S \in \rho_b$
 (pw. verschieden) $\Rightarrow \exists^* Z := XX\alpha \cdot YY\alpha$. Die Perspektivität $\beta: \rho_a \xrightarrow{Z} \rho_b$



leistet: $\left. \begin{aligned} XB &= X\alpha \\ YB &= Y\alpha \\ SB &= S\alpha \end{aligned} \right\} \xrightarrow{FS} \alpha = \beta, \text{ d.h. } \alpha \text{ ist eine Perspektivität.}$

3) Ist in einer projektiven Ebene π eine Projektivität zwischen zwei verschiedenen Punktreihen mit selbstzugeordnetem Schnittpunkt stets eine Perspektivität, dann gilt FS (Umkehrung von Folg. 2)).

Bew.: $A, B, C \in \rho_a$ (pw. verschieden); $\sigma \in PGL(\rho_a)$ mit $A\sigma = A, B\sigma = B, C\sigma = C$. $\exists b \in \rho_b$ mit $b \neq a \wedge \exists Z \in \rho$ mit $Z \notin a, b$.



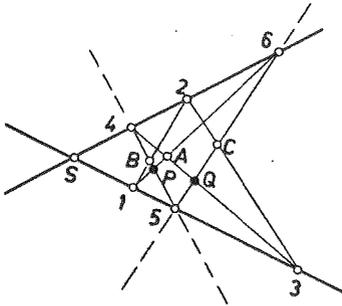
Die Perspektivität $\alpha: \rho_a \xrightarrow{Z} \rho_b$ leistet:
 $(A\sigma)\alpha = A, (B\sigma)\alpha = B\alpha, (C\sigma)\alpha = C\alpha$.

Die Abbildung $\beta := \sigma \alpha: \rho_a (\rightarrow \rho_a) \rightarrow \rho_b$ ist eine Projektivität und besitzt den selbstzugeordneten Punkt $A; \beta$ ist daher nach Voraussetzung eine Perspektivität $\Rightarrow \sigma = \beta \alpha^{-1}$ ist Produkt von zwei Perspektivitäten. Die Perspektivität α^{-1} hat das Zentrum Z (Def. von α); das Perspektivitätszentrum \bar{Z} von β muß mit B und $B\beta$ ($= B\sigma\alpha = B\alpha$) bzw. C und $C\beta (= C\alpha)$ kollinear sein $\Rightarrow Z = \bar{Z} \Rightarrow \alpha$ und β sind Perspektivitäten mit demselben Zentrum $\Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \sigma = \beta \alpha^{-1} = \alpha \alpha^{-1} = \iota$.

Bemerkung: Die Folgerungen 2) und 3) können durch Dualisieren der Beweise auf projektive Geradenbüschel übertragen werden.

4) Jede π_{FS} ist eine Pappusebene und umgekehrt ($FS \Leftrightarrow PP$).

Bew.: (a) Voraussetzung: π_{FS} .



Wir nehmen in π_{FS} ein beliebiges Sechseck 1...6 an, dessen Ecken die Voraussetzungen von PP erfüllen, ohne daß PP trivial gilt (vgl.1.6) und setzen $A:=16.34$, $B:=12.45$, $C:=23.56$, $P:=16.45$, $Q:=34.56$. Wir definieren eine Projektivität $\alpha: \mathcal{P}_{45} \rightarrow \mathcal{P}_{56}$ durch: $\mathcal{P}_{45} \xrightarrow{1} \mathcal{P}_{45} \xrightarrow{2} \mathcal{P}_{45} \xrightarrow{3} \mathcal{P}_{45}$ mit: $4 \mapsto 4 \mapsto Q$, $B \mapsto 2 \mapsto C$, $P \mapsto 6 \mapsto 6$. Bei α gilt auch $5 \mapsto S \mapsto 5$, d.h. der Punkt 5 ist unter α selbstzugeordnet; da nach

Voraussetzung FS gilt, ist Folgerung 2 richtig, d.h. α ist eine Perspektivität. Die Verbindungsgeraden von in α zugeordneten Punkten müssen daher durch ein Zentrum Z_α gehen: $Z_\alpha = 4Q.P6=A$ (nach der Inzidenztabelle). Ebenso muß auch BC durch $Z_\alpha=A$ gehen, d.h. A,B,C sind kollinear, womit PP bewiesen ist.

(b) Voraussetzung: π_{PP} .

Nach Folgerung 3 genügt es zu zeigen: Sind zwei verschiedene projektive Punktreihen a_1, a_3 so zugeordnet, daß ihr Schnittpunkt selbstentsprechend ist, so ist die Zuordnung stets eine Perspektivität. $PP \xrightarrow{1.6} De \implies$ Verkürzungssatz 1.7 ist richtig, d.h. $\mathcal{P}_{a_1} \bar{\wedge} \mathcal{P}_{a_3}$ kann als Produkt von höchstens zwei Perspektivitäten beschrieben werden: $a_1 \bar{\wedge} a_2 \bar{\wedge} a_3$. Wir unterscheiden:
Fall 1: a_1, a_2, a_3 sind kopunktal: nach Beweisschritt I zum Verkürzungssatz (vgl.1.7,Folg.3) kann man das Mittelglied a_2 weglassen, also gilt: $a_1 \bar{\wedge} a_3$, wie behauptet.

Fall 2: a_1, a_2, a_3 sind nicht kopunktal, wobei der Schnittpunkt $S:=a_1 a_3$ bei dem Produkt der beiden Perspektivitäten $a_1 \bar{\wedge} a_2 \bar{\wedge} a_3$ festbleibt. Damit liegen genau die Voraussetzungen von 1.7,Folg.2 vor und in einer PP-Ebene ist dieses Produkt von zwei Perspektivitäten eine Perspektivität.

Bemerkungen: (a) Wir schreiben i.f. daher π_{PP} statt π_{FS} .

(b) Die Aussage $FS \Rightarrow PP$ gehört zum klassischen Bestand der projektiven Geometrie. Die Umkehrung $PP \Rightarrow FS$ wurde um die Jahrhundertwende zuerst von N. WIENER vermutet und dann von F. SCHUR bewiesen.

5) In jeder π_{PP} gilt: $PGL(\pi_{PP})$ ist scharf viereckstransitiv, d.h. es gibt genau eine projektive Kollineation, die ein gegebenes Ur- in ein gegebenes Bildviereck überführt.

Bew.: A_j und A'_j ($j=0, \dots, 3$) seien die gegebenen Vierecke.

$FS \stackrel{1.4}{\Leftrightarrow} PP \stackrel{1.4}{\Leftrightarrow} De \Rightarrow$ Satz 1.8 gilt: Es existiert mindestens ein $\alpha \in PGL(\pi)$ mit $A_j \alpha = A'_j$ ($j=0, \dots, 3$).

(a) Ist speziell $A_j = A'_j$ ($j=0, \dots, 3$), so $\exists^* A := A_0 A_1 A_2 A_3$ und es gilt $A \alpha = A$, denn die Geraden $A_0 A_1$ und $A_2 A_3$ bleiben dann unter α^* einzeln fest $\Rightarrow \alpha|_{\mathcal{R}_{A, A}}$ ist nach Satz 1.8 eine Projektivität und diese besitzt drei verschiedene Fixpunkte, nämlich A_0, A_1, A_2 . Dann ist $\alpha|_{\mathcal{R}_{A, A}} = \text{id}$. Dann ist α nach Definition eine perspektive Kollineation, welche außerhalb der Achse die beiden verschiedenen Fixpunkte A_2, A_3 besitzt, also nach 1.4, Folg.2 (da in π_{PP} auch De gilt) die Identität.

(b) Sind $\alpha_1, \alpha_2 \in PGL(\pi_{PP})$ zwei projektive Kollineationen mit $A_j \alpha_1 = A'_j \alpha_2 = A'_j$ ($j=0, \dots, 3$), so läßt $\alpha_1 \alpha_2^{-1}$ die Punkte A_0, A_1, A_2, A_3 einzeln fest und ist daher nach (a) die Identität. Dann folgt aber $\alpha_1 = \alpha_2$.

Bemerkung: Aus obigem Beweis folgt: Läßt eine projektive Kollineation $\alpha: \pi_{pp} \rightarrow \pi_{pp}$ die Punkte eines Vierecks einzeln fest, so ist sie notwendig die Identität.

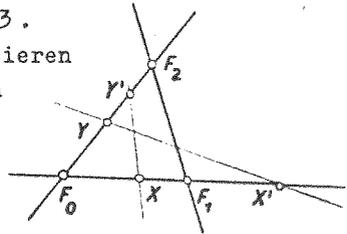
6) Jede projektive nicht perspektive Autokollineation einer PP -Ebene besitzt entweder drei nicht kollineare Fixpunkte oder zwei verschiedene Fixpunkte oder einen Fixpunkt oder keinen Fixpunkt. Kollineationen vom ersten Typ existieren in jeder π_{PP} der Ordnung größer drei, Kollineationen vom zweiten Typ in jeder

π_{PP} der Ordnung größer zwei, Kollineationen vom dritten Typ in jeder π_{PP} .

Bew.: (1) $\alpha \in \text{PGL}(\pi_{pp})$. $\alpha \neq \text{id} \implies$ es existiert kein Viereck von Fixpunkten. Weiters kann nach Voraussetzung auf der Verbindungsgeraden von zwei verschiedenen Fixpunkten kein dritter Fixpunkt liegen, da sonst nach dem FS diese Verbindungsgerade punktweise festbleibt und α eine perspektive Kollineation ist. Es existieren also höchstens drei nicht kollineare Fixpunkte.

(2) Voraussetzung: π_{PP} von der Ordnung $N > 3$.

F_0, F_1, F_2 nicht kollinear; wegen $N > 2$ existieren Punkte X, X' mit F_0, F_1, X, X' pw. verschieden und kollinear, sowie Punkte Y, Y' mit F_0, F_2, Y, Y' pw. verschieden und kollinear. Wegen $N > 3$ kann $XY'.X'Y \not\parallel F_1F_2$ vorausgesetzt werden.



\square * Homologie $\alpha \neq \text{id}$ mit Zentrum F_0 , Achse F_1F_2 und $X \mapsto X\alpha = X'$;
 \square * Homologie $\beta \neq \text{id}$ mit Zentrum F_2 , Achse F_0F_1 und $Y \mapsto Y\beta = Y'$.
 $\alpha\beta =: \alpha \in \text{PGL}(\pi_{pp})$ mit $F_j\alpha = F_j$ ($j=0,1,2$) nach Konstruktion;
 $\alpha \neq \text{id}$, da $X\alpha\beta = X' + X$; α besitzt daher sicher keinen weiteren Fixpunkt, der mit F_0, F_1, F_2 zusammen ein Viereck bestimmt. Auch auf F_jF_k ($j \neq k$) liegt kein weiterer Fixpunkt, da sonst $\alpha|_{F_jF_k} = \text{id}$ nach FS: dies ist für F_0F_1 und F_1F_2 nach Konstruktion nicht der Fall und stimmt auch für F_0F_2 nicht, da sonst $Y'\alpha\beta = Y'$ gelten müßte; wegen $XY'.X'Y \not\parallel F_1F_2$ ist aber $Y'\alpha \neq Y$ und damit $Y'\alpha\beta \neq Y\beta = Y'$. Die projektive Kollineation α besitzt also genau die Fixpunkte F_j ($j=0,1,2$).

(3) Voraussetzung: π_{PP} der Ordnung $N > 2$.

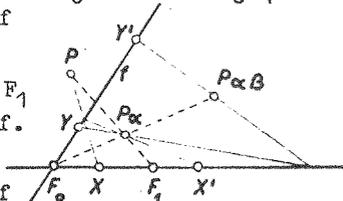
$F_0 \neq F_1$. Wegen $N > 2$ existieren Punkte X, X' mit F_0, F_1, X, X' pw. verschieden und kollinear; sei $f \in \mathcal{U}$ mit $F_0 \in f \wedge f \neq F_0F_1$.

\square * Homologie $\alpha \neq \text{id}$ mit Zentrum F_1 , Achse f und $X \mapsto X\alpha = X'$.

\square * Elation $\beta \neq \text{id}$ mit Zentrum F_0 , Achse F_0F_1 und $Y \mapsto Y\beta = Y'$ mit $F_0, Y, Y' \notin f \wedge F_0, Y, Y' \in f$.

$\alpha\beta =: \alpha \in \text{PGL}(\pi_{pp})$ mit $F_j\alpha = F_j$ ($j=0,1$)

und $\alpha|_{F_0F_1} \neq \text{id}$, da $X\alpha\beta = X' \neq X$ gilt; auf F_0F_1 liegt also kein weiterer Fixpunkt. Ebenso liegt auf f nur



der Fixpunkt F_0 , da bei β auf f nur F_0 festbleibt.

Für einen Punkt $P \notin F_0 F_1$, $P \notin f$ ist stets $P \neq P\alpha$ und $P, P\alpha, F_1$ kollinear sowie $P\alpha \neq P\alpha\beta$ und $P\alpha, P\alpha\beta, F_0$ kollinear; für $P = P\alpha\beta$ müßten P, F_0, F_1 kollinear sein im Gegensatz zur Voraussetzung für P . Die projektive Kollineation α besitzt also genau die Fixpunkte F_0, F_1 .

(4) Voraussetzung: π_{PP} .

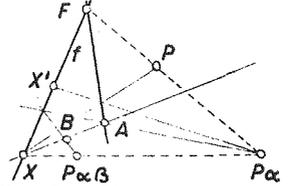
F, A, B nicht kollinear und $f \in \mathcal{U}_F$ mit $A, B \notin f \Rightarrow$

\square^* $X = f.AB$. In \mathcal{K}_F existiert nach Satz 1.2 sicher ein Punkt $X' \neq X, F$.

\square^* Elation $\alpha \neq \text{id}$ mit Zentrum F , Achse FA und $X \mapsto X\alpha = X'$.

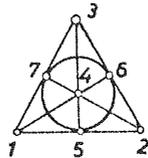
\square^* Elation $\beta \neq \text{id}$ mit Zentrum X , Achse f und $A \mapsto A\beta = B$.

$\alpha\beta =: \alpha \in \text{PGL}(\pi_{PP})$ mit $F\alpha = F$. Da f bei β Punktfixgerade ist und bei α nur den Fixpunkt F trägt, bleibt bei α außer F kein Punkt von f fest; analoges gilt für die Punktreihe FA . Ist $P \notin f$, $P \notin FA$, so ist $P \neq P\alpha$ und $P, P\alpha, F$ kollinear sowie $P\alpha \neq P\alpha\beta$ und $P\alpha, P\alpha\beta, X$ kollinear; für $P = P\alpha\beta$ müßten P, F, X kollinear sein im Gegensatz zur Voraussetzung für P . Die projektive Kollineation α besitzt also genau den Fixpunkt F .



(5) Ein Beispiel für eine projektive Kollineation ohne Fixpunkt im Minimalmodell liefert die Permutation

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$; man prüft leicht nach, daß dabei kollineare Lage erhalten bleibt.



Bemerkungen: (a) Eine projektive Kollineation ohne Fixpunkt ist nicht in jeder PP-Ebene möglich (siehe später).

(b) In einer PP-Ebene der Ordnung zwei ist jede projektive Kollineation, die zwei verschiedene Fixpunkte besitzt, notwendig perspektiv, da der einzige weitere Punkt auf der Verbindungsgeraden der beiden Fixpunkte notwendig ebenfalls Fixpunkt ist. In einer PP-Ebene der Ordnung zwei ist jede projektive Kollineation, die drei nicht kollineare Fixpunkte besitzt, notwendig die Identität, da der einzige weitere Punkt, der mit den Fixpunkten ein Viereck bildet, notwendig ebenfalls ein Fixpunkt ist. In einer PP-Ebene der Ordnung drei ist jede projektive Kollineation mit drei nicht kollinearen Fixpunkten perspektiv, da in der Bezeichnung des obigen Beweisschrittes (2) stets $Y'\alpha = Y$ und damit $Y'\alpha\beta = Y'$, also $\alpha|_{\mathcal{P}_{F_0 F_2}} = \text{id}$ gilt.

SATZ 1.9: Die projektiven Ebenen, in denen der Fundamentalsatz gilt, sind genau die Pappusebenen. In einer Pappusebene ist die projektive Gruppe eines Grundgebildes scharf dreifach-transitiv und die projektive Gruppe der Ebene scharf viereckstransitiv.

Bemerkung: Wie wir später sehen werden ist PAE eine PP-Ebene, daher gilt nach oben in PAE auch FS.

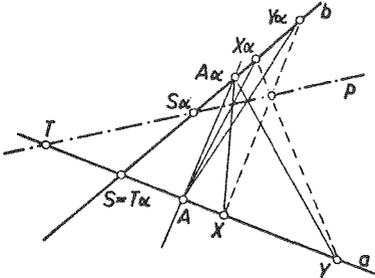
7) Eigenschaften von Projektivitäten in PP-Ebenen.

(I) Wir wollen eine Methode angeben, wie in π_{PP} eine nicht perspektive Projektivität $\alpha: \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_b$ ($a \neq b$) unter Benutzung einer "Projektivitätsachse" vervollständigt werden kann.

Die "kreuzweisen" Verbindungsgeraden $X.Y\alpha$ und $X\alpha.Y$ mit $X, Y \in \mathcal{P}_a$, $X \neq Y$ treffen einander auf einer Achse (Projektivitätsachse).

Bew.: Wegen $PP \Rightarrow FS$ ist α durch $A \mapsto A\alpha$ ($\neq S := a.b$), $B \mapsto B\alpha$, $C \mapsto C\alpha$ eindeutig bestimmt. Wir

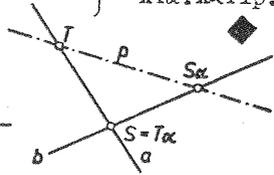
halten A fest, während X in \mathcal{P}_a variiert: $\mathcal{G}_{A\alpha\bar{A}} \mathcal{P}_a \xrightarrow{\alpha} \mathcal{P}_b \bar{\mathcal{P}}_A \Rightarrow \mathcal{G}_{A\alpha} \bar{\mathcal{P}}_A$. Der Bündelstrahl $AA\alpha$ ist in dieser Projektivität selbstentsprechend $\Rightarrow \mathcal{G}_{A\alpha\bar{A}} \mathcal{G}_A \Rightarrow \exists$ eine Perspektivitätsachse $p \in \mathcal{G}$, auf der einander Ur- und Bildstrahl stets treffen. Sei $Y \in \mathcal{P}_a$



mit A, X, Y pw. verschieden; $Y\alpha$ kann bei bekanntem p unter Beachtung von $AY\alpha . A\alpha Y \cap p$ konstruiert werden.

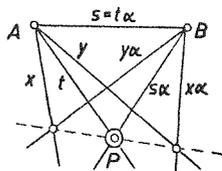
Aus dem PP-Schema $\begin{Bmatrix} A & X & Y \\ A\alpha & X\alpha & Y\alpha \end{Bmatrix}$ folgt:

$$\underbrace{AX\alpha . A\alpha X}_{I_p}, \quad \underbrace{AY\alpha . A\alpha Y}_{I_p}, \quad XY\alpha . X\alpha Y \text{ sind kollinear} \} \Rightarrow XY\alpha . X\alpha Y I_p.$$



Bemerkungen: (a) Wählt man speziell $X=S$, so liefert die Konstruktion von $S\alpha$ gemäß obiger Kette: $S\alpha = p.b$. Ebenso erkennt man durch umgekehrtes Durchlaufen der Kette: $T := p.a \Rightarrow T\alpha = S$. p ist also die Verbindungsgerade des Bild- und Ursprunges des Schnittpunktes der beiden Geraden (Ist α keine Perspektivität, so ist $T \in \mathcal{P}_a$ stets verschieden von $S\alpha \in \mathcal{P}_b$).

(b) Dual: Zu zwei verschiedenen projektiven nicht perspektiven Geradenbüscheln $\mathcal{U}_A \times \mathcal{U}_B$ existiert ein "Projektivitätszentrum P" und es gilt: $x.y\alpha$, $y.x\alpha$ und P liegen kollinear. P ist der Schnittpunkt des Bild- und Urstrahles des gemeinsamen Strahles der beiden Büschel.



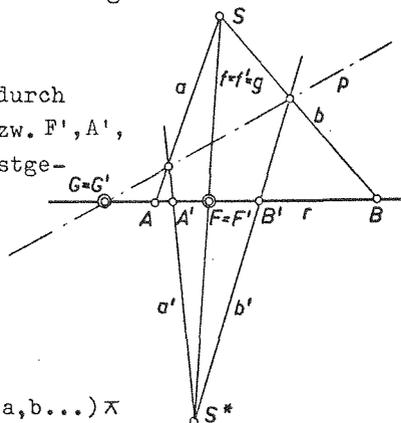
(II) Wir wollen die projektiven Selbstabbildungen eines Grundgebildes in einer π_{PP} genauer untersuchen. $PP \Rightarrow FS \Rightarrow$ eine nichttriviale projektive Selbstabbildung $\alpha (\neq \iota)$ eines Grundgebildes hat höchstens zwei verschiedene Fixelemente.

DEF.1.9 b: Eine projektive Selbstabbildung eines Grundgebildes in einer Pappusebene heißt

- "hyperbolisch", wenn sie genau zwei Fixelemente besitzt;
- "parabolisch", wenn sie genau ein Fixelement besitzt;
- "elliptisch", wenn sie kein Fixelement besitzt.

Ist von einer projektiven Selbstabbildung $\alpha \neq \iota$ einer Punktreihe in π_{PP} ein Fixpunkt F bekannt, so kann ein zweiter Fixpunkt konstruiert werden, der jedoch nicht notwendig von F verschieden ist.

Bew.: $\alpha: \mathbb{R}_r \rightarrow \mathbb{R}_r$ ist nach Satz 1.9 durch $F \mapsto F'=F$, $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$ (mit F, A, B bzw. F', A', B' paarweise verschieden) eindeutig festgelegt; o.B.d.A. sei $A \neq A'$. $\exists g \in \mathcal{U}$ mit $F \in g \wedge g \neq r$, $\exists S, S' \in \mathcal{P}_2$ mit S, S', F paarweise verschieden.



Wir projizieren $r(X, \dots)$ aus S bzw. $r(X', \dots)$ aus S' und erhalten (vgl. Figur): $S(f, a, b, \dots) \times r(F, A, B, \dots) \times r(F', A', B', \dots) \times S^*(f', a', b', \dots) \Rightarrow S(f, a, b, \dots) \times S^*(f', a', b', \dots)$. Der gemeinsame Strahl $f=f'=g$ der beiden Büschel ist selbstentsprechend $\Rightarrow S(f, a, b, \dots) \times S^*(f', a', b', \dots)$ wegen Folg.3 $\Rightarrow \exists$ Perspektivitätsachse p, auf der sich a, a' und b, b' treffen; wegen $A \neq A'$ ist $p \neq r$. Man kann also α so beschreiben: $r(F, A, B, \dots) \times S(f, a, b, \dots) \stackrel{p}{\times} S^*(f', a', b', \dots) \times r(F', A', B', \dots)$. Der Punkt $G:=p.r$ ist der weitere Fixpunkt von α , wie man durch Durchlaufen der neuen Kette für α erkennt.

Bemerkung: Dual kann in $R(f, a, b, \dots) \cap R(f' = f, a', b', \dots)$ der weitere Fixstrahl konstruiert werden.

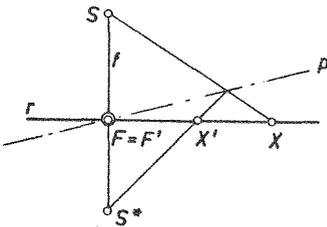
(III) Existenz von hyperbolischen, parabolischen und elliptischen Projektivitäten.

(a) Hyperbolische Projektivitäten existieren in jeder Pappusebene der Ordnung größer zwei.

Bew.: Nach Satz 1.9 ist $PGL(\mathcal{P}_r)$ scharf dreifach transitiv. Durch $F \mapsto F' = F, G \mapsto G' = G, A \mapsto A' (\neq A)$ (F, G, A bzw. F', G', A' pw. verschieden) ist eine Projektivität $\alpha + \iota$ eindeutig festgelegt. Diese hat höchstens zwei Fixpunkte, die nach Angabe in F und G liegen $\Rightarrow \alpha$ ist hyperbolisch. ◆

(b) Parabolische Projektivitäten existieren in jeder projektiven Ebene.

Bew.: Wir kehren die Konstruktion des zweiten Fixpunktes in (II) um und wählen drei pw. verschiedene Geraden r, f, p durch einen



gemeinsamen Punkt F . $\exists S, S^* \in \mathcal{P}_f$ mit F, S, S^* pw. verschieden. Die Abbildung $\beta: \mathcal{P}_r \rightarrow \mathcal{P}_r$ mit $\beta(X) = \mathcal{U}_S \cap \mathcal{P}_p \cap \mathcal{U}_{S^*} \cap \mathcal{P}_r(X')$ ist eine Projektivität mit F als Fixpunkt. F ist der einzige Fixpunkt, da für einen Fixpunkt $G = G'$ nach Konstruktion $G \in p$ gilt und wegen $p \neq r$ dann $G = F$ folgt.

β hat also genau den Fixpunkt F , d.h. β ist parabolisch. ◆

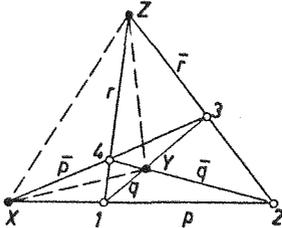
Bemerkungen: (a) Über die Existenz von elliptischen Projektivitäten können wir jetzt noch keine Aussage machen. Wir werden später sehen, daß es Pappusebenen gibt, in denen elliptische Projektivitäten existieren, und solche, in denen keine elliptischen Projektivitäten existieren.

(b) In gewissen projektiven Ebenen, die nicht pappussch sind, gibt es nichttriviale Projektivitäten, die sogar unendlich viele Fixpunkte besitzen.

1.10. Fanoebenen, harmonische Lage, harmonische Homologien und projektive Involutionen

Sei $1, 2, 3, 4 \in \mathcal{A}$ ein Viereck (vg. 1.1). Nach i_1 sind die folgenden Geraden eindeutig bestimmt:

$p:=12, q:=13, r:=14$
 $\bar{p}:=34, \bar{q}:=24, \bar{r}:=23$ ("Seiten des Vierecks").



(a) Die Viereckseiten sind paarweise verschieden (ind.: o.B.d.A. $p=\bar{p}$ bzw. $p=q$; im ersten Fall sind $1, 2, 3, 4$ kollinear, im zweiten Fall $1, 2, 3$: Widerspruch).

Ein Paar von Seiten heißt "Gegenseitenpaar", wenn diese beiden Seiten gemeinsam alle Vierecksecken tragen. Nach i_2 ist der Schnittpunkt von je zwei Gegenseiten eindeutig bestimmt: $X:=p.\bar{p}, Y:=q.\bar{q}, Z:=r.\bar{r}$; diese Punkte heißen "Diagonalpunkte des Vierecks".

(b) Die Diagonalpunkte sind von den Vierecksecken verschieden (ind.: o.B.d.A. $X=1 \Rightarrow 1 \in p \Rightarrow 3, 4, 1$ sind kollinear: Widerspruch).

(c) Die Diagonalpunkte sind paarweise verschieden (ind.: o.B.d.A. $X=Y \Rightarrow Y=X \mid p, \bar{p}, q, \bar{q} \Rightarrow X=p.q=1$: Widerspruch zu (b)).

Wir geben der konstruierten Figur einen Namen:

DEF.1.10 a: Ein vollständiges Viereck besteht aus den vier Punkten eines Vierecks, den sechs Seiten und den drei Diagonalpunkten.

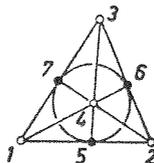
(d) Die Verbindung zweier Diagonalpunkte heißt eine "Diagonalseite". Es gilt: Eine Diagonalseite ist von allen Viereckseiten verschieden (ind.: o.B.d.A. $XY=p \Rightarrow Y \in p$. Wegen $Y \in q \Rightarrow Y=1$, da nach (a) gilt $p \neq q$: Widerspruch zu (b). O.B.d.A. $XY=r=14$. Wegen (b) $\Rightarrow 4 \in 1X=12$: Widerspruch).

(e) Keine Vierecksseite liegt auf einer Diagonalseite (ind.: o.B.d.A. $1 \in XY$. Da $1 \in p \wedge X \in p \wedge p=XY \Rightarrow 1=X$: Widerspruch zu (b)).

Aus den Inzidenzaxiomen kann man nicht erschließen, ob X, Y, Z kollinear oder nicht kollinear sind.

DEF. 1.10 b: Eine projektive Ebene heißt Fanoebene, wenn die drei Diagonalpunkte jedes vollständigen Vierecks nicht kollinear sind. Eine fanosche Pappusebene heißt eine klassische projektive Ebene \mathcal{T}_{kl} .

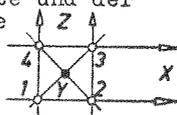
Bemerkungen:(a) Es gibt nicht fanosche projektive Ebenen, z.B. das Minimalmodell. Das Viereck 1,2,3,4 hat die kollinearen Diagonalepunkte X=5, Y=7, Z=6.



(b) In einer Desarguesebene gilt: Sind in einem Viereck die Diagonalepunkte nicht kollinear, so ist die Ebene eine Fanoebene (Sind in einem Viereck die Diagonalepunkte kollinear, so in jedem).

Bew.: $PGL(\mathcal{P}_{2c})$ ist nach Satz 1.8 viereckstransitiv. Da eine projektive Kollineation nicht kollineare bzw. kollineare Lage der Diagonalepunkte nicht zerstört, sind für alle Vierecke die Diagonalepunkte nicht kollinear bzw. kollinear.

(c) PAE ist eine Fanoebene. In PAE sind z.B. die Diagonalepunkte des Einheitsquadrates zwei Fernpunkte und der eigentliche Mittelpunkt, also drei nicht kollineare Punkte. Da PAE nach 1.12 eine De-Ebene ist, ist PAE nach(b) eine Fanoebene.



Nach Satz 1.2 existieren in jeder Punktreihe mindestens drei paarweise verschiedene Punkte. Wir wollen eine Konstruktion angeben, welche jedem Tripel paarweise verschiedener Punkte einer Punktreihe einen vierten Punkt dieser Punktreihe zuweist.

DEF.1.10 c: Sind A,B,C drei paarweise verschiedene Punkte einer Punktreihe \mathcal{P}_g , so heißt ein Punkt $D \in \mathcal{P}_g$ vierter harmonischer Punkt zu A,B,C, wenn es ein vollständiges Viereck so gibt, daß A und B zwei Diagonalepunkte sind und C bzw. D mit je einer der beiden Gegenseiten des Vierecks inzidieren, welche durch den dritten Diagonalepunkt gehen.

Gibt es überhaupt Vierecke, welche die gestellten Forderungen erfüllen? Vgl. die Figur auf S.57: Sind A,B zwei Diagonalepunkte eines Vierecks, dann ist $AB=g$ eine Diagonalseite; durch C geht eine Seite g' des Vierecks, welche nach (d) von g verschieden ist. Auf g' liegen notwendig zwei Vierecksecken, z.B. 1 und 4 mit $1 \wedge g \wedge 4 \wedge g$ (wegen (e)) $\wedge 1 \neq 4$. Durch A gehen zwei Gegenseiten des Vierecks, ebenso durch B. Daher sind $1A.4B=:2$ und $1B.4A=:3$ die weiteren Ecken des Vierecks, welches nach Wahl von $g' (\neq g \wedge C \wedge g')$ und $1,4 (1 \wedge g' \wedge 1 \wedge g \wedge 1 \neq 4)$ eindeutig bestimmt ist. Nach Wahl der Hilfselemente $g', 1, 4$ ist diese Konstruktion gemäß Definition 1.10 c zwingend; der Punkt $D=:g.23$ ist ein vierter harmonischer Punkt zu A,B,C, denn 1,2,3,4 erfüllt die Forderungen der Definition 1.10 c.

Bemerkungen: (a) Da die Diagonalepunkte $X=A$ und $Y=B$ stets verschieden sind, muß notwendig $A \neq B$ angenommen werden; aus $C=A$

würde folgen: $1 \text{ I } 34 \implies 1,3,4 \text{ kollinear}$: Widerspruch. Wenn ein Viereck hineinpassen soll, muß man notwendig A, B, C paarweise verschieden voraussetzen (vgl. Def. 1.10 c).

(b) Ist D ein vierter harmonischer Punkt zu A, B, C , so schreiben wir: $H(A, B, C, D)$ (H ist eine vierstellige Relation in \mathcal{P}). Nach Definition sind A, B gleichwertig, also gilt:

$$H(A, B, C, D) \implies H(B, A, C, D)$$

und ebenso sind C und D gleichwertig:

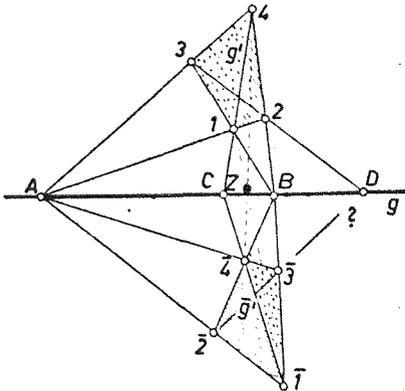
$$H(A, B, C, D) \implies H(A, B, D, C).$$

Man darf also innerhalb der Paare vertauschen und es ist sinnvoll zu sagen: "Das Paar (C, D) liegt harmonisch zum Paar (A, B) ".

Folgerungen:

1) In einer Desarguesebene ist der vierte harmonische Punkt eindeutig bestimmt (er ist also von der zulässigen Wahl der Hilfselemente $g', 1, 4$ unabhängig).

Bew.: Wir führen die nach Definition 1.10 c angegebene Konstruktionsvorschrift für die Punkte A, B, C zweimal durch und benützen dabei verschiedene Hilfselemente $g', 1, 4$ bzw. $\bar{g}', \bar{1}, \bar{4}$, welche auf Vierecke $1, 2, 3, 4$ bzw. $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ und die Punkte D bzw. \bar{D} führen. Damit lautet die Behauptung $D = \bar{D}$.



Die Dreiecke $1, 3, 4$ und $\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}$ liegen g -perspektiv. Da eine De -Ebene vorliegt, existiert ein Zentrum Z , sodaß gilt: $1, \bar{1}, Z$; $3, \bar{3}, Z$; $4, \bar{4}, Z$ sind kollinear (vgl. 1.5, F.1). Die Dreiecke $1, 2, 4$ und $\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}$ liegen g -perspektiv $\implies \exists Z_1 \in \mathcal{P}$ mit: $1, \bar{1}, Z_1$; $2, \bar{2}, Z_1$; $4, \bar{4}, Z_1$ sind kollinear.

Wir betrachten zuerst den allgemeinen Fall $g' \neq \bar{g}' (\implies 1\bar{1} \neq 4\bar{4}, 1\bar{1} \neq 4\bar{4})$;

in diesem Fall folgt: $Z = Z_1$. Man kann also sagen, die Vierecke $1, 2, 3, 4$ und $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ sind Z -perspektiv; somit sind auch die Dreiecke $1, 2, 3$ und $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ Z -perspektiv $\implies \exists$ eine Achse \tilde{g} mit $12 \cdot \bar{1}\bar{2} = A \wedge 13 \cdot \bar{1}\bar{3} = B$ liegen auf $\tilde{g} \implies \tilde{g} = g \implies 23$ und $\bar{2}\bar{3}$ treffen einander auf $g \implies D = \bar{D}$.

Ist die obige allgemeine Lage nicht gegeben, so wird durch Dazwischenschalten eines Vierecks $\bar{1}, \dots, \bar{4}$ mit $1 \neq \bar{1} \wedge 4 \neq \bar{4} \wedge \bar{1}\bar{1} = \bar{1} \wedge \bar{4} \neq \bar{4} \wedge 1\bar{1} \neq 4\bar{4} \wedge \bar{1}\bar{1} \neq \bar{4}\bar{4}$ dieser Fall auf die zweimalige Anwendung des obigen Schlußes zurückgeführt. Dieses

Zwischenviereck $\bar{1}, \dots, \bar{4}$ mit den geforderten Eigenschaften existiert, da durch C eine Gerade $\bar{g}' \neq g, g' = \bar{g}'$ existiert, welche neben C noch mindestens die beiden verschiedenen Punkte $\bar{1}$ und $\bar{4}$ trägt.



2) Harmonische Lage bleibt ungeändert bei Ausüben einer beliebigen Kollineation $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$, d.h. $H(A, B; C, D) \Rightarrow H(\alpha A, \alpha B; \alpha C, \alpha D)$. In einer Desarguesebene bleibt harmonische Lage ungeändert gegenüber jeder Projektivität $\alpha : \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_h$.

Bew.: (a) Die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes beruht nur auf Inzidenzen und solche werden beim Isomorphismus (α, α^*) nicht verändert.

(b) In π_{De} kann α nach 1.8, Folg. 3 zu einer (projektiven) Kollineation fortgesetzt werden, womit die Behauptung sofort aus (a) folgt.



3) Gilt $H(A, B; C, D)$, so sind nach Definition A, B, C paarweise verschieden. $A = D$ oder $B = D$ ist unmöglich (z.B.: $A = D \Rightarrow A \parallel 23, 34$; da $23 \neq 34 \Rightarrow A = 3$: Widerspruch zu b). Ist $C = D$ möglich?

Aus $H(A, B; C, D)$ folgt in einer Fanoebene $C \neq D$ und in einer nichtfanoschen Desarguesebene $C = D$.

Bew.: (1) Voraussetzung: π ist fanosch $\Rightarrow Z \not\perp XY = AB = g$;

$Z \perp 14 \wedge Z \not\perp g \Rightarrow 14 \neq g$
 $Z \perp 23 \wedge Z \not\perp g \Rightarrow 23 \neq g$ } $\Rightarrow 14, 23, g$ sind ein Dreieck, da $Z = 14, 23 \not\perp g$.

Nach (a) gilt: $14 \neq 23$

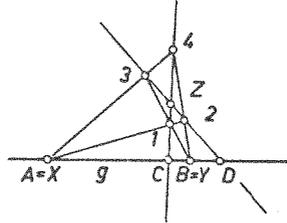
Die Ecken des zugehörigen Dreiecks, nämlich Z, C, D sind daher paarweise verschieden, also gilt: $C \neq D$.

(2) Voraussetzung: π_{De} ist nichtfanosch. Da in π_{De} nach

1) der Punkt D eindeutig durch A, B, C bestimmt ist und in einer nichtfanoschen Desarguesebene jedes Viereck kollineare Diagonalepunkte besitzt, ist in der obigen Inzidenztabelle $Z \perp XY = g$ und daher $C = D$.



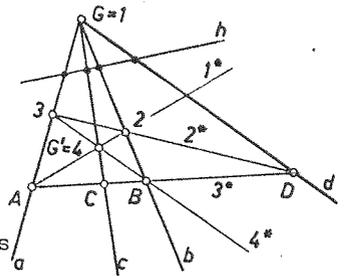
Bemerkung: Nach Satz 1.2 enthält jede Punktreihe mindestens drei pw. verschiedene Punkte A, B, C. In einer Fanoebene gilt für D mit $H(A, B; C, D)$ sogar: A, B, C, D pw. verschieden. In einer Fanoebene gibt es in jeder Punktreihe mindestens vier Punkte und daher in jedem Geradenbüschel mindestens vier Geraden ($N \geq 3$).



4) Durch Dualisieren von Def.1.10 a erhält man ein vollständiges Vierseit, das aus einem Vierseit, den sechs Ecken und den drei Diagonalseiten besteht, wobei für diese Elemente die dualen Inzidenzaussagen wie über das vollständige Viereck gelten. Aus den Axiomen einer projektiven Ebene folgt nicht, daß die drei paarweise verschiedenen Diagonalseiten ein Dreiseit bilden. Der Schnittpunkt zweier Diagonalseiten heißt eine Diagonalecke. Dual zu Def.1.10c definieren wir:

DEF.1.10 d: Sind a, b, c drei paarweise verschiedene Geraden eines Geradenbüschels \mathcal{U}_G , so heißt eine Gerade $d \in \mathcal{U}_G$ vierte harmonische Gerade zu a, b, c , wenn es ein vollständiges Vierseit so gibt, daß a und b zwei Diagonalseiten sind und c bzw. d mit je einer der beiden Gegenecken des Vierseits inzidieren, welche auf der dritten Diagonalseite liegen.

Wir schreiben $H(a, b; c, d)$, wobei es nach Definition 1.10d nur auf die Paare (a, b) und (c, d) ankommt. Die Konstruktion von d erfolgt in dualer Weise zur Konstruktion nach Def. 1. 10 c unter Benützung von $G' \mid c \wedge G' \neq G; 1^*, 4^* \in \mathcal{U}_{G'}$, mit $1^*, 4^* \nmid c$.



5) In einer Desarguesebene gilt für die vier Geraden a, b, c, d eines Geradenbüschels genau dann $H(a, b; c, d)$, wenn diese vier Geraden eine beliebige Gerade nicht durch das Büschelzentrum in vier Punkten A, B, C, D schneiden mit $H(A, B; C, D)$.

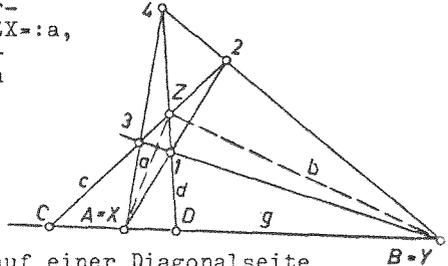
Bew.: (a) Es gelte $H(a, b; c, d)$. Wir schneiden die vier Geraden speziell mit der Geraden 3^* in obiger Figur und setzen $a.3^*=:A$, $b.3^*=:B$, $c.3^*=:C$. Nach den Voraussetzungen sind diese drei Punkte paarweise verschieden. Die obige Figur enthält das Viereck $G=:1$, $G'=:4$, $1^*.b=:2$, $4^*.a=:3$ ($1, 2, 3, 4$ ist ein Viereck nach den Voraussetzungen über die Wahl von $G', 1^*, 4^*$), nach welchem $H(A, B; C, D)$ gilt mit $D=:d.3^*$.

Da eine Desarguesebene vorliegt, ist harmonische Lage von vier Punkten invariant gegen Projektivitäten, also insbesondere invariant bei Übergang zu einer beliebigen Punktreihe $\mathcal{P}_h(G \not\perp h)$, welche durch \mathcal{U}_G auf \mathcal{P}_3 perspektiv bezogen ist.

(b) Ist umgekehrt $H(A,B;C,D)$ für die vier Schnittpunkte von a,b,c,d mit einer Testgeraden nicht durch das Büschelzentrum G , so kann D mit Hilfe eines Vierecks eindeutig konstruiert werden, indem G als Hilfspunkt 1 fungiert. Die hier entstehende Figur liefert ein Vierseit $1^*,2^*,3^*,4^*$, nach welchem $H(a,b;c,d)$ gilt.

Bemerkungen: (a) In einer fanoschen Desarguesebene folgt aus $H(A,B;C,D)$ nach 3): $C \neq D$. Nach 5) gilt mit $H(a,b;c,d)$ in einer fanoschen Desarguesebene $c \neq d$ und daher sind in einer solchen Ebene die Diagonalseiten eines vollständigen Vierseits nicht kopunktal. (In der obigen Figur sind für das Vierseit $1^*, \dots, 4^*$ die Geraden $a,b,G'D$ die Diagonalseiten)

(b) In einer fanoschen Desarguesebene bilden die Diagonalpunkte X,Y,Z eines Vierecks $1,2,3,4$ ein Dreieck und die Gegenseiten $c:=23$ und $d:=41$ des Vierecks und die beiden Diagonalseiten $ZX=:a$, $ZY=:b$ schneiden die dritte Diagonalseite $XY=:g$ in den vier harmonischen Punkten A,B,C,D . Daraus und aus der dualen Überlegung folgt:



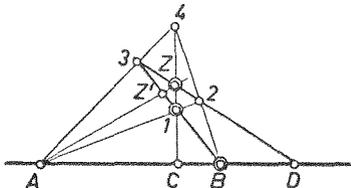
In einer fanoschen Desarguesebene ist das Paar der Seiten durch einen Diagonalpunkt eines vollständigen Vierecks (bzw. das Paar der Ecken auf einer Diagonalseite eines vollständigen Vierseits) harmonisch zum Paar der Diagonalseiten durch diesen Punkt (bzw. zum Paar der Diagonalecken auf dieser Geraden).

6) In jeder fanoschen Desarguesebene gilt:

$$H(A,B;C,D) \implies H(C,D;A,B)$$

(d.h. die beiden Paare sind gleichberechtigt). Das zweite Symbol ist sinnvoll, da in einer Fanoebene aus $H(A,B;C,D)$ folgt $C \neq D$ (Folg.3).

Bew.: Wir konstruieren aus A,B,C den Punkt D über das Viereck



$1,2,3,4$. Wir projizieren ρ_{AB} aus 1 auf $\rho_{23} : \rho_{AB} \overset{1}{\wedge} \rho_{23}$. Nach Folg.2 bleibt dabei harmonische Lage in π_{De} erhalten, also gilt: $H(A,B;C,D) \implies H(2,3;Z,D)$.

Analog: $\rho_{23} \overset{1}{\wedge} \rho_{B3}$; dabei gilt: $H(2,3;Z,D) \implies H(1,3;Z',B)$ (mit $Z':=AZ.B3$).

Analog: $\rho_{B3} \overset{2}{\wedge} \rho_{AB}$; dabei gilt: $H(1,3;Z',B) \implies H(C,D;A,B)$, woraus die Behauptung folgt.

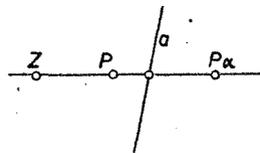
Zwischenbemerkung:

Sei $\varphi: M \rightarrow M$ mit $\varphi \neq \text{id}$ eine Bijektion. φ heißt eine "Involution", wenn $\varphi \varphi =: \varphi^2 = \text{id}$ gilt

(Kurz: Die Iteration einer Involution ist die Identität).

DEF.1.10 e: Eine Homologie $\alpha \in \text{PGL}(Z, a | Z \not\perp a)$ in einer Desargues-ebene heißt harmonische Homologie, wenn für ein Punktepaar gilt: $H(Z, PP\alpha.a; P, P\alpha)$.

Bemerkung: Wir schreiben kurz: $H(Z, a; P, P\alpha)$.



7) Eigenschaften harmonischer Homologien:

(I) In jeder fanoschen Desarguesebene gilt: Jede harmonische Homologie ist involutorisch.

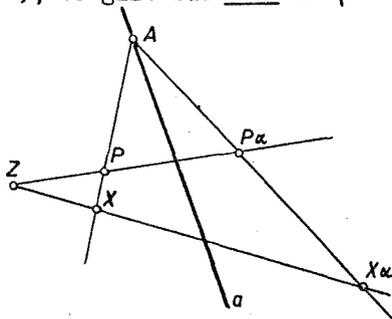
(II) In jeder fanoschen Desarguesebene gilt: Die harmonischen Homologien sind die einzigen involutorischen perspektiven Kollineationen.

(III) In jeder klassischen projektiven Ebene gilt: Die harmonischen Homologien sind die einzigen involutorischen projektiven Kollineationen.

Bew.: Zu (I): (1) Gilt einmal $H(Z, a; P, P\alpha)$, so gilt für alle $X \in \mathcal{P}$ mit $X \neq Z \wedge X \not\perp a$: $H(Z, a; X, X\alpha)$, da:

α ist durch die Angabe $P \rightarrow P\alpha$ in π_{De} eindeutig bestimmt, und man kann zu X den Punkt $X\alpha$ konstruieren.

Fall 1: $X \not\perp ZP$. Die Punktreihen auf ZP und ZX werden durch das Büschel $\mathcal{U}_A(A := XP.a)$ perspektiv bezogen $\xrightarrow{F,2}$ $H(Z, a; X, X\alpha)$.



Fall 2: $X \perp ZP$. Wir konstruieren $X\alpha$ über ein Hilfspunktepaar $Q, Q\alpha$ mit $Q \not\perp ZP$ und wenden dann den Schluß von Fall 1 an.

(2) α ist involutorisch, da:

(α) Für $X \in \mathcal{P}$ mit $X \neq Z \wedge X \not\perp a$ gilt nach oben: $H(Z, a; X, X\alpha)$ (*); gleiches gilt für $X\alpha$, also $H(Z, a; X\alpha, X\alpha\alpha)$ (*).

Da man innerhalb der Paare vertauschen darf, folgt $H(Z, a; X\alpha, X)$ aus (*). Zusammen mit (*) zieht dies $X\alpha\alpha = X$ nach sich, denn in einer Desarguesebene ist nach Folg.1 der vierte harmonische Punkt ein-

deutig bestimmt.

(B) $X=Z \vee X \in a \Rightarrow X\alpha=X \Rightarrow (X\alpha)\alpha=X\alpha=X$.

Also gilt $\forall X \in \mathcal{P}: (X\alpha)\alpha=X \Rightarrow \alpha^2=\iota$.



Bemerkung: In einer nichtfanoschen Desarguesebene folgt aus $H(Z,a;X,X\alpha)$ nach Folg.3 dann $X=X\alpha$ und daher ist jede harmonische Homologie die Identität.

Zu (II): Sei α eine involutorische perspektive Kollineation ($\alpha^2=\iota, \alpha \neq \iota$) in einer fanoschen Desarguesebene.

Fall 1: α ist eine involutorische Homologie. In π_{De} ist $\alpha \in PGL(Z,a)$

durch $P \mapsto P\alpha$ eindeutig bestimmt. Wir konstruieren zu $X \in \mathcal{P}$ mit $X \notin a \wedge X \notin ZP$ auf bekannte Weise $X\alpha$ und zu $X\alpha$ den Bildpunkt $(X\alpha)\alpha$. Da $(X\alpha)\alpha = X$ nach Voraussetzung ist, entsteht ein Viereck 1,...4

(vgl. Inzidenztabelle), für welches X und $X\alpha$ Diagonalpunkte sind, während Z und $ZX.a$ auf den Gegenseiten durch den Diagonalpunkt 14.23 liegen \Rightarrow

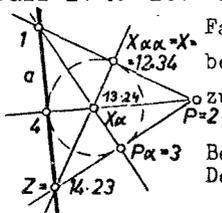
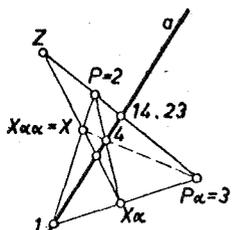
$\stackrel{\text{Def. 1.10c}}{\Rightarrow} H(X, X\alpha; Z, a) \stackrel{\text{Folg. 3}}{\Rightarrow} H(Z, a; X, X\alpha) \Rightarrow \alpha$ ist harmonische Homologie.

Umgekehrt ist jede harmonische Homologie nach (I) involutorisch.

Fall 2: α ist eine involutorische Elation. Wir gehen wie in

Fall 1 vor und betrachten das Viereck 1,...4. Dieses besitzt kollineare Diagonalpunkte im Widerspruch

zu Fano.



Bemerkung: Nach Fall 2 gilt: In einer nichtfanoschen Desarguesebene ist jede Elation involutorisch.

Zu (III): Sei α eine involutorische projektive Kollineation ($\alpha^2=\iota, \alpha \neq \iota$) in einer π_{K1} .

$\alpha \neq \iota \Rightarrow \exists A \in \mathcal{P}$ mit $A\alpha \neq A$.

$A\alpha =: B, B\alpha = (A\alpha)\alpha \stackrel{vs}{=} A\iota = A$.

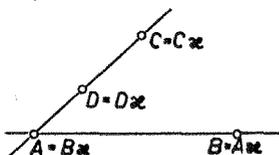
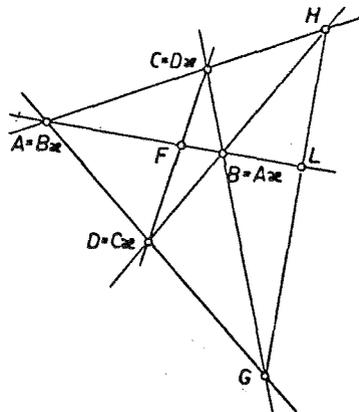
$(AB)\alpha^2 = A\alpha.B\alpha = BA = AB$, d.h. $\alpha|_{\mathcal{P}_{AB}}$ ist eine projektive Selbstabbildung.

$\exists C \in \mathcal{P} \wedge C \notin \mathcal{P}_{AB}$ mit $C\alpha \neq C$

(ind.: $\forall C \in \mathcal{P}$ mit $C \notin \mathcal{P}_{AB}$ gilt $C\alpha = C \Rightarrow$

$\exists D \in \mathcal{P}$ mit $D \notin \mathcal{P}_{AB} \wedge D \neq C$ mit $D\alpha = D$,

und daher



ist $(CD)\alpha^* = CD$. Für $A = AB \cdot CD$ ergibt sich $A\alpha = (A\alpha B\alpha)$. $(C\alpha D\alpha) = BA \cdot CD = A$ im Widerspruch zu $A\alpha \neq A$. $C \notin AB \Rightarrow C\alpha \notin AB$.

Für C und $D := C\alpha$ gilt wie oben: $(CD)\alpha^* = CD$. Weiters bilden A, B, C, D notwendig ein Viereck (A, C, D bzw. B, C, D kollinear führt wie oben zum Widerspruch $A\alpha = A$ bzw. $B\alpha = B$; $C \notin AB$; $D \notin AB$, da $C \notin A\alpha^{-1} B\alpha^{-1} = BA$). Die Diagonalecken F, G, H dieses Vierecks sind paarweise verschieden und es gilt: $F := AB \cdot CD \Rightarrow F\alpha = A\alpha B\alpha \cdot C\alpha D\alpha = BA \cdot DC = F$, $G := AD \cdot CB \Rightarrow G\alpha = BC \cdot DA = G$, $H := AC \cdot BD \Rightarrow H\alpha = BD \cdot AC = H$, d.h. F, G, H sind Fixpunkte. $\exists^* L := GH \cdot AB$ und es gilt $L \neq | G, H$ (ind. z.B. $L = G \Rightarrow A, B, D$ kollinear: Widerspruch). $L\alpha = G\alpha H\alpha \cdot A\alpha B\alpha = GH \cdot BA = L$.

$\alpha|_{\mathcal{P}_{GH}}$ ist eine projektive Selbstabbildung mit den drei paarweise verschiedenen Fixpunkten G, H, L ; also gilt nach FS: $\alpha|_{\mathcal{P}_{GH}} = \iota$, d.h. α ist eine perspektive Kollineation, die nach Voraussetzung involutorisch ist $\stackrel{(a)}{\Rightarrow} \alpha$ ist eine harmonische Homologie.



DEF.1.10 f: In einer klassischen projektiven Ebene heißt eine involutorische Projektivität einer Punktreihe \mathcal{P}_g auf sich eine projektive Involution von \mathcal{P}_g .

8) Eigenschaften projektiver Involutionen in π_{K1} :

(I) Eine projektive Selbstabbildung $\alpha : \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_g$ ist genau dann involutorisch, wenn ein Paar verschiedener Punkte "vertauschbar zugeordnet" ist: $A\alpha = B \wedge B\alpha = A \wedge A \neq B$.

(II) Eine projektive Involution ist entweder hyperbolisch oder elliptisch.

(III) Die hyperbolischen projektiven Involutionen sind genau jene Abbildungen $\mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_g$, welche zwei verschiedene Punkte festlassen und die anderen Punkte so zuordnen, daß jedes Paar zugeordneter Punkte zu den Fixpunkten harmonisch liegt.

(IV) Eine projektive Involution ist durch zwei verschiedene Urpunkte A, B und zwei verschiedene Bildpunkte A', B' mit $A+B' \wedge A' + B$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung: $\pi_{kl} \Leftrightarrow PP \wedge \text{Fano}$, $PP \stackrel{1.9}{\Leftrightarrow} FS$, $PP \Rightarrow De$.

$De \wedge \text{Fano} \stackrel{4.10, 5.1}{\Rightarrow}$ der vierte harmonische Punkt D bzgl. ABC ist eindeutig bestimmt und es gilt: $C \neq D$.

Bew.: Zu (I):(a) Sei α eine projektive Involution ($\alpha^2 = \iota \wedge \alpha \neq \iota$)
 $\Rightarrow \exists A$ mit $A\alpha \neq A$. Wir setzen $A\alpha =: B \Rightarrow B\alpha = (A\alpha)\alpha = A\alpha^2 = A\iota = A$,
 d.h. A und B sind vertauschbar zugeordnet.

(b) α ist eine projektive Selbstabbildung $\wedge \exists A, B \in \mathcal{P}_g$ mit
 $A \neq B \wedge A\alpha = B \wedge B\alpha = A$. Wegen $A\alpha \neq A \Rightarrow \alpha \neq \iota$.

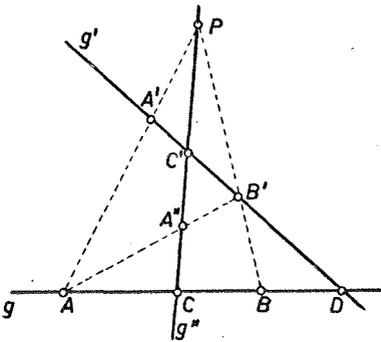
Weiters gilt: $A \mapsto A\alpha = B, B \mapsto B\alpha = A, C \mapsto C\alpha =: D$

($C \in \mathcal{P}_g \setminus \{A, B\}$ und i.f. fest). Wenden wir darauf nochmals α an,
 so gilt: $(A\alpha)\alpha \stackrel{vs}{=} A, (B\alpha)\alpha \stackrel{vs}{=} B, (C\alpha)\alpha = D\alpha$. Die Behauptung
 lautet umformuliert: $C = D\alpha$, da nämlich mit $C = D\alpha$ die Projektivität
 α^2 drei pw. verschiedene Fixpunkte A, B, C besitzt $\stackrel{fs}{\Rightarrow} \alpha^2 = \iota$.

Ist speziell $D=C$, also $C\alpha = C \Rightarrow (C\alpha)\alpha = C\alpha = C \wedge (C\alpha)\alpha = D\alpha \Rightarrow C = D\alpha$.

Wir setzen i.f. $D \neq C$ voraus. Da A, B, C pw. verschieden sind $\stackrel{\alpha \text{ bij.}}{\Rightarrow}$
 $A\alpha = B, B\alpha = A, C\alpha = D$ pw. verschieden. Da außerdem $C \neq D$ ist \Rightarrow
 A, B, C, D pw. verschieden.

Wir definieren eine Projektivität $\beta: \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_g$ durch:



$\exists P \in \mathcal{P}$ mit $P \notin g \wedge \exists g' \in \mathcal{G}_D \setminus \{g\} \wedge P \notin g' \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists *g'' := PC \wedge \exists *B' := g', PB$.

$A \notin g', g'' \wedge B' \notin g'', g$. Dann definieren
 wir $\beta: \mathcal{P}_g \stackrel{P}{\times} \mathcal{P}_g, \stackrel{A}{\times} \mathcal{P}_g \stackrel{B'}{\times} \mathcal{P}_g$.

Demnach leistet β (vgl. Figur):

$A \mapsto A' \mapsto P \mapsto B$, also $A\beta = B (=A\alpha)$
 $B \mapsto B' \mapsto A'' \mapsto A$, also $B\beta = A (=B\alpha)$
 $C \mapsto C' \mapsto C' \mapsto D$, also $C\beta = D (=C\alpha)$
 $D \mapsto D \mapsto C \mapsto C$, also $D\beta = C$
 $\Rightarrow D\alpha = D\beta = C$ } $\stackrel{fs}{\Rightarrow} \alpha = \beta$ \Rightarrow \diamond

Zu (II) (ind.): Sei $\alpha: \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_g$ eine projektive Involution
 ($\alpha^2 = \iota \wedge \alpha \neq \iota$) mit genau einem Fixpunkt $F \Rightarrow \forall X \in \mathcal{P}_g \setminus \{F\} \Rightarrow X\alpha \neq X \wedge$
 $X\alpha \neq F$. In $\pi_\alpha \exists * G \in \mathcal{P}_g$ mit $H(X, X\alpha; F, G)$ (sinnvoll, denn
 $X, X\alpha, F$ pw. verschieden; wegen Fano $\Rightarrow F \neq G$). Nach 1.10,
 Folg.2 ist die harmonische Lage invariant bezüglich Projektivitäten,
 also auch unter α , daher gilt:

$H(X\alpha, \frac{X\alpha\alpha}{X}; \frac{F\alpha}{F}, G\alpha)$. Nach Bem. zu Def.1.10 c darf man in den
 Paaren vertauschen:

$H(X, X\alpha; F, G\alpha)$; zusammen mit $H(X, X\alpha; F, G) \Rightarrow G = G\alpha$. Somit hat
 α die beiden verschiedenen Fixpunkte F und G im Widerspruch
 zur Voraussetzung. \diamond

Zu (III): (a) Sei α eine hyperbolische projektive Involution $\mathcal{P}_G \rightarrow \mathcal{P}_G$ ($\alpha^2 = \iota \wedge \alpha \neq \iota$) mit den beiden verschiedenen Fixpunkten F und G . Dann wird behauptet: $\forall X \in \mathcal{P}_G \setminus \{F, G\}$ gilt notwendig $H(F, G; X, X\alpha)$.

Ind.: $\exists Y \in \mathcal{P}_G \setminus \{F, G\}$ mit $(Y, Y\alpha)$ ist nicht harmonisch zu (F, G) . Dann existiert genau ein Punkt \bar{G} mit $H(Y, Y\alpha; F, \bar{G})$; wie in (II) zeigt man $\bar{G} = G\alpha$. Da in π_{κ} der Satz von Fano gilt, ist nach 1.10, Folg. 3: $F \neq \bar{G}$; außerdem gilt $G \neq \bar{G}$ nach Voraussetzung des indirekten Beweises. Somit besitzt α drei paarweise verschiedene Fixpunkte F, G, \bar{G} und ist nach FS die Identität im Widerspruch zu $\alpha \neq \iota$.

(b) Sei umgekehrt γ eine Selbstabbildung $\mathcal{P}_G \rightarrow \mathcal{P}_G$ definiert durch:

$$(1) X=F \Rightarrow X\gamma := F$$

$$(2) X=G \Rightarrow X\gamma := G \text{ (mit } F \neq G)$$

(3) $\forall X \in \mathcal{P}_G \setminus \{F, G\} : X\gamma$ ist der zu X bezüglich (F, G) harmonische Punkt: $H(F, G; X, X\gamma)$. Ein Vergleich mit (a) zeigt, daß γ auf \mathcal{P}_G dasselbe leistet wie $\alpha \Rightarrow \alpha = \gamma$, d.h. γ ist eine projektive hyperbolische Involution. ◆

Bemerkung: a) In jeder π_{κ} existieren harmonische Homologien, welche nach Folg. 7) involutorische perspektive Kollineationen sind. Die Einschränkung einer harmonischen Homologie auf einen Kollineationsstrahl ist eine hyperbolische projektive Involution, deren Fixpunkte das Zentrum und der Schnittpunkt des Kollineationsstrahles mit der Achse sind. In jeder π_{κ} existieren daher hyperbolische projektive Involutionen; jede solche ist durch die beiden verschiedenen Fixpunkte eindeutig bestimmt. Wie sich später zeigt, existieren jedoch elliptische projektive Involutionen nicht in jeder π_{κ} .

b) Ist speziell π_{κ} endlich von der Ordnung N , so werden bei einer hyperbolischen projektiven Involution einer Punktreihe abgesehen von den beiden verschiedenen Fixpunkten die anderen Punkte paarweise vertauscht. $N+1$ ist daher immer eine gerade Zahl: Die Ordnung einer endlichen $\pi_{\kappa 1}$ ist stets ungerade.

Zu (IV): $A, B, A', B' \in \mathcal{P}_G$ mit $A \neq B \wedge A' \neq B' \wedge A \neq B' \wedge A' \neq B$. Falls es eine projektive Involution α mit $A' = A\alpha$ und $B' = B\alpha$ gibt und zusätzlich $A = A' \wedge B = B'$ gilt, so ist durch diese beiden verschiedenen Fixpunkte α eindeutig bestimmt. Setzen wir daher z.B. $A \neq A'$ voraus, so gilt wegen $\alpha^2 = \iota$ notwendig $A\alpha^2 = A'\alpha = A$. Durch $A \rightarrow A', A' \rightarrow A, B \rightarrow B'$ ist aber wegen A, A', B und A', A, B' pw. verschieden nach dem FS genau eine Projektivität bestimmt, welche A und A' vertauschbar zuordnet und daher nach (I) eine projektive Involution ist. ◆ ◆

Bemerkung: Projektive Involutionen einer Punktreihe wurden nur in π_{κ} definiert und π_{κ} ist Desarguesebene. Wir können daher nach Folg. 5 alle obigen Aussagen über projektive Involutionen auf Punkt-reihen durch Projektion aus einem Zentrum in ein Geradenbüschel übertragen. Es gelten also obige Aussagen für Grundgebilde in π_{κ} .

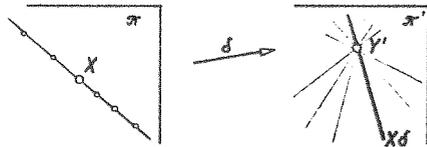
SATZ 1.10: In einer Desarguesebene ist das zu drei verschiedenen Elementen eines Grundgebildes vierte harmonische Element eindeutig bestimmt. In einer Fanoebene sind vier harmonische Punkte paarweise verschieden; in einer solchen Ebene enthält jedes Grundgebilde mindestens vier verschiedene Elemente. In einer fanoschen Desarguesebene sind die involutorischen perspektiven Kollineationen genau die harmonischen Homologien. In einer klassischen projektiven Ebene sind die involutorischen projektiven Kollineationen genau die harmonischen Homologien; eine projektive Involution eines Grundgebildes ist entweder elliptisch oder hyperbolisch und ordnet im letzten Fall abgesehen von den beiden Fixelementen jene Elemente vertauschbar einander zu, welche zu den beiden Fixelementen harmonisch liegen. Jede endliche klassische projektive Ebene hat ungerade Ordnung.

1.11. Korrelationen, Polaritäten

$\pi = \{ \mathcal{R}, \mathcal{G} \}$ und $\pi' = \{ \mathcal{R}', \mathcal{G}' \}$ seien projektive Ebenen. Wir wollen spezielle Abbildungen $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{G}'$ definieren.

DEF.1.11 a: Eine Abbildung $\delta: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{G}'$ (d.h. aus der Punktmenge einer projektiven Ebene in die Geradenmenge einer projektiven Ebene) heißt eine Korrelation, wenn sie (I) bijektiv ist und (II) kollineare Punkte in kopunktuale Geraden überführt.

Bemerkung: Sei $X \in \mathcal{R}$ und gilt $Y' \perp X\delta$ ($Y' \in \mathcal{R}'$), so sagen wir: "Y' ist zu X konjugiert".



Folgerungen:

1) In 1.1 wurde der Begriff duale Ebene erklärt. Wir gehen zur dualen Ebene π'^* von π' über; es gilt: $\mathcal{R}'^* = \mathcal{G}'$, $\mathcal{G}'^* = \mathcal{R}'$, $I'^* = I'$. Durch diese Uminterpretation ist $\delta: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{G}' = \mathcal{R}'^*$ eine bijektive Abbildung $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'^*$, welche kollineare Punkte in π in kollineare Punkte in π'^* überführt. Gemäß Def.1.3 b ist also δ eine Kollineation. Eine Korrelation ist also eine Kollineation in die Dualebene von π' .

Wir können damit Aussagen über Kollineationen umformulieren. Nach 1.3, Folg.2 bestimmt die Kollineation $\delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^*$ eine Abbildung $\delta^* : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^*$ so, daß das Paar (δ, δ^*) ein Isomorphismus von π auf π^* ist, wobei δ^* wie folgt erklärt ist:

Für $g \in \mathcal{G}$ mit $g = PQ$ ($P, Q \in \mathcal{P}$, $P \neq Q$) ist $g \delta^* := P \delta \cdot Q \delta \in \mathcal{G}^*$.

Wir interpretieren diese Definition wieder in der ursprünglichen Ebene π : $P \delta \neq Q \delta$ sind Geraden in π und $g \delta^*$ ist der Schnittpunkt dieser beiden Geraden.

Das Paar (δ, δ^*) ist ein Isomorphismus $\pi \rightarrow \pi^*$, d.h. es gilt (vgl. Def. 1.3 a):

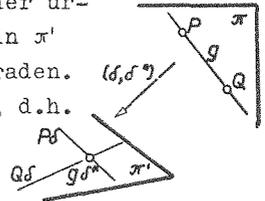
$$\forall P \in \mathcal{P} \wedge \forall g \in \mathcal{G} \text{ mit } P \in g \Rightarrow \frac{P \delta}{\in \mathcal{P}^*} \perp \frac{g \delta^*}{\in \mathcal{G}^*} \text{ und}$$

$$\forall P^* \in \mathcal{P}^* \wedge \forall g^* \in \mathcal{G}^* \text{ mit } P^* \in g^* \Rightarrow P^* \delta^{-1} \perp g^* \delta^{*-1}.$$

Wir schreiben dies in der ursprünglichen Bedeutung in π an:

$$\forall P \in \mathcal{P} \wedge \forall g \in \mathcal{G} \text{ mit } P \in g \Rightarrow \frac{P \delta}{\in \mathcal{G}'} \perp \frac{g \delta^*}{\in \mathcal{P}^*} \text{ und}$$

$$\forall g' \in \mathcal{G}' \wedge \forall P' \in \mathcal{P}' \text{ mit } g' \in P' \Rightarrow g' \delta^{-1} \perp P' \delta^{*-1}.$$



Kurz: δ führt Inzidentes in Inzidentes bzw. Nichtinzidentes in Nichtinzidentes über.

Bemerkungen: (a) Die obigen Beziehungen enthalten einen formalen Schönheitsfehler. Wir haben bisher das Paar $A \perp a$ nur erklärt, wenn an der ersten Stelle ein Punkt und an der zweiten Stelle eine Gerade steht. Es ist zweckmäßig zu fordern: $a \perp A \iff A \perp a$.

(b) Sei $g \in \mathcal{G}$ und gilt $h' \perp g \delta^*$ ($h' \in \mathcal{G}'$), so sagen wir: "h' ist zu g konjugiert".

(c) Speziell: $\pi = \pi'$; also $\delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$ (bzw. $\delta^* : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}$). (δ, δ^*) ist ein Isomorphismus $\pi \rightarrow \pi^*$. Eine Ebene ist genau dann isomorph zu ihrer dualen Ebene, wenn sie eine Korrelation gestattet.

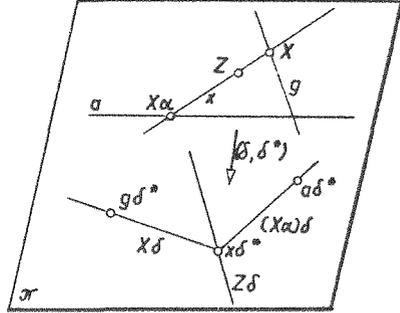
(d) Wir haben eine Korrelation mit δ bezeichnet, weil in der Literatur gelegentlich eine Korrelation auch "Dualität" heißt. Im Gegensatz dazu ist bei uns die Dualität ein logisches Prinzip, während eine Korrelation eine Abbildung ist.

Der Begriff projektive Kollineation nach Def.1.8 kann nicht durch Dualisierung in einen Begriff "projektive Korrelation" übertragen werden. Wir benutzen eine Eigenschaft der projektiven Kollineationen zur folgenden

DEF.1.11 b: Eine Korrelation $\delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$ einer projektiven Ebene auf sich heißt projektiv, wenn ihre Beschränkung auf eine Punktreihe eine Projektivität ist.

2) Bei einer projektiven Korrelation δ ist die Beschränkung auf jede Punktreihe eine Projektivität.

Bew.: Zur projektiven Korrelation $\delta: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U}$ existiert nach Definition ein $g \in \mathcal{U}$, sodaß $\delta|_{\mathcal{P}_g}$ eine Projektivität ist. Sei $a \in \mathcal{U}$ beliebig mit $a \neq g$ ($\Rightarrow a\delta^* \neq g\delta^*$, denn δ^* ist bijektiv). $\exists Z \in \mathcal{P}$ mit $Z \notin |g$, a. Ist $\alpha: \mathcal{P}_g \xrightarrow{Z} \mathcal{P}_a$, so gilt $X, X\alpha, Z$ kollinear ($\forall X \in \mathcal{P}_g$).

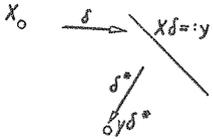


Da δ bijektiv und inzidenzentreu ist und kollineare Punkte in kopunktales Geraden überführt, folgt: Die Gerade $Z\delta$ geht nicht durch die verschiedenen Punkte $g\delta^*$ und $a\delta^*$ und es gilt: $X\delta$, $(X\alpha)\delta$, $Z\delta$ sind kopunktal ($\forall X\delta \in \mathcal{U}_{g\delta^*}$). Die Geraden $X\delta$ und $(X\alpha)\delta$ der Geradenbüschel $\mathcal{U}_{g\delta^*}$ und $\mathcal{U}_{a\delta^*}$ treffen einander also stets auf der Geraden $Z\delta: \mathcal{U}_{g\delta^*}(X\delta, \dots) \xrightarrow{Z\delta} \mathcal{U}_{a\delta^*}(X\alpha\delta, \dots)$. Damit gilt insgesamt:

$$\mathcal{P}_a(X\alpha, \dots) \xrightarrow{Z} \mathcal{P}_g(X, \dots) \xrightarrow{\delta} \mathcal{U}_{g\delta^*}(X\delta, \dots) \xrightarrow{Z\delta} \mathcal{U}_{a\delta^*}(X\alpha\delta, \dots) \Rightarrow \mathcal{P}_a(Y, \dots) \xrightarrow{\delta} \mathcal{U}_{a\delta^*}(Y\delta, \dots), \text{ also ist } \delta|_{\mathcal{P}_a} (\forall a \in \mathcal{U}) \text{ eine Projektivität.}$$

Bemerkung: Da eine Korrelation auch bei dualer Interpretation von π' keine Selbstabbildung einer Menge ist, mußten projektive Korrelationen anders als projektive Kollineationen definiert werden, und auch der Satz 1.8 über die Viereckstransitivität der $PGL(\pi_{Dg})$ kann nicht auf projektive Korrelationen übertragen werden. H. KNESER bewies 1935 vielmehr, daß es Desarguesebenen gibt, die zu ihrer Dualebene nicht isomorph sind; für eine solche Desarguesebene existieren daher überhaupt keine Korrelationen auf sich. Wir werden später beweisen, daß jedes π_{Dg} projektive Korrelationen gestattet und daher zu ihrer Dualebene isomorph ist.

Zur Korrelation



$\delta: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U}$ gehört $\delta^*: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}$ und man kann daher die beiden Abbildungen zusammensetzen: $\delta\delta^*: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$. Es kann speziell $\delta\delta^* = \text{id}$ gelten. Neben solchen Abbildungen wollen wir in der folgenden Definition noch andere Abbildungen $\lambda: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U}$ definieren, welche global sein sollen und für welche die Konjugiertheit eine symmetrische Relation ist, d.h.: $X I Y \lambda \Rightarrow$

$$X \lambda I Y \quad \forall X, Y \in \mathcal{P}.$$

DEF.1.11 c: Eine Korrelation $\sigma: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$ einer projektiven Ebene auf sich heißt selbstadjungiert, wenn $\sigma\sigma^* = \text{id}$ gilt. Eine globale Abbildung $\lambda: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$ einer projektiven Ebene auf sich heißt eine Polarität, wenn die Konjugiertheit eine symmetrische Relation ist.

3) Die Polaritäten sind genau die selbstadjungierten Korrelationen.

Bew.: (a) Ist σ eine selbstadjungierte Korrelation ($\sigma\sigma^* = \text{id}$), so ist σ als Bijektion sicher global. Da σ Inzidenzen erhält, gilt: $X \text{ I } Y\sigma \Rightarrow X\sigma \text{ I } (Y\sigma)\sigma^* \stackrel{vs}{=} Y\text{id} = Y$, also ist σ eine Polarität.

(b) Sei λ eine Polarität $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$. Dann gilt:

(i) λ ist eine Bijektion, da:

(α) λ ist nach Definition global.

(β) λ ist injektiv: (ind.) $P \neq Q \wedge P\lambda = Q\lambda$.

$\exists A \in \mathcal{P}$ mit $A \text{ I } PQ$. Da λ global ist, existiert $A\lambda$. Unabhängig davon, ob $A\lambda = P\lambda$ oder $A\lambda \neq P\lambda$ gilt, existiert sicher ein Punkt $B \in \mathcal{P}$ mit $B \text{ I } P\lambda \wedge B \text{ I } A\lambda$. Da λ eine Polarität ist, gilt:

$$\left. \begin{array}{l} B \text{ I } P\lambda \Rightarrow B\lambda \text{ I } P \\ B \text{ I } Q\lambda \Rightarrow B\lambda \text{ I } Q \\ B \text{ I } A\lambda \Rightarrow B\lambda \text{ I } A \end{array} \right\} \Rightarrow P, Q, A \text{ inzidieren mit der Geraden } B\lambda, \text{ die wegen } (\alpha) \text{ existiert: Widerspruch zu } A, P, Q \text{ nicht kollinear.}$$

(γ) λ ist surjektiv: Sei $a \in \mathcal{G}$ beliebig $\stackrel{\text{Satz 1.2}}{\Rightarrow} \exists P, Q \in \mathcal{P}$ mit $P \neq Q \wedge P, Q \text{ I } a \stackrel{(\beta)}{\Rightarrow} P\lambda \neq Q\lambda \stackrel{i_2}{\Rightarrow} \exists^* A := P\lambda.Q\lambda$. Da λ eine Polarität ist, gilt:

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ I } P\lambda \Rightarrow A\lambda \text{ I } P \\ A \text{ I } Q\lambda \Rightarrow A\lambda \text{ I } Q \end{array} \right\} \stackrel{i_1 \wedge P \neq Q}{\Rightarrow} A\lambda = PQ = a; \text{ also tritt jede Gerade als Bild auf.}$$

(ii) λ ist eine Korrelation. λ führt nämlich kollineare Punkte in kopunkttale Geraden über, da:

Seien $P \neq Q$ und gelte $R \text{ I } PQ \stackrel{\lambda \text{ bij.}}{\Rightarrow} P\lambda \neq Q\lambda \stackrel{i_2}{\Rightarrow}$

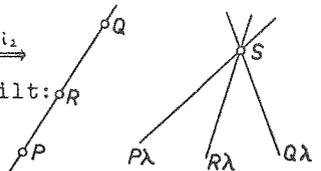
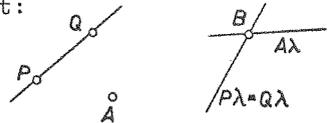
$\exists^* S := P\lambda.Q\lambda$. Da λ eine Polarität ist, gilt:

$$\left. \begin{array}{l} S \text{ I } P\lambda \Rightarrow S\lambda \text{ I } P \\ S \text{ I } Q\lambda \Rightarrow S\lambda \text{ I } Q \end{array} \right\} \Rightarrow S\lambda = PQ.$$

$R \text{ I } S\lambda = PQ \stackrel{\lambda \text{ Pol.}}{\Rightarrow} R\lambda \text{ I } S$; also gilt: $P\lambda, Q\lambda, R\lambda \text{ I } S$, d.h. die Bilder der kollinearen Punkte P, Q, R sind kopunktal.

(iii) λ ist selbstadjungiert, da:

Sei $Y \in \mathcal{P}$ fest. $\forall X$ mit $X \text{ I } Y\lambda$ gilt $X\lambda \text{ I } Y$ (*), denn λ ist nach Voraussetzung eine Polarität, und $X\lambda \text{ I } (Y\lambda)\lambda^* \stackrel{(*)}{\Rightarrow}$, denn λ ist



nach (i) und (ii) eine Korrelation.

Da $\{X\lambda\}$ wegen (i) und (ii) ein Geradenbüschel ist, dessen Strahlen nach (*) alle mit Y und nach (**) alle mit $Y\lambda\lambda^*$ inzidieren, folgt: $Y=Y\lambda\lambda^*$. Da Y beliebig in \mathcal{P} wählbar ist, folgt: $\lambda\lambda^* = \iota$. ◆

SATZ 1.11: Eine projektive Ebene ist genau dann zu ihrer dualen Ebene isomorph, wenn sie eine Korrelation gestattet. Die Polaritäten sind genau die selbstadjungierten Korrelationen.

Bemerkungen: (a) Manchmal sagt man statt selbstadjungierte Korrelation auch involutorische Korrelation. Dann muß man allerdings den Begriff Korrelation so fassen, daß eine Korrelation eine Selbstabbildung der Menge $\mathcal{P} \times \mathcal{U}$ ist. Bei uns ist eine Korrelation $\mathcal{J}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U}$ keine Selbstabbildung und kann daher nie involutorisch sein.

(b) Ist $\lambda: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U}$ eine Polarität, so gilt für $\lambda^*: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}$ wegen $\lambda\lambda^* = \iota$ dann $\lambda^* = \lambda^{-1}$.

1.12. Algebraisierung der Desarguesebenen

Sei \mathcal{P}_x eine beliebige Punktreihe in π_{De} und $0, E, U \in \mathcal{P}_x$ und paarweise verschieden (solche Punkte existieren nach Satz 1.2).

$\mathcal{P}_x \setminus \{U\} =: \mathring{\mathcal{P}}_x$ heißt "punktirierte projektive Gerade". Sei $u \in \mathcal{U} \setminus \{x\}$. Dann existiert

zu jedem $X \in \mathring{\mathcal{P}}_x$ nach Satz 1.4 genau eine

Elation $\tau_X \in \text{PGL}(U, u)$, welche leistet:

$0\tau_X = X$; umgekehrt bestimmt jede Elation

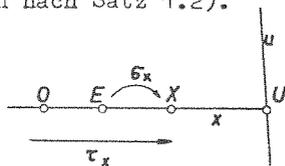
$\tau_Y \in \text{PGL}(U, u)$ genau einen Punkt $0\tau_Y =: Y \in \mathring{\mathcal{P}}_x$. Die Abbildung $\tau: \mathring{\mathcal{P}}_x \rightarrow$

$\text{PGL}(U, u)$ mit $X \mapsto X\tau =: \tau_X$ ist daher eine Bijektion. Vermöge der

Bijektion $\tau^{-1}: \text{PGL}(U, u) \rightarrow \mathring{\mathcal{P}}_x$ können wir die Gruppenstruktur von

$\text{PGL}(U, u)$ übertragen in die zunächst amorphe Punktmenge $\mathring{\mathcal{P}}_x$, indem

wir verlangen, daß τ^{-1} (und damit τ) ein Isomorphismus sein soll.



Zwischenbemerkung:

Zwei Gruppen $\{G, \circ\}$ und $\{H, *\}$ heißen isomorph, wenn eine Bijektion $\mu: G \rightarrow H$ existiert mit $(a \circ b)\mu = a\mu * b\mu \quad \forall a, b \in G$.

Wir definieren daher in $\dot{\mathbb{R}}_x$ eine Operation $+$ gemäß:

$$A+B := O(\tau_A \tau_B) = (O\tau_A)\tau_B = A\tau_B.$$

$A+B$ ist also jener Punkt, in den O unter $\tau_A \tau_B$ übergeht. $\{\dot{\mathbb{R}}_x, +\}$ ist vermöge τ isomorph zu $PGL(U, u)$ und daher ebenso wie $PGL(U, u)$ eine kommutative Gruppe in τ_x (vgl. Satz 1.4 und Satz 1.5).

Bemerkung: Speziell für $X=O$ gilt für τ_O dann $O\tau_O = O \Rightarrow \tau_O = \iota$. Damit ist O infolge des Isomorphismus das neutrale Element der kommutativen Gruppe $\{\dot{\mathbb{R}}_x, +\}$.

Analog können wir eine Bijektion $\sigma: \dot{\mathbb{R}}_x \setminus \{0\} \rightarrow PGL(O, u)$ erklären: Jedem Punkt $X \in \dot{\mathbb{R}}_x \setminus \{0\}$ wird jene Homologie $\sigma_X \in PGL(O, u)$ zugeordnet, welche leistet: $E\sigma_X = X$. Vermöge der Bijektion $\sigma^{-1}: PGL(O, u) \rightarrow \dot{\mathbb{R}}_x \setminus \{0\}$ können wir die Gruppenstruktur von $PGL(O, u)$ übertragen in die Punktmenge $\dot{\mathbb{R}}_x \setminus \{0\}$, indem wir verlangen, daß σ^{-1} (und damit σ) ein Isomorphismus sein soll.

Wir definieren daher in $\dot{\mathbb{R}}_x \setminus \{0\}$ eine Operation \cdot gemäß:

$$A \cdot B := E(\sigma_A \sigma_B) = (E\sigma_A)\sigma_B = A\sigma_B.$$

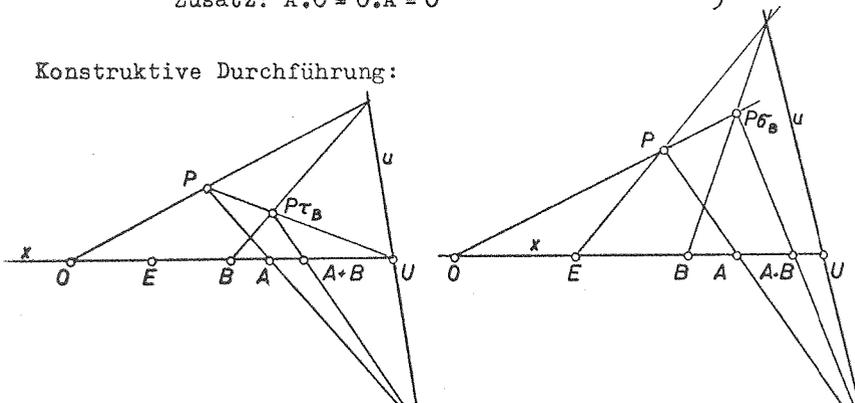
$A \cdot B$ ist also jener Punkt, in den E unter $\sigma_A \sigma_B$ übergeht. $\{\dot{\mathbb{R}}_x \setminus \{0\}, \cdot\}$ ist vermöge σ isomorph zu $PGL(O, u)$ und daher eine Gruppe (vgl. Satz 1.4). Genau wenn PP gilt (vgl. Satz 1.6), ist mit $PGL(O, u)$ auch $\{\dot{\mathbb{R}}_x \setminus \{0\}, \cdot\}$ kommutativ.

Bemerkung: Speziell für $X=E$ gilt für σ_E dann $E\sigma_E = E \Rightarrow \sigma_E = \iota$. Damit ist E infolge des Isomorphismus das neutrale Element der Gruppe $\{\dot{\mathbb{R}}_x \setminus \{0\}, \cdot\}$.

Wir fassen zusammen und erweitern die zweistellige Operation \cdot auf ganz $\dot{\mathbb{R}}_x$:

Def. 1.12: Addition in $\dot{\mathbb{R}}_x$: $A+B := A\tau_B$
 Multiplikation in $\dot{\mathbb{R}}_x \setminus \{0\}$: $A \cdot B := A\sigma_B$ } $\forall A, B \in \dot{\mathbb{R}}_x$.
 Zusatz: $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

Konstruktive Durchführung:



Wir konstruieren $A+B$ bzw. $A.B$, indem wir zu einem beliebigen Hilfspunkt $P \notin \mathbb{P}_x \wedge P \notin \mathcal{L}$ u den Punkt $P\tau_a$ bzw. $P\sigma_a$ gemäß 1.5, Folg. 5 konstruieren und damit $A\tau_a$ bzw. $A\sigma_a$ ermitteln. Nach Wahl von P sind diese Konstruktionen zwingend und reine Inzidenztabelle. Da τ_a bzw. σ_a durch $O \mapsto B$ bzw. $E \mapsto B$ vollständig bestimmt ist, muß $A+B$ bzw. $A.B$ von der Wahl des Hilfspunktes P unabhängig sein.

Unser Ziel ist zu zeigen, daß $\{\mathbb{P}_x, +, \cdot\}$ ein Körper ist.

Zwischenbemerkung:

Unter einem Körper versteht man eine mindestens zweielementige Menge K , in welcher zwei zweistellige Operationen $+$ und \cdot erklärt sind, wobei gilt:

(I) $\{K, +\}$ ist eine kommutative Gruppe.

Bemerkung: In $\{K, +\}$ existiert genau ein neutrales Element o ("Nullelement") mit $o+a=a+o=a \quad \forall a \in K$.

(II) $\{K \setminus \{o\}, \cdot\}$ ist Gruppe.

Bemerkung: In $\{K \setminus \{o\}, \cdot\}$ existiert genau ein neutrales Element e ("Einselement") mit $e.a=a.e=a \quad \forall a \in K$.

(III) Es gelten beide Distributivgesetze:

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a, b, c \in K$$
$$c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$$

Bemerkung: Aus den beiden Distributivgesetzen folgt $a \cdot o = o \cdot a = o$ wegen $a \cdot (b-b) = a \cdot o = a \cdot b - a \cdot b = 0$ bzw. $(b-b) \cdot a = o \cdot a = b \cdot a - b \cdot a = 0$.

Ist in (II) speziell $\{K \setminus \{o\}, \cdot\}$ eine kommutative Gruppe, so heißt der Körper kommutativ.

Bemerkung: Wir verwenden i.f. die von BOURBAKI benützten Bezeichnungen: Im allgemeinen Fall sprechen wir von einem "Körper"-gelegentlich wird dieser auch "Schiefkörper" genannt - und im Sonderfall von einem "kommutativen Körper", der gelegentlich auch "Körper" genannt wird.

Beispiele: Die reellen Zahlen, die komplexen Zahlen und die rationalen Zahlen bilden mit der üblichen Addition und Multiplikation die kommutativen Körper \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} bzw. \mathbb{Q} .

Folgerungen:

1) \mathbb{P}_x wird durch Definition 1.12 ein Körper mit dem Punkt O als Nullelement und dem Punkt E als Einselement. Dieser Körper ist genau dann kommutativ, wenn die Desarguesebene pappussch ist.

Bew.: (I) und (II) sind erfüllt, da $+$ und \cdot durch Strukturübertragungen aus $PGL(U,u)$ bzw. $PGL(O,u)$ gewonnen wurden; damit ist auch die zweite Aussage bewiesen. Es ist also nur noch

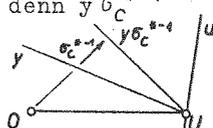
(III) (Distributivgesetze) zu überprüfen.

1. Hilfsüberlegung: $\tau_B \sigma_C = \sigma_C \tau_{B.C} \quad \forall B, C \in \mathbb{P}^1 \setminus x$.

Bew.: $\sigma_C^{-1} \tau_B \sigma_C$ ist als Produkt von perspektiven Kollineationen sicher eine projektive Kollineation. $\sigma_C^{-1} \tau_B \sigma_C$ ist sogar eine perspektive Kollineation mit der Achse u und dem Zentrum U :

$$\sigma_C, \sigma_C^{-1} \in \text{PGL}(O, u) \Rightarrow \sigma_C | \mathbb{P}^1 = \iota \wedge \sigma_C^{-1} | \mathbb{P}^1 = \iota; \tau_B \in \text{PGL}(U, u) \Rightarrow \tau_B | \mathbb{P}^1 = \iota;$$

$(\sigma_C^{-1} \tau_B \sigma_C) | \mathbb{P}^1 = (\sigma_C^{-1} | \mathbb{P}^1) \circ (\tau_B | \mathbb{P}^1) \circ (\sigma_C | \mathbb{P}^1) = \iota \circ \iota \circ \iota = \iota$, also ist u Achse von $\sigma_C^{-1} \tau_B \sigma_C$. Um U als Zentrum zu erkennen, genügt es zu zeigen, daß jeder Strahl y des Büschels \mathcal{U}_U als Ganzes fest bleibt. Es gilt: $(y \sigma_C^{-1}) \tau_B = y \sigma_C^{-1}$, denn $y \sigma_C^{-1}$ ist Kollineationsstrahl für $\tau_B \Rightarrow (y \sigma_C^{-1}) \tau_B \sigma_C^{-1} = (y \sigma_C^{-1}) \sigma_C = y$. Damit gilt:

$$\sigma_C^{-1} \tau_B \sigma_C \in \text{PGL}(U, u).$$


Um zu zeigen, daß $\tau_{B.C} = \sigma_C^{-1} \tau_B \sigma_C$ gilt, genügt es gemäß Satz 1.4. und Satz 1.5 wegen $\tau_{B.C} \in \text{PGL}(U, u)$ zu zeigen, daß beide Abbildungen für einen einzigen Punkt ($\neq U, \notin u$) dasselbe leisten.

Z.B. für O gilt:

$$O \sigma_C^{-1} \tau_B \sigma_C = O \tau_B \sigma_C = B \sigma_C = B.C = O \tau_{B.C} \Rightarrow \sigma_C^{-1} \tau_B \sigma_C = \tau_{B.C} \Rightarrow \tau_B \sigma_C = \sigma_C \tau_{B.C} \quad \diamond$$

O ist Zentrum von σ_C^{-1} Def.1.12

2. Hilfsüberlegung: Sei a eine beliebige Gerade mit $a \in \mathcal{U}_O \setminus \{x\}$.

Wir erklären analog wie oben eine Abbildung $\alpha: \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \text{PGL}(U, a)$, welche jedem Punkt $X \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ die Homologie $\alpha_X \in \text{PGL}(U, a)$ mit $E \alpha_X = X$ zuordnet. Dann gilt:

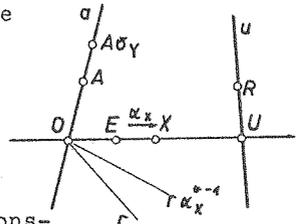
$$\alpha_X \sigma_Y = \sigma_Y \alpha_X \quad \forall X, Y \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}.$$

Bew.: $\alpha_X^{-1} \sigma_Y \alpha_X \in \text{PGL}(U, a)$ ist sogar eine perspektive Kollineation mit der Achse u und dem Zentrum O :

$\forall R \in \mathbb{P}^1 \setminus u$ gilt: $R \alpha_X^{-1} \in u$, denn u ist Kollineationsstrahl für $\alpha_X^{-1} \Rightarrow (R \alpha_X^{-1}) \sigma_Y = R \alpha_X^{-1}$, denn u ist Achse für $\sigma_Y \Rightarrow (R \alpha_X^{-1}) \sigma_Y \alpha_X = R \alpha_X^{-1} \alpha_X = R \quad \forall R \in \mathbb{P}^1 \setminus u$, d.h. $(\alpha_X^{-1} \sigma_Y \alpha_X) | \mathbb{P}^1 = \iota$.

$\forall r \in \mathcal{U}_O$ gilt: $r \alpha_X^{-1} \in u$, denn O bleibt als Punkt der Achse von α_X^{-1} fest $\Rightarrow (r \alpha_X^{-1}) \sigma_Y = r \alpha_X^{-1}$, denn $r \alpha_X^{-1}$ ist Kollineationsstrahl für $\sigma_Y \Rightarrow r \alpha_X^{-1} \sigma_Y \alpha_X = r \alpha_X^{-1} \alpha_X = r \quad \forall r \in \mathcal{U}_O$.

Um zu zeigen, daß $\sigma_Y \in \text{PGL}(O, u)$ und $\alpha_X^{-1} \sigma_Y \alpha_X \in \text{PGL}(O, u)$ übereinstimmen, genügt es zu zeigen, daß sie für einen einzigen Punkt



($\neq 0, \neq u$) dasselbe leisten, z.B. für $A \in I \wedge A \neq 0$:

$$A\alpha_x^{-1}\sigma_y\alpha_x \quad \xrightarrow{=} \quad A\sigma_y\alpha_x \quad \xrightarrow{=} \quad A\sigma_y$$

a ist Achse von α_x^{-1} denn $A\sigma_y$ liegt auf der Achse a von α_x ,
weil a Kollineationsstrahl von σ_y ist.

2

3. Hilfsüberlegung: $A \cdot B = B\alpha_A \quad \forall A \in \mathring{\mathcal{P}}_x \setminus \{0\} \wedge \forall B \in \mathring{\mathcal{P}}_x$.

Bew.: Fall 1: $B=0$: $A \cdot 0 = 0 \wedge 0\alpha_A = 0$

Zusatz in Def.1.2 denn 0 liegt auf der Achse a von α_A .

Fall 2: $B \neq 0$: $A \cdot B = A\sigma_B \xrightarrow{=} E\alpha_A\sigma_B \xrightarrow{=} E\sigma_B\alpha_A = B\alpha_A$
 Def.1.12 || Def. von α_A || 2. Hilfsüberlegung || Erklärung von σ_B

3

4. Hilfsüberlegung: $\tau_B\alpha_C = \alpha_C\tau_{C \cdot B} \quad \forall B \in \mathring{\mathcal{P}}_x \wedge \forall C \in \mathring{\mathcal{P}}_x \setminus \{0\}$.

Bew.: $\alpha_C^{-1}\tau_B\alpha_C \in \text{PGL}(x)$ ist sogar eine perspektive Kollineation mit der Achse u und dem Zentrum U:

$\forall R \in \mathcal{P}_u$ gilt: $R\alpha_C^{-1} \in I_u$, denn u ist Kollineationsstrahl für $\alpha_C^{-1} \Rightarrow$
 $(R\alpha_C^{-1})\tau_B = R\alpha_C^{-1}\tau_B\alpha_C = R\alpha_C^{-1}\alpha_C = R$
 $\forall R \in \mathcal{P}_u \Rightarrow (\alpha_C^{-1}\tau_B\alpha_C) | \mathcal{P}_u = \text{id}$

$\forall y \in \mathcal{U}$ gilt: $(y\alpha_C^{-1})\tau_B\alpha_C = y\tau_B\alpha_C = y\alpha_C = y$,
 denn y ist für α_C^{-1} und τ_B und α_C Kollineationsstrahl } $\Rightarrow \alpha_C^{-1}\tau_B\alpha_C \in \text{PGL}(U, u)$

Um die Übereinstimmung mit $\tau_{C \cdot B} \in \text{PGL}(U, u)$ zu zeigen, berechnen wir

$$0\alpha_C^{-1}\tau_B\alpha_C = 0\tau_B\alpha_C = B\alpha_C = C \cdot B = 0\tau_{C \cdot B} \Rightarrow \alpha_C^{-1}\tau_B\alpha_C = \tau_{C \cdot B} \Rightarrow$$

0 liegt auf der Achse a von α_C^{-1} || Def. 1.12 || 3. Hilfsüberlegung || Def. 1.12 || $\Rightarrow \tau_B\alpha_C = \alpha_C\tau_{C \cdot B}$

4

Überprüfung des ersten Distributivgesetzes $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$:

Fall 1 : $C = 0$:

$(A+B) \cdot 0 = 0$; $A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0 + 0 = 0$

Zusatz in Def.1.12 Zusatz Def.1.12 denn 0 ist neutrales Element für +

Fall 2 : $C \neq 0$:

$(A+B) \cdot C \xrightarrow{=} (A+B)\sigma_C \xrightarrow{=} A\tau_B\sigma_C \xrightarrow{=} A\sigma_C\tau_{B \cdot C} \xrightarrow{=} A \cdot C\tau_{B \cdot C} \xrightarrow{=} A \cdot C + B \cdot C$
 Def.1.12 || Def.1.12 || 1. Hilfsüberlegung || Def.1.12 || Def.1.12

Überprüfung des zweiten Distributivgesetzes $C \cdot (A+B) = C \cdot A + C \cdot B$:

Fall 1: $C = 0$:

$$0 \cdot (A+B) \stackrel{!}{=} 0;$$

Zusatz in Def.1.12

$$0 \cdot A + 0 \cdot B \stackrel{!}{=} 0+0 = 0$$

Zusatz in Def.1.12 || denn 0 ist neutrales Element für +

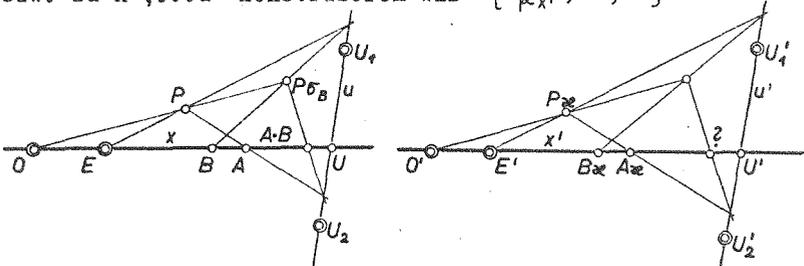
Fall 2: $C \neq 0$:

$$C \cdot (A+B) \stackrel{!}{=} (A+B) \alpha_C \stackrel{!}{=} A \tau_B \alpha_C \stackrel{!}{=} A \alpha_C \tau_{C \cdot B} \stackrel{!}{=} C \cdot A \tau_{C \cdot B} \stackrel{!}{=} C \cdot (A+B)$$

3. Hilfsüberlegung || Def.1.12 || 4. Hilfsüberlegung || 3. Hilfsüberlegung || Def.1.12

2) Bei der Konstruktion des Körpers $K := \{\overset{\circ}{\mathbb{R}}_x, +, \cdot\}$ waren die Elemente $x \in \mathcal{U}$ und $0, E, U \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}_x$ (pw. verschieden) und $u \in \mathcal{U}_U \setminus \{x\}$ willkürlich. Der konstruierte Körper ist bis auf Isomorphie von der Auswahl der obigen Elemente unabhängig; er hängt nur von π_x ab und heißt daher Körper der Desarguesebene (symbolisch: $\pi_{\mathcal{D}_C}(K)$).

Bew.: Zu den Elementen x, \dots, u konstruieren wir $\{\overset{\circ}{\mathbb{R}}_x, +, \cdot\}$ bzw. zu x', \dots, u' konstruieren wir $\{\overset{\circ}{\mathbb{R}}_{x'}, +', \cdot'\}$.



Wir wählen $U_1, U_2 \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}_u$ beliebig mit U_1, U_2, U paarweise verschieden und $U'_1, U'_2 \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}_{u'}$ mit U'_1, U'_2, U' pw. verschieden. In $\pi_{\mathcal{D}_e}$ ist $PGL(\pi)$ viereckstransitiv (vgl. Satz 1.8), also existiert mindestens ein $\alpha \in PGL(\pi)$ mit:

$$O\alpha = O', E\alpha = E', U_1\alpha = U'_1, U_2\alpha = U'_2. \text{ Damit gilt } U\alpha = U', x\alpha = x', u\alpha = u'.$$

(α) Wir unterwerfen alle Punkte und Geraden, die zur Konstruktion von $A \cdot B$ bzw. $A+B$ verwendet wurden, der projektiven Kollineation α und erhalten $(A \cdot B)\alpha$ bzw. $(A+B)\alpha$.

(β) In der "gestrichenen" Figur konstruieren wir zu den Punkten $A\alpha$ und $B\alpha$ den Punkt $A\alpha \cdot B\alpha$ bzw. $A\alpha + B\alpha$ und ziehen dazu als Hilfspunkt $P\alpha$ heran.

(γ) Weil (α, α^*) ein Isomorphismus $\pi \rightarrow \pi$ ist, stimmen die in (α) erhaltenen Linien mit den in (β) verwendeten Linien überein \Rightarrow

$(A \cdot B)\alpha = A\alpha \cdot B\alpha$ bzw. $(A+B)\alpha = A\alpha + B\alpha \Rightarrow \alpha|_{\overset{\circ}{\mathbb{R}}_x}$ ist Isomorphismus der Körper $\{\overset{\circ}{\mathbb{R}}_x, +, \cdot\} \rightarrow \{\overset{\circ}{\mathbb{R}}_{x'}, +', \cdot'\}$.

Wie wirkt sich die Gültigkeit des Satzes von Fano auf den Körper K einer Desarguesebene aus ?

Zwischenbemerkung:

Sei K ein Körper mit dem Nullelement 0 und dem Einselement e . Gibt es eine natürliche Zahl n , sodaß gilt: $\underbrace{e+e+\dots+e}_n = 0$, n -mal

so sagt man: K hat die Charakteristik n , wenn n die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist (symbolisch: $\text{Char } K = n$); existiert kein solches n , so sagt man: K hat die Charakteristik Null.

Jeder Oberkörper des rationalen Zahlkörpers \mathbb{Q} hat natürlich die Charakteristik Null, z.B. \mathbb{R} und \mathbb{C} .

$K = \{0, 1\}$ mit den zweistelligen Operationen $+$ und \cdot , die durch die Tabellen

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

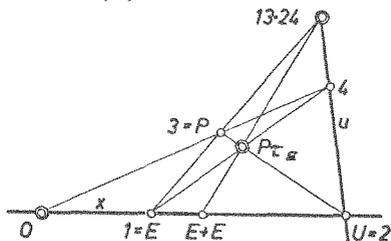
\cdot	0	1
0	0	0
1	0	1

definiert sind, ist ein Körper der Charakteristik zwei.

3) Eine Desarguesebene ist genau dann fanosch, wenn der Körper der Desarguesebene eine Charakteristik ungleich zwei hat.

Bew.: (a) $\text{Char } K = 2 \Rightarrow E+E=0 \Rightarrow E+E=E\tau_E$, denn τ_E ist jene

Elation aus $\text{PGL}(U, u)$, welche $0 \rightarrow E$ leistet. Wir haben E nun τ_E zu unterwerfen (vgl. nebenstehende Inzidenztabelle). Bei dieser Konstruktion entsteht das Viereck $1, \dots, 4$, dessen Diagonalepunkte $0, P\tau_E, 13.24$ sind.



$E+E=0 \Rightarrow 0, P\tau_E, 13.24$ sind kollinear \Rightarrow es existiert ein Viereck mit kollinearen Diagonalepunkten $\Rightarrow \pi$ ist nichtfanosch.

(b) $\text{Char } K \neq 2 \Rightarrow E+E \neq 0 \Rightarrow 0, P\tau_E, 13.24$ sind nicht kollinear \Rightarrow es existiert ein Viereck mit nicht kollinearen Diagonalepunkten

1.10, Bem. b) π_{De} ist fanosch. ◆

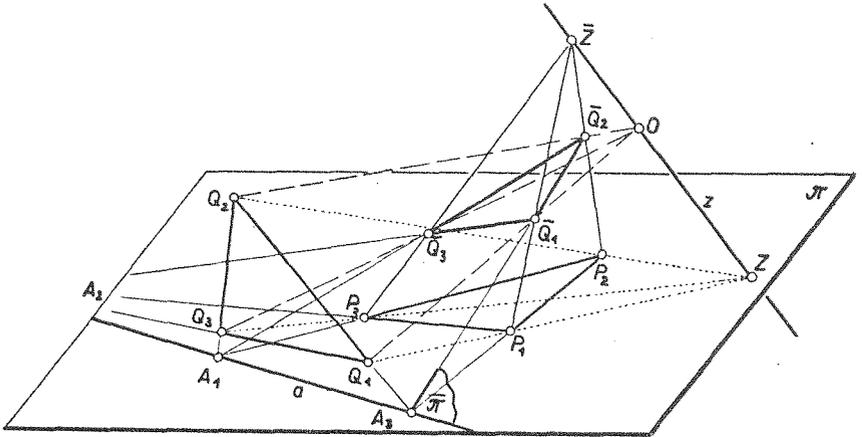
4) PAE ist eine klassische projektive Ebene, deren Körper isomorph zum Körper der reellen Zahlen ist.

Bemerkung: Der Beweis ist erst möglich, wenn die Struktur von PAE durch zwei zusätzliche Forderungen präzisiert wird.

Bew.: (1) 1.Forderung: Die Anschauungsebene ist in einem Anschauungsraum enthalten.

Um den Anschauungsraum so zu erweitern, daß er auch PAE enthält, führen wir folgende Sprechweisen ein: Zwei parallele verschiedene Geraden des Anschauungsraumes haben einen "Fernpunkt" gemeinsam; zwei parallele verschiedene Ebenen des Anschauungsraumes haben eine "Ferngerade" gemeinsam.

Wir zeigen zunächst: In PAE gilt der Satz von Desargues:



In der Ebene π seien die beiden Z-perspektiven Dreiecke P_j und Q_j gegeben. Es existiert sicher eine (eigentliche) Gerade z durch Z , die nicht in π liegt, und auf ihr existieren Punkte O, \bar{Z} so, daß Z, \bar{Z}, O paarweise verschieden sind. Die beiden Geraden Q_jO und $P_j\bar{Z}$ ($j=1,2,3$) liegen in einer Ebene und haben daher einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt \bar{Q}_j (eventuell ein Fernpunkt). Die Punkte \bar{Q}_j sind nicht kollinear, da ihre Bilder Q_j bei Projektion aus O auf π nicht kollinear sind. Durch geeignete Wahl von O auf z kann erreicht werden, daß \bar{Q}_j keine Fernpunkte sind. Die Punkte \bar{Q}_j bestimmen dann eindeutig eine Verbindungsebene $\bar{\pi}$. Die Geraden $\bar{Q}_1\bar{Q}_2$ in $\bar{\pi}$ und P_1P_2 in π liegen in einer Ebene und besitzen daher einen Schnittpunkt A_3 mit $A_3 \in \bar{\pi} \cap \pi =: a$. Analog liegen $A_1 := \bar{Q}_2\bar{Q}_3 \cdot P_2P_3$ und $A_2 := \bar{Q}_1\bar{Q}_3 \cdot P_1P_3$ auf der Spur a von $\bar{\pi}$ in π .

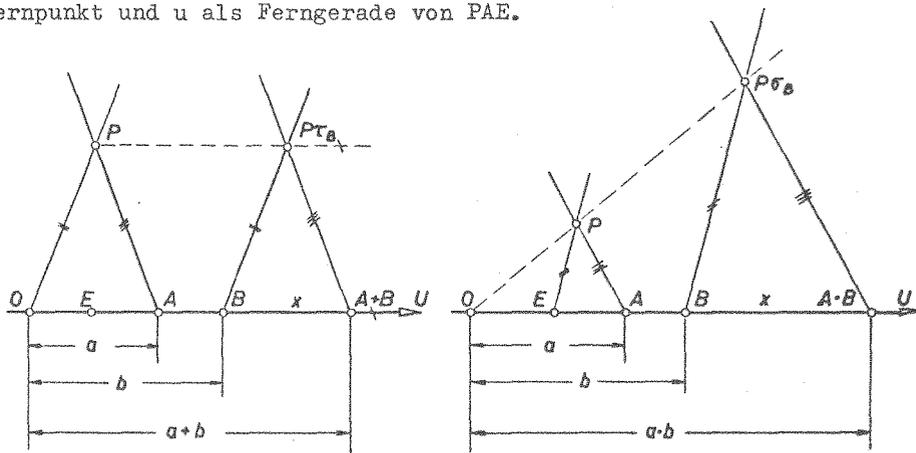
Wir projizieren aus O auf π :

$$\left. \begin{array}{l} P_j \mapsto P_j \text{ (wegen } P_j \text{ in } \pi) \\ \bar{Q}_j \mapsto Q_j \text{ (Konstruktion von } \bar{Q}_j) \\ A_j \mapsto A_j \text{ (wegen } A_j \text{ in } \pi) \end{array} \right\} \Rightarrow Q_1 Q_2 \mid A_3 \wedge Q_1 Q_3 \mid A_2 \wedge Q_2 Q_3 \mid A_1.$$

Da die Punkte A_j kollinear sind, gilt der Satz von Desargues.

Bemerkung: Wir zeigen in 3.3, daß dieses Konstruktionsprinzip für beliebige projektive Ebenen gilt, die in einem projektiven Raum liegen. Eine solche projektive Ebene ist stets eine Desarguesebene.

(2) Da PAE Desarguesebene ist, kann man PAE algebraisieren. Dabei dürfen x, O, E, U , u nach Folg. 2 beliebig gewählt werden und es stellt sich als Ergebnis stets derselbe Körper (bis auf Isomorphie) ein. Wir wählen o.B.d.A. x als eigentliche Gerade, U als ihren Fernpunkt und u als Ferngerade von PAE.



Wir konstruieren zu $A, B \in \bar{\rho}_x$ die Punkte $A+B$ und $A.B$ (vgl. Konstruktion nach Def.1.12). Aus dem Elementarunterricht ist bekannt: Jeder (eigentliche) Punkt X einer (eigentlichen) Punktreihe in PAE kann nach Auszeichnung eines Ursprungs O und eines Einheitspunktes E durch den orientierten Abstand x (gemessen in der Einheit \overline{OE}) beschrieben werden. Also gilt: $x = TV(X, E, O)$ mit $|x| = \frac{\overline{XO}}{\overline{EO}}$ und $\text{sign } x = 1$ für \overrightarrow{XO} gleichsinnig \overrightarrow{EO} , $\text{sign } x = -1$ für \overrightarrow{XO} gegensinnig \overrightarrow{EO} und $x = 0$ (=Null) für $O = X$. Man bezeichnet: $x = TV(X, E, O)$ als "Teilverhältnis der Punkte X, E, O " (mit $E \neq O$). Dadurch wird eine Abbildung $\mu : \bar{\rho}_x \rightarrow \mathbb{R}$ durch $X \mapsto X\mu = x$ erklärt. Bei dieser gilt: $E \mapsto E\mu = 1, O \mapsto O\mu = 0$ (=Null).

2.Forderung: μ ist bijektiv (Stetigkeitsaxiom für die Anschauungsebene).

Wir zeigen, daß μ dann sogar ein Isomorphismus $\{\mathbb{A}^2_x, +, \cdot\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist. Gelte $A \mapsto A_\mu = a \in \mathbb{R}$, $B \mapsto B_\mu = b \in \mathbb{R}$. Für $+$ ist aus den Parallelogrammen, die bei der obigen Konstruktion des Punktes $A+B$ entstehen zu erkennen: $A+B \mapsto (A+B)_\mu = a+b = A_\mu + B_\mu$.

Für \cdot folgt für $A, B \neq 0$ aus der Ähnlichkeit der Dreiecke E, A, P und $B, A, B, P \sigma_B$ dann $a : 1 = (A \cdot B)_\mu : b \Rightarrow (A \cdot B)_\mu = a \cdot b = A_\mu \cdot B_\mu$; weiters gilt $(A \cdot 0)_\mu = 0_\mu = 0 = a \cdot 0 = A_\mu \cdot 0_\mu$ und analog $(0 \cdot A)_\mu = 0_\mu = 0 \cdot A_\mu$.

Damit ist der Körper von PAE isomorph zu \mathbb{R} .

(3) Da \mathbb{R} kommutativ ist ($a \cdot b = b \cdot a$), ist nach Folgerung 2 die PAE pappussch; da $\text{Char } \mathbb{R} \neq 2$ gilt, folgt aus Folgerung 3, daß PAE fanosch ist. Also ist PAE eine klassische projektive Ebene.



SATZ 1.12: Zu jeder Desarguesebene gehört ein (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmter Körper, der genau für Pappusebenen kommutativ ist. Eine Desarguesebene ist genau dann fanosch, wenn die Charakteristik ihres Körpers ungleich zwei ist. Die projektiv abgeschlossene Anschauungsebene ist eine klassische projektive Ebene, deren Körper isomorph zum reellen Zahlkörper ist.

Bemerkung: Später werden wir zeigen, daß umgekehrt zu jedem Körper eine Desarguesebene existiert. Damit kann man die Lücke aus 1.6 schließen: Die Frage nach nichtpappusschen Desarguesebenen lautet algebraisch formuliert: Gibt es nicht kommutative Körper? Ja (vgl. Algebra). Damit gilt im allgemeinen: $\text{De} \not\Rightarrow \text{PP}$ (sonst müßte jeder Körper kommutativ sein). Es gilt jedoch: Jeder endliche Körper ist kommutativ (Satz von M. WEDDERBURN). Dieser Satz bedeutet geometrisch wegen Satz 1.12: Jede endliche Desarguesebene ist pappussch. Wegen Satz 1.12 und der oben erwähnten Umkehrung können geometrische Sachverhalte in algebraische umformuliert werden und umgekehrt. Man nennt daher die in 1.12 durchgeführte Konstruktion "Algebraisierung einer Desarguesebene".

§ 2. Kegelschnitte in Pappusebenen

2.1. Definition, Eigenschaften und die Sätze von PASCAL und BRIANCHON

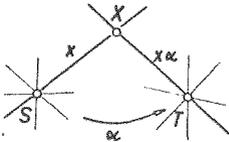
DEF.2.1 a: Eine Punktmenge in einer PP-Ebene heißt ein "Punktkegelschnitt", wenn sie die Menge der Schnittpunkte zugeordneter Geraden zweier verschiedener projektiver, nicht perspektiver Geradenbüschel ist. Eine Geradenmenge in einer PP-Ebene heißt ein "Geradenkegelschnitt" wenn sie die Menge

der Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte zweier verschiedener projektiver, nicht perspektiver Punktreihen ist.

Punktkegelschnitt:

$k := \{X \in \mathcal{P} \mid X = x.x\alpha \text{ mit}$
 $x \in \mathcal{O}_S \wedge \alpha: \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_T \wedge$
 $\alpha \text{ nicht perspektive}$

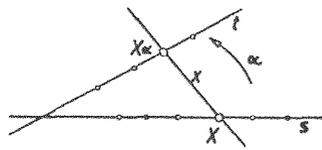
Projektivität $\wedge S \neq T$



Geradenkegelschnitt:

$k^* := \{x \in \mathcal{O} \mid x = X.X\alpha \text{ mit}$
 $X \in \mathcal{P}_s \wedge \alpha: \mathcal{P}_s \rightarrow \mathcal{P}_t \wedge$
 $\alpha \text{ nicht perspektive}$

Projektivität $\wedge s \neq t$



Bemerkungen: (a) Man kann Punkte eines Punktkegelschnitts durch Vervollständigung der Projektivität α mit einer Projektivitätsachse konstruieren (bzw. dual). J. STEINER verwendete zuerst diese Kegelschnittdefinition im Sonderfall der PAE für einen Punktkegelschnitt. Wir bezeichnen daher obige Definition als "Steinersche Kegelschnittdefinition".

(b) Jeder Punktkegelschnitt k geht durch die "Grundpunkte" S und T . Jeder Geradenkegelschnitt k^* enthält die "Grundgeraden" s und t .

Bew.: Es genügt hier und i.f. die Beweise z.B. für Punktkegelschnitte zu führen.

$ST = t; t\alpha \in \mathcal{O}_T. \alpha \text{ nicht perspektiv} \Rightarrow t\alpha \neq t$ (vgl. 1.7, Bem. d) \Rightarrow
 $\Rightarrow T = t.t\alpha \Rightarrow T \in k$. Für α^{-1} erhält man ebenso $S \in k$.

Folgerungen:

1) Durch jeden Grundpunkt S eines Punktkegelschnitts k existiert genau eine Gerade s , die außer S keinen Punkt von k enthält; jede von s verschiedene Gerade durch S enthält genau einen von S verschiedenen Punkt von k . Jeder Punktkegelschnitt ist gleichmächtig einer Punktreihe.

Bew.: (1) Sind S, T die Grundpunkte von k und wird k bestimmt durch die Projektivität $\alpha: \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_T$, so liegt auf $s := (TS)\alpha^{-1}$ kein von S verschiedener Punkt von k , weil s die Gerade $s\alpha$ genau in S schneidet und α bijektiv ist. Für jede von s verschiedene Gerade $x \in \mathcal{O}_S$ gilt $x\alpha \neq TS = s\alpha$, so daß $X = x.x\alpha \in k$ mit $X \neq S$ gilt. Auf x kann kein von S und X verschiedener Punkt von k

liegen, da $x\alpha$ und damit X eindeutig bestimmt sind.

(2) Die Punktmenge k ist nach (1) und Def.2.1 a bijektiv zu \mathcal{G}_S , und dieses Geradenbündel ist nach Satz 1.2 gleichmächtig einer Punktreihe.

Bemerkungen: a) Drei verschiedene Punkte eines Punktkegelschnitts k sind nie kollinear. Nach Folgerung 1 gehören nämlich drei verschiedene Punkte von k nie einer Geraden durch einen Grundpunkt an; wären drei verschiedene Punkte von k dagegen inzident mit einer Geraden durch keinen Grundpunkt, so wäre $\alpha: \mathcal{G}_S \rightarrow \mathcal{G}_T$ wegen des FS eine Perspektivität im Widerspruch zur Def.2.1 a.

b) Für Geradenkegelschnitte gelten die zu Folgerung 1 und Bemerkung (a) dualen Aussagen.

2) Jede (nicht notwendig projektive) Kollineation α bzw. α^* führt einen Punktkegelschnitt in einen Punktkegelschnitt bzw. einen Geradenkegelschnitt in einen Geradenkegelschnitt über.

Bew.: Z.B. für einen Geradenkegelschnitt k^* :

$\alpha: \mathcal{P}_S \rightarrow \mathcal{P}_T$ erzeuge $k^* = \{x \mid x = X.X\alpha\}$. Es ist zu zeigen, daß $\{x\alpha^*\}$ ein Geradenkegelschnitt ist.

Für die Abbildung $\beta: \mathcal{P}_{S\alpha^*} \rightarrow \mathcal{P}_{T\alpha^*}$, die erklärt wird durch $X\alpha \in \mathcal{P}_{S\alpha^*} \mapsto (X\alpha)\alpha \in \mathcal{P}_{T\alpha^*}$, gilt:

$\beta = \alpha^{-1} \mid \mathcal{P}_{S\alpha^*} \circ \alpha \mid \mathcal{P}_T$. Da nach Voraussetzung

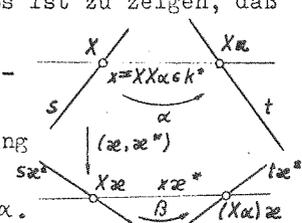
PP gilt, ist auch β richtig, und man darf Satz 1.8 anwenden: $\exists \bar{\alpha} \in \text{PGL}(\pi_{pp})$ mit $\bar{\alpha} \mid \mathcal{P}_S = \alpha$.

Die Abbildung $\bar{\beta} := \alpha^{-1} \bar{\alpha} \alpha$ ist nach Satz 1.8 eine projektive Kollineation und es gilt nach Definition von $\beta: \bar{\beta} \mid \mathcal{P}_{S\alpha^*} = \beta$;

nach Satz 1.8 ist $\bar{\beta}$ als Beschränkung einer projektiven Kollineation eine Projektivität und $\bar{\beta}$ erzeugt $\{x\alpha^*\}$. Weiters ist $\bar{\beta}$ nicht perspektiv, denn aus $s.t =: T + T\alpha$ folgt $T\alpha \neq T\alpha\alpha = (T\alpha)\beta$ mit $T\alpha = s\alpha^*.t\alpha^*$, was nach 1.7, Bem.d die Nichtperspektivität von $\bar{\beta}$ erweist.

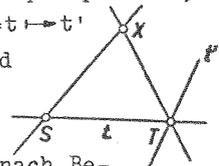
3) Wir bezeichnen mit N die Ordnung einer projektiven Ebene (vgl.1.2).

Die Punktkegelschnitte sind für $N=2$ genau die Dreiecke, für $N=3$ genau die Vierecke und für $N \geq 4$ eindeutig bestimmt durch die beiden Grundpunkte und drei weitere Punkte, wenn nie drei dieser fünf Punkte kollinear sind.



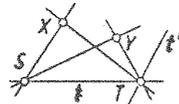
Bew.: (1) $N=2$: Wegen Folgerung 1 ist jeder Punktkegelschnitt notwendig eine dreipunktige Menge, und diese Punkte sind nach Bemerkung (a) nicht kollinear.

Umgekehrt kann jedes Dreieck S, T, X durch jene (nicht perspektive) Projektivität α erzeugt werden, die $SX \mapsto TX$ und $ST \mapsto t'$ leistet (t' ist der dritte Strahl in \mathcal{O}_T neben TS und TX); α ist wegen $N=2$ dadurch eindeutig festgelegt.



(2) $N=3$: Wegen Folgerung 1 ist jeder Punktkegelschnitt k notwendig eine vierpunktige Menge, wobei nach Bemerkung (a) nie drei der vier Punkte kollinear sind.

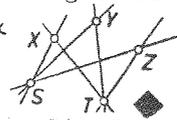
Umgekehrt kann jedes Viereck S, T, X, Y durch jene (nicht perspektive) Projektivität α erzeugt werden, die durch $SX \mapsto TX$, $SY \mapsto TY$, $ST \mapsto t'$ (t' ist der vierte Strahl in \mathcal{O}_T neben TS, TX, TY) wegen $N=3$ eindeutig bestimmt ist.



(3) $N \geq 4$: Geg.: S, T, X, Y, Z (nie drei kollinear).

Durch $SX \mapsto TX$, $SY \mapsto TY$, $SZ \mapsto TZ$ ist eine Projektivität α :

$\mathcal{O}_S \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_T$ wegen FS eindeutig bestimmt, welche einen Punktkegelschnitt durch die fünf gegebenen Punkte erzeugt. Dabei ist α nicht perspektiv, da X, Y, Z nicht kollinear sind.



4) Sei nun $N \geq 5$. Durch die Grundpunkte $S=1, T=3$ und $2, 4, 5 \in \mathcal{P}_2$, wobei nie drei der fünf Punkte kollinear sind, ist eindeutig ein Punktkegelschnitt k bestimmt. Wann gehört ein weiterer Punkt 6 zum Punktkegelschnitt k ? Wir bezeichnen: $12.45=:P, 23.56=:Q, 34.61=:R$.

Der Punkt 6 gehört genau dann zum Punktkegelschnitt, wenn P, Q, R kollinear sind.

Bew.: (a) VS.: $6 \in k$. Beh.: P, Q, R kollinear.

$45 =: a, 56 =: b, A =: a.16, B =: b.34,$

$S=1, T=3$.

Der Punktkegelschnitt k ist durch die

Projektivität $\alpha: \mathcal{O}_S \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_T$ bestimmt. Wir nennen die durch die

Kette $\mathcal{P}_a \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_S \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_T \xrightarrow{\alpha} \mathcal{P}_b$

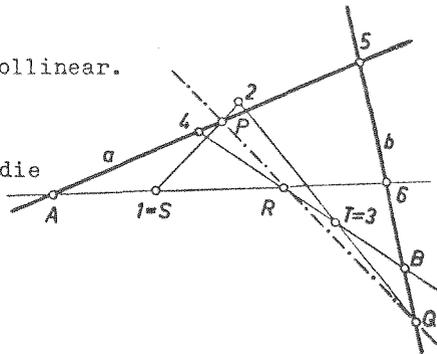
erzeugte Projektivität α' , wobei

gilt: $A\alpha'=6 (A \mapsto SA \xrightarrow{\alpha} T6 \mapsto 6),$

$4\alpha'=B, P\alpha'=Q, 5\alpha'=5$. Da der Schnittpunkt $a.b=5$ selbstentsprechend

ist und PP gilt, ist α' nach 1.9, Folg. 2 eine Perspektivität;

es existiert daher ein Perspektivitätszentrum Z mit:



$$\left. \begin{array}{l} A, 6, Z \text{ kollinear} \\ 4, B, Z \text{ kollinear} \\ P, Q, Z \text{ kollinear} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Z = A6 \cdot B4 = \\ = 16 \cdot 34 = R \end{array} \right\} \Rightarrow P, Q, R \text{ kollinear.}$$

(b) VS.: P, Q, R kollinear. Beh.: $6 \in k$.

Die durch $\varphi_S \pi \rho_a \pi \varphi_R \pi \rho_b \pi \varphi_T$ dargestellte Projektivität $\bar{\alpha}$ leistet:

$$\left. \begin{array}{l} (S2)\bar{\alpha} = T2 \\ (S4)\bar{\alpha} = T4 \\ (S5)\bar{\alpha} = T5 \end{array} \right\} \xrightarrow{F5} \begin{array}{l} \bar{\alpha} \text{ stimmt mit der Projektivität } \alpha \text{ \u00fcberein,} \\ \text{die den Punktkegelschnitt } k \text{ festlegt: } \bar{\alpha} = \alpha. \end{array}$$

$$(S6)\bar{\alpha} = T6 \Rightarrow (S6)\alpha = T6 \Rightarrow 6 \in k.$$

5) Bisher waren die Grundpunkte S und T des Punktkegelschnitts k ausgezeichnet. Es gilt: Je zwei Punkte eines Punktkegelschnitts k\u00f6nnen als Grundpunkte ben\u00fctzt werden. Oder anders formuliert: Alle Punkte eines Punktkegelschnitts werden aus zwei verschiedenen seiner Punkte durch projektive, nicht perspektive Geradenb\u00fcchel projiziert ("Steinereigenschaft").

Dual: Alle Geraden eines Geradenkegelschnitts schneiden aus zwei verschiedenen seiner Geraden projektive, nicht perspektive Punktreihen.

Bew.: (a) F\u00fcr N=2,3 sind nach Folgerung 3 die Punktkegelschnitte genau die Drei- bzw. Vierecke und wie aus dem dortigen Beweis zu erkennen ist, kann jede Ecke als Grundpunkt herangezogen werden.

(b) N\u22654: Der Punktkegelschnitt k tr\u00e4gt also mindestens f\u00fcnf verschiedene Punkte. Seien 1,3 seine Grundpunkte und 2,4,5 drei weitere seiner Punkte. Durch diese Punkte ist k eindeutig festgelegt; wir schreiben: $k(1,3;2,4,5)$. Da die erzeugende Projektivit\u00e4t α bijektiv ist, sind die Grundpunkte 1 und 3 gleichberechtigt: $k(1,3;2,4,5) = k(3,1;2,4,5)$.

Analog gilt f\u00fcr den Punktkegelschnitt \bar{k} mit den Grundpunkten 3,5 und den weiteren Punkten 4,2,1: $\bar{k}(5,3;4,2,1) = \bar{k}(3,5;4,2,1)$.

Es gilt:

$$X \in k \Leftrightarrow 12.45, 23.5X, 34.X1 \text{ kollinear,}$$

$$X \in \bar{k} \Leftrightarrow 54.21, 43.1X, 32.X5 \text{ kollinear.}$$

Diese Bedingungen sind identisch, also gilt: $X \in k \Leftrightarrow X \in \bar{k}$ und somit:

$$k(1,3;2,4,5) = \bar{k}(5,3;4,2,1).$$

Ersetzt man daher den ersten Grundpunkt durch einen beliebigen Punkt des Punktkegelschnitts verschieden vom zweiten Grundpunkt, so erhält man denselben Punktkegelschnitt. Da die Grundpunkte gleichberechtigt sind, darf auch der zweite Grundpunkt frei gewählt werden.



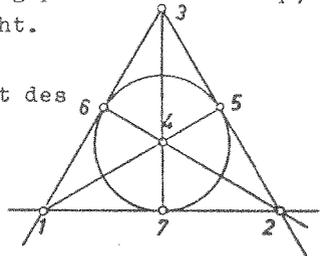
Anwendungen: (a) Man kann in allen bisher bewiesenen Aussagen statt der beiden Grundpunkte zwei beliebige verschiedene Punkte eines Punktkegelschnitts einsetzen. Z.B. lautet Folgerung 3 jetzt: Ein Punktkegelschnitt ist für $N \geq 4$ eindeutig durch fünf seiner Punkte festgelegt, wenn nie drei der Punkte kollinear liegen.

(b) Folgerung 4 lautet jetzt: Für $N \geq 5$ gehört ein Sechseck genau dann einem Punktkegelschnitt an, wenn die drei Schnittpunkte der Gegenseitenpaare (im Sinne der Numerierung) kollinear sind (Satz von PASCAL). Die Trägergerade der Schnittpunkte der Gegenseitenpaare heißt "Pascalachse" (a_P).

(c) Dual zu (b): Für $N \geq 5$ gehört ein Sechseck genau dann einem Geradenkegelschnitt an, wenn die drei Verbindungsgeraden der Gegeneckenpaare (im Sinne der Numerierung) kopunktal sind (Satz von BRIANCHON). Der Trägerpunkt der Verbindungsgeraden der Gegeneckenpaare heißt "Brianchonpunkt" (F_B).

DEF.2.1 b: Eine Gerade p durch den Punkt P eines Punktkegelschnitts k heißt Tangente von k in P , wenn sie außer P keinen Punkt von k enthält. Ein Punkt P auf einer Geraden p eines Geradenkegelschnitts k^* heißt Berührungspunkt von k^* auf p , wenn durch P keine weitere Gerade von k^* geht.

Beispiel: $k = \{1, 2, 3\}$ ist ein Punktkegelschnitt des Minimalmodells ($N=2$); die Gerade 15 ist die einzige Tangente von k in 1, die Gerade 26 bzw. 37 ist die einzige Tangente von k in 2 bzw. 3. Man erkennt: Die drei Tangenten eines Punktkegelschnitts im Minimalmodell sind kopunktal.



Aus Folgerung 1 zusammen mit Folgerung 5 ergibt sich: Durch jeden Punkt P eines Punktkegelschnitts gibt es genau eine Tangente von k . Jede von der Tangente verschiedene Gerade durch P trägt noch genau einen von P verschiedenen Punkt von k ;

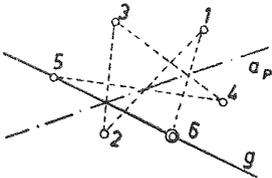
eine solche Gerade heie "Sehne von k ".

Dual: Auf jeder Geraden p eines Geradenkegelschnitts k^* gibt es genau einen Berührungspunkt von k^* . Durch jeden vom Berührungspunkt verschiedenen Punkt von p gibt es noch genau eine von p verschiedene Gerade von k^* .

Bemerkungen:

(a) Die Tangente eines Punktkegelschnitts k in $P \in k$ ist nach Folgerung 1 das Bild der Verbindungsgeraden SP ($S \in k, S \neq P$) in der durch den Punktkegelschnitt festgelegten Projektivität $\mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_P$.

(b) Konstruktive Anwendung des Satzes von PASCAL bzw. BRIANCHON ($N \geq 5$).

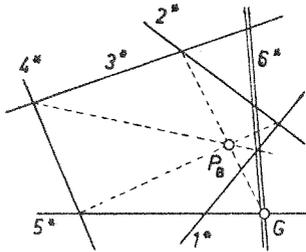


Der Punktkegelschnitt k ist durch die fünf Punkte $1 \dots 5$, von denen nie drei kollinear sind, eindeutig gegeben. Man konstruiere den weiteren Punkt 6 von k , der auf einer Geraden g durch den Punkt 5 liegt.

Die Pascalgerade a_p für das noch unbekanntes Sechseck $1, \dots, 6$ lässt sich als Verbindung der Punkte 12.45 und 23.56 konstruieren, denn 56 ist wegen der

Forderung 6 I g notwendig die gegebene Gerade g . Nun kann 34.61 mit Hilfe von $34.a_p$ ermittelt werden und daraus der Punkt 6 .

Dual: Der Geradenkegelschnitt k^* ist durch die fünf Geraden $1^* \dots 5^*$, von denen nie drei kopunktal sind, eindeutig gegeben. Man konstruiere die weitere Gerade 6^* von k^* , die durch einen Punkt G auf der Geraden 5^* geht.

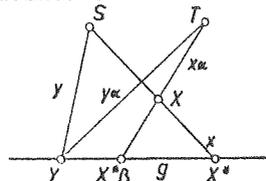


Der Brianchonpunkt P_B für das noch unbekanntes Sechseck $1^*, \dots, 6^*$ lässt sich als Schnittpunkt der Geraden $1^*2^*.4^*5^*$ und $2^*3^*.5^*6^*$ konstruieren, denn 5^*6^* ist wegen der Forderung 6* I G notwendig der gegebene Punkt G . Nun kann $3^*4^*.6^*1^*$ aus $3^*4^*.P_B$ ermittelt werden und daraus die Gerade 6^* .

(c) Eine Punktreihe \mathcal{P}_g hat mit einem Punktkegelschnitt zwei Punkte, einen Punkt oder keinen Punkt gemeinsam.

Bew.: k werde o.B.d.A. erzeugt durch die Projektivität $\alpha: \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_T$ mit $S \neq T \wedge S, T \notin g \wedge S, T \in k$. Die Fixpunkte der durch

$\mathcal{P}_g \times \mathcal{O}_S \times \mathcal{O}_T \times \mathcal{P}_g$ dargestellten projektiven Selbstabbildung β von \mathcal{P}_g sind genau die Schnittpunkte von \mathcal{P}_g mit k . Nun ist $\beta \neq \text{id}$, da α keine Perspektivität ist, nach 1.9, Folg.7 besitzt β in einer



PP-Ebene zwei Fixpunkte oder einen Fixpunkt oder keinen Fixpunkt.

Bemerkung: In einer nicht pappusschen Desarguesebene kann eine Gerade mit einem Punktkegelschnitt (der dort ebenfalls gemäß Def.2.1 a definiert werden kann) unendlich viele Punkte gemeinsam haben.

DEF.2.1 c: Ein Linienelement eines Punktkegelschnitts ist ein Punkt P des Punktkegelschnitts zusammen mit seiner Tangente p. Ein Linienelement eines Geradenkegelschnitts ist eine Gerade p des Geradenkegelschnitts zusammen mit ihrem Berührungspunkt P.

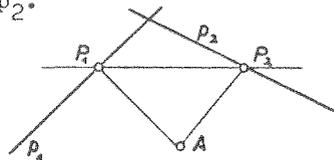
6) Aus jedem Linienelement (P,p) eines Punktkegelschnitts k wird bei Ausüben einer Kollineation $\alpha \in P\Gamma L(\pi_{pp})$ ein Linienelement des Bildpunktkegelschnitts. Ebenso gilt die duale Aussage.

Bew.: (α, α^*) ist ein Isomorphismus von π_{pp} und $k\alpha := \{X\alpha \in \mathcal{P} \mid X \in k\}$ ist nach Folgerung 2 ein Punktkegelschnitt. $P \in k \implies P\alpha \in k\alpha$. $P \perp p \implies P\alpha \perp p\alpha^*$. Die Gerade $p\alpha^*$ ist keine Sehne von $k\alpha$: (ind.) $p\alpha^*$ ist Sehne von $k\alpha \implies \exists Q' \in k\alpha$ mit $Q' \perp p\alpha^* \wedge Q' \neq P\alpha$; da α bijektiv ist existiert $Q'\alpha^{-1} =: Q$ eindeutig und es gilt:

$$\left. \begin{array}{l} Q' \in k\alpha \implies Q \in k \\ Q' \perp p\alpha^* \implies Q \perp p \\ Q' \neq P\alpha \implies Q \neq P \end{array} \right\} \implies \text{Widerspruch zur Voraussetzung,} \\ \text{daß p Tangente in P an k.}$$

Damit ist $(P\alpha, p\alpha^*)$ ein Linienelement von $k\alpha$.

7) Ein Punktkegelschnitt k ist eindeutig festgelegt durch zwei Linienelemente (P_i, p_i) ($i=1,2$) und einen Punkt A, wobei P_1, P_2, A nicht kollinear sind und auch die anderen Elemente "zulässige Lage" haben: $P_2 \not\perp p_1, P_1 \not\perp p_2, A \not\perp |P_1, P_2$. Ebenso gilt die duale Aussage.

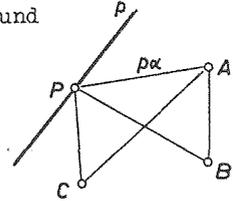


Bew.: Die durch $P_1A \mapsto P_2A,$
 $P_1P_2 \mapsto p_2, p_1 \mapsto P_1P_2$ eindeutig
 festgelegte Projektivität $\alpha: \mathcal{G}_{P_1} \mapsto \mathcal{G}_{P_2}$

erzeugt einen Kegelschnitt k, der in die Angabe paßt (vgl. Folg.5 Bem.a).

Jeder weitere Kegelschnitt l , der in die Angabe paßt, bestimmt eine Projektivität $\beta : \mathcal{U}_{P_1} \rightarrow \mathcal{U}_{P_2}$ und β leistet $P_1A \mapsto P_2A$, $P_1P_2 \mapsto P_2$, $p_1 \mapsto P_1P_2 \xrightarrow{FS} \alpha = \beta \Rightarrow k=1$.

Ein Punktkegelschnitt ist eindeutig festgelegt durch drei Punkte A, B, C und ein Linienelement (P, p) , wobei nie drei der Punkte A, B, C, P kollinear sind und $A, B, C \notin p$ gilt.



Bew.: Analog wie oben mit $\alpha : \mathcal{U}_P \rightarrow \mathcal{U}_A$ festgelegt durch $PB \mapsto AB$, $PC \mapsto AC$, $p \mapsto AP$.

8) ($N \geq 4$) Der Satz von Pascal bleibt richtig, wenn man zwei in der zyklischen Reihenfolge aufeinanderfolgende Punkte des Sechsecks zusammenfallen läßt und ihre Verbindungsgerade dabei ersetzt durch die Tangente in diesem Punkt.

Bew.: (a) VS.: 1..5 sind fünf pw. verschiedene Punkte eines Punktkegelschnitts k und s ist die Tangente in $1=6$ an k .
Beh.: $P:=12.45$, $Q:=23.56$, $R:=34.61$ sind kollinear.

$45 := a$, $56 := b$, $A := a.s$, $B := b.34$, $S=1$, $T=3$. Durch k wird eine Projektivität $\alpha : \mathcal{U}_s \rightarrow \mathcal{U}_T$ bestimmt. Die durch

$$\mathcal{P}_a \overline{\mathcal{U}_s} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{U}_T \overline{\mathcal{P}_b}$$

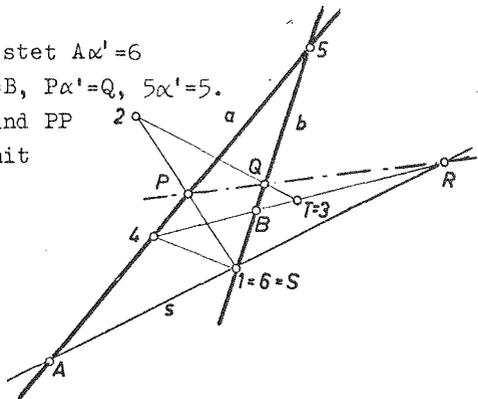
dargestellte Projektivität α' leistet $A\alpha' = 6$

($A \mapsto SA \xrightarrow{\text{Folg. } 5} TS \mapsto 6$), $4\alpha' = B$, $P\alpha' = Q$, $5\alpha' = 5$.

Da $a.b=5$ selbstentsprechend ist und PP gilt, ist α' eine Perspektivität mit einem Zentrum Z , wobei gilt:

$$\left. \begin{array}{l} A, 6, Z \text{ kollinear} \\ 4, B, Z \text{ kollinear} \\ P, Q, Z \text{ kollinear} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Z = A6.B4 = \\ = s.34 = R \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P, Q, R$ kollinear.



(b) VS.: Die Punkte 1...5 eines Punktkegelschnitts k und die Gerade s durch 1 liegen so, daß die wie oben definierten Punkte P, Q, R kollinear sind.

Beh.: s ist die Tangente in 1 an k .

Die durch $\mathcal{O}_S \times \mathcal{P}_a \times \mathcal{O}_R \times \mathcal{P}_b \times \mathcal{O}_T$ dargestellte Projektivität $\bar{\alpha}$ leistet:

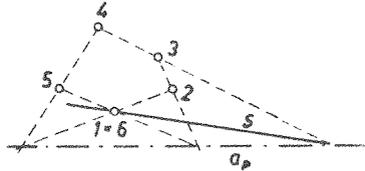
$$\left. \begin{array}{l} (S2) \bar{\alpha} = T2 \\ (S4) \bar{\alpha} = T4 \\ (S5) \bar{\alpha} = T5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{FS} \\ \implies \end{array} \bar{\alpha} \text{ stimmt mit der den Punktkegelschnitt } k \text{ erzeugenden Projektivität } \alpha \text{ überein.}$$

$s\bar{\alpha} = TS \implies s\alpha = TS \xrightarrow{\text{Fol. 5}} s$ s ist Tangente in S. ◆

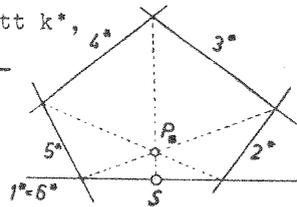
Bemerkung: Der obige Beweis bleibt gültig, wenn z.B. 1=6 und 2=3 mit 1 ≠ 2 oder sogar 1=6 und 2=3 und 4=5 mit 1,2,4 paarweise verschieden gilt und die betreffenden Verbindungsgeraden durch die jeweiligen Tangenten ersetzt werden.

Konstruktive Anwendungen:

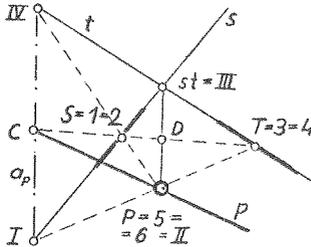
a) $N \geq 4$: Man konstruiere vom Punktkegelschnitt k , der durch die Punkte 1, ..., 5 eindeutig gegeben ist, die Tangente s in 1. Die Pascalgerade a_p zu 1=6, 2, ..., 5 ist die Verbindung von 12.45 und 23.56. Die Tangente s in 1 muß a_p in $34.a_p$ treffen.



Dual: Man konstruiere vom Geradenkegelschnitt k^* , der durch die Geraden $1^*, \dots, 5^*$ gegeben ist, den Berührungspunkt S auf 1^* . Der Brianchonpunkt P_B zu $1^*=6^*, 2^*, \dots, 5^*$ ist der Schnittpunkt von $1^*2^*, 4^*5^*$ und $2^*3^*, 5^*6^*$. Der Berührungspunkt S auf 1^* muß auf der Geraden $3^*4^*.P_B$ liegen.

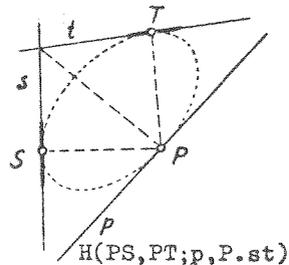


(b) $N \geq 2$: Man konstruiere vom Punktkegelschnitt k , der durch zwei Linienelemente (S, s) und (T, t) und einen Punkt P eindeutig gegeben ist (Fol. 7) die Tangente in P . Die Pascalgerade a_p zu $1=2=S, 3=4=T, P=5(=6)$ ist die Verbindungsgerade von 12.45= s .45= I und 34.61= t .51= IV . Die Tangente $p(=56)$ in P muß a_p in $23.a_p=C$ treffen. Bei dieser Konstruktion entsteht (nach den Voraussetzungen über $S, s; T, t; P$) das Viereck $I, II:=P, III:=st, IV$. Setzt man $(st.P):ST=:D$, so gilt nach Def. 1.10c:



$H(S, T; C, D)$ und da eine Desarguesebene vorliegt, nach 1.10, Fol. 5 dann $H(PS, PT; p, P.st)$. Diese Aussage ermöglicht eine einfache Tangentenkonstruktion (siehe Figur unten). Speziell in einer pappusschen Fanoebene (also einer π_{kl}) folgt daraus $p = P.st$ (vgl. 1.10, Fol. 3, 5) oder in Worten: In π_{kl} sind je drei Tangenten eines Punktkegelschnitts nicht kopunktal.

In einer nichtfanoschen PP-Ebene hingegen gilt stets $p = P.st$ oder in Worten: Die Tangenten eines Punktkegelschnitts sind kopunktal (Beispiel: Minimalmodell).



SATZ 2.1: Alle Punkte eines Punktkegelschnitts k werden aus zwei verschiedenen seiner Punkte durch projektive, nicht perspektive Geradenbüschel projiziert. In jedem Punkt von k existiert genau eine Tangente und jede andere Gerade durch diesen Punkt ist eine Sehne. k ist durch zwei Linienelemente und einen Punkt allgemeiner Lage eindeutig bestimmt, für $N \geq 3$ durch ein Linienelement und drei weitere Punkte allgemeiner Lage, und für $N \geq 4$ durch fünf Punkte allgemeiner Lage. Für $N \geq 5$ liegen sechs Punkte genau dann in einem Punktkegelschnitt, wenn für sie der Satz von PASCAL gilt. Eine Kollineation von π_{PP} führt einen Punktkegelschnitt linienelementweise in einen Punktkegelschnitt über. Die dualen Aussagen gelten für einen Geradenkegelschnitt, wobei der Satz von PASCAL durch den Satz von BRIANCHON zu ersetzen ist.

2.2. Projektive Abbildungen eines Punktkegelschnitts auf einen Punktkegelschnitt

DEF.2.2: Sind $k = \{X\}$ und $l = \{Y\}$ zwei Punktkegelschnitte, so heißt eine Abbildung $\alpha : k \rightarrow l$ eine Projektivität, wenn für zwei beliebige Punkte $P \in k$ und $Q \in l$ die Abbildung $PX \rightarrow QX\alpha$ ($\forall X \in k$) eine Projektivität ($\mathcal{U}_P \rightarrow \mathcal{U}_Q$) ist, wobei für $P=X$ bzw. $Q=Y$ die Verbindung PX bzw. QY zu ersetzen ist durch die Tangente in P an k bzw. in Q an l . Auf duale Weise wird eine Projektivität $\alpha : k^* \rightarrow l^*$ definiert.

Bemerkungen:(a) Die Projektivität $k \rightarrow l$ wird auf eine Projektivität zwischen Geradenbüschel zurückgeführt. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Punkte $P \in k$ und $Q \in l$ und daher sinnvoll; nach 2.1, Folg.5 werden nämlich alle Punkte eines Punktkegelschnitts aus irgend zwei seiner Punkte durch projektive Geradenbüschel projiziert.

(b) Für die Abbildung $X \in k \rightarrow PX$ mit $P \in k$ schreiben wir $k(X) \rightarrow \mathcal{U}_P(PX)$, wobei für $P=X$ anstelle PX die Tangente in P an k zu nehmen ist. Die Projektivität $k \rightarrow l$ ist dann nach Def.2.2 ein Produkt von Perspektivitäten.

Folgerungen:

1) Man kann Eigenschaften von projektiven Geradenbüscheln auf Punktkegelschnitte übertragen (und dual):

$\alpha : k \rightarrow l$ ist bijektiv, denn \mathcal{U}_P bzw. \mathcal{U}_Q ist nach 2.1, Folg.1 bijektiv zu k bzw. l .

$\alpha: k \rightarrow k$ ist durch $A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'$ (mit $A, B, C \in k$ bzw. $A', B', C' \in k'$; paarweise verschieden) eindeutig festgelegt, denn mit PP gilt FS.

2) Sei nun $\alpha: k \rightarrow k$ eine projektive Selbstabbildung von k ($\alpha \neq \text{id}$). Hat α Fixpunkte? Für $P=Q$ bestimmt α eine Projektivität $\beta: \mathcal{U}_P \rightarrow \mathcal{U}_P$. Fixpunkte von α führen zu Fixgeraden von β und umgekehrt. Nach 1.9 kann $\beta(\neq \text{id})$ zwei, eine oder keine Fixgerade in einer PP-Ebene besitzen \Rightarrow
 Eine Projektivität $\alpha: k \rightarrow k$ mit $\alpha \neq \text{id}$ ist hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch.

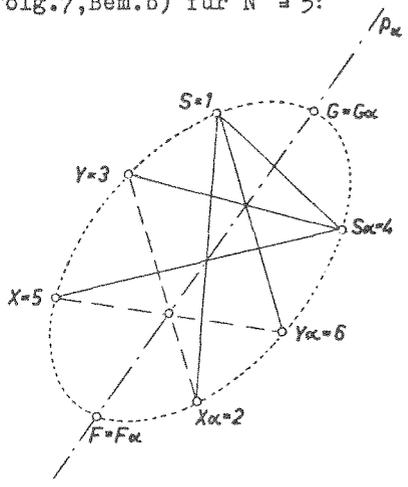
Vervollständigung einer projektiven Selbstabbildung $\alpha(\neq \text{id})$ auf einem Punktkegelschnitt k mit Hilfe einer Projektivitätsachse (andere Möglichkeit nach 1.9, Folg.7, Bem.b) für $N \geq 5$:

$\alpha \neq \text{id} \Rightarrow \exists S \in k$ mit $S\alpha \neq S$. Die durch die Kette

$$\mathcal{U}_{S\alpha} \bar{\wedge} k(X) \stackrel{\alpha}{\bar{\wedge}} k(X\alpha) \bar{\wedge} \mathcal{U}_S$$

dargestellte Projektivität leistet $S.S\alpha \mapsto S\alpha.S$ und ist folglich eine Perspektivität. Es existiert daher eindeutig eine Perspektivitätsachse p_α , auf der zugeordnete Strahlen einander treffen. Beschriftet man laut Figur Punkte von k mit $1, \dots, 6$, so liegen 12.45 und 34.61 auf der zugehörigen Pascalachse, welche auf Grund der Inzidenztabelle p_α ist \Rightarrow

$\Rightarrow 23.56 \perp p_\alpha$, d.h. $XY\alpha.X\alpha Y \perp p_\alpha$, wobei X, Y zwei beliebige verschiedene Punkte von k sind. p_α heißt die "Projektivitätsachse von α "; auf ihr liegen die Schnittpunkte der "kreuzweisen" Verbindungen von in α zugeordneten Punkten. Genau dann gilt $F=F\alpha$, wenn dieser Punkt auf p_α und k liegt. Die Fixpunkte einer projektiven Selbstabbildung $\alpha(\neq \text{id})$ eines Punktkegelschnitts sind genau die Schnittpunkte der Projektivitätsachse p_α von α mit dem Punktkegelschnitt.



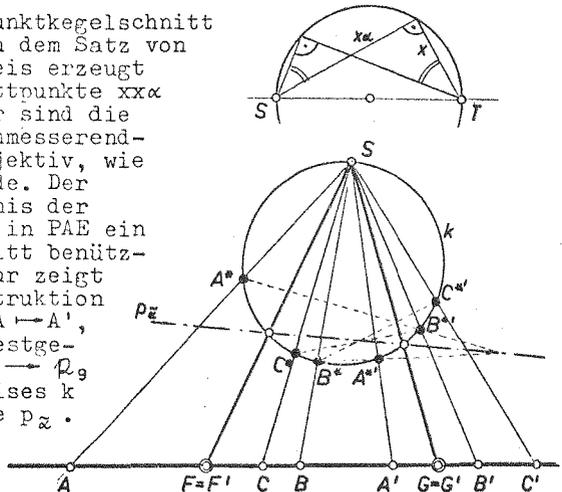
Bemerkungen: (a) Alle zu den bisherigen Aussagen dualen Aussagen über Geradenkegelschnitte sind richtig. Eine projektive Selbstabbildung α eines Geradenkegelschnitts k^* auf sich kann mit einem Projektivitätszentrum Z_α vervollständigt werden: $xy\alpha.x\alpha y \mid Z_\alpha (x \neq y \wedge x, y \mid ek^*)$.

(b) Ist ein Punktkegelschnitt k gegeben (von jedem Punkt der Ebene ist also bekannt, ob er zu k gehört oder nicht), so kann man die Fixelemente jeder projektiven Selbstabbildung eines Grundgebildes oder eines Punkt- oder eines Geradenkegelschnitts konstruieren. Dieser gegebene Punktkegelschnitt heißt "Steinerkegelschnitt".

Sei $\alpha: \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_g$ eine projektive Selbstabbildung. Wir projizieren aus einem beliebigen Punkt $S \in k$ mit $S \notin g$ die Punkte $X \in \mathcal{P}_g$ und $X\alpha \in \mathcal{P}_g$ auf k . Jeder Strahl SX bzw. $SX\alpha$ besitzt neben S noch genau einen Restschnittpunkt X^* bzw. $X^{*\prime}$ mit k (für eine Tangente SX bzw. $SX\alpha$ ist der Restschnittpunkt S). Die Zuordnung $X^* \mapsto X^{*\prime}$ ist eine Projektivität $\tilde{\alpha}: k \rightarrow k$, denn sie wird aus S durch projektive Strahlbüschel projiziert. Die Schnittpunkte F der Projektivitätsachse $p_{\tilde{\alpha}}$ mit k sind Fixpunkte von $\tilde{\alpha}$ und $SF.g$ sind genau die Fixpunkte von α . Eine projektive Selbstabbildung eines Geradenbüschels, eines Punkt- oder eines Geradenkegelschnitts kann stets auf eine projektive Selbstabbildung einer Punktreihe zurückgeführt werden.

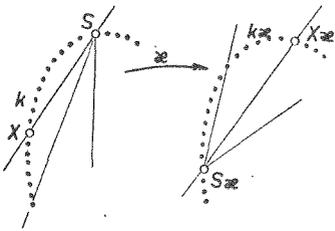
Speziell: PAE

Ein Kreis in PAE ist ein Punktkegelschnitt im Sinn von Def.2.1 a. Nach dem Satz von Thales kann nämlich der Kreis erzeugt werden als Menge der Schnittpunkte $xxx\alpha$ mit $xix\alpha$ (vgl. Figur); daher sind die Geradenbüschel um die Durchmesserendpunkte kongruent, also projektiv, wie in den Übungen gezeigt wurde. Der Kreis ist daher das Erzeugnis der Projektivität α . Damit ist in PAE ein Kreis als Steinerkegelschnitt benutzbar. Die nebenstehende Figur zeigt die oben beschriebene Konstruktion der Fixelemente der durch $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$ eindeutig festgelegten Projektivität $\alpha: \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_g$ mit Hilfe eines Steinerkreises k und der Projektivitätsachse $p_{\tilde{\alpha}}$.



3) Die Einschränkung einer projektiven Kollineation α auf einen Punktkegelschnitt k ist eine Projektivität.

Bew.: $k\alpha := \{X\alpha \in \mathbb{R} \mid X \in k\}$

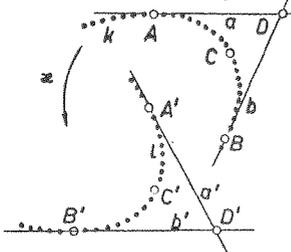


ist nach 2.1, Folgerung 2 ein Punktkegelschnitt. $S \in k$ bel. fest. $X \in k$:
 $(SX)\alpha^* = S\alpha X\alpha \implies \mathcal{O}_S$ geht unter α^* in $\mathcal{O}_{S\alpha}$ über. $\alpha^*|_{\mathcal{O}_S}$ ist nach 1.7 eine Projektivität, was zusammen mit Def. 2.2 nach sich zieht: $\alpha|_k$ ist eine Projektivität.

4) Je zwei Punktkegelschnitte sind projektiv kollinear.

Wir beweisen die schärfere Behauptung: Es gibt genau eine projektive Kollineation $\alpha \in \text{PGL}(\mathbb{R}_{PP})$, welche einen Punktkegelschnitt k so in einem Punktkegelschnitt l überführt, daß ein gegebenes Dreieck A, B, C aus k übergeht in ein gegebenes Dreieck A', B', C' aus l .

Bew.: α muß wegen Satz 2.1 linienelementweise k in l überführen;



die Tangenten a bzw. b in A bzw. B an k gehen daher unter α^* notwendig in die Tangenten a' bzw. b' in A' bzw. B' an l über \implies

$$D := a \cdot b \stackrel{\alpha^*}{=} D' := a' \cdot b'$$

A, B, C, D ist ein Viereck (da jede Tangente eines Punktkegelschnitts genau einen Kegelschnittpunkt trägt sind A, C, D bzw. B, C, D niemals kollinear); ebenso ist A', B', C', D' ein Viereck. $\text{PGL}(\mathbb{R}_{PP})$ ist wegen PP scharf viereckstransitiv (vgl. Satz 1.9) $\implies \exists^* \alpha \in \text{PGL}(\mathbb{R}_{PP})$ mit $A \mapsto A', \dots, D \mapsto D'$. Für diese projektive Kollineation α gilt $k\alpha = l$: da nämlich $(A, a), (B, b), C$ Linienelemente bzw. ein Punkt von k sind, so sind $(A\alpha = A', a\alpha^* = a'), (B\alpha = B', b\alpha^* = b'), C\alpha = C'$ Linienelemente bzw. ein Punkt von $k\alpha$ nach Satz 2.1; da nach 2.1 durch zwei Linienelemente und einen Punkt genau ein Punktkegelschnitt bestimmt ist, folgt $k\alpha = l$.

Bemerkungen: (a) Speziell in PAE gilt daher: Jeder Punktkegelschnitt ist projektiv kollinear zu einem Kreis.

(b) Dual ist eine projektive Kollineation α^* mit $k^*\alpha^* = l^*$ (k^*, l^* Geradenkegelschnitt) durch zugeordnete Dreiseite aus k^* bzw. l^* eindeutig festgelegt.

5) Jede projektive Selbstabbildung $\alpha: k \rightarrow k$ eines Punktkegelschnitts k lässt sich eindeutig zu einer projektiven Kollineation $\bar{\alpha}$ verlängern.

Bew.: Im Beweis von Folg.3 geht $k \neq 1$ nicht ein. ◆

Eine projektive Kollineation, die einen Punktkegelschnitt als Ganzes festläßt, heißt eine "automorphe projektive Kollineation von k ". Die Beschränkung einer automorphen projektiven Kollineation von k auf k ist nach Folg.3 eine projektive Selbstabbildung von k .

Die Menge aller automorphen projektiven Kollineationen eines Punktkegelschnitts k bildet bezüglich des Hintereinanderausführens eine Gruppe $PGL(k)$, welche zu $PGL(\rho_g)$ isomorph ist.

Bew.: Sei M die Menge aller projektiven Selbstabbildungen α des Punktkegelschnitts k . Durch Projektion aus $S \in k$ auf g mit $S \notin g$ kann man jedem $\alpha \in M$ ein $\bar{\alpha} \in PGL(\rho_g)$ zuordnen; diese Zuordnung ist bijektiv und verträglich mit dem Hintereinanderausführen $\Rightarrow \{M, \circ\} \cong PGL(\rho_g)$. Nach obigen Überlegungen ist die durch $\alpha = \bar{\alpha}|_k$ erklärte Zuordnung $\alpha \in M$ zu $\bar{\alpha} \in PGL(k)$ bijektiv und wegen $(\bar{\alpha} \circ \bar{\beta})|_k = \bar{\alpha}|_k \circ \bar{\beta}|_k$ gilt $PGL(k) \cong \{M, \circ\}$ und damit $PGL(k) \cong PGL(\rho_g)$. ◆

Damit ist $PGL(k)$ wegen Satz 1.9 scharf dreifach transitiv auf der Punktmenge k .

6) I.f. ist π eine klassische projektive Ebene $\pi_{N+2} (\Rightarrow N \geq 3)$. Ist in Def.2.2 speziell die projektive Abbildung $\alpha: k \rightarrow k$ involutorisch, so liegt eine projektive Involution eines Punktkegelschnitts auf sich vor (vgl. auch 1.10, Folg.8). Es gilt:

(I) Eine projektive Involution $\alpha: k \rightarrow k$ lässt sich zu einer automorphen harmonischen Homologie (Z, a) von k fortsetzen.

Bemerkung: Nach Folgerung 5 ist die Fortsetzung eindeutig.

(II) $Z \notin k$ und die (unter Umständen existierenden) Fixpunkte von α liegen auf jenen Tangenten von k , die durch Z gehen.

(III) Punktpaare auf k sind genau dann in einer projektiven Involution auf k zugeordnet, wenn sie auf Geraden durch ein Zentrum $Z \notin k$ liegen ("Involutionzentrum").

Bew.: Zu (I): Die projektive Involution $\alpha: k \rightarrow k$ ist nach 1.10, Folg. 8, (IV) durch $A \mapsto A', B \mapsto B'$ mit $A \neq B \wedge A' \neq B' \wedge A \neq B' \wedge A' \neq B$ eindeutig festgelegt. Gilt zusätzlich $A \neq A'$ und $B \neq B'$ (was nur im Sonderfall α

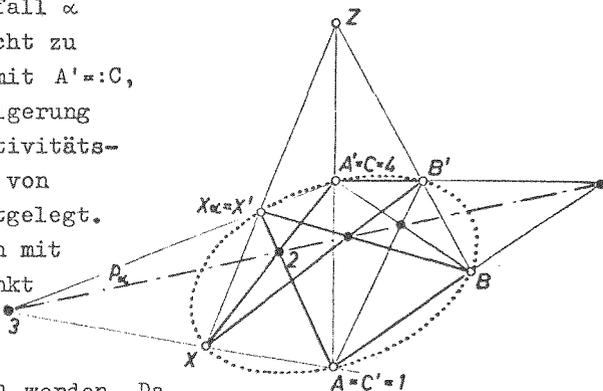
hyperbolisch und $N=3$ nicht zu erreichen ist), so ist mit $A' =: C$, $A = C\alpha =: C'$ die nach Folgerung 2 zu α gehörende Projektivitätsachse p_α als Verbindung von $AB' \cdot A'B$ mit $BC' \cdot B'C$ festgelegt.

Zu jedem Punkt $X \in k$ kann mit Hilfe von p_α der Bildpunkt $X\alpha =: X'$ unter Benützung von $2 =: XA' \cdot X'A$ I p_α und $3 =: XC' \cdot X'C$ I p_α gefunden werden. Da

außerdem $XB' \cdot X'B$ I p_α gilt, liegen die Dreiseite der Dreiecke $XA'B'$ und $X'AB$ somit p_α -perspektiv, und daher sind $X, X\alpha$ und $AA' \cdot BB' =: Z$ ($Z \notin p_\alpha$) kollinear für alle $X \in k$. Die harmonische Homologie $\sigma(Z, p_\alpha)$ führt X in $X\alpha$ über, da $H(X, X\alpha; Z, p_\alpha)$ (und damit $H(Z, p_\alpha; X, X\alpha)$) gilt, wie man aus dem Viereck $1 =: A, 2, 3, 4 =: A'$ erkennt. Wegen $\sigma|_k = \alpha$ ist σ die nach Folgerung 4 einzige automorphe projektive Kollineation von k , zu der sich α fortsetzen läßt.

Ist dagegen α hyperbolisch und $N=3$, so sind von den auf k vorhandenen vier Punkten genau zwei verschiedene Punkte Fixpunkte, z.B. $A=A' \wedge B=B'$; die beiden restlichen Punkte X, Y auf k müssen dann in α vertauschbar zugeordnet sein: $X\alpha = Y \wedge Y\alpha = X$. Auf XY liegen genau vier verschiedene Punkte, nämlich $X, Y, XY \cdot AB, Z$ und durch Z müssen daher die Tangenten an k in A und in B gehen. Setzt man $AB = p_\alpha$, so gilt für die harmonische Homologie $\sigma(Z, p_\alpha)$ dann $A = A\sigma$, $B = B\sigma$ und $Y = X\sigma$, da $H(X, Y; Z, p_\alpha)$ gilt; der zu X, Y, Z vierte harmonische Punkt ist von X, Y, Z verschieden und muß daher der einzige verbleibende Punkt $XY \cdot AB$ auf XY sein.

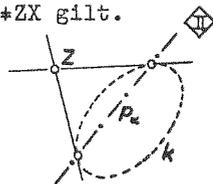
Bemerkung: Die Achse a der harmonischen Homologie σ mit $\sigma|_k = \alpha$ ist also die Projektivitätsachse der projektiven Involution α . ◊



Zu (II): $Z \notin k$: (ind.) $Z \in k$. Da $Z \in AA' \implies Z=A \vee Z=A'$, denn k hat mit einer Geraden höchstens zwei Punkte gemeinsam. Analog: $Z \in BB' \implies Z=B \vee Z=B'$. Damit können nur die Fälle $A=B \vee A=B' \vee A'=B \vee A'=B'$ eintreten, welche alle den Voraussetzungen widersprechen.

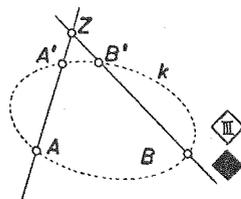
Die (u.U. existierenden) Fixpunkte von α liegen auf den Tangenten von k durch Z : Ist $X \in k$ ein Punkt, dessen Tangente durch Z geht, so ist $X=X\alpha$, weil auf dem Kollineationsstrahl ZX nur der Punkt X aus k liegt. Umgekehrt ist für $X=X\alpha$ der Kollineationsstrahl ZX Tangente an k in X , da sonst der zweite Schnittpunkt von ZX mit k ebenfalls Fixpunkt wäre und $p_\alpha \neq ZX$ gilt.

Bemerkung: Wenn es Fixpunkte gibt, so sind diese nach Folgerung 2 die Schnittpunkte von p_α mit k und Z ist nach obigem der Schnittpunkt der Tangenten in den Schnittpunkten von p_α mit k .



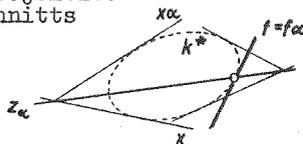
Zu (III): $Z \notin k$. Wir definieren eine Abbildung $\beta: k \rightarrow k$ durch: Ist $X \in k$ und ZX Sehne von k , so soll $X\beta \neq X$ jener Punkt von k sein, der auf ZX liegt; ist ZX Tangente von k , so soll $X\beta = X$ gelten.

Die durch $A \mapsto A'=A\beta$ und $B \mapsto B'=B\beta$ bestimmte projektive Involution α leistet für alle Punkte von k dasselbe wie $\beta \implies \alpha = \beta$.



Bemerkungen: (a) Für eine projektive Involution α auf einem Punktkegelschnitt k ist somit kennzeichnend, daß Ur- und Bildpunkt auf einer Geraden durch das Involutionzentrum $Z_\alpha \notin k$ liegen.

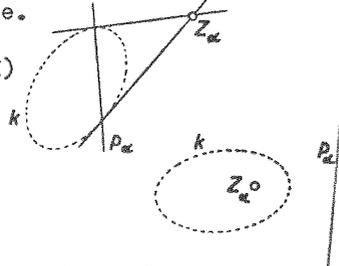
(b) Dual existiert für eine projektive Involution $\alpha: k^* \rightarrow k^*$ eines Geradenkegelschnitts eine Involutionssache z_α . Auf z_α treffen einander in α zugeordnete Geraden, und die Fixgeraden von α haben Berührungspunkte, die auf z_α liegen.



SATZ 2.2: Sind $X, X\alpha$ und $Y, Y\alpha$ zwei Paare zugeordneter Punkte einer Projektivität α auf einem Punktkegelschnitt k , so liegen die Punkte $XY\alpha \cdot X\alpha Y$ auf der Projektivitätsachse p_α , welche genau jene Punkte von k enthält, die Fixpunkte von α sind. Jede projektive Selbstabbildung eines Punktkegelschnitts läßt sich eindeutig zu einer automorphen projektiven Kollineation von k fortsetzen, und die Gruppe der automorphen projektiven Kollineationen von k ist isomorph zur projektiven Gruppe einer Punktreihe. Speziell in einer klassischen projektiven

Ebene sind die projektiven Involutionen von k genau die Beschränkungen der automorphen harmonischen Homologien von k auf k . Duales gilt für Geradenkegelschnitte.

Bemerkung: In π_{α} kann (vgl. 1.10, Folg. 8, II) eine projektive Involution $\alpha: k \rightarrow k$ hyperbolisch oder elliptisch sein. Die Fixpunkte von α sind genau die Schnittpunkte von p_{α} mit k , und die Tangenten an k in den Fixpunkten gehen durch das Involutionszentrum Z_{α} . Demnach können für Punkte $Z_{\alpha} \in \rho \setminus k$ zwei Fälle eintreten:



Durch Z gehen genau zwei Tangenten von k oder durch Z geht keine Tangente von k .

Der Punktkegelschnitt k gibt also Anlaß zu einer Klasseneinteilung von ρ :

1. Klasse: $X \in k$ ("Punkt von k ").
2. Klasse: $X \notin k$ und es gibt zwei verschiedene Tangenten von k durch X ("Außenpunkt von k ").
3. Klasse: $X \notin k$ und es gibt keine Tangente von k durch X ("Innenpunkt von k ").

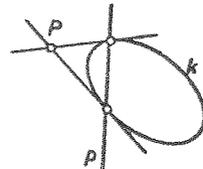
Außenpunkte existieren stets. Ob die Menge der Innenpunkte eines Punktkegelschnitts leer ist, hängt vom Körper der Geometrie ab, wie wir später sehen werden.

In einer nichtfanoischen Pappusebene ist obige Einteilung sinnlos, denn dort sind alle Tangenten eines Punktkegelschnitts kopunktal (vgl. 2.1, Folg. 8).

2.3. Kegelschnitte und Polarsysteme in klassischen projektiven Ebenen

Wir setzen im folgenden eine klassische projektive Ebene π_{α} voraus.

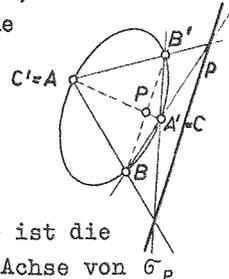
Nach 2.2 kann man zu jedem Punkt $P \in \rho$, der nicht einem Punktkegelschnitt k angehört, eine projektive Involution α auf k erklären, und diese bestimmt genau eine automorphe harmonische Homologie σ_p von k mit P als Zentrum; durch P ist die Achse p der Homologie σ_p eindeutig festgelegt.



Bew.: Für $P \notin k$ ist zu unterscheiden:

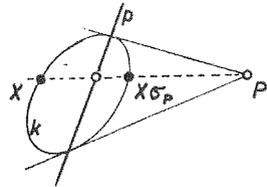
- (a) P ist ein Außenpunkt: Durch P gehen dann genau zwei Tangenten von k und die Verbindungsgerade p jener beiden Punkte von k , deren Tangenten durch P gehen, ist als Projektivitätsachse von α die eindeutig festgelegte Achse von σ_p mit $\sigma_p|_k = \alpha$.

(b) P ist Innenpunkt von $k: \exists A, B \mid \neq, \in k, A, B, P$ nicht kollinear. Die Geraden AP und BP sind keine Tangenten von k und tragen daher nach 2.1 noch genau einen weiteren Punkt $A' \neq B$ bzw. $B' \neq A$ von k mit $A' \neq B'$, denn α ist eine Bijektion. Die projektive Involution α leistet: $A' \mapsto C \mapsto C' \mapsto A$. Durch die beiden Punkte $AB', A'B$ und $BC', B'C$ ist die Projektivitätsachse p von α und damit die Achse von σ_p mit $\sigma_p \mid k = \alpha$ eindeutig festgelegt.



Bemerkung: Gewisse Punkte von p haben die Eigenschaft: $H(X, X\sigma_p; P, p)$ mit $X \in k$. Sprechweise: "Punkte von p liegen zum Zentrum P bezüglich k harmonisch".

Die eindeutige Existenz der Achse p bei gegebenem Zentrum $P \in \mathbb{R} \setminus k$ legt die Definition einer Abbildung nahe:



DEF.2.3: Die Abbildung $\lambda_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}$ erklärt durch

- (1) $P \notin k: P\lambda_k$ ist die Achse der automorphen harmonischen Homologie von k mit Zentrum P ,
 - (2) $P \in k: P\lambda_k$ ist die Tangente in P an k
- heißt Polarsystem des Punktkegelschnitts k .

Folgerungen:

1) λ_k ist eine projektive Polarität (vgl. Def.1.11 c).

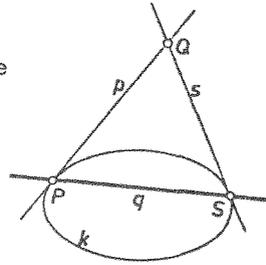
Bew.: (1) λ_k ist eine globale Abbildung: Für $P \in \mathbb{R} \setminus k$ wurde dies oben gezeigt; zu jedem Punkt $P \in k$ gibt es nach 2.1 genau eine Tangente an k .

(2) Es ist mit $P\lambda_k =: p$ und $Q\lambda_k =: q$ zu zeigen:

$P \perp q \implies Q \perp p \vee P, Q \in \mathbb{R}$. Wir unterscheiden:

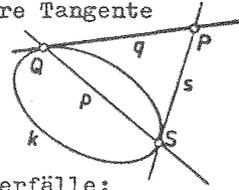
Fall 1: $P, Q \in k \wedge P \perp q$. Nach Def.2.3 ist p bzw. q die Tangente in P bzw. Q an k . Aus $P \perp q \wedge P \in k$ folgt $P=Q$, da auf jeder Tangente eines Punktkegelschnitts genau ein Kegelschnittpunkt liegt. Mit $P=Q$ gilt $p=q$ und $P \perp q \implies Q \perp p$.

Fall 2: $P \in k \wedge Q \notin k \wedge P \in q$. Dann ist p Tangente in P und q ist keine Tangente; q trägt daher neben P noch genau einen Kegelschnittpunkt $S \in k$ ($S \neq P$). Q ist der Schnittpunkt von p mit der Tangente s in $S \Rightarrow Q \in p$.



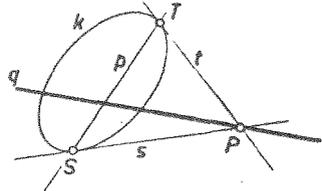
Fall 3: $Q \in k \wedge P \notin k \wedge P \in q$. Dann ist q Tangente in Q und p ist keine Tangente von k .

Durch $P \notin k$ gibt es neben q noch genau eine weitere Tangente s von k , die zum Punkt S gehört. p verbindet die Punkte Q und S , in welchen q und s Tangenten des Punktkegelschnitts k sind $\Rightarrow Q \in p$.



Fall 4: $P \notin k \wedge Q \notin k$. Weder p noch q sind dann Tangenten von k . Wir unterscheiden die Unterfälle:

(a) P ist Außenpunkt. Durch P gibt es genau zwei Tangenten s, t von k , die zu den Punkten $S, T \in k$ gehören und es gilt $p = ST$. Zu Q gehört die harmonische Homologie σ_Q mit $k \sigma_Q = k$. Nach Voraussetzung gilt $P \in q \Rightarrow P \sigma_Q = P$. Nach Satz 2.1 läßt σ_Q den Punktkegelschnitt k linienelementweise fest, also gilt: $(S \sigma_Q, s \sigma_Q^*)$ muß ein Linienelement von k sein. $P \in s \wedge P \sigma_Q = P \Rightarrow$



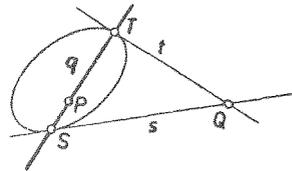
$P \in s \sigma_Q^*$. Daher sind nur folgende zwei Fälle möglich:

(i) $s \sigma_Q^* = s \Rightarrow S \sigma_Q = S \Rightarrow S \in q \vee S = Q$ (vgl. Satz 1.4).

$S = Q$ widerspricht $Q \notin k$ und $S \in q$ ist auch unmöglich, denn aus $S \in q \wedge P \in q$ folgt $q = s$ wegen $S \neq P$: Widerspruch, denn q ist keine Tangente von k .

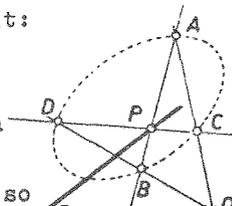
(ii) $s \sigma_Q^* = t \Rightarrow S \sigma_Q = T \Rightarrow Q \in ST = p$, denn zugeordnete Punkte liegen mit dem Zentrum Q kollinear.

(b) Q ist Außenpunkt. Durch Q gehen die Tangenten s und t in den Punkten $S, T \in k$ mit $ST = q$. Die zu P gehörende harmonische Homologie σ_P mit $k \sigma_P = k$ leistet wegen $P \in q$ notwendig $S \sigma_P = T$,



da S und T nicht beide Fixpunkte von σ_P sein können, und damit $s \sigma_P^* = t$ nach Satz 2.1. Da zugeordnete Geraden einander auf der Achse p von σ_P treffen, gilt: $st = Q \in p$.

(c) P und Q sind Innenpunkte. Mit $A \in k$ ist AP bzw. AQ Sehne von k , und es gibt neben A noch genau einen Punkt B bzw. C aus k auf AP bzw. AQ mit $B+A$ bzw. $C+A$; man kann A so



wählen, daß $B \neq C$ gilt. Dann gilt: $A\sigma_p = B \wedge A\sigma_q = C$. Die Gerade BQ ist Sehne von k , denn Q ist Innenpunkt von k und daher existiert neben B noch genau ein weiterer Punkt D aus k auf BQ mit A, B, C, D paarweise verschieden und $B\sigma_q = D$. Aus der Voraussetzung $P \perp q$ folgt $P\sigma_q = P$. Weiters ist $(AB)\sigma_q^* = A\sigma_q \cdot B\sigma_q = CD$. Da zugeordnete Geraden einander auf der Achse q von σ_q treffen, folgt aus $AB \cdot q = P$ damit $CD \perp P \Rightarrow C\sigma_p = D$. Wegen $(AC)\sigma_p^* = A\sigma_p \cdot C\sigma_p = BD \Rightarrow AC \cdot BD = Q \perp p$.

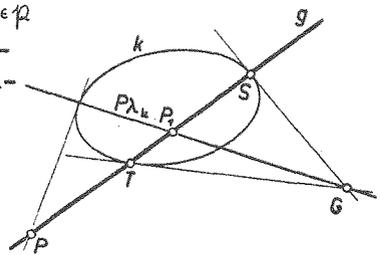
(3) λ_k ist eine projektive Polarität (vgl. Def. 1.11 b): Wir zeigen $\lambda_k | \rho_g$ ist eine Projektivität, wobei g o.B.d.A. eine Sehne von k ist. Da die Polarität λ_k bijektiv ist (vgl. Satz 1.11), existiert genau ein $G \in \rho$ mit $G\lambda_k = g$, und zwar ist G der Schnittpunkt der Tangenten an k in den gemeinsamen Punkten S, T von k und g . Da λ_k als Polarität eine Korrelation ist (vgl. 1.11), gilt:

$$P \perp g \Rightarrow P\lambda_k \perp G.$$

$$G \not\perp g \Rightarrow P \neq G \Rightarrow P\lambda_k \neq g \Rightarrow \exists *P_1 := g \cdot P\lambda_k.$$

Nach der Bemerkung zu Beginn von 2.3 gilt:

$H(S, T; P, P_1) \forall P \in \rho_g \setminus \{S, T\} \xrightarrow{\text{Satz 1.10}} P \mapsto P_1$ ist eine projektive Involution α mit den Fixpunkten S, T . Damit ist die durch $\rho_g(P) \xrightarrow{\lambda_k} \rho_g(P_1) \xrightarrow{\sigma_g} \rho_g(P\lambda_k)$ dargestellte Abbildung $\lambda_k | \rho_g$ eine Projektivität. ◆

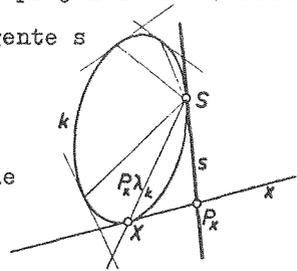


2) Nach 1.11 ist die Beschränkung der projektiven Polarität λ_k auf jede Punktreihe projektiv.

Wir wenden dies speziell auf die Tangente s in $S \in k$ an:

$$\left. \begin{array}{l} \rho_s(P_X) \xrightarrow{\lambda_k} \rho_s(P_X\lambda_k) \\ \text{Nach 2.2 gilt:} \\ \rho_s(P_X\lambda_k) \perp k(X) \end{array} \right\} \Rightarrow k(X) \perp \rho_s(P_X),$$

d.h. die Punkte X eines Punktkegelschnitts sind projektiv bezogen auf die Reihe der Schnittpunkte der Tangenten x in X mit einer festen Tangente.



In jeder π_{α} bilden die Tangenten eines Punktkegelschnitts k einen Geradenkegelschnitt k^* .

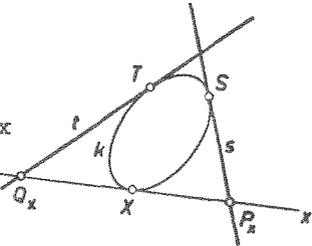
Dual: In jeder π_{α} bilden die Berührungspunkte eines Geradenkegelschnitts k^* einen Punktkegelschnitt k .

Bezeichnung: $k \cup k^*$ nennen wir i.f. einen "Kegelschnitt".

Bew.: Seien $S, T \in k$, ϵk und s, t die Tangenten in S, T an k . Dann gilt:

$$\left. \begin{array}{l} k(X) \cap \rho_s(P_X) \\ k(X) \cap \rho_t(Q_X) \end{array} \right\} \Rightarrow \rho_s(P_X) \cap \rho_t(Q_X) \dots \alpha.$$

Die Schnittpunkte P_X bzw. Q_X der Tangente x in X an k mit s bzw. t sind also projektiv zugeordnet. Da für $P_X=S$ speziell $S \in I s \wedge S \in I t$ also $S \alpha = s.t \neq S$ gilt, ist α nicht perspektiv. Damit ist die Tangentenmenge von k Teilmenge des durch α bestimmten Geradenkegelschnitts k^* . Umgekehrt ist jede Gerade von k^* , welche nach Definition 2.1 a in α zugeordnete Punkte in ρ_s und ρ_t verbindet, eine Tangente von k , da die Projektivität $\rho_s(P_X) \cap k(X)$ eine Bijektion ist. Zum Beweis der dualen Aussage muß alles dualisiert und insbesondere $\lambda_k: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}$ dual zu Def.2.3 definiert werden.



Bemerkungen: (a) Ist k ein Punktkegelschnitt und k^* der von den Tangenten an k gebildete Geradenkegelschnitt, so ist die Menge der Berührungspunkte von k^* der gegebene Punktkegelschnitt k . Durch jeden Punkt einer solchen Tangente, der nicht in k liegt, geht nämlich eine zweite Tangente an k , die ebenfalls k^* angehört, so daß alle diese Punkte nicht als Berührungspunkte der Tangenten in Frage kommen. Der Begriff Kegelschnitt $k \cup k^*$ ist also selbstdual.

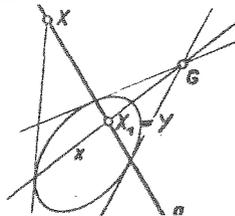
In nichtfanoschen PP-Ebenen dagegen ist die Tangentenmenge eines Punktkegelschnitts kein Geradenkegelschnitt, sondern ein Geradenbüschel (vgl.2.1), und dual ist die Menge der Berührungspunkte eines Geradenkegelschnitts eine Punktreihe.

(b) In jeder π_{K1} gibt es im Sinne von $PGL(\pi_{K1})$ genau einen Kegelschnitt $k \cup k^*$; nach 2.2, Folg.3 sind nämlich je zwei Punkt- bzw. Geradenkegelschnitte projektiv kollinear. Speziell in PAE ist daher jeder Kegelschnitt projektiv kollinear zu einem Kreis.

3) Auf jeder Geraden g , die keine Tangente eines Kegelschnitts k ist, bilden die im Polarsystem λ_k konjugierten Punkte eine projektive Involution ("Involution konjugierter Punkte auf g ").

Dual: Durch jeden Punkt G , der kein Berührungspunkt eines Kegelschnitts k^* ist, bilden die in λ_k konjugierten Geraden eine projektive Involution ("Involution konjugierter Geraden durch G ").

Bew.: $g \notin k^* \Rightarrow \exists *G$ mit $G \lambda_k = g \wedge G \notin g$, denn λ_k ist bijektiv und (G, g) bestimmen eine (harmonische) Homologie. Da λ_k eine



projektive Polarität ist, gilt: $\rho_G(X) \cap \rho_G(x)$ mit $x = X \lambda_k$.
 Da der zu X konjugierte Punkt X_1 der Schnittpunkt $X \lambda_k \cdot g$ ist,
 gilt weiter: $\rho_G(x) \cap \rho_G(X_1)$.

Wir haben somit: $\rho_G(X) \cap \rho_G(X_1)$. Diese Projektivität α ist
 eine Involution:

$\alpha \neq \iota$, denn $X = X_1$ gilt genau dann, wenn $X \in X \lambda_k$, also $X \in k$ gilt;
 g trägt höchstens zwei Punkte von k , also ist i.a. $X \neq X_1$; nach
 1.10, Folg. 8, I genügt es zu zeigen, daß α ein Punktepaar $X \neq X_0 = X_1$
 vertauschbar zuordnet. $X_1 =: Y \in \rho_G$, $Y \lambda_k =: y$, $Y_1 = y g$. Da λ_k nach
 Satz 1.11 eine selbstadjungierte Korrelation ist, gilt:
 $\lambda_k \lambda_k^* = \iota \Rightarrow \lambda_k^* = \lambda_k^{-1}$, also gilt $g \lambda_k^* = g \lambda_k^{-1} = G$ bzw. $x \lambda_k^* = x \lambda_k^{-1} = X$
 und somit:

$$Y \in g \Rightarrow Y \lambda_k = y \in g \lambda_k^* = G$$

$$Y \in x \Rightarrow Y \lambda_k = y \in x \lambda_k^* = X$$

$$\Rightarrow y = GX \text{ (nach Voraussetzung sind } G \text{ und } X \text{ verschieden)} \Rightarrow Y_0 = X.$$

Bemerkung: Die in Folg. 1, (3) bewiesene Aussage für eine
 Sehne von k gilt also für jede beliebige Nichttangente von k .

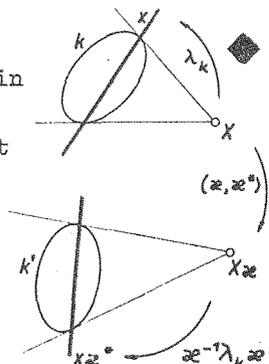
4) Jede $\pi_{k\ell}$ ist isomorph zu $\pi_{k\ell}^*$.

Bew.: In $\pi_{k\ell}$ existiert ein Kegelschnitt k und sein Polarsystem
 λ_k ist eine Polarität, also nach Satz 1.11 (2. Teil) eine
 Korrelation. $\pi_{k\ell}$ gestattet also eine Korrelation und ist daher
 nach Satz 1.11 (1. Teil) zu $\pi_{k\ell}^*$ isomorph.

5) Sei in $\pi_{k\ell}$ der Punktkegelschnitt k und sein
 Polarsystem λ_k gegeben. Mit $x \in P^1 L(\pi_{k\ell})$ ist
 $kx =: k'$ nach 2.1, Folg. 2 ein Punktkegelschnitt
 in $\pi_{k\ell}$, zu dem ein Polarsystem $\lambda_{k'}$ gehört.

Es gilt: $x^{-1} \lambda_k x^* = \lambda_{k'}$, oder $\lambda_{k'} x^* = x \lambda_k$.

Kurz: Polare Lage geht bei Kollineationen in
 polare Lage über.

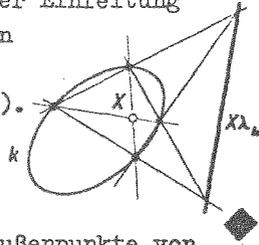


Bew.: Wir unterscheiden:

(a) $X \in k$: $X \lambda_k$ ist die Tangente an k und nach Satz 2.1 führt (x, x^*)
 den Punktkegelschnitt k linienelementweise in k' über.

(b) $X \notin k \wedge X$ Außenpunkt: $X \lambda_k$ ist die Berührsehne der beiden
 Tangenten aus X an k und diese Zuordnung daher nach Satz 2.1
 invariant gegen (x, x^*) .

(c) $X \notin k \wedge X$ Innenpunkt: Wir legen $X \lambda_k$ wie in der Einleitung von 2.3 als Projektivitätsachse einer Involution $\alpha : k \rightarrow k$ fest, die X als Involutionszentrum besitzt (vgl. die nebenstehende Inzidenztabelle). Da dabei nur Inzidenzen benützt werden, ist die Invarianz gegen Kollineationen trivial.



Bemerkung: Nach Beweisschritt (b) gilt, daß α Außenpunkte von k in Außenpunkte von k' überführt.

SATZ 2.3: Jede klassische projektive Ebene ist zu ihrer dualen Ebene isomorph, und die Tangenten (Berührungspunkte) jedes Punktkegelschnitts (Geradenkegelschnitts) bilden einen Geradenkegelschnitt (Punktkegelschnitt). Das Polarsystem eines Kegelschnitts ist eine projektive Polarität und gegen Kollineationen invariant mit dem Kegelschnitt verbunden. Auf jeder Nichttangente (durch jeden Nichtberührungspunkt) existiert eine projektive Involution konjugierter Punkte (konjugierter Geraden), deren Fixelemente dem Kegelschnitt angehören.

2.4. Staudtsche Kegelschnitte

In 2.3 wurde gezeigt, daß jedes Polarsystem eine projektive Polarität ist. Wir wollen jene projektiven Polaritäten kennzeichnen, welche Polarsysteme von Kegelschnitten sind. In Ergänzung zu 1.11 zeigen wir zunächst:

Eine projektive Korrelation $\delta : \pi_{kl} \rightarrow \pi_{kl}^*$ ist eindeutig festgelegt durch ein Viereck von Ursprüngen und ein Vierseit von Bildgeraden.

Bew.: (a) Existenz: Ist A_i ein Viereck und a_i ein Vierseit, so ist eine projektive Korrelation δ mit $A_i \delta = a_i (i=0, \dots, 3)$ gesucht.

In π_{kl} existiert ein Punktkegelschnitt k und damit dessen Polarsystem λ_k , das nach 2.3 und 1.11 eine selbstadjungierte Korrelation ist $\Rightarrow a_i \lambda_k^* = \bar{A}_i$ ist ein Viereck. Nach Satz 1.9 gilt: $\exists \alpha \in \text{PGL}(\pi_{kl})$ mit $A_i \alpha = \bar{A}_i (i=0, \dots, 3)$. Die zusammengesetzte Abbildung $\alpha (\lambda_k^*)^{-1} =: \delta$ leistet: $A_i \delta = A_i \alpha (\lambda_k^*)^{-1} = \bar{A}_i (\lambda_k^*)^{-1} = a_i (i=0, \dots, 3)$ und $\delta : \mathcal{R} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{R} \xrightarrow{(\lambda_k^*)^{-1}} \mathcal{R}$ ist eine projektive Korrelation, denn es gilt: α und $(\lambda_k^*)^{-1}$ sind bijektiv, also auch δ ;

kollineare Punkte $\xrightarrow{\alpha}$ kollineare Punkte $\xrightarrow{(\lambda_k^*)^{-1}}$ kopunktuale Geraden, damit ist δ eine Korrelation. $\alpha|P_9$ ist eine Projektivität und $(\lambda_k^*)^{-1}|P_{9\alpha^{-1}}$ ist eine Projektivität, also ist $\alpha(\lambda_k^*)^{-1}|P_9$ projektiv und daher δ eine projektive Korrelation.

Bemerkung: $\lambda_k: P \rightarrow U_j, \lambda_k^*: U_j \rightarrow P$. Da λ_k eine selbstadjungierte Korrelation ist, gilt $\lambda_k \lambda_k^* = \iota \Rightarrow \lambda_k^* = \lambda_k^{-1} \Rightarrow (\lambda_k^*)^{-1} = \lambda_k$ und somit $\delta = \alpha \lambda_k$.

(b) Eindeutigkeit: Seien δ_1, δ_2 projektive Korrelationen mit $A_i \delta_j = a_i$ ($i=0 \dots 3; j=1,2$) $\Rightarrow A_i = a_i \delta_2^{-1}$ ($i=0, \dots, 3$). $\delta_1 \delta_2^{-1}$ ist eine projektive Kollineation, denn es gilt: $\delta_1 \delta_2^{-1}: P \xrightarrow{\delta_1} U_j \xrightarrow{\delta_2^{-1}} P$; δ_j sind bijektiv, also auch $\delta_1 \delta_2^{-1}$; kollineare Punkte $\xrightarrow{\delta_1}$ kopunktuale Geraden $\xrightarrow{\delta_2^{-1}}$ kollineare Punkte; δ_1 und δ_2 sind projektiv, also auch $\delta_1 \delta_2^{-1}$.

Wir haben also eine projektive Kollineation $\delta_1 \delta_2^{-1} \in \text{PGL}(\pi_{K_2})$ mit $A_i \delta_1 \delta_2^{-1} = a_i \delta_2^{-1} = A_i$ ($i=0 \dots 3$). Da $\text{PGL}(\pi_{K_2})$ scharf viereckstransitiv ist (vgl. 1.9) folgt daraus $\delta_1 \delta_2^{-1} = \iota \Rightarrow \delta_1 = \delta_2$.

DEF. 2.4: Ein Punkt X heißt selbstkonjugiert bezüglich einer Polarität λ , wenn gilt: $X \perp X\lambda$. Eine Gerade x heißt selbstkonjugiert bezüglich λ , wenn gilt: $x \perp x\lambda^*$. Eine Polarität heißt hyperbolisch, wenn sie (mindestens) einen selbstkonjugierten Punkt besitzt, und sonst elliptisch. Die Menge aller selbstkonjugierten Punkte einer projektiven hyperbolischen Polarität in π_{K_2} heißt ein STAUDT'scher Kegelschnitt.

Bemerkungen: (a) Bezüglich jeder hyperbolischen Polarität existiert eine selbstkonjugierte Gerade, denn die Polare eines selbstkonjugierten Punktes ist eine selbstkonjugierte Gerade.

Bew.: λ hyperbolische Polarität $\xrightarrow{\text{Def. 2.4}} \exists X \in P$ mit $X\lambda =: x \perp X$. Nach Satz 1.11 ist λ selbstadjungierte Korrelation, also $\lambda^* = \lambda^{-1}$, und somit gilt: $x \perp X \Rightarrow x\lambda^* = x\lambda^{-1} = X$, also $x \perp x\lambda^*$.

(b) Auf jeder selbstkonjugierten Geraden bezüglich einer Polarität λ existiert genau ein selbstkonjugierter Punkt. Durch jeden selbstkonjugierten Punkt existiert genau eine selbstkonjugierte Gerade.

Bew.: $x \in \mathcal{O}$ selbstkonjugiert: $x \perp x \lambda^* =: X$. Nach (a) ist X ein selbstkonjugierter Punkt auf x und er ist der einzige:
 (ind.) $\exists Y \in \mathcal{P}_x \setminus \{X\}$ mit $Y \perp Y \lambda =: y$.
 Da λ eine Korrelation ist, gilt: $Y \perp x \Rightarrow y \perp X \} \xrightarrow{x \cdot y} y = XY = x$;
 Widerspruch, denn λ ist injektiv. ◆

(c) Da auf jeder selbstkonjugierten Geraden bezüglich einer Polarität nach (b) genau ein selbstkonjugierter Punkt existiert, sind sicher nicht alle Punkte von π selbstkonjugiert und somit ist insbesondere ein Staudtscher Kegelschnitt (λ hyperbolisch) eine echte Teilmenge von \mathcal{P} .

Folgerungen:

1) Jeder Punktkegelschnitt k (im Sinne von Def.2.1 a, also ein "Steinerkegelschnitt") in π_{λ} ist ein Staudtscher Kegelschnitt.

Bew.: Zu k gehört das Polarsystem λ_k , das nach 2.3 eine projektive Polarität ist. Sei s die Menge aller selbstkonjugierten Punkte bezüglich λ_k :
 $X \in k \Rightarrow X \lambda_k$ ist Tangente an k und geht durch $X \Rightarrow X \in s$, d.h. $k \subset s$
 (somit ist s nicht leer, λ_k hyperbolisch und s der durch λ_k bestimmte Staudtsche Kegelschnitt);
 $X \notin k \Rightarrow X \lambda_k \not\perp X$ (denn $(X, X \lambda_k)$ sind nach 2.3 Zentrum und Achse einer harmonischen Homologie) $\Rightarrow X \notin s$, d.h. $s \subset k$. Also gilt $k=s$. ◆

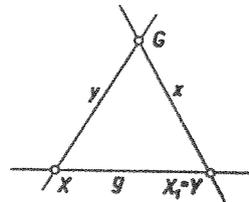
Unser Ziel ist zu zeigen, daß auch umgekehrt jeder Staudtsche Kegelschnitt ein Steinerscher Kegelschnitt ist. Dazu benötigen wir zunächst einige Eigenschaften, welche projektive Polaritäten mit Polarsystemen gemeinsam haben.

2) Für eine projektive Polarität λ in π_{λ} gilt: Auf jeder nicht selbstkonjugierten Geraden bilden die konjugierten Punkte eine projektive Involution. Dual: Um jeden nicht selbstkonjugierten Punkt bilden die konjugierten Geraden eine projektive Involution.

Bew.: g nicht selbstkonjugiert $\Rightarrow g \lambda^{-1} =: G \not\perp g$.
 Da λ eine Korrelation ist, gilt für $X \in \mathcal{P}_g$:

$X \perp g \Rightarrow X \lambda =: x \perp G$.

$X * G \Rightarrow x * g \Rightarrow \exists *X_1 =: xg$. Für die Punktreihe $\mathcal{P}_g(X_1)$ der zu X konjugierten Punkte gilt:



$\mathcal{P}_g(X) \cong \mathcal{O}_g(x) \cong \mathcal{P}_g(X_1)$.

(λ ist nach Vs.projektiv) (nach Konstruktion)

Die Zuordnung $X \mapsto X_1$ ist die Projektivität $\alpha: \mathcal{P}_g(X) \pi \mathcal{P}_g(X_1)$.

$X_1 =: Y$, $Y\lambda =: y$, $y.g = Y_1$ und es gilt:

$\left. \begin{array}{l} Y I x \Rightarrow y I X \\ Y I g \Rightarrow y I G \end{array} \right\} X \neq G \Rightarrow y = XG \Rightarrow Y_1 = X \quad \forall X \in \mathcal{P}_g$. Existiert ein

vertauschbares Paar (X, X_1) mit $X \neq X_1$, so folgt nach 1.10, Folg.8, I, daß α eine projektive Involution ist.

Es ist also noch zu zeigen, daß $\alpha \neq \iota$ gilt.

(ind.) $\alpha = \iota \Rightarrow \forall X \in \mathcal{P}_g$ gilt: $X\lambda = x = XG$, d.h.

alle Punkte von \mathcal{P}_g sind selbstkonjugiert.

Durch den selbstkonjugierten Punkt X geht

nach Bemerkung (b) genau eine selbstkonjugierte Gerade, nämlich x , daher

existiert eine nicht selbstkonjugierte Gerade $h \in \mathcal{O}_X \setminus \{x, g\}$.

Nach dem ersten Beweisteil bestimmt λ auf der nicht selbst-

konjugierten Geraden h Paare konjugierter Punkte, die in

einer Projektivität β zugeordnet sind, und β ist entweder

eine projektive Involution oder die Identität. In beiden

Fällen existiert neben dem selbstkonjugierten Punkt $X \in \mathcal{P}_h$

noch ein weiterer selbstkonjugierter Punkt $H \in \mathcal{P}_h \setminus \{X\}$

(nach 1.10, Folg.8, II gibt es in $\pi_{\mathcal{K}}$ keine parabolischen

projektiven Involutionsen). $H \in \mathcal{P}_h \Rightarrow H \neq G \Rightarrow \exists *GH (\neq g) \Rightarrow$

$\exists *GH.g = Y$. Aus der indirekten Beweisvoraussetzung $\alpha = \iota$ folgt:

$Y = Y_1$ und $Y\lambda =: y = GY \Rightarrow Y I y$. Nun ist $y \lambda^* = y \lambda^{-1} = Y \Rightarrow y I y \lambda^* \Rightarrow y$

ist selbstkonjugiert und trägt zwei verschiedene selbst-

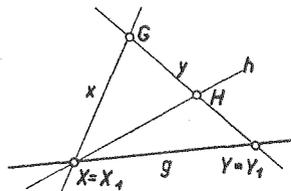
konjugierte Punkte, nämlich Y und H : Widerspruch zu Bem.(b). ◆

Bemerkung: Zusammen mit 1.10, Folg.8, II gilt: Trägt eine nicht selbstkonjugierte Gerade einen selbstkonjugierten Punkt, so trägt sie noch genau einen weiteren (vom ersten verschiedenen) selbstkonjugierten Punkt.

3) Ein Dreieck A, B, C in einer projektiven Ebene π heißt "Poldreieck bezüglich einer Polarität λ ", wenn jede Seite die Polare der Gegenecke ist, d.h. $A\lambda = BC (=: a)$, $B\lambda = AC (=: b)$, $C\lambda = AB (=: c)$.

Bemerkung: Da λ eine selbstadjungierte Korrelation ist, gilt auch: $a\lambda^* = A$, $b\lambda^* = B$, $c\lambda^* = C$.

Jede projektive Polarität λ in $\pi_{\mathcal{K}}$ besitzt Poldreiecke.



Bew.: (a) λ ist elliptisch $\Rightarrow \forall X \in \mathcal{P}$ gilt $X \not\sim X\lambda$.

$A \in \mathcal{P} \Rightarrow A\lambda =: a \not\sim A$. Auf \mathcal{P}_a existiert ein Punkt $B(\neq A)$ und es gilt: $B\lambda =: b \not\sim B$; $B \perp a \Rightarrow b \perp A$ (λ ist eine Korrelation). $A \neq B \Rightarrow a \neq b$: $\exists^* C =: ab$.

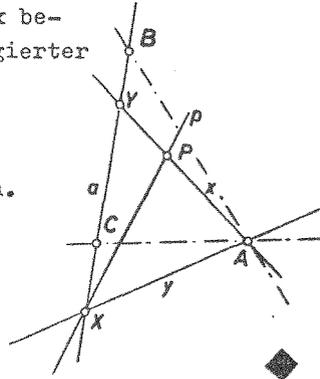
A, B, C ist ein Poldreieck in λ :

$$\left. \begin{array}{l} C \perp a \Rightarrow C\lambda \perp A \\ C \perp b \Rightarrow C\lambda \perp B \end{array} \right\} \Rightarrow C\lambda = AB.$$

(b) λ ist hyperbolisch $\Rightarrow \exists P \in \mathcal{P}$ mit $P \perp P\lambda =: p$; p ist also selbstkonjugiert. Nach Bem. (b) ist P der einzige selbstkonjugierte Punkt auf p . Für $X \in \mathcal{P}_p \setminus \{P\}$ gilt daher $X \not\sim X\lambda =: x$. $X \perp p \wedge P \neq X \Rightarrow x \perp P \wedge p \neq x$.

Auf der nicht selbstkonjugierten Geraden x bestimmt λ eine projektive Involution konjugierter Punkte, welche P als Fixpunkt hat; diese Involution hat noch genau einen zweiten Fixpunkt. Also existiert ein Punkt $A \in \mathcal{P}_x$, der nicht selbstkonjugiert ist: $A \not\sim A\lambda =: a$.

$$\begin{aligned} A \perp x \wedge A \neq P &\Rightarrow a \perp X \wedge a \neq p. \\ A \perp x &\Rightarrow A \neq X \Rightarrow a \neq x \Rightarrow \exists^* Y =: ax. \\ A, X, Y &\text{ ist Poldreieck bezüglich } \lambda: \\ Y \perp a &\Rightarrow Y\lambda \perp A \\ Y \perp x &\Rightarrow Y\lambda \perp X \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow Y\lambda = AX.$$



Bemerkung: In einer π_n mit $N > 3$ ($\Rightarrow N \geq 5$, da nach 1.10 die Ordnung einer π_n stets ungerade ist) kann man sogar ein Poldreieck konstruieren, das "allgemein" zu (P, p) liegt, d.h. P liegt auf keiner Seite und p geht durch keine Ecke des Poldreiecks. Wir gehen dazu wie oben vor, nehmen aber anstelle von Y einen Punkt $B \in \mathcal{P}_a \setminus \{X, Y\}$, der nicht selbstkonjugiert ist; da a nicht selbstkonjugiert ist, gibt es nach Folg. 2 auf a höchstens zwei selbstkonjugierte Punkte und wegen $N \geq 5$ ist die Existenz eines solchen Punktes B gesichert.

$$B \perp a \wedge B \neq A \Rightarrow b \perp A \wedge b \neq a \Rightarrow \exists^* C =: ab.$$

A, B, C ist Poldreieck bezüglich λ :

$$\left. \begin{array}{l} C \perp a \Rightarrow C\lambda \perp A \\ C \perp b \Rightarrow C\lambda \perp B \end{array} \right\} \Rightarrow C\lambda = AB.$$

Wegen $B \neq Y$ gilt: $B \not\sim x \Rightarrow b \not\sim X \Rightarrow C \neq X$; also geht p durch keine Ecke von A, B, C .

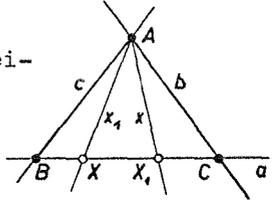
4) Ein Dreieck A, B, C heißt "Poldreieck bezüglich einer Korrelation σ ", wenn gilt:

$$A\sigma = BC (= : a) \wedge a\sigma = A, \quad B\sigma = CA (= : b) \wedge b\sigma = B, \quad C\sigma = AB (= : c) \wedge c\sigma = C.$$

Eine projektive Korrelation σ in π_{K1} , bezüglich der ein Poldreieck

A, B, C existiert, ist notwendig eine (projektive) Polarität.

Bew.: (I) δ bestimmt auf jeder Seite des Poldreiecks eine projektive Involution konjugierter Punkte.



$X \perp a \Rightarrow X\delta =: x \perp a \delta^* = A \Rightarrow x \neq a \Rightarrow \exists^* X_1 := xa$.
Die Zuordnung $X \mapsto X_1$ ist eine Projektivität α :

$$\mathcal{P}_a(X) \stackrel{\delta}{\sim} \mathcal{U}_A(X\delta = x) \stackrel{\alpha}{\sim} \mathcal{P}_a(X_1).$$

α leistet: $B\alpha = C \wedge C\alpha = B$ (wegen: $B \perp c \Rightarrow B\delta = b \perp c \delta^* = C \Rightarrow B_1 = C$);
 $B \neq C$ ist also in α vertauschbar zugeordnet; daher ist α nach 1.10, Folg. 8, I eine projektive Involution.

(II) $X \in \mathcal{P}_a, X\delta =: x; X\alpha = X_1$.

$$X_1 \perp a \Rightarrow X_1\delta \perp a \delta^* = A$$

$$X_1 \perp x \Rightarrow X_1\delta \perp X \text{ (da die Zuordnung } X \mapsto X_1 \text{ vertauschbar ist)}$$

$$X_1\delta =: x_1 = AX.$$

$x = AX_1 \Rightarrow x\delta^* = Ad \cdot X_1\delta = ax_1 = X$. Setzen wir $x = X\delta$ ein, so entsteht:

$$X\delta\delta^* = X \quad \forall X \in \mathcal{P}_a, \text{ d.h. } (\delta\delta^*)|_{\mathcal{P}_a} = \iota.$$

Analog findet man: $(\delta\delta^*)|_{\mathcal{P}_b} = \iota \wedge (\delta\delta^*)|_{\mathcal{P}_c} = \iota$.

(III) $X \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_a \cup \mathcal{P}_b \cup \mathcal{P}_c$.

δ bestimmt nach (I) auf \mathcal{P}_a bzw. \mathcal{P}_b bzw.

\mathcal{P}_c die projektiven Involutionen α bzw. β

bzw. γ konjugierter Punkte.

$$XA.a =: X', \quad XB.b =: X''.$$

Nach (II) gilt: $X'\delta = AX_1' \wedge X_1'\delta = AX, \dots$

$$\text{Wegen } X = X_1'\delta \cdot X_1''\delta \Rightarrow X\delta = X_1'\delta\delta^* \cdot X_1''\delta\delta^* = X_1' \cdot X_1'' =: x.$$

$x\delta^* = X_1'\delta \cdot X_1''\delta = AX \cdot BX = X$. Setzen wir $x = X\delta$ ein, so entsteht:

$$X\delta\delta^* = X \quad \forall X \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_a \cup \mathcal{P}_b \cup \mathcal{P}_c.$$

(II) \wedge (III) $\Rightarrow X\delta\delta^* = X \quad \forall X \in \mathcal{P} \Rightarrow \delta\delta^* = \iota$

Def. 1.11 c δ ist selbstadjungiert; nach Satz 1.11 ist δ eine Polarität. ◆

5) Eine projektive Polarität in π_a ist eindeutig festgelegt durch ein Poldreieck und einmal Pol-Polare, wenn Pol-Polare allgemein zum Poldreieck liegen.

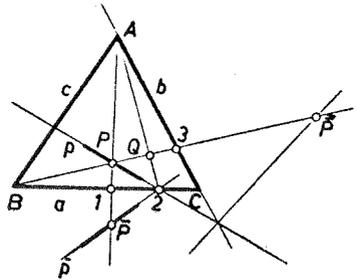
Bew.: Sei A, B, C das gegebene Poldreieck mit den Seiten a, b, c und P, p das Paar Pol-Polare; laut Angabe ist $\{A, B, C, P\}$ ein Viereck und $\{a, b, c, p\}$ ein Vierseit. Nach der Aussage zu

Beginn von 2.4 existiert genau eine projektive Korrelation σ mit $A\sigma = a$, $B\sigma = b$, $C\sigma = c$, $P\sigma = p$ und nach Folg.4 ist σ eine Polarität, denn σ enthält ein Poldreieck A, B, C . ◆

6) Jeder Staudtsche Kegelschnitt in π_{kl} ist ein Punktkegelschnitt.

Bew.: (a) $N > 3$: Nach Definition 2.4 wird ein Staudtscher Kegelschnitt durch eine projektive hyperbolische Polarität λ festgelegt. λ ist hyperbolisch $\Rightarrow \exists P \in \ell$ mit $P\lambda =: p \perp P$. Nach Folg.3, Bem. existiert für $N > 3$ ein Poldreieck A, B, C bzgl. λ , das zu (P, p) allgemeine Lage hat.

Wir legen einen Punktkegelschnitt k durch die folgenden vier Forderungen fest:



- (1) $P \in k$.
- (2) p ist die Tangente von k in P .
- (3) Die harmonische Homologie $\sigma_A(A, a)$ leistet:

$P\sigma_A =: \bar{P}$, wobei gilt $H(A, 1; P, \bar{P})$ mit $1 := a \cdot AP$ ($P + \bar{P}$); $p\sigma_A^* =: \bar{p}$ mit $\bar{p} = \bar{P} \cdot ap$ ($=: \bar{P} \cdot 2$) ($p + \bar{p}$).

Wir verlangen: $\bar{P} \in k$ und \bar{p} ist Tangente von k in \bar{P} .

- (4) Die harmonische Homologie $\sigma_B(B, b)$ leistet: $P\sigma_B =: \bar{P}$, wobei gilt $H(B, 3; P, \bar{P})$ mit $3 := b \cdot BP$ ($P + \bar{P}$);
Wir verlangen: $\bar{P} \in k$.

Nach Satz 2.1 ist dadurch k eindeutig festgelegt, falls gezeigt ist, daß der Punkt \bar{P} und die beiden Linienelemente $(P, p); (\bar{P}, \bar{p})$ allgemeine Lage haben.

P, \bar{P}, \bar{p} nicht kollinear:

(ind.) P, \bar{P}, \bar{p} kollinear $\Rightarrow \bar{P} \in P\bar{P} \wedge A \in P\bar{P} \wedge B \in P\bar{P} = P\bar{P} \Rightarrow A, B, P \in P\bar{P} \Rightarrow A, B, P$ kollinear; Widerspruch zur Voraussetzung.

$\bar{P} \notin \bar{p}$: wegen $P + \bar{P}$ und $p \perp A \wedge p \perp a$.

$\bar{P} \notin p$: (ind.) $\bar{P} \in p \wedge \bar{P} \in \bar{p} \Rightarrow P = p \cdot \bar{p} \in a \Rightarrow P \in a$: Widerspruch.

Analog: $\bar{P} \notin p$.

$\bar{P} \notin \bar{p}$: (ind.) $\bar{P} \in \bar{p}$. Setzen wir $Q := A2 \cdot P\bar{P}$, so gilt:

$H(P, \bar{P}; A, 1) \Leftrightarrow H(P, \bar{P}; Q, B) \Leftrightarrow H(P, \bar{P}; B, Q)$.

Projektion aus 2 auf $BP \parallel$ vgl. 1.10

Zusammen mit $H(P, \bar{P}; B, 3)$ und De folgt: $Q = 3 \Rightarrow 2 = C \Rightarrow p \in C$:
Widerspruch.

Der somit eindeutig existierende Kegelschnitt k besitzt ein Polarsystem λ_k , welches folgendes leistet:

$A\lambda_k = a$ (P, \bar{P} ist eine Sehne von k durch A ; nach 2.3 ist $A\lambda_k$ zu A bezüglich k harmonisch, also gilt $A\lambda_k \perp 1$; 2 ist der Pol von $P\bar{P}$: $2\lambda_k = P\bar{P}$; $A \in P\bar{P} = 2\lambda_k \Rightarrow A\lambda_k \perp 2$. Also gilt $A\lambda_k = 12 = a$).

$B\lambda_k = b$ ($B \text{ I } A\lambda_k = a \Rightarrow B\lambda_k \text{ I } A$; P, \bar{P} ist Sehne von k durch A und da β zu P, \bar{P} bezüglich B harmonisch liegt, gilt $B\lambda_k \text{ I } \beta$. Also gilt $B\lambda_k = A\beta = b$).

$C\lambda_k = c$ ($C \text{ I } a \wedge C \text{ I } b \Rightarrow C\lambda_k = AB = c$).

$P\lambda_k = p$ (nach Def. 2.3).

A, B, C ist also ein Poldreieck von λ_k . Die gegebene projektive Polarität λ und das Polarsystem λ_k haben das Poldreieck A, B, C und das Paar Pol-Polare P, p gemeinsam; nach Folgerung 5 folgt:

$\lambda = \lambda_k \Rightarrow$ die Menge der selbstkonjugierten Punkte von λ (d.i. der Staudtsche Kegelschnitt) ist identisch mit der Menge der selbstkonjugierten Punkte von λ_k , dies ist aber nach Folgerung 1 der Punktkegelschnitt k .

(b) $N=3$: Ist λ eine hyperbolische projektive Polarität mit dem selbstkonjugierten Punkt P ($P\lambda = :p \text{ I } P$), so gehen durch P noch genau drei weitere verschiedene Geraden $x, y, z \mid \neq p$, die nach Bemerkung (b) nicht selbstkonjugiert sind. Jede dieser Geraden trägt den selbstkonjugierten Punkt P und daher nach Folgerung 2 noch genau einen weiteren: $Q \text{ I } x$, $R \text{ I } y$, $S \text{ I } z$. Die drei verschiedenen Punkte Q, R, S sind nicht kollinear, da auf einer Geraden nach Bemerkung (b) und Folg. 2 niemals drei verschiedene selbstkonjugierte Punkte liegen. Der Staudtsche Kegelschnitt zu λ ist also für $N=3$ ein Viereck, und dieses ist nach 2.1, Folg. 2 ein Punktkegelschnitt. ◆

SATZ 2.4: In einer klassischen projektiven Ebene sind die Punktkegelschnitte genau die Staudtschen Kegelschnitte und die projektiven Polaritäten sind genau jene projektiven Korrelationen, die ein Poldreieck besitzen. Durch ein Viereck und das Bildvierseit ist eine projektive Korrelation eindeutig festgelegt. Insbesondere wird durch ein Poldreieck und einmal Pol und Polare in allgemeiner Lage zum Poldreieck genau eine projektive Polarität bestimmt.

Bemerkung: In π_k ist die Existenz von projektiven hyperbolischen Polaritäten gesichert, denn sie sind identisch mit den Polarsystemen von Kegelschnitten und in π_k existieren Kegelschnitte. Wir werden später einsehen, daß die Existenz von projektiven elliptischen Polaritäten vom Körper der π_k abhängt, z.B. existieren in der PAE projektive elliptische Polaritäten. Eine notwendige Bedingung für elliptische Polaritäten kann schon

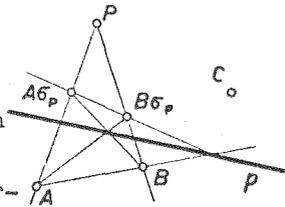
jetzt eingesehen werden: Auf jeder Seite eines Poldreiecks (solche existieren nach Folg. 4 sicher) bestimmt eine elliptische Polarität elliptische projektive Involutionskonjugierter Punkte. Die Fixpunkte der Involutionskonjugierter Punkte sind nämlich selbstkonjugiert. Umgekehrt ist diese Bedingung nicht hinreichend, wie man in einer projektiven Ebene der Ordnung drei erkennt, wo ein Kegelschnitt k ein Viereck ist und das Diagonaldreieck dieses Vierecks ein Poldreieck von k darstellt mit elliptischen projektiven Involutionskonjugierter Punkte auf allen drei Seiten.

Anwendungen:

Da die Zuordnung Kegelschnitt $k \mapsto$ Polarsystem λ_k und hyperbolische projektive Polarität \mapsto Kegelschnitt eindeutig ist, können auch Elemente des Polarsystems zur konstruktiven Festlegung eines Kegelschnitts verwendet werden. Die Kenntnis von Pol P und Polare p mit $P \notin p$ verdoppelt die anderen Angabeelemente bei Anwendung der harmonischen Homologie $\sigma_p(P, p)$ (Für $P \notin p$ ist (P, p) ein Linienelement von k und es kann Satz 2.1 angewendet werden; wir setzen i. f. daher $P \notin p$ voraus):

(a) Durch Pol-Polare P, p und drei Punkte A, B, C (dual: drei Tangenten) "allgemeiner Lage" ist ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt.

Bew.: Existiert ein Kegelschnitt k , der in die Angabe paßt, so gilt $k \sigma_p = k$. $A, B \in k \implies A \sigma_p, B \sigma_p \in k$; $A \sigma_p$ ist der durch $H(P, p; A, A \sigma_p)$ eindeutig festgelegte Punkt; analog: $B \sigma_p$. "Allgemeine Lage" soll heißen: Von den Punkten $A, A \sigma_p, B, B \sigma_p, C$ sind nie drei kollinear $\implies k$ ist durch diese fünf Punkte eindeutig bestimmt. Der so festgelegte Kegelschnitt k hat P, p als Pol-Polare, denn im k eingeschriebenen Viereck $A, B, A \sigma_p, B \sigma_p$ ist P eine Diagonalecke und p die gegenüberliegende Seite des Diagonaldreiecks. Im Sonderfall $A \in p$ ist AP die Tangente in A an k .



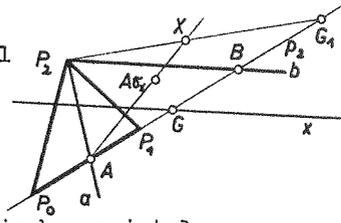
Ebenso wird in den Übungen gezeigt:

(b) Durch zweimal Pol-Polare und einen Punkt (bzw. eine Tangente) "allgemeiner Lage" ist ein Kegelschnitt eindeutig festgelegt.

(c) Durch dreimal Pol-Polare ist i. a. ein Kegelschnitt überbestimmt.

(d) Durch ein Poldreieck und zwei Punkte (bzw. zwei Tangenten) "allgemeiner Lage" ist ein Kegelschnitt eindeutig festgelegt.

(e) Durch ein Poldreieck P_i und einmal Pol X und Polare x allgemeiner Lage ist genau eine projektive Polarität λ bestimmt (vgl. Satz 2.4). Ist auf mindestens einer Poldreieckseite, z.B. P_0P_1 , die projektive Involution α_a konjugierter Punkte hyperbolisch, so ist λ hyperbolisch (die Fixpunkte von α_a sind nämlich selbstkonjugiert) und es existiert genau ein Lösungskegelschnitt mit $\lambda_k = \lambda$. Unter dieser Zusatzvoraussetzung können wir den Staudtschen Kegelschnitt k festlegen. Die projektive Involution α_a konjugierter Punkte auf $P_0P_1 =: p_2$ (p_2 ist wegen $p_2 \nmid P_2$ nicht selbstkonjugiert) ist durch $P_0 \mapsto P_1 \wedge G \mapsto G_1$ eindeutig festgelegt, wobei gesetzt wurde: $G := xp_2 \wedge G_1 := XP_2 \cdot P_2$. Die Fixpunkte A, B von α_a sind selbstkonjugiert, also Punkte von k . $A\lambda = AP_2 =: a$ bzw. $B\lambda = BP_2 =: b$ sind die Tangenten in A, B an k . Der dem Punkt A in der harmonischen Homologie $\mathcal{G}_X(X, x)$ zugeordnete Punkt $A\mathcal{G}_X$ gehört auch zu k . Durch die beiden Linienelemente (A, a) und (B, b) und $A\mathcal{G}_X$ ist k nach Satz 2.1 eindeutig festgelegt.



2.5. Kegelschnittbüschel, Kegelschnittscharen und Desarguesscher Involutionssatz in klassischen projektiven Ebenen

$e \Rightarrow \exists$ Viereck: Durch die Ecken eines Vierecks gehen i.a. mehrere Kegelschnitte.

DEF.2.5 a: Die Menge aller Kegelschnitte in π_{κ_e} durch die Punkte ("Grundpunkte") eines Vierecks heißt ein Büschel 1. Art | Geraden ("Grundgeraden") eines Vierseits heißt eine Schar 1. Art

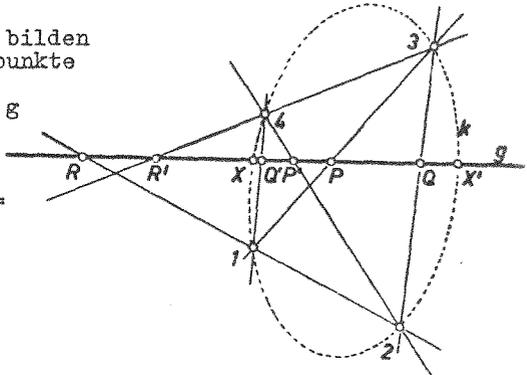
von Kegelschnitten.

Bemerkung: Nach Satz 2.1 ist ein Kegelschnitt durch ein Linienelement und drei Punkte allgemeiner Lage eindeutig festgelegt. Im Büschel liegen also ebensoviele Kegelschnitte wie es Geraden durch einen Grundpunkt gibt, die nicht durch einen der anderen drei Grundpunkte gehen, also in einer endlichen projektiven Ebene $N+1-3=N-2$ Kegelschnitte. Speziell für $N=3$ enthält ein Büschel 1. Art einen Kegelschnitt.

Folgerungen:

1a) "Desarguesscher Involutionssatz für Büschel 1. Art": Auf jeder Geraden g , die keinen Grundpunkt enthält, schneiden jene Kegelschnitte eines Büschels 1. Art, für welche g eine Sehne ist, Punktepaare einer projektiven Involution aus, der auch die Schnittpunkte von g mit den Gegenseitenpaaren des Grundvierecks angehören. Es gibt höchstens zwei Kegelschnitte des Büschels, welche g berühren; die Berührungspunkte sind genau jene Fixpunkte dieser projektiven Involution, die nicht Diagonalecken des Grundvierecks sind.

Bew.: Die Grundpunkte $1, \dots, 4$ bilden ein Viereck, dessen Diagonalepunkte nach dem Satz von Fano nicht kollinear liegen; die Gerade g geht also höchstens durch zwei Diagonalepunkte. Man darf daher o.B.d.A. voraussetzen $R \neq R'$ mit $R := g.12 \wedge R' := g.34$.



Wir bezeichnen weiters:
 $P := g.13 \wedge P' := g.24$; $Q := g.23 \wedge Q' := g.14$. Dann gilt:
 $P \neq Q \wedge P' \neq Q'$, denn g geht durch keinen Grundpunkt.

(1) Sei k ein Kegelschnitt des durch $1, \dots, 4$ festgelegten Büschels, der g als Sehne hat, und seien $X, X' \neq$ seine Schnittpunkte mit g , dann gilt $X \neq |P, Q \wedge X' \neq |P', Q'$, da nie drei Punkte eines Kegelschnitts kollinear sind. Wir definieren eine Projektivität $\alpha: \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_g$, die nach 1.9 durch $P \mapsto P'$, $Q \mapsto Q'$, $X \mapsto X'$ eindeutig festgelegt wird. Um zu zeigen, daß α eine projektive Involution ist, genügt es nachzuweisen, daß $X' \alpha = X$ gilt. Gemäß Definition von α gilt:

$g(P, Q, X, X') \stackrel{\alpha}{\mapsto} g(P', Q', X', X' \alpha)$ (*), wobei $X' \alpha$ noch unbekannt ist. Die durch die Kette

$$g(P, Q, X, X') \stackrel{\beta}{\mapsto} k(1, 2, X, X') \stackrel{\gamma}{\mapsto} g(Q', P', X, X')$$

dargestellte Projektivität $\mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_g$ heiße β . Wir definieren eine projektive Involution $\gamma: \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_g$ durch $P' \mapsto Q'$, $X \mapsto X'$ (wegen $P' \neq X' \wedge Q' \neq X$ ist γ dadurch nach 1.10, Folg. 8, IV eindeutig festgelegt). Die Projektivität $\beta \gamma$ leistet:

$$\left. \begin{array}{l} P \xrightarrow{\alpha} Q' \xrightarrow{\gamma} P' \\ Q \xrightarrow{\beta} P' \xrightarrow{\gamma} Q' \\ X \xrightarrow{\beta} X \xrightarrow{\gamma} X' \\ X' \xrightarrow{\beta} X' \xrightarrow{\gamma} X \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{FS}} \alpha = \beta \gamma$$

$\Rightarrow X' \beta \gamma = X \Rightarrow X' \alpha = X \Rightarrow \alpha$ ist eine projektive Involution.

α ist also bereits durch $P \mapsto P' \wedge Q \mapsto Q'$ eindeutig festgelegt und hängt daher nicht vom herausgegriffenen Kegelschnitt des Büschels ab, der g als Sehne besitzt; das Schnittpunktpaar X, X' ist also immer in α zugeordnet.

(2) Es ist $R\alpha = R'$ zu zeigen.

Nach den Voraussetzungen sind P, Q, R bzw. P', Q', R' pw. verschieden. Laut FS \exists * Projektivität $\bar{\alpha} : \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_g$ mit $P\bar{\alpha} = P', Q\bar{\alpha} = Q', R\bar{\alpha} = R'$.

Wir wollen zeigen, daß $\bar{\alpha}$ eine projektive Involution ist. Die durch die Kette

$g(P, Q, R, R') \xrightarrow{\beta} \mathcal{P}_g(1, 2, R, 3R'.12) \xrightarrow{\gamma} g(Q', P', R, R')$ dargestellte Projektivität heie β . Wir definieren eine projektive Involution $\gamma : \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_g$ durch: $P' \mapsto Q', R \mapsto R'$ (existiert eindeutig wegen $P' \neq R' \wedge Q' \neq R$, vgl. 1.10, Folg. 8). Die Projektivität $\beta \gamma$ leistet:

$$\left. \begin{array}{l} R' \xrightarrow{\beta} R' \xrightarrow{\gamma} R \\ R \xrightarrow{\beta} R \xrightarrow{\gamma} R' \\ P \xrightarrow{\beta} Q' \xrightarrow{\gamma} P' \\ Q \xrightarrow{\beta} P' \xrightarrow{\gamma} Q' \end{array} \right\} \xrightarrow{1.10, \text{F. 8}} \beta \gamma \text{ ist eine projektive Involution, } \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \text{da } R \neq R' \text{ gilt.} \\ \xrightarrow{\text{FS}} \beta \gamma = \bar{\alpha}. \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\bar{\alpha}$ ist eine projektive Involution.

Die beiden projektiven Involutionen α (aus Beweisschritt (1)) und $\bar{\alpha}$ leisten: $P \mapsto P' \wedge Q \mapsto Q' \xrightarrow{1.10} \alpha = \bar{\alpha}$. Nach Definition leistet $\bar{\alpha}$ $R\bar{\alpha} = R' \Rightarrow R\alpha = R'$.

$R \neq R' \Rightarrow \alpha \neq 1$ (gilt stets, auch wenn kein Kegelschnitt des Büschels existiert, für welchen g Sehne ist).

(3) Sei k ein Kegelschnitt des Büschels,

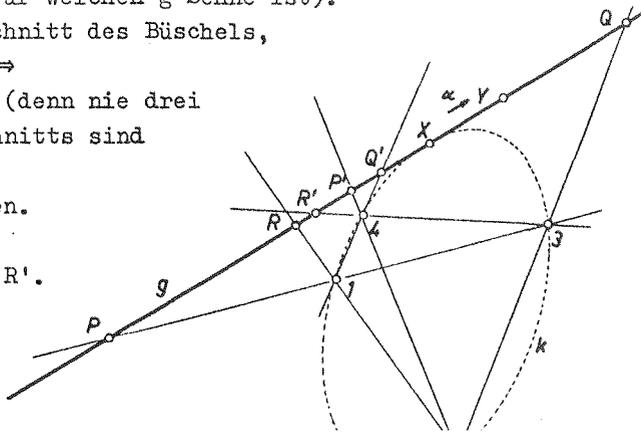
der g in X berührt \Rightarrow

$\Rightarrow X \neq P, Q, R, P', Q', R'$ (denn nie drei Punkte eines Kegelschnitts sind kollinear).

Es ist $X\alpha = X$ zu zeigen.

(Ind.) $X * X\alpha (= Y)$

$X * | P, Q, R \xrightarrow{\alpha \text{ bil.}} Y * | P', Q', R'$.



Da α eine projektive Involution ist, gilt $Y\alpha = X\alpha^2 = X$. Wir definieren eine projektive Involution $\bar{y} : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$ durch: $P' \mapsto Q' \wedge Y \mapsto Y\alpha = X$ und betrachten die Kette:

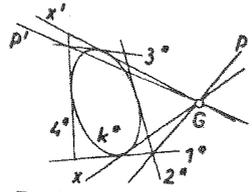
$$\mathcal{Q}_3(31, 32, 3X, 3Y) \bar{\pi} g(P, Q, X, Y) \bar{\pi} g(P', Q', Y, X) \bar{\pi} g(Q', P', X, Y) \bar{\pi} \mathcal{Q}_4(41, 42, 4X, 4Y).$$

Die Scheitel 3,4 der dadurch dargestellten Projektivität $\mu : \mathcal{Q}_3 \rightarrow \mathcal{Q}_4$ liegen auf k , weiters schneiden einander die ersten drei der angeschriebenen Geraden in Punkten von k , nämlich in 1,2 und $X \Rightarrow \mu$ erzeugt genau k , denn durch 1, ..., 4, X ist k eindeutig bestimmt \Rightarrow die Geraden 3Y und 4Y schneiden einander in einem Punkt von $k \Rightarrow Y \in k$. Damit gilt $Y, X \in k \cap \mathcal{P}_3 \wedge X \neq Y \Rightarrow g$ ist Sehne von k im Widerspruch zur Voraussetzung; also gilt $X = X\alpha$.

Wegen $\alpha \neq \text{id}$ berühren höchstens zwei Kegelschnitte des Büschels die Gerade g , denn eine projektive Involution in $\pi_{\mathcal{K}}$ hat nach 1.10 höchstens zwei Fixelemente.

Ist umgekehrt X ein Fixpunkt von α , der keine Diagonalecke des Grundvierecks ist, so liegen von den fünf Punkten 1,2,3,4,X nie drei kollinear und bestimmen genau einen Kegelschnitt k , der dem Büschel angehört und $X \in \mathcal{P}_g$ enthält. Wäre g Sehne von k , so müßte $X\alpha$ der zweite Schnittpunkt von g mit k sein; wegen $X = X\alpha$ ist g keine Sehne. Da g den Punkt X von k enthält, ist g Tangente von k in X . Enthält dagegen g eine Diagonalecke des Grundvierecks, z.B. $13, 24 = P = P\alpha = P'$, so ist P Fixpunkt von α und kein Büschelkegelschnitt berührt g in P , da die drei Punkte 1,3,P kollinear sind. ◆

Bemerkung: Der zum Desarguesschen Involutionssatz duale Satz in $\pi_{\mathcal{K}}$ ist ebenfalls richtig: Um jeden Punkt G , der auf keiner Grundgeraden liegt, bestimmen die Tangenten an jene Kegelschnitte einer Schar 1. Art, für welche G ein Außenpunkt ist, Geradenpaare einer projektiven Involution, der auch die Verbindungsgeraden von G mit den Gegeneckenpaaren des Grundvierseits angehören. Es gibt höchstens zwei Kegelschnitte der Schar, welche G enthalten; die Tangenten an die durch G gehenden Kegelschnitte sind Fixstrahlen dieser projektiven Involution.



Anwendung:

Von einem Kegelschnitt einer $\pi_{\mathcal{K}}$ kennt man vier Punkte 1, ..., 4, die ein Viereck bilden, und eine Tangente r , die durch keinen der gegebenen Punkte geht.

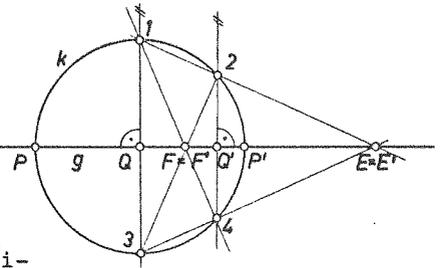
Existiert ein Lösungseggelschnitt k ...

1, ... 4 festgelegten Büschel 1. Art an. Dieses bestimmt eine Desarguesinvolution $\alpha: \mathcal{P}_r \rightarrow \mathcal{P}_r$, die durch $12.r \mapsto 34.r$ und $23.r \mapsto 14.r$ eindeutig festgelegt ist. Der Berührungspunkt von k mit r ist notwendig Fixpunkt von α . Ist die projektive Involution α elliptisch, so gibt es keinen Lösungskegelschnitt k . Falls α hyperbolisch ist, hängt die Anzahl der Lösungskegelschnitte davon ab, ob der Fixpunkt eine Diagonalecke von 1, ... 4 ist oder nicht; nach 1a) ist jede Diagonalecke auf r Fixpunkt von α und jeder Fixpunkt von α , der keine Diagonalecke ist, führt auf einen Lösungskegelschnitt.

Ist α hyperbolisch, so gibt es zwei bzw. einen bzw. keinen Lösungskegelschnitt, je nachdem r mit keiner bzw. einer bzw. zwei Diagonalecken von 1...4 inzidiert.

Dual löst man: Von einem Kegelschnitt kennt man vier Tangenten, die ein Viereck bilden, und einen Punkt, der auf keiner der gegebenen Tangenten liegt.

Bemerkung: Wir leiten aus Folg. 1a für PAE eine Konstruktion der Fixelemente einer hyperbolischen Involution $\alpha: \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_g$ (g eigentlich) ab. α ist durch $P \mapsto P'$, $Q \mapsto Q'$ eindeutig festgelegt ($P \neq Q, P' \neq Q'$, alle eigentlich). Wir legen durch ein zugeordnetes Punktepaar einen Hilfskreis k so, daß g ein Durchmesser ist und die beiden zu g normalen Geraden durch die beiden anderen zugeordneten Punkte den Hilfskreis k in vier Punkten 1, ... 4 schneiden (Dies ist stets möglich, da wir später sehen werden: Eine projektive Involution in PAE ist genau dann hyperbolisch, wenn die Paare (P, P') , (Q, Q') einander nicht trennen).

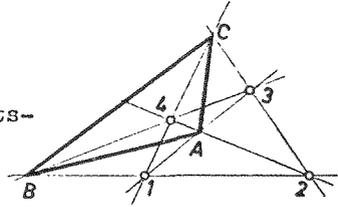


1, ... 4 bestimmen ein Kegelschnittbüschel 1. Art, dem der Hilfskreis k angehört und dessen Desarguesinvolution auf \mathcal{P}_g , daher die gegebene Involution α ist. Da 1, 2 zu 3, 4 bezüglich g symmetrisch liegen, trägt g zwei Diagonalecken von 1, ... 4 und diese sind die gesuchten Fixpunkte von α .

2a) Seien k und l zwei verschiedene Kegelschnitte eines Büschels 1. Art mit den Grundpunkten 1, ... 4 (nur in π_{KE} mit $N=3$ existieren nicht zwei verschiedene Kegelschnitte in einem Büschel 1. Art) und λ_k bzw. λ_l ihre Polarsysteme. Gesucht ist die Menge der Punkte X mit $X \lambda_k = X \lambda_l$.

Die Diagonalecken A, B, C des Grundvierecks 1, ... 4 haben diese Eigenschaft: $A \lambda_k = A \lambda_l$, $B \lambda_k = B \lambda_l$, $C \lambda_k = C \lambda_l$.

Zum Beispiel A ist nämlich Involutionszentrum für jene Involution auf k , die durch $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4$ eindeutig festgelegt $A\lambda_k = BC$ ist die zugehörige Projektivitätsachse; also BC ; analog für die anderen Ecken. Also gilt: Das Diagonaldreieck eines Vierecks, dessen Ecken einem Kegelschnitt angehören, ist ein Poldreieck bezüglich des Polarsystems dieses Kegelschnitts. Wegen $1, \dots, 4 \in k \wedge 1, \dots, 4 \in l$ folgt, daß A, B, C bezüglich λ_k und λ_l Poldreieck ist.



A, B, C sind die einzigen Punkte, für welche die λ_k - und die λ_l -Polaren übereinstimmen.

Bew.: (ind.) Angenommen es existiert $X \in \rho \setminus \{A, B, C\}$ mit $X\lambda_k = X\lambda_l$ ($=: x$).

Fall 1: $X \in k \Rightarrow X \in k \wedge X \in l \Rightarrow X=1$ (o.B.d.A), da $k \cap l = \{1, 2, 3, 4\}$ wegen Satz 2.1 und $k \neq l$. Dann ist x die Tangente in 1 an k und $l \Rightarrow k$ und l haben das Linienelement $(1, x)$ und drei Punkte $2, 3, 4$ gemeinsam $\Rightarrow k=l$: Widerspruch.

Fall 2: $X \notin k \Rightarrow X \notin k \wedge X \notin l$. Nach 2.4 bestimmen X, x eine harmonische Homologie σ_x mit $k\sigma_x = k \wedge l\sigma_x = l \Rightarrow k\sigma_x \cap l\sigma_x = k \cap l = \{1, 2, 3, 4\} = \{1\sigma_x, 2\sigma_x, 3\sigma_x, 4\sigma_x\}$.

Für $\sigma_x | k \cap l$ kommen also alle involutorischen Permutationen und die identische Permutation von $\{1, 2, 3, 4\}$ in Frage. Nur die folgenden drei Fälle sind (bis auf Umbeschriftung) wesentlich:

(I) alle vier Punkte fest: Wegen 1.9 $\Rightarrow \sigma_x = \iota$: Widerspruch.

(II) zwei Punkte fest und die beiden anderen Punkte vertauscht:

o.B.d.A $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Nach den Gesetzen einer Homologie folgt $x=12$ (denn 1 bzw. 2 ist stets vom Zentrum X verschieden); $X(\not\in x)$ ist also der Schnittpunkt der Tangenten an k und l in 1 bzw. 2 $\Rightarrow X1$ ist Tangente in 1 an k und $l \stackrel{2.1}{\Rightarrow} k=l$: Widerspruch.

(III) kein Punkt fest: o.B.d.A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Nach den Gesetzen einer Homologie folgt: $X \in 12 \wedge X \in 34 \Rightarrow X=B$: Widerspruch.

SATZ 2.5 a: Ist g eine Gerade durch keinen Grundpunkt eines Büschels 1. Art, so liegen die Schnittpunkte von g mit den Gegenseitenpaaren des Grundvierecks in einer projektiven Involution (Desarguesinvolution), der die Schnittpunkte jener Kegelschnitte des Büschels 1. Art angehören, für welche g Sehne ist; es gibt höchstens zwei g berührende Büschelkegelschnitte und deren Berührungspunkte mit g sind Fixpunkte der Desarguesinvolution auf g . Alle Kegelschnitte eines Büschels 1. Art besitzen genau ein gemeinsames Poldreieck, nämlich das Diagonaldreieck des Grundvierecks. Die dualen Aussagen gelten für Scharen 1. Art.

DEF.2.5 b: Die Menge aller Kegelschnitte in π_{N-1} durch ein Linien-
element ("Grundlinienelement") und

zwei weitere Punkte ("Grundpunkte"), die mit dem Punkt des Linienelements nicht kollinear sind und von denen keiner auf der Geraden des Linienelements liegt, heißt ein Büschel 2. Art

zwei weitere Geraden ("Grundgeraden"), die mit der Geraden des Linienelements nicht kollinear sind und von denen keine durch den Punkt des Linienelements geht, heißt eine Schar 2. Art

von Kegelschnitten.

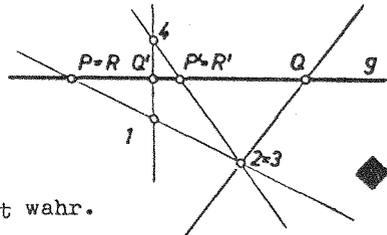
Bemerkung: Nach Satz 2.1 ist ein Kegelschnitt durch zwei Linienelemente und einen Punkt allgemeiner Lage festgelegt. Jede Gerade durch einen Grundpunkt, die nicht durch den anderen Grundpunkt und nicht durch den Punkt des Grundlinienelements geht, legt genau einen Büschelkegelschnitt fest, und zu verschiedenen Tangenten gehören verschiedene Büschelkegelschnitte; umgekehrt besitzt jeder Büschelkegelschnitt in diesem Grundpunkt eine eindeutige Tangente, d.h. ein Büschel 2. Art enthält $N+1-2=N-1$ Kegelschnitte. Speziell in π_{N-1} mit $N=3$ enthält ein Büschel 2. Art zwei Kegelschnitte.

Folgerungen:

1b) "Desarguesscher Involutionssatz für Büschel 2. Art": Auf jeder Geraden g , die keinen Grundpunkt enthält, schneiden jene Kegelschnitte eines Büschels 2. Art, für welche g eine Sehne ist, Punktepaare einer projektiven Involution aus, der auch die Schnittpunkte von g mit jenen beiden Seiten des Grunddreiecks, die durch den Punkt des Linienelements gehen, und die Schnitt-

punkte von g mit der Geraden des Linienelements und der nicht durch den Punkt des Linienelements gehenden Seite des Grunddreiecks angehören. Es gibt höchstens zwei Kegelschnitte des Büschels zweiter Art, welche g berühren; die Berührungspunkte sind genau jene Fixpunkte dieser projektiven Involution, die verschieden vom Schnittpunkt der Grundtangente mit der nicht durch den Punkt des Linienelements gehenden Seite des Grunddreiecks sind.

Bew.: Analog zu 1a, wobei die Verbindung 23 durch die Tangente in 2 zu ersetzen ist; der Beweisschritt (2) fällt weg.

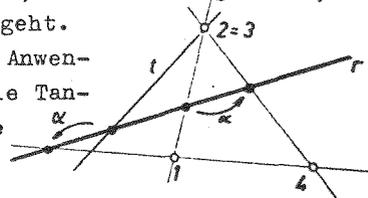


Bemerkung: Auch die duale Aussage ist wahr.

Anwendung:

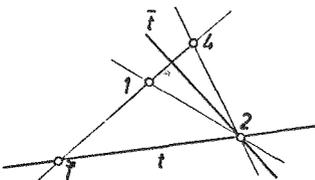
Von einem Kegelschnitt k einer π_{α} kennt man die beiden Punkte 1, 4, das Linienelement $(2(=3), t)$, wobei 1, 2, 4 ein Dreieck bilden und t keine Seite von diesem ist, und eine Tangente r , die durch keinen der gegebenen Punkte geht.

Die Lösung ist analog zu jener in der Anwendung 1a, nur ist die Gerade 23 durch die Tangente t zu ersetzen. Es sind zwei, eine oder keine Lösungen möglich.



Dual: Kegelschnitt aus zwei Tangenten $1^*, 4^*$, einem Linienelement $(2^*(=3^*), T)$ und einem Punkt R .

2b) Seien k und l zwei verschiedene Kegelschnitte eines Büschels 2. Art mit den Grundelementen $1, (2=3, t), 4$ und λ_k bzw. λ_l ihre Polarsysteme. Gesucht ist die Menge aller Punkte X mit $X\lambda_k = X\lambda_l$.



$2\lambda_k = 2\lambda_l = t$.
 \bar{t} sei die durch $H(21, 24; t, \bar{t})$ eindeutig bestimmte Gerade $\in \mathcal{O}_2$.
 $\bar{t}\lambda_k^* = \bar{t}\lambda_l^* = 14. t =: \bar{T}$ (wegen $\bar{t} \perp 2 \Rightarrow \bar{T} \perp t$;
 \bar{t} schneidet die Sehne 14 von k und l in dem zu \bar{T} harmonischen Punkt).

$2, \bar{T}$ sind die einzigen Punkte, für welche die λ_k - und die λ_l -Polaren übereinstimmen.

Bew.: (ind.) Angenommen es existiert $X \in \rho \setminus \{2, \bar{T}\}$ mit $X\lambda_k = X\lambda_l (=x)$.

Fall 1: $X \in x \Rightarrow X \in k \wedge X \in l$ und x ist Tangente an k und l in $X \Rightarrow X=2$, da k und l wegen Satz 2.1 und $k \neq l$ kein Linienelement außer $(2,t)$ gemeinsam haben: Widerspruch.

Fall 2: $X \notin x \Rightarrow X \notin k \wedge X \notin l$ (Insbesondere gilt $X \neq 2$ und $x \neq t$). Nach 2.4 bestimmen X, x eine harmonische Homologie σ_x mit $k\sigma_x = k \wedge l\sigma_x = l$. Wegen Satz 2.1 und $k \neq l$ haben k und l keinen Punkt außer $1, 2, 4$ gemeinsam $\Rightarrow k\sigma_x \cap l\sigma_x = k \cap l = \{1, 2, 3, 4\}$. Da k und l außer $(2,t)$ kein Linienelement gemeinsam haben $\Rightarrow 2\sigma_x = 2 \wedge t\sigma_x^* = t$. Daraus folgt nach den Gesetzen einer Homologie: $2 \in x \wedge X \in t$, da $X \neq 2$ und $x \neq t$ gilt.

Nur die folgenden beiden Fälle sind möglich:

(I) $1\sigma_x = 4$: dann gilt $X \in 14$, also $X = t.14 = \bar{t}$: Widerspruch.

(II) $1\sigma_x = 1$: wegen $X \neq 1 \Rightarrow 12 = x$. Nach 2.3 ist wegen $X \in t$ dann $1X$ Tangente an k und l in 1 und hat wegen $X \neq |2, T$ auch allgemeine Lage zu $1, (2,t), 4 \xrightarrow{2,4} k=1$: Widerspruch. ◆

SATZ 2.5 b: Ist g eine Gerade durch keinen Grundpunkt eines Büschels 2. Art, so bestimmen die beiden Schnittpunkte von g mit den beiden Seiten des Grunddreiecks durch den Grundberührungspunkt und die Schnittpunkte von g mit der dritten Seite des Grunddreiecks und der Grundtangente eine projektive Involution (Desarguesinvolution), der die Schnittpunkte jener Kegelschnitte des Büschels 2. Art angehören, für welche g Sehne ist; es gibt höchstens zwei g berührende Büschelkegelschnitte und deren Berührungspunkte mit g sind Fixpunkte der Desarguesinvolution auf g . Alle Kegelschnitte eines Büschels 2. Art besitzen genau zweimal Pol-Polare gemeinsam, nämlich das Grundlinienelement und das Paar bestehend aus dem Schnittpunkt der Grundtangente mit der den Grundberührungspunkt nicht enthaltenden Seite des Grunddreiecks und der zur Grundtangente harmonischen Geraden bezüglich den durch den Grundberührungspunkt gehenden Seiten des Grunddreiecks. Die dualen Aussagen gelten für Scharen 2. Art.

DEF. 2.5 c: Die Menge aller Kegelschnitte in π_{kl} durch zwei Linienelemente ("Grundlinienelemente"), wobei jeder Punkt mit genau einer Geraden inzidiert, heißt ein Büschel (eine Schar) 3. Art von Kegelschnitten.

Bemerkungen: (a) Da diese Begriffsbildung selbstdual ist, spricht man auch von einer "Büschelschar" ("Berührbüschel").

(b) Nach Satz 2.1 ist ein Kegelschnitt durch zwei Linienelemente und einen Punkt allgemeiner Lage eindeutig festgelegt. Sei a eine beliebige Gerade durch den Schnittpunkt st der beiden Tangenten mit $S, T \notin a$. Durch jeden Punkt von $\mathcal{K} \setminus \{st, a, ST\}$ wird genau ein Kegelschnitt des Büschels 3. Art festgelegt, der a als Sehne besitzt, da nie drei Tangenten eines Kegelschnitts kopunktal liegen. Damit enthält ein Berührbüschel mindestens $\frac{1}{2}(N+1-2) = \frac{1}{2}(N-1)$ Kegelschnitte (nach Satz 1.10 ist N in einer endlichen π_{ke} ungerade). In π_{ke} über gewissen Körpern existieren zusätzliche Kegelschnitte des Berührbüschels, welche a nicht zur Sehne haben.

Folgerungen:

1c) "Desarguesscher Involutionssatz für Büschel 3. Art": Auf jeder Geraden g , die keinen Grundpunkt enthält, schneiden jene Kegelschnitte eines Büschels 3. Art, für welche g Sehne ist, Punktepaare einer projektiven Involution aus, welche durch die Schnittpunkte von g mit den beiden Tangenten und den Schnittpunkt von g mit der Berührsehne als Fixpunkt bestimmt ist. Es gibt höchstens einen Kegelschnitt des Büschels 3. Art, der g berührt; der Berührungspunkt ist der zweite Fixpunkt der projektiven Involution, falls g nicht durch den Schnittpunkt der Grundtangente geht.

Bew.: Analog zu 1a, wobei die Geraden 14 bzw.

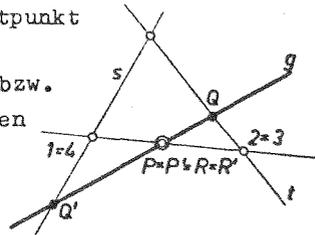
23 durch die Tangenten s bzw. t zu ersetzen sind. Beweisschritt (2) fällt weg. Geht g

nicht durch st , so gibt es einen Kegelschnitt des Büschels der g berührt; da

nach 2.1 der Berührungspunkt harmonisch zu

Q, Q' bezüglich $P=P'$ liegt, ist dieser der zweite Fixpunkt. Geht

dagegen g durch st , so sind st und $g.ST$ die Fixpunkte der Involution auf g .



Bemerkung: Auch die dualen Aussagen sind wahr.

Anwendungen:

(a) Von einem Kegelschnitt einer π_{ke} kennt man zwei Linienelemente ($S=:1, s$), ($T=:2, t$) mit $S \notin t \wedge T \notin s$ und eine Tangente r ,

die nicht durch S oder T geht. Die Lösung ist analog zu jener der Anwendung zu 1a, nur ist die Gerade 14 bzw. 23 durch die Tangente s bzw. t zu ersetzen. Da $12.r = 34.r$ gilt, ist dieser Punkt stets Fixpunkt der Desarguesinvolution und diese somit immer hyperbolisch; falls r nicht durch st geht, existiert genau ein Lösungskegelschnitt, falls r durch st geht, existiert kein Lösungskegelschnitt. Der Lösungskegelschnitt als Geradenkegelschnitt wird gemäß 2.1, Folg.7 festgelegt.

Dual: Kegelschnitt aus zwei Linienelementen und einem Punkt.

(b) Von einem Kegelschnitt einer α_{κ} kennt man drei nicht kollineare Punkte A, B, C und zwei Tangenten s, t, die durch keinen Angabepunkt gehen.

Existiert ein Lösungskegelschnitt k, so berührt k die beiden Tangenten s, t in Punkten S und T. Durch die

beiden Linienelemente (S, s) und (T, t) wird eine Büschelschar \mathcal{B} festgelegt, welche den Lösungskegelschnitt k enthält. \mathcal{B} bestimmt

auf der Geraden AB bzw. AC die Desarguesinvolution α bzw. β ; α ist festgelegt durch:

$A \mapsto B \wedge X := AB.s \mapsto X' := AB.t$, und β ist festgelegt durch:

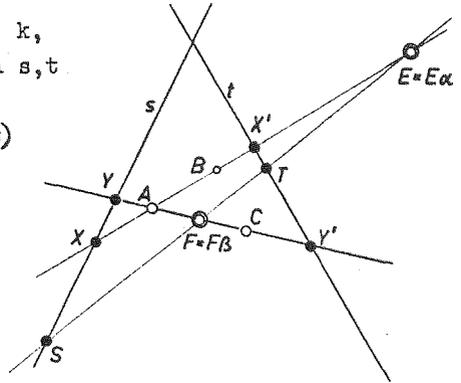
$A \mapsto C \wedge Y := AC.s \mapsto Y' := AC.t$. Die Verbindungsgerade ST trifft AB bzw. AC in einem Fixpunkt von α bzw. β .

Daher ist ST notwendig Verbindungsgerade eines Fixpunktes E von α und eines Fixpunktes F von β . Sind α und β hyperbolisch, so existieren solche Punkte E und F und dann gilt: $S = EF.s$ und $T = EF.t$.

Falls EF nicht durch st geht, bestimmen die beiden Linienelemente (S, s) und (T, t) und der Punkt A genau einen Kegelschnitt k, denn A liegt nicht auf $ST = EF$, und k paßt in die Angabe. k geht nämlich auch durch B: Das durch (S, s) und (T, t) festgelegte Berührbüschel \mathcal{B} bestimmt auf AB eine Desarguesinvolution $\bar{\alpha}$, welche durch

$E \mapsto E \wedge X \mapsto X'$ festgelegt ist; dies leistet auch $\alpha \Rightarrow \alpha = \bar{\alpha} \Rightarrow$

$A\bar{\alpha} = A\alpha = B \Rightarrow B \in k$; analog $C \in k$. Die Desarguesinvolution γ auf BC hat somit automatisch den Punkt BC.EF als Fixpunkt. Sind also zwei der projektiven Involutionen α, β, γ hyperbolisch, so auch die dritte.

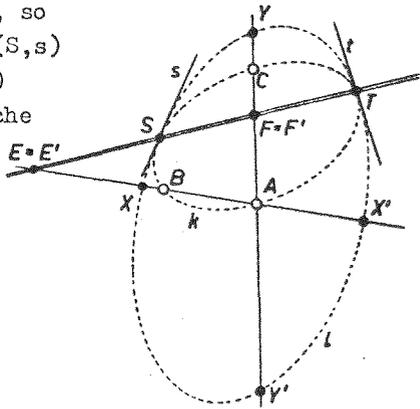


Die Aufgabe hat also höchstens vier Lösungen; genau vier dann, wenn α und β hyperbolisch sind und von den vier Verbindungsgeraden ihrer Fixpunkte keine durch den Schnittpunkt st geht. Sind zwei der Desarguesinvolutionsen α, β, γ elliptisch, so gibt es keine Lösung.

Bemerkung: Dual: Kegelschnitt aus drei Tangenten und zwei Punkten.

(c) Von einem Kegelschnitt in \mathcal{R}_{re} kennt man drei nicht kollineare Punkte A, B, C und einen doppelt berührenden Kegelschnitt l .

Existiert ein Lösungskegelschnitt k , so haben k und l zwei Linienelemente (S, s) und (T, t) gemeinsam. (S, s) und (T, t) legen eine Büschelschar \mathcal{B} fest, welche den Angabenkegelschnitt l und den Lösungskegelschnitt k enthält. Der weitere Lösungsweg ist analog zu jenem von (b), wobei X bzw. Y und X' bzw. Y' die Schnittpunkte von AB bzw. AC mit l bedeuten.

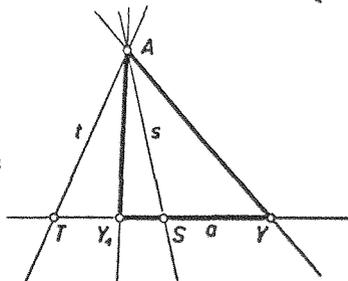


Diese Festlegung von α bzw. β ist nur möglich, falls auf AB bzw. AC Punkte von l liegen. S und T sind die Schnittpunkte von EF mit l ; es muß also EF eine Sehne von l sein. Die Aufgabe hat höchstens vier Lösungen.

Bemerkung: Dual: Kegelschnitt durch drei Tangenten und einen doppelt berührenden Kegelschnitt.

2c) Seien k und l zwei verschiedene Kegelschnitte eines Büschels 3. Art mit den Grundelementen (T, t) , (S, s) , (die Existenz zweier solcher Kegelschnitte ist für $N > 3$ gesichert); λ_u und λ_l seien ihre Polarsysteme. Gesucht ist die Menge aller Punkte X mit $X\lambda_u = X\lambda_l$.

$A := st$, $A\lambda_u = A\lambda_l = ST := a$ (nach 2.4).
 $\forall Y \in \mathcal{P}_a$ gilt: $Y\lambda_u = Y\lambda_l$ (für S und T trivial;
 für $Y \neq S, T$ gilt $Y \perp a \Rightarrow Y\lambda_u = Y\lambda_l \perp a$ und
 $Y\lambda_u$ bzw. $Y\lambda_l$ gehen durch den zu Y harmonischen Punkt Y_1 bezüglich $S, T \Rightarrow Y\lambda_u = Y\lambda_l = AY_1$). Die Punkte $A, Y \in \mathcal{P}_a \setminus \{S, T\}$ und Y_1 ($\neq Y$) bilden stets ein gemeinsames Poldreieck von k und l . k und l haben also $\frac{1}{2}(N+1-2)$ gemeinsame Poldreiecke.



Die Punkte der Menge $\{A\} \cup \mathcal{P}_a$ sind die einzigen, für welche die λ_k - und λ_l -Polare übereinstimmen.

Bew.: (ind.) Angenommen es existiert $X \in \mathcal{P} \setminus (\{A\} \cup \mathcal{P}_a)$ mit $X\lambda_k = X\lambda_l (=x)$.

Fall 1: $X \in k \Rightarrow X \in k \wedge X \in l \Rightarrow X = S \vee X = T$ (da $k \cap l = \{S, T\}$ wegen Satz 2.1 und $k \neq l$): Widerspruch.

Fall 2: $X \notin k \Rightarrow X \notin k \wedge X \notin l$. (Insbesondere gilt $X \neq S, T$ und x ist weder Tangente an k noch an l). Nach 2.4 bestimmen X, x eine harmonische Homologie σ_x mit $k\sigma_x = k \wedge l\sigma_x = l$. Nur die folgenden beiden Fälle sind möglich:

(I) σ_x läßt die Grundlinienelemente einzeln fest: $S\sigma_x = S, T\sigma_x = T, \dots$

Da S, T vom Kollineationszentrum X verschieden sind, folgt:

$S, T \mid X$ (Kollineationsachse) $\Rightarrow x = ST \Rightarrow x\lambda_k^* = x\lambda_l^* = X = s.t = A$:

Widerspruch.

(II) σ_x vertauscht die Grundlinienelemente: $S\sigma_x = T, T\sigma_x = S, \dots \Rightarrow$

$X \in ST = A$: Widerspruch. ◆

SATZ 2.5 c: Ist g eine Gerade durch keinen Grundpunkt eines Büschels \mathcal{B} . Art, so bestimmen die beiden Schnittpunkte von g mit den Grundtangente und der Schnittpunkt von g mit der Verbindungsgeraden der Grundpunkte als Fixpunkt eine projektive Involution (Desarguesinvolution), der die Schnittpunkte jener Kegelschnitte des Büschels \mathcal{B} . Art angehören, für welche g Sehne ist; es gibt höchstens einen g berührenden Büschelkegelschnitt und sein Berührungspunkt mit g ist der zweite Fixpunkt der Desarguesinvolution auf g . Alle Kegelschnitte eines Büschels \mathcal{B} . Art besitzen genau für den Schnittpunkt der Grundtangente und die Punkte der Verbindungsgeraden der Grundpunkte übereinstimmende Polare.

2.6. Oskulationsbüschel und Hyperoskulationsbüschel in klassischen projektiven Ebenen

Sei i.f. eine π_{k_l} vorausgesetzt.

DEF. 2.6 a: Haben zwei verschiedene Kegelschnitte k und l ein gemeinsames Linienelement (P, p) , so berühren sie einander im Punkt P (dual: in der Tangente p).

Bemerkung: Dieser Begriff ist symmetrisch und selbstdual.

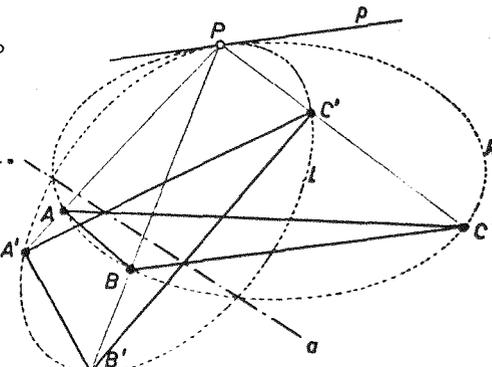
Folgerungen:

1) Berühren einander zwei verschiedene Kegelschnitt k und l in (P, p) , so existiert genau eine perspektive Kollineation mit dem Zentrum P , welche k in l überführt.

Bew.: (a) $\pi_{kl} \Rightarrow N \geq 3 \Rightarrow k$ enthält mindestens vier Punkte $\Rightarrow \exists A, B, C \in k \setminus \{P\}$ und ABC bilden ein Dreieck.

Gibt es eine perspektive Kollineation α mit Zentrum P und $k\alpha = l$, so ist PA ein Kollineationsstrahl und $A\alpha$ liegt notwendig auf PA und l .
Wegen $A \neq P \Rightarrow PA \neq p \Rightarrow$

$A\alpha =: A'$ ist der eindeutig bestimmte Schnittpunkt der Sehne PA mit l und A' ist von P verschieden. Ebenso sind B' und C' zu



konstruieren. Sicher gilt nicht $A=A' \wedge B=B' \wedge C=C'$, da k und l noch das Linienelement (P, p) gemeinsam haben und $k \neq l$ ist, i. f. sei $A \neq A'$. Die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind nach Konstruktion P -perspektiv, also existiert eine Desarguesachse a , welche durch die Punkte $AB, A'B' \wedge AC, A'C' \wedge BC, B'C'$ geht. Durch das Zentrum P , die Achse a und $A \mapsto A'$ ist die perspektive Kollineation α bereits eindeutig bestimmt und es gilt $B\alpha = B'$, $C\alpha = C'$ nach der Vervollständigung von α .

Die Kegelschnitte $k\alpha$ und l haben die Punkte A', B', C' und das Linienelement (P, p) gemeinsam, da $P\alpha = P$ und $p\alpha = p$ gilt $\Rightarrow k\alpha = l$. Damit ist die Existenz einer perspektiven Kollineation der gewünschten Art erwiesen.

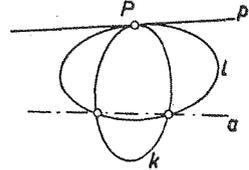
(b) Eindeutigkeit: Jede perspektive Kollineation mit Zentrum P und $k\alpha = l$ leistet notwendig $A \mapsto A'$ ($A \neq A'$ o. B. d. A), $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$; damit ist a eindeutig bestimmt. Durch Zentrum P , Achse a und $A \mapsto A'$ ist α bereits eindeutig festgelegt.



Bemerkungen: (a) Die duale Aussage lautet: Haben zwei verschiedene Kegelschnitte k und l ein gemeinsames Linienelement (P,p) , so existiert genau eine perspektive Kollineation mit der Achse p , welche k in l überführt (vgl. 1.4, Folg. 1, Bem.).

(b) Die unter Umständen existierenden Schnittpunkte von a mit k bleiben unter α fest; sie müssen also auch auf l liegen.

Die Achse a kann zu k folgende Lagen haben:

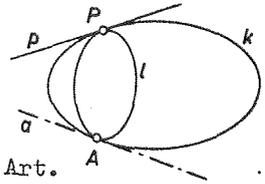


(1) a ist Sehne von $k \wedge P \nexists a$:

k und l haben dann ein Linienelement und zwei Punkte gemeinsam. Nach 2.5 b liegen k und l in einem Kegelschnittbüschel 2. Art.

(2) a ist Tangente von $k \wedge P \exists a$:

Der Berührungspunkt A von a mit k bleibt unter α fest, und daher haben k und l neben (P,p) auch das Linienelement (A,a) gemeinsam. k und l liegen in einem Kegelschnittbüschel 3. Art.



(3) a hat mit k keinen Punkt gemeinsam.

(4) a ist Sehne von $k \wedge P \exists a$.

(5) $a = p$.

In den beiden letzten Fällen ist α eine Elation.

DEF. 2.6 b: Berühren einander zwei verschiedene Kegelschnitte k und l in P und ist die eindeutig bestimmte perspektive Kollineation mit dem Zentrum P , welche k in l überführt, eine Elation, so oskulieren einander k und l im Oskulationspunkt P . Ist speziell die Achse dieser Elation die Tangente p in P , so hyperoskulieren einander k und l im Hyperoskulationspunkt P .

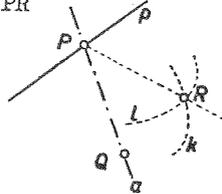
Bemerkung: Ist in PAE der Kegelschnitt l ein Kreis und oskulieren k und l einander im Sinne von Def. 2.6 b, so heißt l "Krümmungskreis von k ". Speziell bei Hyperoskulation heißt der zugehörige Berührungspunkt "Scheitel" und l "Scheitelkrümmungskreis" (Die Existenz von Krümmungskreis und Scheitel sowie die Übereinstimmung mit den gleichnamigen differentialgeometrischen Begriffen ist noch offen).

2) (1) Oskulieren einander zwei verschiedene Kegelschnitte k und l in P , ohne einander in P zu hyperoskulieren, so haben k und l noch genau einen gemeinsamen Punkt $Q (\neq P)$, ohne einander in Q zu berühren.

Bew.: k oskuliert aber hyperoskuliert nicht l in $P \Rightarrow \exists^*$

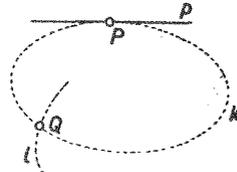
Elation α mit $k\alpha=l$, Zentrum P und Achse a mit $a \neq p$ (p ...Tangente in P an k und l) $\Rightarrow a$ hat mit k noch genau einen Punkt $Q(+P)$ gemeinsam. $Q \in a \Rightarrow Q \in l$. Q ist der einzige weitere gemeinsame Punkt:

(ind.) Angenommen es existiert $R \in k \cap l \wedge R \neq P, Q$. Der Punkt $R\alpha$ liegt im Schnittpunkt des Kollineationsstrahles PR mit l . Wegen $PR \cap l = \{P, R\} \wedge R \neq P \Rightarrow R\alpha = R$. Da auf a nur die Punkte P und Q von $k \cap l$ liegen $\Rightarrow R \notin a$; R ist also ein Fixpunkt der Elation α , der nicht auf der Achse a liegt $\Rightarrow \alpha = \iota \Rightarrow k=l$: Widerspruch.



Ist in $Q=Q\alpha$ die Tangente an k gleich der Tangente an l , so ist diese eine Fixgerade von α^* verschieden a , die nicht durch das Zentrum P geht $\stackrel{1.4}{\Rightarrow} \alpha^* = \iota \Rightarrow k=l$: Widerspruch. ◆

(II) (Umkehrung) Haben zwei einander in P berührende verschiedene Kegelschnitte genau einen gemeinsamen Punkt $Q(+P)$, ohne einander in Q zu berühren, so oskulieren k und l einander in P , ohne einander in P zu hyperoskulieren.



Bew.: Da k und l nach Voraussetzung das Linienelement (P, p) gemeinsam haben, gibt es nach Folg.1 genau eine perspektive Kollineation $\alpha(+\iota)$ mit $k\alpha=l$ und

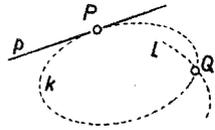
Zentrum P . Der Punkt $Q \in k \cap l$ ist notwendig Fixpunkt von α . Da nach 1.4 eine perspektive Kollineation $\alpha(+\iota)$ genau das Zentrum und die Punktreihe auf a zur Fixpunktmenge hat, geht die Achse a von α durch Q . Für a sind folgende Lagen zu k denkbar:

a ist Sehne von k ($+PQ$): Der Restschnittpunkt $R(+|Q, P)$ von a mit k ist dann im Widerspruch zur Voraussetzung ein gemeinsamer Punkt von k und l .

a ist Tangente von k in Q : Da α den Kegelschnitt k linien-elementweise transformiert, ist a auch Tangente an l in Q : Widerspruch zur Voraussetzung.

Es bleibt also nur $a=PQ$ übrig $\Rightarrow \alpha$ ist Elation mit $a \neq p \Rightarrow k$ oskuliert l in P ohne l dort zu hyperoskulieren. ◆

(III) Hyperoskulieren einander zwei verschiedene Kegelschnitte k und l in P , so haben k und l abgesehen von P keinen gemeinsamen Punkt.



Bew.: (ind.) Existiert ein Punkt $Q \in k \cap l$ mit $Q \neq P$, so ist für die Elation $\alpha \in \text{PGL}(P, p)$ mit $k\alpha = l$ notwendig Q ein Fixpunkt $\Rightarrow \alpha = \text{id} \Rightarrow k = l$: Widerspruch. ◆

Bemerkung: Es gilt jedoch nicht umgekehrt, daß aus der Berührung der beiden Kegelschnitte k, l (\neq) in (P, p) und der Nichtexistenz eines weiteren gemeinsamen Punktes die Hyperoskulation von k und l in P folgt (Man betrachte den Fall, daß a an k vorbeigeht). Wir werden jedoch später sehen, daß in klassischen projektiven Ebenen über gewissen Körpern auch die Umkehrung gilt.

3) Wir definieren nun dual zu Def.2.6 b:

Berühren einander zwei verschiedene Kegelschnitte k und l in p und ist die eindeutig bestimmte perspektive Kollineation mit der Achse p , welche k in l überführt, eine Elation, so oskulieren k und l einander in der Oskulationstangente p . Ist speziell das Zentrum dieser Elation der Berührungspunkt P von p , so hyperoskulieren einander k und l in der Hyperoskulationstangente p . Nun gilt:

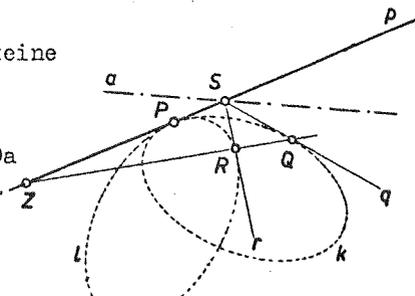
- (a) Ist p eine Hyperoskulationstangente, so ist der zugehörige Berührungspunkt ein Hyperoskulationspunkt und umgekehrt.
- (b) Ist p eine Oskulationstangente, so ist der zugehörige Berührungspunkt ein Oskulationspunkt und umgekehrt.

Kurz: Oskulation und Hyperoskulation sind selbstduale Begriffe.

Bew.: Die Umkehrungen der beiden Aussagen ergeben sich durch Dualisieren, es genügt daher eine Richtung zu beweisen.

(a) p ist Hyperoskulationstangente: Aus der zu Def. 2.6 b dualen Definition folgt, daß eine Elation α mit Achse p und Zentrum P existiert mit $k\alpha = l$. Nach Def.2.6 b bedeutet dies, daß k und l einander in P hyperoskulieren.

(b) p ist Oskulationstangente und keine Hyperoskulationstangente $\xrightarrow{\text{dual}}$ es existiert eine Elation β mit $k\beta = l$, ($k \neq l$), Achse p und Zentrum $Z (\neq P)$. Da k und l das Linienelement (P, p) gemeinsam haben, existiert nach Folgerung 1 genau eine perspektive



Kollineation α mit dem Zentrum P, die k in l überführt. Wir haben zu zeigen, daß α eine Elation ist. Die Achse a von α ist sicher verschieden von p, denn p ist keine Hyperoskulationstangente. $a \neq p \Rightarrow \exists^* S := ap$; es ist $S=P$ nachzuweisen.

(ind.) $S \neq P$: Da S ein Punkt der Tangente p an k bzw. l ist, existiert nach 2.1 noch genau eine zweite Tangente q ($\neq p$) an k bzw. r ($\neq p$) an l mit dem Berührungspunkt Q bzw. R. Die Elation β leistet $q \mapsto r$, denn es gilt $k\beta = l$ und q und r schneiden einander auf der Achse p von $\beta \Rightarrow$ die Berührungspunkte Q und R sind in β zugeordnet. Daraus folgt $Q \neq R$, da sonst β einen Fixpunkt nicht auf der Achse p hätte $\stackrel{1,4}{\Rightarrow} \beta = \iota \Rightarrow k=l$: Widerspruch.
 $Q\beta = R \Rightarrow Q, R, Z$ kollinear (*). α leistet $q \mapsto r$ (wie bei β zu begründen) und damit $Q\alpha = R \Rightarrow Q, R, P$ kollinear (*). $(*) \wedge (*) \Rightarrow Q, R | l \text{ ZP} = p$: Widerspruch. ◆

Bemerkung: Nun können auch die Aussagen der Folg.2 dualisiert werden:

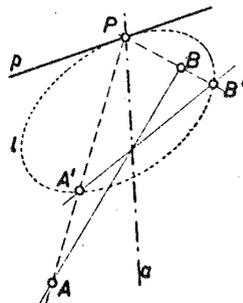
- (I) Haben k und l (+) die Oskulationstangente p gemeinsam (ohne daß p Hyperoskulationstangente ist), so haben k und l noch genau eine Tangente q ($\neq p$) gemeinsam.
- Zusammenfassend: Oskulierende (nicht hyperoskulierende Kegelschnitte) haben neben Oskulationspunkt und Oskulationstangente noch genau einen Punkt mit verschiedenen Tangenten und genau eine Tangente mit verschiedenen Berührungspunkten gemeinsam. Ebenso ist (II) zu dualisieren.
- (III) Hyperoskulierende Kegelschnitte haben neben dem Hyperoskulationspunkt und der Hyperoskulationstangente keine weiteren gemeinsamen Punkte und Tangenten.

Anwendungen:

Sei l ein Kegelschnitt und (P,p) ein Linienelement von l. Man konstruiere einen Kegelschnitt k, der l in (P,p) oskuliert. Statt dieser Forderung sagen wir kurz: (P,p,l) ist ein "Linien-element zweiter Ordnung von k". Verlangen wir sogar Hyperoskulation, so nennen wir (P,p,l) ein "Linien-element dritter Ordnung von k".

(a) Ein Kegelschnitt k ist eindeutig festgelegt durch ein Linienelement zweiter Ordnung (P,p,l) und zwei Punkte A, B mit A, B, P nicht kollinear, A, B | $\not\perp$ p und nicht A und B Punkte von l.

Existiert ein Lösungskegelschnitt k, so existiert gemäß Def.2.6 b genau eine Elation α mit Zentrum P und $k\alpha = l$. Der Punkt $A \in k$ geht unter α über in den Restschnittpunkt A' des Kollineationsstrahles AP mit l; ebenso $B\alpha = B'$. Die Achse a von α geht notwendig durch P



und durch den Schnittpunkt $AB.A'B'$. Die durch $P, a, A \rightarrow A'$ ($A \neq A'$ o.B.d.A.) festgelegte Elation α ist also die einzig mögliche mit den gewünschten Eigenschaften. Der Kegelschnitt $l\alpha^{-1}$ paßt in die Angabe und ist die einzige Lösung.

Dual: Ein Kegelschnitt k ist eindeutig festgelegt durch ein Linienelement zweiter Ordnung (P, p, l) und zwei Tangenten a, b mit a, b, p nicht kopunktal, $a, b \not\parallel P$ und nicht a und b Tangenten von l .

Durch analoge Überlegungen wird in den Übungen gezeigt:
Ein Kegelschnitt k ist eindeutig festgelegt durch
(b) ein Linienelement 2.O. und ein Linienelement allgemeiner Lage.
(c) ein Linienelement 3.O. und einen Punkt (bzw. eine Tangente) allgemeiner Lage.

SATZ 2.6 a: Haben zwei verschiedene Kegelschnitte k, l ein Linien-
element (P, p) gemeinsam, so existiert genau eine
perspektive Kollineation mit Zentrum P (mit Achse p), die k in l
überführt. Oskulation und Hyperoskulation sind selbstduale
Begriffe. Oskulierende, nicht hyperoskulierende Kegelschnitte
sind dadurch gekennzeichnet, daß sie außer dem gemeinsamen
Oskulationselement noch genau einen gemeinsamen Punkt mit ver-
schiedenen Tangenten bzw. genau eine gemeinsame Tangente mit
verschiedenen Berührungspunkten besitzen. Hyperoskulierende Kegel-
schnitte besitzen keinen gemeinsamen Restpunkt und keine ge-
meinsame Resttangente.

DEF. 2.6 c: Die Menge aller Kegelschnitte durch ein Linienelement
zweiter Ordnung, welche

einen Punkt nicht auf der
Tangente des Oskulations-
elementes gemeinsam haben,
heißt ein Büschel 4.Art
(Oskulationsbüschel)

eine Tangente nicht durch
den Punkt des Oskulations-
elementes gemeinsam haben,
heißt eine Schar 4.Art
(Oskulationssschar)

von Kegelschnitten.

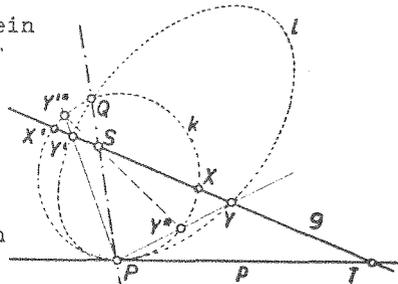
Die Menge aller Kegelschnitte, die ein Linienelement dritter
Ordnung gemeinsam haben, heißt ein Büschel 5. Art (Hyper-
oskulationsbüschel) von Kegelschnitten.

Bemerkungen: (a) Da der Begriff Hyperoskulation selbstdual ist, gilt dies auch für den Begriff Linielement dritter Ordnung und wegen Folg. 2, (III) und Folg. 3, Bem. auch für den Begriff Hyperoskulationsbüschel (man sagt daher auch "Hyperoskulationsbüschelschar").

(b) Da nach Anwendung (a) ein Kegelschnitt durch ein Linielement 2. O. und zwei Punkte eindeutig festgelegt ist, kann ein Kegelschnitt eines Büschels 4. Art durch die Angabe eines weiteren Punktes bestimmt werden. Ist g ($\neq p$) eine beliebige Gerade durch den Oskulationspunkt P , die nicht durch den weiteren Grundpunkt Q geht, so existiert zu jedem Punkt aus $\mathcal{P}_g \setminus \{P\}$ genau ein Büschelkegelschnitt, und umgekehrt trifft jeder Büschelkegelschnitt $\mathcal{P}_g \setminus \{P\}$ in genau einem Punkt. Ein Büschel 4. Art enthält demnach genau N Kegelschnitte. Nach Anwendung (c) stimmt die Anzahl der Elemente eines Büschels 5. Art mit der Zahl der Punkte auf $\mathcal{P}_g \setminus \{P\}$ überein, ist also ebenfalls N .

4) "Desarguesscher Involutionssatz für Büschel 4. und 5. Art": Auf jeder Geraden g , die keinen Grundpunkt enthält, schneiden jene Kegelschnitte eines Büschels 4. oder 5. Art, für welche g Sehne ist, Punktepaare einer projektiven Involution aus, der im Falle des Oskulationsbüschels die Schnittpunkte von g mit der Oskulationstangente und mit der gemeinsamen Sehne bzw. im Falle des Hyperoskulationsbüschels der Schnittpunkt von g mit der Hyperoskulationstangente als Fixpunkt angehören. Gibt es g berührende Büschelkegelschnitte, so sind die Berührungspunkte genau jene Fixpunkte dieser projektiven Involution, die im Falle des Hyperoskulationsbüschels nicht auf der Hyperoskulationstangente liegen.

Bew.: a) Ein Büschel 4. Art ist durch ein Linielement 2. Ordnung (P, p) und einen Punkt Q festgelegt. Sei g eine Sehne des Büschelkegelschnitts k mit den Schnittpunkten X, X' . Sei l ein weiterer Büschelkegelschnitt, der g zur Sehne hat, mit den Schnittpunkten Y, Y' . Wir setzen $g, PQ =: S$, $g, p =: T$.



Gemäß Def. 2.6b gilt $l = k\alpha$, wobei α eine Elation mit dem Zentrum P und der Achse PQ ist. $Y\alpha$ bzw. $Y'\alpha$ ist der Restschnittpunkt Y^* bzw. Y'^* von YP bzw. $Y'P$ mit k , und $Y^*Y'^*$ trifft YY' im Punkt S auf der Achse PQ der Elation α .

Da g durch keinen Grundpunkt geht und nie drei Punkte eines Kegelschnitts kollinear sind, gilt $S \notin k$. Der Punkt S ist daher Involutionzentrum einer projektiven Involution $B: k \rightarrow k$ und B

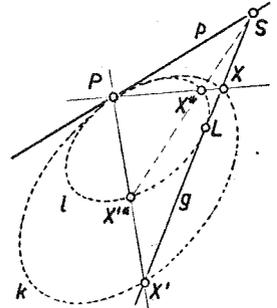
leistet: $X \mapsto X'$, $Q \mapsto P$, $Y^* \mapsto Y'^*$. Durch Projektion der Involution β aus P auf g erhält man eine Involution $\tilde{\beta}: \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_g$, welche durch $X \mapsto X'$, $S \mapsto T$ bestimmt ist und $Y \mapsto Y'$ leistet. Damit ist die Behauptung gezeigt, wenn man k festhält und l alle Büschelkegelschnitte durchlaufen läßt, welche g zur Sehne haben.

Daß der Berührungspunkt eines g berührenden Büschelkegelschnitts ein Fixpunkt von $\tilde{\beta}$ ist, kann ebenso wie in 2.5, Folg. 1a gezeigt werden; man bezeichne dabei $P=:3$, $Q=:4$. Jeder Fixpunkt, der im Falle der Hyperoskulation nicht auf p liegt, führt auf einen g berührenden Büschelkegelschnitt, wie analog zu 2.5, Folg. 1a folgt.

b) Für Büschel 5. Art beweist man das Auftreten einer Desarguesinvolution wie oben, nur gilt jetzt $S=T=S\tilde{\beta}$.

Sei l ein Kegelschnitt des Büschels 5. Art, der g in L berührt. Die Desarguesinvolution $\tilde{\beta}: \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_g$ ist durch $X \mapsto X'$ und $S \mapsto S$ eindeutig festgelegt. Wir projizieren $\tilde{\beta}$ aus P auf l und erhalten eine projektive Involution $\beta: l \rightarrow l$ mit $X^* \xrightarrow{\beta} X'^* \wedge P \xrightarrow{\beta} P$.

Das Involutionszentrum von β ist der Punkt S : die Gerade $X^*X'^*$ trifft p nämlich in S , denn l entsteht durch eine Elation α aus k , welche P zum Zentrum und p zur Achse hat. Der zweite Fixpunkt von β neben P ist der Berührungspunkt der aus S an l legbaren Tangente; dies ist aber nach Voraussetzung g und g berührt l in L , also gilt $L\beta=L$. Durch Rückprojektion aus P auf \mathcal{P}_g folgt daraus $L\tilde{\beta}=L$.

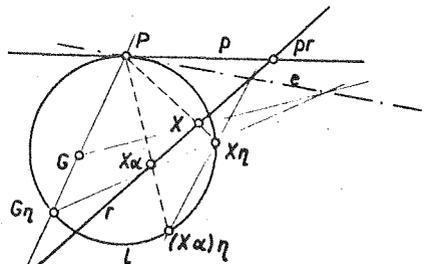


Bemerkungen: (a) L ist übrigens der zu X, X' bezüglich S harmonische Punkt, denn in einer hyperbolischen projektiven Involution liegen die Fixpunkte zu den Paaren zugeordneter Punkte harmonisch (vgl. 1.10, Folg. 8, (III) und 1.10, Folg. 6).

(b) Folgerung 4 kann dualisiert werden.

Anwendung:

Von einem Kegelschnitt einer π_{ke} kennt man ein Linienelement 2.0. (P, p, l) , einen Punkt G und eine Tangente r . Gibt es einen Lösungskegelschnitt k , so gehört er dem durch (P, p, l) und G festgelegten Oskulationsbüschel \mathcal{B} an. \mathcal{B} bestimmt eine Desarguesinvolution $\alpha: \mathcal{P}_r \rightarrow \mathcal{P}_r$, und der Berührungspunkt von k mit r ist notwendig Fixpunkt von α .



In der Desarguesinvolutions α sind zugeordnet $p, r \mapsto PG, r$. Ein weiteres Paar von in α zugeordneten Punkten findet man so: Jeder Punkt X auf r bestimmt zusammen mit G und (P, p, l) genau einen Kegelschnitt \bar{l} (nach Folg. 3, Anwendung a; \bar{l} erhält man aus l durch eine gewisse Elation η , deren Achse e durch P geht). Neben X hat \bar{l} mit r den Punkt $X\alpha$ als Restschnitt. Ist α elliptisch, so gibt es keinen Lösungskegelschnitt k . Ist α hyperbolisch, so gibt es stets zwei Lösungen: Durch einen Fixpunkt E von α , den Punkt G und das Linienelement 2.O. (P, p, l) ist genau ein Kegelschnitt k bestimmt, und k berührt auch r , weil sonst der Restschnittpunkt von k mit r dem Punkt E in α zugeordnet ist, was $E=E\alpha$ widerspricht. Im Gegensatz zu den Büscheln 1. und 2. Art, bei denen Fixpunkte von α auch Diagonalecken der Grundelementfigur sein können, führt für Oskulationsbüschel jeder Fixpunkt von α zu einem r berührenden Büschelkegelschnitt.

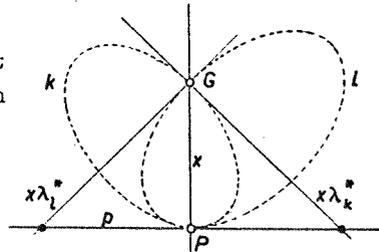
5) (a) Seien k und l zwei verschiedene Kegelschnitte eines Büschels 4. Art, das durch das Linienelement 2.O. (P, p) und den Punkt G festgelegt ist, und λ_k bzw. λ_l ihre Polarsysteme. Gesucht ist die Menge aller Punkte X mit $X\lambda_k = X\lambda_l$.

P ist der einzige Punkt mit $P\lambda_k = P\lambda_l$.

Bew.: (ind.) Angenommen es existiert $X \in \mathcal{P} \setminus \{P\}$ mit $X\lambda_k = X\lambda_l$ ($=: x$).

Fall 1: $X \in x \Rightarrow X \in k \wedge X \in l$ und x ist in X Tangente an k und $l \Rightarrow X=P$ (wegen Satz 2.6a und Folg. 3, Bem. (b) und $k \neq l$): Widerspruch.

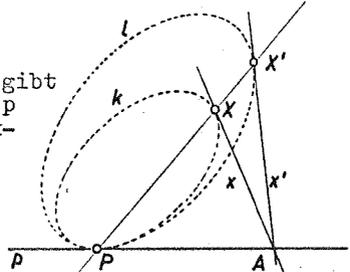
Fall 2: $X \notin x \Rightarrow X \notin k \wedge X \notin l$ (Insbesondere $X \neq P$ und x ist weder Tangente an k noch an l). Nach 2.4 bestimmen X, x eine harmonische Homologie σ_x mit $k\sigma_x = k \wedge l\sigma_x = l$. Da k und l genau das Linienelement (P, p) und den Restschnittpunkt G besitzen $\Rightarrow P\sigma_x = P \wedge p\sigma_x^* = p$, $G\sigma_x = G$. Da p unter σ_x^* fest bleibt und p von der Achse x von σ_x verschieden ist, muß p Kollineationsstrahl sein. Da P vom Kollineationszentrum X verschieden ist, muß P auf der Achse x von σ_x liegen und ebenso der Fixpunkt $G \Rightarrow x = PG$. Da k und l in G



verschiedene Tangenten haben, gilt aber $x\lambda_k^* + x\lambda_l^*$: Widerspruch. ◆

(b) Seien k und l zwei verschiedene Kegelschnitte eines Büschels 5. Art, das durch das Linienelement 3.0. (P, p) festgelegt ist und λ_k bzw. λ_l ihre Polarsysteme.

Für die Punkte $A \in p$, gilt $A\lambda_k = A\lambda_l$. Es gibt nämlich genau eine Elation α mit Achse p und Zentrum P mit $k\alpha = l$. Aus dem α -Fixpunkt $A(\neq P$; für $A=P$ ist die Behauptung trivial) gibt es an k bzw. an l eine von P verschiedene Tangente x bzw. x' und es gilt $x\alpha^* = x'$. Für die Berührungspunkte X bzw. X' von x mit k bzw. von x' mit l gilt: $X\alpha = X'$. Die λ_k -Polare von A ist daher PX , die λ_l -Polare ist PX' und es gilt $PX = PX'$, denn X, X' sind in α zugeordnet.



Die Punkte der Menge β_p sind die einzigen, für welche die λ_k - und λ_l -Polaren übereinstimmen.

Bew.: (ind.) Angenommen es existiert $X \in \beta_p \setminus \beta_p$ mit $X\lambda_k = X\lambda_l (= x)$.

Fall 1: $X \in x \Rightarrow X \in k \wedge X \in l \Rightarrow X = P$ (da $k \cap l = \{P\}$): Widerspruch.

Fall 2: $X \notin x \Rightarrow X \notin k \wedge X \notin l (\Rightarrow X \neq P)$ und x ist keine Tangente an k oder $l (\Rightarrow x \neq p)$. Die harmonische Homologie σ_x leistet notwendig: $P\sigma_x = P \wedge p\sigma_x^* = p$, da $k \cap l = \{P\}$ und $k^* \cap l^* = p$ gilt. Wegen $p \neq x$ ist daher p Kollineationsstrahl von σ_x , also liegt das Zentrum X auf p : Widerspruch. ◆

SATE 2.6 b: Ist g eine Gerade durch keinen Grundpunkt eines Büschels 4. oder 5. Art, so gehören die Schnittpunkte von g mit jenen Kegelschnitten des Büschels, welche g als Sehne besitzen, einer projektiven Involution an. Gibt es g berührende Büschelkegelschnitte, so sind die Berührungspunkte Fixpunkte dieser Desarguesinvolution. Bei einem Büschel 4. Art ist der Schnittpunkt von g mit der gemeinsamen Sehne dem Schnittpunkt mit der Oskulationstangente zugeordnet, beim Hyperoskulationsbüschel ist der Schnittpunkt von g mit der Hyperoskulationstangente Fixpunkt der Desarguesinvolution. Alle Kegelschnitte eines Büschels 4. Art besitzen genau einmal Pol-Polare gemeinsam, und zwar besteht dieses Paar aus Oskulationspunkt und -tangente; für alle Kegelschnitte eines Büschels

5. Art haben genau die Punkte der Reihe auf der Hyperoskulationstangente übereinstimmende Polaren.

2.7. Fixelementfiguren projektiver Kollineationen in Pappusebenen

Wir setzen i. f. eine Pappusebene voraus und $\alpha \in \text{PGL}(\pi_{\text{PP}})$.

DEF. 2.7: $F \in \mathcal{P}$ heißt Fixpunkt von α , wenn gilt $F\alpha = F$.

$f \in \mathcal{L}$ heißt Fixgerade von α , wenn gilt $f\alpha^* = f$.

$\pi \in \mathcal{E}$ heißt Fixpunktgerade von α , wenn gilt $\alpha|_{\pi} = \iota$

(α ist dann perspektiv). π heißt Fixpunktebene (Fixgeraden-ebene), wenn gilt $\alpha = \iota$.

Wir wollen die Fixelementfiguren von α bestimmen.

Folgerungen:

1) Die Fixelementfigur erfüllt i_1, i_2 und non e ("Negation des Existenzaxioms"), wenn $\alpha \neq \iota$ gilt.

Bew.: $i_1: F_1 \neq F_2 \wedge F_j \alpha = F_j \ (j=1,2) \Rightarrow \exists^* f := F_1 F_2$ und f ist Fixgerade wegen: $f\alpha^* = F_1 \alpha F_2 \alpha = F_1 F_2 = f \Rightarrow$ Die Verbindungsgerade von zwei verschiedenen Fixpunkten ist eine Fixgerade.

$i_2: f_1 \neq f_2 \wedge f_j \alpha^* = f_j \ (j=1,2) \Rightarrow \exists^* F := f_1 f_2$ und F ist Fixpunkt wegen $F\alpha = f_1 \alpha f_2 \alpha^* = f_1 f_2 = F \Rightarrow$ Der Schnittpunkt von zwei verschiedenen Fixgeraden ist ein Fixpunkt.

non e: Es gibt kein Viereck von Fixpunkten; nach Satz 1.9 würde sonst $\alpha = \iota$ gelten. ◆

Bemerkungen: (a) Die Fixpunktfigur \mathcal{P} und die Fixgeradenfigur \mathcal{L}^* wurde für perspektive Kollineationen bereits in 1.4 angegeben. Nach 1.9, Folg. 6 besitzt eine projektive nicht perspektive Autokollineation einer PP-Ebene entweder drei nicht kollineare Fixpunkte oder zwei verschiedene Fixpunkte oder einen Fixpunkt oder keinen Fixpunkt, und es sind wegen des ES nie drei Fixpunkte kollinear bzw. drei Fixgeraden kopunktal.

(b) In jeder projektiven nicht perspektiven Kollineation existiert ein Nichtfixpunkt, durch den keine Fixgerade geht. α besitzt nämlich nach (a) höchstens drei Fixpunkte, und da nie drei Fixgeraden kopunktal sind und der Schnittpunkt von je zwei Fixgeraden ein Fixpunkt ist, auch höchstens drei Fixgeraden, zu denen die Verbindungsgeraden von je zwei verschiedenen Fixpunkten gehören.

2) Konstruktion der Fixpunkte:

In π_{pp} kann die Bestimmung der Fixpunkte einer projektiven nicht perspektiven Kollineation α zurückgeführt werden auf die Bestimmung der Restschnittpunkte von zwei verschiedenen Punktkegelschnitten mit einem gemeinsamen Punkt A' , die einander in A' nicht berühren.

Bew.: Es sei A ein Punkt mit

(1) $A = A\alpha =: A'$,

(2) durch A geht keine Fixgerade: Nach Bemerkung (b) existiert ein solcher Punkt, da α nicht perspektiv ist.

$A \neq A' \Rightarrow A\alpha \neq A'\alpha (=: A'')$.

A, A', A'' bilden ein Dreieck:

(ind.) $A'' \in AA' \Rightarrow (AA')\alpha = A\alpha = A' = A''$, d.h. AA' ist im Widerspruch zu (2) fix.

Die Projektivität $\alpha^*|_{\mathcal{O}_A} =: \alpha: \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}_{A'}$

ist nicht perspektiv wegen

$(AA')\alpha = A' \neq A'' (=AA')$.

α erzeugt also einen Punktkegelschnitt k , der durch A und A' geht und in A' die Gerade $A'A''$ berührt.

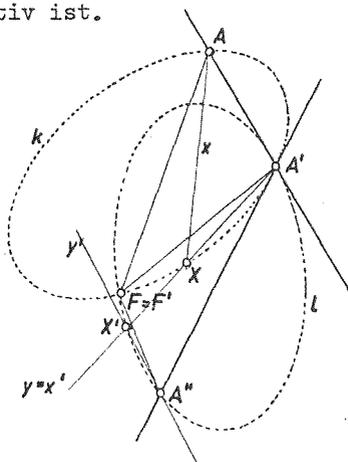
Die Projektivität $\alpha^*|_{\mathcal{O}_{A'}} =: \beta: \mathcal{O}_{A'} \rightarrow \mathcal{O}_{A''}$ ist nicht perspektiv wegen

$(A'A)\beta = A'' \neq A' (=A'A)$. β erzeugt also einen Punktkegelschnitt l , der durch A' und A'' geht und in A' die Gerade AA' berührt.

Wir haben zu zeigen, daß jeder von A' verschiedene Punkt von $k \cap l$ ein Fixpunkt von α ist, und daß umgekehrt jeder Fixpunkt von α zu $k \cap l \setminus \{A'\}$ gehört.

(a) VS: $F \in k \cap l \wedge F \neq A'$. Beh.: $F\alpha = F$.

Wir wollen zuerst für einen beliebigen Punkt $X \in k \setminus \{A, A'\}$ den Bildpunkt $X\alpha$ konstruieren. $AX =: x, A'X =: y; X = xy \Rightarrow X' =: X\alpha = x\alpha^*y\alpha^* =: x'y'$. Da $\alpha^*|_{\mathcal{O}_A} = \alpha$ den Punktkegelschnitt k erzeugt und $X \in k$ gilt, folgt $x' = XA' = y$. $y \in \mathcal{O}_{A'} \Rightarrow y\alpha^* = y\beta = y'$. Da β den Punktkegelschnitt l erzeugt, treffen einander y und y' auf l , und zwar im Restschnittpunkt von y mit $l \Rightarrow X' = x'y' = yy' \in l$.



$\forall X \in k \setminus \{A, A'\}$ folgt also: $X\alpha \in l$ und mit $A\alpha, A'\alpha \in l$ hat man insgesamt: $k\alpha = l$. Außerdem haben wir gefunden: $\forall X \in k \setminus \{A, A'\}$ sind X, X', A' kollinear.

Diese Konstruktionsvorschrift liefert speziell für $F \in k \cap l \setminus \{A'\}$ die Behauptung von (a).

(b) VS: $F\alpha = F$. Beh.: $F \in k \cap l \wedge F \neq A'$.

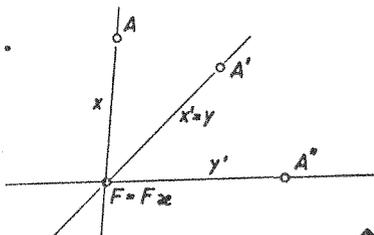
Wegen $A \neq A\alpha$ und $A' \neq A'\alpha$ gilt $F \neq |A, A'$.

$$x := AF \Rightarrow x\alpha^* = A\alpha F\alpha = A'F =: y \Rightarrow$$

$$x\alpha = x\alpha^* = y \Rightarrow F \in k.$$

$$y := A'F \Rightarrow y\alpha^* = A'\alpha F\alpha = A''F =: y' \Rightarrow$$

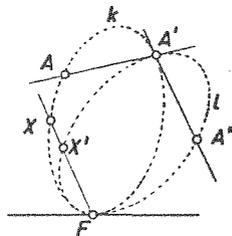
$$y\beta = y\alpha^* = y' \Rightarrow F \in l.$$



Bemerkungen: (a) Wir haben mitbewiesen: Ist A ein beliebiger Nichtfixpunkt, durch den keine Fixgerade geht, so enthält der durch $\alpha^*|_{\mathcal{O}_A}$ erzeugte Kegelschnitt k alle Fixpunkte von α und die Menge der Fixpunkte ist $k \cap k\alpha \setminus \{A\alpha\}$.

(b) Ist F ein Fixpunkt, f eine Fixgerade mit $F \in f$, wobei auf f kein von F verschiedener Fixpunkt liegt, so gilt: k und l haben das Linienelement (F, f) gemeinsam; durch F gehen somit nie zwei solche Fixgeraden, daß F auf jeder der einzigen Fixpunkt ist.

Bew.: (ind.) f ist Sehne von k \Rightarrow auf f liegt ein Punkt $X \in k$ mit $X \neq F$; es gilt $X \neq A$, denn FA ist unter α^* nicht fix. Da $f\alpha^* = f$ gilt, liegt $X\alpha$ auf f und auf l und ist demnach der Restschnittpunkt von l und f. Es gilt also: $X, X\alpha, F$ kollinear; andererseits sind nach obigem Beweis $X, X\alpha, A'$ kollinear $\Rightarrow X\alpha = XF, XA' \Rightarrow X\alpha = X$: Widerspruch zur Voraussetzung, daß F der einzige Fixpunkt auf f ist. Damit ist gezeigt, daß (F, f) ein Linienelement von k ist. Wegen $F = F\alpha$ gilt $F \in k \cap l$; da α den Punktkegelschnitt k linienelementweise in $l = k\alpha$ überführt, ist $f = f\alpha^*$ auch Tangente an l.



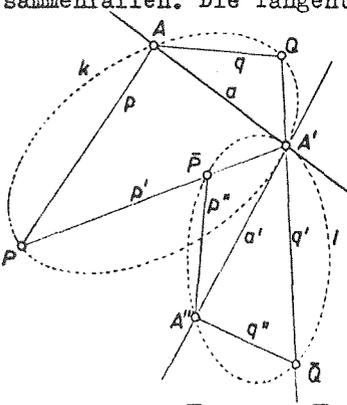
(c) Die Konstruktion der Fixpunkte kann dualisiert werden und man erhält eine Konstruktion für die Fixgeraden von α^* : Man wählt $a \neq a\alpha^* =: a'$ so, daß a mit keinem Fixpunkt inzidiert. $\alpha|_{\mathcal{P}_a}$ und $\alpha|_{\mathcal{P}_{a'}}$ erzeugen die Geradenkegelschnitte k^* und $l^* = k^*\alpha^*$, die die Gerade a' gemeinsam haben, jedoch auf a' verschiedene Berührungspunkte haben. Genau die von a' verschiedenen gemeinsamen Geraden von k^* und l^* sind fix.

(d) Dual zu Bemerkung (b): Es ist unmöglich, daß auf einer Fixgeraden f zwei solche Fixpunkte liegen, daß f durch jeden die einzige Fixgerade ist.

(e) Sind k und l zwei verschiedene Punktkegelschnitte, die einen Punkt A' gemeinsam haben, ohne einander in A' zu berühren, so läßt sich die Bestimmung der Restschnittpunkte von k

und l in die Bestimmung der Fixpunkte einer projektiven Kollineation überführen. Die beiden Aufgaben sind also äquivalent.

Bew.: Wir haben eine projektive Kollineation α zu ermitteln, deren Fixpunkte F ; mit den Restschnittpunkten von k und l zusammenfallen. Die Tangente a in A' an l trifft k in einem von A' verschiedenen Punkt A , denn a ist nicht Tangente an k (vgl. 2.1). Analog schneidet die Tangente a' in A' an k den Kegelschnitt l in einem Punkt A'' mit $A'' \neq A'$. Wegen $a \neq a'$ und $A' \neq A, A''$ gilt: A, A', A'' sind nicht kollinear. Für $N \geq 3$ existieren Punkte $P, Q \in k$ so, daß A, A', P, Q ein Viereck bilden; der Sonderfall $N=2$ wird im Anschluß erledigt.



$p := AP, q := AQ; p+q, p+a, p' := A'P, q' := A'Q, p'+q', p'+a'$.

p' ist wegen $P \neq A$ und $P \in k$ keine Tangente von l , also $p'+a$ und p' schneidet l daher nach 2.1 in einem Punkt $\bar{P} \in l$. Analog gilt: $q'+a$ und $Q \in l$ schneidet l in einem Punkt $\bar{Q} \in l$. Daher

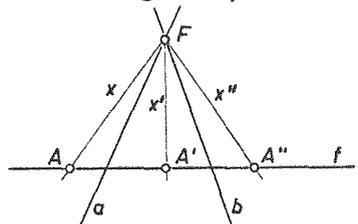
existieren $A''\bar{P} =: p'', A''\bar{Q} =: q''$ mit p'' auf k und q'' auf l . k wird durch $\mathcal{U}_A(a, p, q, \dots) \times \mathcal{U}_{A'}(a', p', q', \dots)$ erzeugt, l wird durch $\mathcal{U}_A(a, p', q', \dots) \times \mathcal{U}_{A'}(a', p'', q'', \dots)$ erzeugt. Wir definieren eine projektive Kollineation α eindeutig durch: $A \mapsto A', A' \mapsto A'', A'' \mapsto A, P \mapsto \bar{P}, Q \mapsto \bar{Q}$, denn die beteiligten Punkte liegen auf Kegelschnitten k bzw. l und bilden daher jeweils ein Viereck (vgl. Satz 1.9). Die k erzeugende Projektivität ist $\alpha|_{\mathcal{U}_A}$, die l erzeugende ist $\alpha|_{\mathcal{U}_{A'}}$. Für einen beliebigen Punkt $X \in k$ gilt daher: $(XA)\alpha = XA' =: x'$, $(XA')\alpha = XA'' =: x''$, wobei x'' durch A'' geht und x' in einem Punkt von l treffen muß. Also gilt $X\alpha \in l \forall X \in k \Rightarrow k\alpha = l$. Nach Folg. 3 stimmen die Fixpunkte von α mit den Restschnittpunkten von k und l überein.

Sonderfall: $N=2 \Rightarrow k$ und l sind Dreiecke. Im Minimalmodell gilt, daß eine projektive Kollineation durch zugeordnete Dreiecke eindeutig festgelegt ist; wegen der Bijektivität ist nämlich dann für jeden Punkt auf den Dreiecksseiten die Zuordnung bestimmt und damit auch für den siebenten Punkt wegen der Eigenschaft, daß kollineare Punkte in ebensolche übergehen. Für $N=2$ ist also im obigen Beweis nur der Punkt Q wegzulassen.

3) Hat eine projektive Kollineation α eine Fixgerade, so hat sie auch einen Fixpunkt (und dual).

Bew.: $\alpha \in \text{PGL}(\pi_{pp}) \wedge \exists f$ mit $f\alpha = f$.

Sei $A \in f$ mit $A\alpha = A'$ (sonst fertig) $\Rightarrow A'\alpha = A'' \neq A' \wedge A'' \in f$. Die Projektivität $\alpha := \alpha|_{\mathcal{U}_A} \circ \mathcal{U}_{A'} \rightarrow \mathcal{U}_A$ ist perspektiv, denn es gilt: $(AA')\alpha =$



$= f\alpha = f\alpha' = f\alpha'' = f = AA' \Rightarrow$ es existiert eine Perspektivitätsachse a mit $A \in a, A' \in a$.

Ebenso: $\beta := \alpha * | \mathcal{O}_A : \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}_A$ ist perspektiv wegen $f\beta = f\alpha^* = f \Rightarrow$
 es existiert eine Perspektivitätsachse b mit $A' \notin b, A'' \notin b$.
 Es existiert mindestens ein Punkt F mit $F \in a \wedge F \in b$. Bezeichnen
 wir $FA =: x, FA' =: x', FA'' =: x''$ und beachten, daß a bzw. b Achse
 von α bzw. β ist, so gilt: $x\alpha = x' \beta$ bzw. $x'\beta = x''$, also $F\alpha = x\alpha = x' \alpha^* =$
 $= x\alpha x'\beta = x'x'' = F$.



4) Wir sind nun unter Beachtung der Bemerkungen nach Folg.1 in der
 Lage, die möglichen Fixpunktfiguren \mathcal{F} bzw. Fixgeradenfiguren \mathcal{F}^*
 einer projektiven Kollineation in einer Pappusebene anzugeben:

① $\alpha = t: \mathcal{F} = \mathcal{R}, \mathcal{F}^* = \mathcal{O}$.

Nach Satz 1.2 gilt: $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}^*|$.

② $\alpha \neq t$, Homologie: $\mathcal{F} = \mathcal{R}_a \cup \{Z\}, \mathcal{F}^* = \mathcal{O}_Z \cup \{a\}$ (a Achse, Z Zentrum).

Es gilt gemäß Satz 1.2: $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}^*|$.

③ $\alpha \neq t$, Elation: $\mathcal{F} = \mathcal{R}_a, \mathcal{F}^* = \mathcal{O}_Z$, also $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}^*|$.

④ α besitzt ein Fixpunktdreieck F_0, F_1, F_2 .

$F_j F_k$ sind Fixgeraden, und zwar die einzigen,

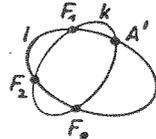
da nie drei Fixgeraden kopunktal sind und nach
 Folg. 1 der Schnittpunkt von zwei Fixgeraden ein Fixpunkt ist.

\mathcal{F} ist also ein Dreieck und \mathcal{F}^* ein Dreieck $\Rightarrow |\mathcal{F}| = |\mathcal{F}^*|$.

Nach 1.9, Folg.6 existieren für $N > 3$ stets projektive Kollineationen

dieser Art. Bei der Konstruktion der Fixpunkte nach

Folg.2 ergibt sich $k \cap l = \{A', F_0, F_1, F_2\}$, d.h. k und l
 gehören einem Büschel 1. Art an.



⑤ α besitzt genau die Fixpunkte $F_0, F_1 | *$.

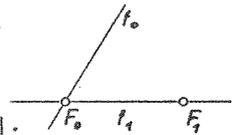
Nach Folg.2, Bem.d existiert durch mindestens einen

der beiden Fixpunkte, o.B.d.A. durch F_0 , eine von

$F_0 F_1$ verschiedene Fixgerade f_0 . Neben f_0 und

$F_0 F_1 =: f_1$ gibt es nach Folg.1 keine Fixgerade.

Wegen $\mathcal{F} = \{F_0, F_1\}$ und $\mathcal{F}^* = \{f_0, F_0 F_1\}$ ist $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}^*|$.

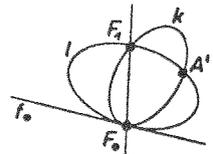


Nach 1.9, Folg.6 existieren für $N \geq 3$ stets projektive Kol-

lineationen dieses Typs. k und l haben F_0, F_1 und A' gemeinsam

und berühren einander in (F_0, f_0) ; k und l gehören einem

Büschel 2. Art an.



⑥ α besitzt genau einen Fixpunkt F .

Nach Folg.3 existiert dann eine Fixgerade f .

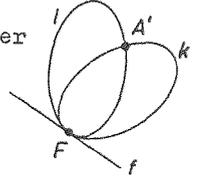
Wir unterscheiden:

(a) $F \in f$.



Es existiert keine weitere Fixgerade g , denn g müßte nach Folg.1 notwendig durch F gehen und ebenso wie f keinen Fixpunkt außer F tragen, was nach Folg. 2, Bem.b unmöglich ist. Nach 1.9, Folg.6 existiert in jeder Pappusebene eine projektive Kollineation dieser Art.

k und l haben genau F, f und A' gemeinsam ohne einander in A' zu berühren; nach Satz 2.6 a oskuliert dann l den Kegelschnitt k in F , und k und l gehören einem Oskulationsbüschel an.

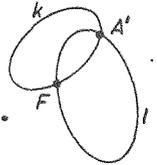


(b) $F \not\subset f$

Eine solche projektive Kollineation existiert nur in gewissen projektiven Ebenen.

Beispiel: PAE und $\alpha (\neq 1)$ ist eine Drehung um einen Winkel $\neq 180^\circ$. Bei α bleibt nur das Drehzentrum fest; die Ferngerade bleibt als Ganzes fest.

$k \cap l = \{A', F\}$, und k und l haben in F keine gemeinsame Tangente. k und l gehören im Sinne unserer (bisherigen) Bezeichnungen keinem Büschel an.



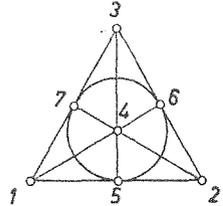
In 6a und 6b gilt $|\varphi| = |\varphi^*|$.

⑦ α hat keinen Fixpunkt.

Nach Folg.3 existiert dann keine Fixgerade $\implies \varphi = \emptyset \wedge \varphi^* = \emptyset$.

Die Existenz von solchen projektiven Kollineationen ist ebenso wie im Fall 6b vom Körper der π_p abhängig. Im Minimalmodell existieren projektive Kollineationen ohne Fixpunkt, wie in 1.9, Folg.6 gezeigt wurde. k und l haben dann nur A' gemeinsam, ohne einander in A' zu berühren.

Im Minimalmodell haben z.B. die Kegelschnitte $k = \{1, 4, 5\}$ und $l = \{4, 2, 3\}$ den Punkt $A' = 4$ gemeinsam und in A' verschiedene Tangenten, nämlich 24 bzw. 14.



In einer fest gegebenen Pappusebene gibt es also höchstens acht Typen, wovon zwei nicht immer möglich sind, und mindestens sechs Typen für $N > 3$. Für $N=3$ ist ④ nach 1.9, Folg.6 unmöglich, für $N=2$ sind ④ und ⑤ nach 1.9, Folg.6 unmöglich.

Bemerkung: In allen Fällen ist die Figur φ^* dual zur Figur φ und $|\varphi| = |\varphi^*|$.

SATZ 2.7: In jeder Pappusebene ist die Menge der Fixpunkte einer projektiven Kollineation α gleichmächtig der Menge ihrer Fixgeraden und es existieren für $N > 3$ mindestens sechs und höchstens acht Typen von Fixelementfiguren. Ist α nicht perspektiv und A ein beliebiger Nichtfixpunkt, der mit keiner Fixgeraden inzidiert, so schneidet der durch $\alpha^*|U_A$ bestimmte Punktekegelschnitt seinen Bildpunktegelschnitt außer in $A\alpha$ genau in den Fixpunkten von α .

§ 3 Projektive Räume

3.1. Axiomatik

Wie in 1.1 gehen wir von einer Inzidenzstruktur $\{\mathcal{P}, \mathcal{G}, I\}$ aus mit $I \subset \mathcal{P} \times \mathcal{G}$ und schreiben für $(A, a) \in I$ im folgenden wieder: $A I a$ ("der Punkt A inzidiert mit der Geraden a ").

Für die Inzidenzstruktur $\{\mathcal{P}, \mathcal{G}, I\}$ seien folgende drei Axiome erfüllt:

I_1 : Zu zwei verschiedenen Punkten existiert stets genau eine Gerade, die mit beiden Punkten inzidiert.

$A, B | \neq, \in \mathcal{P} : \exists! a \in \mathcal{G}$ mit $A I a \wedge B I a$. (kurz: $a = AB$)
("Existenz der eindeutigen Verbindungsgeraden")

I_2 : Zu drei nicht kollinearen Punkten A, B, C und einem Punkt P , der mit AC inzidiert und einem Punkt Q , der mit BC inzidiert, existiert stets ein mit P und Q kollinearer Punkt R , der mit AB inzidiert.

$A, B, C, P, Q | \in \mathcal{P} \wedge A, B, C$ nicht kollinear $\wedge P I AC \wedge Q I BC \Rightarrow \exists R \in \mathcal{P}$
mit R, P, Q kollinear $\wedge R I AB$.
("Planaritätsaxiom")

E : Mit jeder Geraden inzidieren mindestens drei paarweise verschiedene Punkte.

("Existenz- oder Reichhaltigkeitsaxiom")

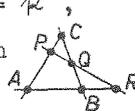
DEF. 3.1 a: Erfüllt eine Inzidenzstruktur $\{\mathcal{P}, \mathcal{G}, I\}$ die Axiome I_1, I_2 und E , so heißt sie ein projektiver Raum.

Bemerkungen: (a) Wir schreiben dafür symbolisch: $\mathbb{P}(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I; I_1, I_2, E)$, wobei $I_1 = i_1$ (vgl. 1.1).

(b) Einfache Beispiele für projektive Räume:
 $\mathcal{P} = \{P\}, \mathcal{G} = \emptyset, I = \emptyset \dots$ "leerer projektiver Raum \mathbb{P}_0 ".

$\mathcal{P} = \{P\}, \mathcal{G} = \emptyset, I = \emptyset \dots$ "einpunktiger projektiver Raum \mathbb{P}_1 " (i.f.kurz P).
 \mathcal{P} bel. Menge mit mindestens drei Elementen, $\mathcal{G} = \{g\}$ mit $g = \mathcal{P}$,
 $I = \mathcal{P} \cdot \mathcal{G}$, also $I = \epsilon \dots$ "projektive Gerade \mathbb{P}_2 ".

(c) Gilt im Axiom I_2 speziell $P=A \vee P=C$, dann ist I_2 trivialerweise erfüllt; ebenso für $Q=B \vee Q=C$; insbesondere ist I_2 für $P=Q(=C)$ trivial. Läßt man diese trivialen Fälle weg, so kann I_2 auch wie folgt konstruiert werden: Haben in einem Viereck A,P,B,Q die Gegenseiten AP und BQ einen Punkt gemeinsam, so auch die Gegenseiten AB und PQ.



(d) Aus I_1 folgt: Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen gemeinsamen Punkt. Demnach können wir unterscheiden:

Zwei verschiedene Geraden haben genau einen Punkt gemeinsam: Die Geraden "schneiden einander".

Zwei verschiedene Geraden haben keinen Punkt gemeinsam: Die Geraden "sind windschief".

(e) Gibt es eine Gerade, so kann sie nach E als Punktmenge ("Punktreihe") aufgefaßt werden. Man kann also ebenso wie in 1.2 die Geraden als Menge ihrer Punkte interpretieren und gelangt so zum "projektiven Punktraum"

$\{\mathcal{P}, \text{System von Teilmengen } \mathcal{P}_\alpha \subset \mathcal{P}, I = \epsilon; I_1, I_2, E\}$.

Jeder projektive Raum kann als projektiver Punktraum aufgefaßt werden.

Folgerungen:

1) Jede projektive Ebene ist ein projektiver Raum.

Bew.: Sei $\pi(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I; i_1, i_2, e)$ eine projektive Ebene. $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ ist dann eine Inzidenzstruktur und I_1 ist wegen $I_1 = i_1$ erfüllt.

I_2 : Für $P=Q$ trivial; $P \neq Q \xrightarrow{I_1} \exists^* PQ$. Gilt $PQ=AB$, dann ist I_2 z.B. für $A=R$ erfüllt. $PQ=AB \xrightarrow{I_1} \exists^* AB.PQ=:R$ und dieser Punkt erfüllt I_2 .

E: Nach Satz 1.2 existieren in einer projektiven Ebene auf einer Geraden mindestens drei Punkte. ◆

2) Der Anschauungsraum ist kein projektiver Raum: Wählt man P, Q so, daß $AB \neq PQ$ und AB parallel PQ gilt, so ist I_2 verletzt. Wir erweitern daher zum "projektiv abgeschlossenen Anschauungsraum" PAR , indem wir durch die folgenden vier Festsetzungen zusätzliche Punkte, Geraden und Inzidenzen einführen:

(I) Jede Gerade inzidiert mit genau einem Fernpunkt; je zwei verschiedene parallele Geraden haben genau einen Fernpunkt gemeinsam; verschiedene nicht parallele Geraden haben keinen gemeinsamen Fernpunkt.

Die Ausnahmerolle verschiedener paralleler Ebenen, die keine gemeinsamen Punkte im Anschauungsraum besitzen, beseitigen wir durch:

(II) Alle gemeinsamen Punkte von zwei verschiedenen parallelen Ebenen liegen auf genau einer Ferngeraden; verschiedene nicht parallele Ebenen haben keine gemeinsame Ferngerade.

Bis hierher wurden zusätzliche Punkte und Geraden eingeführt sowie die Inzidenz eines Fernpunktes mit einer Nichtferngeraden erklärt. Wir erweitern nun den Inzidenzbegriff auf die beiden fehlenden Fälle:

(III) Ein Fernpunkt inzidiert genau dann mit einer Ferngeraden, wenn eine mit diesem Fernpunkt inzidente Nichtferngerade parallel ist zu einer die Ferngerade enthaltenden Ebene. Kein eigentlicher Punkt inzidiert mit einer Ferngeraden.

Die Definition ist wegen (I) und (II) sinnvoll und mit (III) wird die Menge der Fernelemente eine Inzidenzstruktur ("Ferninzidenzstruktur"). Da im Anschauungsraum alle zu zwei nicht parallelen Geraden gleichzeitig parallelen Ebenen zueinander parallel sind, zwei nicht parallele Ebenen genau eine Schnittgerade besitzen und quadratische Pyramiden existieren, folgt aus (I), (II) und (III):

(IV) Die Ferninzidenzstruktur ist eine projektive Ebene.

PAR ist ein projektiver Raum.

Bew.: E ist klar.

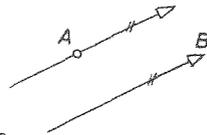
I_1 : $A+B$. Wir unterscheiden:

Fall 1: A, B eigentlich; elementar klar.

Fall 2: A, B Fernpunkte; I_1 ist gemäß IV erfüllt.

Fall 3: A eigentlich, B Fernpunkt; das elementare

Parallelenaxiom besagt, daß durch jeden Punkt A genau eine Gerade existiert, die zu einer gegebenen Geraden parallel ist. Für I_2 sind auf ähnliche Weise alle Fälle durchzudiskutieren.



DEF. 3.1 b: Eine Teilmenge $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}$ von \mathbb{T} heißt ein Unterraum, wenn gilt: Zu je zwei verschiedenen Punkten $P, Q \in \mathcal{R}_1$ ist die Punktreihe $\mathcal{R}_{PQ} \subset \mathcal{R}$ ganz in \mathcal{R}_1 enthalten ($\mathcal{R}_{PQ} \subset \mathcal{R}_1$).

Bemerkung: Gemäß der Definition 3.1 b ist ein Unterraum eine Teilmenge von \mathcal{R} mit einer bestimmten Eigenschaft. Wir wollen zeigen, daß diese Teilmenge selbst ein projektiver Raum ist, und müssen daher dieser Teilmenge \mathcal{R}_1 noch eine Inzidenzstruktur aufprägen. Dies kann auf kanonische (=natürliche) Weise geschehen. Wir verlangen: Jede Gerade aus \mathcal{G} , deren Punkte in \mathcal{R}_1 liegen, heißt eine Gerade des Unterraumes; die Menge dieser Geraden nennen

wir \mathcal{U}_1 . Wir erklären die Inzidenzrelation $I_{ind} \subset \mathcal{P}_1 \times \mathcal{U}_1$ so: Für Elemente, welche dem Unterraum angehören, stimmt die Inzidenz I_{ind} mit der Inzidenz I in $\mathcal{P} \times \mathcal{U}$ überein. $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{U}_1, I_{ind}\}$ heißt die "induzierte Inzidenzstruktur". Symbolisch: $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}, \mathcal{U}_1 := \{g \in \mathcal{U} \mid g \text{ enthält zwei verschiedene Punkte von } \mathcal{P}_1\}$ (dies ist wegen Def. 3.1 b sinnvoll), $I_{ind} = I \cap \mathcal{P}_1 \times \mathcal{U}_1$.

Bezeichnung: Wir werden i. f. statt $P \in \mathcal{P}_1$ auch $P \in \mathbb{T}_1$ schreiben.

3) Jeder Unterraum ist bezüglich der induzierten Inzidenzstruktur ein projektiver Raum.

Bew.: $I_1: A, B \mid *, \in \mathcal{P}_1 \Rightarrow AB \in \mathcal{U}_1$ und AB ist in \mathcal{P} und damit in \mathcal{P}_1 eindeutig bestimmt.

$I_2: P \neq Q$ (o. B. d. A.). In \mathbb{T} gilt: $\exists PQ \in \mathcal{U} \wedge \exists R \in \mathcal{P}$ gemäß I_2 . Es ist $R \in \mathcal{P}_1$ zu zeigen: $P \neq Q \wedge P, Q \in \mathcal{P}_1, R \in \mathcal{P}_{Pa} \xrightarrow{\text{Def. 3.1 b}} R \in \mathcal{P}_1$.

E: Ist $\mathcal{U}_1 \neq \emptyset$ und $g \in \mathcal{U}_1$, so gilt $\mathcal{P}_g \subset \mathcal{P}_1$, und $\mathcal{P}_g \subset \mathcal{P}$ enthält mindestens drei Punkte. ◆

Bemerkung: Jeder projektive Raum \mathbb{T} besitzt die trivialen Unterräume \mathbb{T}_0 und \mathbb{T} . Für $\mathcal{P} \neq \emptyset$ ist für alle $P \in \mathcal{P}$ der einpunktige projektive Raum \mathbb{T}_P ein Unterraum. Für $\mathcal{U} \neq \emptyset$ ist für alle $g \in \mathcal{U}$ die Inzidenzstruktur $\{\mathcal{P}_g, \{g\}, \in\}$ ein Unterraum, nämlich eine projektive Gerade \mathbb{T}_g .

DEF. 3.1 c: Der Schnitttraum $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ zweier Unterräume $\mathbb{T}_j(\mathcal{P}_j)$ eines projektiven Raumes \mathbb{T} ist die Punktmenge $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. Der Verbindungsraum $\mathbb{T}_1 \vee \mathbb{T}_2$ zweier Unterräume $\mathbb{T}_j(\mathcal{P}_j)$ eines projektiven Raumes \mathbb{T} ist die Punktmenge:

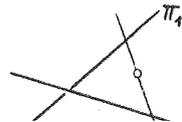
- (I) \mathcal{P}_1 für $\mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_0$,
- (II) \mathcal{P}_2 für $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_0$,
- (III) $\{P\}$ für $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_P (P \in \mathcal{P})$; kurz: $P = P \vee P$,
- (IV) \mathcal{P}_{PQ} für $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_P \wedge \mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_Q \wedge P, Q \mid *, \in \mathcal{P}$; kurz: $\mathcal{P}_{PQ} = P \vee Q$,
- (V) $\bigcup_{\substack{X_1 \in \mathcal{P}_1 \\ X_2 \in \mathcal{P}_2}} X_1 \vee X_2$ sonst.

Bemerkungen: (a) Der Schnitttraum ist als mengentheoretischer Durchschnitt erklärt, und daher ist die Bildung kommutativ und assoziativ.

(b) Die Operation \vee ist kommutativ (sofort aus der Definition zu sehen). Später werden wir zeigen: \vee ist assoziativ.

(c) Punkt (V) der obigen Definition besagt, daß alle möglichen Verbindungsgeraden zu bilden sind, wenn X_1 in \mathcal{P}_1 und X_2 in \mathcal{P}_2 laufen. Es gilt daher klarerweise: $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \subset \mathbb{T}_1 \vee \mathbb{T}_2$.

Beispiel in PAR: $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ sind zwei windschiefe Geraden. $\mathbb{T}_1 \vee \mathbb{T}_2$ ist der ganze Raum, denn durch jeden Punkt existiert eine Treffgerade an \mathbb{T}_1 und \mathbb{T}_2 . Die Menge $\mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2$ besteht dagegen nur aus den beiden Punktreihen.



4) Der Schnitttraum bzw. der Verbindungsraum zweier Unterräume eines projektiven Raumes ist bezüglich der induzierten Inzidenzstruktur ein projektiver Raum.

Bew.: (a) Für $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \subset \Pi$ ist gemäß Def. 3.1 b zu überprüfen, ob mit $P, Q \mid *, \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ gilt: $\mathcal{P}_{PQ} \subset \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Aus $P, Q \mid \in \mathcal{P}_j$ ($j=1,2$) folgt nach Def. 3.1 b: $\mathcal{P}_{PQ} \subset \mathcal{P}_j$ ($j=1,2$), d.h. $\mathcal{P}_{PQ} \subset \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

(b) Ebenso ist für $P, Q \mid *, \in \Pi_1 \vee \Pi_2$ die Def. 3.1 b zu überprüfen; in den Fällen I, ... IV ist sie trivialerweise erfüllt.

Es liege Fall (V) vor:

$$\Pi_1 \vee \Pi_2 = \bigcup_{\substack{X_1 \in \mathcal{P}_1 \\ X_2 \in \mathcal{P}_2}} X_1 \vee X_2 =: \mathcal{P}_{12}$$

Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

(1) $P, Q \mid *, \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$:

(i) $P \in \mathcal{P}_1 \wedge Q \in \mathcal{P}_1 \stackrel{\text{Def. 3.1c (iv)}}{\implies} P \vee Q = \mathcal{P}_{PQ}$. Da \mathcal{P}_1 ein Unterraum ist, gilt $\mathcal{P}_{PQ} \subset \mathcal{P}_1 \implies \mathcal{P}_{PQ} \subset \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \subset \Pi_1 \vee \Pi_2 = \mathcal{P}_{12}$.

Ebenso für $P \in \mathcal{P}_2 \wedge Q \in \mathcal{P}_2$.

(ii) $P \in \mathcal{P}_1 \wedge Q \in \mathcal{P}_2$. Nach (V) und $P \vee Q = \mathcal{P}_{PQ}$ gilt $\mathcal{P}_{PQ} \subset \bigcup_{X_j \in \mathcal{P}_j} X_1 \vee X_2 = \mathcal{P}_{12}$.

(2) $P \in \mathcal{P}_1 \wedge Q \in \mathcal{P}_2 \setminus \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$:

$$\implies \exists Q_1 \in \mathcal{P}_1 \wedge Q_2 \in \mathcal{P}_2 \text{ mit } Q \in Q_1 \vee Q_2 \wedge Q \mid Q_1, Q_2.$$

Wir unterscheiden:

(i) $P=Q_1$:

$$\left. \begin{array}{l} P \neq Q \stackrel{I_1}{\implies} \exists *PQ \\ Q \neq Q_1 \implies \exists *QQ_1 \end{array} \right\} \implies PQ = QQ_1 = Q_1 Q_2.$$

$\mathcal{P}_{PQ} = \mathcal{P}_{Q_1 Q_2}$ und $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2} = Q_1 \vee Q_2$ ist gemäß (V) in \mathcal{P}_{12} enthalten: $\mathcal{P}_{PQ} \subset \mathcal{P}_{12}$.

(ii) $P \neq Q_1$:

P, Q_1, Q bilden ein Dreieck (ind. P, Q_1, Q kollinear $\implies Q \mid PQ_1 \wedge$

$P \in \mathcal{P}_1 \wedge Q_1 \in \mathcal{P}_1 \implies \mathcal{P}_{PQ_1} \subset \mathcal{P}_1 \implies Q \in \mathcal{P}_1$: Widerspruch).

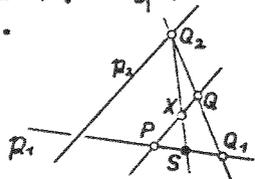
$X \in \mathcal{P}_{PQ}$: Es ist $X \in \mathcal{P}_{12}$ zu zeigen. Für P, Q gilt

nach Voraussetzung $P, Q \mid \in \mathcal{P}_{12}$; wir dürfen daher

o.B.d.A. $X \mid P, Q$ und wegen $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_{12}$ auch

$X \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ voraussetzen.

$Q_2 \in \mathcal{P}_2 \wedge X \in \mathcal{P}_2 \implies X \neq Q_2 \stackrel{I_1}{\implies} \exists *XQ_2 \stackrel{I_2}{\implies} \exists S = PQ_1 \cdot XQ_2$. Es gilt: $X \in S \vee Q_2 = \mathcal{P}_{SQ_2} = \mathcal{P}_{SQ_2}$ mit $S \in \mathcal{P}_1 \wedge Q_2 \in \mathcal{P}_2 \stackrel{\text{Def. 3.1c (iv)}}{\implies} X \in \mathcal{P}_{12}$. $\forall X \in \mathcal{P}_{PQ} \implies \mathcal{P}_{PQ} \subset \mathcal{P}_{12}$.



(3) $P, Q \neq *, \in \mathcal{R}_{12} \setminus \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.

$P \in \mathcal{R}_{12} \Rightarrow \exists P_j \in \mathcal{R}_j$ mit $P \in P_1 \vee P_2$,

$Q \in \mathcal{R}_{12} \Rightarrow \exists Q_j \in \mathcal{R}_j$ mit $Q \in Q_1 \vee Q_2$.

Nach Voraussetzung gilt: $P \neq |P_1, P_2 \wedge Q \neq |Q_1, Q_2$.

$X \in \mathcal{R}_{PQ}$: Es ist $X \in \mathcal{R}_{12}$ zu zeigen. O.B.d.A. dürfen wir wieder $X \neq |P, Q \wedge X \notin \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ voraussetzen.

Wir unterscheiden:

(i) $Q \in PP_1 \Rightarrow PQ = P_1P = P_1P_2 \Rightarrow \mathcal{R}_{PQ} = \mathcal{R}_{P_1P_2}$; für $\mathcal{R}_{P_1P_2}$ gilt jedoch nach Def. 3.1 c (V) $\mathcal{R}_{P_1P_2} \subset \mathcal{R}_{12}$, also hat man $X \in \mathcal{R}_{PQ} = \mathcal{R}_{P_1P_2} \subset \mathcal{R}_{12}$.

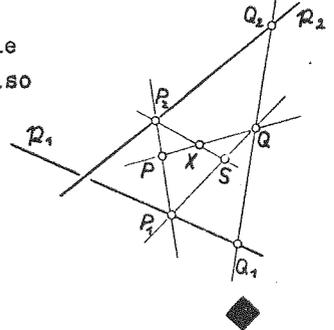
(ii) $Q \notin PP_1 \Rightarrow P, P_1, Q$ bilden ein Dreieck.

$P_1 \in \mathcal{R}_1 \wedge Q \in \mathcal{R}_{12} \setminus \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ erfüllen die Voraussetzungen von Beweisschritt (2), also gilt wie dort: $\mathcal{R}_{P_1Q} \subset \mathcal{R}_{12}$.

P, P_1, Q Dreieck $\wedge P_2 \in PP_1 \wedge X \in PQ \stackrel{I_3}{\Rightarrow} \exists S := XP_2 \cdot P_1Q$ und für S gilt: $S \in \mathcal{R}_{P_1Q} \subset \mathcal{R}_{12} \Rightarrow S \in \mathcal{R}_{12}$.

$P_2 \in \mathcal{R}_2 \wedge S \in \mathcal{R}_{12} \setminus \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ erfüllen daher die Voraussetzungen von Beweisschritt (2), also gilt wie dort: $\mathcal{R}_{SP_2} \subset \mathcal{R}_{12}$.

Damit hat man: $X \in \mathcal{R}_{SP_2} \subset \mathcal{R}_{12} \quad \forall X \in \mathcal{R}_{PQ} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mathcal{R}_{PQ} \subset \mathcal{R}_{12}$.



Bemerkung: Nach Beweisschritt (a) bzw. (b) folgt: Der Schnitt-
 raum von beliebig vielen bzw. der Verbindungsraum von end-
 lich vielen Unterräumen eines projektiven Raumes ist bezüglich
 der induzierten Inzidenzstruktur ein projektiver Raum.

5) $\pi_1 \vee \pi_2$ ist der Durchschnitt aller Unterräume von π ,
 die π_1 und π_2 enthalten. Die Bildung des Verbindungsraumes
 endlich vieler Unterräume ist assoziativ, d.h. es gilt:
 $(\pi_1 \vee \pi_2) \vee \pi_3 = \pi_1 \vee (\pi_2 \vee \pi_3) \quad (\pi_1, \pi_2, \pi_3 \text{ Unterräume von } \pi)$.

Bemerkung: Nach Folg. 4 ist $\pi_1 \vee \pi_2$ ein Unterraum und daher
 $(\pi_1 \vee \pi_2) \vee \pi_3$ nach Def. 3.1c erklärt.

Bew.: (a) Zur Menge aller Unterräume, die π_1 und π_2 enthalten gehört nach Folg.4 der Unterraum $\pi_1 \vee \pi_2$, und die Menge ist daher nicht leer. Sei π_n der Durchschnitt aller Unterräume von π die π_1 und π_2 enthalten; π_n ist nach Folg.4, Bemerkung ein Unterraum und es gilt $\pi_n \subset \pi_1 \vee \pi_2$. Andererseits enthält nach Def.3.1 c jeder Unterraum von π , der π_1 und π_2 enthält, sicher auch $\pi_1 \vee \pi_2$ wegen der Unterraumdefinition Def.3.1 b. Dann ist aber $\pi_1 \vee \pi_2 \subset \pi_n$ und damit $\pi_1 \vee \pi_2 = \pi_n$.

(b) Mit $\pi_1 \vee \pi_2 =: \pi_{12}$ ist $\pi_{12} \vee \pi_3$ der Durchschnitt aller Unterräume von π , die π_{12} und π_3 enthalten. Die Unterräume durch π_{12} sind aber nach (a) genau jene Unterräume von π , die π_1 und π_2 enthalten. Damit ist $(\pi_1 \vee \pi_2) \vee \pi_3$ der Durchschnitt aller Unterräume von π , die π_1 und π_2 und π_3 enthalten. Da die Durchschnittsbildung assoziativ ist folgt $(\pi_1 \vee \pi_2) \vee \pi_3 = \pi_1 \vee (\pi_2 \vee \pi_3)$. ◆

Bemerkung: Man kann den ersten Teil von Folg.5 zur Definition von $\pi_1 \vee \pi_2$ verwenden, doch setzt die Bestimmung von $\pi_1 \vee \pi_2$ dann die Kenntnis aller Unterräume voraus, während Def.3.1 c eine Konstruktion von $\pi_1 \vee \pi_2$ enthält, die nur die Punktmenge von π , und π_1 benützt. Unter Verwendung von Folg.5 kann auch der Verbindungsraum beliebig vieler Unterräume definiert werden.

Zwischenbemerkung:

Unter einer "Halbgruppe" versteht man eine nichtleere Menge H , in welcher eine binäre Verknüpfung $\circ: H \times H \rightarrow H$ erklärt ist, wobei \circ global auf $H \times H$ und assoziativ ist. Die Halbgruppe $\{H, \circ\}$ heißt kommutativ, wenn \circ kommutativ ist. Eine Halbgruppe besitzt höchstens ein neutrales Element. Unter einem "Verband" versteht man eine nichtleere Menge L , in welcher zwei zweistellige Verknüpfungen \cup und \cap erklärt sind, wobei gilt:

(I) $\{L, \cup\}$ ist eine kommutative Halbgruppe.

Bemerkung: Existiert in $\{L, \cup\}$ ein neutrales Element, so heißt es Nullelement von L .

(II) $\{L, \cap\}$ ist eine kommutative Halbgruppe.

Bemerkung: Existiert in $\{L, \cap\}$ ein neutrales Element, so heißt es Einselement von L .

(III) Es gelten die beiden Verschmelzungsgesetze:

$$\begin{aligned} a \cup (a \cap b) &= a \\ a \cap (a \cup b) &= a \quad \forall a, b, c \in L. \end{aligned}$$

Ein Verband $\{L, \cup, \cap\}$ heißt "modular", wenn für beliebige $a_1, a_2, a_3 \in L$ gilt:

$$\text{Aus } a_1 \subset a_3 \text{ folgt } a_1 \cup (a_2 \cap a_3) = (a_1 \cup a_2) \cap a_3.$$

$$(c \text{ ist in } L \text{ erklärt durch } a_1 \subset a_3 \iff a_1 \cup a_3 = a_3 \wedge a_1 \cap a_3 = a_1).$$

6) Die Menge $u\bar{\pi}$ aller Unterräume eines nichtleeren projektiven Raumes $\bar{\pi}$ ist bezüglich des Verbindens und Schneidens als Verknüpfungen \cup und \cap ein Verband mit dem leeren Unterraum $\bar{\pi}_0 \subset \bar{\pi}$ als Nullelement und $\bar{\pi}$ als Einselement.

Bew.: (I) und (II) ist bereits bewiesen.

Zu (III): Wegen $\bar{\pi}_1 \vee \bar{\pi}_0 = \bar{\pi}_1$ (nach Def. 3.1c) und $\bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi} = \bar{\pi}_1$ (folgt aus $\bar{\pi}_1 \subset \bar{\pi}$) ist $\bar{\pi}_0$ das Nullelement und $\bar{\pi}$ das Einselement in $u\bar{\pi}$.

Falls $\bar{\pi}_1 \vee (\bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_2) = \bar{\pi}_1$ gilt, muß nach Definition 3.1 c $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_0$ sein, also $\bar{\pi}_1 \vee (\bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_2) = \bar{\pi}_1$.

Sei nun $\bar{\pi}_1 \vee (\bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_2) \neq \bar{\pi}_0$: Dann existiert $P \in \bar{\pi}_1 \vee (\bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_2)$ mit $P \in X_1 \vee X_2$ und $X_1 \in \bar{\pi}_1 \wedge X_2 \in \bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_2$ (nach Definition 3.1 c), also gilt $X_1, X_2 \in \bar{\pi}_1 \implies P \in \bar{\pi}_1$; ist umgekehrt $P \in \bar{\pi}_1$, so folgt $P \in \bar{\pi}_1 \vee (\bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_2)$ nach Def. 3.1 c, also gilt insgesamt $\bar{\pi}_1 \vee (\bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_2) = \bar{\pi}_1$. Gilt $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_0$, so ist das zweite Verschmelzungsgesetz wegen $\bar{\pi}_0 \cap (\bar{\pi}_0 \vee \bar{\pi}_2) = \bar{\pi}_0 \cap \bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_0$ erfüllt.

Ist $\bar{\pi}_1 \neq \bar{\pi}_0$ und $P \in \bar{\pi}_1 \implies P \in \bar{\pi}_1 \vee \bar{\pi}_2 \implies P \in \bar{\pi}_1 \cap (\bar{\pi}_1 \vee \bar{\pi}_2)$; ist umgekehrt $P \in \bar{\pi}_1 \cap (\bar{\pi}_1 \vee \bar{\pi}_2) \implies P \in \bar{\pi}_1$. Damit gilt $\bar{\pi}_1 \cap (\bar{\pi}_1 \vee \bar{\pi}_2) = \bar{\pi}_1$.

7) $u\bar{\pi}$ ist ein modularer Verband.

Es ist also zu zeigen: Sind $\bar{\pi}_j$ ($j=1,2,3$) Unterräume von $\bar{\pi}$, so folgt aus $\bar{\pi}_1 \subset \bar{\pi}_3$ stets $\bar{\pi}_1 \vee (\bar{\pi}_2 \cap \bar{\pi}_3) = (\bar{\pi}_1 \vee \bar{\pi}_2) \cap \bar{\pi}_3$.

Bemerkung: Aus $\bar{\pi}_1 \vee \bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_3 \wedge \bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_1$ folgt nämlich $\bar{\pi}_1 \subset \bar{\pi}_3$ und umgekehrt.

Bew.: In den Sonderfällen $\pi_1 = \pi_0$, $\pi_2 \cap \pi_3 = \pi_0$, $\pi_1 \vee (\pi_2 \cap \pi_3) = \pi_0$, $\pi_1 \vee \pi_2 = \pi_0$ und $(\pi_1 \vee \pi_2) \cap \pi_3 = \pi_0$ ist der Beweis leicht über Def. 3.1 c zu erbringen.

Es seien i.f. diese Sonderfälle ausgeschlossen.

$\forall X \in \pi_1 \vee (\pi_2 \cap \pi_3)$ folgt:

$$\exists X_1 \in \pi_1 \wedge X_{23} \in \pi_2 \cap \pi_3 \text{ mit } X \in X_1 \vee X_{23}; X_1 \in \pi_1 \wedge X_2 \in \pi_2 \Rightarrow X_1 \vee X_2 \subset \pi_1 \vee \pi_2 \Rightarrow X \in \pi_1 \vee \pi_2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \subset \pi_3 \Rightarrow X_1 \in \pi_3 \\ X_{23} \in \pi_3 \end{array} \right\} \Rightarrow X \in X_1 \vee X_{23} \subset \pi_3 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \pi_1 \subset \pi_3 \\ X_{23} \in \pi_3 \end{array}} \right\} \Rightarrow X \in (\pi_1 \vee \pi_2) \cap \pi_3.$$

Somit gilt: $\pi_1 \vee (\pi_2 \cap \pi_3) \subset (\pi_1 \vee \pi_2) \cap \pi_3$ (*).

Umgekehrt: $X \in (\pi_1 \vee \pi_2) \cap \pi_3 \Rightarrow X \in \pi_3 \wedge \exists X_1 \in \pi_1 \wedge X_2 \in \pi_2$ mit $X \in X_1 \vee X_2$.

Für $X = X_1 \Rightarrow X \in \pi_1 \Rightarrow X \in \pi_1 \vee (\pi_2 \cap \pi_3)$.

Für $X \neq X_1$ folgt $X_2 \in X_1 \vee X$

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \in \pi_1 \Rightarrow X_1 \in \pi_3 \\ X \in \pi_3 \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 \vee X \in \pi_3 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} X_1 \in \pi_1 \\ X \in \pi_3 \end{array}} \right\} \Rightarrow X_2 \in \pi_3.$$

Also gilt $X \in X_1 \vee X_2$ mit $X_1 \in \pi_1 \wedge X_2 \in \pi_2 \cap \pi_3$, d.h. $X \in \pi_1 \vee (\pi_2 \cap \pi_3)$.

Somit gilt: $(\pi_1 \vee \pi_2) \cap \pi_3 \subset \pi_1 \vee (\pi_2 \cap \pi_3)$ (**).

$$(*) \wedge (**) \Rightarrow \pi_1 \vee (\pi_2 \cap \pi_3) = (\pi_1 \vee \pi_2) \cap \pi_3. \quad \blacklozenge$$

SATZ 3.1: Jede projektive Ebene ist ein projektiver Raum. Der Schnittraum und der Verbindungsraum zweier Unterräume eines projektiven Raumes sind bezüglich der induzierten Inzidenzstruktur projektive Räume. Der Verbindungsraum von Unterräumen aus \mathbb{T} ist der Durchschnitt aller Unterräume aus \mathbb{T} , welche die gegebenen Unterräume enthalten. Die Menge der Unterräume eines nicht leeren projektiven Raumes \mathbb{T} ist bezüglich des Verbindens und Schneidens ein modularer Verband mit dem Nullelement $\bar{\pi}_0$ und dem Einselement \mathbb{T} .

Bemerkung: Ist $\mathbb{T}_1 \subset \mathbb{T}$ ein Unterraum, so lassen wir i.f. stets den Zusatz "bezüglich der induzierten Inzidenzstruktur" weg.

3.2. Ebenen und Hyperebenen in einem projektiven Raum

DEF. 3.2: Ist $\mathbb{T}(\rho)$ ein projektiver Raum und sind A, B, C drei nicht kollineare Punkte von \mathbb{T} , so heißt der Verbindungsraum $A \vee B \vee C$ eine Ebene in \mathbb{T} . Zwei Unterräume eines projektiven Raumes heißen komplementär, wenn ihr Durchschnittsraum leer und ihr Verbindungsraum \mathbb{T} ist. Ein zu einem Punkt komplementärer Unterraum heißt eine Hyperebene.

Bemerkungen: (a) Sei \mathbb{T} der PAR und \mathbb{T}_1 eine Gerade. Für irgendeine zu \mathbb{T}_1 windschiefe Gerade \mathbb{T}_2 gilt $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_0$ und $\mathbb{T}_1 \vee \mathbb{T}_2 = \mathbb{T}$ (vgl. Bem. nach Def. 3.1 c); \mathbb{T}_1 und \mathbb{T}_2 sind also komplementäre Unterräume. \mathbb{T}_2 ist durch die Vorgabe von \mathbb{T}_1 nicht eindeutig bestimmt. In einem beliebigen projektiven Raum ist die Existenz eines zu einem gegebenen Unterraum komplementären Unterraumes noch offen.

(b) Ein Unterraum $\mathbb{T}_\alpha \subset \mathbb{T}$ ist eine Hyperebene, wenn ein Punkt $P \in \rho$ existiert mit $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_P = \emptyset$ (d.h. $P \notin \mathbb{T}_\alpha$) und $\mathbb{T}_\alpha \vee \mathbb{T}_P = \mathbb{T}$.

(c) Jede projektive Ebene $\pi(\rho)$ ist eine Ebene im Sinn von Def. 3.2, also Verbindungsraum von drei nicht kollinearen Punkten.

Bew.: $e \Rightarrow \exists$ Dreieck A, B, C. Da π ein projektiver Raum ist (vgl. 3.1, Folg. 1) gilt einerseits: $A \vee B \vee C \subset \pi$. Andererseits gilt $\forall X \in \rho \Rightarrow X \in A \vee B \vee C$; dies ist für $X=A$ trivial und für $X \neq A$ folgt wegen $i_1: \exists * AX \wedge AX+BC \stackrel{!}{\Rightarrow} \exists * S: =AX.BC$ und es gilt $X \in A \vee S$, woraus wegen $S \in B \vee C$ folgt: $X \in A \vee B \vee C$.

Folgerungen:

1) Existiert in \mathbb{T} eine Ebene $A \vee B \vee C =: \mathbb{T}_1$ und sind P, Q, R drei nicht kollineare Punkte des Unterraumes \mathbb{T}_1 , so gilt: $A \vee B \vee C = PVQ \vee R$.

Bew.: Es ist unmöglich, daß der Punkt P auf allen Seiten des Dreiecks A, B, C liegt; gelte o.B.d.A. $P \notin B \vee C$.

$P \in A \vee (B \vee C) \Rightarrow \exists S \in B \vee C$ mit $P \in A \vee S$ ($A+S \wedge P+S$) $\Rightarrow A \in P \vee S$, woraus wegen $S \in B \vee C$ folgt: $A \in P \vee B \vee C$.

Aus $A, B, C \in PV BVC$ folgt: $A \vee BVC \subset PV BVC$, da $PV BVC$ ein Unterraum ist.

Ebenso: $P, B, C \in AV BVC \Rightarrow PV BVC \subset AV BVC$.

Man hat somit: $AV BVC = PV BVC$ (*).

Unter der Voraussetzung $A \notin BVC$ und $P \notin BVC$ konnten wir den Punkt A durch den Punkt P austauschen.

Wir gehen nun ebenso mit dem Punkt Q vor. Es ist unmöglich, daß $Q \in PC \cap Q \in PB$ gilt (P, B, C nicht kollinear $\Rightarrow PC \neq PB \Rightarrow P=Q$: Widerspruch zu P, Q, R nicht kollinear), also dürfen wir o.B.d.A.

$Q \notin PB$ voraussetzen; wegen $P \notin BVC$ gilt außerdem $C \notin PB$. Der Punkt Q liegt also zum Dreieck C, P, B genauso wie im ersten Beweisteil der Punkt P zum Dreieck A, B, C; somit folgt wie dort: $C \vee PV B = Q \vee PV B$ (*).

Wegen P, Q, R nicht kollinear gilt $R \notin PQ$ und aus $Q \notin PB \Rightarrow B \notin PQ$. Der Punkt R liegt also zum Dreieck B, P, Q genauso wie im ersten Beweisteil der Punkt P zum Dreieck A, B, C $\Rightarrow B \vee PV Q = R \vee PV Q$ (**).

Wir beachten die Kommutativität von \vee und sammeln:

$$P \vee Q \vee R \stackrel{(**)}{=} B \vee P \vee Q \stackrel{(*)}{=} C \vee P \vee B \stackrel{(*)}{=} A \vee B \vee C.$$

Bemerkung: Enthält ein projektiver Raum zwei verschiedene Ebenen, dann ist der Durchschnittsraum dieser beiden Ebenen leer, einpunktig oder eine projektive Gerade. Nach Folg. 1 haben die beiden verschiedenen Ebenen nämlich sicher nicht drei nicht kollineare Punkte gemeinsam.

2) Jede Ebene $\pi_1(\rho_1)$ in einem projektiven Raum \mathbb{T} ist eine projektive Ebene. (Umkehrung zu Bem. (c))

Bew.: i_1 : Wegen $i_1 = I_1$ existiert in \mathbb{T} eine eindeutige Verbindungsgerade und diese liegt, da π_1 Unterraum ist, ganz in π_1 .

i_2 : $g, h \neq *, \in \mathcal{G}_1$ mit $\rho_g, \rho_h \subset \rho_1$.

$E \Rightarrow \exists P, Q \neq *, \in \rho_g \wedge \exists R \in \rho_h$. Wegen I_1 haben ρ_g und ρ_h höchstens einen gemeinsamen Punkt. Wir zeigen, daß ρ_g und ρ_h mindestens einen Punkt gemeinsam haben. Sind

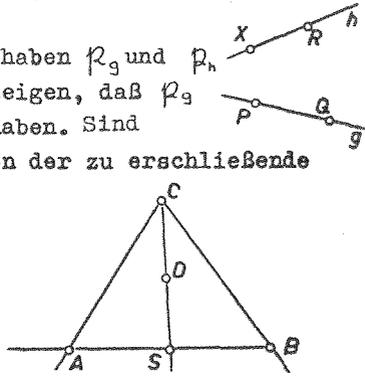
P, Q, R nicht kollinear (sonst wäre R schon der zu erschließende Schnittpunkt), so gilt $\pi_1 = PVQVR$.

$E \Rightarrow \exists X \in \rho_h \setminus \{R\} \Rightarrow X \in \pi_1 = PVQVR \Rightarrow$

$\exists S \in PVQ$ mit $X \in RV S \Rightarrow$

$S \in PVQ = \rho_g \wedge S \in RV X = \rho_h$, d.h. $S \in \rho_g \cap \rho_h$.

e: $\pi_1 = AV BVC$;



$E \Rightarrow \exists S \in AVB$ mit $S \neq A, B \wedge$

$C \notin AB \Rightarrow C+S \xrightarrow{I_1} \exists * SC \xrightarrow{E} \exists D \in SVC$ mit $D \neq S, C, \{A, B, C, D\}$ ist nach Konstruktion ein Viereck in \mathbb{T}_1 .

Bemerkungen: (a) Alle Punkte und Geraden, die einer festen Ebene eines projektiven Raumes angehören, bezeichnen wir i.f. als "komplanar".

(b) Sind g und h zwei verschiedene, einander schneidende Geraden eines projektiven Raumes \mathbb{T} , so ist $\mathbb{T}_g \vee \mathbb{T}_h$ eine Ebene.

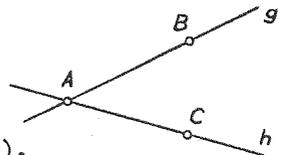
Bew.: Nach Voraussetzung existiert ein Punkt A mit $A \in \mathcal{P}_g \cap \mathcal{P}_h$ und nach Axiom E existieren $B \in \mathcal{P}_g \setminus \{A\}$ und $C \in \mathcal{P}_h \setminus \{A\}$. $g \neq h \Rightarrow A, B, C$ bilden ein Dreieck, daher ist $AVBVC$ eine Ebene. Es genügt $\mathbb{T}_g \vee \mathbb{T}_h = AVBVC$ zu zeigen. $X \in \mathcal{P}_g \vee \mathcal{P}_h \Rightarrow \exists X_1 \in \mathcal{P}_g = AVB \wedge \exists X_2 \in \mathcal{P}_h = AVC$ mit $X \in X_1 \vee X_2$, woraus wegen $X_1 \in AVB$ und $X_2 \in AVC$ folgt $X \in AVB \vee AVC$, was wegen $AVA = A$ (vgl. Def. 3.1c, (III)), der Assoziativität und Kommutativität von \vee bedeutet: $X \in AVBVC$.

Man hat damit:

$$\mathbb{T}_g \vee \mathbb{T}_h \subset AVBVC \quad (*)$$

$X \in AVBVC = (AVB) \vee C \Rightarrow \exists X_1 \in AVB = \mathcal{P}_g$ mit $X \in X_1 \vee C$. Daraus folgt wegen $C \in \mathcal{P}_h$ sofort $X \in \mathbb{T}_g \vee \mathbb{T}_h$. Also gilt: $AVBVC \subset \mathbb{T}_g \vee \mathbb{T}_h$

$(*) \wedge (*) \Rightarrow \mathbb{T}_g \vee \mathbb{T}_h$ ist die Ebene $AVBVC$. (**)



(c) Enthält ein projektiver Raum zwei windschiefe Geraden g, h , so enthält er zwei verschiedene Ebenen.

Bew.: $E \Rightarrow \exists G_1, G_2 \neq A, \in \mathcal{P}_g \wedge \exists H_1, H_2 \neq A, \in \mathcal{P}_h$. $G_1 \vee G_2 \vee H_1$ und $H_1 \vee H_2 \vee G_2$ sind zwei Ebenen. Sie sind verschieden, denn aus ihrer Gleichheit würde folgen: g, h liegen in einer Ebene $\xrightarrow{\text{folgt}} g$ und h haben einen gemeinsamen Punkt: Widerspruch zu windschief.

(d) In einem projektiven Raum sind je zwei Punktreihen gleichmächtig: $|\mathcal{P}_g| = |\mathcal{P}_h|$.

Bew.: o.B.d.A. $g \neq h$. Wir unterscheiden:

Fall 1: g schneidet $h \xrightarrow{\text{Def. 3.1c}} g$ und h liegen in einer Ebene und diese ist gemäß Folg. 2 eine projektive Ebene; also gilt nach Satz 1.2: $|\mathcal{P}_g| = |\mathcal{P}_h|$.

Fall 2: g windschief h . Nach Axiom E $\Rightarrow \exists G \in \mathcal{P}_g \wedge \exists H \in \mathcal{P}_h \wedge G \neq H$. Die nach I_1 existierende Gerade $l := GH$ schneidet g , also gilt nach Fall 1 $|\mathcal{P}_g| = |\mathcal{P}_l|$, und l schneidet h , also gilt $|\mathcal{P}_l| = |\mathcal{P}_h|$.

Zwischenbemerkung:

Sei \mathcal{P} eine Menge und M eine Familie von Teilmengen von \mathcal{P} . Die Teilmenge $m \in M$ heißt "maximales Element" in M , wenn in M kein von m verschiedenes Element existiert, das m enthält.

Unter einer "Kette" von Elementen aus M versteht man eine Familie von Elementen aus M derart, daß von je zwei Elementen der Kette das eine Element das andere Element enthält.

Wir verwenden i.f. den "Maximalitätssatz von HAUSDORFF":

Ist $M \neq \emptyset$ eine Familie von Teilmengen einer Menge \mathcal{P} derart, daß die Vereinigung jeder Kette aus M in M liegt, so existiert in M ein maximales Element.

Bemerkung: Der Maximalitätssatz, das Auswahlaxiom und das Zornsche Lemma sind logisch äquivalent. Zum Beweis müssen transfinite Methoden herangezogen werden. Wir müssen einen solchen Satz hier verwenden, da der projektive Raum $\bar{\mathbb{T}}$ im Sinne einer späteren Definition u.U. unendliche Dimension besitzt.

4) Ist $\bar{\mathbb{T}}(\mathcal{P})$ ein projektiver Raum und sind $\bar{\mathbb{T}}_1(\mathcal{P}_1), \bar{\mathbb{T}}_2(\mathcal{P}_2)$ Unterräume mit $\bar{\mathbb{T}}_1 \cap \bar{\mathbb{T}}_2 = \emptyset$, dann existiert ein zu $\bar{\mathbb{T}}_1$ komplementärer Unterraum $\bar{\mathbb{T}}_1$, der $\bar{\mathbb{T}}_2$ enthält.

Bew.: Wir bezeichnen mit M die Menge aller Unterräume von $\bar{\mathbb{T}}$, die (1) $\bar{\mathbb{T}}_1$ enthalten und

(2) deren Durchschnitt mit $\bar{\mathbb{T}}_1$ leer ist.

Wir wollen auf M den Maximalitätssatz anwenden und überprüfen daher, ob M dessen Voraussetzungen erfüllt: Wegen $\bar{\mathbb{T}}_2 \in M$ ist M nicht leer. Weiters ist zu zeigen, daß die Vereinigung jeder Kette aus M in M liegt. Sei also eine Kette in M vorgegeben und U die Vereinigung aller Unterräume, die der Kette angehören; zu zeigen ist $U \in M$.

U ist Unterraum: $P, Q \in U, \epsilon U$; von der in $\bar{\mathbb{T}}$ existierenden Geraden $\mathcal{P}_{PQ} \subset \mathcal{P}$ ist $\mathcal{P}_{PQ} \subset U$ zu zeigen. Sind P, Q aus demselben Unterraum $\bar{\mathbb{T}}_*$ der Kette, so ist dies trivial: $\mathcal{P}_{PQ} \subset \bar{\mathbb{T}}_* \subset U$. Stammen P, Q aus verschiedenen Unterräumen der Kette, z.B. $P \in \bar{\mathbb{T}}_{**} \wedge Q \in \bar{\mathbb{T}}_{***}$, so gilt nach Definition einer Kette o.B.d.A. $\bar{\mathbb{T}}_{***} \subset \bar{\mathbb{T}}_{**} \Rightarrow Q \in \bar{\mathbb{T}}_{**}$, also liegt stets der triviale erste Fall vor. Jedes Element einer Kette aus M umfaßt wegen (1) den Unterraum $\bar{\mathbb{T}}_1$, daher umfaßt die Vereinigung U aller Kettenelemente ebenfalls $\bar{\mathbb{T}}_1$.

$U \cap \bar{\mathbb{T}}_1 = \emptyset$: (ind.) $\exists X \in U \cap \bar{\mathbb{T}}_1 \Rightarrow X \in U \Rightarrow \exists \bar{\mathbb{T}}_{***} \in M$ mit $X \in \bar{\mathbb{T}}_{***}$,

Widerspruch zu Punkt 2 der Definition von M .

Somit gilt $U \in M$, denn (1) und (2) sind für den Unterraum U erfüllt.

Nach dem Maximalitätssatz existiert ein maximales Element $\bar{\pi}_1$ in M . $\bar{\pi}_1$ ist daher Unterraum, der $\bar{\pi}_2$ enthält und für den $\bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_1 = \emptyset$ gilt, denn diese Eigenschaften sind für alle Elemente von M nach Konstruktion erfüllt.

Um $\bar{\pi}_1$ als Komplement von $\bar{\pi}_1$ zu erweisen, fehlt noch der Beweis von $\bar{\pi}_1 \vee \bar{\pi}_1 = \bar{\pi}$:

(ind.) $\exists P \in \mathcal{Q}$ mit $P \notin \bar{\pi}_1 \vee \bar{\pi}_1 \Rightarrow P \notin \bar{\pi}_1 \Rightarrow \bar{\pi}_1 \vee P \neq \bar{\pi}_1 \Rightarrow \bar{\pi}_1 \vee P \supset \bar{\pi}_1$.

Wegen $\bar{\pi}_2 \subset \bar{\pi}_1$ gilt erst recht $\bar{\pi}_1 \vee P \supset \bar{\pi}_2$. Der Unterraum $\bar{\pi}_1 \vee P$ erfüllt also (1). Wir zeigen, daß er auch (2) erfüllt: $(\bar{\pi}_1 \vee P) \cap \bar{\pi}_1 = \emptyset$.

(ind.) $\exists Y$ mit $Y \in \bar{\pi}_1 \wedge Y \in \bar{\pi}_1 \vee P$. Wegen $Y \in \bar{\pi}_1 \vee P \Rightarrow \exists \bar{Y} \in \bar{\pi}_1$ mit $Y \in P \vee \bar{Y}$ ($P \notin \bar{\pi}_1 \vee \bar{\pi}_1 \Rightarrow P \notin \bar{\pi}_1 \Rightarrow P \neq Y$), d.h. $PY = Y\bar{Y}$ ($Y \neq \bar{Y}$ wegen $\bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_1 = \emptyset$) $\Rightarrow P \in Y \vee \bar{Y}$ mit $Y \in \bar{\pi}_1$ und $\bar{Y} \in \bar{\pi}_1$, dies bedeutet: $P \in \bar{\pi}_1 \vee \bar{\pi}_1$: Widerspruch.

Der Unterraum $\bar{\pi}_1 \vee P$ erfüllt also (1) und (2), d.h. es gilt $\bar{\pi}_1 \vee P \in M$ und $\bar{\pi}_1 \vee P$ umfaßt $\bar{\pi}_1$, was jedoch ein Widerspruch zur Maximalitätseigenschaft von $\bar{\pi}_1$ in M ist.

Es gibt also keinen Punkt $P \in \mathcal{Q}$, der nicht zu $\bar{\pi}_1 \vee \bar{\pi}_1$ gehört, d.h. $\bar{\pi}_1 \vee \bar{\pi}_1 = \bar{\pi}$.

Bemerkungen: (a) Wenn \mathcal{Q} mindestens zwei verschiedene Punkte enthält, so existieren (nicht leere) Hyperebenen. ◆

Bew.: $X, Y | \neq, \in \mathcal{Q}$; $X := \bar{\pi}_1, Y := \bar{\pi}_2$ und es gilt $\bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_2 = \emptyset$. Gemäß Folg.4 existiert ein Unterraum $\bar{\pi}_1$ mit $\bar{\pi}_2 = Y \subset \bar{\pi}_1$ und $\bar{\pi}_1 \vee \bar{\pi}_1 = \bar{\pi}$ und $\bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_1 = \emptyset$. $\bar{\pi}_1 \neq \bar{\pi}_0$ ist also ein zum Punkt $X = \bar{\pi}_1$ komplementärer Unterraum, nach Def.3.2 eine Hyperebene.

Bezeichnung: Wir verwenden i.f. für Hyperebenen griechische Indizes, also $\bar{\pi}_\alpha$ (ρ_α).

(b) Jeder echte Unterraum $\bar{\pi}_1$ eines projektiven Raumes $\bar{\pi}$ ist Teilraum einer Hyperebene. ◆

Bew.: Nach Voraussetzung $\exists P \in \mathcal{Q}$ mit $P \notin \bar{\pi}_1$, d.h. $\bar{\pi}_P \cap \bar{\pi}_1 = \emptyset$. Nach Folg.4 existiert ein zu $\bar{\pi}_P$ komplementärer Unterraum $\bar{\pi}_P$ (also eine Hyperebene) mit $\bar{\pi}_P \supset \bar{\pi}_1$.

(c) Eine Hyperebene $\bar{\pi}_\alpha$ ist komplementärer Unterraum zu jedem Punkt P mit $P \notin \bar{\pi}_\alpha$. ◆

Bew.: Gemäß Def.3.2 existiert ein Punkt Q mit $\bar{\pi}_\alpha \cap Q = \emptyset$ und $\bar{\pi}_\alpha \vee Q = \bar{\pi}$. Gelte o.B.d.A. $P \neq Q$.

Nach Folgerung 4 existiert zu P ein komplementärer Unterraum $\bar{\pi}_P$ mit $\bar{\pi}_P \supset \bar{\pi}_\alpha$, denn $P \cap \bar{\pi}_\alpha = \emptyset$. Es genügt $\bar{\pi}_P = \bar{\pi}_\alpha$ zu zeigen: (ind.) $\exists X \in \bar{\pi}_P$ mit $X \notin \bar{\pi}_\alpha \Rightarrow \exists X_1 \in \bar{\pi}_\alpha$ mit $X \in X_1 \vee Q$ ($X_1 \neq X$).

$X_1 \in \pi_\alpha \subset \overline{\pi}_p \wedge X \in \overline{\pi}_p \Rightarrow \mathcal{R}_{XX_1} \subset \overline{\pi}_p$, was zusammen mit $Q \in \mathcal{R}_{XX_1}$ bedeutet $Q \in \overline{\pi}_p$.
 $\overline{\pi}_\alpha \subset \overline{\pi}_p \wedge Q \in \overline{\pi}_p \Rightarrow \pi_\alpha \vee Q = \pi \subset \overline{\pi}_p$: Widerspruch zu $P \notin \overline{\pi}_p$.

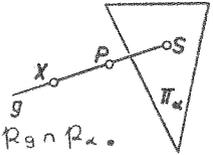
Zwischenbemerkung:

Ein Verband $\{L, \cup, \cap\}$ mit Nullelement 0 und Einselement 1 heißt "komplementiert", wenn zu jedem $a \in L$ ein komplementäres Element $\bar{a} \in L$ existiert, für welches gilt:
 $a \cup \bar{a} = 1 \wedge a \cap \bar{a} = 0$.

Damit gilt: $u\pi$ ist ein komplementierter Verband.

5) Jede Gerade $g \in \mathcal{U}$, die nicht ganz in der Hyperebene $\pi_\alpha(\mathcal{R}_\alpha)$ liegt ($\mathcal{R}_g \not\subset \mathcal{R}_\alpha$), hat mit π_α genau einen gemeinsamen Punkt.

Bew.: $\mathcal{R}_g \not\subset \mathcal{R}_\alpha \Rightarrow \exists P \in \mathcal{R}_g$ mit $P \notin \mathcal{R}_\alpha$. Aus Axiom E $\Rightarrow \exists X \in \mathcal{R}_g \setminus \{P\}$. Da π_α Hyperebene ist und $P \notin \pi_\alpha$ gilt nach Folgerung 4, Bem. (c): $P \vee \pi_\alpha = \pi$.



$X \in P \vee \pi_\alpha = \pi \Rightarrow \exists S \in \mathcal{R}_\alpha$ mit $X \in P \vee S \Rightarrow S$ gehört zu $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{R}_\alpha$.

Ein zweiter Schnittpunkt kann wegen $\mathcal{R}_g \not\subset \mathcal{R}_\alpha$ nicht existieren.

SATZ 3.2: Jede Ebene in einem projektiven Raum ist eine projektive

Ebene. Je zwei verschiedene Ebenen in einem projektiven Raum haben nie drei nicht kollineare Punkte gemeinsam. Jede Gerade trifft jede Hyperebene, in der sie nicht liegt, in genau einem Punkt. Je zwei Punktreihen eines projektiven Raumes sind gleichmächtig. Der Verband der Unterräume eines nichtleeren projektiven Raumes ist komplementiert.

Bemerkungen: (a) Die Hyperebenen einer projektiven Ebene π sind genau ihre Geraden.

Bew.: (a) Sei π_α eine Hyperebene in π , also komplementärer Unterrraum eines Punktes $C \notin \pi_\alpha$. π_α ist sicher nicht einpunktig, sonst wäre π eine Menge von kollinearen Punkten im Widerspruch zu e. π_α enthält also mindestens zwei verschiedene Punkte P, Q und damit gilt $\mathcal{R}_{PQ} \subset \pi_\alpha$. Es gilt sogar $\mathcal{R}_{PQ} = \pi_\alpha$: Würde nämlich π_α einen Punkt X enthalten, der nicht auf PQ liegt, so wäre $P \vee Q \vee X = \pi \subset \pi_\alpha$ im Widerspruch zu $C \notin \pi_\alpha$.

(b) Sei g eine Gerade $\stackrel{e}{\Rightarrow} \exists P \in \mathcal{R}$ mit $P \notin \mathcal{R}_g$ und $\exists A, B \in \mathcal{R}$, $A, B \in \mathcal{R}_g$ mit $\pi = P \vee A \vee B = P \vee \mathcal{R}_g$, also ist \mathcal{R}_g komplementärer Unterrraum eines Punktes und somit Hyperebene.

(b) Folgerung 5 lautet speziell für projektive Ebenen: Zwei verschiedene Geraden haben genau einen Punkt gemeinsam (das ist i_2). Im Gegensatz zur Axiomatik in § 1 ist i_2 für projektive Ebenen im Sinne der Axiomatik in § 3 ein beweisbarer Satz.

3.3. Der Satz von Desargues in projektiven Räumen

Dieses Kapitel entspricht dem Kapitel 1.5. Die Begriffe Z-perspektiv und a-perspektiv sind wie in 1.5 zu fassen.

SATZ 3.3: In jedem projektiven Raum, in dem zwei windschiefe Geraden existieren, gilt der Satz von Desargues.

Bew.: Seien P_i und Q_i ($i=1,2,3$) zwei Z-perspektive Dreiecke. $P_1 \vee P_2 \vee P_3$ und $Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3$ sind Ebenen, und wir unterscheiden die beiden Fälle:

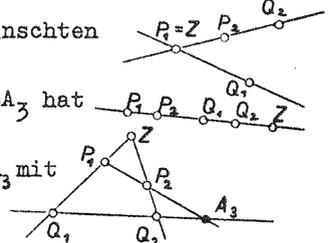
(a) $P_1 \vee P_2 \vee P_3 * Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3$ (dieser Fall ist nach 3.2, Folg.3, Bem.(c) möglich).

Wir zeigen zunächst, daß ein Punkt $A_3 \in \mathcal{R}$ mit $A_3 \in P_1 \vee P_2 \wedge A_3 \in Q_1 \vee Q_2$ existiert; dazu unterscheiden wir:

(i) $P_1 = Z$; der Punkt $Q_2 = A_3$ hat die gewünschten Eigenschaften.

(ii) $Z \in P_1 P_2, Z \notin P_1, P_2$; der Punkt $Q_2 = A_3$ hat die gewünschten Eigenschaften.

(iii) P_1, P_2, Z bilden ein Dreieck $\stackrel{I_3}{\Rightarrow} \exists A_3$ mit $A_3 \in P_1 P_2$ und A_3, Q_1, Q_2 kollinear.



Wir vertauschen nun die Indizes 1,2,3 zyklisch und erhalten:

$$\exists A_1 \text{ mit } A_1 \in P_2 \vee P_3 \wedge A_1 \in Q_2 \vee Q_3 \wedge$$

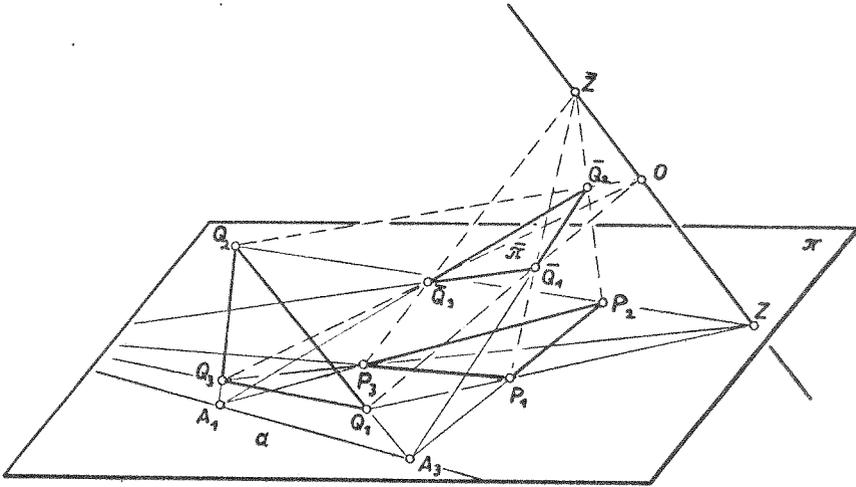
$$\exists A_2 \text{ mit } A_2 \in P_3 \vee P_1 \wedge A_2 \in Q_3 \vee Q_1.$$

Demnach gilt: $A_1, A_2, A_3 \in P_1 \vee P_2 \vee P_3$ und

$$A_1, A_2, A_3 \in Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3.$$

A_1, A_2, A_3 sind daher Punkte des Durchschnitts der beiden verschiedenen Ebenen $P_1 \vee P_2 \vee P_3$ und $Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3$. Nach 3.2, Folg.1, Bem. ist dieser Durchschnitt leer, einpunktig oder eine Gerade und daher sind A_1, A_2, A_3 kollinear. Es existiert also eine Achse a , sodaß die zu P_i und Q_i gehörigen Dreiseite a-perspektiv sind.

(b) $P_1 \vee P_2 \vee P_3 = Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3 =: \pi$. Nach 1.5 genügt es, in der projektiven Ebene π (nach 3.1, Folg.1) nur nichttriviale Desarguesfiguren zu untersuchen.



Nach Voraussetzung gibt es außerhalb von π sicher eine Gerade und nach E gibt es daher einen Punkt $O \in \rho$ mit $O \notin \pi$. Nach I_1 existiert die Verbindungsgerade $OZ =: z$ eindeutig und nach Axiom E existiert ein Punkt $\bar{Z} \in O \vee Z$ mit $\bar{Z} \neq |O, Z$ ($\Rightarrow \bar{Z} \notin \pi$, da sonst mit $\rho_{Oz} \subset \pi$ folgt $O \in \pi$).

Z, P_1, \bar{Z} ist ein Dreieck (wegen $Z \neq P_1 \wedge \bar{Z} \notin \pi$) $\stackrel{I_1}{\Rightarrow} \exists \bar{Q}_1$ mit $\bar{Q}_1 \in \bar{Z}P_1 \wedge O, Q_1, \bar{Q}_1$ kollinear. Es gilt $\bar{Q}_1 \notin \pi$ (wegen $\bar{Z} \notin \pi$ und $P_1 \neq Q_1$). Analog sind \bar{Q}_2 und \bar{Q}_3 zu konstruieren.

$\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3$ bilden ein Dreieck.

(ind.) $\exists g \in \rho_j$ mit $\bar{Q}_j \in g \Rightarrow \rho_{O\bar{Q}_j} \subset \pi_j \vee O$ für $j=1,2,3 \Rightarrow$

$Q_j \in \pi_j \vee O$ für $j=1,2,3$. $\pi_j \vee O$ kann eine Gerade oder eine Ebene sein: Der erste Fall ist unmöglich, denn in einer Geraden kann das Dreieck Q_j nicht enthalten sein; also ist $\pi_j \vee O$ eine Ebene, die das Dreieck Q_j enthält; dann gilt nach 3.2, Folg.1

$\pi_j \vee O = Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3 = \pi \Rightarrow O \in \pi$: Widerspruch zu $O \notin \pi$.

Die Ebenen $\bar{\pi} := \bar{Q}_1 \vee \bar{Q}_2 \vee \bar{Q}_3$ und π sind verschieden wegen $\bar{Q}_1 \notin \pi$.

Die Dreiecke P_j und \bar{Q}_j liegen \bar{Z} -perspektiv und gehören verschiedenen Ebenen an; nach Beweisschritt (a) liegen sie dann auch perspektiv bezüglich einer Achse a . Wir wissen bereits: Der Punkt A_3 mit $A_3 \in P_1 P_2 \wedge A_3 \in \bar{Q}_1 \bar{Q}_2$ liegt auf dieser Achse a . Außerdem ist A_3 der einzige Punkt von $\bar{Q}_1 \bar{Q}_2$, der in π liegt, denn sonst würde gelten $\bar{Q}_1 \bar{Q}_2 \subset \pi$, also $\bar{Q}_1 \in \pi$: Widerspruch. Wegen $O \notin \pi$ und $Q_1 \neq Q_2$ ist O, Q_1, Q_2 ein Dreieck; nach Axiom I_2 existiert daher ein Punkt R mit $R \in Q_1 Q_2 \subset \pi$ und R, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2 kollinear. Da A_3 der einzige Punkt auf $\bar{Q}_1 \bar{Q}_2$ ist, der in π liegt, folgt $R=A_3$. Es gilt also $Q_1 Q_2, \bar{Q}_1 \bar{Q}_2$ und $P_1 P_2$ treffen einander in A_3 .

Analoges gilt für A_2 und A_1 ; da A_1, A_2, A_3 kollinear sind, ist damit die Existenz einer Desarguesachse für P_j und Q_j erwiesen. ◆

Bemerkung: Beweisschritt (b) kommt bereits in 1.12 vor, wo gezeigt wurde, daß die PAE desarguessch ist. Dort wurde gefordert, daß PAE in einem PAR liegt. Wegen der Forderung der Existenz zweier windschiefer Geraden liegt π als echter Unterraum in einem projektiven Raum. Der Beweisschritt (b) kann also umformuliert werden zu:

Ist eine projektive Ebene echter Unterraum eines projektiven Raumes, so ist sie desarguessch. Ist eine projektive Ebene nicht desarguessch, so läßt sie sich sicher nicht in einen projektiven Raum als echter Unterraum einbetten.

Wir werden später auch die Umkehrung beweisen: Ist eine projektive Ebene desarguessch, so läßt sie sich in einen projektiven Raum als echter Unterraum einbetten (vgl. §5).

3.4. Kollineationen in projektiven Räumen

Aus 1.3 ist bereits der Begriff des Isomorphismus zweier Inzidenzstrukturen bekannt und außerdem die Tatsache, daß die Menge aller Automorphismen einer Inzidenzstruktur bezüglich des Hintereinanderausführens eine Gruppe bildet. Neu zu fassen ist hingegen der Begriff Kollineation (vgl. Def. 1.3b), wobei wir Kollineationen nur für projektive Räume definieren wollen, die genügend Struktur tragen, d.h. die nicht leer, nicht einpunktig und keine projektiven Geraden sind.

DEF. 3.4 a: Sind $\mathbb{T}(\rho)$ und $\mathbb{T}'(\rho')$ zwei projektive Räume, in denen je drei nicht kollineare Punkte existieren, so heißt eine Abbildung $\alpha: \rho \rightarrow \rho'$ eine Kollineation, wenn gilt:

- (I) α ist bijektiv
- (II) kollineare Punkte gehen in kollineare Punkte über
- (III) nicht kollineare Punkte gehen in nicht kollineare Punkte über.

Bemerkungen: (a) Die Forderung (III) ist eine Folge von (I) und (II), wenn \mathbb{T} eine projektive Ebene ist.

Bew.: Vgl. 1.3, Folg. 2: Im Beweis wurde an dieser Stelle nicht benutzt, daß \mathbb{T}' eine projektive Ebene ist, sondern nur, daß ein Dreieck in \mathbb{T}' existiert. Dies war dort eine Folge der Axiome und ist jetzt gemäß Def. 3.4 a erfüllt.

(b) Wir werden in 3.7 weitere Fälle kennenlernen, wo (III) eine Folge von (I) und (II) ist.

Folgerungen:

1) Ist $(\varphi_\rho, \varphi_{\rho'})$ ein Isomorphismus $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}'$, wobei \mathbb{T} und \mathbb{T}' projektive Räume sind, die je ein Dreieck enthalten, dann ist φ_ρ eine Kollineation.

Bew.: Für (I) und (II) ist der Beweis identisch mit jenem zu 1.3, Folg. 1. Die Gültigkeit von (III) folgt sofort aus Def. 1.3 a, (III).

2) In 1.3, Folg. 2 wurde gezeigt: Jede Kollineation $\alpha: \rho \rightarrow \rho'$ bestimmt einen Isomorphismus. Wir setzten $\alpha =: \varphi_\rho$ und konstruieren $\varphi_{\rho'}$ dazu wie in 1.3 durch:
 $g \in \mathcal{G} \wedge P, Q \in \rho, \varepsilon \in \rho$ mit $P, Q \in g$. Es sei $g \varphi_{\rho'} := P \times Q \alpha$. Wie in 1.3 ist zu zeigen, daß diese Definition sinnvoll und $(\alpha, \varphi_{\rho'})$ ein Isomorphismus ist. Dazu mußte dort auch bewiesen werden, daß nicht kollineare Punkte in nicht kollineare Punkte übergehen, dies ist jedoch jetzt vorausgesetzt; alles andere bleibt gleich.

Bemerkungen: (a) In 1.3 wurde die zu $\alpha = \varphi_\rho$ ergänzte Abbildung $\varphi_{\rho'}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ mit α^* bezeichnet. Wir bezeichnen jetzt $\varphi_{\rho'}$ mit α , da wir das Zeichen "*" für eine andere Abbildung benötigen, die im Falle einer projektiven Ebene mit α^* zusammenfällt (vgl. 3.8).
(b) In 1.3 wurde zu $\alpha^*: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$, wobei α^* bijektiv war und kopunktuale Geraden in ebensolche überführte, eine

Abbildung α konstruiert, sodaß (α, α^*) ein Isomorphismus war. Dies können wir jetzt nicht mehr nachahmen, denn es steht im projektiven Raum noch kein Dualitätsprinzip zur Verfügung; außerdem sind nach Einführung eines solchen Prinzips die Punkt- und die Geradenmenge i.a. nicht dual (vgl. 3.8).

(c) Wie in 1.3 erkennt man, daB die Menge aller Autokollineationen eines projektiven Raumes bezüglich des Hintereinanderausführens eine Gruppe bildet. Sie heißt $P\Gamma(\Pi)$.

3) Mit jeder Kollineation $\alpha: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ ist $\hat{\alpha}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ verknüpft, sodaß $(\alpha, \hat{\alpha})$ ein Isomorphismus ist. Wir verknüpfen mit jedem Isomorphismus nun eine Abbildung $\bar{\alpha}: u\Pi \rightarrow u\Pi'$; $\bar{\alpha}$ ordnet also jedem Unterraum $\Pi_1(\mathcal{R}_1, \mathcal{U}_1, I_{ind}) \in u\Pi$ einen Unterraum von Π' zu. Wir definieren:

$$\Pi_1 \bar{\alpha} := \{ \mathcal{R}_1 \alpha, \mathcal{U}_1 \hat{\alpha}, I'_{ind} \}.$$

Sicher gilt: $\Pi_0 \bar{\alpha} = \Pi'_0, \Pi \bar{\alpha} = \Pi'$.

$\forall P \in \mathcal{R}$ gilt: $\Pi_P \bar{\alpha} = \Pi'_{P\alpha}$ (aus $\Pi_P = \{ \{P\}, \emptyset, \emptyset \}$ folgt: $\Pi_P \bar{\alpha} = \{ \{P\alpha\}, \emptyset, \emptyset \} = \Pi'_{P\alpha}$). Es gilt daher $\alpha = \bar{\alpha}|_{\mathcal{R}}$, wobei die Elemente von \mathcal{R} als Unterräume aufzufassen sind.

$\forall g \in \mathcal{U}$ gilt: $\Pi_g \bar{\alpha} = \Pi'_{g\hat{\alpha}}$ (aus $\Pi_g = \{ \mathcal{R}_g, \{g\}, \epsilon \}$ folgt wegen (II) und (III): $\Pi_g \bar{\alpha} = \{ \mathcal{R}_g \alpha, \{g\hat{\alpha}\}, \epsilon \} = \Pi'_{g\hat{\alpha}}$). Es gilt daher $\hat{\alpha} = \bar{\alpha}|_{\mathcal{U}}$, wobei die Elemente von \mathcal{U} als Unterräume aufzufassen sind.

Wir behaupten:

- (1) $\bar{\alpha}$ ist Bijektion $u\Pi \rightarrow u\Pi'$.
- (2) $(\Pi_1 \vee \Pi_2) \bar{\alpha} = \Pi_1 \bar{\alpha} \vee \Pi_2 \bar{\alpha}$.
- (3) $(\Pi_1 \cap \Pi_2) \bar{\alpha} = \Pi_1 \bar{\alpha} \cap \Pi_2 \bar{\alpha}$.
- (4) $\bar{\alpha}$ führt Hyperebenen in Hyperebenen über.

Bew.: $\Pi_1 \bar{\alpha} \in u\Pi'$: $P', Q' | *, \in \Pi_1 \bar{\alpha}$ und R' kollinear mit P', Q' . Da α bijektiv ist, existieren $P, Q | *, \in \Pi_1$ mit $P\alpha = P' \wedge Q\alpha = Q'$, und es existiert $R \in \Pi_1$ mit $R\alpha = R'$; wegen (III) ist R mit $P, Q | \in \Pi_1$ kollinear und, da Π_1 Unterraum ist, folgt: $R \in \Pi_1 \Rightarrow R' \in \Pi_1 \bar{\alpha} \Rightarrow \Pi_1 \bar{\alpha} \in u\Pi'$.

Zu (1): $\bar{\alpha}$ ist global: da α global ist, wird jeder Unterraum von Π bei $\bar{\alpha}$ abgebildet.

$\bar{\alpha}$ ist injektiv: $\Pi_1 \neq \Pi_2 \Rightarrow \mathcal{R}_1 \neq \mathcal{R}_2 \Rightarrow$ (o.B.d.A.) $\exists P \in \mathcal{R}_1$ mit $P \notin \mathcal{R}_2 \Rightarrow P\alpha \in \mathcal{R}_1 \alpha$ mit $P\alpha \notin \mathcal{R}_2 \alpha \Rightarrow \Pi_1 \bar{\alpha} \neq \Pi_2 \bar{\alpha}$.

$\bar{\alpha}$ ist surjektiv: Sei $\Pi'_1(\mathcal{R}'_1) \in u\Pi'$. Da α injektiv ist existiert α^{-1} ; wir haben zu zeigen, daB $\mathcal{R}_1 \alpha^{-1} =: \mathcal{R}_1$ ein Unterraum von Π ist. $P, Q | *, \in \mathcal{R}_1$ und $R \in \mathcal{R}$ kollinear zu $P, Q \Rightarrow P\alpha, Q\alpha | *, \in \mathcal{R}'_1$

und $R\bar{x}$ ist wegen (II) kollinear mit $P\bar{x}, Q\bar{x}$; da $\bar{\Pi}_1$ Unterraum in $\bar{\Pi}'$ ist und $P\bar{x}, Q\bar{x} \in \bar{\rho}'_1$, folgt $R\bar{x} \in \bar{\rho}'_1 \Rightarrow R \in \bar{\rho}_1 \Rightarrow \bar{\Pi}_1(\bar{\rho}_1)$ ist Unterraum von $\bar{\Pi}$.

Somit ist \bar{x} eine Bijektion. ◇

Zu (2): In den Fällen $\bar{\Pi}_1 = \bar{\Pi}_0$ oder $\bar{\Pi}_1 = \bar{\Pi}_0$ oder $\bar{\Pi}_1 = \bar{\Pi}_2$ ist die Behauptung trivial. Es liegen also o.B.d.A. die Voraussetzungen zu Def. 3.1c,

(V) vor:

$$\bar{\Pi}_1 \vee \bar{\Pi}_2 = \bigcup_{\substack{x_1 \in \bar{\rho}_1 \\ x_2 \in \bar{\rho}_2}} X_1 \vee X_2.$$

(a) $X' \in (\bar{\Pi}_1 \vee \bar{\Pi}_2) \bar{x} \stackrel{\text{Def. } \bar{x}}{\Rightarrow} \exists X \in \bar{\Pi}_1 \vee \bar{\Pi}_2$ mit $X' = X\bar{x} \Rightarrow \exists X_j \in \bar{\Pi}_j$ ($j=1,2$) mit $X \in X_1 \vee X_2$, d.h. X, X_1, X_2 kollinear. Da \bar{x} global ist, existieren $X_1\bar{x} \in \bar{\Pi}_1\bar{x}$, $X_2\bar{x} \in \bar{\Pi}_2\bar{x}$ und wegen Def. 3.4a, (II) sind $X', X_1\bar{x}, X_2\bar{x}$ kollinear, d.h. $X' \in \bar{\Pi}_1\bar{x} \vee \bar{\Pi}_2\bar{x}$.

(b) $X' \in \bar{\Pi}_1\bar{x} \vee \bar{\Pi}_2\bar{x} \Rightarrow \exists X'_j \in \bar{\Pi}_j\bar{x}$ mit $X' \in X'_1 \vee X'_2$, d.h. X', X'_1, X'_2 kollinear. Da \bar{x} bijektiv ist existieren $X_j \in \bar{\Pi}_j$ mit $X'_j\bar{x} = X_j$ und $X \in \bar{\rho}$, und wegen (III) sind X, X_1, X_2 kollinear, d.h. $X \in X_1 \vee X_2 \Rightarrow X \in \bar{\Pi}_1 \vee \bar{\Pi}_2 \Rightarrow X' \in (\bar{\Pi}_1 \vee \bar{\Pi}_2) \bar{x}$. ◇

Zu (3): $(\bar{\rho}_1 \cap \bar{\rho}_2)\bar{x} = \bar{\rho}_1\bar{x} \cap \bar{\rho}_2\bar{x}$, da \bar{x} bijektiv ist. Es gilt nämlich:

Zwischenbemerkung:

Für eine beliebige Abbildung $\varphi: A \rightarrow B$ gilt trivialerweise $(M \cap N)\varphi \subset M\varphi \cap N\varphi$, wobei M, N Teilmengen von A sind.

Ist φ bijektiv, so gilt sogar:

$$(M \cap N)\varphi = M\varphi \cap N\varphi.$$

Bew.: $y \in M\varphi \cap N\varphi \Rightarrow y \in M\varphi \wedge y \in N\varphi \Rightarrow \exists y\varphi^{-1}$ wegen φ surjektiv und zwar eindeutig wegen φ injektiv und es gilt:

$$y\varphi^{-1} \in M \wedge y\varphi^{-1} \in N \Rightarrow y\varphi^{-1} \in M \cap N \Rightarrow y \in (M \cap N)\varphi.$$

◇

Zu (4): Ist $\bar{\Pi}_\alpha$ eine Hyperebene von $u\bar{\Pi}$, dann existiert $P \in \bar{\rho}$ mit $P\bar{x} \in \bar{\Pi}_\alpha$ und $P\bar{x} \vee \bar{\Pi}_\alpha = \bar{\Pi}$. Der Punkt $P\bar{x}$ liegt dann wegen Definition von $\bar{\Pi}_\alpha\bar{x}$ nicht im Unterraum $\bar{\Pi}_\alpha\bar{x}$, und es gilt:

$$P\bar{x} \vee \bar{\Pi}_\alpha\bar{x} \stackrel{(2)}{=} (P \vee \bar{\Pi}_\alpha)\bar{x} = \bar{\Pi}\bar{x} = \bar{\Pi}', \text{ also ist } \bar{\Pi}_\alpha\bar{x} \text{ Komplement des Punktes } P\bar{x}, \text{ d.h. } \bar{\Pi}_\alpha\bar{x} \text{ ist Hyperebene.}$$

◇

Bemerkung: Die Kollineation $\bar{x}: \bar{\rho} \rightarrow \bar{\rho}'$ "bestimmt" also die allgemeinere Abbildung $\bar{x}: u\bar{\Pi} \rightarrow u\bar{\Pi}'$. Eine globale Abbildung zwischen zwei Verbänden, die bijektiv ist und (2) und (3) erfüllt, heißt "Verbandsisomorphismus". Jede Kollineation $\bar{x}: \bar{\rho} \rightarrow \bar{\rho}'$ bestimmt also einen Verbandisomorphismus $\bar{x}: \{u\bar{\Pi}, \vee, \cap\} \rightarrow \{u\bar{\Pi}', \vee, \cap\}$.

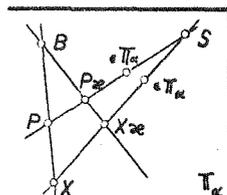
DEF.3.4 b: Eine Autokollineation $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ eines projektiven Raumes, der ein Dreieck enthält, heißt perspektive Kollineation, wenn eine Hyperebene punktweise festbleibt.

Bemerkungen: (a) Wir bezeichnen die Fixpunkthyperebene i.f. als "Achse" $\mathbb{T}_\alpha(\mathcal{P}_\alpha)$. Es gilt $\alpha|_{\mathbb{T}_\alpha} = \text{id}$.

(b) Für projektive Ebenen deckt sich Def.3.4 b mit Def.1.4 a, denn die Geraden sind die Hyperebenen der projektiven Ebenen (vgl. Bem.(a) nach Satz 3.2).

4) Jede perspektive Kollineation besitzt ein Zentrum.

Der Beweis ist bis auf folgende Änderung gleich jenem zu 1.4, Folg.1: In (a) wird die Existenz von $A=XF.a$ aus I_2 erschlossen; dies ist nun durch 3.2, Folg.5 zu ersetzen: Jede Gerade $\notin \mathbb{T}_\alpha$ hat nämlich mit der Hyperebene \mathbb{T}_α genau einen Punkt gemeinsam. Ebenso ist in Beweisschritt (b) die Existenz von Z und A aus 3.2, Folg.5 zu erschließen. Die Gerade PX in Beweisschritt (b), Fall 4 schneidet nach 3.2, Folg.5 die Fixpunktebene \mathbb{T}_α in einem Punkt B mit $B\alpha = B$, und da α kollineare Lage erhält, sind $P\alpha$, $B\alpha = B$ und $X\alpha$ kollinear. Die Existenz des Punktes S kann nun aus I_2 erschlossen werden, wenn wir I_2 auf das Dreieck $P, P\alpha, B$ und die Gerade $XX\alpha$ anwenden.



5) Die Punktreihen durch Z bleiben bei der perspektiven Kollineation α als Ganzes fest (Kollineationsstrahlen). Wir behaupten ferner: Ist $\mathbb{T}_1(\mathcal{P}_1) \in u\mathbb{T}$ mit $Z \in \mathcal{P}_1$ und enthält \mathcal{P}_1 ein Dreieck, so ist $\alpha|_{\mathcal{P}_1}$ eine perspektive Kollineation in \mathbb{T}_1 .

Bew.: $\alpha|_{\mathcal{P}_1}$ ist eine Selbstabbildung von \mathcal{P}_1 :

$X \in \mathcal{P}_1 \wedge X=Z \Rightarrow X\alpha = Z \in \mathcal{P}_1$.

$X \in \mathcal{P}_1 \wedge X \neq Z \Rightarrow X, X\alpha, Z$ kollinear; $X, Z \in \mathcal{P}_1 \wedge \mathbb{T}_1(\mathcal{P}_1)$ ist Unterraum $\Rightarrow X\alpha \in \mathcal{P}_1$.

Mit α ist auch $\alpha|_{\mathcal{P}_1}$ global und injektiv.

$\alpha|_{\mathcal{P}_1}$ ist surjektiv: $X' \in \mathcal{P}_1$; da α surjektiv ist, existiert ein X aus \mathcal{P} mit $X\alpha = X'$ und es gilt X, X', Z kollinear und $X', Z \in \mathcal{P}_1 \Rightarrow X \in \mathcal{P}_1$.

$\alpha|_{\mathcal{P}_1}$ ist also Bijektion und erfüllt ebenso wie α auch (II) und (III) in Def. 3.4a.

Wir haben noch zu zeigen, daß $\alpha|_{\mathcal{R}_1}$ eine perspektive Kollineation ist. Gilt speziell $\Pi_1 \subset \Pi_\alpha$, so ist $\alpha|_{\mathcal{R}_1} = \iota$ und die Behauptung ist trivialerweise erfüllt. Für $\Pi_1 \not\subset \Pi_\alpha$ sind alle Punkte von $\Pi_1 \cap \Pi_\alpha$ unter α fix und es ist nur noch zu zeigen, daß $\Pi_1 \cap \Pi_\alpha$ eine Hyperebene von Π_1 ist. $\Pi_1 \not\subset \Pi_\alpha \Rightarrow \exists P \in \mathcal{R}_1$ mit $P \notin \Pi_\alpha$. Aus dem modularen Gesetz für den Verband $u\Pi$ folgt mit $PV\Pi_\alpha = \Pi$ nach 3.1, Folg.7 dann $PV(\Pi_\alpha \cap \Pi_1) = (PV\Pi_\alpha) \cap \Pi_1 = \Pi \cap \Pi_1 = \Pi_1$. Da $P \notin \Pi_\alpha \cap \Pi_1$ ist somit $\Pi_\alpha \cap \Pi_1$ Hyperebene von Π_1 . ◆

Bemerkung: Nach dem letzten Beweisschritt gilt: Eine Hyperebene schneidet einen nicht in ihr enthaltenen Unterraum nach einer Hyperebene dieses Unterraumes.

Wie in Def. 1.4 b können Homologien und Elationen in Π definiert werden.

6) Wörtlich gleich mit 1.4, Folg.2 ist zu zeigen: Besitzt eine perspektive Kollineation α einen vom Zentrum verschiedenen Fixpunkt, der nicht der Achse Π_α angehört, so ist α notwendig die Identität.

Wörtlich gleich mit 1.4, Folg.3 ist zu zeigen: Die Menge aller perspektiven Kollineationen mit festem Zentrum Z und fester Achse Π_α bildet bezüglich des Hintereinanderausführens eine Gruppe; diese heißt $PGL(Z, \Pi_\alpha)$ und ist Untergruppe von $P'L(\Pi)$.

7) Ebenso wie in 1.4, Folg.4 ist zu zeigen:

Sind gegeben: Zentrum Z , Achse Π_α (Hyperebene) und $P, P' \in \mathcal{R}$ mit $P, P' \notin \Pi_\alpha \wedge P, P', Z$ paarweise verschieden \wedge kollinear, so existiert höchstens eine perspektive Kollineation α mit Zentrum Z , Achse Π_α und $P\alpha = P'$.

SATZ 3.4: Zwei projektive Räume, von denen jeder mindestens ein Dreieck enthält, sind genau dann isomorph, wenn eine Kollineation zwischen ihren Punktmengen existiert. Bei einer Kollineation gehen Unterräume in Unterräume und Durchschnitts- bzw. Verbindungsräume in Durchschnitts- bzw. Verbindungsräume

über, speziell Hyperebenen in Hyperebenen. Die Menge aller Autokollineationen bildet bezüglich des Hintereinanderausführens die Kollineationsgruppe $P\Gamma L(\Pi)$. Jede perspektive Kollineation, welche nicht trivial ist, besitzt genau ein Zentrum, und jeder Unterraum, der das Zentrum enthält, bleibt als Ganzes fest.

3.5. Desargues-, Pappus- und Fanoräume und ihre Algebraisierung

Nach 3.3 ist es sinnvoll zu definieren:

DEF.3.5 a: Ein projektiver Raum heißt Desarguesraum, wenn er entweder eine projektive Desarguesebene ist oder zwei windschiefe Geraden enthält.

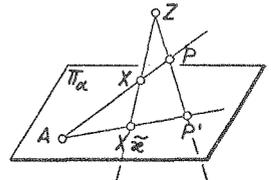
Folgerungen:

1) In einem Desarguesraum Π_D existiert "jede mögliche" perspektive Kollineation, d.h. zur Angabe {Zentrum Z, Achse Π_α und $P, P' \in \mathcal{P}$ mit $P, P' \notin \mathcal{P}_\alpha \wedge P, P', Z$ paarweise verschieden $\wedge P, P', Z$ kollinear} existiert eine perspektive Kollineation α mit $P\alpha = P'$.

Bew.: Dieser Beweis ist größtenteils mit dem in 1.5, Folg.3 geführten identisch. Wir definieren wie dort eine Abbildung $\tilde{\alpha}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ so, daß alle Eigenschaften einer perspektiven Kollineation berücksichtigt werden. Die Teile (α), (β) und (γ) der Definition in 1.5 bleiben wörtlich gleich. Im Teil (δ) gehen wir so vor:

X mit $X \in \mathcal{P}_\alpha \wedge X \neq Z \wedge X \notin PP'$:

Nach I_1 existieren die Geraden XZ und XP eindeutig und nach Satz 3.2 existiert $A := \Pi_\alpha \cap XP$ eindeutig, denn XP ist eine Gerade, die nicht in der Hyperebene Π_α liegt. Es gilt $A \neq P'$ wegen $P' \notin \mathcal{P}_\alpha$ und daher existiert die Gerade AP' . Um die Existenz von $X\tilde{\alpha} := ZX \cdot AP'$ einzusehen, wende man I_2 auf das Dreieck APP' und die Gerade ZX an. Der Teil (ϵ) bleibt wörtlich gleich.



Im nächsten Beweisschritt ist zu zeigen, daß $\tilde{\alpha}$ eine perspektive Kollineation ist, welche in die Angabe paßt. Man kann dabei die Bijektivität und das Erhalten kollinearer Lage in den Sonderfällen ebenso wie in 1.5, Folg.3 einsehen.

Sei nun $g \in \mathcal{U}$ mit $\rho_g \neq \rho_\alpha \wedge Z \notin g \wedge P \notin g$; wir haben zu zeigen, daß alle Punkte von g unter $\tilde{\alpha}$ in kollineare Punkte übergehen. Wegen $Z \notin g$ ist $\Pi_g \vee Z =: \pi_1$ eine Ebene. π_1 ist nach 3.3 eine Desarguesebene. Damit erfüllt π_1 dieselben Voraussetzungen wie α in 1.5, Folg.3 und es kann wie dort weitergeschlossen werden. $\tilde{\alpha}$ ist also bijektiv und erhält kollineare Lage. Während man damit in einer projektiven Ebene fertig ist, hat man im projektiven Raum noch (III) zu überprüfen: Zu $\tilde{\alpha}$ existiert $\tilde{\alpha}^{-1}$ und $\tilde{\alpha}^{-1}$ erhält kollineare Lage, was man genauso wie für $\tilde{\alpha}$ einsieht; würde nun $\tilde{\alpha}$ nicht kollineare Punkte in kollineare Punkte überführen, so müßte $\tilde{\alpha}^{-1}$ kollineare Punkte in nicht kollineare überführen: Widerspruch. Also ist auch (III) erfüllt. ◆

Bemerkung: Zusammen mit 3.4, Folg.8 folgt, daß $\tilde{\alpha}$ sogar die einzige perspektive Kollineation ist, welche in die Angabe paßt.

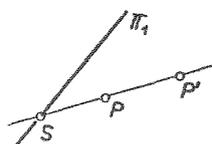
2) Sind $P, P' \notin \rho$, \neq und ist $\Pi_1 (\rho_1) \subset \Pi (\rho)$ ein Unterraum mit $P, P' \notin \rho_1$, dann existiert eine perspektive Kollineation α mit $P\alpha = P'$ und $X\alpha = X \forall X \in \rho_1$.

Bew.: Es genügt eine Hyperebene Π_α mit $\Pi_\alpha \supset \Pi_1$ und $P, P' \notin \rho_\alpha$ anzugeben; nach Folgerung 1 existiert dann nämlich eine perspektive Kollineation α mit $P\alpha = P'$ zu jedem Zentrum Z auf PVP' mit P, P', Z pw. verschieden (Z existiert wegen Axiom E).

Der Unterraum $(PVP') \cap \Pi_1$ kann wegen $P, P' \notin \rho_1$ leer oder einpunktig sein. Wir unterscheiden daher:

Fall 1: $(PVP') \cap \Pi_1 = \Pi_S$ mit $S \in \rho$.

Die Unterräume Π_ρ und Π_1 erfüllen $\Pi_\rho \cap \Pi_1 = \emptyset$ wegen $P \notin \rho_1$; gemäß 3.2, Folg.4 existiert daher ein zu Π_ρ komplementärer Unterraum Π_α , der Π_1 umfaßt. Als Komplement des Punktes P ist Π_α

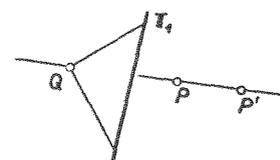


eine Hyperebene und es gilt: $\Pi_\alpha \vee P = \Pi$ und $P \cap \Pi_\alpha = \emptyset$, d.h. $P \notin \rho_\alpha$.

Die Hyperebene Π_α erfüllt auch die Forderung $P' \notin \rho_\alpha$, denn die nicht in der Hyperebene Π_α liegende Gerade PVP' hat gemäß 3.2, Folg.5 mit Π_α genau den Punkt $S \neq P, P'$ gemeinsam.

Fall 2: $(PVP') \cap \Pi_1 = \emptyset$ (*).

Nach E existiert ein Punkt Q auf PVP' mit $Q \neq P, P'$. Es gilt $P \notin Q \vee \Pi_1$:



Für $\Pi_1 = \Pi_0$ ist dies wegen $Q \neq P$ trivial.

Für $\pi_1 \neq \pi_2$ liefert dagegen die indirekte Beweisannahme $P \in Q \vee \pi_1 \Rightarrow \Rightarrow \exists X \in \rho_1$ mit $P \in Q \vee X$; da $P \neq Q$ ist $\Rightarrow X \in P \vee Q = P \vee P' \wedge X \in \rho_1$: Widerspruch zu (*). Die Unterräume π_p und $Q \vee \pi_1$ erfüllen also die Voraussetzung $\pi_p \cap (Q \vee \pi_1) = \emptyset$ von 3.2, Folg.4; es existiert daher ein zu π_p komplementärer Unterraum π_α - also eine Hyper-ebene - mit $\pi_\alpha \supset Q \vee \pi_1$. π_α erfüllt $P \notin \pi_\alpha$ und $\pi_1 \subset \pi_\alpha$. Es ist nur noch $P' \notin \pi_\alpha$ zu zeigen: Die Gerade $P \vee P'$ hat gemäß 3.2, Folg.5 genau den Punkt $Q \mid *P, P'$ mit der Hyperebene π_α gemeinsam.

Anwendungen:

(a) Sind π_α und π_β zwei verschiedene Hyperebenen, so existiert eine perspektive Kollineation α mit $\pi_\alpha \alpha = \pi_\beta$ (Daraus folgt insbesondere: Je zwei Hyperebenen eines projektiven Raumes sind isomorph).

Bew.: $\pi_\alpha \cap \pi_\beta =: \pi_1$ ist eine Hyperebene von π_α und π_β , weil nach 3.4, Folg.5, Bem. eine Hyperebene einen nicht in ihr enthaltenen Unterraum nach einer Hyperebene dieses Unterraumes schneidet. π_1 ist daher in π_α Komplement eines Punktes $P \in \rho_\alpha$ mit $P \notin \pi_\beta$ und $\pi_\alpha = P \vee \pi_1$.

Analog für π_β : $\exists P' \in \rho_\beta$ mit $P' \notin \rho_1$ und $\pi_\beta = P' \vee \pi_1$.

$P \in \rho_\alpha \wedge P' \in \rho_\beta \wedge P, P' \notin \rho_1 = \rho_\alpha \cap \rho_\beta \Rightarrow P \neq P'$.

P, P' und π_1 erfüllen die Voraussetzungen von Folg.2, daher existiert eine perspektive Kollineation α mit $P\alpha = P'$ und $\alpha \mid \rho_1 = \iota$, d.h. $\pi_1 \alpha = \pi_1$. Nach 3.4, Folg.3 folgt:

$\pi_\alpha \alpha = (P \vee \pi_1) \alpha = P\alpha \vee \pi_1 \alpha = P' \vee \pi_1 = \pi_\beta$.

(b) Sind π_1 und π_2 zwei verschiedene Ebenen eines projektiven Raumes \mathbb{V} , so existiert eine Kollineation α mit $\pi_1 \alpha = \pi_2$

(Daraus folgt insbesondere: Je zwei Ebenen eines projektiven Raumes sind isomorph; $\alpha \mid \rho_1$ ist nämlich dann eine ebene Kollineation $\pi_1 \rightarrow \pi_2$, und diese bestimmt nach 1.5 einen Isomorphismus).

Bew.: Wir konstruieren α als Produkt von höchstens drei perspektiven Kollineationen. Dabei gelte $\pi_1 = A \vee B \vee C$ bzw. $\pi_2 = A' \vee B' \vee C'$ mit A, B, C bzw. A', B', C' nicht kollinear.

Schritt 1: Für $A \neq A'$ erfüllen die Punkte A, A' und der Unterraum π_1 die Voraussetzung von Folg.2, daher existiert eine perspektive Kollineation α_1 mit $A' \alpha_1 = A$.

Ist speziell $A = A'$, so setzen wir $\alpha_1 := \iota$.

Schritt 2: Für $B \neq B'$, $\alpha_1 := B''$ erfüllen die Punkte B, B'' und π_1 die Voraussetzungen von Folg.2 (es gilt nämlich $B \notin \rho_A \wedge B'' \notin \rho_A$, da A, B verschieden sind und wegen A', B', C' nicht kollinear auch $A = A' \alpha_1$ und $B'' = B' \alpha_1$ verschieden sind). Es existiert daher eine perspektive Kollineation α_2 mit $B'' \alpha_2 = B$ und $\alpha_2 \mid \rho_A = \iota$, d.h. $A \alpha_2 = A$.

Für $B = B''$ setzen wir $\alpha_2 := \iota$.

Schritt 3: Für $C \neq C'$, $\alpha_2 := C'''$ erfüllen C, C''' und $A \vee B$ die Voraussetzungen von Folg.2 (A, B, C sind nicht kollinear und wegen A', B', C' nicht kollinear und (III) sind auch $A' \alpha_1 = A$, $B' \alpha_1 = B''$, $C' \alpha_1 = C''$ nicht kollinear und damit $A \alpha_2 = A$, $B'' \alpha_2 = B$, $C'' \alpha_2 = C'''$).

nicht kollinear). Daher existiert eine perspektive Kollineation α_3 mit $C'' \alpha_3 = C$ und $\alpha_3|_{\mathbb{P}_{AB}} = \iota$; d.h. insbesondere $A \alpha_3 = A$ und $B \alpha_3 = B$. Für $C = C''$ setzen wir $\alpha_3 = \iota$. Die Kollineation $\alpha := \alpha_3' \alpha_1' \alpha_2^{-1}$ leistet das Gewünschte: $\mathbb{T}_1 \alpha = (A \vee B \vee C) \alpha = A \vee B \vee C \alpha = A' \vee B' \vee C' = \mathbb{T}_2$.
 α Verbandisomorphismus \parallel nach obigen Schritten

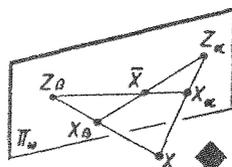
(c) Ist \mathbb{T}_ω eine Hyperebene eines Desarguesraumes \mathbb{T} , in dem zwei windschiefe Geraden existieren, und α eine perspektive Kollineation $\mathbb{T}_\omega \rightarrow \mathbb{T}_\omega$, so existiert eine perspektive Kollineation $\alpha: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ mit $\alpha|_{\mathbb{T}_\omega} = \alpha$.

Bew.: \mathbb{T}_ω enthält sicher ein Dreieck, sodaß nach Def. 3.4 b der Begriff perspektive Kollineation $\mathbb{T}_\omega \rightarrow \mathbb{T}_\omega$ sinnvoll ist. Die Achse \mathbb{T}_1 von α ist eine Hyperebene in \mathbb{T}_ω und α durch das Zentrum $Z \in \mathbb{T}_\omega$ sowie ein Punktepaar $P \mapsto P\alpha = P'$ gemäß Folg. 1 eindeutig bestimmt. Nach Folg. 2 existiert eine perspektive Kollineation $\alpha: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ mit $P\alpha = P'$, $\alpha|_{\mathbb{T}_1} = \iota_{\mathbb{T}_1}$ und Zentrum Z . Nach 3.4, Folg. 5 ist $\alpha|_{\mathbb{T}_\omega}$ eine perspektive Kollineation, die mit α das Zentrum Z und die Achse \mathbb{T}_1 gemeinsam hat sowie $P \mapsto P'$ leistet; nach 3.4, Folg. 7 gilt somit $\alpha = \alpha|_{\mathbb{T}_\omega}$.

3) In einer Desarguesebene π_{Dc} ist die Gruppe aller Elationen mit festem Zentrum und fester Achse kommutativ (vgl. Satz 1.4 zusammen mit Satz 1.5) und die Gruppe aller Elationen mit fester Achse ist ebenfalls kommutativ.

Diese beiden Aussagen gelten auch in einem Desarguesraum.

Bew.: Die in 1.4, Folg. 5 geforderte Zusatzvoraussetzung ist nach Folg. 1 in einem Desarguesraum erfüllt. Die Beweise von 1.4, Folg. 5, 6 und 7 können wörtlich übernommen werden, wenn man statt a nun \mathbb{T}_ω schreibt und im Beweis der "Parallelogrammregel" folgende Änderung vornimmt: Ist α bzw. β die Elation mit Zentrum Z_α bzw. $Z_\beta (\neq Z_\alpha)$ und der Achse \mathbb{T}_ω , dann folgt nun die Existenz von $\bar{X} = Z_\alpha X_\beta Z_\beta X_\alpha$ aus Axiom I_2 , welches auf das Dreieck $Z_\alpha X_\beta X$ und die Gerade $X_\alpha Z_\beta$ angewendet wird. Alle anderen Beweisteile bleiben wörtlich gleich.



DEF. 3.5 b: Ein projektiver Raum \mathbb{T} heißt ein Pappusraum (kurz: PP-Raum), wenn er drei nicht kollineare Punkte enthält und eine Ebene in \mathbb{T} eine PP-Ebene ist. Ein projektiver Raum heißt ein Fanoraum, wenn er drei nicht kollineare Punkte enthält und eine Ebene in \mathbb{T} eine Fanoebene ist. Ein projektiver Raum, der PP-Raum und Fanoraum ist, heißt ein klassischer projektiver Raum.

Bemerkungen: (a) Da nach Folg. 2, Anwendung (b) je zwei Ebenen eines projektiven Raumes isomorph sind, ist in einem PP- bzw. Fanoraum jede Ebene pappussch bzw. fanosch.

(b) Jeder PP-Raum ist Desarguesraum.

Bew.: \mathbb{T}_{pp} enthält nach Def. eine Ebene. Ist \mathbb{T}_{pp} eine Ebene, so gilt nach dem Satz von Hessenberg (vgl. 1.6), daß \mathbb{T}_{pp} Desarguessch ist. Ist \mathbb{T}_{pp} keine Ebene, so existieren vier Punkte A, B, C, D so, daß A, B, C nicht kollinear sind und $D \notin \text{AVBVC}$ gilt. Die Geraden AVB und CVD sind dann notwendig windschief; \mathbb{T} ist damit gemäß Def. 3.5 a ein Desarguesraum. ◆

4) (a) In einem Pappusraum \mathbb{T}_{pp} ist die Gruppe $\text{PGL}(Z, \mathbb{T}_\alpha | Z \notin \mathbb{T}_\alpha)$ von Homologien mit festem Zentrum und fester Achse kommutativ.

Bew.: Wir gehen wie in 1.6, Folg. 3 vor und ersetzen a durch \mathbb{T}_α ; Satz 1.4 durch 3.4, Folg. 7; Folg. 2 durch Bemerkung (b); 1.5, Folg. 3 durch 3.4, Folg. 7 zusammen mit 3.5, Folg. 1. Wir legen die Homologien α und β wie in 1.6 fest. $Z \vee PV Q =: \pi_1$ ist eine Ebene. Nach 3.4, Folg. 5 sind $\alpha|_{\pi_1}$ sowie $\beta|_{\pi_1}$ Homologien: $\pi_1 \rightarrow \pi_1$ mit Zentrum Z und Achse $\pi_1 \cap \mathbb{T}_\alpha$, welche eine Gerade in π_1 ist. π_1 ist eine PP-Ebene, also gilt $\alpha\beta|_{\pi_1} = \beta\alpha|_{\pi_1}$. $\alpha\beta$ und $\beta\alpha$ leisten also in π_1 dasselbe. Da nach 3.4, Folg. 7 und 3.5, Folg. 1 eine Homologie aus $\text{PGL}(Z, \mathbb{T}_\alpha)$ durch ein zugeordnetes Punktepaar festgelegt ist, und da $\alpha\beta$ und $\beta\alpha$ für alle Punkte von π_1 dasselbe leisten, folgt: $\alpha\beta = \beta\alpha$. ◆

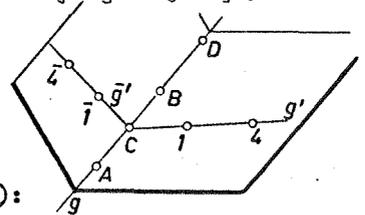
(b) Umkehrung: Ist in einem Desarguesraum \mathbb{T}_{De} jede Gruppe $\text{PGL}(Z, \mathbb{T}_\alpha | Z \notin \mathbb{T}_\alpha)$ kommutativ, so ist \mathbb{T}_{De} ein Pappusraum.

Bew.: Wir gehen gleich zu 1.6, Folg. 4 vor und nehmen nur statt $\alpha \in \text{PGL}(Z, a | Z \not\subset a)$ eine perspektive Kollineation $\alpha \in \text{PGL}(Z, \mathbb{T}_\alpha | Z \notin \mathbb{T}_\alpha)$, wobei \mathbb{T}_α eine Hyperebene ist, welche die in 1.6, Folg. 4 konstruierte Gerade a enthält (ein solches α existiert nach Folg. 2). Ebenso für β . Der Rest bleibt gleich. ◆

5) In einem projektiven Raum \mathbb{T} kann man harmonische Lage von vier Punkten wörtlich gleich wie in Def. 1.10 c definieren, wobei man unter einem Viereck 1, 2, 3, 4 ein System von vier komplanaren Punkten zu verstehen hat, von denen nie drei kollinear liegen. \mathbb{T} muß also, damit harmonische Punkte definiert werden können, mindestens drei nicht kollineare Punkte enthalten; dann kann jedoch derselbe Existenzbeweis wie in 1.10 benützt werden, die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes verläuft dann ganz in der Ebene $\mathbb{T}_g \vee \mathbb{T}_g$ (vgl. 1.10, Folg. 1).

In einem Desarguesraum \mathbb{T}_{De} ist der vierte harmonische Punkt eindeutig bestimmt.

Bew.: Wir wählen zur Konstruktion des vierten harmonischen Punktes zu C bezüglich A und B die Punkte $A, B, C \in \rho_g$ und A, B, C pw. verschieden einmal die Hilfselemente $g', 1, 4$ und einmal $\bar{g}', \bar{1}, \bar{4}$ (vgl. 1.10, Folg. 1). $\Pi_g \vee \Pi_{g'}$ und $\Pi_g \vee \Pi_{\bar{g}'}$ sind Ebenen. Falls $\Pi_g \vee \Pi_{g'} = \Pi_g \vee \Pi_{\bar{g}'}$ gilt, folgt gemäß 1.10, Folg. 1 dann $D = \bar{D}$, denn $\Pi_g \vee \Pi_{g'}$ ist Desarguesebene. Ist $\Pi_g \vee \Pi_{g'} \neq \Pi_g \vee \Pi_{\bar{g}'}$, so sind die Punkte 1 und $\bar{1}$ verschieden und es gilt: $1, \bar{1} \notin \Pi_g$. Daher existiert nach Folg. 2 eine perspektive Kollineation α mit $1\alpha = \bar{1}$ und $\alpha|_{\rho_g} = \iota$.



Aus $\Pi_g \vee \Pi_{g'} = \Pi_g \vee 1$ und $\Pi_g \vee \Pi_{\bar{g}'} = \Pi_g \vee \bar{1}$

folgt (da α ein Verbandisomorphismus ist):

$$(\Pi_g \vee \Pi_{g'})\alpha = (\Pi_g \vee 1)\alpha = \Pi_g \alpha \vee 1\alpha = \Pi_g \vee \bar{1} = \Pi_g \vee \Pi_{\bar{g}'},$$

$\alpha|_{\Pi_g \vee \Pi_{g'}}$ ist eine Kollineation $\Pi_g \vee \Pi_{g'} \rightarrow \Pi_g \vee \Pi_{\bar{g}'}$, und diese führt das Viereck $1, \dots, 4$ in ein Viereck $1\alpha, \dots, 4\alpha$ über, das bei der Konstruktion des vierten harmonischen Punktes zu C bzgl. A, B wegen $\alpha|_{\rho_g} = \iota$ den Punkt $D = D\alpha$ liefert. Die Vierecke $\bar{1}, \dots, \bar{4}$ und $1\alpha, \dots, 4\alpha$ liegen in der Desarguesebene $\Pi_g \vee \Pi_{g'}$, daher gilt nach 1.10, Folg. 1: $\bar{D} = D\alpha (= D)$.



In einem Fanoraum gilt stets: $H(A, B; C, D) \Rightarrow C \neq D$ (vgl. 1.10, Folg. 3). Unter der Ordnung N eines endlichen projektiven Raumes \mathbb{T} , der mindestens drei nicht kollineare Punkte enthält, versteht man die um eins verminderte Anzahl der Punkte auf einer Geraden. Wegen Axiom E gilt stets $N \geq 2$; in einem Fanoraum dagegen gilt stets $N \geq 3$.

6) DEF.: Eine Homologie $\alpha \in \text{PGL}(Z, \mathbb{T}_\alpha | Z \neq \mathbb{T}_\alpha)$ eines Desarguesraumes heißt harmonische Homologie, wenn für ein Punktepaar gilt:

$$H(Z, \text{PP}_\alpha \cap \mathbb{T}_\alpha; P, P\alpha) \text{ (vgl. Def. 1.10 e).}$$

Wir schreiben kurz: $H(Z, \mathbb{T}_\alpha; P, P\alpha)$.

Es gilt:

(I) In fanoschen Desarguesräumen ist jede harmonische Homologie involutorisch (Beweis wörtlich gleich mit dem Beweis in 1.10, Folg. 7).

(II) In fanoschen Desarguesräumen sind die harmonischen Homologien die einzigen involutorischen perspektiven Kollineationen (Beweis wörtlich gleich mit dem Beweis in 1.10, Folg. 7).

Bemerkung: Die Aussage (III) von 1.10, Folg.7, die in einer klassischen projektiven Ebene gilt, ist in projektiven Räumen i.a. falsch (dazu müßte allerdings erst der Begriff projektive Kollineation im Raum definiert werden, vgl.3.6).

7) Algebraisierung eines Desarguesraumes \mathbb{T}_x :

Wir gehen analog zu 1.12 vor. In \mathbb{T}_x existiert sicher eine Punktreihe ρ_x und wegen Axiom E enthält diese mindestens drei paarweise verschiedene Punkte E, O, U. Wir setzen $\check{\rho}_x := \rho_x \setminus \{U\}$. Durch U existiert eine Hyperebene \mathbb{T}_u , die ρ_x nicht enthält (nach 3.2, Folg.4 existiert zu O wegen $O \cap \mathbb{T}_u = \emptyset$ ein Komplement \mathbb{T}_o mit $\mathbb{T}_u \supset \mathbb{T}_o$). Da nach 3.5, Folg.1 zu jedem $X \in \check{\rho}_x$ genau eine Elation $\tau_x \in \text{PGL}(U, \mathbb{T}_u)$ mit $O\tau_x = X$ existiert, können wir wieder die algebraische Struktur von $\text{PGL}(U, \mathbb{T}_u)$ auf $\check{\rho}_x$ übertragen. Analog existiert zu jedem $X \in \check{\rho}_x \setminus \{O\}$ genau eine Homologie $\sigma_x \in \text{PGL}(O, \mathbb{T}_u)$ mit $E\sigma_x = X$. Wörtlich gleich zu Def.1.12 wird definiert:

Addition in $\check{\rho}_x$: $A+B := A\tau_B$

Multiplikation in $\check{\rho}_x \setminus \{O\}$: $A \cdot B := A\sigma_B$

Zusatz: $A \cdot O = O \cdot A = O \quad \forall A \in \check{\rho}_x$

Durch die isomorphen Übertragungen werden $\{\check{\rho}_x, +\}$ eine kommutative Gruppe und $\{\check{\rho}_x \setminus \{O\}, \cdot\}$ eine Gruppe.

$\{\check{\rho}_x, +, \cdot\}$ ist ein Körper K mit O als Null- und E als Einselement. Dieser Körper ist genau dann kommutativ, wenn PP gilt.

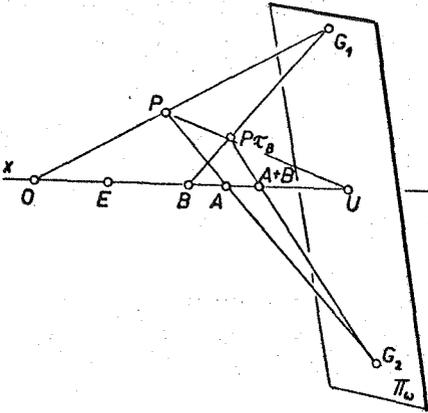
Bew.: Der Beweis bleibt wörtlich gleich mit dem in 1.12 geführten, wenn folgende Ersetzungen gemacht werden: u durch \mathbb{T}_u ; Büschel \mathcal{U}_u , \mathcal{G}_o durch die Menge aller Geraden durch U bzw. O; Satz 1.4 \wedge 1.5 durch 3.4, Folg.7 \wedge 3.5, Folg.1. In der 2. Hilfsüberlegung ist statt der Geraden a durch O eine Hyperebene \mathbb{T}_a mit $O \in \mathbb{T}_a$ und $\rho_x \not\subset \mathbb{T}_a$ zu nehmen (\mathbb{T}_a existiert nach 3.2, Folg.4) und $\text{PGL}(U, \mathbb{T}_a)$ zu verwenden.

Bei der 4. Hilfsüberlegung wurde benützt, daß der Kollineationsstrahl u bei einer perspektiven Kollineation festbleibt. Nun haben wir 3.4, Folg.5 zu verwenden, wonach jeder Unterraum durch das Zentrum als Ganzes festbleibt. Alles andere bleibt ungeändert.



Der Körper K ist bis auf Isomorphie eindeutig durch \mathbb{T}_x bestimmt (symbolisch $\mathbb{T}_x(K)$).

Bew.: Beim analogen Beweis in 1.12 haben wir die Konstruktion von $A+B$ bzw. $A \cdot B$ über Inzidenzfiguren herangezogen. Dies geht auch in $\mathbb{T}_{\mathbb{P}_e}$:



Wir benützen einen Hilfspunkt P mit $P \notin \mathbb{P}_x \wedge P \notin \mathbb{P}_\omega$. Ein solcher Punkt P existiert, da durch O eine Gerade $\neq x$ existiert, die \mathbb{T}_ω in genau einem Punkt G_1 trifft; somit existiert auf dieser Geraden nach Axiom E ein Punkt P mit den gewünschten Eigenschaften. $G_1 \vee B$ trifft $P \vee U$, wie die Anwendung des Axioms \bar{I}_2 auf das Dreieck OPU und die Gerade BG_1 beweist; der Schnittpunkt ist $P\tau_B$. Analog existiert $(PVA) \cap \mathbb{T}_\omega =: G_2$ (3.2, Folg.5) und $A+B$ (Dreieck PAU und Gerade

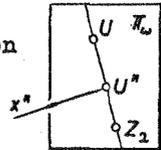
$P\tau_B G_2$). Nach Wahl von P sind diese Konstruktionen zwingend und werden durch obige Inzidenztabelle beschrieben (Alle Konstruktionslinien und -punkte liegen übrigens in der Ebene $\mathbb{T}_x \vee P$).

Bei der Konstruktion von $\{\mathbb{P}_x, +, \cdot\}$ waren folgende Elemente willkürlich: $x \in \mathcal{U}$; $O, E, U \in \mathbb{P}_x$ und \mathbb{T}_ω durch U . Gelingt es, eine zulässige Angabe O, E, \mathbb{T}_ω durch eine Kollineation α in eine zulässige Angabe $O', E', \mathbb{T}_\omega'$ überzuführen, so folgt wie in 1.12, Folg.2. der Isomorphismus des Körpers $\{\mathbb{P}_x, +, \cdot\}$ und $\{\mathbb{P}_{x'}, +, \cdot\}$.

Im Raum \mathbb{T}_ω müssen wir im Gegensatz zu 1.12 die Kollineation α direkt konstruieren:

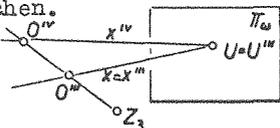
1. Schritt: Gelte $\mathbb{T}_\omega \neq \mathbb{T}_\omega'$; nach Folg.2, Anwendung (a) existiert eine perspektive Kollineation α_1 mit $\mathbb{T}_\omega \bar{\alpha}_1 = \mathbb{T}_\omega'$. Für $\mathbb{T}_\omega = \mathbb{T}_\omega'$ setzen wir: $\alpha_1 := \iota$.

2. Schritt: Gelte $U' \alpha_1 := U'' \neq U$ (analoge Beschriftung der α_1 -Bilder der anderen Elemente; $\mathbb{P}_{x'} \neq \mathbb{T}_\omega'$ wegen $\mathbb{P}_x \neq \mathbb{T}_\omega$). Nach 3.5, Folg.2 existiert eine perspektive Kollineation α_2 mit $U'' \alpha_2 = U$ (als α_2 -invarianten Unterraum kann man etwa einen von U und U'' verschiedenen Punkt vorschreiben). Das Zentrum Z_2 von α_2 liegt auf $U \vee U''$ und wegen $U, U'' \in \mathbb{T}_\omega$ gilt $Z_2 \in \mathbb{T}_\omega$, woraus nach 3.4, Folg.5 folgt: $\mathbb{T}_\omega \bar{\alpha}_2 = \mathbb{T}_\omega$. Für $U'' = U$ setzen wir: $\alpha_2 := \iota$.



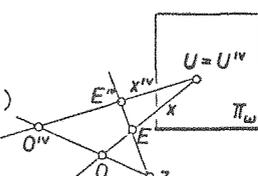
3. Schritt: Gelte $x''\hat{\alpha}_2 := x''x$ (analoge Beschriftung für die anderen α_2 -Bilder); wir wollen $x+x''$ erreichen.

Es existiert ein Zentrum Z_3 mit $Z_3 \notin \mathcal{P}_x \Rightarrow Z_3 + U$. Man kann nun nach 3.5, Folg.1 $\alpha_3 \in \text{PGL}(Z_3, \mathbb{P}_\omega)$ mit $O''\alpha_3 := O'' \neq O''$ wählen.



Ein solches O'' existiert wegen Axiom E auf $Z_3 \vee O''$. Es gilt $x''\hat{\alpha}_2 := x'' + x''$ und $\mathbb{P}_\omega\alpha_3 = \mathbb{P}_\omega$, genauer $\alpha_3|_{\mathcal{P}_\omega} = \text{id}$. Für $x+x''$ setzen wir $\alpha_3 = \iota$.

4. Schritt: Da nun sicher $x+x''$ gilt existieren $O''O$ und $E''E$ eindeutig und nach Axiom I₂ existiert $Z_4 := O''O \cdot E''E$ (Dreieck $O''OU$ und Gerade $E''E''$). Nach 3.5, Folg.1 existiert genau



eine perspektive Kollineation $\alpha_4 \in \text{PGL}(Z_4, \mathbb{P}_\omega)$ mit $O''\alpha_4 = O$. Die perspektive Kollineation α_4 leistet auch $E'' \mapsto E$.

Die Kollineation $\alpha = \alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1 \circ \alpha_4$ leistet $O \mapsto O'$, $E \mapsto E'$, $\mathbb{P}_\omega \mapsto \mathbb{P}_\omega'$.

Bemerkungen: (a) \mathbb{P}_ω ist genau dann fanosch, wenn $\text{Char } K \neq 2$ gilt. Der Beweis ist völlig gleich mit 1.12, Folg.3, da alle Konstruktionslinien für $A+B$ in der Ebene $\mathbb{P}_x \vee P$ liegen.

(b) PAR ist ein Desarguesraum, da zwei windschiefe Geraden existieren (damit ist der 1. Beweisschritt von 1.12, Folg.4 erledigt). Wir algebraisieren nun analog zu 1.12, Folg.4, Bew.(2) und wählen x als eigentliche Gerade, U als ihren Fernpunkt und \mathbb{P}_ω als Fernebene. Wir verwenden wieder das elementare Teilverhältnis $\text{TV}(XEO) := x$, erhalten eine Abbildung $\mu: \mathcal{P}_x \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{R}$ erklärt durch $X \mapsto X_\mu = x$ und müssen nun die 2.Forderung in 1.12 stellen: μ ist bijektiv. Dann folgt: Der Körper von PAR ist isomorph \mathbb{R} . Aus \mathbb{R} kommutativ und $\text{Char } \mathbb{R} \neq 2$ folgt, daß PAR ein fanoscher PP-Raum, also ein klassischer projektiver Raum ist.

SATZ 3.5: In einem Desarguesraum existiert jede mögliche perspektive Kollineation und die Menge aller Elationen mit fester Achse bildet eine kommutative Gruppe. Genau in einem Pappusraum ist jede Gruppe von Homologien mit festem Zentrum und fester Achse kommutativ. In fanoschen Desarguesräumen sind die harmonischen Homologien die einzigen involutorischen perspektiven Kollineationen. Zu jedem Desarguesraum gehört ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter Körper, der genau für PP-Räume kommutativ ist und dessen Charakteristik genau für

Fanorräume ungleich zwei ist. Der projektiv abgeschlossene Anschauungsraum ist ein klassischer projektiver Raum, dessen Körper isomorph zum Körper der reellen Zahlen ist.

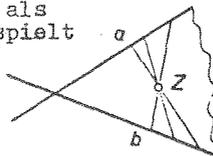
Bemerkung: Es gehört also auch zu jedem unendlich dimensional (vgl. 3.7) projektiven Raum ein Körper. Es ist sogar möglich, daß ein projektiver Raum unendliche Dimension hat und in jeder Punktreihe nur endlich viele Punkte liegen.

3.6. Perspektivitäten und Projektivitäten in projektiven Räumen

Wir setzen i.f. stets voraus, daß der projektive Raum \mathbb{T} drei nicht kollineare Punkte enthält.

DEF. 3.6 a: Eine Bijektion zwischen zwei verschiedenen schneidenden Punktreihen heißt eine Perspektivität, wenn Ur- und Bildpunkt stets mit einer Geraden eines Büschels inzidieren. Eine Bijektion zwischen zwei Punktreihen heißt eine Projektivität, wenn sie Produkt von endlich vielen Perspektivitäten ist.

Bemerkung: Der einzige Unterschied zu Def. 1.7 ist das Wort schneidend. Für windschiefe Geraden ist der Begriff Perspektivität nicht erklärt. Zwei verschiedene einander schneidende Geraden a, b bestimmen nach 3.2, Folg. 2, Bem. (b) als Verbindungsraum $\mathbb{T}_a \vee \mathbb{T}_b =: \mathbb{T}_1$ eine Ebene; alles spielt also wie in 1.7 in einer Ebene.



Folgerungen:

- 1) Die Menge aller projektiven Selbstabbildungen einer Punktreihe \mathcal{P}_a bildet bezüglich des Hintereinanderausführens eine Gruppe: Projektive Gruppe $PGL(\mathcal{P}_a)$ der Punktreihe \mathcal{P}_a . (Bew. gleich zu 1.7, Folg. 1)
- 2) Zu drei paarweise verschiedenen Urpunkten $A, B, C \in \mathcal{P}_a$ und drei paarweise verschiedenen Bildpunkten $A', B', C' \in \mathcal{P}_b$ mit $a \neq b$ existiert mindestens eine Projektivität, die in die Angabe paßt.

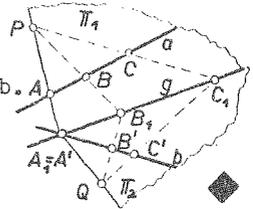
Bew.: Vgl. 1.7, Folg.2. Gelte o.B.d.A. $A \neq A' \Rightarrow \exists^* AA'$.

$E \Rightarrow \exists P \in AA'$ mit P, A, A' paarweise verschieden.

$P \in \Pi_0 =: \Pi_1$ ist eine Ebene mit $PA \subset \Pi_1 \wedge A' \in \Pi_1$.

Durch A' existiert eine Gerade g mit $g \subset \Pi_1 \wedge g \neq b$.

Nun ist $\Pi_0 \vee \Pi_b =: \Pi_2$ eine Ebene und wir setzen in Π_2 den Beweis fort wie in 1.7, Folg.2.



Bemerkung: Für $a=b$ erreicht man durch eine Trennprojektion obige Situation. $PGL(\mathbb{R}_2)$ ist also dreifach transitiv.

3) Verkürzungssatz: In einem Desarguesraum läßt sich jede Projektivität $\mathbb{R}_a \times \mathbb{R}_b$ mit $a \neq b$, falls die Gerade a die Gerade b schneidet, zu einer höchstens zweigliedrigen Kette verkürzen, und sie läßt sich zu einer höchstens dreigliedrigen Kette verkürzen, falls a windschief b ist.

Bew.: Schneidet die Gerade a die Gerade b , so ist $\mathbb{R}_a \vee \mathbb{R}_b$ eine Ebene, welche wegen $\mathbb{R}_a \vee \mathbb{R}_b \subset \Pi_{10}$ desarguessch ist; für diese gilt der Verkürzungssatz (vgl. 1.7, Folg.3). Sind a, b windschief, so wählen wir eine Gerade g wie in Folgerung 2 und es gilt mit den Bezeichnungen von dort $\Pi_1 \neq \Pi_2$. Schaltet man eine Hilfsperspektivität $\mathbb{R}_a \rightarrow \mathbb{R}_g$ vor, so erreicht man für \mathbb{R}_g und \mathbb{R}_b die Situation des ersten Falles.

4) Ist die Beschränkung einer Kollineation α auf eine Punktreihe \mathbb{R}_g projektiv, so ist die Beschränkung von α auf jede Punktreihe projektiv (Der Beweis ist wörtlich gleich dem Beweis von 1.8, Folg.2, wobei statt α^* jetzt $\hat{\alpha}$ zuschreiben ist).

Die Menge aller Kollineationen, deren Beschränkung auf irgendeine Gerade projektiv ist, bildet natürlich eine Untergruppe von $P \Gamma L(\Pi)$; wir bezeichnen diese Untergruppe mit $PGL'(\Pi)$.

DEF. 3.6 b: Eine Autokollineation $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt projektiv, wenn α das Produkt von endlich vielen perspektiven Kollineationen ist (wörtlich gleich mit Def.1.8).

5) Die Menge aller projektiven Kollineationen bildet bezüglich des Hintereinanderausführens eine Gruppe: "Projektive Gruppe $PGL(\mathbb{P})$ von \mathbb{P} ". Die Gruppe $PGL(\mathbb{P})$ ist Normalteiler von $P\Gamma L(\mathbb{P})$. (Beweis wörtlich gleich zu 1.8, Folg.1)

Es gilt: $PGL(\mathbb{P}) \subset PGL'(\mathbb{P}) \subset P\Gamma L(\mathbb{P})$.

Bew.: Es ist noch zu zeigen: Die Einschränkung einer projektiven Kollineation α auf jede Punktreihe ist projektiv. Da α Produkt von endlich vielen perspektiven Kollineationen ist, genügt es, dies für eine perspektive Kollineation π zu zeigen; nach Folg.4 genügt es zu zeigen, daß die Beschränkung von π auf eine Punktreihe projektiv ist. Für Punktfolgen, die in der Achse \mathbb{P}_α von π liegen, ist die Beschränkung aber die Identität und diese ist projektiv. Übrigens existieren in \mathbb{P} Punktfolgen, denn \mathbb{P} enthält drei nicht kollineare Punkte. ◆

Bemerkung: Nach 1.8, Folg.4 gilt in einer Desarguesebene π_α : Ist bei einer Kollineation α die Beschränkung auf eine einzige Punktfolge projektiv, dann ist α eine projektive Kollineation. Anders ausgedrückt: $PGL(\pi_\alpha) = PGL'(\pi_\alpha)$. In Desarguesräumen gilt diese Aussage i.a. nicht! Wir werden in 3.7 zeigen: Die Gleichheit dieser Gruppen gilt für Desarguesräume endlicher Dimension.

6) In einem Desarguesraum läßt sich jede Projektivität $\alpha: \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_h$ zu einer projektiven Kollineation $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ fortsetzen (d.h. $\alpha|_{\mathcal{P}_g} = \alpha$).

Der Beweis von 1.8, Folg.3 läßt sich mit den bisher angegebenen Methoden und Sätzen zwanglos in den Raum übertragen.

7) Ein projektiver Raum \mathbb{P} , der drei nichtkollineare Punkte enthält, heißt ein FS-Raum \mathbb{P}_{FS} , wenn ihm eine FS-Ebene existiert (vgl.1.9). Gemäß 3.5, Folg.2, Anw.(b) ist dann jede Ebene von \mathbb{P}_{FS} eine FS-Ebene.

Da PP in einer Ebene und FS auf einer Punktfolge spielen, braucht man in den Beweisen von 1.9 nur Ebenen in \mathbb{P}_{PP} bzw. \mathbb{P}_{FS} zu betrachten und man hat somit: $\mathbb{P}_{FS} \Leftrightarrow \mathbb{P}_{PP}$.

Bemerkung: Aus 1.9, Folg.1 ergibt sich: In einem \mathbb{P}_{FS} (und damit in einem \mathbb{P}_{PP}) ist $PGL(\mathcal{P}_\alpha)$ scharf dreifach transitiv.

SATZ 3.6: In einem projektiven Raum mit drei nicht kollinearen Punkten gibt es mindestens eine Projektivität zwischen zwei Punktreihen, welche drei gegebene verschiedene Punkte der ersten Reihe auf drei gegebene verschiedene Punkte der zweiten Reihe abbildet; die Gruppe der Projektivitäten einer Punktreihe ist dreifach transitiv. Ist die Beschränkung einer Kollineation auf eine Punktreihe projektiv, so auf jede, und die Gruppe aller Kollineationen mit dieser Eigenschaft enthält die projektive Gruppe. In einem Desarguesraum gilt der Verkürzungssatz, und jede Projektivität läßt sich zu einer projektiven Kollineation fortsetzen. Projektive Räume mit drei nicht kollinearen Punkten, in denen der Fundamentalsatz gilt, sind genau die Pappusräume; in ihnen ist die projektive Gruppe einer Punktreihe scharf dreifach transitiv.

3.7. Der Dimensionsbegriff

DEF. 3.7 a: Eine geordnete endliche Menge von $k+1$ Punkten $\{P_0, P_1, \dots, P_k\} \subset \mathbb{P}$ mit $k \geq 0$ heißt ein k -Simplex S^k in \mathbb{P} , wenn gilt: $P_l \notin P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_{l-1}$ für alle $l=1, \dots, k$. Ein k -Simplex in \mathbb{P} heißt Basissimplex von \mathbb{P} , wenn $P_0 \vee \dots \vee P_k = \mathbb{P}$ gilt.

Bemerkungen: (a) In \mathbb{P}_0 existiert kein Simplex. Ist $\mathbb{P} \neq \mathbb{P}_0$, so ist jeder Punkt $P_0 \in \mathbb{P}$ ein Nullsimplex S^0 .
 (b) Die Simplexeigenschaft ist unabhängig von der Reihenfolge.

Bew.: Es genügt zu zeigen, daß man im Simplex $\{P_0, P_1, \dots, P_k\} =: S^k$ zwei benachbarte Punkte vertauschen darf (Jede Permutation ist nämlich Produkt von Transpositionen). Wir überprüfen, daß $\{P_0, P_1, \dots, P_{l-2}, P_l, P_{l-1}, P_{l+1}, \dots, P_k\}$ ein Simplex ist (1 fest):
 $P_j \notin P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_{j-1}$ ist für $j=1, \dots, l-2$ klar.
 $P_l \notin P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_{l-2} =: \mathbb{P}^{l-2}$
 (ind.: $P_l \in \mathbb{P}^{l-2} \Rightarrow P_l \in \mathbb{P}^{l-2} \vee P_{l-1}$: Widerspruch zu S^k ein Simplex.)
 $P_{l-1} \notin P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_{l-2} \vee P_l$.
 (ind.: $\circ P_{l-1} \in \mathbb{P}^{l-2} \vee P_l \Rightarrow \exists X \in \mathbb{P}^{l-2}$ mit $P_{l-1} \in X \vee P_l$; $P_{l-1} \neq X$ wegen $X \in \mathbb{P}^{l-2} \wedge P_{l-1} \notin \mathbb{P}^{l-2} \Rightarrow P_l \in X \vee P_{l-1} \Rightarrow P_l \in \mathbb{P}^{l-2} \vee P_{l-1}$;
 Widerspruch zu S^k ein Simplex.) Da \vee kommutativ ist, gilt:
 $P_{l+r} \notin P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_{l-2} \vee P_l \vee P_{l-1} \vee P_{l+1} \vee \dots \vee P_{l+r-1} = P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_{l-1} \vee P_l \vee P_{l+1} \vee \dots \vee P_{l+r-1}$ für alle $r=1, \dots, k-l$.

(c) Die Punktmenge $S^k = \{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ ist genau dann ein Simplex, wenn für alle Punkte P_m mit $m=0, \dots, k$ gilt:
 $P_m \notin P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_{m-1} \vee P_{m+1} \vee \dots \vee P_k$.

Bew.: (a) S^k ein Simplex $\stackrel{Bem. (b)}{\Rightarrow} \{P_0, P_1, \dots, P_{m-1}, P_{m+1}, \dots, P_k, P_m\}$ ist ein Simplex $\stackrel{Bem. (a)}{\Rightarrow} P_m \notin P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_{m-1} \vee P_{m+1} \vee \dots \vee P_k$.

(b) Sei $S^k = \{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ eine Punktmenge mit der Eigenschaft $P_m \notin P_0 \vee \dots \vee P_{m-1} \vee P_{m+1} \vee \dots \vee P_k$ für alle $m=0, \dots, k$.

Es gilt also für:

$m=1: P_1 \notin P_0 \vee P_2 \vee \dots \vee P_k \Rightarrow P_1 \neq P_0$, d.h. $P_1 \notin \mathbb{T}_{P_0}$.

$m=2: P_2 \notin P_0 \vee P_1 \vee P_3 \vee \dots \vee P_k \Rightarrow P_2 \notin P_0 \vee P_1$.

$m=3: P_3 \notin P_0 \vee P_1 \vee P_2 \vee P_4 \vee \dots \vee P_k \Rightarrow P_3 \notin P_0 \vee P_1 \vee P_2 \dots$ usw.

$m=k: P_k \notin P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_{k-1}$, also erfüllt S^k die Simplexeigenschaft.

Folgerungen: ◆

1) Ist $S^n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ ein Basissimplex von \mathbb{T} und $A \in \mathcal{P}$, so ist nach geeigneter Umnummerierung $\{A, P_1, \dots, P_n\}$ ein Basissimplex von \mathbb{T} .

Bew.: Gelte o.B.d.A. $A \neq P_0$, also $A \notin \mathbb{T}_{P_0}$.

$A \in P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_n = \mathbb{T} \Rightarrow$ es existiert ein Index m mit $0 \leq m \leq n-1$, für welchen gilt:

$A \notin P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_m =: \mathbb{T}^m \wedge A \in P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_m \vee P_{m+1} =: \mathbb{T}^{m+1}$.

$A \in \mathbb{T}^m \vee P_{m+1} \Rightarrow \exists X \in \mathbb{T}^m$ mit $A \in X \vee P_{m+1}$; wegen $A \notin \mathbb{T}^m$ gilt $A \neq X$, also

$P_{m+1} \in X \vee A \Rightarrow P_{m+1} \in \mathbb{T}^m \vee A$. Insgesamt gilt:

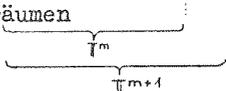
$P_0, \dots, P_m, P_{m+1} \in P_0 \vee \dots \vee P_m \vee A \Rightarrow P_0 \vee \dots \vee P_{m+1} \subset P_0 \vee \dots \vee P_m \vee A$.

Andererseits gilt:

$P_0, \dots, P_m, A \in P_0 \vee \dots \vee P_{m+1} \Rightarrow P_0 \vee \dots \vee P_m \vee A \subset P_0 \vee \dots \vee P_{m+1}$.

Es gilt somit $\mathbb{T}^m \vee P_{m+1} = \mathbb{T}^{m+1} \vee A$.

Die Punktmenge $\{P_0, P_1, \dots, P_m, A, P_{m+2}, \dots, P_n\}$ bestimmt dieselbe Folge von Unterräumen



wie die Ausgangsmenge, also ist auch die obige Punktmenge ein Basissimplex. Da es nach Bem.(c) bei den Punkten eines Simplex nicht auf die Reihenfolge ankommt, kann man die Indizierung wie behauptet wählen. ◆

2) "Austauschsatz": Existiert im projektiven Raum \mathbb{T} ein Basissimplex $S^n = \{P_0, \dots, P_n\}$ und ist $S^k = \{A_0, \dots, A_k\}$ ein Simplex in \mathbb{T} , so gilt:

(1) $k \leq n$

(2) nach geeigneter Ummumerierung ist $\{A_0, \dots, A_k, P_{k+1}, \dots, P_n\}$ ein Basissimplex von \mathbb{T} .

Bemerkung: Wir sagen kurz: Wenn in einem projektiven Raum \mathbb{T} ein Basissimplex existiert, dann ist kein Simplex länger als dieser, und jeder Simplex läßt sich zu einem Basissimplex von \mathbb{T} ergänzen.

Bew.: Wir führen ihn durch vollständige Induktion nach k . Für $k=0$ ist $S^0 = \{A_0\}$ ein Punkt; da in \mathbb{T} ein Basissimplex existiert, gilt $\mathbb{T} \neq \mathbb{T}_0$ und $n \geq 0$; also gilt $k \leq n$. Die Aussage (2) ist für $k=0$ gerade die Folgerung 1.

Induktionsannahme: Die Aussagen sind richtig für $k-1$, d.h. $k-1 \leq n$ und $\{A_0, \dots, A_{k-1}, P_k, \dots, P_n\}$ ist nach geeigneter Ummumerierung ein Basissimplex von \mathbb{T} .

Induktionsschluß nach k : $S^k = \{A_0, \dots, A_k\}$ ist der gegebene Simplex. Zu (1) genügt es $k-1 \leq n$ ($\Rightarrow k \leq n$) zu zeigen:

(ind.) $k-1=n$, d.h. $\{A_0, \dots, A_{k-1}\}$ ist nach Induktionsannahme ein Basissimplex von $\mathbb{T} \Rightarrow A_k \in A_0 \vee \dots \vee A_{k-1}$: Widerspruch zu $\{A_0, \dots, A_k\}$ ist ein k -Simplex.

Zu (2): Es gilt: $A_k \notin A_0 \vee \dots \vee A_{k-1}$
 $A_k \in \mathbb{T} = A_0 \vee \dots \vee A_{k-1} \vee P_k \vee \dots \vee P_n$ (nach Induktionsannahme) } \Rightarrow
es existiert ein Index m mit $k-1 \leq m \leq n-1$, für welchen gilt:

$A_k \notin A_0 \vee \dots \vee A_{k-1} \vee P_k \dots \vee P_m =: \mathbb{T}^m$ (für $m=k-1$ soll das bedeuten: $A_k \notin A_0 \vee \dots \vee A_{k-1}$), $A_k \in A_0 \vee \dots \vee A_{k-1} \vee P_k \dots \vee P_m \vee P_{m+1} =: \mathbb{T}^{m+1} = \mathbb{T}^m \vee P_{m+1}$ (*).

Demnach existiert ein Punkt $X \in \mathbb{T}^m$ mit $A_k \in X \vee P_{m+1}$.

Wegen $X \in \mathbb{T}^m \wedge A_k \notin \mathbb{T}^m$ gilt $A_k \notin X$, also $P_{m+1} \in X \vee A_k \Rightarrow P_{m+1} \in \mathbb{T}^m \vee A_k$.

Nach Definition von \mathbb{T}^m liegen in $\mathbb{T}^m \vee A_k$ auch die Punkte

$A_0, \dots, A_{k-1}, P_k, \dots, P_m$. Insgesamt gilt:

$A_0, \dots, A_{k-1}, P_k, \dots, P_m, P_{m+1} \in \mathbb{T}^m \vee A_k \Rightarrow \mathbb{T}^{m+1} \subset \mathbb{T}^m \vee A_k$.

Andererseits gilt:

$A_0, \dots, A_{k-1}, P_k, \dots, P_m, A_k \in \mathbb{T}^{m+1} \Rightarrow \mathbb{T}^m \vee A_k \subset \mathbb{T}^{m+1}$.

Insgesamt gilt daher: $\mathbb{T}^m \vee A_k = \mathbb{T}^{m+1} = A_0 \vee \dots \vee A_{k-1} \vee P_k \dots \vee P_{m-1} \vee A_k$.

Wir haben also ebenso wie in Folg. 1 den Punkt P_{m+1} gegen A_k getauscht und wie in Folg. 1 ist einzusehen, daß

$\{A_0, \dots, A_{k-1}, P_k, \dots, P_m, A_k, P_{m+2}, \dots, P_n\}$ ein Basissimplex von \mathbb{T} ist. Da man nach Bem. (c) die Reihenfolge beliebig ändern darf, kann man die Indizierung so wählen, daß

$\{A_0, \dots, A_{k-1}, A_k, P_{k+1}, \dots, P_n\}$ ein Basissimplex von \mathbb{T} ist. ◆

3) Existiert im projektiven Raum \mathbb{T} ein Basissimplex $S^n = \{P_0, \dots, P_n\}$ und ist $S^m = \{A_0, \dots, A_m\}$ ein weiterer Basissimplex, so gilt $n=m$. Ist umgekehrt in \mathbb{T} ein Simplex $S^l = \{A_0, \dots, A_l\}$ gegeben mit $l=n$, so ist S^l ein Basissimplex.

Bew.: (a) S^n ist Basissimplex und S^m ist ein beliebiger Simplex in \mathbb{T} , also gilt nach Folg. 2: $m \leq n$. Umgekehrt ist S^m Basissimplex und S^n ein beliebiger Simplex in \mathbb{T} : $n \leq m$. Somit gilt $n=m$.

(b) (ind.) $\exists P \in \mathbb{T}$ mit $P \notin A_1 \vee \dots \vee A_n \Rightarrow \{A_1, \dots, A_n, P\}$ ist Simplex in \mathbb{T} der Länge $n+1$: Widerspruch zu Folgerung 2. ◆

DEF. 3.7 b: Unter Dimension verstehen wir eine globale Abbildung \dim : Menge aller projektiven Räume $\{-1, 0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$,

die folgendermaßen erklärt ist:

$\dim \mathbb{T} = -1 \Leftrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{T}_0$.

$\dim \mathbb{T} = n$ mit $n \geq 0 \Leftrightarrow$ in \mathbb{T} existiert ein n -Basissimplex.

$\dim \mathbb{T} = \infty \Leftrightarrow \mathbb{T} \neq \mathbb{T}_0$ und \mathbb{T} enthält keinen Basissimplex.

Bemerkungen: (a) \dim ist eine Abbildung, denn jedem projektiven Raum wird nach Folg. 3, (a) eine eindeutig bestimmte Zahl oder das Symbol ∞ zugeordnet.

(b) $\dim \mathbb{T}_0 = -1 \Leftrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{T}_0$.

$\dim \mathbb{T} = 0 \Leftrightarrow \mathbb{T}$ besitzt einen 0-Basissimplex $\{P_0\}$
 $\Leftrightarrow \mathbb{T}$ ist einpunktig.

$\dim \mathbb{T} = 1 \Leftrightarrow \mathbb{T}$ besitzt einen 1-Basissimplex $\{P_0, P_1\}$
 $\Leftrightarrow \mathbb{T} = P_0 \vee P_1 \Leftrightarrow \mathbb{T}$ ist eine projektive Gerade.

$\dim \mathbb{T} = 2 \Leftrightarrow \mathbb{T}$ besitzt einen 2-Basissimplex $\{P_0, P_1, P_2\}$
 $\Leftrightarrow \mathbb{T} = P_0 \vee P_1 \vee P_2 \Leftrightarrow \mathbb{T}$ ist eine projektive Ebene.

$\dim \mathbb{T} > 2 \Leftrightarrow \mathbb{T} = P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_n$, wobei $\{P_0, \dots, P_n\}$ ein n -Basissimplex mit $n \geq 3$ ist \Rightarrow die Geraden $P_0 \vee P_1$ und $P_2 \vee P_3$ sind windschief (sonst würde $P_3 \in P_0 \vee P_1 \vee P_2$ gelten) $\Rightarrow \mathbb{T}$ ist desarguessch.

(c) Für $\dim \mathbb{T} \neq \infty$ schreiben wir $\dim \mathbb{T} < \infty$ und sagen \mathbb{T} ist "endlichdimensional". Für \mathbb{T}_0 oder einen projektiven Raum \mathbb{T} mit $\dim \mathbb{T} = n < \infty$ schreiben wir i.f. \mathbb{T}^n ($-1 \leq n < \infty$).

(d) Die projektiven Räume mit $\dim \mathbb{T} = \infty$ kann man in Klassen unterteilen. Man braucht dazu allerdings eine erweiterte Simplexdefinition und den Begriff der Mächtigkeit, der es gestattet, verschiedene Typen von unendlichen Mengen zu unterscheiden.

4) Ist \mathbb{T} ein endlichdimensionaler projektiver Raum und \mathbb{T}_1 ein Unterraum, so ist \mathbb{T}_1 endlich dimensional und es gilt $\dim \mathbb{T}_1 \leq \dim \mathbb{T}$; speziell gilt $\dim \mathbb{T}_1 = \dim \mathbb{T} \Leftrightarrow \mathbb{T}_1 = \mathbb{T}$.

Bew.: Für $\mathbb{T} = \mathbb{T}_0$ trivial; gelte i.f. $\mathbb{T} \neq \mathbb{T}_0$ und daher $\dim \mathbb{T} = n \geq 0$.

Gilt $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_0 \Leftrightarrow \dim \mathbb{T}_1 = -1 \leq n$.

Gilt $\mathbb{T}_1 \neq \mathbb{T}_0 \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{R}_1$; um über $\dim \mathbb{T}_1$ etwas aussagen zu können, brauchen wir einen Basissimplex von \mathbb{T}_1 . Wir erhalten einen solchen durch folgende Konstruktion:

$A_0 := A$; gilt $\mathbb{T}_{A_0} = \mathbb{T}_1$, so ist man fertig. In jedem anderen Fall $\exists A_1 \in \mathcal{R}_1$ mit $A_1 \neq A_0$; gilt $A_0 \vee A_1 = \mathbb{T}_1$, so ist man fertig. In jedem anderen Fall $\exists A_2 \in \mathcal{R}_1$ mit $A_2 \notin A_0 \vee A_1$; gilt $A_0 \vee A_1 \vee A_2 = \mathbb{T}_1$, so... usw. Dieses Verfahren bricht spätestens bei einem Punkt A_n ab, da sonst $\{A_0, A_1, \dots, A_{n+1}\}$ ein Simplex von \mathbb{T} wäre, dessen Länge größer als $n+1$ ist: Widerspruch zu Folg.2. Also existiert ein Index m mit $m \leq n$ und $S^m = \{A_0, A_1, \dots, A_m\}$ ist ein Basissimplex von $\mathbb{T}_1 \Rightarrow \dim \mathbb{T}_1 = m \leq n$.

Gilt insbesondere $m=n$, so ist nach Folg.3 S^m auch ein Basissimplex von $\mathbb{T} \Rightarrow \mathbb{T}_1 = A_0 \vee \dots \vee A_m = \mathbb{T}$.

5) "Dimensionssatz": Sind \mathbb{T}_1 und \mathbb{T}_2 zwei Unterräume des endlich-dimensionalen projektiven Raumes \mathbb{T} , so gilt:

$$\dim \mathbb{T}_1 + \dim \mathbb{T}_2 = \dim (\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) + \dim (\mathbb{T}_1 \vee \mathbb{T}_2).$$

Bemerkung: Es treten nach Folg.4 hierin nur Zahlen aus $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ auf, also ist die Addition sinnvoll.

Bew.: Fall 1: $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2 \neq \mathbb{T}_0$; nach Folg.4 gilt dann $\dim(\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) =: d \geq 0$ und $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ besitzt einen Basissimplex $S^d = \{D_0, \dots, D_d\}$.

Nach Folg.2 kann man S^d ein Simplex in \mathbb{T}_1 zu einem Basissimplex von \mathbb{T}_1 ergänzen: $S^{d+s} = \{D_0, \dots, D_d, A_1, \dots, A_s\} \Rightarrow \dim \mathbb{T}_1 = d+s$.

Ebenso ist S^d ein Simplex in Π_2 und kann zu einem Basissimplex von Π_1 ergänzt werden: $S^{d+t} = \{D_0, \dots, D_d, B_1, \dots, B_t\} \Rightarrow \dim \Pi_2 = d+t$.

Wir wollen zeigen, daß die Punktmenge

$\{D_0, \dots, D_d, A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_t\}$ ein Basissimplex von $\Pi_1 \vee \Pi_2$ ist.

Da \vee assoziativ und kommutativ ist und $P \vee P = P$ gemäß Def. 3.1c

gilt, folgt: $D_0 \vee \dots \vee D_d \vee A_1 \vee \dots \vee A_s \vee B_1 \vee \dots \vee B_t =$

$= (D_0 \vee \dots \vee D_d \vee A_1 \vee \dots \vee A_s) \vee (D_0 \vee \dots \vee D_d \vee B_1 \vee \dots \vee B_t) = \Pi_1 \vee \Pi_2$

(die in den Klammerausdrücken stehenden Punkte sind Basissimplices von Π_1 bzw. Π_2).

$\{D_0, \dots, D_d, A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_t\}$ ist ein Simplex:

Für die Punkte D_1 bis A_s ist klar, daß sie nicht im Verbindungsraum der Vorgänger liegen, denn $\{D_0, \dots, D_d, A_1, \dots, A_s\}$ ist ein

Simplex. Zu zeigen ist noch

$B_1 \notin D_0 \vee \dots \vee D_d \vee A_1 \vee \dots \vee A_s$

$B_1 \notin \underbrace{D_0 \vee \dots \vee D_d \vee A_1 \vee \dots \vee A_s}_{=\Pi_1} \vee \underbrace{B_1 \vee \dots \vee B_{l-1}}_{=:\tilde{\Pi}}$ für $l=1, \dots, t$ (für $l=1$

kommt kein B_j rechts vor).

(ind.) $B_1 \in \Pi_1 \vee \tilde{\Pi} \Rightarrow \exists X \in \Pi_1 \wedge \exists Y \in \tilde{\Pi}$ mit $B_1 \in X \vee Y$; es gilt $B_1 \notin Y$,

denn B_1 ist nicht in $\tilde{\Pi}$ enthalten, da S^{d+t} ein Simplex und $\tilde{\Pi}$ ein

Unterraum des Verbindungsraumes der Vorgänger von B_1 im Simplex

S^{d+t} ist. Damit gilt: $X \in Y \vee B_1 \Rightarrow X \in \tilde{\Pi} \vee B_1 \subset \Pi_2$.

$X \in \Pi_1 \wedge X \in \Pi_2 \Rightarrow X \in \Pi_1 \cap \Pi_2 = D_0 \vee \dots \vee D_d \Rightarrow$

$B_1 \in X \vee Y \subset (\Pi_1 \cap \Pi_2) \vee \tilde{\Pi} = D_0 \vee \dots \vee D_d \vee B_1 \vee \dots \vee B_{l-1}$
 $\begin{matrix} \in \Pi_1 \vee \Pi_2 \\ \in \tilde{\Pi} \end{matrix}$

Widerspruch dazu, daß $\{D_0, \dots, D_d, B_1, \dots, B_t\}$ ein Simplex ist.

Damit ist $S^{d+s+t} = \{D_0, \dots, D_d, A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_t\}$ ein Basissimplex

von $\Pi_1 \vee \Pi_2$ und daher gilt $\dim(\Pi_1 \vee \Pi_2) = d+s+t$.

Wir fassen zusammen:

$\dim \Pi_1 + \dim \Pi_2 = (d+s) + (d+t) = d+(d+s+t) = \dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) + \dim(\Pi_1 \vee \Pi_2)$.

Fall 2: $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \Pi_0$. Wir wiederholen den obigen Beweis für $d=-1$;

man existiert kein Punkt D_j .

Anwendungen: (a) In einem endlichdimensionalen projektiven Raum \mathbb{P}^n

gilt für zwei zueinander komplementäre Unterräume Π_1 und $\bar{\Pi}_1$:

$$\dim \Pi_1 + \dim \bar{\Pi}_1 = n-1.$$

Bew.: Für komplementäre Unterräume gilt: $\Pi_1 \cap \bar{\Pi}_1 = \emptyset \wedge \Pi_1 \vee \bar{\Pi}_1 = \mathbb{P}^n \Rightarrow$
 $\dim(\Pi_1 \cap \bar{\Pi}_1) = -1$ und $\dim(\Pi_1 \vee \bar{\Pi}_1) = n$. Dies eingesetzt in den Dimensionssatz ergibt die Behauptung.

(b) Die Hyperebenen eines n-dimensionalen projektiven Raumes sind genau die Unterräume der Dimension n-1.

Bew.: (a) Ist π_α eine Hyperebene, so ist sie Komplement eines Punktes A und mit $\dim \pi_A = 0$ folgt $\dim \pi_\alpha = n-1$ aus dem Dimensionssatz.

(b) Ist π_1 Unterraum mit $\dim \pi_1 = n-1$, so existiert in π_1 ein Basissimplex $\{P_0, \dots, P_{n-1}\}$, der zu einem Basissimplex $\{P_0, \dots, P_{n-1}, P_n\}$ von π verlängert werden kann. Damit gilt $\pi_1 \vee P_n = \pi$ und $\pi_1 \cap \pi_{P_n} = \emptyset$, sodaß π_1 eine Hyperebene ist.

(c) In einem n-dimensionalen projektiven Raum π^n ($2 \leq n < \infty$) gilt für den Durchschnitt von l Hyperebenen $\pi_i (2 \leq l \leq n)$: $\dim (\pi_1 \cap \pi_2 \dots \cap \pi_l) \geq n-l$.

Speziell für n=1 folgt daraus: Je n Hyperebenen in einem π^n haben mindestens einen gemeinsamen Punkt.

Bew.: (Induktion nach der Anzahl der Hyperebenen):
Zunächst für l=2:

$$\dim(\pi_1 \cap \pi_2) = \underbrace{\dim \pi_1}_{n-1} + \underbrace{\dim \pi_2}_{n-1} - \underbrace{\dim(\pi_1 \vee \pi_2)}_{n \text{ oder } n-1} \geq n-1 + n-1 - n = n-2.$$

nach(b) | nach(b)

Induktionsannahme: Für j (j < l) gilt: $\dim (\pi_1 \cap \dots \cap \pi_j) \geq n-j$.

Induktionsschluß: $\dim (\pi_1 \cap \dots \cap \pi_j \cap \pi_{j+1}) =$

$$\underbrace{\dim(\pi_1 \cap \dots \cap \pi_j)}_{\geq n-j} + \underbrace{\dim \pi_{j+1}}_{n-1} - \underbrace{\dim[(\pi_1 \cap \dots \cap \pi_j) \vee \pi_{j+1}]}_{n \text{ oder } n-1} \geq n-j + n-1 - n = n-(j+1).$$

nach Ind.ann. | nach(b)

5) Seien π und π' projektive Räume mit $2 \leq \dim \pi < \infty$ und $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ eine Kollineation (vgl. Def. 3.4). Gemäß 3.4, Folg. 3 gehört zu α eine Abbildung $\bar{\alpha}: u\pi \rightarrow u\pi'$, die ein Verbandisomorphismus ist.

$\bar{\alpha}$ ist dimensionstreu: $\dim \pi_1 = \dim \pi_1 \bar{\alpha} \quad \forall \pi_1 \in u\pi$.

Bew.: Speziell für $\pi_1 = \pi_0$ gilt $\pi_0 \bar{\alpha} = \pi_0'$ nach 3.4, Folg. 3, also ist für $U\pi$ - und Bildraum die Dimension -1; gelte i. f. $\pi_1 \neq \pi_0$. Gemäß Folg. 4 ist π_1 endlichdimensional und besitzt einen Basissimplex $\{P_0, \dots, P_k\}$, also $\pi_1 = P_0 \vee \dots \vee P_k$. Da $\bar{\alpha}$ Verbandisomorphismus ist, gilt:

$$\pi_1 \bar{\alpha} =: \pi_1' = (P_0 \vee \dots \vee P_k) \bar{\alpha} = P_0 \bar{\alpha} \vee \dots \vee P_k \bar{\alpha},$$

daraus $\dim \pi_1' \leq k$ folgt. π_1' ist also endlichdimensional und in π_1' existiert ein Basissimplex $\{Q_0' \dots Q_{k'}'\}$ mit $k' \leq k$. Wiederholen

wir obigen Schluß für α^{-1} , so ergibt sich: $\dim \pi_1 \leq k'$.

Insgesamt gilt: $\dim \pi_1 = \dim \pi_1'$.

Bemerkungen: (a) Speziell für $\pi_1 = \pi$ folgt: $\dim \pi = \dim \pi'$, da $\bar{\alpha}$ bijektiv ist und daher $\pi \bar{\alpha} = \pi'$ gilt.

(b) In Def. 3.4 wurde eine Kollineation $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ durch (I), (II) und (III) definiert. Wir zeigen nun: Für $\dim \mathbb{T} = \dim \mathbb{T}' < \infty$ gilt: (I) \wedge (II) \Rightarrow (III).

Bew.: (ind.) Angenommen zu den nicht kollinearen Punkten $A, B, C \in \mathcal{P}$ sind die paarweise verschiedenen Bildpunkte $A\alpha, B\alpha, C\alpha \in \mathcal{P}'$ kollinear, also $C\alpha \in A\alpha \vee B\alpha$ (*). Der 2-Simplex $\{A, B, C\}$ in \mathbb{T} kann nach Folg. 2 zu einem Basissimplex $\{A, B, C, P_3, \dots, P_n\}$ in \mathbb{T} verlängert werden, also gilt: $\mathbb{T} = A \vee B \vee C \vee P_3 \vee \dots \vee P_n$. Daraus folgt:
 $\mathbb{T}\alpha = \mathbb{T}' = A\alpha \vee B\alpha \vee C\alpha \vee P_3 \alpha \vee \dots \vee P_n \alpha \stackrel{(*)}{=} A\alpha \vee B\alpha \vee P_3 \alpha \vee \dots \vee P_n \alpha \Rightarrow$
 $\dim \mathbb{T}' \leq n-1$: Widerspruch zur Voraussetzung. ◆

Speziell für Selbstabbildungen eines endlichdimensionalen projektiven Raumes genügt es somit (I) und (II) zu überprüfen, um zu zeigen, daß eine Kollineation vorliegt.

7) Nach 3.6, Folg. 5 gilt: $PGL(\mathbb{T}_{\mathcal{R}}) \subset PGL(\mathbb{T}_{\mathcal{R}})$. Wir zeigen nun: Ist $\mathbb{T}_{\mathcal{R}}$ endlichdimensional so gilt: $PGL(\mathbb{T}_{\mathcal{R}}) = PGL'(\mathbb{T}_{\mathcal{R}})$ oder anders formuliert: In endlichdimensionalen Desarguesräumen ist eine Kollineation genau dann projektiv, wenn ihre Beschränkung auf eine Punktreihe projektiv ist.

Bew.: Es genügt $PGL'(\mathbb{T}_{\mathcal{R}}^n) \subset PGL(\mathbb{T}_{\mathcal{R}}^n)$ zu zeigen. Ist $\alpha \in PGL'(\mathbb{T}_{\mathcal{R}}^n)$, so ist zu zeigen, daß α eine projektive Kollineation ist.
 $\alpha \in PGL'(\mathbb{T}_{\mathcal{R}}^n) \Rightarrow \exists g \in \mathcal{G}$ mit $\alpha|_{\mathcal{P}_g}$ ist Projektivität. Wir spannen \mathcal{P}_g durch zwei Punkte auf: $\mathcal{P}_g = P_0 \vee P_1$. Nach 3.7, Folg. 2 kann der 1-Simplex $\{P_0, P_1\}$ zu einem Basissimplex $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ von $\mathbb{T}_{\mathcal{R}}^n$ ergänzt werden. Wir bezeichnen: $P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_j =: \mathbb{T}^j$ ($1 \leq j \leq n$).
Nach 3.6, Folg. 5 existiert eine projektive Kollineation $\gamma \in PGL(\mathbb{T}_{\mathcal{R}}^n)$ mit $\alpha|_{\mathcal{P}_g} = \gamma|_{\mathcal{P}_g}$, also $\alpha\gamma^{-1}|_{\mathbb{T}^1} = \iota_{\mathbb{T}^1}$. Es existiert also eine projektive Kollineation $\lambda_1 (= \gamma^{-1})$ mit $\alpha\lambda_1|_{\mathbb{T}^1} = \iota_{\mathbb{T}^1}$.

Induktionsannahme: Es existiert eine projektive Kollineation $\lambda_j: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ mit $\alpha\lambda_j|_{\mathbb{T}^j} = \iota_{\mathbb{T}^j}$ ($j \leq n-1$).
Behauptung: $\exists \lambda_{j+1} \in PGL(\mathbb{T}_{\mathcal{R}}^n)$ mit $\alpha\lambda_{j+1}|_{\mathbb{T}^{j+1}} = \iota_{\mathbb{T}^{j+1}}$.
Induktionsschluß: Falls $\alpha\lambda_j|_{\mathbb{T}^{j+1}} = \iota_{\mathbb{T}^{j+1}}$ gilt, setzen wir $\lambda_{j+1} = \lambda_j$; sonst existiert ein Punkt $X \in \mathbb{T}^{j+1}$ mit $X\alpha\lambda_j =: X' \neq X$ ($\Rightarrow X \notin \mathbb{T}^j \wedge X' \notin \mathbb{T}^j$).

Schritt 1: Gelte $X' \notin \mathbb{T}^{j+1}$. Nach 3.5, Folg. 2 existiert eine perspektive Kollineation $\eta: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ mit $\eta|_{\mathbb{T}^j} = \iota_{\mathbb{T}^j}$ und $X' \xrightarrow{\eta} X$.
 $\alpha\lambda_j\eta|_{\mathbb{T}^{j+1}}$ ist eine Autokollineation von \mathbb{T}^{j+1} :
 $X \notin \mathbb{T}^j \Rightarrow \{P_0, \dots, P_j, X\}$ ist ein Simplex von \mathbb{T}^{j+1} mit der Länge

$j+1 \xrightarrow{\text{folg. 3}} \{P_0 \dots P_j, X\}$ ist ein Basissimplex von $\mathbb{P}^{j+1} \Rightarrow \mathbb{P}^j \vee X = \mathbb{P}^{j+1}$.
 Nun ist $\mathbb{P}^{j+1} \cong \bar{\lambda}_j \bar{\eta} = \mathbb{P}^j \bar{\lambda}_j \bar{\eta} \vee X \bar{\lambda}_j \bar{\eta} = \mathbb{P}^j \vee X = \mathbb{P}^{j+1}$.

Für $X' \in \mathbb{P}^{j+1}$ setzen wir $\eta := \iota_{\mathbb{P}}$.

Schritt 2: Falls $\bar{\lambda}_j \bar{\eta} | \mathbb{P}^{j+1} = \iota_{\mathbb{P}^{j+1}}$ gilt, setzen wir $\lambda_{j+1} := \bar{\lambda}_j \bar{\eta}$; sonst existiert ein Punkt $Y \in \mathbb{P}^{j+1}$ mit $Y \notin \bar{\lambda}_j \bar{\eta} =: Y'' \neq Y$ ($\Rightarrow Y \notin \mathbb{P}^j \wedge Y'' \in \mathbb{P}^j \wedge Y'' \in \mathbb{P}^{j+1}$).

$\bar{\lambda}_j \bar{\eta} | \mathbb{P}^{j+1}$ ist also eine perspektive Kollineation mit der Achse \mathbb{P}^j (da $\bar{\lambda}_j \bar{\eta} | \mathbb{P}^j = \iota_{\mathbb{P}^j}$ gilt und \mathbb{P}^j Hyperebene in \mathbb{P}^{j+1} ist wegen $P_{j+1} \in \mathbb{P}^{j+1}$ mit $P_{j+1} \notin \mathbb{P}^j \wedge P_{j+1} \vee \mathbb{P}^j = \mathbb{P}^{j+1}$); das Zentrum Z von $\bar{\lambda}_j \bar{\eta} | \mathbb{P}^{j+1}$ liegt auf YY'' mit $Z \neq Y, Y''$; $Z \in \mathbb{P}^{j+1}$.

Nach 3.5, Folg. 2 existiert eine perspektive Kollineation $\mu: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ mit Zentrum Z und $Y'' \mapsto Y$ und $\mu | \mathbb{P}^j = \iota_{\mathbb{P}^j}$. Es gilt:

$$\left. \begin{aligned} \mu | \mathbb{P}^{j+1} &\in \text{PGL}(Z, \mathbb{P}^{j+1}) \text{ (nach 3.4, Folg. 5 und wegen } Z \in \mathbb{P}^{j+1}) \\ \bar{\lambda}_j \bar{\eta} | \mathbb{P}^{j+1} &\in \text{PGL}(Z, \mathbb{P}^{j+1}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \bar{\lambda}_j \bar{\eta} \mu | \mathbb{P}^{j+1} \in \text{PGL}(Z, \mathbb{P}^{j+1})$. Außerdem leistet $\bar{\lambda}_j \bar{\eta} \mu | \mathbb{P}^{j+1}$ noch: $Y \xrightarrow{\bar{\lambda}_j \bar{\eta}} Y'' \xrightarrow{\mu} Y (Y \notin \mathbb{P}^j, Y \neq Z)$. Nach 3.4, Folg. 6 ist $\bar{\lambda}_j \bar{\eta} \mu | \mathbb{P}^{j+1}$

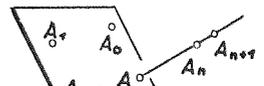
notwendig die Identität, da diese perspektive Kollineation außer dem Zentrum Z noch den Fixpunkt Y besitzt, der nicht der Achse angehört. $\lambda_{j+1} := \bar{\lambda}_j \bar{\eta} \mu: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ ist als Produkt der projektiven Kollineation $\bar{\lambda}_j$ und der perspektiven Kollineationen $\bar{\eta} \mu$ eine projektive Kollineation mit $\bar{\lambda}_j \bar{\eta} | \mathbb{P}^{j+1} = \iota_{\mathbb{P}^{j+1}}$. Nach dem Induktionsbeweis existiert $\lambda_n \in \text{PGL}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n)$ mit $\bar{\lambda}_n | \mathbb{P}^n = \iota_{\mathbb{P}^n} \Rightarrow \bar{\lambda}_n = \lambda_n^{-1} \in \text{PGL}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n)$.

Bemerkung: Bei $\dim \mathbb{P} = \infty$ führt der Induktionsbeweis nicht auf ein Produkt von endlich vielen Faktoren (also nicht auf eine projektive Kollineation). Für unendlichdimensionale projektive Räume ist die Behauptung falsch (ohne Bew.).

Wir wollen nun einen zu Satz 1.9 analogen Satz für endlichdimensionale Räume herleiten. Dazu ist es zunächst notwendig, den Begriff Viereck zu verallgemeinern.

DEF. 3.7 c: Unter einer Fundamentalfigur in einem endlichdimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ ($1 \leq \dim \mathbb{P} =: n < \infty$) versteht man eine Menge von $n+2$ Punkten aus \mathbb{P} , von denen je $n+1$ einen Basissimplex von \mathbb{P} bilden.

Bemerkungen: (a) Ist $\{A_0, \dots, A_n, A_{n+1}\}$ eine Fundamentalfigur in \mathbb{P} , so ist z.B. $\{A_0, \dots, A_n\}$ ein Basissimplex von \mathbb{P} und $A_0 \vee A_1 \vee \dots \vee A_{n-1} =: \mathbb{P}_\omega$ ist wegen $A_n \notin \mathbb{P}_\omega \wedge \mathbb{P}_\omega \vee A_n = \mathbb{P}$ eine Hyperebene von \mathbb{P} . Wegen $A_n \in \mathbb{P}_\omega$ ist die Gerade $(A_n \vee A_{n+1})$ nicht in \mathbb{P}_ω enthalten, daher ist nach 3.2, Folg. 5 der Punkt



$A := (A_n \vee A_{n+1}) \cap \bar{T}_\omega$ eindeutig bestimmt.

Die Menge $\{A_0, \dots, A_{n-1}, A\}$ ist eine Fundamentalfigur in \bar{T}_ω .

Bew.: Es ist zu zeigen, daß je n Punkte der Menge einen Basissimplex von \bar{T}_ω bilden. Läßt man A weg, so ist $\{A_0, \dots, A_{n-1}\}$ nach Definition von \bar{T}_ω ein Basissimplex von \bar{T}_ω . Werde nun der Punkt A_1 weggelassen; es ist zu zeigen, daß $\{A_0, \dots, A_{1-1}, A_{1,1}, \dots, A_{n-1}, A\}$ ein Basissimplex von \bar{T}_ω ist. Keiner der Punkte $A_0, \dots, A_{1-1}, A_{1,1}, \dots, A_{n-1}$ liegt im Verbindungsraum seiner Vorgänger, denn $\{A_0, \dots, A_{n-1}\}$ ist ein Basissimplex von \bar{T}_ω . Damit fehlt nur noch:
 $A \notin A_0 \vee \dots \vee A_{1-1} \vee A_{1,1} \vee \dots \vee A_{n-1} =: \bar{T}$.
 (ind.) $A \in \bar{T} \Rightarrow A \vee A_n \subset \bar{T} \vee A_n$. Wegen der Konstruktion von A gilt: $A \in A_n \vee A_{n+1}$ und wegen $A \in \bar{T}_\omega \wedge A_{n+1} \bar{T}_\omega$ gilt $A \notin A_n$, sodaß folgt: $A_{n+1} \in A \vee A_n \subset \bar{T} \vee A_n$, d.h. $A_{n+1} \in A_0 \vee \dots \vee A_{1-1} \vee A_{1,1} \vee \dots \vee A_{n-1} \vee A_n$. Widerspruch dazu, daß mit der Fundamentalfigur $\{A_0, \dots, A_{n+1}\}$ die Punktmenge $\{A_0, \dots, A_{1-1}, A_{1,1}, \dots, A_{n+1}\}$ ein Simplex sein muß. Damit ist $\{A_0, \dots, A_{1-1}, A_{1,1}, \dots, A_{n-1}, A\}$ ein Simplex in \bar{T}_ω der Länge n-1, also nach 3.7, Folg.3 ein Basissimplex von \bar{T}_ω . ◆

(b) Jeder n-dimensionale projektive Raum mit $1 \leq n < \infty$ besitzt eine Fundamentalfigur.

Bew.: $\dim \bar{T} = n \xrightarrow{\text{Def. 3.7 b}}$ in \bar{T} existiert ein Basissimplex $\{A_0, \dots, A_n\}$. Wir bezeichnen: $A_0 \vee A_1 \vee \dots \vee A_n =: \bar{T}^1 (1+1 \leq n)$. Auf der Geraden \bar{T}^1 existiert nach Axiom E ein dritter Punkt $A \neq A_0, A_1$ und $\{A_0, A_1, A\}$ ist eine Fundamentalfigur von \bar{T}^1 wegen $A_0 \vee A_1 = A_1 \vee A_0 = \bar{T}^1$.
 Induktionsannahme: Im Unterraum \bar{T}^1 existiert ein Punkt X so, daß $\{A_0, \dots, A_1, X\}$ eine Fundamentalfigur von \bar{T}^1 ist.
 Beh.: $\exists Y \in \bar{T}^1$ so, daß $\{A_0, \dots, A_{1-1}, Y\}$ eine Fundamentalfigur von \bar{T}^1 ist.

Induktionsschluß: Da $\{A_0, \dots, A_n\}$ ein Simplex ist, gilt $A_{1-1} \notin \bar{T}^1$, woraus mit $X \in \bar{T}^1$ folgt: $A_{1-1} \neq X$. Auf der nach Axiom I, eindeutig bestimmten Geraden $A_{1-1} \vee X$ existiert nach Axiom E noch mindestens ein dritter Punkt $Y \neq A_{1-1}, X$. Wir wollen zeigen, daß $\{A_0, \dots, A_{1-1}, Y\}$ eine Fundamentalfigur von \bar{T}^1 ist. Läßt man Y weg, so ist $\{A_0, \dots, A_{1-1}\}$ ein Basissimplex von \bar{T}^1 nach Definition von \bar{T}^1 . Wir lassen nun den Punkt A; weg und zeigen, daß $\{A_0, \dots, A_{j-1}, A_{j,1}, \dots, A_{1-1}, Y\}$ ein Basissimplex von \bar{T}^1 ist. Von den Punkten $A_0, \dots, A_{j-1}, A_{j,1}, \dots, A_{1-1}$ ist keiner im Verbindungsraum seiner Vorgänger enthalten, denn $\{A_0, \dots, A_{1-1}\}$ ist ein Simplex in \bar{T}^1 . Damit ist nur noch $Y \notin A_0 \vee \dots \vee A_{j-1} \vee A_{j,1} \vee \dots \vee A_{1-1} \vee A_{1,1}$ nachzuweisen.

$$\underbrace{A_0 \vee \dots \vee A_{j-1} \vee A_{j,1} \vee \dots \vee A_{1-1} \vee A_{1,1}}_{=: \bar{T}_1} =: \bar{T}$$

(ind.) $Y \in \bar{T} \Rightarrow A_{1,1} \in \bar{T}$; wegen $X \in A_{1-1} \vee Y \Rightarrow X \in \bar{T}$. Außerdem gilt $X \in \bar{T} \Rightarrow X \in \bar{T} \cap \bar{T}^1 = (\bar{T}_1 \vee A_{1,1}) \cap \bar{T}^1$, wobei $\bar{T}_1 \subset \bar{T}^1$ gilt. Nach Satz 3.1 gilt im Verband $u\bar{T}$ das modulare Gesetz:
 $\bar{T}_1 \subset \bar{T}_3 \Rightarrow (\bar{T}_1 \vee \bar{T}_2) \cap \bar{T}_3 = \bar{T}_1 \vee (\bar{T}_2 \cap \bar{T}_3)$. Da $A_{1-1} \cap \bar{T}^1 = \bar{T}_0$ wegen der Simplexeigenschaft von $\{A_0, \dots, A_{1-1}\}$, gilt:
 $(\bar{T}_1 \vee A_{1-1}) \cap \bar{T}^1 = \bar{T}_1 \vee (A_{1-1} \cap \bar{T}^1) = \bar{T}_1 \vee \bar{T}_0 = \bar{T}_1$.

Insgesamt folgt also: $X \in \pi_1 = A_0 \vee \dots \vee A_{j-1} \vee A_{j+1} \vee \dots \vee A_l$;
 Widerspruch, denn nach Induktionsannahme ist $\{A_0, \dots, A_j, X\}$
 eine Fundamentalfigur, womit aber $\{A_0, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_l, X\}$
 ein Simplex ist, d.h. $X \in A_0 \vee \dots \vee A_{j-1} \vee A_{j+1} \vee \dots \vee A_l$.
 Damit ist $\{A_0, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_l, Y\}$ ein Simplex von π^{l+1} der
 Länge $l+1$ und daher nach Folg. 3 ein Basissimplex von π^{l+1} .

8) Ist $\pi_{\mathbb{R}^n}$ ein endlichdimensionaler Desarguesraum ($2 \leq n < \infty$), so operiert $PGL(\pi_{\mathbb{R}^n})$ transitiv auf der Menge der Fundamentalfiguren des Raumes. Ist $\pi_{\mathbb{R}^n}$ ein endlichdimensionaler PP-Raum, so ist jede projektive Kollineation, welche die Punkte einer Fundamentalfigur einzeln festläßt, notwendig die Identität, und $PGL(\pi_{PP})$ operiert scharf transitiv auf der Menge der Fundamentalfiguren.

Bew.: (a) Für $n=2$ besteht eine Fundamentalfigur aus vier Punkten, von denen je drei ein Dreieck (=Basissimplex der projektiven Ebene) bilden; also ist eine Fundamentalfigur ein Viereck. Nach Satz 1.9 ist $PGL(\pi_{\mathbb{R}^2})$ viereckstransitiv.

Induktionsannahme: Für $\dim \pi_{\mathbb{R}^n} = n-1$ ist $PGL(\pi_{\mathbb{R}^n})$ transitiv auf der Menge der Fundamentalfiguren, die in $\pi_{\mathbb{R}^n}$ aus $n+1$ Punkten bestehen. Induktionsschluß von $n-1$ nach n :

In $\pi_{\mathbb{R}^n}$ seien die Fundamentalfiguren $\{A_0, \dots, A_{n+1}\}$ und $\{A'_0, \dots, A'_{n+1}\}$ gegeben. Es ist zu zeigen, daß ein $\alpha \in PGL(\pi_{\mathbb{R}^n})$ existiert mit $A_j \alpha = A'_j$ (für $j=0 \dots n+1$).

$A_0 \vee \dots \vee A_{n-1} =: \pi_{\omega}$ und $A'_0 \vee \dots \vee A'_{n-1} =: \pi'_{\omega}$ sind Hyperebenen in $\pi_{\mathbb{R}^n}$. Nach 3.5, Folg.2, Anw.(a) existiert stets eine perspektive Kollineation $\alpha_1: \pi_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \pi_{\mathbb{R}^n}$ mit $\pi_{\omega} \alpha_1 = \pi'_{\omega}$.

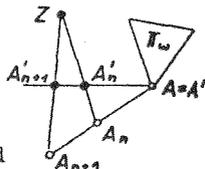
Wir dürfen daher i.f. $\pi_{\omega} = \pi'_{\omega}$ voraussetzen (wir denken uns α_1 bereits durchgeführt und kehren zu den alten Beziehungen zurück). Wegen der Eigenschaften von α_1 sind dann $\{A_j\}$ und $\{A'_j\}$ wieder Fundamentalfiguren.

Nach Bemerkung (a) nach Def. 3.7 c ist $\{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A\}$ mit $A := (A_n \vee A_{n+1}) \cap \pi_{\omega}$ eine Fundamentalfigur in π_{ω} ; ebensolches gilt für $\{A'_0, A'_1, \dots, A'_{n-1}, A'\}$ mit $A' := (A'_n \vee A'_{n+1}) \cap \pi'_{\omega}$. Es gilt $\dim \pi_{\omega} = n-1$, also existiert nach Induktionsvoraussetzung eine projektive Kollineation $\alpha_2 \in PGL(\pi_{\omega})$ mit $A_i \alpha_2 = A'_i$ ($i=0, \dots, n-1$) und $A \alpha_2 = A'$. α_2 ist Produkt von endlich vielen perspektiven Kollineationen der Hyperebene π_{ω} auf sich. Da nach Voraussetzung $\dim \pi \geq 3$ gilt, läßt sich nach 3.5, Folg.2, Anwendung (c) jede perspektive Kollineation der Hyperebene π_{ω} stets zu einer perspektiven Kollineation von π fortsetzen, also

kann man insgesamt auch die projektive Kollineation α_1 zu einer projektiven Kollineation λ_1 von $\overline{\mathbb{P}}_D$ fortsetzen. Wir denken uns wieder λ_1 ausgeführt und kehren zur alten Beschriftung zurück, sodaß nun gilt:

$$A_i = A'_i \quad (\text{für } i=0 \dots n-1) \quad \text{und} \quad A = A'$$

Da λ_1 kollineare Lage erhält und bijektiv ist, sind A_n, A_{n+1}, A pw. verschieden und kollinear und ebenso sind $A'_n, A'_{n+1}, A = A'$ pw. verschieden und kollinear. Wir haben nun dieselbe Situation wie in 3.5, Folg. 7,



Schritt 3 und 4, wobei $A=A'$ zu ersetzen ist durch $U=U''$; A_n, A'_n durch O, O'' ; A_{n+1}, A'_{n+1} durch E, E'' .

Es existiert also eine projektive Kollineation $\alpha_3 \in \text{PGL}(\overline{\mathbb{P}}_D)$, die $\overline{\mathbb{W}}$ punktweise festläßt und $A_n \alpha_3 = A'_n$ und $A_{n+1} \alpha_3 = A'_{n+1}$ leistet.

$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ ist Produkt von projektiven Kollineationen von $\overline{\mathbb{P}}_D$, also eine projektive Kollineation mit $A_j \alpha = A'_j$ ($j = 0, \dots, n+1$).

(b) Für $n=2$ ist gemäß Satz 1.9 eine projektive Kollineation einer PP-Ebene, welche die Ecken eines Vierecks einzeln festläßt, notwendig die Identität.

Induktionsannahme: Die Behauptung gilt für $\overline{\mathbb{P}}_{pp}$ mit $\dim \overline{\mathbb{P}}_{pp} = n-1$.

Induktionsschluß nach n :

$\{A_0, \dots, A_{n-1}, A\}$ ist eine Fundamentalfigur in der Hyperebene $\overline{\mathbb{W}} = A_0 \vee \dots \vee A_{n-1}$ (nach Bemerkung (a) nach Def. 3.7 c), und $\alpha|_{\overline{\mathbb{W}}}$ läßt die Punkte A_0, A_1, \dots, A_{n-1} aber auch A fest:

$$\overline{\mathbb{W}} \alpha = A_0 \alpha \vee \dots \vee A_{n-1} \alpha = A_0 \vee \dots \vee A_{n-1} = \overline{\mathbb{W}} \wedge$$

$$A \alpha = [(A_n \vee A_{n+1}) \cap \overline{\mathbb{W}}] \alpha = (A_n \alpha \vee A_{n+1} \alpha) \cap \overline{\mathbb{W}} \alpha = (A_n \vee A_{n+1}) \cap \overline{\mathbb{W}} = A.$$

Für $\alpha|_{\overline{\mathbb{W}}}$ gilt also nach Induktionsannahme $\alpha|_{\overline{\mathbb{W}}} = \iota_{\overline{\mathbb{W}}} \Rightarrow \alpha$ ist eine perspektive Kollineation in $\overline{\mathbb{P}}$ mit der Achse $\overline{\mathbb{W}}$. Da α zwei Fixpunkte $A_n \alpha = A_n$ und $A_{n+1} \alpha = A_{n+1}$ nicht in $\overline{\mathbb{W}}$ besitzt, folgt nach 3.4, Folg. 6 dann $\alpha = \iota$.

(c) Aus (b) folgt die scharfe Transitivität von $\text{PGL}(\overline{\mathbb{P}}_{pp})$ auf der Menge der Fundamentalfiguren. Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{PGL}(\overline{\mathbb{P}}_{pp})$ projektive Kollineationen, die beide eine Fundamentalfigur $\{A_j\}$ in eine Fundamentalfigur $\{A'_j\}$ überführen: $A_j \alpha_i = A'_j$ für $j=0, \dots, n+1$ und $i=1, 2$.

Für $\alpha_1 \alpha_2^{-1} \in \text{PGL}(\overline{\mathbb{P}}_{pp})$ gilt dann $A_j \alpha_1 \alpha_2^{-1} = A'_j \alpha_2^{-1} = A_j \Rightarrow \alpha_1 \alpha_2^{-1} = \iota \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

SATZ 3.7: Ist \mathbb{T} ein projektiver Raum endlicher Dimension, so erhält jede Kollineation die Dimension jedes Unterraumes. In jedem Desarguesraum endlicher Dimension sind die projektiven Kollineationen genau jene Kollineationen, deren Beschränkung auf eine Punktreihe projektiv ist, die projektive Gruppe operiert transitiv auf der Menge der Fundamentalfiguren und scharf transitiv, wenn PP gilt.

3.8. Der duale projektive Raum

Sei i.f. \mathbb{T} ein projektiver Raum mit $\dim \mathbb{T} \geq 2$.

Nach 3.2 ist der Verband $u\mathbb{T}$ der Unterräume eines projektiven Raumes $\mathbb{T} = \{\mathcal{P}, \mathcal{G}, I, I_1, I_2, E\}$ komplementiert. Jeder zu einem Punkt komplementäre Unterraum ist eine Hyperebene (Def.3.2). Wir fassen jede Hyperebene als Grundelement einer neuen Inzidenzstruktur auf und bezeichnen sie als "Kopunkt"; die Menge aller Kopunkte heiÙe \mathcal{P}^* . Jeden zu einer Geraden komplementären Unterraum bezeichnen wir als "Kogerade", wenn wir ihn als Grundelement der neuen Inzidenzstruktur auffassen; die Menge aller Kogeraden heiÙe \mathcal{G}^* .

Die neuen Auffassungen dieser Unterräume bringen wir auch in der Bezeichnung zum Ausdruck: Fassen wir eine Hyperebene als Unterraum von \mathbb{T} , also als Punktmenge auf, so schreiben wir \mathbb{T}_α , betrachten wir sie als Grundelement, so schreiben wir α (kleine griechische Buchstaben). Ebenso bei den Kogeraden: \mathbb{T}_Σ oder Σ (groÙe griechische Buchstaben).

Es fehlt noch die Definition der (Ko-)Inzidenz $I^* \subset \mathcal{P}^* \times \mathcal{G}^*$. Es gelte:

$$(\alpha, \Sigma) \in I^* \text{ (kurz } \alpha I^* \Sigma) \iff \mathbb{T}_\alpha \supset \mathbb{T}_\Sigma.$$

I^* ist also mit Hilfe des projektiven Punktraumes $\mathbb{T}(\mathcal{P})$ erklärt. $\{\mathcal{P}^*, \mathcal{G}^*, I^*\}$ ist nach 1.1 eine Inzidenzstruktur; sie heiÙt "die zu \mathbb{T} duale Inzidenzstruktur".

Bemerkungen: (a) Kopunkte sind als Punktmenge aufgefaÙt genau die Hyperebenen. Setzen wir $2 \leq \dim \mathbb{T} = n < \infty$ voraus, dann gilt: Ein Unterraum $\mathbb{T}_1 \in u\mathbb{T}$ ist genau dann Hyperebene, wenn gilt: $\dim \mathbb{T}_1 = n-1$ (vgl. 3.7, Folg.5, Bem.b).

(b) $2 \leq \dim \mathbb{T} = n < \infty$: Die Kogeraden sind aufgefaÙt als Punktmenge genau die Unterräume der Dimension $n-2$. Jeder Schnittraum zweier verschiedener Hyperebenen hat die Dimension

$n-2$; ist umgekehrt \mathbb{T}_1 ein Unterraum der Dimension $n-2$, so existieren zwei verschiedene Hyperebenen $\mathbb{T}_\alpha, \mathbb{T}_\beta$ mit $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$.

Bew.: (1) Eine Kogerade aufgefaßt als Punktmenge \mathbb{T}_1 ist Komplement einer Geraden \mathbb{T}_2 ; für diese komplementären Unterräume gilt (nach 3.7, Folg.5, Anw.a) $\dim \mathbb{T}_1 + \dim \mathbb{T}_2 = n-1$, woraus mit $\dim \mathbb{T}_2 = 1$ folgt $\dim \mathbb{T}_1 = n-2$.

(2) \mathbb{T}_1 sei ein Unterraum mit $\dim \mathbb{T}_1 = n-2$ ^{Def. 3.7} in \mathbb{T}_1 existiert ein Basissimplex $\{P_0, \dots, P_{n-2}\}$ und dieser läßt sich nach 3.7, Folg.2 zu einem Basissimplex von \mathbb{T} ergänzen: $\{P_0, \dots, P_n\} \Rightarrow P_n \neq P_{n-1}$, also ist $P_n \vee P_{n-1}$ eine Gerade. Σ ist eine Kogerade, da \mathbb{T}_1 komplementärer Unterraum zu $P_n \vee P_{n-1}$ ist:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_1 \vee (P_{n-1} \vee P_n) &= (P_0 \vee \dots \vee P_{n-2}) \vee (P_{n-1} \vee P_n) = \mathbb{T}; \\ \mathbb{T}_1 \cap (P_{n-1} \vee P_n) &= \emptyset, \text{ da nach dem Dimensionssatz gilt:} \\ \dim \mathbb{T}_1 \cap (P_{n-1} \vee P_n) &= \dim \mathbb{T}_1 + \dim (P_{n-1} \vee P_n) - \dim [\mathbb{T}_1 \vee (P_{n-1} \vee P_n)] = \\ &= n-2 + 1 - n = -1. \end{aligned}$$

(3) Sind $\mathbb{T}_\alpha, \mathbb{T}_\beta$ verschiedene Hyperebenen, so gilt $\mathbb{T}_\alpha \vee \mathbb{T}_\beta = \mathbb{T}$ und daher nach dem Dimensionssatz:

$$\dim (\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta) = \dim \mathbb{T}_\alpha + \dim \mathbb{T}_\beta - \dim (\mathbb{T}_\alpha \vee \mathbb{T}_\beta) = n-1 + n-1 - n = n-2.$$

(4) \mathbb{T}_1 sei ein Unterraum mit $\dim \mathbb{T}_1 = n-2$; wir gehen wie in Beweisschritt 2 vor und bezeichnen:

$$P_0 \vee \dots \vee P_{n-1} =: \mathbb{T}_\alpha, \quad P_0 \vee \dots \vee P_{n-2} \vee P_n =: \mathbb{T}_\beta.$$

Da es im Basissimplex $\{P_0, \dots, P_n\}$ nicht auf die Reihenfolge ankommt, sind \mathbb{T}_α und \mathbb{T}_β Unterräume der Dimension $n-1$, also nach Bem.(a) Hyperebenen. Wegen der Simplexeigenschaft gilt

$$P_n \notin P_0 \vee \dots \vee P_{n-1} = \mathbb{T}_\alpha \wedge P_n \in \mathbb{T}_\beta \Rightarrow \mathbb{T}_\alpha \neq \mathbb{T}_\beta.$$

$$\text{Aus } \mathbb{T}_1 = P_0 \vee \dots \vee P_{n-2} \text{ folgt: } \mathbb{T}_1 \subset \mathbb{T}_\alpha \wedge \mathbb{T}_1 \subset \mathbb{T}_\beta \Rightarrow \mathbb{T}_1 \subset \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta.$$

Nach Beweisschritt 3 gilt: $\dim (\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta) = n-2$ und nach Voraussetzung $\dim \mathbb{T}_1 = n-2$ ^{3.7.5} $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$.

DEF. 3.8a: Die Kopunkte bzw. Kogeraden eines projektiven Raumes \mathbb{T} , der ein Dreieck enthält, sind die zu einem Punkt bzw. einer Geraden komplementären Unterräume aufgefaßt als Grundelemente. Die Inzidenzstruktur $\mathbb{T}^* = \{\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, I^*\}$ bestehend aus den Kopunkten und den Kogeraden von \mathbb{T} , wobei ein Kopunkt α genau dann mit einer Kogeraden Σ inzidiert, wenn die Hyperebene \mathbb{T}_α den Unterraum \mathbb{T}_Σ enthält, heißt die zu \mathbb{T} duale Inzidenzstruktur.

Bemerkungen: (a) Ist \mathbb{T} eine projektive Ebene, so ist jede Hyperebene eine Gerade (vgl. Bem.(a) nach Satz 3.2); es gilt also $\mathcal{P}^* = \mathcal{Q}^*$. Komplement einer Geraden ist ein Punkt, also ist $\mathcal{Q}^* = \mathcal{P}^*$. g. I^{*} P bedeutet: Die Punktreihe \mathbb{T}_g enthält den Punkt P, also P I g. Die in 1.1 definierte duale Inzidenzstruktur zu einer projektiven Ebene gliedert sich damit in Def. 3.8 ein.

(b) Da die Bildung des zu einem projektiven Raum \mathbb{T} dualen projektiven Raumes nur dann von größerem Interesse ist, wenn $\dim \mathbb{T} < \infty$ gilt, sei i. f. \mathbb{T} endlichdimensional vorausgesetzt.

Folgerungen (für $2 \leq \dim \mathbb{T} < \infty$):

1) In \mathbb{T}^* gilt I_1 : Zu zwei verschiedenen Kopunkten $\alpha, \beta \mid \neq, \in \mathcal{P}^*$ existiert genau eine Kogerade Σ , die mit diesen Kopunkten inzidiert.

Bew.: Existenz: Nach Bem. (b) ist $\mathbb{T}_\Sigma := \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ ein Unterraum der Dimension $n-2$ und Σ eine Kogerade und es gilt:

$$\mathbb{T}_\Sigma \subset \mathbb{T}_\alpha \iff \alpha \in I^* \Sigma, \mathbb{T}_\Sigma \subset \mathbb{T}_\beta \iff \beta \in I^* \Sigma.$$

Eindeutigkeit: $\exists \Sigma, \Gamma \in \mathcal{O}^*$ mit $\mathbb{T}_\Sigma = \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta \wedge \mathbb{T}_\Gamma \subset \mathbb{T}_\alpha \wedge \mathbb{T}_\Gamma \subset \mathbb{T}_\beta \implies \mathbb{T}_\Gamma \subset \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta = \mathbb{T}_\Sigma \implies \mathbb{T}_\Gamma \subset \mathbb{T}_\Sigma$;

da Σ und Γ Kogeraden sind gilt außerdem $\dim \mathbb{T}_\Sigma = \dim \mathbb{T}_\Gamma = n-2$, was mit $\mathbb{T}_\Gamma \subset \mathbb{T}_\Sigma$ nach 3.7, Folg.3 $\mathbb{T}_\Gamma = \mathbb{T}_\Sigma$ nach sich zieht.

Bemerkung: Für die durch $\alpha, \beta \in \mathcal{P}^*$, \neq eindeutig bestimmte Kogerade schreiben wir i.f. $\alpha\beta$.

2) In \mathbb{T}^* gilt E: Mit jeder Kogeraden inzidieren mindestens drei verschiedene Kopunkte.

Bew.: Die Kogerade Σ ist nach Definition ein zu einer Geraden $s \in \mathcal{O}$ komplementärer Unterraum: $\mathbb{T}_\Sigma \cap \mathbb{T}_s = \emptyset \wedge \mathbb{T}_\Sigma \vee \mathbb{T}_s = \mathbb{T}$.

Da in \mathbb{T} das Axiom E gilt, existieren auf s drei paarweise verschiedene Punkte $A, B, C \notin \mathbb{T}_\Sigma$.

$\mathbb{T}_\Sigma \vee A =: \mathbb{T}_\alpha, \mathbb{T}_\Sigma \vee B =: \mathbb{T}_\beta, \mathbb{T}_\Sigma \vee C =: \mathbb{T}_\gamma$ sind Hyperebenen, da z.B. mit $\mathbb{T}_A \cap \mathbb{T}_\Sigma = \mathbb{T}_\emptyset$ gilt $\dim \mathbb{T}_\alpha = \dim \mathbb{T}_\Sigma + \dim \mathbb{T}_A - \dim (\mathbb{T}_A \cap \mathbb{T}_\Sigma) = n-2+0-(-1) = n-1$.

Es gilt $\mathbb{T}_\alpha, \mathbb{T}_\beta, \mathbb{T}_\gamma \not\supset \mathbb{T}_\Sigma$, d.h. $\alpha, \beta, \gamma \mid I^* \Sigma$. Weiters sind $\mathbb{T}_\alpha, \mathbb{T}_\beta, \mathbb{T}_\gamma$ paarweise verschieden:

(ind.) z.B. $\mathbb{T}_\alpha = \mathbb{T}_\beta \implies \mathbb{T}_\Sigma \vee A = \mathbb{T}_\Sigma \vee B \implies B \in \mathbb{T}_\Sigma \vee A \implies \exists S \in \mathbb{T}_\Sigma$ mit $B \in S \vee A$.

Wegen $A \neq B$ folgt $S \in A \vee B \implies S \in \mathbb{T}_s \wedge S \in \mathbb{T}_\Sigma$: Widerspruch zu $\mathbb{T}_\Sigma \cap \mathbb{T}_s = \emptyset$.

Bemerkungen: (a) Da wegen E jede Kogerade mit Kopunkten inzidiert, kann man in \mathbb{T}^* von "Kopunktreihen" sprechen; die Menge aller Kopunkte, die mit der Kogeraden Σ inzidieren, bezeichnen wir mit \mathcal{P}_Σ^* . Im Sinne der im Ausgangsraum \mathbb{T} geltenden Sprache ("Hyperebenen-sprache") ist dies die Menge aller Hyperebenen, welche einen festen $(n-2)$ -dimensionalen Unterraum \mathbb{T}_Σ umfassen; gemäß dieser Auffassung bezeichnen wir diese Hyperebenenmenge als "Hyperebenenbüschel".

(b) In \mathbb{T}^* kann man von "kollinearen Kopunkten" sprechen: drei Kopunkte α, β, γ heißen kollinear, wenn eine Kogerade Σ existiert, welche mit den drei Kopunkten inzidiert. In der "Hyperebenensprache": Es existiert ein $(n-2)$ -dimensionaler Unterraum \mathbb{T}_Σ , der in den drei Hyperebenen $\mathbb{T}_\alpha, \mathbb{T}_\beta, \mathbb{T}_\gamma$ enthalten ist. $\mathbb{T}_\alpha, \mathbb{T}_\beta, \mathbb{T}_\gamma$ gehören also dem durch \mathbb{T}_Σ bestimmten Hyperebenenbüschel an.

Drei nicht kollineare Kopunkte α, β, γ sind paarweise verschieden. (vgl. 1.1)

Bew.: $\alpha = \beta \wedge \alpha \neq \gamma \stackrel{I_1}{\Rightarrow} \exists \Sigma = \alpha\gamma \in \mathcal{U}^*$ mit $\alpha, \beta, \gamma \mid I^* \Sigma$: Widerspruch. $\alpha = \beta = \gamma$: Ist $D \in \mathbb{T}_\alpha$, so ist die zu D komplementäre Hyperebene $\mathbb{T}_D \neq \mathbb{T}_\alpha$ wegen $D \notin \mathbb{T}_\alpha$. Damit existiert ein Kopunkt $\delta \neq \alpha$ und für die Kogerade $\alpha\delta$ gilt $\alpha, \beta, \gamma \mid I^* \alpha\delta$: Widerspruch. \blacklozenge

(c) Zwei verschiedene Kogeraden haben höchstens einen Kopunkt gemeinsam (sonst Widerspruch zu I_1).

3) In \mathbb{T}^* gilt I_2 : Sind $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{K}^*$ drei nicht kollineare Kopunkte und sind $\sigma, \tau \in \mathcal{K}^*$ weitere Kopunkte mit $\sigma I^* \alpha\gamma \wedge \tau I^* \beta\gamma$, so existiert ein Kopunkt ϱ mit $\varrho I^* \alpha\beta$ und ϱ, σ, τ kollinear.

Bew.: Wegen Bem.(b) sind α, β, γ paarweise verschieden. Wir betrachten zuerst zwei Sonderfälle:

(1) $\sigma = \tau$: $\sigma I^* \alpha\gamma \wedge \tau I^* \beta\gamma \Rightarrow \sigma = \tau$ ist der nach Bem.(c) eindeutig bestimmte Schnittpunkt γ der verschiedenen Kogeraden $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma \Rightarrow \sigma = \tau = \gamma$. Für den Kopunkt $\alpha =: \varrho$ gilt $\varrho, \sigma, \tau \mid I^* \alpha\gamma$, also sind ϱ, σ, τ kollinear und $\varrho I^* \alpha\beta$.

(2) $\sigma = \alpha$ ($\Rightarrow \sigma \neq \tau$): Für $\varrho := \alpha$ gilt $\varrho, \sigma, \tau \mid I^* \sigma\tau$, also sind ϱ, σ, τ kollinear und $\varrho I^* \alpha\beta$. (Analog $\sigma = \gamma$ oder $\tau = \beta$ oder $\tau = \gamma$)
 Gelte nun: $\sigma \neq \tau \wedge \sigma \neq \alpha, \gamma \wedge \tau \neq \beta, \gamma \stackrel{I_1}{\Rightarrow}$ die Kogeraden $\sigma\tau$ und $\alpha\beta$ sind eindeutig bestimmt. Aus $\sigma\tau = \alpha\beta \Rightarrow$

$\left. \begin{array}{l} \sigma I^* \alpha\beta \wedge \sigma I^* \alpha\gamma \text{ (VS)} \\ \alpha I^* \alpha\beta \wedge \alpha I^* \alpha\gamma \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Wegen } \alpha, \beta, \gamma \text{ nicht kollinear} \\ \text{sind die Kogeraden } \alpha\beta \text{ und } \alpha\gamma \text{ ver-} \\ \text{schieden und sie haben nach obiger Bemerkung höchstens einen} \\ \text{Schnittpunkt } \Rightarrow \alpha \neq \sigma \text{ im Widerspruch zur Voraussetzung. Es ist} \\ \text{also } \sigma\tau \neq \alpha\beta. \end{array}$

Die Kogeraden $\sigma\tau$ und $\alpha\beta$ sind für die auf den Ausgangsraum \mathbb{T} gestützte Betrachtung $(n-2)$ -dimensionale Unterräume $\mathbb{T}_{\sigma\tau}$ und $\mathbb{T}_{\alpha\beta}$. Es genügt zu zeigen, daß ihr Verbindungsraum $\mathbb{T}_\varrho := \mathbb{T}_{\sigma\tau} \vee \mathbb{T}_{\alpha\beta}$ eine Hyperebene ist; für \mathbb{T}_ϱ gilt dann nämlich $\mathbb{T}_\varrho \supset \mathbb{T}_{\sigma\tau} \wedge \mathbb{T}_\varrho \supset \mathbb{T}_{\alpha\beta}$, was $\varrho I^* \sigma\tau \wedge \varrho I^* \alpha\beta$ bedeutet.

Π_ζ ist Hyperebene:

$$\dim \Pi_\zeta = \dim (\Pi_{\sigma\tau} \vee \Pi_{\alpha\beta}) = \underbrace{\dim \Pi_{\sigma\tau}}_{n-2} + \underbrace{\dim \Pi_{\alpha\beta}}_{n-2} - \dim (\Pi_{\sigma\tau} \cap \Pi_{\alpha\beta})$$

$$\Pi_{\sigma\tau} \cap \Pi_{\alpha\beta} = (\Pi_\sigma \cap \Pi_\tau) \cap (\Pi_\alpha \cap \Pi_\beta) = (\tau \cap \beta) \cap (\sigma \cap \alpha) \cap (\tau \cap \alpha) \cap (\sigma \cap \beta) = (*).$$

Vgl. Folg. 1 \cap ist idempotent, assoziativ und kommutativ

$\Pi_\sigma \cap \Pi_\alpha = \Pi_\gamma \cap \Pi_\alpha$ (wegen $\alpha \neq \sigma$ bestimmen nach I_1 die Kopunkte α und σ eine eindeutige Kogerade; für die Kogerade $\alpha\gamma$ gilt $\alpha I^* \alpha \gamma$ und nach Voraussetzung $\sigma I^* \alpha \gamma \Rightarrow \alpha \gamma = \alpha \sigma$);

Ebenso: $\Pi_\tau \cap \Pi_\beta = \Pi_\gamma \cap \Pi_\beta$ ($\beta \neq \tau \wedge \beta I^* \beta \gamma \wedge \tau I^* \beta \gamma$ [VS] $\stackrel{I_1}{\Rightarrow} \beta \tau = \beta \gamma$).

$$(*) = (\tau \cap \beta) \cap (\Pi_\gamma \cap \Pi_\alpha) \cap (\Pi_\gamma \cap \Pi_\beta) = \Pi_\alpha \cap \Pi_\beta \cap \Pi_\gamma.$$

$$\dim (\Pi_{\alpha\beta} \cap \Pi_{\sigma\tau}) = \dim (\Pi_\alpha \cap \Pi_\beta \cap \Pi_\gamma) =$$

$$\dim (\Pi_\alpha \cap \Pi_\beta) + \dim \Pi_\gamma - \dim [(\Pi_\alpha \cap \Pi_\beta) \vee \Pi_\gamma] = (n-2) + (n-1) - n = n-3$$

(Da α, β, γ nicht kollinear sind gilt $\gamma \not\subset \alpha\beta$, d.h. $\Pi_{\alpha\beta} \not\subset \Pi_\gamma \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists X \in \Pi_\alpha \cap \Pi_\beta \text{ mit } X \notin \Pi_\gamma \stackrel{3.2}{\Rightarrow} X \vee \Pi_\gamma = \Pi \Rightarrow \Pi_{\alpha\beta} \vee \Pi_\gamma = \Pi,$$

und daher ist $\dim [(\Pi_\alpha \cap \Pi_\beta) \vee \Pi_\gamma] = n$.

Wir haben insgesamt:

$$\dim \Pi_\zeta = (n-2) + (n-2) - \dim (\Pi_{\alpha\beta} \cap \Pi_{\sigma\tau}) = 2n - 4 - (n-3) = n-1 \stackrel{3em. (a)}{\Rightarrow}$$

Π_ζ ist eine Hyperebene. ◆

Damit haben wir gezeigt, daß Π^* ein projektiver Raum ist.

4) Entsprechend Def. 3.1 b versteht man unter einem Unterraum von Π^* eine Menge von Kopunkten, wobei mit je zwei verschiedenen Kopunkten die ganze durch sie bestimmte Kopunktreihe dieser Menge angehört (In der "Hyperebenen-sprache": eine Menge von Hyperebenen, wobei mit je zwei verschiedenen Hyperebenen das ganze durch sie bestimmte Hyperebenenbüschel dieser Menge angehört).

(a) Ist $\Pi_1^* \subset \Pi^*$ ein Unterraum von Π^* , so ist der Durchschnitt aller Hyperebenen aus Π_1^* ein Unterraum von Π .

Bew.: In 3.1 haben wir gezeigt, daß der Schnitt zweier Unterräume ein Unterraum ist und in einer Bemerkung zum Beweis angegeben, daß der Schnitt beliebig vieler Unterräume eines projektiven Raumes ein Unterraum ist. ◆

(b) Ist $\Pi_1 \subset \Pi$ ein Unterraum von Π , so ist die Menge M aller Hyperebenen von Π , welche Π_1 umfassen, ein Unterraum von Π^* .

Bew.: Seien $\overline{\pi}_\alpha, \overline{\pi}_\beta$ zwei verschiedene Hyperebenen, welche $\overline{\pi}_1$ umfassen, d.h. $\overline{\pi}_\alpha, \overline{\pi}_\beta \in M$. Es ist zu zeigen, daß jede Hyperebene $\overline{\pi}_\xi$ mit $\xi \in I^* \alpha \beta$, d.h. $\overline{\pi}_\xi \supset \overline{\pi}_\alpha \cap \overline{\pi}_\beta$, zu M gehört. Dies ist klar wegen $\overline{\pi}_1 \subset \overline{\pi}_\alpha \cap \overline{\pi}_\beta \subset \overline{\pi}_\xi$.

(c) Durch (b) wird somit eine globale Abbildung $\varphi: u\overline{\pi} \rightarrow u\overline{\pi}^*$ erklärt:

$\overline{\pi}_1 \varphi := \{ \alpha \in \mathcal{P}^* \mid \overline{\pi}_\alpha \supset \overline{\pi}_1 \}$. Nach (b) ist dies sinnvoll, denn es gilt $\overline{\pi}_1 \varphi \in u\overline{\pi}^*$ (Offen ist noch, ob sich jeder Unterraum von $\overline{\pi}^*$ so gewinnen läßt, ob also φ surjektiv ist!).

(d) Einige einfache Eigenschaften von φ :

Speziell: $\overline{\pi}_1 = \overline{\pi}_0 \Rightarrow \overline{\pi}_0 \varphi = \overline{\pi}^*$, denn jede Hyperebene von $\overline{\pi}$ umfaßt den leeren Unterraum.

$\overline{\pi}_1 = \overline{\pi}_p \Rightarrow \overline{\pi}_p \varphi$ ist die Menge aller durch P gehenden Hyperebenen... $\overline{\pi}_p \varphi = \{ \xi \in \mathcal{P}^* \mid \overline{\pi}_\xi \supset \overline{\pi}_p \}$; wir nennen diese Menge "Hyperebenenbündel".

$\overline{\pi}_1 = \overline{\pi}_\Sigma$ mit $\dim \overline{\pi}_\Sigma = n-2 \Rightarrow \overline{\pi}_\Sigma \varphi = \{ \xi \in \mathcal{P}^* \mid \overline{\pi}_\xi \supset \overline{\pi}_\Sigma \}$; diese Menge nannten wir "Hyperebenenbüschel". Sie besteht aus allen Kopunkten, welche mit der Kogeraden Σ inzidieren, ist also eine Kopunktreihe.

$\overline{\pi}_1 = \overline{\pi}_\alpha$ mit $\dim \overline{\pi}_\alpha = n-1 \Rightarrow \overline{\pi}_\alpha \varphi = \{ \alpha \}$, denn die einzige $\overline{\pi}_\alpha$ umfassende Hyperebene ist $\overline{\pi}_\alpha$. Daher ist $\overline{\pi}_\alpha \varphi$ ein Kopunkt.

$\overline{\pi}_1 = \overline{\pi} \Rightarrow \overline{\pi} \varphi = \overline{\pi}_0^*$, denn der ganze Raum $\overline{\pi}$ wird von keiner Hyperebene umfaßt. Die Abbildung $\overline{\pi}_1 \rightarrow \overline{\pi}_1 \varphi$ nennen wir den "Übergang zur dualen Deutung".

(e) Die Abbildung φ kehrt Inklusion wie auch Nichtinklusion um.

$$\begin{aligned} \overline{\pi}_1 \subset \overline{\pi}_2 &\Rightarrow \overline{\pi}_1 \varphi \supset \overline{\pi}_2 \varphi & \forall \overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2 \in u\overline{\pi}. \\ \overline{\pi}_1 \not\subset \overline{\pi}_2 &\Rightarrow \overline{\pi}_1 \varphi \not\supset \overline{\pi}_2 \varphi \end{aligned}$$

Bew.: (1) $\alpha \in \overline{\pi}_2 \varphi \stackrel{\text{Def. } \varphi}{\Rightarrow} \overline{\pi}_\alpha \supset \overline{\pi}_2 \supset \overline{\pi}_1 \Rightarrow \overline{\pi}_\alpha \supset \overline{\pi}_1 \stackrel{\text{Def. } \varphi}{\Rightarrow} \alpha \in \overline{\pi}_1 \varphi$.

(2) $\overline{\pi}_1 \not\subset \overline{\pi}_2 \Rightarrow \exists X \in \overline{\pi}_1$ mit $X \not\subset \overline{\pi}_2$; nach 3.2, Folg.2 existiert eine zu X komplementäre Hyperebene $\overline{\pi}_\xi$ mit $\overline{\pi}_\xi \supset \overline{\pi}_2 \Rightarrow \xi \notin \overline{\pi}_1 \varphi \wedge \xi \in \overline{\pi}_2 \varphi \Rightarrow \overline{\pi}_1 \varphi \not\supset \overline{\pi}_2 \varphi$.

5) Bevor wir die Abbildung φ weiter untersuchen, beweisen wir folgenden Hilfssatz:

(a) Sind $\alpha_j \in \mathcal{P}^*$ ($j=0, \dots, m$) Kopunkte, so kann man gemäß Def.3.1c auch im projektiven Raum \mathbb{T}^* die Operation \vee durchführen. Wir zeigen:

Ein Kopunkt α liegt genau dann in $\alpha_0 \vee \dots \vee \alpha_m$, wenn $\mathbb{T}_\alpha \supset \mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \dots \cap \mathbb{T}_{\alpha_m}$ gilt.

Bew.: (1) Vs.: $\alpha \in \alpha_0 \vee \dots \vee \alpha_m$

Speziell für $m=1$: $\alpha \in \alpha_0 \vee \alpha_1 \Rightarrow \mathbb{T}_\alpha \supset \mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \mathbb{T}_{\alpha_1}$, nach Definition der Kogeraden und Bem.(b) vor Def.3.8 a.

Induktionsannahme: $\alpha \in \alpha_0 \vee \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_{m-1} \Rightarrow \mathbb{T}_\alpha \supset \mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \dots \cap \mathbb{T}_{\alpha_{m-1}}$.

Induktionsschluß: $\alpha \in \alpha_0 \vee \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_m \stackrel{\text{Def.3.1c}}{\Rightarrow} \exists \beta \in \alpha_0 \vee \dots \vee \alpha_{m-1}$

mit $\alpha \in \beta \vee \alpha_m \Rightarrow \mathbb{T}_\alpha \supset \mathbb{T}_\beta \cap \mathbb{T}_{\alpha_m}$ mit $\mathbb{T}_\beta \supset \mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \dots \cap \mathbb{T}_{\alpha_{m-1}}$ nach Induktionsannahme $\Rightarrow \mathbb{T}_\alpha \supset \mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \dots \cap \mathbb{T}_{\alpha_{m-1}} \cap \mathbb{T}_{\alpha_m}$.

(2) Vs.: $\mathbb{T}_\alpha \supset \mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \dots \cap \mathbb{T}_{\alpha_m}$

Speziell für $m=1$: $\mathbb{T}_\alpha \supset \mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \mathbb{T}_{\alpha_1} \Rightarrow \alpha \in \alpha_0 \vee \alpha_1$ nach Definition der Kogeraden und Folg.2, Bem.(a).

Induktionsannahme: $\mathbb{T}_\alpha \supset \mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \mathbb{T}_{\alpha_1} \cap \dots \cap \mathbb{T}_{\alpha_{m-1}} \Rightarrow \alpha \in \alpha_0 \vee \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_{m-1}$.

Induktionsschluß: $\mathbb{T}_\alpha \supset \underbrace{\mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \dots \cap \mathbb{T}_{\alpha_{m-1}}}_{=: \mathbb{T}_1} \cap \mathbb{T}_{\alpha_m}$.

Gilt insbesondere $\mathbb{T}_\alpha \supset \mathbb{T}_1$, so folgt nach Induktionsannahme $\alpha \in \alpha_0 \vee \dots \vee \alpha_{m-1}$,

woraus nach Def. 3.1 c folgt $\alpha \in \alpha_0 \vee \dots \vee \alpha_{m-1} \vee \alpha_m$. Gelte also

o.B.d.A. $\mathbb{T}_\alpha \not\supset \mathbb{T}_1 \Rightarrow \mathbb{T}_{\alpha_m} \not\supset \mathbb{T}_1$ (*) (ind.: $\mathbb{T}_{\alpha_m} \supset \mathbb{T}_1 \Rightarrow \mathbb{T}_\alpha \supset \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_{\alpha_m} = \mathbb{T}_1$:

Widerspruch). Wegen $\mathbb{T}_\alpha \not\supset \mathbb{T}_1$ gilt $\mathbb{T}_1 \neq \mathbb{T}_0$. Da der Gesamtraum \mathbb{T} endlich-

dimensional vorausgesetzt wurde, gilt somit: $0 \leq \dim \mathbb{T}_1 =: r < \infty \Rightarrow$

$\dim \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_{\alpha_m} = r-1$, denn die Hyperebene \mathbb{T}_{α_m} schneidet nach 3.4, Folg.5,

Bem. den nicht in ihr enthaltenen Unterraum \mathbb{T}_1 nach einer Hyper-

ebene diese Unterraumes. Die beiden Hyperebenen \mathbb{T}_α und \mathbb{T}_{α_m} dürfen

o.B.d.A. als verschieden vorausgesetzt werden, denn aus $\mathbb{T}_\alpha = \mathbb{T}_{\alpha_m}$

würde sofort $\alpha \in \alpha_0 \vee \dots \vee \alpha_m$ folgen. $\mathbb{T}_2 := \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_{\alpha_m}$ ist daher nach Bem.(b)

vor Def.3.8 a ein Unterraum mit $\dim \mathbb{T}_2 = n-2$, falls $\dim = n$ gesetzt wird.

Da $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_{\alpha_m} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_{\alpha_m}$ wegen $\mathbb{T}_\alpha \supset \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_{\alpha_m}$ gilt, folgt

nach 3.7 Folg.5:

$\dim \mathbb{T}_1 \vee \mathbb{T}_2 = \dim \mathbb{T}_1 + \dim \mathbb{T}_2 - \dim (\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) = r + (n-2) - (r-1) = n-1$;

$\mathbb{T}_1 \vee \mathbb{T}_2 =: \mathbb{T}_\beta$ ist also eine Hyperebene und es gilt:

$\mathbb{T}_\beta \supset \mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \dots \cap \mathbb{T}_{\alpha_{m-1}}$, woraus nach Induktionsannahme $\beta \in \alpha_0 \vee \dots \vee \alpha_{m-1}$ folgt.

$\mathbb{T}_\beta \supset \mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_{\alpha_m} \Rightarrow \beta \in \alpha \vee \alpha_m$. Da $\beta \neq \alpha_m$ ist (ind. $\beta = \alpha_m \Rightarrow \mathbb{T}_\beta = \mathbb{T}_{\alpha_m} \supset \mathbb{T}_1$:

Widerspruch zu (*)) folgt $\alpha \in \beta \vee \alpha_m$.

Aus $\alpha \in \beta \vee \alpha_m \wedge \beta \in \alpha_0 \vee \dots \vee \alpha_{m-1}$ folgt $\alpha \in \alpha_0 \vee \dots \vee \alpha_m$.

(b) Es gilt $\dim \mathbb{T}^* \leq \dim \mathbb{T} (< \infty)$; damit ist auch \mathbb{T}^* endlichdimensional.

Bew.: $2 \leq \dim \mathbb{T} =: n < \infty \Rightarrow$ in \mathbb{T} existiert ein Basissimplex

$$\{P_0, P_1, \dots, P_n\}.$$

$$P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_{n-1} \vee P_n =: \mathbb{T}_{\alpha_0}$$

$$P_0 \vee P_2 \vee \dots \vee P_{n-1} \vee P_n =: \mathbb{T}_{\alpha_1}$$

$$\vdots$$

$$P_0 \vee P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_{n-1} =: \mathbb{T}_{\alpha_n} \text{ sind Hyperebenen mit}$$

$\mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \mathbb{T}_{\alpha_1} \cap \dots \cap \mathbb{T}_{\alpha_{n-1}} \cap \mathbb{T}_{\alpha_n} = \mathbb{T}_0$ ($\mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \mathbb{T}_{\alpha_1} \supset P_2 \vee \dots \vee P_n$ wegen $P_0 \notin \mathbb{T}_{\alpha_0} \wedge P_0 \in \mathbb{T}_{\alpha_1}$, sind \mathbb{T}_{α_0} und \mathbb{T}_{α_1} verschieden und haben einen $(n-2)$ -dimensionalen

Schnitttraum; dieser ist aber notwendig $P_2 \vee \dots \vee P_n$. Man schließt

analog weiter und erhält schließlich $(\mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \mathbb{T}_{\alpha_1} \cap \dots \cap \mathbb{T}_{\alpha_{n-1}}) = \{P_n\}$;

wegen der Simplexeigenschaft gilt $P_n \notin \mathbb{T}_{\alpha_n} \Rightarrow \mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \mathbb{T}_{\alpha_1} \cap \dots \cap \mathbb{T}_{\alpha_n} = \mathbb{T}_0$).

Für alle Hyperebenen \mathbb{T}_{α} von \mathbb{T} gilt: $\mathbb{T}_{\alpha} \supset \mathbb{T}_0 = \mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \dots \cap \mathbb{T}_{\alpha_n}$.

Nach (a) folgt hieraus $\alpha \in \alpha_0 \vee \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}^*$, also ist \mathbb{T}^*

Verbindungsraum von höchstens n Kopunkten $\Rightarrow \dim \mathbb{T}^* \leq n$.



(c) Die Abbildung $\varphi: u\mathbb{T} \rightarrow u\mathbb{T}^*$ ist eine Bijektion.

Bew.: (1) φ ist nach Definition global.

(2) φ ist injektiv:

$\mathbb{T}_1 \neq \mathbb{T}_2 \Rightarrow \exists X \in \mathcal{R}$ mit $X \in \mathbb{T}_1 \wedge X \notin \mathbb{T}_2$; nach 3.2, Folg. 4 existiert

zum Punkt X eine komplementäre Hyperebene \mathbb{T}_{ξ} mit $\mathbb{T}_{\xi} \supset \mathbb{T}_2 \wedge \mathbb{T}_{\xi} \not\supset X$,

also $\mathbb{T}_{\xi} \not\supset \mathbb{T}_1 \xrightarrow{\text{Fol. 4, (e)}} \mathbb{T}_{\xi} \varphi \subset \mathbb{T}_2 \varphi \wedge \mathbb{T}_{\xi} \varphi \not\subset \mathbb{T}_1 \varphi$.

$\mathbb{T}_1 \varphi$ ist die Menge aller Hyperebenen, die \mathbb{T}_{ξ} umfassen und somit die

einelementige Menge $\{\mathbb{T}_{\xi}\}$, also der Kopunkt ξ . Es existiert daher

ein Kopunkt ξ mit $\xi \in \mathbb{T}_2 \varphi \wedge \xi \notin \mathbb{T}_1 \varphi \Rightarrow \mathbb{T}_1 \varphi \neq \mathbb{T}_2 \varphi$.

(3) φ ist surjektiv: Sei $\mathbb{T}_1^* \in u\mathbb{T}^*$ ein beliebiger Unterraum von \mathbb{T}^*

("Kounterraum"). Gilt $\mathbb{T}_1^* = \mathbb{T}_0^* \Rightarrow \mathbb{T}_1^*$ ist φ -Bild von \mathbb{T} , denn keine

Hyperebene von \mathbb{T} umfaßt den ganzen Raum \mathbb{T} (Fol. 4, (d)). $\mathbb{T}_1^* \neq \emptyset$: Nach

(b) ist \mathbb{T}^* endlichdimensional $\Rightarrow \mathbb{T}_1^*$ ist endlichdimensional \Rightarrow

$$\mathbb{T}_1^* = \alpha_0 \vee \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_k \quad (k \leq n).$$

Nach (a) besteht \mathbb{T}_1^* genau aus jenen Kopunkten η , für deren zuge-

hörige Hyperebenen \mathbb{T}_{η} gilt:

$$\mathbb{T}_{\eta} \supset \mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \dots \cap \mathbb{T}_{\alpha_k} \Rightarrow (\mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \dots \cap \mathbb{T}_{\alpha_k}) \varphi = \mathbb{T}_1^*; \text{ also ist } \mathbb{T}_{\alpha_0} \cap \dots \cap \mathbb{T}_{\alpha_k}$$

jener Unterraum von \mathbb{T} , der \mathbb{T}_1^* zum φ -Bild hat.



Bemerkungen: (a) Die Kounterräume sind also genau jene Kopunkt mengen, zu deren Kopunkten Hyperebenen gehören, die durch einen festen Unterraum von \mathbb{T} gehen.

(b) Für $\dim \mathbb{T} = \infty$ ist \mathbb{T}^* auch ein projektiver Raum unendlicher Dimension, jedoch ist φ nicht surjektiv und daher (a) falsch (o. Bew.).

- 6) (a) $(\Pi_1 \cap \Pi_2) \varphi = \Pi_1 \varphi \vee \Pi_2 \varphi$ (c) $(\Pi_1^* \vee \Pi_2^*) \varphi^{-1} = \Pi_1^* \varphi^{-1} \cap \Pi_2^* \varphi^{-1}$
 (b) $(\Pi_1 \vee \Pi_2) \varphi = \Pi_1 \varphi \cap \Pi_2 \varphi$ (d) $(\Pi_1^* \cap \Pi_2^*) \varphi^{-1} = \Pi_1^* \varphi^{-1} \vee \Pi_2^* \varphi^{-1}$

Bemerkung: Nach Folg.5 (c) existiert φ^{-1} .

Bew.: zu (a): Für $\Pi_1 \varphi = \Pi_0^*$ folgt $\Pi_1 = \Pi$ und damit

$$(\Pi_1 \cap \Pi_2) \varphi = \Pi_2 \varphi = \Pi_1 \varphi \vee \Pi_2 \varphi = \Pi_0^* \vee \Pi_2 \varphi = \Pi_2 \varphi.$$

Für $\Pi_1 \varphi, \Pi_2 \varphi \neq \Pi_0^*, \in u\Pi^*$ gilt, da Π^* nach Folg.5(b) endlich-dimensional ist:

$$\Pi_1 \varphi = \alpha_0 \vee \dots \vee \alpha_m \wedge \Pi_2 \varphi = \beta_0 \vee \dots \vee \beta_k.$$

Nach Folg.5 (a) besteht daher $\Pi_1 \varphi$ genau aus jenem Kopunkten η , die zu Hyperebenen Π_η gehören mit $\Pi_\eta \supset \Pi_{\alpha_0} \cap \dots \cap \Pi_{\alpha_m}$, d.h.

$$\Pi_1 \varphi = \{ \eta \in \mathcal{R}^* \mid \Pi_\eta \supset \Pi_{\alpha_0} \cap \dots \cap \Pi_{\alpha_m} \} (*).$$

Das φ -Bild des Unterraumes $\Pi_{\alpha_0} \cap \dots \cap \Pi_{\alpha_m} \in u\Pi$ ist nach Definition von φ :

$$(\Pi_{\alpha_0} \cap \dots \cap \Pi_{\alpha_m}) \varphi = \{ \eta \in \mathcal{R}^* \mid \Pi_\eta \supset \Pi_{\alpha_0} \cap \dots \cap \Pi_{\alpha_m} \} (*).$$

Aus (*) und (**) folgt, da φ nach Folg.5 (c) injektiv ist:

$$\Pi_1 = \Pi_{\alpha_0} \cap \dots \cap \Pi_{\alpha_m}. \text{ Ebenso: } \Pi_2 = \Pi_{\beta_0} \cap \dots \cap \Pi_{\beta_k}.$$

Man hat somit folgende Kette von logischen Äquivalenzen, welche die Behauptung erweist:

$$\xi \in \Pi_1 \varphi \vee \Pi_2 \varphi \iff \xi \in \alpha_0 \vee \dots \vee \alpha_m \vee \beta_0 \vee \dots \vee \beta_k \xrightarrow{\text{Folg.5(a)}} \Pi_\xi \supset \Pi_{\alpha_0} \cap \dots \cap \Pi_{\alpha_m} \cap \Pi_{\beta_0} \cap \dots \cap \Pi_{\beta_k} \stackrel{\text{Def. } \varphi}{\iff} \xi \in (\Pi_1 \cap \Pi_2) \varphi. \quad \diamond$$

Bew.: zu (b) $(\Pi_1 \vee \Pi_2) \varphi \dots$ Menge aller Hyperebenen, die $\Pi_1 \vee \Pi_2$ umfassen;

$\Pi_1 \varphi \cap \Pi_2 \varphi \dots$ Menge aller Hyperebenen, die sowohl Π_1 als auch Π_2 umfassen.

Ist Π_ξ eine Hyperebene mit $\Pi_\xi \supset \Pi_1 \vee \Pi_2$, so gilt wegen $\Pi_1 \subset \Pi_1 \vee \Pi_2$ auch $\Pi_\xi \supset \Pi_1$ und analog $\Pi_\xi \supset \Pi_2 \stackrel{\text{Def. } \varphi}{\implies} \xi \in \Pi_1 \varphi \wedge \xi \in \Pi_2 \varphi \implies \xi \in \Pi_1 \varphi \cap \Pi_2 \varphi$.

Ist umgekehrt Π_ξ eine Hyperebene mit $\Pi_\xi \supset \Pi_1$ und $\Pi_\xi \supset \Pi_2$, so folgt $\Pi_\xi \supset \Pi_1 \vee \Pi_2$ (denn $X \in \Pi_1 \vee \Pi_2 \implies \exists X_1 \in \Pi_1 \subset \Pi_\xi$ mit $X \in X_1 \vee X_2$; $X_1, X_2 \in \Pi_\xi \implies X \in \Pi_\xi$); also gilt $\xi \in (\Pi_1 \vee \Pi_2) \varphi. \quad \diamond$

Bew. zu (c): Dazu setzen wir $\Pi_j^* \varphi^{-1} =: \bar{\Pi}_j$ ($j=1,2$) ($\Pi_j \in u\Pi$):

$(\Pi_1 \cap \Pi_2) \varphi \stackrel{(a)}{=} \Pi_1 \varphi \vee \Pi_2 \varphi = \Pi_1^* \vee \Pi_2^*$; wenden wir darauf φ^{-1} an, so ergibt sich $\Pi_1 \cap \Pi_2 = (\Pi_1^* \vee \Pi_2^*) \varphi^{-1} \implies \Pi_1^* \varphi^{-1} \cap \Pi_2^* \varphi^{-1} = (\Pi_1^* \vee \Pi_2^*) \varphi^{-1}.$

\diamond

Bew. zu (d): Mit derselben Bezeichnungsweise wie in (c) gilt:
 $(\pi_1 \vee \pi_2) \varphi \stackrel{(b)}{=} \pi_1 \varphi \wedge \pi_2 \varphi = \pi_1^* \wedge \pi_2^*$; darauf φ^{-1} angewendet er-
 gibt $(\pi_1^* \wedge \pi_2^*) \varphi^{-1} = \pi_1 \vee \pi_2 = \pi_1^* \varphi^{-1} \vee \pi_2^* \varphi^{-1}$.



DEF. 3.8 b: Unter der Kodimension eines Unterraumes $\pi_1 \in u\mathbb{T}$ ver-
 steht man die Dimension von $\pi_1 \varphi \in u\mathbb{T}^*$ in \mathbb{T}^* ;
 $\text{codim } \pi_1 := \dim \pi_1 \varphi$.

7) Es gilt: $\dim \pi_1 + \text{codim } \pi_1 = n-1$.

Bew.: Ist $\pi_1 \neq \bar{\pi}_0$, so existiert ein Basissimplex $\{P_0, \dots, P_k\}$ von π_1
 $(\Rightarrow \dim \pi_1 = k)$, der nach 3.7, Folg.2 zu einem Basissimplex von \mathbb{T}
 ergänzt werden kann: $\{P_0, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots, P_n\}$; im Falle $\pi_1 = \bar{\pi}_0$
 genügt es irgendeinen Basissimplex von \mathbb{T} heranzuziehen. Aus dem
 Basissimplex von \mathbb{T} kann man nun folgende $n-k$ Hyperebenen bilden:

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha_1} &:= \pi_1 \vee P_{k+2} \vee P_{k+3} \vee \dots \vee P_{n-1} \vee P_n \\ \pi_{\alpha_2} &:= \pi_1 \vee P_{k+1} \vee P_{k+3} \vee \dots \vee P_{n-1} \vee P_n \\ &\vdots \\ \pi_{\alpha_{n-k}} &:= \pi_1 \vee P_{k+1} \vee P_{k+2} \vee P_{k+3} \vee \dots \vee P_{n-1} \end{aligned}$$

$\pi_{\alpha_j} \supset \pi_1$ ($j=1, \dots, n-k$) \Rightarrow die zugehörigen Kopunkte $\alpha_1 = \pi_{\alpha_1} \varphi, \dots,$
 $\alpha_{n-k} = \pi_{\alpha_{n-k}} \varphi$ liegen in $\pi_1 \varphi$. Es genügt zu zeigen, daß $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}\}$
 ein Basissimplex von $\pi_1 \varphi$ ist, d.h. es ist zu zeigen:

$$\alpha_1 \notin \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_{l-1} \text{ für } l=2, \dots, n-k \text{ und } \pi_1 \varphi = \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_{n-k}$$

Diese beiden Behauptungen folgen sofort aus

$$\pi_{\alpha_1} \not\supset \pi_{\alpha_1} \cap \pi_{\alpha_2} \cap \dots \cap \pi_{\alpha_{l-1}} \quad (1) \text{ und}$$

$$\pi_1 = \pi_{\alpha_1} \cap \pi_{\alpha_2} \cap \dots \cap \pi_{\alpha_{n-k}} \quad (2), \text{ wenn hierauf } \varphi \text{ angewendet wird}$$

und Folg.5e sowie Folg.4e beachtet wird.

Die Gültigkeit von (1) erkennt man aus

$$P_{k+1} \notin \pi_{\alpha_1} \wedge P_{k+1} \in \pi_{\alpha_1} \cap \pi_{\alpha_2} \cap \dots \cap \pi_{\alpha_{l-1}}$$

Wir zeigen noch (2):

Aus $\pi_{\alpha_j} \supset \pi_1$ ($j=1 \dots n-k$) folgt $\pi_{\alpha_1} \cap \dots \cap \pi_{\alpha_{n-k}} \supset \pi_1$. Es gilt (2),
 wenn jeder Punkt aus $\pi_{\alpha_1} \cap \dots \cap \pi_{\alpha_{n-k}}$ auch in π_1 liegt: (ind.) $\exists A \in \pi_{\alpha_1} \cap \dots \cap$
 $\cap \pi_{\alpha_{n-k}}$ mit $A \notin \pi_1 \Rightarrow A \notin P_0 \vee \dots \vee P_k \wedge A \in P_0 \vee \dots \vee P_n$; hieraus
 folgt (vgl. 3.7, Folg.1, 1. Beweisschritt): Es existiert ein Index
 $m \in \{k, \dots, n-1\}$ mit $A \notin P_0 \vee \dots \vee P_m \wedge A \in P_0 \vee \dots \vee P_{m+1}$ und man
 darf A austauschen gegen P_{m+1} und $\{P_0, \dots, P_k, \dots, P_m, A, P_{m+2}, \dots, P_n\}$
 ist ein Basissimplex von \mathbb{T} , woraus nach Def.3.7a, Bem.c folgt:

$$A \notin P_0 \vee \dots \vee P_k \vee \dots \vee P_m \vee P_{m+2} \vee \dots \vee P_n = \pi_{\alpha_{m+1-k}} \Rightarrow$$

$A \notin \pi_{\alpha_1} \cap \dots \cap \pi_{\alpha_{m+1-k}} \cap \dots \cap \pi_{\alpha_{n-k}}$: Widerspruch.

Da nun $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}\}$ ein Basissimplex von $\pi_{1\varphi}$ ist gilt $\dim \pi_{1\varphi} = \text{codim } \pi_1 = n-k-1$, woraus zusammen mit $\dim \pi_1 = k$ folgt $\dim \pi_1 + \text{codim } \pi_1 = n-1$.

Speziell für $\pi_1 = \bar{\pi}_0$ liefert dies:

$\dim \bar{\pi}_0 + \text{codim } \bar{\pi}_0 = n-1$; wegen $\dim \bar{\pi}_0 = -1$ folgt daraus $\text{codim } \bar{\pi}_0 = n$. Nun ist

$$\bar{\pi}_0 \varphi = \pi^* (\text{Folg. 4 d}) \implies$$

$$\text{codim } \bar{\pi}_0 = \dim \bar{\pi}_0 \varphi = \dim \pi^* = n.$$

Ist π ein endlichdimensionaler projektiver Raum, so ist π^* von derselben Dimension.

8) Wir gehen nun aus vom n -dimensionalen projektiven Raum π^* und fassen seine Hyperebenen ("Kohyperebenen") als Grundgebilde einer neuen Inzidenzstruktur π^{**} auf und bezeichnen sie dann als "Kokopunkte"; analog zur Einleitung von 3.8 sind "Kokogeraden" und I^{**} zu erklären und nach Folg. 1, 2, 3 ist π^{**} ein projektiver Raum und nach Folg. 7 gilt $\dim \pi^{**} = n$. Analog zu Folg. 4c definieren wir eine Abbildung $\varphi^*: u\pi^* \rightarrow u\pi^{**}$ durch

$\pi_1^* \varphi^* := \{a \in \mathcal{R}^{**} \mid \pi_a^* \supset \pi_1^*\}$ und φ^* ist nach Folg. 5c, 4e und 6 eine Bijektion, die \vee, \cap vertauscht und Inklusionen umdreht. Wie in Folg. 7 kann man definieren:

$$\text{codim } \pi_1^* = \dim \pi_1^* \varphi^* \text{ und es gilt:}$$

$$\dim \pi_1^* + \text{codim } \pi_1^* = n-1.$$

Die Abbildung $\varphi: u\bar{\pi} \rightarrow u\pi^*$ ist surjektiv, daher ist π_1^* das φ -Bild eines Unterraumes $\bar{\pi}_1$ von $\bar{\pi}: \bar{\pi}_1 \varphi = \pi_1^*$. Gilt $\dim \bar{\pi}_1 = d$, so folgt nach Folg. 7 $\dim \pi_1^* = n-1-d$ und ebenfalls nach Folg. 7 $\dim \pi_1^* \varphi^* + \dim \bar{\pi}_1^* = n-1 \implies \dim \bar{\pi}_1^* \varphi^* = d$.

Es gilt somit $\dim \pi_1 = \dim \pi_1 \varphi \varphi^* \quad \forall \pi_1 \in u\bar{\pi}$.

Geht man also speziell von einem einpunktigen Unterraum $\tau_p \in u\bar{\pi}$ aus, so gilt

$$\dim \tau_p = 0 \implies \dim \tau_p \varphi = n-1 \implies \dim \tau_p \varphi \varphi^* = 0.$$

Die Beschränkung von $\varphi \varphi^*: u\bar{\pi} \rightarrow u\pi^{**}$ auf die 0-dimensionalen Unterräume von $u\bar{\pi}$ ist also eine Abbildung $\varepsilon: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^{**}$; φ und φ^* sind bijektiv, also ist auch $\varphi \varphi^*$ und ε bijektiv. ε ist sogar eine Kollineation; wegen $\dim \pi = (\dim \pi^*) = \dim \pi^{**} = n < \infty$ genügt es, wenn wir (II) in Def. 3.4a überprüfen:

Sind P, X, Y drei (o.B.d.A. paarweise verschiedene) kollineare Punkte $\implies \dim (\tau_P \vee \tau_X \vee \tau_Y) = 1$; wir wenden $\varphi \varphi^*$ an auf τ_P, τ_X, τ_Y sowie

$\pi_P \vee \pi_X \vee \pi_Y | u\mathbb{T}$, und erhalten die Kokopunkte $\pi_P \varphi \varphi^*$, $\pi_X \varphi \varphi^*$, $\pi_Y \varphi \varphi^*$ und es gilt:
 $(\pi_P \vee \pi_X \vee \pi_Y) \varphi \varphi^* \stackrel{F=1, G=0, b}{=} (\pi_P \varphi \cap \pi_X \varphi \cap \pi_Y \varphi) \varphi^* \stackrel{F=1, G=0, a}{=} \pi_P \varphi \varphi^* \vee \pi_X \varphi \varphi^* \vee \pi_Y \varphi \varphi^*$.
Außerdem ist $1 = \dim(\pi_P \vee \pi_X \vee \pi_Y) = \dim[(\pi_P \vee \pi_X \vee \pi_Y) \varphi \varphi^*] = \dim(\pi_P \varphi \varphi^* \vee \pi_X \varphi \varphi^* \vee \pi_Y \varphi \varphi^*) \Rightarrow$ die Kokopunkte $\pi_P \varphi \varphi^*$, $\pi_X \varphi \varphi^*$ und $\pi_Y \varphi \varphi^*$ sind kollinear. Damit ist gezeigt, daß π und \mathbb{T}^{**} isomorph sind. Die Kollineation ε legt nahe, den Punkt π und den Kokopunkt $\pi_P \varphi \varphi^*$ zu identifizieren. In anderen Worten ausgedrückt: Ist $P \in \mathcal{P}$ beliebig, so ist $\pi_P \varphi$ gemäß Folg.7 eine Kohyperebene und $\pi_P \varphi \varphi^*$ ist eben diese Kohyperebene aufgefaßt als Kokopunkt; P ist der Durchschnitt aller Hyperebenen aus $\pi_P \varphi$ (vgl. Bew. zu Folg.7 und Folg.5 a). Umgekehrt gehört zu jedem Kokopunkt $a \in \mathcal{P}^{**}$ eine Kohyperebene π_a^* und, da φ surjektiv ist, existiert zu π_a^* ein Unterraum $\pi_a \in u\mathbb{T}$ mit $\pi_a \varphi = \pi_a^*$; π_a ist nach Folg.7 notwendig ein 0-dimensionaler Unterraum, da π_a^* in $\mathbb{T}^*(n-1)$ -dimensional ist. π_a ist also jener Punkt von \mathcal{P} , der sich als Durchschnitt aller Hyperebenen von π_a^* ergibt ("Trägerpunkt des Hyperebenenbündels"). Jeder Punkt $P \in \mathcal{P}$ legt also genau einen Kokopunkt (\mathcal{P} -Hyperebenenbündel) fest und umgekehrt kann jeder Kokopunkt eindeutig durch den Trägerpunkt des zu ihm gehörigen Hyperebenenbündels festgelegt werden. Wir identifizieren also jedes Hyperebenenbündel aufgefaßt als Kokopunkt mit seinem Trägerpunkt. Da diese Identifikation auf natürliche Weise geschieht, sprechen wir von der "kanonischen Identifikation" von \mathcal{P} mit \mathcal{P}^{**} .

Bemerkung: Durch den Übergang zum Dualraum wird auf der Menge M aller projektiven Räume $\mathbb{T}^n (2 \leq n < \infty)$ eine binäre Relation $(\subset M \times M)$ bestimmt, welche nach der kanonischen Identifikation symmetrisch ist.

9) Wir wollen nun das "Dualitätsprinzip" für einen endlichdimensionalen projektiven Raum $\mathbb{T} (2 \leq \dim \mathbb{T} = n < \infty; n \text{ fest})$ formulieren. Wir erweitern dazu den Begriff Inzidenzaussage zum Begriff "Aussage über den Verband der Unterräume"; eine solche ist eine Aussage A über Unterräume, in der die Begriffe "Enthaltensein (\subset, \in)", "Verbinden (\vee)" und "Schneiden (\cap)" vorkommen.

Ist eine Aussage A über den Verband der Unterräume in allen projektiven Räumen fester Dimension n wahr, so entsteht aus A eine neue wahre Aussage A^* über den Verband der Unterräume, wenn man jeden Unterraum der Dimension d durch einen Unterraum der Dimension $n-1-d$ ersetzt, die Enthaltenseinsrelation umdreht und Verbinden und Schneiden vertauscht.

Bew.: (Vgl. 1.1, Folg. 6) Nach Voraussetzung ist die Aussage A über den Verband der Unterräume in allen projektiven Räumen der Dimension n richtig; da mit \mathbb{T} auch die duale Inzidenzstruktur \mathbb{T}^* ein projektiver Raum der Dimension n ist, gilt A auch in \mathbb{T}^* . Gemäß Folg. 4e, 6 und 7 ist die Aussage A in \mathbb{T}^* identisch mit der Aussage A^* in \mathbb{T} .

Bemerkung: Das Dualitätsprinzip für die projektive Ebene (vgl. 1.1) ist spezieller als das Dualitätsprinzip im Sinne von Folg. 9 für $n=2$, da die Unterräume π und $\bar{\pi}$ in 1.1 nicht vorkommen. Punkte sind 0-dimensionale Unterräume, sie gehen also in 1-dimensionale Unterräume (Geraden) über und umgekehrt. Das Erhaltenbleiben der Inzidenzen kann auf das Vertauschen von \wedge und \vee zurückgespielt werden.

10) Ist \mathbb{T} ein endlichdimensionaler Desarguesraum, so ist \mathbb{T}^* ein Desarguesraum derselben Dimension.

Bew.: \mathbb{T} und \mathbb{T}^* haben nach Folg. 7 die gleiche endliche Dimension n .

Fall 1: $n=2$. Nach 1.5 ist dann mit \mathbb{T} auch \mathbb{T}^* desarguessch.

Fall 2: $n > 2 \Rightarrow \dim \mathbb{T}^* > 2$; hieraus folgt nach Bem. b nach Def. 3.7b, daß \mathbb{T}^* desarguessch ist.

Ist \mathbb{T} ein endlichdimensionaler PP-Raum, so ist \mathbb{T}^* ein PP-Raum derselben Dimension.

Bemerkung: Damit gilt das Dualitätsprinzip auch in der Menge der PP-Räume fester endlicher Dimension.

Bew.: Die Dimensionsgleichheit gilt nach Folg. 7. Wir unterscheiden:

Fall 1: $\dim \mathbb{T}_{PP} = 2 \stackrel{1.6}{\Rightarrow} \mathbb{T}^*$ ist PP-Ebene.

Fall 2: $2 < \dim \mathbb{T}_{PP} = n < \infty$: Wir zeigen, daß jede Ebene \mathbb{T}_1^* von \mathbb{T}^* ("Koebene") eine PP-Ebene ist; dazu genügt es zu zeigen, daß $\mathbb{T}_1^*(\rho_1^*)$ kollinear (\Rightarrow isomorph) zu einer PP-Ebene ist.

Wir konstruieren nun eine solche Kollineation η . Die Koebene \mathbb{T}_1^* besteht bei dualer Betrachtung aus allen Hyperebenen von \mathbb{T} ,

welche einen $(n-3)$ -dimensionalen Unterraum \mathbb{T}^{n-3} umfassen. Gemäß 3.2 existiert in \mathbb{T} ein zu \mathbb{T}^{n-3} komplementärer Unterraum $\bar{\mathbb{T}}^{n-3}$

und es gilt nach 3.7, Folg. 5, Anwendung a:

$\dim \mathbb{T}^{n-3} + \dim \bar{\mathbb{T}}^{n-3} = n-1 \Rightarrow \dim \bar{\mathbb{T}}^{n-3} = 2$, d.h. $\bar{\mathbb{T}}^{n-3} =: \pi$

ist eine Ebene, und zwar eine PP-Ebene, denn \mathbb{T} ist PP-Raum.

Nach Fall 1 ist damit auch die im Sinne des ebenen Dualitätsprinzips duale Ebene π^* eine PP-Ebene.

Ist $\alpha \in \Pi_1^*$, so gilt für die Hyperebene Π_α , daß $\Pi_\alpha \cap \pi$ eine Gerade von π ist, da $\dim(\Pi_\alpha \cap \pi) = \dim \Pi_\alpha + \dim \pi - \dim(\Pi_\alpha \vee \pi) = (n-1) + 2 - n = 1$.

($\Pi_\alpha \vee \pi = \Pi$, da Π_α das Komplement Π^{n-3} von π umfaßt).

Wir definieren nun eine Abbildung $\eta: \Pi_1^* \rightarrow \pi^*$ durch $\alpha \in \Pi_1^* \mapsto \Pi_\alpha \cap \pi$ und zeigen, daß η eine Kollineation ist.

Da Π_1^* eine projektive Ebene ist, ist wegen Bem.(a) nach Def. 3.4 a die Abbildung η als Kollineation erwiesen, wenn (I) und (II) in Def. 3.4a erfüllt sind.

Zu (I): η ist global, denn jede Hyperebene Π_α mit $\alpha \in \Pi_1^*$ schneidet π nach einer Geraden.

η ist injektiv: (ind.) $\alpha, \beta \in \Pi_1^*, \alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha \eta \neq \beta \eta \Rightarrow$

$$\Pi_\alpha \cap \pi \neq \Pi_\beta \cap \pi \Rightarrow (\Pi_\alpha \cap \pi) \vee \Pi^{n-3} = (\Pi_\beta \cap \pi) \vee \Pi^{n-3}.$$

Wegen $\Pi_\alpha \supset \Pi^{n-3}$ können wir das modulare Gesetz anwenden und erhalten $(\Pi_\alpha \cap \pi) \vee \Pi^{n-3} = \Pi_\alpha \cap (\pi \vee \Pi^{n-3}) = \Pi_\alpha \cap \Pi = \Pi_\alpha$; ebenso gilt $(\Pi_\beta \cap \pi) \vee \Pi^{n-3} = \Pi_\beta$. Damit folgt $\Pi_\alpha = \Pi_\beta \Rightarrow \alpha = \beta$: Widerspruch.

η ist surjektiv: Ist g eine beliebige Gerade aus π , so gilt $\Pi_g \cap \Pi^{n-3} = \emptyset$ und daher

$$\dim(\Pi_g \vee \Pi^{n-3}) = \dim \Pi_g + \dim \Pi^{n-3} - \dim(\Pi_g \cap \Pi^{n-3}) = 1 + (n-3) - (-1) = n-1.$$

$\Pi_g \vee \Pi^{n-3}$ ist daher eine Hyperebene Π_g . Nun gilt $\Pi_g \cap \pi = g$, da wegen $\Pi_g \subset \pi$ aus $(\Pi_g \vee \Pi^{n-3}) \cap \pi$ unter Anwendung des modularen Gesetzes entsteht $\Pi_g \vee (\Pi^{n-3} \cap \pi) = \Pi_g \vee \Pi^0 = \Pi_g$.

Damit ist η eine Bijektion.

Zu (II): η führt kollineare Kopunkte von Π_1^* in kollineare Punkte von π^* , d.h. in kopunktale Geraden über.

$\alpha, \beta, \gamma \in \Pi_1^*$ und α, β, γ kollinear $\Rightarrow \exists$ ein $(n-2)$ -dimensionaler Unterraum $\Pi_\Sigma (\supset \Pi^{n-3})$ mit $\Pi_\alpha, \Pi_\beta, \Pi_\gamma \supset \Pi_\Sigma$.

Die Geraden $\alpha \eta = \Pi_\alpha \cap \pi$, $\beta \eta = \Pi_\beta \cap \pi$ und $\gamma \eta = \Pi_\gamma \cap \pi$ gehen alle durch $\Pi_\Sigma \cap \pi$ und dies ist wegen $\dim(\Pi_\Sigma \cap \pi) = \dim \Pi_\Sigma + \dim \pi - \dim(\Pi_\Sigma \vee \pi) = (n-2) + 2 - n = 0$ ein Punkt ($\Pi_\Sigma \vee \pi = \Pi$, denn Π_Σ umfaßt das Komplement Π^{n-3} von π).

Bemerkung: Die Konstruktion der Kollineation η geht in jedem beliebigen projektiven Raum Π mit $2 < \dim \Pi < \infty$. Wir haben also schärfer gezeigt: Die Koebenen eines endlichdimensionalen projektiven Raumes Π der Dimension größer zwei sind isomorph zu den Dualen Ebenen der Ebenen von Π .

Ist \mathbb{T} ein endlichdimensionaler klassischer projektiver Raum, so ist \mathbb{T}^* ein klassischer projektiver Raum derselben Dimension.

Bew.: \mathbb{T} klassisch $\stackrel{\text{Def. 3.5 b} \wedge \text{ Bem. (a)}}{\implies}$ alle Ebenen α von \mathbb{T} sind klassisch $\stackrel{2.3, \text{ Fol. 3.4}}{\implies}$ alle im Sinne des ebenen Dualitätsprinzipes dualen Ebenen α^* von α sind klassisch. Damit ist der Fall $n=2$ fertig. Für $n > 2$ folgt aus obiger Bemerkung: Alle Koebenen von \mathbb{T} sind klassisch $\stackrel{\text{Def. 3.5 b}}{\implies} \mathbb{T}^*$ ist klassisch. ◆

Bemerkung: Damit gilt das Dualitätsprinzip auch in der Menge der klassischen projektiven Räume fester endlicher Dimension.

11) Eine Kollineation $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ erfüllt (I), (II), (III) (vgl. 3.4). Für $\dim \mathbb{T} < \infty$ gilt nach 3.7 $\dim \mathbb{T} = \dim \mathbb{T}'$. Wir ordnen nun α eine Abbildung $\alpha^*: \mathcal{P}^* \rightarrow \mathcal{P}'^*$ zu. In 3.4 wurde zu α eine Abbildung $\bar{\alpha}: u\mathbb{T} \rightarrow u\mathbb{T}'$ erklärt, die eine Bijektion ist und Hyperebenen in Hyperebenen überführt, also Kopunkte in Kopunkte; wir definieren daher: $\alpha^* := \bar{\alpha} | \mathcal{P}^*$.

α^* ist eine Kollineation $\mathcal{P}^* \rightarrow \mathcal{P}'^*$; sie heißt "die zu α duale Kollineation".

Bew.: Zu (I): Als Einschränkung der Bijektion $\bar{\alpha}$ ist α^* bijektiv. Zu (II): Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{P}^*$ kollineare Kopunkte, d.h. die Hyperebenen $\mathbb{T}_\alpha, \mathbb{T}_\beta, \mathbb{T}_\gamma$ umfassen denselben $(n-2)$ -dimensionalen Unterraum; es gilt daher $\dim(\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta \cap \mathbb{T}_\gamma) = n-2$. Nach 3.4 folgt $(\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta \cap \mathbb{T}_\gamma)\bar{\alpha} = \mathbb{T}_{\alpha\bar{\alpha}} \cap \mathbb{T}_{\beta\bar{\alpha}} \cap \mathbb{T}_{\gamma\bar{\alpha}}$; da nach 3.7 α dimensionstreu ist gilt $\dim(\mathbb{T}_{\alpha\bar{\alpha}} \cap \mathbb{T}_{\beta\bar{\alpha}} \cap \mathbb{T}_{\gamma\bar{\alpha}}) = n-2 \implies$ die Hyperebenen $\mathbb{T}_{\alpha\bar{\alpha}}, \mathbb{T}_{\beta\bar{\alpha}}, \mathbb{T}_{\gamma\bar{\alpha}}$ umfassen denselben $(n-2)$ -dimensionalen Unterraum, also sind die Kopunkte $\alpha\bar{\alpha}, \beta\bar{\alpha}, \gamma\bar{\alpha}$ kollinear.

Zu (III): Nach 3.7, Folg. 6, Bem. (b) ist wegen $\dim \mathbb{T} = \dim \mathbb{T}' = n$ und $\dim \mathbb{T}^* = \dim \mathbb{T}'^* = n$ die Forderung (III) eine Folge aus (I) und (II). ◆

DEF. 3.8 c: Die Einschränkung des durch eine Kollineation $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ bestimmten Verbandsisomorphismus $\bar{\alpha}: u\mathbb{T} \rightarrow u\mathbb{T}'$ auf die Menge der Kopunkte \mathcal{P}^* heißt die zu α duale Kollineation α^* .

Bemerkungen: (a) Ist $\mathbb{T}=\pi$ speziell ein projektive Ebene, so ist α^* jene Abbildung der Kopunkte, also der Geraden von π , die mit α gekoppelt ist (vgl. 1.3). In einer projektiven Ebene gilt also $\bar{\alpha} = \alpha^*$ (vgl. Bem. (a) nach 3.4, Folg.2).

(b) Die Zuordnung $\alpha \mapsto \alpha^*$ ist eine globale Abbildung der Menge der Kollineationen $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ in die Menge der Kollineationen $\mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{K}'^*$. Diese Zuordnung ist sogar injektiv, d.h. zu verschiedenen Kollineationen gehören verschiedene duale Kollineationen.

Bew.: $\alpha_1 + \alpha_2 \Rightarrow \exists P \in \mathcal{K}$ mit $P\alpha_1 \neq P\alpha_2 \Rightarrow \exists^* g' \in \mathcal{K}'$ mit $g' = P\alpha_1, P\alpha_2$. Zu \mathbb{T}'_g existiert ein in \mathbb{T}' komplementärer Unterraum \mathbb{T}'_g , und als Komplement einer Geraden ist \mathbb{T}'_g eine Kogerade: $\dim \mathbb{T}'_g = n-2$. Es gilt $\mathbb{T}'_g \vee \mathbb{T}'_g = \mathbb{T}' \Rightarrow \mathbb{T}'_g \vee P\alpha_1 \vee P\alpha_2 = \mathbb{T}'$. Wegen $P\alpha_1 \notin \mathbb{T}'_g$ ist $\mathbb{T}'_g \vee P\alpha_1 =: \mathbb{T}'_1$ eine Hyperebene $\Rightarrow P\alpha_2 \in \mathbb{T}'_1$. Weiters ist $\mathbb{T}'_1 \bar{\alpha}^{-1} =: \mathbb{T}'_1 \in u\mathbb{T}$ eine Hyperebene in \mathbb{T} . $P\alpha_1 \in \mathbb{T}'_1 \Rightarrow P \in \mathbb{T}'_1 \Rightarrow P\alpha_2 \in \mathbb{T}_1\bar{\alpha}_2$. Aus $P\alpha_2 \in \mathbb{T}_1\bar{\alpha}_2 = \mathbb{T}'_1 \wedge P\alpha_2 \in \mathbb{T}_1\bar{\alpha}_2 \Rightarrow \mathbb{T}_1\bar{\alpha}_2 \neq \mathbb{T}_1\bar{\alpha}_1 \Rightarrow \alpha_1^* \neq \alpha_2^*$.

(c) Für $\mathbb{T}=\mathbb{T}'$ ist daher die Zuordnung $\alpha \mapsto \alpha^*$ eine Injektion der Menge $P\Gamma L(\mathbb{T})$ in die Menge $P\Gamma L(\mathbb{T}^*)$. Diese Zuordnung ist sogar bijektiv.

Bew.: Es genügt nach (b) zu zeigen, daß sie surjektiv ist. Sei $\alpha^* \in P\Gamma L(\mathbb{T}^*)$; wir haben eine Kollineation $\mu: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ anzugeben mit $\bar{\mu} | \mathcal{K}^* = \alpha^*$. Zur Kollineation $\alpha^*: \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{K}^*$ existiert der Verbandisomorphismus $\bar{\alpha}^*: u\mathbb{T}^* \rightarrow u\mathbb{T}^*$ und wir setzen $\mu = \bar{\alpha}^* | \mathcal{K}^{**} = \bar{\alpha}^* | \mathcal{K}$. Dann ist μ gemäß Folg.11 eine Kollineation $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$. Zur Kollineation μ gehört gemäß 3.4 ein Verbandisomorphismus $\bar{\mu}: u\mathbb{T} \rightarrow u\mathbb{T}$, der insbesondere Hyperebenen in Hyperebenen überführt. Es ist noch zu zeigen, daß $\bar{\mu}$ für eine beliebige Hyperebene \mathbb{T}_α (Kopunkt α) dasselbe leistet wie α^* für α ($\alpha \in \mathcal{K}^* \in \mathcal{K}^*$, also ist $\mathbb{T}_{\alpha\alpha^*}$ eine Hyperebene): $\mathbb{T}_{\alpha\bar{\mu}} = \mathbb{T}_{\alpha\alpha^*}$. Sei X ein beliebiger Punkt von \mathbb{T}_α ; X ist für die auf \mathbb{T}^* gegründete duale Auffassung ein $(n-1)$ -dimensionaler Unterraum \mathbb{T}'_1 von \mathbb{T}^* und α ist ein Kopunkt mit $\alpha \in \mathbb{T}'_1$. Wir können also auf X aufgefaßt als \mathbb{T}'_1 die Abbildung $\bar{\alpha}^* | \mathcal{K} = \mu$ anwenden, und da $\bar{\alpha}^*$ die Enthaltenseinrelation $\alpha \in \mathbb{T}'_1$ erhält, gilt $\alpha\alpha^* \in \mathbb{T}'_1 \bar{\alpha}^*$. Dies bedeutet für die Betrachtung in \mathbb{T} : $\mathbb{T}'_1 \bar{\alpha}^*$ ist wegen der Definition von μ der Punkt $X\mu$ und $\alpha\alpha^*$ ist die Hyperebene $\mathbb{T}_{\alpha\alpha^*}$, also gilt $X\mu \in \mathbb{T}_{\alpha\alpha^*}$. $\forall X \in \mathbb{T}_\alpha \Rightarrow \mathbb{T}_{\alpha\bar{\mu}} = \mathbb{T}_{\alpha\alpha^*}$.

Bemerkung: Die Gruppen $P\Gamma L(\mathbb{T})$ und $P\Gamma L(\mathbb{T}^*)$ sind jedoch i.a. nicht isomorph. (vgl. 3.9)

SATZ 3.8: Die zu einem projektiven Raum endlicher Dimension (≥ 2) duale Inzidenzstruktur ist ein projektiver Raum gleicher Dimension, dessen dualer projektiver Raum mit \mathbb{T} kanonisch identifiziert werden kann. In der Menge aller projektiven Räume gleicher endlicher Dimension gilt ein Dualitätsprinzip, ebenso in der Menge aller Desarguesräume bzw. aller Pappusräume bzw. aller

klassischen projektiven Räume gleicher endlicher Dimension. Mit jeder Kollineation ist eindeutig eine duale Kollineation der Kopunkträume verknüpft.

3.9. Korrelationen und Polaritäten

Seien $\Pi(\mathcal{R}, \mathcal{U}, I)$ und $\Pi(\mathcal{R}', \mathcal{U}', I')$ zwei projektive Räume mit $2 \leq \dim \Pi < \infty$ und $2 \leq \dim \Pi' < \infty$. Zu beiden existieren die Dualräume $\Pi^*(\mathcal{R}^*, \mathcal{U}^*, I^*)$ und $\Pi'^*(\mathcal{R}'^*, \mathcal{U}'^*, I'^*)$.

DEF. 3.9 a: Eine Abbildung $\delta: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'^*$ heißt Korrelation, wenn

- (I) δ bijektiv ist
- (II) kollineare Punkte in kollineare Kopunkte übergehen
- (III) nicht kollineare Punkte in nicht kollineare Kopunkte übergehen.

Bemerkungen: (a) Eine Korrelation ist also eine Kollineation in den Dualraum zum Bildraum.

(b) Es ist zweckmäßig neben I und I^* noch eine Inzidenzrelation $\tilde{I} \subset \mathcal{R} \times \mathcal{R}^*$ zu definieren.

$(P, \alpha) \in \tilde{I} \iff P \in \mathbb{T}_\alpha$ (kurz $P \tilde{I} \alpha$). Ein Punkt inzidiert mit einem Kopunkt, wenn er in der zugehörigen Hyperebene liegt. Zusatz: $\alpha \tilde{I} P \iff P \tilde{I} \alpha$.

(c) Sei $X \in \mathcal{R}$; der Bildkopunkt ist $X\delta \in \mathcal{R}'^*$. Gilt für den Punkt $Y \in \mathcal{R}'$ speziell $Y \tilde{I}' X\delta$, d.h. $Y' \in \mathbb{T}'_{X\delta}$ (Y' liegt in der zum Kopunkt $X\delta$ gehörigen Hyperebene), dann soll Y' "konjugiert zum Ursprung X " heißen!

Folgerungen:

1) Bei dualer Deutung von Π' ist $\delta: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'^*$ eine Kollineation; zu dieser gehört eine duale Kollineation δ^* ("duale Korrelation"): $\mathcal{R}^* \rightarrow \mathcal{R}'^* = \mathcal{R}'$, welche jedem Kopunkt (Hyperebene) des Urraumes Π einen Punkt des Bildraumes zuordnet: $\alpha (\in \mathcal{R}^*) \mapsto \alpha\delta^* (\in \mathcal{R}')$. Um auf die Hyperebene \mathbb{T}_α die Abbildung δ^* anzuwenden, bildet man $P\delta (\in \mathcal{R}'^*) \forall P \in \mathbb{T}_\alpha$; diese Hyperebenenmenge von \mathcal{R}' ist wegen $\dim \mathbb{T}_\alpha = n-1$ ein Hyperebenenbündel. Bei Übergang zur dualen Deutung ist dieses Hyperebenenbündel mit dem Trägerpunkt zu identifizieren; dieser ist also der Durchschnitt aller Hyperebenen des Bündels, also: $\alpha\delta^* = \bigcap_{P \in \mathbb{T}_\alpha} P\delta \implies \alpha\delta^* \in \mathbb{T}_{P\delta}$, d.h. $P\delta \tilde{I}' \alpha\delta^* \forall P \tilde{I} \alpha$ d.h.: Bei Anwendung einer Korrelation bleibt somit Inzidenz zwischen Punkt und Kopunkt erhalten:

$$P \tilde{I} \alpha \implies P\delta \tilde{I}' \alpha\delta^*$$

Bei Anwendung einer Korrelation bleiben auch Nichtinzidenzen von Punkt und Kopunkt erhalten:

$$Y \tilde{\alpha} \Rightarrow Y \delta \tilde{\alpha} \delta^*$$

Bew.: (ind.) $Y \delta \tilde{\alpha} \delta^*$.

Wir betrachten nun Punkte $Z \in \mathcal{P}$ und unterscheiden:

Fall 1: $Z=Y \Rightarrow Z \delta \tilde{\alpha} \delta^*$ (ind. Beweisvoraussetzung)

Fall 2: $Z \tilde{\alpha} \Rightarrow Z \delta \tilde{\alpha} \delta^*$ (denn δ erhält Inzidenzen).

Fall 3: $Z \neq Y \wedge Z \tilde{\alpha} \Rightarrow \exists^* X: X=YZ \cap \mathbb{T}_\alpha$ und X, Y, Z pw. verschieden und kollinear. δ führt die kollinearen Punkte X, Y, Z in die kollinearen Kopunkte $X\delta, Y\delta, Z\delta$ über, d.h. $\mathbb{T}'_{Z\delta} \supset \mathbb{T}'_{Y\delta} \cap \mathbb{T}'_{X\delta}$.

Der Punkt $\alpha\delta^*$ liegt wegen $Y\delta \tilde{\alpha} \delta^* \wedge X\delta \tilde{\alpha} \delta^*$ in $\mathbb{T}'_{Y\delta} \cap \mathbb{T}'_{X\delta}$, also folgt $\alpha\delta^* \in \mathbb{T}'_{Z\delta}$, d.h. $Z\delta \tilde{\alpha} \delta^*$.

$\forall Z \in \mathcal{P}$ folgt stets: $Z\delta \tilde{\alpha} \delta^* \Rightarrow$ die zum Punkt $\alpha\delta^*$ komplementäre Hyperebene in \mathbb{T}' fungiert nicht als δ -Bild: Widerspruch zu δ surjektiv. ◆

Bemerkungen: (a) Auch in 1.11 wurde für eine Korrelation δ einer projektiven Ebene eine neue Abbildung $\delta^*: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}'$ konstruiert gemäß: $g \mapsto P\delta Q\delta$ mit $P, Q \in \mathcal{P}_g, *$. Diese Abbildung ordnet sich dem Begriff duale Korrelation unter: $g\delta^* = \bigcap_{\alpha \in g} \alpha\delta$, denn der Büschelträger $g\delta^*$ ist bereits durch zwei Geraden des Büschels eindeutig festgelegt.

(b) Die Hyperebene $\beta' \in \mathcal{P}'^*$ heißt "konjugiert zur Hyperebene $\alpha \in \mathcal{P}^*$ bezüglich der Korrelation δ ", wenn gilt $\alpha\delta^* \tilde{\beta}'$ ($\alpha\delta^*$ ist ein Punkt).

Gilt speziell $\mathbb{T} = \mathbb{T}'$, so haben wir: $\delta: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^* \wedge \delta^*: \mathcal{P}^* \rightarrow \mathcal{P}^{**} = \mathcal{P}$.

2) Ein projektiver Raum \mathbb{T} mit $2 \leq \dim \mathbb{T} < \infty$ ist genau dann isomorph zu seinem Dualraum, wenn er eine Korrelation gestattet.

Bew.: Nach Satz 3.4 sind zwei projektive Räume \mathbb{T}, \mathbb{T}' genau dann isomorph, wenn eine Kollineation $\delta: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}'$ existiert. \mathbb{T} und \mathbb{T}^* sind also genau dann isomorph, wenn eine Kollineation $\alpha: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}^*$, also nach Def. 3.9a eine Korrelation existiert. ◆

Bemerkungen: (a) Nach 3.8, Folg. 10 ist mit $\mathbb{T}_{\mathbb{K}}$ (endlichdimensional) auch \mathbb{T}^* endlichdimensional und desarguessch. Man kann also $\mathbb{T}_{\mathbb{K}}^*$ algebraisieren und erhält einen Körper K^* .

Falls in $\mathbb{T}_{\mathbb{K}}$ eine Korrelation existiert, sind K und K^* isomorph.

Bew.: Um in 3.5, Folg.12 zu zeigen, daß K unabhängig von der Auswahl der Konstruktionselemente ist, benützten wir eine Kollineation, welche die Angabeelemente ineinander überführt. Jetzt existiert nach Voraussetzung eine Korrelation, welche die Angabeelemente von π in Angabeelemente von π^* überführt, also sind K und K^* isomorph. ◆

(b) Ist π und damit π^* ein endlichdimensionaler Desarguesraum und sind K und K^* isomorph, dann existiert eine Korrelation in π_{De} .

Wir werden diesen Satz in § 5 als Folgerung des 1. Hauptsatzes der projektiven Geometrie beweisen. Dort wird gezeigt: Ein Desarguesraum endlicher Dimension gestattet genau dann eine Kollineation auf einen Desarguesraum gleicher Dimension, wenn die Körper der beiden Desarguesräume isomorph sind.

(c) Nach Bem. (c) nach Def.3.8 c sind $P\Gamma L(\pi)$ und $P\Gamma L(\pi^*)$ bijektiv. Falls in π_{De} eine Korrelation existiert, dann sind $P\Gamma L(\pi)$ und $P\Gamma L(\pi^*)$ isomorph.

Dieser Satz wird in § 5 als Folgerung des 2. Hauptsatzes der projektiven Geometrie bewiesen. Dort wird gezeigt: Zwei Desarguesräume gleicher endlicher Dimension mit isomorphen Körpern besitzen isomorphe Kollineationsgruppen.

(d) Für den zu einem unendlichdimensionalen projektiven Raum π dualen projektiven Raum π^* gilt, daß π^* nicht isomorph π ist (o.Bew.). π und π^* sind auch bei endlicher Dimension nicht immer isomorph, da K nicht immer isomorph K^* ist (o.Bew.).

DEF.3.9 b (vgl.Def.1.11 c): Eine Korrelation $\delta: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^*$ eines endlichdimensionalen projektiven Raumes auf sich heißt selbstadjungiert, wenn $\delta\delta^* = \text{id}_{\mathcal{P}}$ gilt. Eine globale Abbildung $\lambda: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^*$ heißt Polarität, wenn die Konjugiertheit eine symmetrische Relation ist.

Bemerkung: Für eine Polarität λ gilt also: $X \bar{\cap} Y\lambda \Rightarrow Y \bar{\cap} X\lambda \forall X, Y \in \mathcal{P}$.

3) Die Polaritäten sind genau die selbstadjungierten Korrelationen.

Bew.: (Vgl.1.11, Folg.3) (a) Ist δ eine selbstadjungierte Korrelation, so ist δ eine Polarität (wörtlich gleich zu 1.11, Folg.3, Beweisschritt (a)).

(b) λ ist eine Polarität. Zu zeigen ist, daß λ eine selbstadjungierte Korrelation ist.

(i) λ ist eine Bijektion $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^*$:

(α) λ ist nach Definition global.

(β) λ ist injektiv: (ind.) $P \neq Q$ mit $P\lambda = Q\lambda$.

Gemäß 3.7, Folg.3 kann P, Q zu einem Basissimplex von Π ergänzt werden: $\{P, Q, P_2, \dots, P_n\}$. $P\lambda = Q\lambda$, $P_j\lambda$ ($j=2 \dots n$) sind n Hyperebenen; nach 3.7, Folg.5, Anw. (b) haben diese mindestens einen gemeinsamen Punkt B :

$B \tilde{\cap} P\lambda = Q\lambda \wedge B \tilde{\cap} P_j\lambda$ ($j=2 \dots n$). Da λ eine Polarität ist, folgt: $B\lambda \tilde{\cap} P \wedge B\lambda \tilde{\cap} Q \wedge B\lambda \tilde{\cap} P_j$ ($j=2 \dots n$). Die Punkte $P, Q, P_2 \dots P_n$ des Basissimplex liegen alle in der festen Hyperebene $B\lambda$: Widerspruch.

(γ) λ ist surjektiv: $\alpha \in \mathcal{P}^*$ sei ein beliebiger Kopunkt. In der zugehörigen Hyperebene $\overline{\Pi}_\alpha$ existiert ein Basissimplex: $\{P_0, \dots, P_{n-1}\}$; die n Kopunkte (Hyperebenen) $P_j\lambda$ ($j=0, \dots, n-1$) haben einen Schnittraum, der nach 3.7, Folg.5, Anw.(b) mindestens einen Punkt A enthält: $A \tilde{\cap} P_j\lambda$ ($j=0, \dots, n-1$). Da λ eine Polarität ist, folgt daraus: $A\lambda \tilde{\cap} P_j$ ($j=0, \dots, n-1$). Die Hyperebene $\overline{\Pi}_{A\lambda}$ umfaßt also alle Punkte eines Basissimplex von $\overline{\Pi}_\alpha \Rightarrow \overline{\Pi}_\alpha \subset \overline{\Pi}_{A\lambda} \stackrel{3.2, 5.3}{\Rightarrow} \overline{\Pi}_\alpha = \overline{\Pi}_{A\lambda}$. Damit ist ein Punkt A gefunden mit $A\lambda = \alpha$.

(ii) λ führt kollineare Punkte in kollineare Kopunkte über: $P, Q \in \mathcal{P}$, \neq , $PQ =: g$. Da λ bijektiv ist, gilt $P\lambda \neq Q\lambda$. Diese beiden Kopunkte bestimmen die Kogerade $\Sigma := P\lambda \cdot Q\lambda$; wegen $\dim \overline{\Pi}_\Sigma = n-2$ und $2 \leq \dim \Pi < \infty$ enthält $\overline{\Pi}_\Sigma$ sicher einen Punkt S . Für diesen gilt $S \tilde{\cap} P\lambda \wedge S \tilde{\cap} Q\lambda$; da λ eine Polarität ist, folgt daraus $S\lambda \tilde{\cap} P \wedge S\lambda \tilde{\cap} Q$. Die Hyperebene $S\lambda$ enthält also die beiden verschiedenen Punkte P, Q und damit auch ihre Verbindungsgerade: $\overline{\Pi}_{S\lambda} \supset \mathcal{P}_{PQ} = \mathcal{P}_g$. Sind X, P, Q kollinear, so gilt $X \in \mathcal{P}_g \Rightarrow X \tilde{\cap} S\lambda \stackrel{\text{Polarität}}{\Rightarrow} X\lambda \tilde{\cap} S$. Die Überlegung gilt $\forall S \in \overline{\Pi}_\Sigma$, d.h. die Hyperebenen $X\lambda$ enthält alle Punkte von $\overline{\Pi}_\Sigma$: $X\lambda \supset \overline{\Pi}_\Sigma = \overline{\Pi}_{P\lambda} \cap \overline{\Pi}_{Q\lambda} \Rightarrow$ die Kopunkte $X\lambda, P\lambda, Q\lambda$ inzidieren alle mit der Kogeraden Σ , sind also kollinear.

Damit ist λ als Korrelation erwiesen, denn die Überprüfung von (III) kann wegen $\dim \Pi = \dim \Pi^* < \infty$ nach 3.7 unterbleiben.

(iii) Daß λ selbstadjungiert ist, kann wörtlich gleich mit 1.11, Folg.3, Schritt (iii) gezeigt werden. ◆

SATZ 3.9: Ein projektiver Raum endlicher Dimension größer gleich zwei ist genau dann zu seinem Dualraum isomorph, wenn er eine Korrelation gestattet. Ein Desarguesraum endlicher Dimension gestattet genau dann eine Korrelation, wenn sein Körper isomorph zum Körper seines Dualraumes ist. Die Polaritäten sind genau die selbstadjungierten Korrelationen.

