

Technische Hochschule Wien
I. Institut für Geometrie

PROJEKTIVE GEOMETRIE II
1. Teil

o.Prof.Dr.Dr. Heinrich Brauner

Ausgearbeitet von
Mag.rer.nat.F. Anzböck und
Mag.rer.nat.Dr. R. Riesinger

Inhaltsverzeichnis

§ 4.	Dreidimensionale Pappusräume	
4.1.	Grundgebilde 1. und 2. Stufe	1
4.2.	Quadratische Kegel in dreidimensionalen Pappusräumen	11
4.3.	Reguli in dreidimensionalen Pappusräumen	17
4.4.	Polarsystem einer ringartigen Quadrik	29
4.5.	Projektive Polaritäten in dreidimensionalen klassischen projektiven Räumen	39
4.6.	Quadriken in dreidimensionalen klassischen projektiven Räumen	46
4.7.	Nullpolaritäten in dreidimensionalen Pappusräumen	59
4.8.	Kubiken in dreidimensionalen Pappusräumen	69
4.9.	Netze in dreidimensionalen Pappusräumen	91
4.10.	Erzeugnisse projektiv kollinearer Grundgebilde 2. Stufe in dreidimensionalen Pappusräumen	105

§ 4. Dreidimensionale Pappusräume

4.1. Grundgebilde 1. und 2. Stufe

Jeder dreidimensionale projektive Raum $\mathbb{P}^3(\rho, \mathcal{G})$ besitzt einen aus vier Punkten $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ bestehenden Basissimplex; von den vier Punkten $P_i (i=0, \dots, 3)$ sind also nie drei komplanar. Eine Menge von vier nicht komplanaren (\Rightarrow pw. verschiedenen) Punkten in \mathbb{P}^3 heißt "Tetraeder". Jedes Tetraeder ist ein Basissimplex eines \mathbb{P}^3 . Eine Fundamentalfigur in \mathbb{P}^3 ist eine Menge von fünf Punkten, wobei je vier ein Tetraeder bilden.

Der Verband $u\mathbb{P}^3$ der Unterräume eines \mathbb{P}^3 besteht aus folgenden Elementen:
 der leere projektive Raum \mathbb{P}_0 mit $\dim \mathbb{P}_0 = -1$;
 die nulldimensionalen Unterräume, also die Punkte von \mathbb{P}^3 , welche die Menge ρ bilden;
 die eindimensionalen Unterräume, also die Geraden von \mathbb{P}^3 , welche die Menge \mathcal{G} bilden;
 die zweidimensionalen Unterräume, also die Ebenen von \mathbb{P}^3 ; diese sind zugleich die Hyperebenen des \mathbb{P}^3 , und wir bezeichnen die von ihnen gebildete Menge mit ξ ;
 der gesamte Raum \mathbb{P}^3 .

Der Dualraum $\mathbb{P}^{3*}(\rho^*, \mathcal{G}^*)$ von \mathbb{P}^3 besteht aus den als Kopunkte aufgefaßten Ebenen von \mathbb{P}^3 , und die Kogeraden sind die Ebenenbündel, also jene Mengen von Ebenen, die je eine feste Gerade enthalten. Die Koebenen (=Kohyperebenen) schließlich sind die Ebenenbündel, also jene Mengen von Ebenen, die je einen festen Punkt enthalten.

Beim Dualitätsprinzip der dreidimensionalen projektiven Räume werden nach 3.8, Folg.9 Inklusionen umgedreht, Verbinden und Schneiden vertauscht, Punkte und Ebenen vertauscht und Geraden gehen in Geraden über.

Bezeichnungsvereinfachungen:

(a) Statt \mathbb{P}^3 schreiben wir in § 4 meist \mathbb{P} .

(b) Die Inzidenz $I \subset \rho \times \mathcal{G} (P I g)$ ist in \mathbb{P} gegeben. Für die daraus abgeleiteten Inzidenzen $I^* \subset \rho^* \times \mathcal{G}^* (\alpha I^* \Sigma \Leftrightarrow \mathbb{P}_\alpha \supset \mathbb{T}_\Sigma)$ und $\tilde{I} \subset \rho \times \rho^* (P \tilde{I} \alpha \Leftrightarrow P \in \mathbb{T}_\alpha)$ schreiben wir i.f. auch I.

(c) Eine Kogerade Σ (Ebenenbüschel) stimmt nach der kanonischen Identifizierung von ρ mit ρ^{**} gemäß 3.8, Folg.8 mit der Trägergeraden s des Ebenenbüschels überein; statt $\alpha I \Sigma$ schreiben wir i.f. $\alpha I s$.

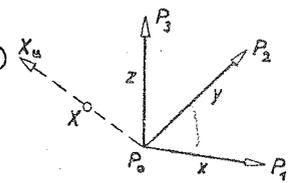
Ebenso identifizieren wir jedes Ebenenbündel mit dem Trägerpunkt.

(d) Bei den Inzidenzen wollen wir nicht mehr auf die Reihenfolge achten: $\alpha I s \Leftrightarrow s I \alpha$ usf.

Folgerungen:

1) Der PAR ist ein dreidimensionaler projektiver Raum.

Bew.: Nach 3.1, Folg.2 ist der PAR ein projektiver Raum. In PAR existiert ein von einem eigentlichen Punkt P_0 ausstrahlendes (z.B. orthogonales) Dreiein mit den Geraden x, y, z . Nach 3.1, Folg.2, Festsetzung (I) besitzt jede dieser Geraden genau einen Fernpunkt P_1 bzw. P_2 bzw. P_3 . Die Punktmenge $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ ist ein Simplex: P_1, P_2, P_3 sind nicht kollinear (die Ebene xy ist nicht parallel zur Geraden z , also inzidiert gemäß Festsetzung (III) die Gerade $P_1 \vee P_2$ nicht mit P_3) und $P_1 \vee P_2 \vee P_3 =: \Pi_\omega$ ist daher eine Ebene, nämlich die Fernebene; $P_0 \notin \Pi_\omega$, denn P_0 ist eigentlich. Das Simplex $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ ist ein Basissimplex: Jeder Punkt $X (\neq P_0, \notin \Pi_\omega)$ des PAR bestimmt eine eindeutige Gerade $P_0 X$, welche nach (I) die Fernebene ω in genau einem Punkt X_u trifft; somit gilt $X \in P_0 \vee X_u$ mit $X_u \in \Pi_\omega$, woraus $X \in P_0 \vee \Pi_\omega = P_0 \vee P_1 \vee P_2 \vee P_3 \vee X \in \text{PAR}$ folgt.



2) Das Minimalmodell eines dreidimensionalen projektiven Raumes hat die Ordnung zwei und besteht aus 15 Punkten, 15 Ebenen und 35 Geraden; alle Ebenen des Minimalmodells sind Minimalebene (vgl. Übungen).

4) Bisher wurde in einem projektiven Raum der Begriff Perspektivität nur für schneidende Punktreihen erklärt (vgl. Def. 3.6 a). In einem dreidimensionalen Raum kann man mit Def. 4.1 a auch Perspektivitäten zwischen ungleichartigen Grundgebilden 1. Stufe definieren:

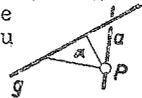
Eine Perspektivität zwischen ungleichartigen Grundgebilden 1. Stufe ist eine Bijektion, bei welcher Ur- und Bildelement stets inzidieren (vgl. Def. 1.7).

Wir untersuchen die drei möglichen Paarungen ungleichartiger Grundgebilde 1. Stufe:

$\rho_g \times \rho_{p,\alpha}$: Es gilt notwendig $g \perp \alpha \wedge g \not\perp P$, da eine Bijektion vorliegen soll und nach 1.2 sind diese Bedingungen für eine Bijektion hinreichend $\Rightarrow |\rho_g| = |\rho_{p,\alpha}|$.

$\zeta_g \times \rho_{p,\alpha}$: Entsteht durch D_3 aus obiger Perspektivität. Für $g \perp P \wedge g \not\perp \alpha$ liegt eine Bijektion vor (jede Ebene ξ durch g schneidet α in der zugeordneten Geraden x) $\Rightarrow |\zeta_g| = |\rho_{p,\alpha}|$.

$\zeta_g \times \rho_\alpha$: Die Geraden a und g sind notwendig windschief (bei schneidenden Geraden wäre stets der Schnittpunkt $g \cdot a$ der Ebene ξ durch g zugeordnet im Widerspruch zur geforderten Bijektivität). Sind jedoch a und g windschief, so schneidet jede Ebene $\alpha \cdot \zeta_g$ den zu g komplementären Unterraum α in genau einem Punkt und jeder Punkt $P \in \rho_\alpha$ legt genau eine Ebene $PV \cdot g = \alpha$ fest $\Rightarrow |\zeta_g| = |\rho_\alpha|$.



Nach Satz 3.2 sind je zwei Punktreihen eines projektiven Raumes gleichmächtig. Dies ergibt zusammen mit den obigen Überlegungen:

Je zwei Grundgebilde 1. Stufe eines dreidimensionalen projektiven Raumes sind gleichmächtig.

5) Um Perspektivitäten zwischen Geradenbüscheln bzw. Ebenenbüscheln zu definieren, wenden wir auf die Definition perspektiver Punktreihen gemäß Def. 3.6 a das Dualitätsprinzip D_2 bzw. D_3 an.

Durch Anwendung von D_2 auf perspektive Punktreihen, die nach Def. 3.6 a eine ebene Figur darstellen (Ur- und Bildpunkt liegen auf Geraden eines Büschels mit Zentrum Z), erhalten wir perspektive Geradenbüschel in einer Ebene, die schon aus 1.7 bekannt sind.

Durch Anwendung von D_3 auf perspektive Geradenbüschel in einer Ebene entstehen perspektive Geradenbüschel in einem Bündel, deren Zentren im Bündelzentrum liegen und deren Ebenen verschieden sind; die Verbindungsebenen zugeordneter Geraden liegen in einem Ebenenbüschel.

Wir wenden D_3 auf Def.3.6 a an:

Eine Bijektion zwischen zwei verschiedenen Ebenenbüscheln mit schneidenden Trägergeraden heißt eine Perspektivität, wenn Ur- und Bildebene stets mit einer Geraden eines Büschels inzidieren.

Dual zum Punkt Z heißt nun die Trägerebene des Geradenbüschels "Perspektivitätsebene" ζ ; sie geht durch den Schnittpunkt der beiden Trägergeraden und enthält keine Büschelachse.

Damit wird folgende Definition sinnvoll:

Eine Bijektion zwischen zwei Grundgebilden 1.Stufe heißt eine Projektivität, wenn sie das Produkt von endlich vielen Perspektivitäten ist.

6) D_3 -dual zu Def.1.10 c kann nun der Begriff harmonische Lage für vier kollineare Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (α, β, γ pw. verschieden) erklärt werden: $H(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$. Da in \mathbb{P}^3 und \mathbb{P}^{*3} wegen $\dim \mathbb{T} = 3$ der Satz von Desargues gilt, ist die vierte harmonische Ebene δ eindeutig bestimmt.

Faßt man vier harmonische Ebenen zusammen mit dem die harmonische Lage charakterisierenden Kopunktviereck als Bündelfigur auf und schneidet man diese Figur mit einer zum Bündelscheitel komplementären Ebene, so erhält man nach Folg.3 einen Vierstrahl und ein Vierseit, welches nach Def.1.10 d die harmonische Lage des Vierstrahls charakterisiert. Vier harmonische Ebenen schneiden daher eine Ebene ε nicht durch die Büschelachse nach vier harmonischen Geraden. Nach 1.10 treffen diese Geraden (und damit die Ebenen) jede Gerade in ε , welche die Achse des Ebenenbüschels nicht schneidet, in vier harmonischen Punkten. Umgekehrt kann aus der harmonischen Lage der Schnittgeraden bzw. Schnittpunkte auf die harmonische Lage der Ebenen geschlossen werden, da η in 3.8, Folg.10 eine Kollineation ist. Aus obigem und 1.10 ergibt sich insgesamt: Eine Perspektivität zwischen Grundgebilden 1.Stufe erhält harmonische Lage. Hieraus folgt sofort: Eine Projektivität zwischen Grundgebilden 1.Stufe erhält harmonische Lage.

7) Je zwei Grundgebilde 2.Stufe sind gleichmächtig.

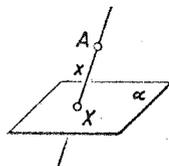
Bew.: Punkt- und Geradenfeld derselben projektiven Ebene α sind nach Satz 1.2 gleichmächtig: $|\mathcal{P}_\alpha| = |\mathcal{G}_\alpha|$. Zwei verschiedene Ebenen α, β sind nach 3.5, Folg.2, Anw.b isomorph, also insbesondere gleichmächtig: $|\mathcal{P}_\alpha| = |\mathcal{P}_\beta|$. Nach 3.8, Folg.10, Bem.sind die Koebenen (Ebenenbündel) isomorph zu den Dualebenebenen der Ebenen von \mathbb{T}^3 , also insbesondere zu diesen gleichmächtig: $|\mathcal{L}_A| = |\mathcal{G}_\alpha|$. Ebenenbündel und Geradenbündel desselben Punktes A sind Kopunkt- und Kogeradenmenge einer Koebene, also nach Satz 1.2 gleichmächtig: $|\mathcal{L}_A| = |\mathcal{G}_A|$. Zwei verschiedene Koebenen A, B sind nach 3.5, Folg.2, Anw.b gleichmächtig: $|\mathcal{L}_A| = |\mathcal{L}_B|$.

8) Wir erweitern nun den Begriff Perspektivität auch auf Grundgebilde 2.Stufe.

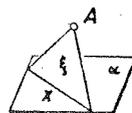
DEF.4.1 b: Eine Bijektion zwischen einem Punktfeld und einem Geradenbündel oder einem Geradenfeld und einem Ebenenbündel heißt perspektiv, wenn Ur- und Bildelement stets inzidieren. Eine Bijektion zwischen zwei verschiedenen gleichartigen Grundgebilden 2.Stufe heißt eine Perspektivität, wenn Ur- und Bildelement stets mit einem Element eines dritten Grundgebildes 2.Stufe inzidieren, wobei dieses Element genau der Schnitt- bzw. Verbindungsraum von Ur- und Bildelement ist, falls diese verschieden sind.

Wir untersuchen die sechs möglichen Fälle:

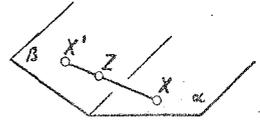
(a) Sollen das Punktfeld \mathcal{P}_α und das Geradenbündel \mathcal{G}_A perspektiv bezogen werden, so muß $A \not\subset \alpha$ gelten. Die Perspektivität $\beta: \mathcal{P}_\alpha \rightarrow \mathcal{G}_A$ ordnet dann jedem Punkt $X (\in \mathcal{P}_\alpha)$ die Gerade $XA := x (\in \mathcal{G}_A)$ zu. Diese Zuordnung ist tatsächlich eine Bijektion, was analog zum Beweisschritt (1) von Satz 1.2 zu zeigen ist.



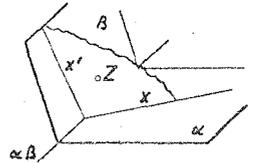
(b) Sollen das Ebenenbündel \mathcal{L}_A und das Geradenfeld \mathcal{G}_α perspektiv bezogen werden, so muß $A \not\subset \alpha$ gelten. Dieser Fall ist D_3 -dual zum obigen, also ist die Zuordnung, welche jeder Ebene $\xi (\in \mathcal{L}_A)$ die Gerade $x := \xi \alpha (\in \mathcal{G}_\alpha)$ zuordnet, eine Bijektion (Übrigens ist die Abbildung η aus 3.8, Folg.10 speziell für den dreidimensionalen Raum eine Perspektivität von diesem Typ).



(c) Seien \mathcal{P}_α und \mathcal{P}_β Punktfelder mit $\alpha \neq \beta$. Zugeordnete verschiedene Punkte bestimmen keinen nicht leeren Schnittraum und als Verbindungsraum eine Gerade; diese kann nun entweder einem Geradenfeld oder einem Geradenbündel entstammen. Der Fall des Feldes ist unmöglich, da nur Punkte der Spuren des Feldes in α und β durch Feldgeraden zugeordnet werden können, im Widerspruch zur geforderten Surjektivität. Also müssen alle Verbindungsgeraden einem Bündel angehören, für dessen Zentrum Z wegen der Bijektivität $Z \notin \alpha, \beta$ gilt. Wählt man Z beliebig mit $Z \notin \alpha, \beta$ und ordnet Punkte $X \in \mathcal{P}_\alpha$ und $X' \in \mathcal{P}_\beta$ mit X, X', Z kollinear zu, so ist diese Zuordnung $\mu: \mathcal{P}_\alpha \rightarrow \mathcal{P}_\beta$ tatsächlich bijektiv. Ist nämlich \varkappa eine perspektive Kollineation von \mathbb{P}^2 mit dem Zentrum Z und einer beliebigen Achse ζ durch die Gerade $\alpha\beta$ mit $\zeta \neq \alpha, \beta$, welche für einen Punkt $P \in \alpha, P \notin \beta$ leistet $P \varkappa \in \beta$ mit $P, P\varkappa, Z$ kollinear (die Existenz von \varkappa folgt aus 3.5, Folg.1), so gilt $\alpha \varkappa^* = \beta$ und $\mu = \varkappa|_{\mathcal{P}_\alpha}$. Damit ist μ bijektiv. Umgekehrt bestimmt jede perspektive Kollineation \varkappa mit $\alpha \varkappa^* = \beta$ (wegen $\alpha \neq \beta$ ist dann $Z \notin \alpha, \beta$) eine Perspektivität $\mathcal{P}_\alpha \rightarrow \mathcal{P}_\beta$.



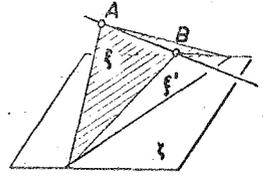
Seien \mathcal{G}_α und \mathcal{G}_β Geradenfelder mit $\alpha \neq \beta$. Zugeordnete Geraden sind nicht windschief, da sie sonst kein Element eines Grundgebildes 2. Stufe als Schnitt- bzw. Verbindungsraum besitzen. Zugeordnete Geraden $x \in \mathcal{G}_\alpha$ und $x' \in \mathcal{G}_\beta$ schneiden einander daher für $x \neq x'$. Die Menge der Schnitträume ist dann die Punktreihe auf $\alpha\beta$, also kein Grundgebilde 2. Stufe; die Menge der Verbindungsräume ist für $x \neq x'$ eine Ebenenmenge und muß daher einem Ebenenbündel mit einem Scheitel Z angehören. Wegen der geforderten Bijektivität gilt $Z \notin \alpha, \beta$. Jeder Geraden x ($\in \mathcal{G}_\alpha$) ordnen wir nun die Gerade $x' := \beta \cap (x \vee Z)$ zu und erhalten so eine Bijektion. Diese Zuordnung $x' \leftarrow x$ läßt sich nämlich wieder als Einschränkung $\hat{\varkappa}|_{\mathcal{G}_\alpha}$ einer Kollineation \varkappa von \mathbb{P}^2 mit Zentrum Z und einer Achse ζ durch $\alpha\beta$ deuten, womit die erklärte Zuordnung $\mathcal{G}_\alpha \rightarrow \mathcal{G}_\beta$ bijektiv ist.



Sind die Punktfelder \mathcal{P}_α und \mathcal{P}_β perspektiv, so sind daher auch die zugehörigen Geradenfelder \mathcal{G}_α und \mathcal{G}_β perspektiv und umgekehrt. Wir sprechen daher kurz von perspektiven Ebenen und schreiben $\alpha \pi \beta$. Bei einer Perspektivität $\alpha \pi \beta$ bleiben die Punkte der Reihe $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ einzeln fest.

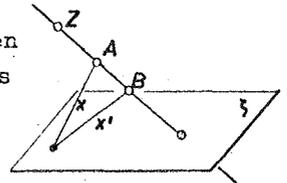
(d) Durch Anwendung von D_3 auf die letzten beiden Fälle erhalten wir die noch ausstehenden beiden Fälle:

Zwei verschiedene Ebenenbündel \mathcal{E}_A und \mathcal{E}_B können durch ein Geradenfeld \mathcal{G}_ζ mit $\zeta \not\perp A, B$ perspektiv bezogen werden, wobei zugeordnete Ebenen $\xi (\in \mathcal{E}_A)$ und $\xi' (\in \mathcal{E}_B)$ mit ζ kollinear liegen. Die Perspektivität ergibt sich als Einschränkung $\alpha \pi^* | \mathcal{E}_A$ einer perspektiven Kollineation α von \mathbb{T} mit $A\alpha = B$ (wegen $A \neq B$ gilt für die Achse ζ dann $\zeta \not\perp A, B$).



Ebenso ergibt sich eine Perspektivität zwischen zwei verschiedenen Geradenbündeln \mathcal{G}_A und \mathcal{G}_B als Einschränkung $\alpha | \mathcal{G}_A$ einer perspektiven Kollineation α von \mathbb{T} mit $A\alpha = B$.

Ur- und Bildgerade schneiden einander in den Punkten des Feldes \mathcal{P}_ζ .



Sind die Ebenenbündel \mathcal{E}_A und \mathcal{E}_B perspektiv, so sind daher auch die zugehörigen Geradenbündel \mathcal{G}_A und \mathcal{G}_B perspektiv und umgekehrt. Wir sprechen daher kurz von perspektiven Bündeln und schreiben $A \pi B$. Bei einer Perspektivität $A \pi B$ bleiben die Ebenen des Büschels \mathcal{E}_{AB} einzeln fest.

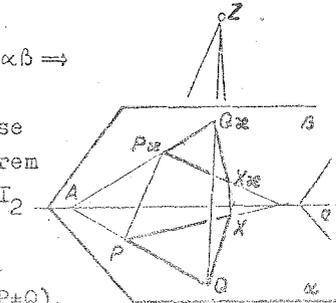
9) Der folgende Satz liefert ein Kriterium dafür, wann zwei verschiedene kollineare Felder (Bündel) perspektiv sind:

Eine Kollineation eines Feldes auf ein verschiedenes gleichartiges Feld ist genau dann eine Perspektivität, wenn alle gemeinsamen Punkte der beiden Ebenen einzeln fest bleiben.

D_3 -dual: Eine Kollineation eines Bündels auf ein verschiedenes gleichartiges Bündel ist genau dann eine Perspektivität, wenn alle gemeinsamen Ebenen der beiden Bündel einzeln fest bleiben.

Bew.: Nach Folgerung 8 ist eine Richtung bereits gezeigt. Wir gehen nun von einer Kollineation $\alpha: \mathcal{P}_\alpha \rightarrow \mathcal{P}_\beta$ ($\alpha \neq \beta$) mit $\alpha | \mathcal{P}_{\alpha\beta} = \text{id}$ aus und wollen zeigen, daß α eine Perspektivität ist.

Sei $P \in \rho_\alpha$ ein beliebiger Punkt mit $P \notin a := \alpha\beta \Rightarrow P \notin \alpha \Rightarrow P \in \rho_\alpha \Rightarrow \exists P \rho_\alpha$. Ebenso sei $Q \in \rho_\alpha$ mit $Q \notin a$ und $Q \in P$; da α die Punkte der Achse a fest läßt, muß $P \alpha Q \alpha$ die Gerade PQ in ihrem Schnittpunkt A mit a treffen. Wegen Axiom I_2 angewendet auf das Dreieck $A, P, P \alpha$ und die Gerade $Q \rho_\alpha$ trifft daher $Q \rho_\alpha$ die Gerade $PP \alpha$ in einem Punkt Z ($\exists! \rho_\alpha, \rho_\beta$ wegen $P \alpha \neq Q \alpha \wedge P \neq Q$).



Ebenso gehen wir mit $X \in \rho_\alpha \wedge X \notin AP \wedge X \notin a$ vor. $X \alpha$ liegt nun notwendig auf den Geraden $(QX \cap a) \vee Q \alpha$ und $(PX \cap a) \vee P \alpha$. $XX \alpha$ trifft wegen Axiom I_2 sowohl $PP \alpha$ als auch $QQ \alpha$. Geht $XX \alpha$ nicht durch $Z = PP \alpha \cdot QQ \alpha$, so trifft $XX \alpha$ die Geraden $PP \alpha$ und $QQ \alpha$ in zwei von Z verschiedenen Punkten; der Unterraum $Z \vee Q \vee P := \xi$ ist eine Ebene und es gilt $X \in \xi$, woraus mit $X \in \alpha$ folgt $X \in \alpha \xi$ und wegen $\alpha \xi = PQ \Rightarrow X \in PQ$, was der Wahl von X widerspricht. Damit ist gezeigt, daß für alle Punkte $X (X \notin a)$ nicht auf PQ die Verbindungsgerade von X mit dem zugeordneten Punkt $X \alpha$ einem Bündel \mathcal{U}_Z angehört. Speziell für Punkte auf PQ wiederholen wir nach Bezeichnungsänderung (vertausche Q und X) obige Überlegung. $\forall R \in \rho_\alpha$ gilt also: $R, R \alpha, Z$ sind kollinear (für $R \in a$ ist dies trivial) $\Rightarrow \alpha$ ist eine Perspektivität. ◆

Bemerkung: Damit ist gleichzeitig bewiesen: Liegen zwei Dreiecke in verschiedenen Ebenen so, daß zugeordnete Seiten einander auf der Schnittgeraden der Ebenen treffen, so liegen die Dreiecke Z -perspektiv (Umkehrung des Satzes von Desargues für Dreiecke in verschiedenen Ebenen).

Nach Def.1.8 heißen Kollineationen einer projektiven Ebene auf sich, die Produkte von endlich vielen perspektiven Kollineationen sind, projektive Kollineationen. Dieser Begriff hat für Kollineationen einer projektiven Ebene in eine andere projektive Ebene keinen Sinn. Gehören beide projektive Ebenen dagegen einem projektiven dreidimensionalen Raum an, so kann man definieren:

DEF.4.1 c: Eine Kollineation $\mu: \rho_\alpha \rightarrow \rho_\beta$ einer projektiven Ebene α von \mathbb{T} auf eine projektive Ebene β von \mathbb{T} heißt eine projektive Kollineation, wenn sie die Einschränkung einer projektiven Kollineation $\alpha: \rho \rightarrow \rho$ von \mathbb{T} auf ρ_α ist.

Bemerkung: Sind allgemein $\mathbb{T}_1(\mathcal{P}_1)$ und $\mathbb{T}_2(\mathcal{P}_2)$ zwei Unterräume eines projektiven Raumes \mathbb{T} und $\mu: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ eine Kollineation, so heißt μ genau dann eine projektive Kollineation, wenn eine projektive Kollineation $\alpha: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ existiert mit $\mu = \alpha|_{\mathcal{P}_1}$.

10) Eine Kollineation $\mu: \mathcal{P}_\alpha \rightarrow \mathcal{P}_\beta$ einer Ebene $\alpha \subset \mathbb{T}^3$ auf eine Ebene $\beta \subset \mathbb{T}^3$ ist genau dann projektiv, wenn μ Produkt von endlich vielen Perspektivitäten zwischen Ebenen ist. Es existiert eine projektive Kollineation $\mu: \mathcal{P}_\alpha \rightarrow \mathcal{P}_\beta$, die ein Viereck in α in ein Viereck in β überführt und genau eine in Pappusräumen.

Bew.: (a) Ist $\mu: \mathcal{P}_\alpha \rightarrow \mathcal{P}_\beta$ endliches Produkt von Perspektivitäten zwischen Ebenen, so ist jede dieser Perspektivitäten nach Folg.8 Einschränkung einer perspektiven Autokollineation von \mathbb{T} auf eine Ebene und daher μ nach Def.3.6b eine projektive Kollineation.

(b) Ist $\mu: \mathcal{P}_\alpha \rightarrow \mathcal{P}_\beta$ eine projektive Kollineation und als solche Einschränkung einer projektiven Kollineation α von \mathbb{T} auf α , so ist α endliches Produkt von perspektiven Kollineationen von \mathbb{T} und μ nach Wahl geeigneter Hilfsebenen endliches Produkt von Perspektivitäten zwischen Ebenen.

(c) Führt man α in β durch eine Perspektivität π über, so ist durch das π -Bild des Urvierecks in α und das gegebene Bildviereck in β eine projektive Autokollineation von β bestimmt, welche nach 3.5, Folg.2, Anw.(c) zu einer projektiven Kollineation von \mathbb{T} verlängert werden kann. Das Produkt einer π beschreibenden perspektiven Kollineation von \mathbb{T} und dieser projektiven Kollineation von \mathbb{T} ist eine projektive Kollineation von \mathbb{T} , deren Einschränkung auf α das Gewünschte leistet.

(d) Speziell in \mathbb{T}_{pp} ist α eine PP-Ebene. Sind μ_1, μ_2 zwei projektive Kollineationen, welche in die Angabe passen, so ist $\mu_1, \mu_2^{-1}: \mathcal{P}_\alpha \rightarrow \mathcal{P}_\alpha$ als Einschränkung einer projektiven Kollineation in \mathbb{T} auf α eine projektive Kollineation in α , die ein Viereck festläßt. Nach Satz 1.9 ist $\mu_1, \mu_2^{-1} = \iota$ und damit $\mu_1 = \mu_2$.

Bemerkungen: (a) Nach Folg.10 ist eine Kollineation $\mu: \mathcal{P}_\alpha \rightarrow \mathcal{P}_\beta$ genau dann projektiv, wenn eine Punktreihe von α aufgefaßt als Punktreihe in \mathbb{T} projektiv abgebildet wird.

(b) Was in Folg.10 für zwei Ebenen formuliert wurde, gilt für zwei Koebenen in \mathbb{T} und auch für die jeweils D_2 -duale bzw. D_1^* -duale Auffassung der Ebenen bzw. Koebenen. Demgemäß kann man von projektiv kollinearen Punktfeldern und Ebenenbündeln bzw. Geradenfeldern und Geradenbündeln sprechen.

SATZ 4.1: Je zwei Grundgebilde 1.Stufe und je zwei Grundgebilde 2.Stufe in einem dreidimensionalen projektiven Raum sind gleichmächtig. Der PAR ist ein dreidimensionaler projektiver Raum. Kollineare verschiedene gleichartige Felder bzw. kollineare verschiedene gleichartige Bündel sind genau dann perspektiv, wenn die gemeinsamen Punkte bzw. die gemeinsamen Ebenen einzeln fest bleiben. Eine Kollineation zwischen zwei gleichartigen Grundgebilden 2.Stufe in einem dreidimensionalen projektiven Raum ist genau dann projektiv, wenn sie Produkt von endlich vielen Perspektivitäten ist.

Bemerkung: Wir verwenden i. f. die kurzen Schreibweisen:
 $a=AB$ für die eindeutige Verbindungsgerade von $A, B | \in \mathcal{L}, +$ (vgl. I.1),
 $a=\alpha\beta$ für die eindeutige Schnittgerade von $\alpha, \beta | \in \mathcal{E}, +$ (vgl. 3.8, Bem. b),
 $\alpha=Aa$ für die eindeutige Verbindungsebene des Punktes A mit der nicht durch ihn gehenden Geraden a (nach Dimensionssatz),
 $A=\alpha a$ für den eindeutigen Schnittpunkt der Ebene α mit der nicht in ihr liegenden Geraden a (vgl. 3.2, Folg. 5),
 $\alpha=gh$ bzw. $A=gh$ für die eindeutig bestimmte Verbindungsebene bzw. für den eindeutig bestimmten Schnittpunkt zweier verschiedener einander schneidender Geraden g und h (nach dem Dimensionssatz und 3.1, Bem. d).

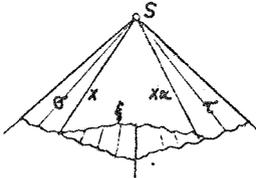
4.2. Quadratische Kegel in dreidimensionalen Pappusräumen

Die in § 2 besprochenen Kegelschnitte sind Figuren in einer PP-Ebene. Deuten wir diese als Unterraum eines dreidimensionalen PP-Raumes \mathbb{P} und wenden wir D_3 auf diese Figuren an, so entstehen Figuren in Koebenen, also Bündelfiguren. Aus Aussagen über Kegelschnitte erhalten wir Aussagen über diese Bündelfiguren.

DEF. 4.2 a (D_3 -dual zu Def. 2.1 a): Eine Ebenenmenge in einem PP-Raum heißt ein quadratischer Ebenenkegel, wenn sie die Menge der Verbindungsebenen zugeordneter Geraden zweier verschiedener projektiver, nicht perspektiver Geradenbüschel aus einem Bündel ist. Eine Geradenmenge in einem PP-Raum heißt ein quadratischer Geradenkegel, wenn sie die Menge der Schnittgeraden zugeordneter Ebenen zweier verschiedener projektiver, nicht perspektiver Ebenenbüschel aus einem Bündel ist.

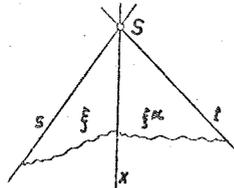
Quadratischer Ebenenkegel:

$\mathcal{E}_r := \{ \xi \in \mathcal{E}_S \mid \xi = x \cdot \alpha \text{ mit } x \in \mathcal{U}_{S,\sigma} \wedge \alpha \in \mathcal{U}_{S,\tau} \wedge \alpha \text{ nicht perspektive Projektivität } \wedge \sigma \neq \tau \}$



Quadratischer Geradenkegel:

$\mathcal{U}_r := \{ x \in \mathcal{U}_S \mid x = \xi \cdot \alpha \text{ mit } \xi \in \mathcal{E}_S \wedge \alpha \in \mathcal{U}_S \wedge \alpha \in \mathcal{E}_t \wedge \alpha \text{ nicht perspektive Projektivität } \wedge s \neq t \}$



Bemerkungen: (a) Da \mathbb{P} ein PP-Raum ist, sind die projektiven Geradenbüschel $\mathcal{U}_{S,\sigma} \times \mathcal{U}_{S,\tau}$ bzw. die projektiven Ebenenbüschel $\mathcal{E}_s, \pi \mathcal{E}_t$ nach der D_2 -dualen bzw. D_3 -dualen Aussage zu 1.9, Folg.2 genau dann perspektiv, wenn die gemeinsame Gerade $\sigma \tau$ bzw. die gemeinsame Ebene $s t$ der beiden Büschel selbstzugeordnet ist.

(b) Jeder quadratische Ebenenkegel bzw. Geradenkegel enthält die "Grundebenen" σ und τ bzw. "Grundgeraden" s und t . Der Bündelscheitel S heißt die "Spitze".

(c) Quadratische Ebenenkegel und quadratische Geradenkegel desselben Bündels S sind dual im Sinne von D_2^* .

(d) Jeder quadratische Ebenenkegel ist eine Punktmenge, welche D_3 -dual zu einem Punktkegelschnitt ist. Jeder quadratische Geradenkegel ist D_3 -dual zu einem Geradenkegelschnitt und kann als Punktmenge in \mathbb{P} aufgefaßt werden, wenn man definiert: Ein Punkt des Raumes heißt Punkt eines quadratischen Geradenkegels, wenn er mit einer Geraden des Kegels inzidiert.

Folgerungen:

1) (a) Ist π eine Ebene nicht durch die Spitze S eines quadratischen Ebenenkegels \mathcal{E}_r , so ist die Geradenmenge $\{ \pi \text{ mit } \xi \in \mathcal{E}_r \}$ ein Geradenkegelschnitt in π ("Spurgeradenkegelschnitt" in π). Projiziert man die Geraden eines Geradenkegelschnitts in π aus einem Punkt S nicht in π , so entsteht ein quadratischer Ebenenkegel (Diese beiden Aussagen folgen sofort aus der Tatsache, daß die Abbildung η aus 3.8, Folg.10 ein Isomorphismus $S \rightarrow \pi$ ist). Ebenso gilt:

(b) Ist π eine Ebene nicht durch die Spitze eines Geradenkegels \mathcal{U}_r , so ist die Menge der Punkte $x\pi$ mit $x \in \mathcal{U}_r$ (der Durchschnitt der Punktmenge von \mathcal{U}_r mit \mathcal{P}_π) ein Punktkegelschnitt in π ("Spurpunktkegelschnitt" in π).

Projiziert man einen Punktkegelschnitt in π aus einem Punkt S nicht in π , so entsteht ein quadratischer Geradenkegel.

(c) Jeder quadratische Ebenen- bzw. Geradenkegel ist gleichmächtig zu einem Grundgebilde 1. Stufe.

Dies folgt aus (a) und (b) sowie 2.1, Folg.1.

2) Hat \mathbb{T}_{pp} speziell die Ordnung N , so hat auch jede Ebene und jede Koebene von \mathbb{T}_{pp} die Ordnung N .

$N=2$: Ein quadratischer Ebenenkegel \mathcal{E}_r besteht aus drei nicht kollinearen Ebenen ("Dreiflach").

$N=3$: \mathcal{E}_r besteht aus vier Ebenen eines Bündels, von denen nie drei kollinear sind ("Vierflach eines Bündels").

$N \geq 4$: Ein quadratischer Ebenenkegel ist eindeutig bestimmt durch fünf seiner Ebenen, von denen nie drei kollinear sind, und umgekehrt legen fünf Ebenen eines Bündels, von denen nie drei kollinear sind, genau einen quadratischen Ebenenkegel fest. Alle Ebenen eines quadratischen Ebenenkegels sind gleichberechtigt: Je zwei verschiedene Ebenen eines quadratischen Ebenenkegels werden von allen seinen Ebenen nach projektiven, nicht perspektiven Geradenbüscheln geschnitten (Vgl. 2.1, Folg. 3 und 5). Analoges gilt für quadratische Geradenkegel.

DEF.4.2 b (D_3 -dual zu Def.2.1 b): Eine Gerade x in einer Ebene ξ eines quadratischen Ebenenkegels \mathcal{E}_r heißt eine Erzeugende, wenn durch sie keine weitere Ebene von \mathcal{E}_r geht. Eine Ebene ξ durch eine Gerade x eines quadratischen Geradenkegels \mathcal{G}_r heißt eine Tangentialebene, wenn in ξ keine weitere Gerade von \mathcal{G}_r liegt.

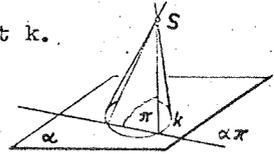
3) (D_3 -dual zur Bemerkung nach Def.2.1b) In jeder Ebene $\xi \in \mathcal{E}_r$ liegt genau eine Erzeugende von \mathcal{E}_r . Durch jede Gerade $x \in \mathcal{G}_r$ geht genau eine Tangentialebene von \mathcal{G}_r .

Bemerkungen: (a) Nach Folg.1 ist der Durchschnitt der Punktmenge eines quadratischen Geradenkegels \mathcal{G}_r mit einer Ebene π nicht durch die Spitze S ein Punktkegelschnitt k . Ist x eine Gerade von \mathcal{G}_r und ξ die Tangentialebene von \mathcal{G}_r in x , so ist die Spur von ξ in π die Tangente von k in $X=x\pi$: (ind.) Ist nämlich $\xi \cap \pi$ eine Sehne von k , so trifft diese den Punktkegelschnitt k in einem Punkt $Y \in X$ und SY ist eine weitere Gerade von \mathcal{G}_r , welche in ξ liegt, was der Definition der Tangentialebene widerspricht.

(b) Ist $P \neq S$ ein Punkt auf der Erzeugenden x von \mathcal{G}_r und $\pi \cap P$ eine Ebene durch S , so enthält der Durchschnitt der Punktmenge des Kegels mit π sicher x . Führt man die Sprechweise ein: Jede Gerade ist in jedem ihrer Punkte ihre Tangente,

so gilt zusammenfassend: Alle ebenen Schnitte eines quadratischen Geradenkegels durch einen seiner Punkte verschieden von der Spitze besitzen Tangenten, welche in der Tangentialebene der durch den Punkt gehenden Geraden liegen.

(c) Um den Durchschnitt eines quadratischen Geradenkegels \mathcal{U}_r mit einer Ebene π durch S zu bestimmen, schneiden wir \mathcal{U}_r zuerst mit einer Ebene $\alpha \perp \mathcal{I}S$ und erhalten den Punktkegelschnitt k . Da mit jedem Punkt P des Durchschnitts verschieden von S die Kegelgerade PS dem Durchschnitt angehört, besteht dieser aus Geraden, deren Schnittpunkte mit α auf $\alpha\pi$ und auf k liegen. Somit besteht der gesuchte Durchschnitt entweder aus zwei oder aus einer Kegelgeraden oder nur aus $\{S\}$.



4) Jede (nicht notwendig projektive) Kollineation $\alpha: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ führt einen quadratischen Ebenenkegel \mathcal{E}_r in einen quadratischen Ebenenkegel \mathcal{E}'_r über, wobei eine Erzeugende von \mathcal{E}'_r in eine Erzeugende von \mathcal{E}_r übergeht; je zwei quadratische Ebenenkegel sind projektiv kollinear. Analoge Aussagen gelten für quadratische Geradenkegel.

Bew.: Es genügt die D_3 -dualen Aussagen zu beweisen.

(a) Jeder Punktkegelschnitt k eines PP-Raumes geht bei einer Kollineation $\alpha: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ linienelementweise in einen Punktkegelschnitt über: Ist σ die Ebene von k , $\sigma\alpha^*$ die Ebene von $k\alpha$ und $\zeta: \rho_\sigma \rightarrow \rho_{\sigma\alpha^*}$ eine Perspektivität (für $\sigma = \sigma\alpha^*$ setzen wir $\zeta = 1$), so ist $k\zeta$ ein Punktkegelschnitt in $\sigma\alpha^*$, da ζ eine Steinererzeugung von k durch projektive Geradenbüschel in eine Steinererzeugung von $k\zeta$ überführt. Weiters ist $\zeta^{-1}\alpha: \rho_{\sigma\alpha^*} \rightarrow \rho_{\sigma\alpha}$ eine Autokollineation von $\sigma\alpha^*$ mit $k\zeta \mapsto k\alpha$ und daher ist nach 2.1, Folg. 2 die Punktmenge $k\alpha$ ein Punktkegelschnitt; bei ζ geht eine Tangente von k in eine Tangente von $k\zeta$ über und analoges gilt bei $\zeta^{-1}\alpha$ nach 2.1, Folg. 6.

(b) Je zwei Punktkegelschnitte k, k' eines PP-Raumes sind projektiv kollinear:

Ist σ bzw. σ' die Ebene von k bzw. k' , so existiert nach 3.5, Folg. 2, Anw. b eine projektive Kollineation $\alpha_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ mit $\sigma'\alpha_1 = \sigma$ (für $\sigma = \sigma'$ setzen wir $\alpha_1 = 1$). Dann ist $k'\alpha_1 =: k''$ ein Punktkegelschnitt in σ und nach 2.2, Folg. 4 sind k und k'' projektiv kollinear in σ , d.h. es existiert eine ebene projektive Kollineation $\tilde{\alpha}_2: \sigma \rightarrow \sigma$ mit $k''\tilde{\alpha}_2 = k$. Nach 3.5, Folg. 2, Anw. c kann $\tilde{\alpha}_2$ zu einer projektiven Kollineation $\alpha_2: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ fortgesetzt werden mit $\alpha_2|_{\rho_\sigma} = \tilde{\alpha}_2$; die projektive Kollineation $\alpha_1\alpha_2: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ leistet $k' \mapsto k$.

Bemerkungen: (a) Nach 2.2, Folg.4 kann man in $\tilde{\mathbb{K}}_1$ zugeordnete Punktetripel von k'' und k vorschreiben; im Gegensatz zum ebenen Fall ist jedoch im Raum durch vorgeschriebene Tripel auf k' und k die projektive Kollineation $k' \mapsto k$ nicht mehr eindeutig festgelegt. Hat man nämlich eine projektive Kollineation α mit $k' \alpha = k$ gefunden, welche für die Tripel das Gewünschte leistet, so kann man α unbeschadet der gewünschten Wirkung mit einer beliebigen perspektiven Kollineation von \mathbb{P} mit der Achse σ (Trägerebene von k) zusammensetzen.

D_3 -dual: Sind auf ξ_r und ξ_r' zugeordnete Ebenentripel vorgeschrieben, so existieren projektive Kollineationen, die ξ_r in ξ_r' überführen und die Ebenentripel einander zuordnen. Jede solche Kollineation zusammengesetzt mit einer perspektiven Kollineation, deren Zentrum im Scheitel von ξ_r liegt, ist wieder eine projektive Kollineation, die das Gewünschte leistet.

(b) Jeder quadratische Geradenkegel im PAR ist projektiv kollinear zu einem Kreiskegel und jeder quadratische Ebenenkegel im PAR ist projektiv kollinear zur Menge der Tangentialebenen (im elementaren Sinn) eines Kreiskegels.

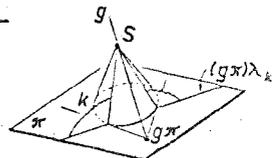
Nach 2.2, Folg.2 ist ein Kreis nämlich ein Punktkegelschnitt bzw. die Menge seiner Tangenten ein Geradenkegelschnitt; die Projektion dieser Elemente aus einem Punkt S nicht in der Kreisebene ergibt im Sinne der Elementargeometrie einen Kreiskegel bzw. seine Tangentialebenenmenge; nach Folg.1 ist diese Projektion aber ein quadratischer Geraden- bzw. Ebenenkegel. Damit ist im PAR ein quadratischer Geraden- bzw. Ebenenkegel bekannt; nach Folg.4 sind alle anderen dazu projektiv kollinear.

5) Da auch in der Menge der dreidimensionalen klassischen projektiven Räume \mathbb{P}_{kl} nach 3.8, Folg.10 das Dualitätsprinzip D_3 gilt, können wir aus den Aussagen über Kegelschnitte in einer klassischen projektiven Ebene Aussagen über quadratische Kegel in einem \mathbb{P}_{kl} gewinnen.

D_3 -dual zu Satz 2.3: Die Menge der Erzeugenden (Tangentialebenen) eines quadratischen Ebenenkegels ξ_r (quadratischen Geradenkegels) bildet einen quadratischen Geradenkegel \mathcal{O}_r (quadratischen Ebenenkegel).

$\xi_r \cup \mathcal{O}_r$ nennen wir "quadratischer Kegel" Γ (D_3 -dual zu Kegelschnitt $k \cup k^*$), der im Sinne von Bem. d nach Def.4.2a als Punktmenge aufgefaßt werden kann.

6) Wir wollen nun das Polarsystem eines quadratischen Kegels Γ in \mathbb{P}_{kl} mit Hilfe des Polarsystems λ_k eines Spurkegelschnitts $k = \Gamma \cap \pi$ (mit $\pi \not\perp S$) definieren.



DEF.4.2 c: Ist k ein Spurkegelschnitt eines quadratischen Kegels in einer Ebene π nicht durch die Spitze S und λ_k das Polarsystem von k , so heißt die Abbildung $\lambda_r: \mathcal{O}_s \rightarrow \xi_s$ mit $g \in (\mathcal{O}_s) \mapsto [(g\pi)\lambda_k] \cdot S \in (\xi_s)$

Kurz: Man projiziere Pol und Polare von k und erhält in λ_p gekoppelte Elemente.

Bemerkung: Diese Definition ist sinnvoll, denn sie ist unabhängig von der Auswahl der Hilfsebene α (nicht durch S): Je zwei Hilfsebenen π_1 und π_2 nicht durch S werden durch das Bündel S perspektiv bezogen; insbesondere ordnet die Perspektivität die Spurkegelschnitte $k_1 = \Gamma \cap \pi_1$ und $k_2 = \Gamma \cap \pi_2$ einander zu. Diese Zuordnung wird durch die Erzeugenden von Γ bewerkstelligt. Nach 4.1, Folg. 8 ist eine Perspektivität zwischen Punktfeldern stets die Beschränkung einer gewissen Kollineation und nach 2.3, Folg. 5 geht bei einer Kollineation $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ polare Lage in polare Lage über.

Nun können Aussagen über Polarsysteme von Kegelschnitten in \mathcal{K}_K zu Aussagen über quadratische Kegel in \mathbb{K}_K umformuliert werden: Beispiele (zu 2.3, Folg. 3): In jeder Ebene durch die Spitze, die keine Tangentialebene ist, existiert eine Involution konjugierter Bündelgeraden bezüglich λ_p ; ist diese hyperbolisch, so sind ihre Fixgeraden Erzeugende von Γ . Um jede Gerade durch die Spitze, die keine Erzeugende ist, gibt es eine Involution konjugierter Ebenen bezüglich λ_p ; ist diese hyperbolisch, so sind ihre Fixebenen Tangentialebenen von Γ .

SATZ 4.2: In einem dreidimensionalen Pappusraum ist jeder quadratische Geradenkegel bzw. jeder quadratische Ebenenkegel durch die Spitze und einen Spurpunktkegelschnitt bzw. Spurgeradenkegelschnitt in einer Ebene nicht durch die Spitze festgelegt, und je zwei quadratische Geraden- (Ebenen-) kegel sind projektiv kollinear. In jedem Punkt P verschieden von der Spitze eines quadratischen Geradenkegels existiert eine längs der Geraden durch P feste Tangentialebene, in der die Tangenten an alle ebenen Schnitte des Kegels durch P liegen. In einem klassischen dreidimensionalen projektiven Raum bilden die Tangentialebenen bzw. die Erzeugenden eines quadratischen Kegels einen quadratischen Ebenen- bzw. Geradenkegel und jeder quadratische Kegel besitzt ein Polarsystem.

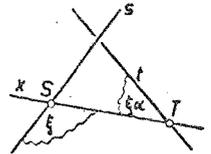
Bemerkung: Das Polarsystem eines Kegelschnitts ist eine projektive hyperbolische Polarität der Trägerebene. Das Polarsystem eines Kegels ist daher eine projektive hyperbolische Polarität einer Koebene, aber keine Polarität des Raumes \mathbb{K} , da eine Polarität in \mathbb{K} eine Bijektion $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$ ist.

4.3. Reguli in dreidimensionalen Pappusräumen

Bei einem quadratischen Geradenkegel sind wir von einer projektiven, nicht perspektiven Abbildung α zwischen Ebenenbündeln mit schneidenden Trägern ausgegangen. Jetzt wollen wir windschiefe Träger betrachten:

DEF.4.3 a: Eine Geradenmenge in \mathbb{T}_{pp} heißt ein Regulus, wenn sie die Menge der Schnittgeraden zugeordneter Ebenen zweier projektiver Ebenenbündel mit windschiefen Achsen ist. Jede Gerade, die alle Geraden eines Regulus trifft, heißt Leitgerade des Regulus.

Bemerkungen: (a) $\alpha: \ell_s \times \ell_t \dots$ Projektivität mit s windschief t . Eine Ebene $\xi \in \ell_s$ enthält sicher nicht t , denn s und t sind windschief $\Rightarrow t$ durchstößt ξ in einem eindeutigen Punkt T . Ebenso durchstößt s die Ebene $\xi \alpha$ ($\in \ell_t$) in einem eindeutigen Punkt S ; die Gerade $x = \xi \cdot \xi \alpha = ST$ gehört zum Regulus \mathcal{U}_α . Der Regulus \mathcal{U}_α kann daher so beschrieben werden:



$\mathcal{U}_\alpha := \{ x \in \mathcal{U} \mid x = \xi \cdot \xi \alpha \text{ mit } \alpha: \ell_s \rightarrow \ell_t \text{ Projektivität } \wedge s \text{ windschief } t \}$.

(b) s und t sind Leitgeraden des Regulus \mathcal{U}_α , denn jede Gerade $x \in \mathcal{U}_\alpha$ trifft s und t . Die Geraden s und t heißen "Grundleitgeraden".

Folgerungen:

1) (a) Die Geraden eines Regulus beziehen die beiden Leitgeraden projektiv aufeinander.

Bew.: Nach der Konstruktion von S und T in der obigen Bemerkung (a) gilt $t(T) \bar{\wedge} s(\xi) \bar{\wedge} t(\xi \alpha) \bar{\wedge} s(S) \Rightarrow t(T) \bar{\wedge} s(S)$. ◆

Bemerkung: Nach Def.3.6 a und 4.1 sind zwei windschiefe Punktreihen niemals perspektiv.

(b) Die Menge der Verbindungsgeraden projektiver windschiefer Punktreihen ist ein Regulus.

Bew.: Gegeben ist $s(S) \bar{\wedge} t(T)$; wir verbinden s mit T bzw. t mit S und erhalten Ebenen ξ bzw. ξ' ; es gilt

$s(sT) \bar{\wedge} t(T) \bar{\wedge} s(S) \bar{\wedge} t(tS)$ mit $\xi \neq \xi' \Rightarrow s(\xi) \bar{\wedge} t(\xi')$ und

$TS = (sT) \cdot (tS) = \xi \cdot \xi'$.

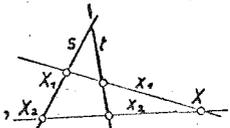
Die Menge der Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte ist identisch mit der Menge der Schnittgeraden von in $s(\xi) \wedge t(\xi')$ zugeordneten Ebenen, also ein Regulus. ◆

Bemerkungen: (a) Regulus ist daher ein selbstdualer Begriff.

(b) Jeder Regulus ist einer Punktreihe gleichmächtig: $|\mathcal{O}_\rho| = |\mathcal{P}_s|$.

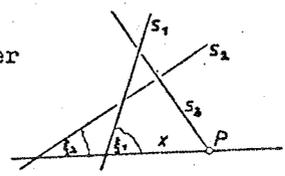
(c) Je zwei Geraden eines Regulus sind windschief.

Bew.: $x_1, x_2 \in \mathcal{O}_\rho, \neq$; (ind.) x_1 schneidet x_2 . Der Schnittpunkt $X = x_1 \cdot x_2$ liegt nicht auf s , da die erzeugende Projektivität α eine Abbildung ist, und nicht auf t , da α injektiv ist. x_1 bzw. x_2 trifft s in X_1 bzw. X_2 und X, X_1, X_2 bilden ein Dreieck; wegen Axiom I_2 muß die Gerade t die Seite s treffen: Widerspruch zu s windschief t . ◆



2) (a) Die Menge aller Treffgeraden von drei paarweise windschiefen Geraden ist ein Regulus.

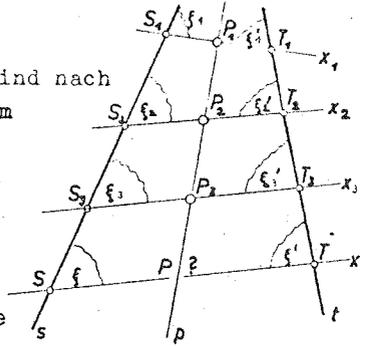
Bew.: Seien s_j ($j=1,2,3$) drei paarweise windschiefe Geraden. Durch jeden Punkt $P \in \mathcal{P}_s$, gibt es genau eine Treffgerade x an s_1 und s_2 (x ist Schnitt der beiden verschiedenen Ebenen $Ps_1 =: \xi_1$ und $Ps_2 =: \xi_2$) und es gilt $s_1(\xi_1) \wedge s_3(P) \wedge s_2(\xi_2) \Rightarrow s_1(\xi_1) \wedge s_2(\xi_2)$. Die Menge aller Treffgeraden $x = \xi_1 \xi_2$ ist also nach Def. 4.3 a ein Regulus. ◆



(b) Jeder Regulus besteht aus den Treffgeraden von drei paarweise windschiefen Leitgeraden.

Bew.: Der Regulus \mathcal{O}_ρ werde durch $s(S) \wedge t(T)$ mit den windschiefen Grundleitgeraden s und t erzeugt. Es genügt zu zeigen, daß noch eine dritte zu s und t windschiefe Leitgerade von \mathcal{O}_ρ existiert.

Drei Geraden $x_i = S_i T_i$ ($i=1,2,3$) von \mathcal{U}_ϕ sind nach Folg.1 paarweise windschief. Aus einem Punkt P_1 auf x_1 mit $P_1 \neq S_1, T_1$ gibt es nach dem Beweis von (a) genau eine Treffgerade p an x_2 und x_3 . Für $N=2$ ist man fertig, denn p ist Leitgerade von $\mathcal{U}_\phi = \{x_i | i=1,2,3\}$. Für $N > 2$ ist zu zeigen: Eine beliebige Gerade $x=ST$ von \mathcal{U}_ϕ trifft auch p .



Setzen wir $\xi := sx$, $\xi_j := sx_j$, $\xi' := tx$, $\xi'_j := tx_j$ ($j=1,2,3$), so sind die Punkte $\xi.p=P$, $\xi_j.p=:P_j$ bzw. $\xi'.p=:P'$, $\xi'_j.p=P'_j$ eindeutig bestimmt, denn p ist windschief s und p ist windschief t . Die Behauptung lautet also $P=P'$. Wegen obiger Definition gilt $p(P_1, P_2, P_3, P) \bar{\wedge} s(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi) \bar{\wedge} t(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi') \bar{\wedge} p(P_1, P_2, P_3, P') \Rightarrow p(P_1, P_2, P_3, P) \bar{\wedge} p(P_1, P_2, P_3, P') \Rightarrow P=P'$, da in \mathbb{W}_{pp} der Fundamentalsatz gilt.

Bemerkungen: (a) Die obige Aussage lautet umformuliert: Schneidet eine Gerade drei paarweise verschiedene Geraden eines Regulus, so schneidet sie alle Geraden dieses Regulus und ist daher Leitgerade.

(b) Hier wurde zum ersten Mal in 4.3 der Satz von Pappus-Pascal verwendet. Ohne Beweis sei erwähnt: Die Aussage von Bemerkung a ist logisch äquivalent zu PP.

(c) Seien x_1, x_2, x_3 drei verschiedene Geraden eines Regulus \mathcal{U}_ϕ . Die Menge der Leitgeraden von \mathcal{U}_ϕ besteht aus allen Treffgeraden von x_1, x_2, x_3 und daher ist diese Menge nach Folg.2a ein Regulus \mathcal{U}_ψ ; er heißt der zu \mathcal{U}_ϕ "ergänzende Regulus". Der zu \mathcal{U}_ϕ ergänzende Regulus \mathcal{U}_ψ stimmt mit \mathcal{U}_ϕ überein. Dazu ist zu zeigen, daß \mathcal{U}_ψ die Menge der Leitgeraden von \mathcal{U}_ϕ ist. Jede Gerade $x \in \mathcal{U}_\psi$ wird von allen Geraden $\bar{x} \in \mathcal{U}_\phi$ getroffen, also ist \bar{x} Leitgerade von $\mathcal{U}_\psi \Rightarrow x \in \mathcal{U}_\psi \Rightarrow \mathcal{U}_\psi \subset \mathcal{U}_\phi$. Ist umgekehrt $\bar{x} \in \mathcal{U}_\phi$, dann ist \bar{x} Leitgerade von \mathcal{U}_ψ , d.h. \bar{x} trifft alle Geraden von \mathcal{U}_ψ , insbesondere die drei Geraden $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \in \mathcal{U}_\phi$. Die Menge aller Treffgeraden von $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ ist der Regulus $\mathcal{U}_\phi \Rightarrow \bar{x} \in \mathcal{U}_\phi \Rightarrow \mathcal{U}_\phi \subset \mathcal{U}_\psi$. \mathcal{U}_ϕ und \mathcal{U}_ψ haben also folgende gegenseitige Lage: Je zwei Geraden aus \mathcal{U}_ψ und je zwei Geraden aus \mathcal{U}_ϕ sind windschief; es gilt $\mathcal{U}_\phi \cap \mathcal{U}_\psi = \emptyset$. Jede Gerade von \mathcal{U}_ψ schneidet alle Geraden von \mathcal{U}_ϕ und umgekehrt.

(d) Aus Folg.2, b folgt: Bei einer (nicht notwendig projektiven) Kollineation geht ein Regulus in einen Regulus über.

(e) Die Grundleitgeraden sind in \overline{U}_ϕ nicht ausgezeichnet. Anders formuliert: Je zwei verschiedene Leitgeraden eines Regulus werden von allen Regulusgeraden in projektiven Punkt-reihen geschnitten; aus je zwei verschiedenen Leitgeraden werden alle Regulusgeraden durch projektive Ebenenbüschel projiziert.

Bew.: Unter Verwendung der Inzidenztabelle (Figur) und der Bezeichnungen im Beweis von Folg. 2 b gilt $p(P) \wedge s(S) \wedge t(T) \Rightarrow p(P) \wedge t(T)$, und diese Reihen erzeugen ebenfalls U_ϕ (wegen ST=PT). Die Leitgerade s kann also durch die Leitgerade p ersetzt werden und analog kann t durch eine andere Leitgerade ersetzt werden. ◆

DEF. 4.3 b: Die Menge der Punkte, die mit den Geraden eines Regulus U_ϕ inzidieren, heißt eine ringartige Quadrik ϕ . Die Geraden des Regulus U_ϕ heißen Erzeugenden von ϕ .

Bemerkungen: (a) Auf jeder ringartigen Quadrik ϕ gibt es zwei Scharen von Erzeugenden, nämlich die Geraden von U_ϕ und die Geraden des ergänzenden Regulus \overline{U}_ϕ . Zum ergänzenden Regulus gehört nämlich eine ringartige Quadrik $\overline{\phi}$ und es gilt $\phi = \overline{\phi}$: Jeder Punkt $X \in \phi$ liegt auf einer Geraden von U_ϕ ; durch X geht nach Bem. c eine Gerade von $\overline{U}_\phi \Rightarrow X \in \overline{\phi} \Rightarrow \phi \subset \overline{\phi}$. Da Ergänzendsein eine symmetrische Relation ist, folgt ebenso $\overline{\phi} \subset \phi$.

(b) Je zwei Erzeugenden einer Schar auf ϕ sind windschief, je zwei Erzeugenden von verschiedenen Scharen auf ϕ schneiden einander (vgl. Bemerkung c von oben).

(c) Im PAR ist aus der Darstellenden Geometrie ein Beispiel einer ringartigen Quadrik bekannt. Dort wurden die Ferngerade s von π und zwei nicht zu π parallele, zueinander windschiefe Geraden t und p als Leitgeraden verwendet. Die Menge aller zu π parallelen Treffgeraden von t und p ist im Sinne von Def. 4.3 a ein Regulus und die zugehörige Punktmenge, ein hyperbolisches Paraboloid, daher eine ringartige Quadrik.

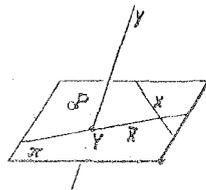
3) Sei ϕ eine ringartige Quadrik und π eine Ebene. Wir wollen die Punktmenge $\phi \cap \pi$ untersuchen. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(a) Enthält π eine Erzeugende x ($\in U_\phi$) von ϕ , so ist $\phi \cap \pi = R_x \cup R_{\overline{x}}$ mit $\overline{x} \in \overline{U}_\phi$.

Bew.: Es existiert $y \in U_\phi$ mit $y \neq x \Rightarrow x$ windschief $y \Rightarrow y \not\subset \pi \Rightarrow \exists Y = y\pi$ mit $Y \not\subset x$. Nach Folg. 2a geht durch $Y \in \phi$ genau eine Leitgerade $\overline{x} (\in \overline{U}_\phi)$ und $\overline{x} \perp \pi$, da $Y \in \pi$ und \overline{x} die Gerade x trifft.

Es ist noch zu zeigen, daß in π kein Punkt von ϕ liegt, der nicht auf x oder \bar{x} liegt.

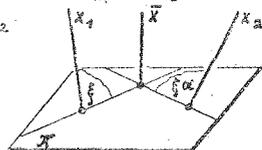
(ind.) $\exists P \in \phi \cap \pi$ mit $P \notin x, \bar{x}$. Durch $P \in \phi$ geht eine Gerade x_P von \mathcal{U}_ϕ ; da x_P alle Geraden von $\bar{\mathcal{U}}_\phi$ treffen muß, trifft x_P auch \bar{x} , also liegt x_P in $\bar{x} \Rightarrow x_P$ schneidet x : Widerspruch zu Folg.1, Bem.c.



(b) Enthält \bar{x} keine Erzeugende von ϕ , so ist $\phi \cap \pi$ ein Punktkegelschnitt.

Bew.: Sind $x_1, x_2 \in \mathcal{U}_\phi$, so gilt nach Voraussetzung $x_1, x_2 \notin \pi$. Nach Folg.2, Bem.e kann $\bar{\mathcal{U}}_\phi$ durch die Projektivität $\alpha: \ell_{x_1} \rightarrow \ell_{x_2}$ erzeugt werden, d.h. alle $\bar{x} \in \bar{\mathcal{U}}_\phi$ werden aus x_1 und x_2 durch projektive Ebenenbüschel projiziert.

Da durch jeden Punkt von ϕ genau eine Gerade von $\bar{\mathcal{U}}_\phi$ geht, ist $\phi \cap \pi$ identisch mit der Menge aller Durchstoßpunkte der Geraden $\bar{x} \in \bar{\mathcal{U}}_\phi$ mit π , also $\phi \cap \pi = \{ \bar{x} \pi \mid \bar{x} \in \bar{\mathcal{U}}_\phi \}$. Mit $\xi \in x_1$ ergibt sich:



$x_1 \pi (\xi \pi) \bar{x} x_1 (\xi) \bar{x} x_2 (\xi \alpha) \bar{x} x_2 \pi (\xi \alpha \pi) \Rightarrow$

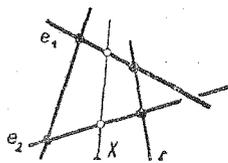
$x_1 \pi (\xi \pi) \pi x_2 \pi (\xi \alpha \pi) \Rightarrow$ die Spuren von ξ und $\xi \alpha$ sind projektiv gekoppelt und $\{ \bar{x} \pi \}$ ist als Erzeugnis dieser Projektivität ein Punktkegelschnitt, wenn gezeigt ist, daß diese Kopplung nicht perspektiv ist.

(ind.) $x_1 \pi (\xi \pi) \bar{x} x_2 \pi (\xi \alpha \pi) \Rightarrow$ die gemeinsame Büschelgerade ist selbstzugeordnet; sie ist die Spur einer Ebene η und einer Ebene $\eta \alpha$, also muß $\eta \cdot \eta \alpha (\cap \pi)$ eine Erzeugende von ϕ sein: Widerspruch zur Voraussetzung, daß in π keine Erzeugende von ϕ liegt.

Bemerkung: Jede Gerade g auf einer ringartigen Quadrik ϕ ist eine Erzeugende, wie indirekt aus Folg.3b unter Verwendung einer Ebene durch g , die keine Erzeugende enthält, sofort folgt. Ebenso folgt aus Folg. 3,b : Eine Gerade, die drei verschiedene Punkte einer ringartigen Quadrik enthält, ist eine Erzeugende.

4) Eine ringartige Quadrik ϕ ist eindeutig festgelegt durch ein "windschiefes Erzeugendenvierseit" e_1, e_2, f_1, f_2 und einen Punkt X , der zusammen mit den vier Ecken des windschiefen Erzeugendenvierseits eine Fundamentalfigur bildet.

Unter einem "windschiefen Vierseit" versteht man eine vierelementige Geradenmenge $\{e_1, e_2, f_1, f_2\}$ mit e_1 windschief e_2 und f_1 , windschief f_2 und e_1 bzw. e_2 trifft f_1 und f_2 ; ein solches Vierseit besitzt nach Axiom I, nur vier Ecken.

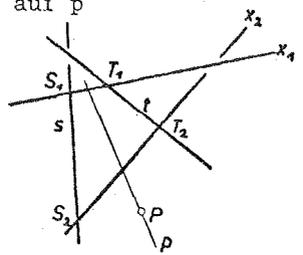


Bew.: Durch X existiert eine eindeutige Treffgerade f_3 an e_1 und e_2 und diese muß notwendig Erzeugende der ringartigen Quadrik ϕ sein. Schneidet f_3 die Gerade f_1 in einem Punkt, der keine Ecke des Erzeugendenvierseits ist, so müssen e_1 und e_2 nach Axiom I_2 im Widerspruch zur Angabe einen Punkt gemeinsam haben; schneidet f_3 dagegen f_1 in einer Ecke des Vierseits, z.B. in $e_1 f_1$, so liegt X in der Ebene $f_1 e_2$ im Widerspruch zur Angabe. Da analoges für die Geraden f_3 und f_2 gilt, sind f_1, f_2, f_3 paarweise windschief und bestimmen nach Folg.2 eindeutig einen Regulus \mathcal{U}_ϕ , dem e_1 und e_2 angehören.



5) Je zwei ringartige Quadriken sind projektiv kollinear (Im Sinne von $PGL(\Pi_{pp})$ existiert also genau eine ringartige Quadrik).

Bew.: Seien ϕ bzw. ϕ' zwei ringartige Quadriken mit den Reguli $\mathcal{U}_\phi, \mathcal{U}_{\phi'}$ bzw. $\mathcal{U}_{\phi'}, \mathcal{U}_\phi$. Wir greifen aus \mathcal{U}_ϕ die beiden Geraden $s, t \mid \neq$ und aus $\mathcal{U}_{\phi'}$ die beiden Geraden $x_1, x_2 \mid \neq$ heraus; $\{s, t, x_1, x_2\}$ ist dann ein windschiefes Erzeugendenvierseit von ϕ . In \mathcal{U}_ϕ existiert sicher noch eine Erzeugende $p(\neq |s, t)$ und auf p existiert ein Punkt P, der auf keiner Geraden des Erzeugendenvierseits liegt.



Wir setzen $s, x_1 =: S_1$,
 $t, x_1 =: T_1$ bzw. $s', x'_1 =: S'_1$,
 $t', x'_1 =: T'_1$ und zeigen zunächst,
 daß $\{S_1, S_2, T_1, T_2, P\}$ bzw.
 $\{S'_1, S'_2, T'_1, T'_2, P'\}$ Fundamental-

figuren sind, also nie vier Punkte einer Figur komplanar sind. S_1, S_2, T_1, T_2 sind nicht komplanar, denn $S_1, S_2 \mid I s$ und $T_1, T_2 \mid I t$ und s ist windschief t .

S_1, S_2, T_1, P sind nicht komplanar: (ind.) $T_1 \cap \pi =: S_1 S_2 P$. In π liegt die Erzeugende $s \stackrel{\text{Folg. 3}}{\Rightarrow} \phi \cap \pi = \mathcal{R}_s \cup \mathcal{R}_x$, wobei x eine Erzeugende von $\mathcal{U}_{\phi'}$ ist; diese ist notwendig x_1 . Der Punkt $P \in \phi$ gehört nach Voraussetzung zu $\pi \Rightarrow P \in \phi \cap \pi \wedge P \notin |s, x_1$:

Widerspruch. Die fehlenden Fälle erhält man in analoger Weise. Nach 3.7, Folg.8 existiert genau eine projektive Kollineation aus $PGL(\Pi_{pp})$, welche die eine Fundamentalfigur in die andere überführt. Diese bildet auch das Erzeugendenvierseit $\{s, t, x_1, x_2\}$ und den Punkt P von ϕ auf das Erzeugendenvierseit $\{s', t', x'_1, x'_2\}$ und den Punkt P' von ϕ' ab und damit die ringartige Quadrik ϕ auf ϕ' , da ϕ und ϕ' durch die

Reguli mit den Leitgeraden s, t, p bzw. s', t', p' eindeutig bestimmt sind (vgl. Folg. 2).

Bemerkung: Im PAR ist jede ringartige Quadrik projektiv kollinear zu einem hyperbolischen Paraboloid.

6) Schneiden wir eine ringartige Quadrik ϕ mit zwei Ebenen π_j ($j=1,2$), die keine Erzeugende enthalten, dann sind $\phi \cap \pi_j =: k_j$ Punktkegelschnitte. Durch jeden Punkt $X_1 \in k_1$ geht genau eine Gerade $x_1 \in \mathcal{U}_\phi$, und x_1 durchstößt π_2 in $X_2 \in k_2$. Der Regulus \mathcal{U}_ϕ vermittelt also eine Abbildung $k_1 \rightarrow k_2$, und ebenso bestimmt $\overline{\mathcal{U}_\phi}$ eine Abbildung $k_1 \rightarrow k_2$.

Zwei Punktkegelschnitte auf einer ringartigen Quadrik ϕ werden durch die Geraden jedes Regulus auf ϕ projektiv abgebildet.

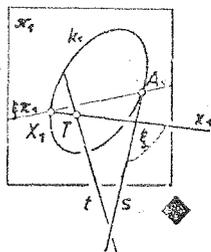
Bew.: s, t seien Leitgeraden von \mathcal{U}_ϕ ($\overset{v_6}{=} s, t \mid \mathcal{I}\pi_1$).

$s \cdot \pi_1 =: A_1 \in k_1$; $x_1 \in \mathcal{U}_\phi$ trifft s, t und k_1 in $X_1 = x_1 \cdot \pi_1$.

Setzen wir $\xi := s x_1$, so gilt $t(T) \bar{\pi} s(\xi) \bar{\pi} A_1(\xi \cdot \pi_1) \bar{\pi} \pi k_1(X_1) \Rightarrow t(T) \bar{\pi} k_1(X_1)$.

Ebenso zeigt man für den Index 2: $t(T) \bar{\pi} k_2(X_2)$.

Also gilt insgesamt: $k_1(X_1) \bar{\pi} k_2(X_2)$.



Bemerkungen: (a) Wir haben mitbewiesen: Die Punkte eines Punktkegelschnitts auf ϕ werden durch die Geraden eines Regulus \mathcal{U}_ϕ projektiv bezogen auf die Punktreihe jeder Leitgeraden von \mathcal{U}_ϕ . Diese trifft natürlich den Punktkegelschnitt, und in der Projektivität ist dieser gemeinsame Punkt selbstzugeordnet.

(b) Gilt $\phi \cap \pi_j =: k_j$ ($j=1,2$) und ist $\pi_1 \cdot \pi_2 =: a$ eine Sehne von k_1 , welche die Punkte S, T von k_1 trägt, so geht auch k_2 durch S und T , und die Punkte S, T sind in der Projektivität $k_1(X_1) \bar{\pi} k_2(X_2)$ selbstzugeordnet. Wegen $S, T \in \phi \cap \pi_2$ gilt nämlich $S, T \in k_2 = \phi \cap \pi_2$; \mathcal{U}_ϕ senkt durch S genau eine Gerade x_s und x_s durchstößt π_1 sowie π_2 genau in S , also ist S (und analog T) selbstzugeordnet.

(c) Ist a die Tangente von k_1 in S , so berührt auch k_2 die Gerade a und S ist selbstzugeordnet. Ist a Passante von k_1 , so auch von k_2 (a heißt Passante von k_1 , wenn $\rho_a \cap k_1 = \emptyset$). Die Beweise dieser Aussagen sind analog zu (b) zu führen.

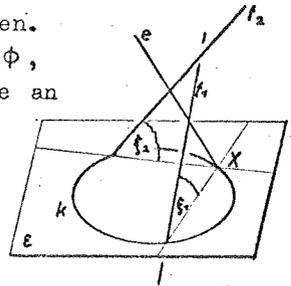
7) Eindeutige Festlegungen von ringartigen Quadriken

(a) Eine ringartige Quadrik wird eindeutig festgelegt durch drei paarweise windschiefe Erzeugenden (vgl. Folg. 2).

(b) Eine ringartige Quadrik ϕ wird eindeutig festgelegt durch zwei windschiefe Erzeugenden f_1, f_2 und drei Punkte X_j ($j=1,2,3$) mit $X_j \notin |f_1, f_2$, die "allgemeine Lage" besitzen. Gibt es zur Angabe eine ringartige Quadrik ϕ , so sind die drei eindeutig bestimmten Treffgeraden e_j durch die Punkte X_j an f_1 und f_2 notwendig Erzeugenden von ϕ . Sind die Geraden e_j paarweise windschief (das bedeutet "allgemeine Lage"), dann bestimmen sie nach (a) eine ringartige Quadrik ϕ , die in die Angabe paßt, denn f_1, f_2 treffen die drei Erzeugenden e_j von \mathcal{U}_ϕ und daher nach Folg.2, Bem.a alle Geraden von $\mathcal{U}_\phi \Rightarrow f_1, f_2 \subset \phi$.

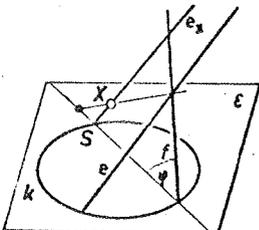
(c) Eine ringartige Quadrik ϕ wird eindeutig festgelegt durch ein windschiefes Erzeugendenvierseit und einen Punkt X , der zusammen mit den Ecken des Erzeugendenvierseits eine Fundamentalfigur bildet (vgl. Folg.4).

(d) Eine ringartige Quadrik ϕ wird eindeutig festgelegt durch einen Punktkegelschnitt k (Trägerebene ε) und zwei windschiefe Erzeugenden f_1, f_2 ($\not\subset \varepsilon$), die k treffen. Gibt es zur Angabe eine ringartige Quadrik ϕ , so ist die eindeutig bestimmte Treffgerade e an f_1 und f_2 durch einen beliebigen Punkt $X \in k$ notwendig Erzeugende von ϕ ; e ist Schnitt von $\xi_1 := Xf_1$ und $\xi_2 := Xf_2$. Diese Konstruktion ergibt für alle $X \in k$:



$f_1(\xi_1) \cap f_1 \varepsilon$ ($\xi_1 \varepsilon$) \cap $f_2 \varepsilon$ ($\xi_2 \varepsilon$) \cap $f_2(\xi_2) \Rightarrow f_1(\xi_1) \cap f_2(\xi_2)$. Diese Projektivität erzeugt einen Regulus \mathcal{U}_ϕ . Die zugehörige ringartige Quadrik ϕ trägt f_1, f_2 und ihr Durchschnitt mit ε ist der Punktkegelschnitt k .

(e) Eine ringartige Quadrik ϕ wird eindeutig festgelegt durch einen Punktkegelschnitt k (Trägerebene ε), zwei schneidende Erzeugenden e, f ($\not\subset \varepsilon$), die k treffen, und einen Punkt $X \notin \varepsilon$, der nicht in der Ebene e, f liegt; die Gerade X, ef soll k nicht treffen.



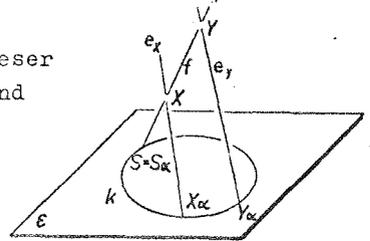
Gibt es zur Angabe eine ringartige Quadrik ϕ , so ist die Verbindungsgerade e_X von X mit dem Restschnittspunkt S der Spur von $Xf := \psi$ in ε mit k notwendig eine Erzeugende von ϕ , da sie drei Punkte von ϕ trägt (der Fall, daß $\psi \cdot \varepsilon$ Tangente

von k ist, wird in 4.4, Folg.1, Bem.c geklärt). Die Geraden $e, e_x (XY.ef)$ sind windschief (ind.: e_x schneidet e ; aus e_x schneidet f nicht in $e.f \Rightarrow X$ liegt in der Ebene ef : Widerspruch). Nach (d) bestimmen e, e_x, k genau eine ringartige Quadrik ϕ . Auch f liegt auf ϕ , denn f geht durch $f \in k \subset \phi$ und trifft e und e_x ; f trägt also drei verschiedene Punkt von ϕ .

(f) Nach Folg.6, Bem.a gilt: Die Erzeugenden eines Regulus \mathcal{U}_ϕ beziehen die Punkte eines Punktkegelschnitts k auf der zugehörigen ringartigen Quadrik ϕ und die Punkte einer aus \mathcal{U}_ϕ stammenden Erzeugenden f projektiv, wobei der gemeinsame Punkt S von k und f selbstzugeordnet ist.

Umgekehrt: Die Menge der Verbindungsgeraden zugeordneter (verschiedener) Punkte einer Projektivität α einer Punktreihe \mathcal{P}_f auf einen Punktkegelschnitt k ist in einem Regulus enthalten, falls f nicht in der Ebene von k liegt, ferner f den Punktkegelschnitt k in einem Punkt S trifft und $S=S\alpha$ gilt.

Bew.: Zu den drei pw. verschiedenen Punkten $S, X, Y \in \mathcal{P}_f$ gehören die drei pw. verschiedenen Punkte $S=S\alpha, X\alpha, Y\alpha \in k$ mit $X+X\alpha \wedge Y+Y\alpha$. Nach (d) wird durch den Punktkegelschnitt k (in ε) und die zwei Erzeugenden $e_x := XX\alpha \wedge e_y := YY\alpha$, die beide k treffen und nicht in ε liegen, eindeutig eine ringartige Quadrik ϕ bestimmt, falls e_x windschief e_y gilt. Wegen $X+Y$ können einander e_x und e_y nur in einem Punkt nicht auf f treffen, und nach Axiom I_2 existiert dann $f.X\alpha Y\alpha$; dieser Punkt in ε müßte S sein, und $S, X\alpha, Y\alpha$ sind als drei verschiedene Punkte von k nicht kollinear. Sei \mathcal{U}_ϕ der Regulus auf ϕ , der e_x und e_y enthält.



Nach Folg.6, Bem.a beziehen die Geraden von \mathcal{U}_ϕ die Punkt-

reihe f und den Punktkegelschnitt k projektiv (Projektivität $\beta: \mathcal{P}_f \rightarrow k$), wobei S selbstzugeordnet ist.

Es genügt $\alpha=\beta$ zu zeigen.

Wegen $XX\alpha=e_x \in \mathcal{U}_\phi$ und $YY\alpha=e_y \in \mathcal{U}_\phi$ gilt $X\beta=X\alpha$ und $Y\beta=Y\alpha$. Für das Tripel S, X, Y leisten also α und β dasselbe; damit gilt $\alpha=\beta$, weil in Π_{pp} der FS gilt.



Bemerkung: Die durch $S=S\alpha =S\beta$ gehende Gerade e_s von \mathcal{G}_ϕ ist als Verbindungsgerade zugeordneter Punkte nicht bestimmt, daher erhält man als Menge der Verbindungsgeraden $\{XX\alpha\}$ mit $X+X\alpha$ nur $\mathcal{G}_\phi \setminus \{e_s\}$.

(g) Nach Folg.6 werden die Punkte zweier Punktkegelschnitte k_1 und k_2 (Trägerebenen ϵ_i) auf einer ringartigen Quadrik ϕ durch die Geraden von \mathcal{G}_ϕ projektiv bezogen (Projektivität $\alpha:k_1 \rightarrow k_2$). Enthält insbesondere die Spur $a:=\epsilon_1\epsilon_2$ die Punkte S und T ($S \neq T$) von k_1 , so gilt $S\alpha = S \wedge T\alpha = T$. Nach Def.4.1c ist der Begriff projektive Kollineation $\alpha:\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2$ sinnvoll. Analog zu 4.2, Folg.4 erkennt man, daß eine Projektivität $\alpha:k_1 \rightarrow k_2$ mit $k_j \in \mathcal{R}\epsilon_i$ sich wegen PP zu genau einer projektiven Kollineation $\alpha:\mathcal{R}\epsilon_1 \rightarrow \mathcal{R}\epsilon_2$ mit $k_1\alpha = k_2$ fortsetzen läßt.



Wegen $S\alpha = S\alpha = S \wedge T\alpha = T\alpha = T$ gilt $\alpha\alpha^* = a$. Es gilt $\alpha|\mathcal{R}_a + \iota$.

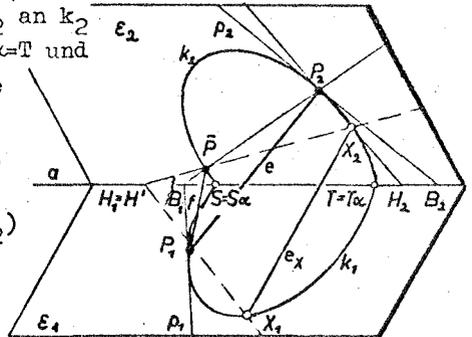
Bew.: (ind.) $\alpha|\mathcal{R}_a = \iota \xrightarrow{4.1, 4.9} \alpha$ bezieht die beiden Punktfelder $\mathcal{R}\epsilon_1$ und $\mathcal{R}\epsilon_2$ perspektiv, also liegen zugeordnete Punkte $X_1X_2\alpha$ mit einem Zentrum Z kollinear; z.B. $X_1, Y_1 \in k_1, * \wedge X_2\alpha = X_1\alpha, Y_2\alpha = Y_1\alpha \in k_2$ bestimmen Geraden $XX\alpha$ und $YY\alpha$ des Regulus \mathcal{G}_ϕ , die einander in Z schneiden: Widerspruch, denn nach Folg. 1, Bem.c sind zwei Geraden eines Regulus stets windschief. ◆

Umgekehrt: Sind zwei Kegelschnitte $k_j (C\mathcal{R}\epsilon_j, \epsilon_1 \neq \epsilon_2)$, die einander auf $a = \epsilon_1\epsilon_2$ in zwei verschiedenen Punkten S, T treffen, so in einer Projektivität $\alpha:k_1 \rightarrow k_2$ zugeordnet, daß S und T selbstzugeordnet sind und $\alpha|\mathcal{R}_a + \iota$ (wobei α wie oben die eindeutige Fortsetzung von α ist) gilt, dann folgt:

Die Menge der Verbindungsgeraden von in α zugeordneten (verschiedenen) Punkten ist in einem Regulus enthalten.

Bew.: Sei $P_1 \in k_1$ ($P_1 \neq S, T$) und $P_2 := P_1\alpha$ ($\neq P_1$). Die Tangente p_1 in P_1 an k_1 schneidet a in B_1 und die Tangente p_2 in P_2 an k_2 schneidet a in B_2 ; wegen $S\alpha = S, T\alpha = T$ und $\alpha|\mathcal{R}_a + \iota$ gilt $B_1 \neq B_2$. Daher hat die Gerade P_2B_1 mit k_2 einen von P_2 verschiedenen Restschnittpunkt \bar{P} , und es gilt

$a(H_1) \bar{P} P_1 (P_1 X_1) \bar{X} P_2 (P_2 X_2) \bar{X} a(H_2)$
mit $H_1 := P_1 X_1 \cdot a \quad \forall X_1 \in k_1 \wedge X_2 := X_1\alpha$;



$H_2 := H_1 \alpha = P_2 X_2 \cdot a \implies a(H_1) \times a(H_2)$. Diese Projektivität $\beta = \alpha | \mathcal{R}_a$ hat die Fixpunkte S, T. Außerdem gilt $a(H_2) \bar{\pi} P_2(P_2 X_2) \bar{\pi} \bar{P}(P X_2) \bar{\pi} a(H')$ mit $H' := \bar{P} X_2 \cdot a \implies a(H_2) \times a(H')$. Diese Projektivität γ hat ebenfalls die Fixpunkte S, T. Damit ist auch $\beta \gamma$ eine Projektivität mit den Fixpunkten S, T, und wie Durchlaufen obiger Ketten zeigt, gilt $B_1 \xrightarrow{\beta \gamma} B' = B_1$, sodaß wegen $B_1 + | S, T$ mit dem Fundamentalsatz $\beta \gamma = \iota$ folgt $\implies H_1 = H'$, d.h. X_2 ist der Restschnittpunkt von $\bar{P} H_1$ mit k_2 . Alle Geraden $e_x := X_1 X_2$ ($\forall X_1 \in k_1 \setminus \{S, T\}$) treffen $f := P_1 \bar{P}$, denn e_x und f liegen je in der Ebene $P_1 \bar{P} H_1$; die Geradenmenge $\{e_x = X_1 X_2 \mid X_1 \in k_1 \setminus \{S, T\}\}$ hat also eine Leitgerade f . Da $P_1 \in k_1 \setminus \{S, T\}$ beliebig ist, gibt es für $N \geq 4$ sicher drei Leitgeraden f_1, f_2, f_3 von $\{e_x\}$ und die Geraden f_1, f_2, f_3 sind pw. windschief:

(ind.) f_1 schneidet f_2 . Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

(α) Alle $e_x = X_1 X_2$ ($\forall X_1 \in k_1 \setminus \{S, T\}$) liegen in der Ebene $f_1 f_2 \implies$ alle X_1 liegen auf der Spur von $f_1 f_2$ in ε_1 : Widerspruch, denn drei Punkte von k_1 sind niemals kollinear.

(β) Alle $e_x = X_1 X_2$ ($\forall X_1 \in k_1 \setminus \{S, T\}$) gehen durch den Punkt $f_1 f_2$, d.h. ε_1 und ε_2 werden durch das Bündel \mathcal{O}_{f_1, f_2} perspektiv kollinear bezogen $\implies \alpha | \mathcal{R}_a = \iota$: Widerspruch zur Voraussetzung.

Jede Gerade aus $\{e_x = X_1 X_2\}$ trifft daher drei pw. windschiefe Geraden f_1, f_2, f_3 , und $\{e_x\}$ ist somit nach Folg.2 in einem Regulus enthalten (Die Geraden des Regulus durch S und T sind wegen $S = S \alpha$ bzw. $T = T \alpha$ durch α nicht bestimmt).

Sonderfälle $N=2$ bzw. $N=3$: Es gibt nur eine bzw. zwei Verbindungsgeraden von verschiedenen zugeordneten Punkten. Eine bzw. zwei Geraden sind stets Teilmenge eines Regulus.

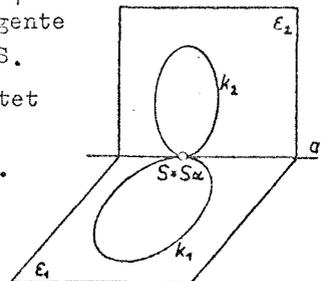


(h) Wir gehen wie in (g) von zwei Punktkegelschnitten k_i in verschiedenen Ebenen ε_i auf einer ringartigen Quadrik ϕ aus, die durch \mathcal{O}_ϕ projektiv bezogen werden (Projektivität $\alpha: k_1 \rightarrow k_2$). Ist insbesondere $a = \varepsilon_1, \varepsilon_2$ Tangente von k_1 ,

also $k_1 \cap \mathcal{R}_a = \{S\}$, dann ist a auch Tangente von k_2 , und es gilt $k_2 \cap \mathcal{R}_a = \{S\}$ und $S \alpha = S$.

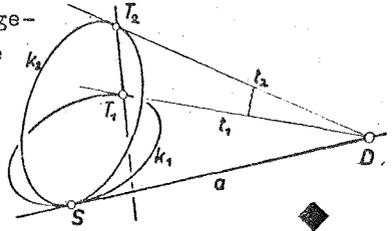
Die eindeutige Fortsetzung α von α leistet notwendig $S \alpha = S \alpha = S$ und $k_1 \alpha = k_2$, also $\alpha \alpha = a$. Es gilt wieder $\alpha | \mathcal{R}_a \neq \iota$ (im Bew.

von (g) geht die Lage von k_1 bzw. k_2 zu a nicht ein). Weiters gilt jetzt:



$\alpha|_{\mathcal{R}_a}$ ist eine parabolische Projektivität mit dem (einzigen) Fixpunkt S.

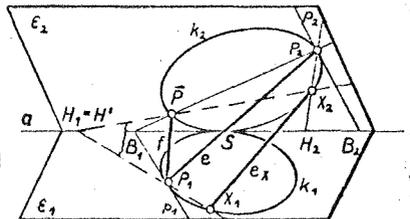
Bew.: (ind.) Besitzt $\alpha|_{\mathcal{R}_a}$ einen von S verschiedenen weiteren Fixpunkt D, so berühren die von a verschiedenen Tangenten t_1 bzw. t_2 aus D an k_1 bzw. k_2 diese Kegelschnitte in eindeutig bestimmten Punkten T_1 bzw. T_2 , die in α zugeordnet sind. Die Gerade $T_1T_2 \in \mathcal{U}_\phi$ gehört zum Schnitt $\phi \cap (t_1t_2)$. Die Ebene t_1t_2 trägt genau je einen Punkt von k_1 und k_2 , schneidet daher ϕ nur in der Geraden T_1T_2 : Widerspruch zu Folg. 3a.



Umgekehrt: Berühren zwei Punktkegelschnitte k_i in verschiedenen Ebenen ϵ_i die Spur $a := \epsilon_1 \epsilon_2$ im gleichen Punkt S und sind sie so projektiv bezogen (Projektivität $\alpha: k_1 \rightarrow k_2$, wieder sei $\alpha: \mathcal{R}_{\epsilon_1} \rightarrow \mathcal{R}_{\epsilon_2}$ die eindeutige Fortsetzung von α), daß gilt
 (1) $S\alpha = S$ ($\Rightarrow a\alpha^* = a$)
 (2) $\alpha|_{\mathcal{R}_a}$ ist eine parabolische Projektivität mit dem Fixpunkt S, so folgt:

Die Menge der Verbindungsgeraden von in α zugeordneten (verschiedenen) Punkten ist in einem Regulus enthalten.

Bew.: Sei $P_1 \in k_1 (P_1 \neq S)$ und $P_1\alpha =: P_2 (\neq P_1)$. Durch α ist α und damit $\alpha|_{\mathcal{R}_a}$ bestimmt. Für die Tangenten p_j in P_j an k_j gilt $p_1\alpha^* =: p_2$; $\alpha\alpha^* = a \Rightarrow p_1a =: B_1 (\neq S) \mapsto B_2 =: p_2a$ und wegen $\alpha|_{\mathcal{R}_a} \neq \text{id} \Rightarrow B_1 \neq B_2$. Die Gerade B_1P_2 schneidet k_2 in einem von P_2 verschiedenen Restschnittpunkt \bar{P} . Sei X_1 beliebig aus $k_1 \setminus \{S\}$ und $P_1X_1 \cdot a =: H_1$, $X_1\alpha =: X_2 \in k_2$, so gilt



$a(H_1) \neq P_1 (P_1X_1) \neq P_2 (P_2X_2) \neq a(H_2)$ mit $H_2 := H_1\alpha = P_2X_2 \cdot a \Rightarrow \Rightarrow a(H_1) \neq a(H_2)$. Diese Projektivität $\beta := \alpha|_{\mathcal{R}_a}$ ist nach Voraussetzung parabolisch. Außerdem gilt $a(H_2) \neq P_2 (P_2X_2) \neq \bar{P} (\bar{P}X_2) \neq a(H_1)$ mit $H_1' := \bar{P}X_2 \cdot a \Rightarrow a(H_2) \neq a(H_1')$. Diese Projektivität γ ist parabolisch mit dem Fixpunkt S, denn a ist Tangente an k_2 in S.

Das Produkt $\beta \gamma$ zweier parabolischer Projektivitäten mit demselben Fixpunkt S ist entweder die Identität oder wieder eine parabolische Projektivität mit dem Fixpunkt S (dies erkennt man sofort durch Einbetten von β und γ in ebene Elationen aus $PGL(S, z | SIz$ mit $z \neq a$) und durch Anwendung des Satzes 1.4 auf diese Elationen). $B_1 \stackrel{\beta \gamma}{=} B' = B_1 \Rightarrow \beta \gamma = \iota$, denn $\beta \gamma$ hat die beiden verschiedenen Fixpunkte B_1 und $S \Rightarrow H_1 = H'$, d.h. X_2 ist der Restschnittpunkt von \overline{PH}_1 mit k_2 . Alle Geraden $e_x := X_1 X_1 \alpha$ ($\forall X_1 \in k_1 \setminus \{S\}$) treffen $f := P_1 \overline{P}$, denn e_x und f liegen je in der Ebene $P_1 \overline{P} H_1$. Da $P_1 \in k_1 \setminus \{S\}$ beliebig ist, gibt es für $N \geq 3$ sicher drei Leitgeraden f_1, f_2, f_3 von $\{e_x\}$. Die Geraden f_1, f_2, f_3 sind pw. windschief (wie in (g) einzusehen) $\Rightarrow \{e_x\}$ ist in einem Regulus enthalten (Die Regulusgerade durch S wird durch α nicht erfaßt).
Sonderfall: $N=2$ wie in (g).

Bemerkung: Der Fall, daß a den Punktkegelschnitt k_1 und damit auch k_2 nicht trifft (a ist Passante von k_1 und k_2), wird am Ende von 5.7 behandelt.

SATZ 4.3: Jeder Regulus ist bijektiv zu einer Punktreihe und besteht aus allen Treffgeraden von drei paarweise windschiefen Leitgeraden; die Menge aller Leitgeraden ist der ergänzende Regulus. Je zwei Geraden eines Regulus sind windschief, je zwei Geraden aus ergänzenden Reguli schneiden einander. Alle Geraden eines Regulus schneiden je zwei Geraden des ergänzenden Regulus in projektiven Punktfolgen und werden aus je zwei Geraden des ergänzenden Regulus durch projektive Ebenenbüschel projiziert. Jede ringartige Quadrik wird von jeder Ebene, die keine Erzeugende trägt, in einem Punktkegelschnitt geschnitten. Je zwei ringartige Quadriken sind projektiv kollinear.

4.4. Polarsystem einer ringartigen Quadrik

Seien ϕ eine ringartige Quadrik des dreidimensionalen PP -Raumes \mathbb{T}_{PP} und \mathcal{Q}_ϕ bzw. \mathcal{Q}_ϕ^* die zu ϕ gehörenden, einander ergänzenden Reguli. Nach 4.3, Folg.3 gilt für eine Ebene π , die eine Gerade $x \in \mathcal{Q}_\phi$ enthält: $\pi \cap \phi = \mathcal{R}_x \cup \overline{\mathcal{R}_x}$ mit $\overline{x} \in \mathcal{Q}_\phi^*$.

DEF. 4.4 a: Jede Ebene π durch eine Erzeugende x einer ringartigen Quadrik ϕ heißt Tangentialebene von ϕ und der Schnittpunkt P der beiden Erzeugenden in π heißt der Berührungspunkt von π . Jede Gerade des Büschels $\mathcal{G}_{P,\pi}$ heißt Tangente von ϕ in P (bzw. in π).

Bemerkungen: (a) Zu jeder Tangentialebene π existiert nach Def. 4.4 a genau ein Berührungspunkt.

(b) Umgekehrt: Zu jedem Punkt P einer ringartigen Quadrik ϕ existiert genau eine Tangentialebene π so, daß P der Berührungspunkt von π ist. Sind nämlich $x \in \mathcal{G}_\phi \wedge \bar{x} \in \mathcal{G}_\phi$ die beiden Erzeugenden durch P , so ist $\pi := x\bar{x}$ eine Tangentialebene von ϕ und ihr Berührungspunkt ist P . Jede weitere solche Tangentialebene geht notwendig durch x oder \bar{x} ; enthält sie z.B. x , so noch eine Erzeugende $\bar{y} \in \mathcal{G}_\phi$, welche nach Satz 4.3 windschief \bar{x} ist und daher nicht durch P geht.

(c) Regulus ist nach 4.3, Folg. 1 ein selbstdualer Begriff. D_3 -dual zur Punktmenge einer ringartigen Quadrik ϕ , also zur Menge der Punkte, die mit den Geraden eines Regulus \mathcal{G}_ϕ inzidieren, ist die Menge der Ebenen, die mit den Geraden eines Regulus inzidieren, d.i. also die Menge der Tangentialebenen von ϕ .

(d) Man kann somit etwa die folgende Aussage aus 4.3, Folg. 3 dualisieren: Eine Ebene α , welche keine Erzeugende der ringartigen Quadrik ϕ enthält (d.h. α ist keine Tangentialebene von ϕ), hat mit ϕ einen Punktkegelschnitt gemeinsam. D_3 -dual:

Die Menge aller Tangentialebenen einer ringartigen Quadrik ϕ durch einen Punkt A nicht auf ϕ bildet einen quadratischen Ebenenkegel ("Tangentialebenenkegel" zur Spitze A).

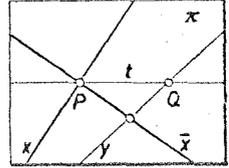
(e) Tangente ist ein selbstdualer Begriff. Jede Erzeugende ist eine Tangente.

Folgerungen:

1) Eine Gerade ist genau dann Tangente einer ringartigen Quadrik ϕ , wenn sie entweder eine Erzeugende ist oder genau einen Punkt von ϕ enthält. Alle ebenen Schnitte durch einen Punkt P von ϕ haben in P Tangenten, welche Tangenten von ϕ (im Sinne von Def. 4.4a) sind.

Bemerkung: Die zweite Aussage ausführlicher formuliert besagt: Ist α keine Tangentialebene der ringartigen Quadrik ϕ , so sind die Tangenten des Punktkegelschnitts $\phi \cap \alpha$ auch Tangenten von ϕ . Ist α dagegen Tangentialebene von ϕ , so gilt nach 4.3, Folg. 3: $\alpha \cap \phi = \mathcal{R}_x \cup \mathcal{R}_{\bar{x}}$ mit $x \in \mathcal{G}_\phi \wedge \bar{x} \in \mathcal{G}_\phi$; gemäß der in 4.2, Folg. 3 eingeführten Sprechweise ist eine Gerade in jedem ihrer Punkte ihre eigene Tangente, also ist in diesem Fall die Aussage richtig.

Bew.: (a) Sei t eine Tangente der ringartigen Quadrik ϕ in der Tangentialebene π mit dem Berührungspunkt P , also $t \in \mathcal{U}_{P,\pi}$. In π liegen die Erzeugenden $x \in \mathcal{U}_\phi \wedge \bar{x} \in \bar{\mathcal{U}}_\phi$. Gilt $t=x$ bzw. $t=\bar{x}$ ist man fertig. Gilt $t \neq x, \bar{x}$, so ist $\mathcal{R}_t \cap \phi = \{P\}$ zu zeigen.



(ind.) $\exists Q \in \mathcal{R}_t \cap \phi$ mit $Q \neq P$; nach 4.3 geht durch $Q \in \phi$ genau eine Gerade $y \in \mathcal{U}_\phi$, und $y \in \mathcal{U}_\phi$ trifft nach 4.3, Folg.2, Bem.c $\bar{x} \in \bar{\mathcal{U}}_\phi \Rightarrow y \perp \bar{x} \Rightarrow \phi \cap \pi = \mathcal{R}_x \cup \mathcal{R}_{\bar{x}} \cup \mathcal{R}_y$ mit x, \bar{x}, y pw. verschieden: Widerspruch zu 4.3, Folg.3.

(b) Bevor wir die Umkehrung der ersten Aussage zeigen, beweisen wir die zweite Aussage.

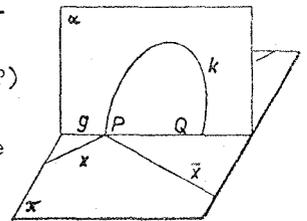
Seien $P \in \phi$ und α eine beliebige Ebene durch P ; x, \bar{x} seien die beiden Erzeugenden von ϕ durch P , welche die Tangentialebene π von P aufspannen; für α sind folgende drei Fälle möglich:

Fall 1: $\alpha = \pi \xrightarrow{4.3, F.3} \alpha \cap \phi = \mathcal{R}_x \cup \mathcal{R}_{\bar{x}}$ und x, \bar{x} sind einerseits ihre eigenen Tangenten in jedem ihrer Punkte und andererseits Tangenten von ϕ im Sinne von Def.4.4a.

Fall 2: $\alpha \neq \pi \wedge \alpha \perp x \xrightarrow{4.3, F.3} \alpha \cap \phi = \mathcal{R}_x \cup \mathcal{R}_{\bar{y}}$ mit $\bar{y} \in \bar{\mathcal{U}}_\phi$ und $\bar{y} \perp P$, also wie Fall 1.

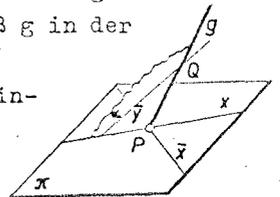
Fall 3: $\alpha \neq \pi \wedge \alpha \not\perp x, \bar{x}$: Dann kann α keine Erzeugende von ϕ enthalten: (ind.) $\exists y \in \mathcal{U}_\phi$ mit $y \perp \alpha \Rightarrow y$ trifft $\bar{x} \in \bar{\mathcal{U}}_\phi$. Wegen $\bar{x} \perp P \Rightarrow y \perp P \Rightarrow y$ trifft $x \in \mathcal{U}_\phi$: Widerspruch zu 4.3, Folg.2, Bem.c.

Nach 4.3, Folg.3 ist daher $\phi \cap \alpha =: k$ ein Punktkegelschnitt mit $P \in k$. Es ist zu zeigen, daß $\alpha \perp \pi =: g$ eine Tangente von k ist: (ind.) $\exists Q (\neq P)$ mit $Q \in k \wedge Q \perp g \Rightarrow Q \in \phi$: Widerspruch, da g eine Tangente von ϕ ist, die keine Erzeugende ist, und nach Beweisschritt (a) daher genau einen Punkt von ϕ trägt.



(c) Umkehrung der ersten Aussage: Sei g eine beliebige Gerade, die mit der ringartigen Quadrik ϕ genau den Punkt P gemeinsam hat: $g \cap \phi = \{P\}$. Es ist zu zeigen, daß g in der Tangentialebene π von P liegt.

(ind.) $g \not\perp \pi$; in π liegen $x \in \mathcal{U}_\phi \wedge \bar{x} \in \bar{\mathcal{U}}_\phi$, und die eindeutig bestimmte Ebene $gx =: \alpha$ ist wegen $x \perp \alpha$ Tangentialebene von ϕ . Somit gilt nach 4.3, Folg.3: $\phi \cap \alpha = \mathcal{R}_x \cup \mathcal{R}_{\bar{y}}$ mit $\bar{y} \in \bar{\mathcal{U}}_\phi \Rightarrow \bar{y}$ trifft \bar{x} nicht $\Rightarrow \bar{y} \perp P \Rightarrow \bar{y}$ schneidet g in einem von P verschiedenen Punkt $Q (\in \phi)$. Die Gerade g trägt also im Widerspruch zur Voraussetzung zwei verschiedene Punkte von ϕ , nämlich P und Q .



Bemerkungen: (a) Die Tangentialebene π im Punkt P der ringartigen Quadrik ϕ kann auch durch verschiedene Tangenten in P an zwei ebene Schnitte durch P aufgespannt werden.

(b) Nach Folg.1 gilt: Trifft eine Tangente eine Erzeugende, die den Berührungspunkt der Tangente nicht enthält, so ist die Tangente eine Erzeugende.

(c) Ergänzend zu 4.3, Folg.7e kann nun der Sonderfall erledigt werden, daß (in der dortigen Bezeichnung) φ 's Tangente an k ist, also $S=e_x f$ gilt. In diesem Fall liegt f auch auf der durch e, e_x, k bestimmten ringartigen Quadrik ϕ , da dann f eine Tangente von ϕ in ft ist, welche e trifft, also nach Bemerkung b eine Erzeugende von ϕ ist.

(d) D_3 -dual gilt: Eine Gerade ist genau dann Tangente einer ringartigen Quadrik ϕ , wenn sie entweder eine Erzeugende ist oder genau eine Tangentialebene von ϕ enthält. Die Erzeugenden eines Tangentialebenenkegels sind Tangenten der ringartigen Quadrik ϕ .

(e) Jede Nichttangente g hat mit einer ringartigen Quadrik zwei oder keine Punkte gemeinsam.

Bew.: Wir legen durch g eine beliebige Ebene α und unterscheiden

Fall 1: α ist Tangentialebene von $\phi \Rightarrow \phi \cap \alpha = \mathcal{P}_x \cup \mathcal{P}_{\bar{x}}$ und die Nichttangente g geht nicht durch P.

Aus $\mathcal{P}_g \subset \mathcal{P}_\alpha$ folgt: $\phi \cap \mathcal{P}_g = \phi \cap \mathcal{P}_\alpha \cap \mathcal{P}_g = (\mathcal{P}_x \cup \mathcal{P}_{\bar{x}}) \cap \mathcal{P}_g$.

Die Erzeugenden x und \bar{x} haben aber mit g genau zwei Punkte gemeinsam.

Fall 2: α ist keine Tangentialebene von $\phi \Rightarrow \phi \cap \alpha$ ist ein Punktkegelschnitt k. Wegen $\mathcal{P}_g \subset \mathcal{P}_\alpha \Rightarrow \phi \cap \mathcal{P}_g = \phi \cap \mathcal{P}_\alpha \cap \mathcal{P}_g = k \cap \mathcal{P}_g$.

Die Gerade g ist keine Tangente von k (sonst wäre sie nach Folg.1 Tangente von ϕ) und daher haben k und g zwei oder keine Punkte gemeinsam.



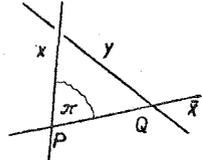
Aus Fall 1 folgt: Enthält eine Nichttangente eine Tangentialebene, dann schneidet sie ϕ in zwei getrennten Punkten. D_3 -dual ist zu zeigen: Durch jede Nichttangente gehen zwei oder keine Tangentialebenen einer ringartigen Quadrik ϕ . Enthält eine Nichttangente einen Punkt von ϕ , dann gehen durch sie zwei verschiedene Tangentialebenen von ϕ .

2) Sei $x \in \mathcal{U}_\phi$ eine Erzeugende der ringartigen Quadrik ϕ . Zu jedem Punkt $P \in \mathcal{P}_x$ gehört nach Bem.a eine eindeutige Tangentialebene $\pi \in \mathcal{L}_x$, sodaß eine globale Abbildung $\alpha_x: \mathcal{P}_x \rightarrow \mathcal{L}_x$ vorliegt.

Ordnet man jedem Punkt P einer Erzeugenden x einer ringartigen Quadrik ϕ die Tangentialebene π in P zu, so ist die Reihe \mathcal{P}_x projektiv zum Ebenenbüschel \mathcal{L}_x der Tangentialebenen. Diese Projektivität α_x heißt "Berührprojektivität" längs x.

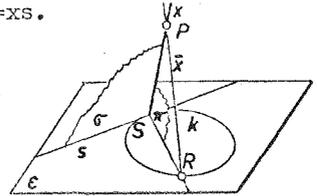
Bemerkung: Gelegentlich heißt α_x auch "Berührkorrelation". Wir vermeiden diese Bezeichnung, denn α_x ist keine Korrelation im Sinne von Def. 3.9 a, weil α_x keine globale Abbildung $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$ ist.

Bew.: $x, y \in \overline{U}_{\phi, \neq} \Rightarrow x$ windschief y . Eine Erzeugende $\bar{x} \in \overline{U}_{\phi}$ trifft x in P und y in Q . Der Regulus \overline{U}_{ϕ} kann durch $x(P) \wedge y(Q)$ erzeugt werden. Die Tangentialebene π in P wird durch x, \bar{x} aufgespannt und es gilt $\pi y = Q \Rightarrow x(P) \wedge y(Q) \wedge x(\pi) \Rightarrow x(P) \wedge x(\pi)$.



3) Ist x eine Erzeugende einer ringartigen Quadrik ϕ und ϵ eine Nichttangentelebene von ϕ , so ist $\epsilon \cap \phi$ ein Punktkegelschnitt k , der von x in einem Punkt S getroffen wird. Nach Folg. 1, Bem. a kann die Tangentialebene σ von ϕ in S durch x und die Tangente s von k in S aufgespannt werden. Die Berührprojektivität α_x von x leistet also $S \xrightarrow{\alpha_x} \sigma := xs$.

Wir wollen nun der Folgerung 7 aus 4.3 eine weitere Angabe einer ringartigen Quadrik hinzufügen.



Eine ringartige Quadrik ϕ ist eindeutig festgelegt durch eine Erzeugende x samt ihrer Berührprojektivität α_x und einen Punktkegelschnitt k , wenn gilt:

- (I) x liegt nicht in der Trägerebene ϵ von k
- (II) x trifft k in einem Punkt S
- (III) Die durch die Tangente s in S an k und durch x aufgespannte Ebene σ ist in der Berührprojektivität α_x dem Punkt S zugeordnet.

Bew.: Gibt es eine ringartige Quadrik ϕ zur Angabe, so schickt ϕ durch einen Punkt $P \in \mathcal{P}_x \setminus \{S\}$ eine Erzeugende \bar{x} , welche notwendig k trifft und in der Tangentialebene π von P liegt; \bar{x} verbindet also P und den Restschnittpunkt R von π mit k . Führt man diese Konstruktion für alle Punkte $P \in \mathcal{P}_x \setminus \{S\}$ durch, so erhält man die Kette

$$x(P) \bar{x} x(\pi) \wedge S(\pi) \wedge k(R).$$

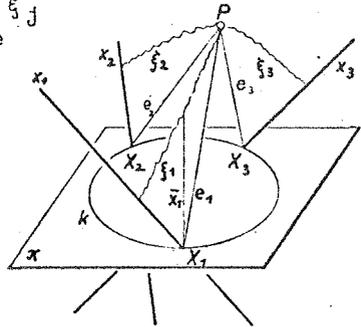
In dieser Projektivität $\beta: \mathcal{P}_x \rightarrow k$ ist S selbstzugeordnet. Nach 4.3, Folg. 7 f gehört daher die Menge aller Geraden $\bar{x} = PR = RP \beta(P \neq S)$ einem Regulus \overline{U}_{ϕ} an. Die zu \overline{U}_{ϕ} gehörige ringartige Quadrik ϕ paßt in die Angabe, wie aus obiger Kette ersichtlich ist, und ist nach Konstruktion eindeutig bestimmt.

Wir setzen im folgenden einen klassischen projektiven Raum \mathbb{P}_k voraus.

4) Nach Bem. d zu Def.4.4 a bildet die Menge aller Tangentialebenen einer ringartigen Quadrik Φ durch einen Punkt $P \notin \Phi$ einen quadratischen Ebenenkegel. In \mathbb{P}_k ist die Menge der Erzeugenden eines quadratischen Ebenenkegels ein quadratischer Geradenkegel (vgl.4.2). In \mathbb{P}_k dürfen wir daher kurz vom "Tangentialekegel" Γ_P mit der Spitze P sprechen. Nach Folg.1, Bem. b sind die Erzeugenden von Γ_P Tangenten von Φ und jede solche hat nach Folg.1 mit Φ genau einen Punkt gemeinsam; dieser Punkt ist zugleich Berührungspunkt der Tangentialebene durch die betreffende Erzeugende von Γ_P mit Φ . Wir wollen nun die Menge dieser Berührungspunkte untersuchen.

Alle Berührungspunkte der Tangentialebenen eines Tangentialekells Γ_P mit $P \notin \Phi$ erfüllen einen Kegelschnitt in einer Ebene π , welche keine Tangentialebene von Φ ist und $\pi \not\perp P$ gilt.

Bew.: Wir greifen drei Erzeugenden $x_j \in \mathcal{U}_\Phi$ einer Schar auf Φ heraus. Die Ebenen $\xi_j = x_j P$ sind Tangentialebenen von Φ durch P ; der eindeutige Berührungspunkt von ξ_j mit Φ heiße X_j ($j=1,2,3$). Jede Gerade $PX_j =: e_j$ trägt als Tangente von Φ nach Folg.1 genau einen Punkt X_j und ist notwendig Erzeugende von Γ_P : Die Erzeugende e_j von Γ_P in ξ_j ist nämlich nach Folg.1, Bem.(b) Tangente von Φ , und die Tangenten von Φ in ξ_j gehen alle durch X_j .



X_1, X_2, X_3 sind nicht kollinear, denn sie liegen auf e_1, e_2, e_3 und e_j sind als Erzeugenden eines quadratischen Geradenkegels nicht komplanar. Somit ist die Ebene $\pi := X_1 X_2 X_3$ eindeutig festgelegt.

$P \not\perp \pi$: (ind.) $P \perp \pi$. Aus $P \notin \Phi$, also $P * X_j \Rightarrow e_j = PX_j \perp \pi$ ($j=1,2,3$): Widerspruch, denn e_j sind nicht komplanar.

π ist keine Tangentialebene von Φ : (ind.) π ist Tangentialebene $\stackrel{4.3, F3}{\Rightarrow} \Phi \cap \pi = \mathcal{R}_\alpha \cup \mathcal{R}_\beta$ mit $\alpha \in \mathcal{U}_\Phi \wedge \beta \in \overline{\mathcal{U}}_\Phi$. Es gilt $X_1, X_2, X_3 \in \Phi \cap \pi$, also müssen zwei der Punkte X_j auf einer Erzeugenden liegen und mindestens ein X_k auf einer Erzeugenden $\alpha \in \mathcal{U}_\Phi$ (da nicht alle X_j auf $\overline{\mathcal{U}}_\Phi$ liegen können) $\Rightarrow X_k = \alpha \cdot x_k$: Widerspruch zu α windschief x_k (vgl. 4.3, Folg.2, Bem.c).

Nach 4.3, Folg.3 ist $\phi \cap \pi =: k$ ein Kegelschnitt, nach 4.2 ist $\Gamma_P \cap \pi =: k^*$ ein Kegelschnitt. Wir zeigen zunächst $k=k^*$.

$X_j \in k \wedge X_j \in k^*$ für $j=1,2,3$. Die Tangente t_j an k in X_j ist nach Folg.1 die Schnittgerade von π mit der Tangentialebene ξ_j in X_j an ϕ , also $t_j = \xi_j \cap \pi$. Die Tangente t_j^* an k^* in X_j ist nach 4.2, Folg.3, Bem.a die Schnittgerade von π mit der Tangentialebene ξ_j^* an Γ_P in X_j ; wegen $\xi_j^* = \xi_j$ ist $t_j^* = t_j$. Die Kegelschnitte k und k^* haben also drei Linienelemente gemeinsam $\Rightarrow k=k^*$.

Nun ist noch zu zeigen: Der Kegelschnitt k ist die Menge aller Berührungspunkte der Tangentialebenen von Γ_P .

(a) Vs.: $X \in k$. Zu zeigen: Die Tangentialebene ξ von X bezüglich ϕ geht durch P .

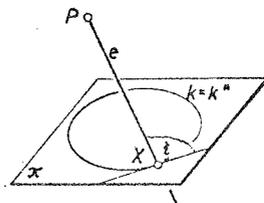
$X \in k \Rightarrow X \in k^* = \Gamma_P \cap \pi \Rightarrow X$ liegt auf einer Erzeugenden e von Γ_P ; nach Folg.1, Bem.(b) ist e Tangente von ϕ in X ($e \in \phi$) und die Tangente t in X an k ist nach Folg.1 ebenfalls Tangente von ϕ in X , also wird die Tangentialebene ξ an ϕ in X durch e und t aufgespannt. Aus $e \cap \pi \wedge e \cap \xi$ folgt $P \in \xi$.

(b) Vs.: ξ ist eine Tangentialebene von Γ_P (und damit von ϕ). Zu zeigen: Der Berührungspunkt X von ξ liegt auf k .

In der Tangentialebene ξ von Γ_P existiert genau eine Kegelerzeugende e . Nach Folg.1, Bem.(b) ist e Tangente von ϕ und trägt

daher genau einen Punkt von ϕ ; dieser Punkt ist notwendig der Berührungspunkt X von ξ ($\perp e$) mit ϕ . Der einzige Punkt auf e und ϕ ist der Durchstoßpunkt $e \cap \pi$, denn es gilt

$e \cap \pi \in \Gamma_P \cap \pi = k^* = k \subset \phi \Rightarrow e \cap \pi \in \phi$. Also folgt $e \cap \pi = X \Rightarrow X \in k$.



Bemerkungen: (a) D_3 -dual: Alle Tangentialebenen in den Punkten eines Schnittkegelschnitts in einer Nichttangentialebene π der ringartigen Quadrik ϕ erfüllen einen quadratischen Kegel, dessen Spitze P nicht auf ϕ liegt, wobei $P \notin \pi$ gilt.

(b) Unter Benützung von bekannten Begriffsbildungen der Darstellenden Geometrie gilt: Für jedes Auge nicht auf einer ringartigen Quadrik ist der wahre bzw. der scheinbare Umriß je ein Kegelschnitt.

(c) Es war hier notwendig, einen klassischen projektiven Raum vorauszusetzen, denn in einem \mathbb{P}_{pp} , in welchem der Satz von Fano nicht gilt, bildet die Menge der Erzeugenden eines quadratischen Ebenenkegels ein Geradenbüschel (vgl. auch 2.1, Folg. 8, Anw. b).

5) Es ist nun naheliegend, jedem Punkt $P(\notin \phi)$ die Träger-ebene π des Berührkegelschnitts k von Γ_p zuzuordnen. Analog existiert im ebenen Polarsystem eines Kegelschnitts eine Zuordnung, die jedem Punkt P außerhalb von k die Trägergerade p der Berührungspunkte der aus P an k legbaren Tangenten zuordnet. Im Gegensatz dazu funktioniert nach Folg. 4 im Raum diese Zuordnung sogar für alle Punkte $(\notin \phi)$; man kann daher sagen, daß es bezüglich einer ringartigen Quadrik ϕ nur Außenpunkte gibt. Wir wollen jedoch für die Definition des Polarsystems einer ringartigen Quadrik eine andere (zum ebenen Fall analoge) Eigenschaft verwenden.

Die harmonische Homologie $\sigma_p(P, \pi)$ führt ϕ in sich über.

Bew.: Wir haben zu zeigen: $\forall X \in \phi \Rightarrow X \sigma_p \in \phi$. Dazu unterscheiden wir die zwei Fälle:

Fall 1: $X \in k = \phi \cap \pi \Rightarrow X \in \pi \Rightarrow X \sigma_p = X \in \phi$.

Fall 2: $X \notin k$. Aus $X \in \phi$ folgt $X \neq P \Rightarrow$

$\exists^* XP$ und XP ist keine Erzeugende von Γ_p ,

da eine Erzeugende von Γ_p auch

Tangente von ϕ ist und genau einen

Punkt von ϕ und zwar auf k trägt, was jedoch $X \in \phi \wedge X \notin k$

widerspricht. Nach 4.2 gehen daher durch XP höchstens zwei

Tangentialebenen von Γ_p . Man kann also eine Erzeugende $e_1 \in \Gamma_p$

so wählen, daß die Ebene $\varepsilon := e_1 \cdot PX$ keine Tangentialebene von Γ_p

ist; eine solche Ebene enthält nach 4.2 noch eine zweite

Erzeugende $e_2 \in \Gamma_p$. Die Erzeugenden e_1 und e_2 treffen π in

den Punkten E_1 und E_2 von k , welche auf der Geraden $p := \varepsilon \cap \pi$

liegen. ε ist keine Tangentialebene von ϕ , denn ε geht durch

P und alle Tangentialebenen von ϕ durch P bilden Γ_p , während

ε keine Tangentialebene von Γ_p ist. $\varepsilon \cap \phi =: l$ ist daher

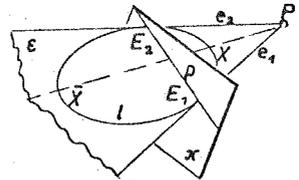
ein Kegelschnitt und es gilt: $X, E_1, E_2 \in l$. Die Tangente in E_j

an l ergibt sich nach Folg. 1 als Schnitt von ε mit der

Tangentialebene ε_j in E_j an ϕ . Da aber e_j Tangente an ϕ ist

(Folg. 1, Bem. b), geht ε_j durch e_j , also ist e_j Tangente

an l in E_j . Daher gilt für den Restschnittpunkt X von PX



mit ϕ bzw. $l: H(X, \bar{X}; P, p)$ bzw. $H(X, \bar{X}; P, \pi) \Rightarrow \bar{X} = X\sigma_p$, und es gilt $\bar{X} = X\sigma_p \in l \subset \phi$.

Bemerkung: Gewisse Punkte von π haben die Eigenschaft $H(X, X\sigma_p; P, \pi)$ mit $X \in \phi$. Sprechweise: "Punkte von π liegen harmonisch zum Zentrum P bezüglich ϕ " (vgl. 2.3).

DEF. 4.4 b: Die Abbildung $\lambda_\phi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}$ erklärt durch

- (1) $P \notin \phi: P\lambda_\phi$ ist die Achse der automorphen harmonischen Homologie von ϕ mit Zentrum P,
- (2) $P \in \phi: P\lambda_\phi$ ist die Tangentialebene von ϕ in P heißt Polarsystem der ringartigen Quadrik ϕ .

Bemerkung: Wir haben noch zu überprüfen, ob λ_ϕ eine Abbildung ist. Nach Bem. b zu Def. 4.4 a existiert zu $P \in \phi$ eine eindeutige Tangentialebene. Für $P \notin \phi$ ist zu zeigen, daß die Achse der automorphen harmonischen Homologie mit Zentrum P (die nach Folg. 5 existiert) eindeutig bestimmt ist (damit ist auch die automorphe harmonische Homologie mit Zentrum P eindeutig bestimmt).

Eine beliebige Erzeugende e von Γ_P berührt ϕ in genau einem Punkt $X(e \in \pi)$. Für jede harmonische automorphe Homologie σ mit Zentrum P ist e Kollineationsstrahl, der als Ganzes festbleibt; da ϕ unter σ festbleiben soll, folgt $X\sigma = X$. Also bleibt unter σ notwendig die Menge aller Berührungspunkte X, also der Kegelschnitt k punktweise fest, und damit ist $\sigma|_{\mathcal{P}\pi} = \iota \Rightarrow$ die Trägerebene π des Berührkegelschnitts k ist die Achse von σ .

6) Das Polarsystem einer ringartigen Quadrik ist eine Polarität.

Bew.: Da λ_ϕ global ist, haben wir nach Def. 3.9 b noch zu zeigen: $P \in \mathcal{P}\lambda_\phi =: \varrho \Rightarrow R \in \mathcal{P}\lambda_\phi =: \pi \quad \forall P, R \in \mathcal{P}$.

Dabei unterscheiden wir:

Fall 1: $P, R \in \phi \Rightarrow \pi$ und ϱ sind die Tangentialebenen von P und R $\Rightarrow \phi \cap \varrho = \mathcal{P}_x \cup \mathcal{P}_{\bar{x}}$. Aus $P \in \varrho \wedge P \in \phi$ folgt o.B.d.A. $P \in x$. Die Tangentialebene π in P an ϕ enthält daher die Erzeugende x durch P, also gilt $R \in \pi$ wegen $R = x.\bar{x}$.

Fall 2: $P \in \phi \wedge R \notin \phi \Rightarrow \varrho$ ist keine Tangentialebene von $\phi \Rightarrow \phi \cap \varrho =: l$ ist ein Kegelschnitt. Aus $P \in \varrho \wedge P \in \phi$ folgt $P \in l$. Alle Tangentialebenen an ϕ in Punkten von l gehen nach Folg. 4, Bem. a durch R, also geht insbesondere die Tangentialebene π in P durch R.

Fall 3: $P \notin \phi \wedge R \in \phi \Rightarrow \varrho$ ist Tangentialebene von ϕ . Der Tangentialkegel Γ_P aus P an ϕ wird von ϱ berührt und PR ist Erzeugende von Γ_P , welche Tangente von ϕ ist und daher mit ϕ genau den Punkt R gemeinsam hat. Nach Folg.4 geht π durch die Berührungspunkte aller Erzeugenden von Γ_P mit ϕ , also geht π insbesondere durch R.

Fall 4: $P \notin \phi \wedge R \notin \phi$: Der Tangentialkegel Γ_P aus P an ϕ berührt ϕ längs $\phi \cap \pi = \Gamma_P \cap \pi =: k$. Wegen $P \notin \varrho$ läßt die harmonische Homologie σ_R den Punkt P fest. Außerdem gilt $\Gamma_P \sigma_R = \Gamma_P$, da nämlich $\phi \sigma_R = \phi$ nach Folg.5, und Tangentialebenen von ϕ bei σ_R notwendig in Tangentialebenen von ϕ übergehen; Γ_P besteht aber aus allen durch P gehenden Tangentialebenen von ϕ . $\phi \sigma_R = \phi \wedge \Gamma_P \sigma_R = \Gamma_P \Rightarrow k = \phi \cap \Gamma_P$ bleibt unter σ_R fest \Rightarrow die Trägerebene π von k bleibt unter σ_R als Ganzes fest. Da wegen $\pi \not\perp P \wedge \varrho \not\perp P$ folgt $\pi \neq \varrho$, ist π nicht Achse von σ_R und daher geht π durch das Kollineationszentrum R von σ_R .

Bemerkung: Im Vergleich mit 2.3,Folg.1 ist dieser Beweis einfacher, da Fall 4 nicht in Unterfälle zerfällt; jeder Punkt P ($\notin \phi$) ist nämlich ein Außenpunkt von ϕ .

7) Jeder dreidimensionale klassische projektive Raum gestattet eine Korrelation.

Bew.: In \mathbb{P}_K^3 existiert ein Regulus $\Rightarrow \exists$ ringartige Quadrik $\phi \Rightarrow \exists$ Polarsystem λ_ϕ . Nach Folg.6 ist λ_ϕ eine Polarität und eine solche ist nach Satz 3.9 eine (selbstadjungierte) Korrelation.

Daher gilt nach 3.9,Folg.2: $\mathbb{P}_{K^*}^3$ ist isomorph zu seinem Dualraum $\mathbb{P}_{K^*}^3$, und die zugehörigen Körper K und K^* sind isomorph (vgl. 3.9, Folg.2,Bem. a); außerdem ist $\text{PFL}(\mathbb{P}_{K^*}^3)$ isomorph $\text{PFL}(\mathbb{P}_K^3)$ (vgl. 3.9,Folg.2,Bem. c).

SATZ 4.4: In \mathbb{P}_{pp} erfüllen alle Tangentialebenen einer ringartigen Quadrik ϕ durch einen Punkt nicht auf ϕ einen quadratischen Ebenenkegel und die Reihe der Punkte auf einer Erzeugenden ist projektiv zum Büschel der Tangentialebenen durch diese Erzeugende. In \mathbb{P}_{K^*} erfüllen die Berührungspunkte (die Tangentialebenen) der Ebenen eines Tangentialkegels (der Punkte eines Flächenkegelschnitts) einen Flächenkegelschnitt

(einen Tangentialkegel), und das Polarsystem einer ringartigen Quadrik ist eine Polarität. Jeder dreidimensionale klassische projektive Raum ist isomorph zu seinem Dualraum.

4.5. Projektive Polaritäten in dreidimensionalen klassischen projektiven Räumen

Aus 3.9 ist bekannt: Zu jeder Korrelation $\delta: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^*$ ($= \mathcal{L}$) gehört ein Verbandisomorphismus $\bar{\delta}: u\mathbb{P} \rightarrow u\mathbb{P}^*$, wobei $\bar{\delta}|_{\mathcal{P}} = \delta$ gilt. Die Abbildung $\delta^* := \bar{\delta}|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{P}$ heißt die "duale Korrelation". Die Abbildung $\bar{\delta} := \delta|_{\mathcal{Q}}$ bildet jede Gerade $g \in \mathcal{Q}$ aufgefaßt als Punktreihe auf eine Gerade $g \hat{=} \mathcal{Q}^*$ aufgefaßt als Ebenenbüschel ab. Wir haben den Begriff Projektivität zwischen Grundgebilden 1. Stufe in dreidimensionalen projektiven Räumen erklärt (vgl. 4.1, Folg. 5) und definieren damit den Begriff projektive Korrelation.

DEF. 4.5 a: Eine Korrelation $\delta: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^{3*}$ heißt projektiv, wenn ihre Beschränkung auf eine Punktreihe eine Projektivität ist.

Folgerungen:

1) Bei einer projektiven Korrelation δ ist die Beschränkung auf jede Punktreihe eine Projektivität.

Bew.: Wir gehen analog zu 1.11, Folg. 2 vor. Nach Definition existiert ein $g \in \mathcal{Q}$, sodaß $\delta|_{\mathcal{P}_g}: \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{L}_g$ eine Projektivität ist. Sei o.B.d.A. $a \in \mathcal{Q}$ eine Treffgerade von g (sonst schalten wir eine Treffgerade von a und g dazwischen) und $ag =: \pi$. Da $\delta|_{\mathcal{P}_\pi}: \mathcal{P}_\pi \rightarrow \mathcal{L}_\pi$ eine Kollineation der projektiven Ebene \mathcal{P}_π in die Koebene \mathcal{L}_π ist, wird eine beliebige Perspektivität $\alpha: \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_a$ mit dem Zentrum Z ($\in \pi$) durch δ auf eine Perspektivität $\alpha' := \delta^{-1} \alpha \delta: \mathcal{L}_{g\delta} \rightarrow \mathcal{L}_{a\delta}$ mit der Ebene $Z\delta$ ($\in \pi\delta^*$) als Perspektivitätsachse abgebildet. Also ist $\delta|_{\mathcal{P}_a} = \alpha' \circ \delta|_{\mathcal{P}_g} \circ \alpha^{-1}$ endliches Produkt von Projektivitäten. ◆

2) Das Polarsystem einer ringartigen Quadrik Φ in \mathbb{P}_{kl} ist eine projektive Polarität.

Bew.: Jedem Punkt P einer Erzeugenden x von ϕ wird durch λ_ϕ die Tangentialebene π zugeordnet, wobei $x(P)\pi x(\pi)$ nach 4.4, Folg.2 gilt. Also ist $\lambda_\phi | \rho_x$ eine Projektivität. Außerdem ist λ_ϕ nach 4.4, Folg.6 eine Polarität.

3) Eine projektive Korrelation in \mathbb{P}_{kl}^3 ist eindeutig festgelegt durch eine Fundamentalfigur in ρ von Punkten und eine Fundamentalfigur in ρ^* von Bildkopunkten (=Ebenen in ξ).

Bew.: (vgl.2.4) In \mathbb{P}_{kl}^3 besitzt eine ringartige Quadrik ϕ ein Polarsystem λ_ϕ , und dieses transformiert fünf gegebene Ebenen $\alpha_i \in \xi$, von denen nie vier kopunktal sind, in eine Fundamentalfigur $\alpha_i \lambda_\phi^* =: \bar{A}_i$ in ρ . Zu der gegebenen Fundamentalfigur A_i und der Fundamentalfigur \bar{A}_i existiert nach Satz 3.7 genau eine projektive Kollineation α mit $\bar{A}_i = A_i \alpha$. Nun gilt $\lambda_\phi \lambda_\phi^* = \iota$ nach 3.9, Folg. 3 und daher $\alpha \lambda_\phi^{*-1} = \alpha \lambda_\phi$; dies ist aber eine projektive Korrelation, die $A_i \mapsto \alpha_i$ ($i=0, \dots, 4$) leistet.

Der Eindeutigkeitsbeweis analog zu 2.4 beruht wieder auf der scharfen Transitivität von $PGL(\mathbb{P}_{kl}^3)$ auf der Menge der Fundamentalfiguren, die aus Satz 3.7 zu entnehmen ist.

Bemerkung: Da die scharfe Transitivität bereits in PP-Räumen gilt, existiert zu dieser Angabe in \mathbb{P}_{pp}^3 höchstens eine projektive Korrelation.

4) Nach 3.9 ist eine Polarität λ eine selbstadjungierte Korrelation ($\lambda \lambda^* = \iota$). Zu λ gehört der Verbandisomorphismus $\bar{\lambda}$ und speziell $\bar{\lambda} := \bar{\lambda} | \mathcal{G}$ bildet jede Gerade x (Punktreihe) auf eine Gerade $x \bar{\lambda}$ (Ebenenbüschel) ab.

$x \bar{\lambda}$ heißt "polare Gerade" zu x.

Ist y polar zu x, so ist x polar zu y (Polarsein von Geraden ist eine symmetrische Relation).

Bew.: y ist polar zu x, also $x \bar{\lambda} = y$. Wir legen $x \in \mathcal{G}$ durch P, Q | # fest. Da λ inzidenttreu ist, gilt $x \bar{\lambda} = y = P \lambda . Q \lambda$ (mit $P \lambda + Q \lambda$). Wir legen y durch A, B | # fest und es gilt $y \bar{\lambda} = A \lambda . B \lambda$. Aus $A \in P \lambda$ und $B \in Q \lambda$ folgt wegen der Symmetrie der Konjugiertheit $A \lambda \in P \lambda \wedge B \lambda \in Q \lambda \Rightarrow$ die Schnittgerade $y \bar{\lambda}$ der beiden Ebenen $A \lambda$ und $B \lambda$ geht durch $PQ = x \Rightarrow x = y \bar{\lambda}$, d.h. x ist polar zu y.

Bemerkungen: (a) Polare, zueinander windschiefe Geraden x, $x \bar{\lambda}$ heißen "reziproke Polaren".

(b) In der Nichteuclidischen Geometrie verwendet man auch folgende (von uns nicht benutzte) Bezeichnung: Eine Gerade g, welche die zu x polare Gerade $x \bar{\lambda}$ trifft, heißt "konjugiert zu x".

DEF.4.5 b: Ein Punkt X heißt selbstkonjugiert bezüglich einer Polarität λ , wenn $X \perp X\lambda$ gilt. Eine Ebene ξ heißt selbstkonjugiert bezüglich einer Polarität λ , wenn $\xi \perp \xi\lambda^*$ gilt. Eine Gerade g heißt selbstpolar bezüglich einer Polarität λ , wenn $g = g\lambda$ gilt. Eine Polarität heißt elliptisch, wenn sie keinen selbstkonjugierten Punkt besitzt. Eine Polarität heißt hyperbolisch, wenn sie einen selbstkonjugierten Punkt und einen nicht selbstkonjugierten Punkt besitzt. Eine Polarität heißt eine Nullpolarität, wenn alle Punkte selbstkonjugiert sind. Die Menge der selbstkonjugierten Punkte einer projektiven hyperbolischen Polarität in einem klassischen projektiven Raum heißt eine Quadrik.

Bemerkungen (analog zu jenen nach Def.2.4):

(a) Bezüglich jeder hyperbolischen Polarität existiert eine selbstkonjugierte Ebene und eine nicht selbstkonjugierte Ebene. Bezüglich jeder elliptischen Polarität existieren keine selbstkonjugierten Ebenen. Bezüglich jeder Nullpolarität sind alle Ebenen selbstkonjugiert.

Bew.: Ist X selbstkonjugiert $\Rightarrow X \perp X\lambda =: \xi$. Für die Ebene ξ gilt wegen $\lambda^* = \lambda^{-1}$ dann $\xi\lambda^* = \xi\lambda^{-1} = X$, also $\xi\lambda^* \perp \xi$. Ebenso folgt aus $Y \perp Y\lambda =: \eta$, daß $\eta\lambda^* = Y$ nicht mit η inzidiert.

(b) In jeder selbstkonjugierten Ebene bezüglich einer Polarität λ , in der keine selbstpolare Gerade existiert, existiert genau ein selbstkonjugierter Punkt. Durch jeden selbstkonjugierten Punkt, der mit keiner selbstpolaren Geraden inzidiert, existiert genau eine selbstkonjugierte Ebene.

Bew.: Ist die Ebene ξ selbstkonjugiert, so ist nach Bem.a der Punkt $X := \xi\lambda^*$ selbstkonjugiert und er ist der einzige in ξ :
 (ind.) $\exists Y \in \mathcal{P}_1 \setminus \{X\}$ mit $Y \perp Y\lambda =: \eta$.
 Da λ eine Korrelation ist, gilt: $Y \perp \xi \Rightarrow \eta \perp X$. $\xrightarrow{X \perp Y} g = XY = \xi\eta = X\lambda.Y\lambda = g\lambda$: Widerspruch, denn in ξ liegt keine selbstpolare Gerade.

(c) Wie aus Bem. c nach Def.2.4 sofort folgt, gibt es in einer projektiven Ebene keine Nullpolarität, also keine Polarität, in der alle Punkte selbstkonjugiert sind.

5) Jede ringartige Quadrik (Def.4.3 b) in $\mathbb{P}_{\kappa 1}$ ist eine Quadrik (im Sinne von Def.4.5b).

Bew.: Zu jeder ringartigen Quadrik ϕ in $\mathbb{P}_{\kappa 1}$ existiert ein Polarsystem λ_ϕ , das nach Folg.2 eine projektive Polarität ist. λ_ϕ ist eine hyperbolische Polarität:

Für $X \in \phi$ ist $X\lambda_\phi$ die Tangentialebene in X , also ist X selbstkonjugiert.

Für $X \notin \phi$ ist $X\lambda_\phi$ die Achse der harmonischen Homologie σ_X , also ist X nicht selbstkonjugiert.

Bemerkungen: (a) Aus dem Beweis folgt: Die Menge der Punkte von ϕ ist genau die Menge der selbstkonjugierten Punkte von λ_ϕ .
 D_3 -dual: Die Menge der Tangentialebenen von ϕ ist genau die Menge der selbstkonjugierten Ebenen von λ_ϕ .

(b) $\mathcal{G}_\phi \cup \overline{\mathcal{G}_\phi}$ ist genau die Menge der selbstpolaren Geraden von λ_ϕ .

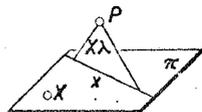
Bew.: $x \in \mathcal{G}_\phi \cup \overline{\mathcal{G}_\phi} \Rightarrow \mathcal{R}_x \lambda_\phi$ ist das Ebenenbüschel $\mathcal{L}_x \Rightarrow x = x\lambda$, d.h. x ist selbstpolar.

x selbstpolar \Rightarrow jeder Punkt X auf x ist selbstkonjugiert bezüglich $\lambda_\phi \Rightarrow \mathcal{R}_X$ liegt auf ϕ . Nach 4.3, Folg.3, Bem. gilt dann notwendig $x \in \mathcal{G}_\phi \cup \overline{\mathcal{G}_\phi}$.

(c) In einem $\mathbb{P}_{\kappa 3}^3$ existieren also hyperbolische projektive Polaritäten, nämlich die Polarsysteme ringartiger Quadriken. Wir werden später sehen, daß die Existenz elliptischer projektiver Polaritäten abhängt von Eigenschaften des zu $\mathbb{P}_{\kappa 3}^3$ gehörigen Körpers K , während Nullpolaritäten in jedem $\mathbb{P}_{\kappa 3}^3$ existieren.

(d) Wenn wir im folgenden Aussagen über Quadriken im $\mathbb{P}_{\kappa 3}^3$ aussprechen, so gelten diese insbesondere für ringartige Quadriken (in $\mathbb{P}_{\kappa 3}^3$). Aussagen über projektive Polaritäten in $\mathbb{P}_{\kappa 3}^3$ gelten insbesondere für die Polarsysteme ringartiger Quadriken in $\mathbb{P}_{\kappa 3}^3$.

6) Sei λ eine projektive Polarität und π eine nicht selbstkonjugierte Ebene ($\Rightarrow P := \pi\lambda * \lambda\pi$). Wir erklären eine Abbildung $\lambda_\pi: \mathcal{R}_\pi \rightarrow \mathcal{G}_\pi$ folgendermaßen: Jedem Punkt $X \in \mathcal{R}_\pi$ wird die Schnittgerade x der Ebene $X\lambda$ mit der Ebene π zugewiesen. Dann gilt:



Die Abbildung λ_π ist eine (ebene) projektive Polarität.

Bew.: (I) λ_x ist eine globale Abbildung: Für jeden Punkt $X \in \rho_x$ geht $X\lambda$ durch P mit $P \notin \pi$, daher ist die Schnittgerade $X\lambda \cdot \pi$ eindeutig bestimmt.

(II) λ_x erfüllt $Y \perp X\lambda_x \Rightarrow Y\lambda_x \perp X$, denn es gilt

$$Y \perp X\lambda_x \Rightarrow Y \perp X\lambda \stackrel{\lambda \text{ Pol.}}{\Rightarrow} Y\lambda \perp X;$$

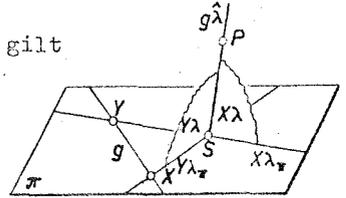
$$X \perp \pi \wedge Y\lambda \perp X \Rightarrow X \perp Y\lambda \cdot \pi = Y\lambda_x.$$

λ_x ist somit eine (ebene) Polarität.

(III) λ_x ist eine projektive Polarität:

$$g = XY \perp \pi \Rightarrow g\hat{\lambda} = X\lambda \cdot Y\lambda \perp \pi \lambda^* = P \Rightarrow \exists^* S = g\hat{\lambda} \cdot \pi. \text{ Somit gilt}$$

$$g(X) \stackrel{\lambda \text{ Pol.}}{\perp} \pi \hat{=} g\hat{\lambda}(X\lambda) \perp S(X\lambda_x) \Rightarrow g(X) \perp S(X\lambda_x).$$



DEF.4.5c: Ist λ eine projektive Polarität und π eine nicht selbstkonjugierte Ebene, so heißt die Abbildung $\lambda_x: \rho_x \rightarrow \rho_x$ mit $X \mapsto X\lambda_x := X\lambda \cdot \pi$ die Spurrpolarität von λ in π .

7) Ist λ eine projektive Polarität in \mathbb{P}_{kl} , so ist die Menge aller selbstkonjugierten Punkte in einer nicht selbstkonjugierten Ebene π , die einen selbstkonjugierten Punkt A trägt, ein Kegelschnitt.

Bew.: Für $X \in \rho_x$ gilt: $X \perp X\lambda \Leftrightarrow X \perp X\lambda_x$. Damit ist insbesondere A auch bezüglich λ_x selbstkonjugiert $\Rightarrow \lambda_x$ ist eine hyperbolische projektive Polarität \Rightarrow die Menge der bzgl. λ_x (und damit bzgl. λ) selbstkonjugierten Punkte in π ist nach Def.2.4 ein (Staudtscher-) Kegelschnitt.

Anwendung: Existiert bezüglich einer projektiven Polarität λ eine solche Ebene π , wie in Folg. 7 vorausgesetzt, so ist λ notwendig eine hyperbolische Polarität, für welche die Menge der selbstkonjugierten Punkte nach Def.4.5b eine Quadrik ist. Wir haben also gezeigt: Die zu λ gehörige Quadrik schneidet eine nicht selbstkonjugierte Ebene π , die einen selbstkonjugierten Punkt A enthält, nach einem Kegelschnitt. Speziell für eine ringartige Quadrik ergibt dies die Aussage: Eine ringartige Quadrik Φ in \mathbb{P}_{kl} schneidet eine Nichttangentialebene π (sie trägt sicher einen selbstkonjugierten Punkt, nämlich den Schnittpunkt einer Erzeugenden von Φ mit π) nach einem Kegelschnitt (vgl.4.3, Folg.3, wo diese Aussage sogar in \mathbb{P}_{pp} bewiesen ist).

8) Ist λ eine projektive Polarität in \mathbb{P}_{κ} , die keine Nullpolarität ist, so gilt: Auf jeder Geraden g , die windschief $g\hat{\lambda}$ ist (g und $g\hat{\lambda}$ sind reziproke Polaren), bilden die Paare konjugierter Punkte eine projektive Involution.

Bew.: $X \in g \Rightarrow X\lambda \in g\hat{\lambda} \Rightarrow \exists X_1 \lambda.g = X_1$, der zu X konjugierte Punkt auf g . Man hat somit eine Projektivität $\alpha: \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{P}_g$ bestimmt durch $\mathcal{P}_g(X) \hat{\lambda} \mathcal{P}_g(X\lambda) \bar{\alpha} \mathcal{P}_g(X_1)$.

Für $X_1 = X$ gilt:

$X_1 = X \Rightarrow Y\lambda \in g$ und da $Y \in X\lambda \Rightarrow Y\lambda \in X$ gilt, folgt $X_1 = X$. Damit ist α eine projektive Involution falls $\alpha \neq \iota$ erwiesen ist.

(ind.) $\alpha = \iota$; wir wollen zeigen, daß dann λ eine Nullpolarität ist. Wir unterscheiden:

Fall 1: $X \in \mathcal{P}_g : X$ ist wegen $X = X\alpha = X_1 \in X\lambda$ selbstkonjugiert.

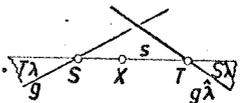
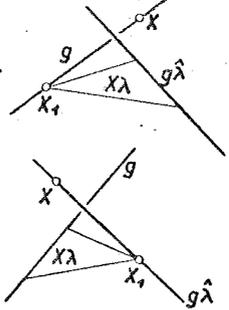
Fall 2: $X \in \mathcal{P}_g \hat{\lambda} : X$ ist selbstkonjugiert:

(ind.) $\exists X \in \mathcal{P}_g \hat{\lambda}$ mit $X \notin X\lambda$. Die nicht selbstkonjugierte Ebene $X\lambda$ geht wegen der Symmetrie des Polarseins von Geraden (Folg.4) durch g , also enthält sie die Punktreihe \mathcal{P}_g von selbstkonjugierten Punkten; dies widerspricht jedoch Folg.7, wonach die Menge der selbstkonjugierten Punkte in einer nicht selbstkonjugierten Ebene ein Kegelschnitt ist. Somit sind alle Punkte von $\mathcal{P}_g \hat{\lambda}$ selbstkonjugiert.

Fall 3: $X \in \mathcal{P}_g \setminus \mathcal{P}_g \cup \mathcal{P}_g \hat{\lambda}$: Aus X existiert genau eine Treffgerade s an g und $g\hat{\lambda}$. Dann gilt: Jede Gerade s , die g (in S) und $g\hat{\lambda}$ (in T) trifft, ist selbstpolar:

$S = S_1$ (Fall 1) $\Rightarrow S\lambda \in S$
 $T = T_1$ (Fall 2) $\Rightarrow T\lambda \in T$ } $\Rightarrow s\hat{\lambda} = (ST)\hat{\lambda} = S\lambda.T\lambda = ST = s$.

Wegen $X \in s$ gilt $X\lambda \in s\hat{\lambda} = s \Rightarrow X\lambda \in X$, d.h. X ist selbstkonjugiert. Da alle $X \in \mathcal{P}$ selbstkonjugiert sind, ist λ eine Nullpolarität: Widerspruch zur Voraussetzung.



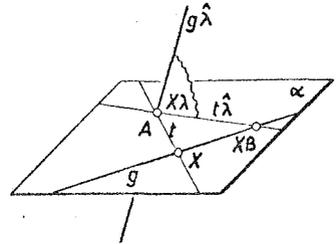
Bemerkung: D_3 -Dual: Ist λ eine projektive Polarität in \mathbb{P}_{κ} , die keine Nullpolarität ist, so gilt: Um jede Gerade, die windschief zu ihrer polaren Geraden ist, bilden die Paare konjugierter Ebenen eine projektive Involution.

9) Sei λ eine projektive Polarität in \mathbb{P}^n , die keine Nullpolarität ist. Eine selbstkonjugierte Ebene α bestimmt zusammen mit ihrem Pol A das Geradenbüschel $\mathcal{G}_{A,\alpha}$. Für jede Gerade $x \in \mathcal{G}_{A,\alpha}$ gilt $x \perp A \wedge x \perp \alpha \Rightarrow x \hat{\lambda} \perp A \wedge x \hat{\lambda} \perp \alpha \wedge x \hat{\lambda} \perp \alpha \wedge x \hat{\lambda} \perp A \Rightarrow x \hat{\lambda} \in \mathcal{G}_{A,\alpha}$. Die Abbildung $\hat{\lambda}|_{\mathcal{G}_{A,\alpha}}$ ist also eine Selbstabbildung des Geradenbüschels $\mathcal{G}_{A,\alpha}$.

Ist λ eine projektive Polarität, die keine Nullpolarität ist, so ist $\hat{\lambda}|_{\mathcal{G}_{A,\alpha}}$ mit $A \perp \alpha \wedge A \perp \alpha = \alpha$ eine projektive Involution, deren (u.U. existierenden) Fixgeraden genau die selbstpolaren Geraden in α sind.

Bew.: Sei $g \in \mathcal{G}_{A,\alpha}$ mit $g \not\perp A$. Da λ Inzidenzen und Nichtinzidenzen erhält, folgt $g \hat{\lambda} \perp A \wedge g \hat{\lambda} \not\perp \alpha = \alpha \Rightarrow g$ windschief $g \hat{\lambda} \xrightarrow{f \circ g} \lambda$

bestimmt auf g eine projektive Involution β konjugierter Punkte $g(X) \perp g(X\beta)$. Ist $t \in \mathcal{G}_{A,\alpha}$, so $\exists X := tg \Rightarrow t = AX \Rightarrow t \hat{\lambda} = \alpha \cdot X \lambda$. Wegen $X \perp g$ gilt $X \lambda \perp g \hat{\lambda}$; außerdem geht $X \lambda$ durch den zu X konjugierten Punkt $X\beta \Rightarrow$



$t \hat{\lambda} = A \cdot X \beta$. Somit gilt für $\hat{\lambda}|_{\mathcal{G}_{A,\alpha}}$: $\mathcal{G}_{A,\alpha}(t) \perp \mathcal{P}_g(X) \perp \mathcal{P}_g(X\beta) \perp \mathcal{G}_{A,\alpha}(t \hat{\lambda})$.

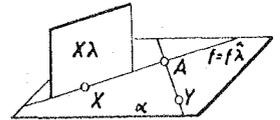
Geht man in dieser Kette von $t \hat{\lambda} =: s$ aus, so gelangt man zur Geraden $t = s \hat{\lambda}$, da β eine projektive Involution ist; aus $\beta \neq \text{id}$ folgt $\hat{\lambda}|_{\mathcal{G}_{A,\alpha}} \neq \text{id}$, womit $\hat{\lambda}|_{\mathcal{G}_{A,\alpha}}$ als projektive Involution erwiesen ist.

Ist f Fixgerade von $\hat{\lambda}|_{\mathcal{G}_{A,\alpha}} \Rightarrow f \hat{\lambda} = f$, d.h. f ist selbstpolar. Ist umgekehrt $f \perp \alpha$ und f selbstpolar $\Rightarrow f \hat{\lambda} \perp \alpha \wedge f \hat{\lambda} \perp A \wedge f \hat{\lambda} = f \Rightarrow f \in \mathcal{G}_{A,\alpha}$ und f ist Fixgerade von $\hat{\lambda}|_{\mathcal{G}_{A,\alpha}}$.

Bemerkungen: (a) Sei λ eine projektive Polarität in \mathbb{P}^n , die keine Nullpolarität ist, und α eine selbstkonjugierte Ebene ($\alpha \perp \alpha \wedge \alpha \perp A$). Wir wollen die Menge M der selbstkonjugierten Punkte in α untersuchen. Da nach den Voraussetzungen λ hyperbolisch ist, ist M der Durchschnitt der zu λ gehörigen Quadrik mit α .

Sicher gilt $A \in M$. Jeder Punkt X auf einer der u.U. existierenden Fixgeraden f, g von $\hat{\lambda}|_{\mathcal{G}_{A,\alpha}}$ ist selbstkonjugiert und gehört daher zu M , denn es gilt $X \perp f \Rightarrow X \perp f \hat{\lambda} = f \Rightarrow X \perp X$.

Ist umgekehrt $Y \in M$, d.h. $Y \perp Y \lambda$, so folgt $(YA) \hat{\lambda} = Y \lambda \cdot \alpha$. Wegen $Y \perp \alpha \wedge Y \perp Y \lambda$ gilt $Y \lambda \perp YA \Rightarrow (YA) \hat{\lambda} = YA$, also liegt Y notwendig auf einer Fixgeraden von $\hat{\lambda}|_{\mathcal{G}_{A,\alpha}}$. Somit ist $M = \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g$. Zusammenfassend gilt:



Der Schnitt einer Quadrik mit einer selbstkonjugierten Ebene α besteht entweder aus zwei verschiedenen Punktreihen durch den Pol A von α (falls $\hat{\lambda} | \mathcal{G}_{A,\alpha}$ hyperbolisch ist), oder nur aus dem Pol A (falls $\hat{\lambda} | \mathcal{G}_{A,\alpha}$ elliptisch ist).

(b) Speziell für eine ringartige Quadrik ϕ ist der Schnitt einer selbstkonjugierten Ebene (d.h. Tangentialebene) mit ϕ stets ein Geradenpaar, also ist $\hat{\lambda}_\phi | \mathcal{G}_{A,\alpha}$ immer hyperbolisch, und die Fixgeraden sind genau die Erzeugenden von ϕ in α durch A. Alle Geraden von $\mathcal{G}_{A,\alpha}$ sind gemäß Def.4.4a Tangenten von ϕ . Man nennt daher $\hat{\lambda}_\phi | \mathcal{G}_{A,\alpha}$ die "projektive Involution polarer (konjugierter) Flächentangenten" in A.

SATZ 4.5: In \mathbb{T}_κ^3 ist eine projektive Korrelation durch eine Fundamentalfigur aus \mathcal{R} und die Bildfundamentalfigur aus ζ eindeutig festgelegt, und das Polarsystem einer ringartigen Quadrik ist eine projektive hyperbolische Polarität. In jeder nicht selbstkonjugierten Ebene existiert bezüglich einer projektiven Polarität eine projektive Spurpolarität, auf jeder Geraden, die windschief zu ihrer polaren Geraden ist, eine projektive Involution konjugierter Punkte und in jeder selbstkonjugierten Ebene im Geradenbüschel um ihren Pol eine projektive Involution polarer Geraden.

4.6. Quadriken in dreidimensionalen klassischen projektiven Räumen

Jede ringartige Quadrik ist eine Quadrik. Ist umgekehrt jede Quadrik ringartig? Ist ϕ eine ringartige Quadrik, so sind genau die Erzeugenden von ϕ die selbstpolaren Geraden bezüglich des Polarsystems λ_ϕ (vgl. 4.5, Folg.5, Bem.b); λ_ϕ haben wir in 4.5, Folg.2 als projektive hyperbolische Polarität erkannt. Es gilt umgekehrt:

Ist λ eine projektive hyperbolische Polarität, in der eine selbstpolare Gerade existiert, so ist die durch λ bestimmte Quadrik ringartig. (Anders formuliert: Die projektiven hyperbolischen Polaritäten, in denen eine selbstpolare Gerade existiert, sind genau die Polarsysteme von ringartigen Quadriken.)

Bew.: Bezüglich der projektiven hyperbolischen Polarität λ existiert nach Def.4.5b ein nicht selbstkonjugierter Punkt P

($P\lambda := \pi \not\subset P$) und nach Voraussetzung existiert ein $x \in \mathcal{O}$ mit $x = x\hat{\lambda}$. Es gilt $x \not\subset \pi$: Alle Punkte $X \in \mathcal{P}_x$ haben nämlich Polarebenen $X\lambda \in \mathcal{E}_{x\hat{\lambda}}$, sodaß wegen $x\hat{\lambda} = x$ gilt $X\lambda \perp X$; also sind alle Punkte von x selbstkonjugiert. Da die Menge aller selbstkonjugierten Punkte in der nicht selbstkonjugierten Ebene π entweder leer oder ein Kegelschnitt ist (vgl. 4.5, Folg. 7), kann die Reihe \mathcal{P}_x aus selbstkonjugierten Punkten niemals in π liegen. D_3 -dual ist $x \not\subset P$ einzusehen.

Damit ist der Durchstoßpunkt $S := x\pi$ eindeutig bestimmt. $\lambda | \mathcal{P}_x$ ist eine Projektivität, wobei speziell $S \mapsto S\lambda = \sigma$ gilt. $S \perp \sigma$ wegen $S \perp x = x\hat{\lambda}$, also ist S ein selbstkonjugierter Punkt in der nicht selbstkonjugierten Ebene π und daher ist nach 4.5, Folg. 7 die Menge aller selbstkonjugierten Punkte in π ein Kegelschnitt k durch S . Der Kegelschnitt k hat in S die Tangente $\sigma\pi := s$, da die Spur von σ in π dem Punkt $S \in k$ in der Spurpolarität $\lambda_r = \lambda_k$ von λ in π zugeordnet sein muß.

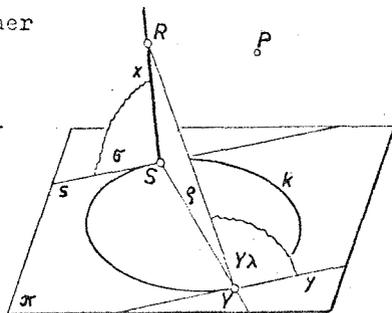
Nach 4.4, Folg. 3 ist durch Angabe des Kegelschnitts k , der Erzeugenden x und der Berührprojektivität $\lambda | \mathcal{P}_x$ längs x genau eine ringartige Quadrik ϕ festgelegt. Diese Angabe ist sinnvoll, denn x trifft k in S und S wird durch $\lambda | \mathcal{P}_x$ die Ebene $\sigma = xs$ zugeordnet. Zu ϕ gehört das Polarsystem λ_ϕ .

Es genügt $\lambda = \lambda_\phi$ zu zeigen. Nach 4.5, Folg. 3 stimmen die beiden projektiven Polaritäten (\Rightarrow Korrelationen) λ, λ_ϕ überein, wenn sie für eine Fundamentalfigur in \mathcal{P} dasselbe leisten.

(I) Für $X \in \mathcal{P}_x$ gilt nach Angabe sicher $X\lambda = X\lambda_\phi$.

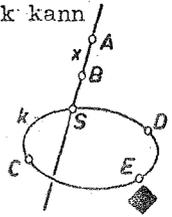
(II) Für $Y \in k \setminus \{S\}$ gilt $Y\lambda = Y\lambda_\phi$:

Wir konstruieren $Y\lambda$: $Y \in k \Rightarrow Y$ selbstkonjugiert $\Rightarrow Y \perp Y\lambda$; zur Ebene $Yx =: \zeta$ ($\neq \sigma$) gehört in $\lambda | \mathcal{P}_x$ ein Pol R ($\neq S$) auf x und $Y \perp \zeta \Rightarrow Y\lambda \perp R$. Außerdem enthält Y die Tangente y in Y an k (vgl. die entsprechende Eigenschaft von S) $\Rightarrow Y\lambda = yR$.



Wir konstruieren $Y\lambda_\phi$: Ihre Spur in π ist ebenfalls die Tangente y an k in Y , da λ und λ_ϕ nach Angabe in π dieselbe Spurpolarität $\lambda_r = \lambda_{\phi_r} = \lambda_k$ besitzen. Weiters ist YR Erzeugende von ϕ , wie aus 4.4, Folg. 3, Anw. folgt, und daher geht $Y\lambda_\phi$ durch $YR \Rightarrow Y\lambda_\phi = yR$.

Damit gilt: $Y\lambda = Y\lambda_\phi \quad \forall Y \in \rho_x \cup k$. Aus der Menge $\rho_x \cup k$ kann nun eine Fundamentalfigur herausgegriffen werden: $A, B \in \rho_x$, $\neq k$, \neq und $C, D, E \in k$, $\neq \rho_x$, \neq bilden, wie man leicht überprüft, eine solche λ führt diese in eine Fundamentalfigur in ξ über; λ und λ_ϕ leisten für $\{A, \dots, E\}$ dasselbe $\Rightarrow \lambda = \lambda_\phi$.



Die Frage nach nicht ringartigen Quadriken ist damit zurückgespielt auf die Frage nach hyperbolischen projektiven Polaritäten, in welchen keine selbstpolaren Geraden existieren.

DEF.4.6a: Die Menge aller selbstkonjugierten Punkte einer projektiven hyperbolischen Polarität ohne selbstpolare Gerade heißt ovale Quadrik.

Bemerkung: Nicht in jedem \mathbb{P}_K^3 existieren ovale Quadriken, während im Gegensatz dazu ringartige in jedem \mathbb{P}_K^3 (sogar in jedem \mathbb{P}_{pp}^3) existieren. Je zwei ringartige Quadriken sind hinsichtlich $PGL(\mathbb{P}_K^3)$ äquivalent (vgl. 4.3, Folg.5); auch dies ist für ovale Quadriken nicht notwendig richtig und hängt ebenso wie die Existenz ovaler Quadriken von Eigenschaften des Körpers K ab (vgl. § 5).

Folgerungen:

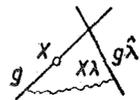
1) Eine Quadrik ist genau dann ringartig, wenn auf ihr eine Gerade existiert.

Bew.: (a) Ist M eine ringartige Quadrik, so existieren auf M Erzeugenden.

(b) Ist M eine Quadrik (d.h. Menge der selbstkonjugierten Punkte einer projektiven hyperbolischen Polarität λ) und existiert auf M eine Gerade $g \Rightarrow$ alle Punkte von g sind selbstkonjugiert.

Fall 1: $g = g^{\hat{\lambda}}$, d.h. g ist selbstpolar. Dann ist nach obigem λ Polarsystem einer ringartigen Quadrik $\phi \Rightarrow M = \phi$.

Fall 2: $g + g^{\hat{\lambda}} \wedge g$ schneidet $g^{\hat{\lambda}}$: Dieser Fall ist unmöglich, denn für alle Punkte $X \in \rho_g$ mit $X \notin \rho_{g^{\hat{\lambda}}}$ gilt $X\lambda = g \cdot g^{\hat{\lambda}}$ wegen $X\lambda \perp g^{\hat{\lambda}}$ und $X \perp X\lambda$. Dies widerspricht der Injektivität von λ .



Fall 3: g ist windschief $g^{\hat{\lambda}}$: Dieser Fall widerspricht Satz 4.5. Die selbstkonjugierten Punkte auf der Geraden g , die windschief zu $g^{\hat{\lambda}}$ ist, sind nämlich genau die Fixpunkte der projektiven Involution konjugierter Punkte auf g und daher niemals alle Punkte von g .

2) Eigenschaften ovaler Quadriken:

(I) Nach 4.5, Folg.9, Bem.a ist die Menge aller selbstkonjugierten Punkte in einer selbstkonjugierten Ebene π (d.h. $\pi\lambda^* =: P \cap \pi$) entweder ein Punkt oder ein Paar von selbstpolaren Geraden durch P. Selbstpolare Geraden kommen für eine projektive Polarität λ , welche eine ovale Quadrik bestimmt, nicht in Frage, also gilt:

Bestimmt eine projektive Polarität eine ovale Quadrik, so liegt in jeder selbstkonjugierten Ebene genau ein selbstkonjugierter Punkt und D_3 -äual geht durch jeden selbstkonjugierten Punkt genau eine selbstkonjugierte Ebene.

DEF.4.6b: Die einem Punkt A einer ovalen Quadrik in der zugehörigen Polarität λ zugeordnete Ebene $A\lambda$ heißt Tangentialebene der ovalen Quadrik in A. Jede Gerade des Büschels $\mathcal{G}_{A, A\lambda}$ heißt Tangente der ovalen Quadrik in A.

Bemerkung: A heißt der Berührungspunkt der Tangentialebene $A\lambda$.

(II) Die projektive Polarität λ bestimmt in einer nicht selbstkonjugierten Ebene π eine (ebene) projektive Spurpolarität $\lambda_\pi: \mathcal{P}_\pi \rightarrow \mathcal{G}_\pi$. Gehört λ insbesondere zu einer ringartigen Quadrik ϕ , so ist λ_π stets hyperbolisch (vgl.4.5, Folg.7, Anw.) und $\phi \cap \pi$ ein Kegelschnitt. Bei einer ovalen Quadrik ψ kann λ_π entweder elliptisch - $\psi \cap \pi$ ist dann leer - oder hyperbolisch sein - $\psi \cap \pi$ ist dann ein Kegelschnitt (vgl. § 5).

(III) Ist A ein selbstkonjugierter Punkt bezüglich λ , so ist $\lambda|_{\mathcal{G}_{A, A\lambda}}$ eine projektive Involution, deren Fixgeraden selbstpolar sind (vgl.4.5, Folg.9). Gehört λ zu einer ovalen Quadrik, so existieren keine selbstpolaren Geraden, also ist $\lambda|_{\mathcal{G}_{A, A\lambda}}$ stets elliptisch. $\lambda|_{\mathcal{G}_{A, A\lambda}}$ heißt "projektive Involution polarer (konjugierter)Tangenten". Der Schnitt einer ovalen Quadrik ψ mit einer Tangentialebene α besteht daher genau aus dem Berührungspunkt $A = \alpha\lambda^*$.

(IV) Eine Gerade ist genau dann Tangente einer ovalen Quadrik, wenn sie außer dem Berührungspunkt keinen Punkt mit der ovalen Quadrik gemeinsam hat. Eine Ebene durch einen Punkt A einer ovalen Quadrik, die nicht Tangentialebene in A ist, schneidet die Quadrik in einem Kegelschnitt, dessen Tangente in A eine Tangente der ovalen Quadrik ist.

Bew.: Die ovale Quadrik Ψ werde durch die projektive hyperbolische Polarität λ bestimmt.

(a) Ist t Tangente von Ψ in $A \in \Psi \stackrel{\text{Def. 4.6b}}{\implies} t \in \mathcal{U}_{A, \lambda}$. Nach (III) gilt $\Psi \cap \mathcal{P}_{\lambda A} = \{A\}$. Wegen $\mathcal{P}_t \in \mathcal{P}_{\lambda A}$ folgt $\Psi \cap \mathcal{P}_t = \Psi \cap \mathcal{P}_t \cap \mathcal{P}_{\lambda A} = \{A\} \cap \mathcal{P}_t = \{A\}$.

(b) Sei g eine Gerade, die genau einen Punkt A von Ψ trägt. Zu zeigen ist $g \perp \lambda$: (ind.) $g \not\perp \lambda \wedge g \perp A \implies g \hat{\perp} A \wedge g \hat{\perp} A \implies g$ windschief $g \hat{\perp} A$. Nach 4.5, Folg. 8 bestimmt daher λ auf g eine projektive Involution β konjugierter Punkte, die A zum Fixpunkt hat. β hat daher einen zweiten, von A verschiedenen Fixpunkt B und B ist bezüglich λ selbstkonjugiert, also gilt $B \in \mathcal{P}_g \wedge B \in \Psi$: Widerspruch zur Voraussetzung.

(c) Sei $A \in \Psi$ und ε eine beliebige Ebene durch A .

Wir unterscheiden:

Fall 1: $\varepsilon = \lambda A$. Dann gilt $\varepsilon \cap \Psi = \{A\}$ und der ebene Schnitt besitzt überhaupt keine Tangente.

Fall 2: $\varepsilon \neq \lambda A$. Die Ebene ε ist dann nicht selbstkonjugiert:

(ind.) ε selbstkonjugiert, also $E := \varepsilon \lambda \perp \varepsilon$. Die Gerade $g := \varepsilon \lambda$ ist selbstopolar, da aus $\varepsilon \perp E \wedge E \perp A \implies E \perp \varepsilon, \lambda A \wedge A \perp \varepsilon, \lambda A \implies A \perp \varepsilon, \lambda A \implies g \hat{\perp} A = \varepsilon = g$: Widerspruch, da λ zu einer ovalen Quadrik gehört.

In der nicht selbstkonjugierten Ebene ε liegt der selbstkonjugierte Punkt A und $\Psi \cap \varepsilon =: k$ ist daher nach 4.5, Folg. 7 ein Kegelschnitt. Nach Def. 4.6b ist $g = \varepsilon \lambda \in \mathcal{U}_{A, \lambda}$ Tangente der ovalen Quadrik Ψ ; es ist zu zeigen, daß g auch Tangente von k ist: (ind.) $\exists Q \in \mathcal{P}_g \setminus \{A\}$ mit $Q \in k \implies Q \in \Psi$: Widerspruch zu (a).



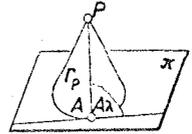
Bemerkungen: (a) Die Tangentialebene in $A \in \Psi$ kann durch die verschiedenen Tangenten zweier ebener Schnitte durch A aufgespannt werden.

(b) Nach Beweisschritt (c) trägt jede Ebene durch einen Punkt $A \in \Psi$, die nicht Tangentialebene ist, einen Flächenkegelschnitt. Daraus folgt: Eine ovale Quadrik ist nicht in einer Ebene enthalten.

3) Sei λ eine projektive hyperbolische Polarität in \mathbb{T}_n und M als Menge der bezüglich λ selbstkonjugierten Punkte eine Quadrik. λ ordnet jedem Punkt $A \in M$ die Tangentialebene λA zu. Bei der Korrelation λ geht also die Punktmenge M in die Menge der Tangentialebenen von M über. Die Menge der Punkte einer Quadrik ist D_3 -dual zur Menge ihrer Tangentialebenen.

Anwendungen:

(a) In einer nicht selbstkonjugierten Ebene π (d.h. $\pi \lambda^* =: P \not\perp \pi$) bestimmt λ die Spulpolarität λ_π , welche genau dann hyperbolisch ist, wenn $\pi \cap M \neq \emptyset$ gilt. In diesem Fall ist $\pi \cap M =: k$ ein Kegel-



schnitt mit $\lambda_\pi = \lambda_k$. Die Spurlinearität λ_π ist genau dann elliptisch, wenn $\pi \cap M = \emptyset$ gilt; dieser Fall kann nur bei einer ovalen Quadrik M eintreten. Wir wenden auf diese Figuren die Polarität λ an und erhalten:

Existiert durch einen nicht selbstkonjugierten Punkt P eine Tangentialebene der Quadrik M, so bilden alle Tangentialebenen von M durch P einen quadratischen Ebenenkegel Γ_P mit der Spitze P.

Die Anwendung von λ^* auf Γ_P führt auf k zurück, also gilt:

Die Menge der Berührungspunkte von Γ_P mit M ist ein Kegelschnitt.

Bemerkung: Eine ringartige Quadrik Φ in \mathbb{P}_{K1} wird von jeder Nicht-tangentialebene nach einem Kegelschnitt geschnitten, und daher existiert aus jedem Punkt $P \notin \Phi$ ein Tangentialkegel Γ_P an Φ ; jeder Punkt $P \notin \Phi$ ist daher "Außenpunkt von Φ ". Eine ovale Quadrik Ψ dagegen gibt Anlaß zu drei Klassen von Punkten:

1. Klasse: $P \in \Psi$ ("Punkt von Ψ "): $P\lambda \cap \Psi = P$.
2. Klasse: $P \notin \Psi$ und es existiert ein Tangentialkegel Γ_P von Ψ mit Spitze P ("Außenpunkt von Ψ "): $P\lambda \cap \Psi = k$ mit $k\lambda = \Gamma_P$.
3. Klasse: $P \notin \Psi$ und es existiert keine Tangentialebene von Ψ durch P ("Innenpunkt von Ψ "): $P\lambda \cap \Psi = \emptyset$.

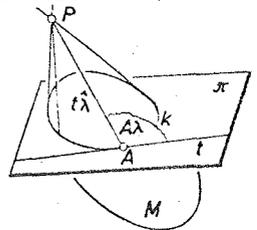
Eine ovale Quadrik Ψ hat sicher Außenpunkte, da jede Nicht-tangentialebene durch einen Punkt von Ψ einen Außenpunkt als Pol besitzt; die Existenz von Innenpunkten ist noch offen.

(b) Sei λ eine projektive hyperbolische Polarität und M die zugehörige Quadrik. Für die Ebene π sei $M \cap \pi =: k$ ein Kegelschnitt. Die Tangente t in A $\in k$ an k ist auch Tangente von M in A, liegt also in der Tangentialebene $A\lambda$, welche außerdem noch durch $P := \pi\lambda^*$ geht.

Wir konstruieren $t\hat{\lambda}$:

$$t \perp A\lambda \wedge t \perp \pi \Rightarrow t\hat{\lambda} \perp A \wedge t\hat{\lambda} \perp \pi \Rightarrow t\hat{\lambda} = AP.$$

$t\hat{\lambda}$ ist also Erzeugende von Γ_P . Außerdem sind t und $t\hat{\lambda}$ in der projektiven Involution $\hat{\lambda}|_{G_{A, A\lambda}}$ polarer (konjugierter) Flächentangenten einander zugeordnet. Man hat somit:



Die Tangente t an einen Kegelschnitt k auf einer Quadrik M im Punkt A und die Erzeugende des M längs k angeschriebenen Kegels durch A sind polare Flächentangenten von M.

4) Ist Ψ eine ovale Quadrik mit der zugehörigen projektiven hyperbolischen Polarität λ und P ein Punkt nicht auf Ψ , dann existiert genau eine harmonische Homologie σ_P mit dem Zentrum P, welche Ψ festläßt; die Achse von σ_P ist $P\lambda =: \pi(\lambda P)$.

(Der entsprechende Satz für ringartige Quadriken wurde in 4.4, Folg.5 gezeigt.)

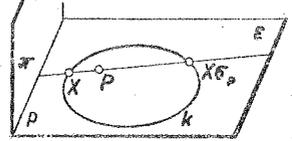
Bew.: (a) Wir zeigen zuerst, daß die harmonische Homologie σ_p mit Zentrum P und Achse $PA =: \pi$ die ovale Quadrik Ψ festläßt.

Fall 1: $X \in \Psi \wedge X \in \pi \Rightarrow X = X\sigma_p \in \Psi$.

Fall 2: $X \in \Psi \wedge X \notin \pi \Rightarrow P \neq X \Rightarrow \exists^* PX$. Ist ε eine beliebige Ebene durch PX , dann ist ε nicht selbstkonjugiert: $(\text{ind.}) \varepsilon \in I \neq \lambda^* =: E$. Es gilt dann $\varepsilon \neq X\lambda$ (da $P \in \varepsilon \wedge P \notin X\lambda$ wegen $\pi \not\perp X$) $\Rightarrow E \neq X$; in der selbstkonjugierten Ebene ε liegen also die beiden verschiedenen selbstkonjugierten Punkte X und E : Widerspruch zu Folg. 2, (I).

Nach 4.5, Folg. 7 ist somit $\varepsilon \cap \Psi =: k$ ein Kegelschnitt mit $X \in k$ und $\lambda_\varepsilon = \lambda_k$. Wegen $P \overset{\lambda}{\perp} \pi$ gilt $P\lambda_k = \varepsilon X =: p$, d.h.

P und p sind Pol und Polare von k . Die harmonische Homologie σ_p transformiert daher $X \in k$ in einen Punkt $X\sigma_p \in k \subset \Psi \Rightarrow X\sigma_p \in \Psi$.



(b) Es ist noch zu zeigen, daß σ_p die einzige harmonische Homologie mit Zentrum P ist, die Ψ als Ganzes festläßt. Sei σ_p' eine harmonische automorphe Homologie von Ψ mit Zentrum P. Enthält ein Kollineationsstrahl genau einen Punkt von Ψ , so muß dieser bei σ_p' notwendig festbleiben, enthält ein Kollineationsstrahl dagegen zwei verschiedene Punkte von Ψ , so müssen diese bei σ_p' notwendig vertauscht werden. Da gleiches für σ_p gilt, läßt $\sigma_p \sigma_p'^{-1}$, eine perspektive Kollineation mit Zentrum P, die Punktmenge Ψ elementweise fest. Da Ψ keiner Ebene angehört, existiert somit bei $\sigma_p \sigma_p'^{-1}$ ein Fixpunkt außerhalb der Achse verschieden vom Zentrum, woraus $\sigma_p \sigma_p'^{-1} = 1$ folgt $\Rightarrow \sigma_p = \sigma_p'$.

DEF. 4.6c: Ist M eine Quadrik in \mathbb{T}_{kl} , so heißt die Abbildung $\lambda_M: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$ erklärt mit Def. 4.4b das Polarsystem von M .

5) Die projektiven hyperbolischen Polaritäten in \mathbb{T}_{kl} sind genau die Polarsysteme von Quadriken.

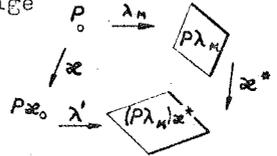
Bew.: Für die projektive hyperbolische Polarität λ gibt es die beiden Alternativen:

Fall 1: λ besitzt eine selbstpolare Gerade $\overset{4.6, \text{Einkl.}}{\Rightarrow} \lambda$ ist Polarsystem einer (ringartigen) Quadrik.

Fall 2: λ besitzt keine selbstpolare Gerade, dann bestimmt λ eine ovale Quadrik Ψ , deren Polarsystem nach obigem mit λ übereinstimmt.

6) Die Zuordnung zwischen einer Quadrik und ihrem Polarsystem ist invariant gegenüber Kollineationen.

Ausführlicher: Ist $M \subset \mathbb{P}$ eine Quadrik und $\alpha \in \text{PGL}(\mathbb{P}_{\kappa})$ eine Kollineation, so ist $M\alpha :=: M'$ eine gleichartige Quadrik und für die Polarsysteme λ_M und $\lambda_{M'}$ gilt $\lambda_{M'} = \alpha^{-1} \lambda_M \alpha^*$.



Bew.: (a) $\lambda' := \alpha^{-1} \lambda_M \alpha^*$ ist eine projektive hyperbolische Polarität:

(I) λ' ist global, weil die Abbildungen $\alpha^{-1}, \lambda_M, \alpha^*$ global sind.

(II) Aus $P'IQ'\lambda'$ folgt $P'\lambda'IQ'$:

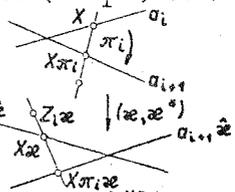
Zu P', Q' existieren P, Q mit $P\alpha = P'$ und $Q\alpha = Q'$. Wegen $P\alpha IQ\alpha\lambda' = Q\alpha(\alpha^{-1} \lambda_M \alpha^*) = Q\lambda_M \alpha^*$ gilt $P I Q\lambda_M$; da λ_M eine Polarität ist, folgt hieraus $P\lambda_M I Q$ und damit $Q\alpha = Q' I P\lambda_M \alpha^* = P'\alpha^{-1} \lambda_M \alpha^* = P'\lambda'$.

(III) Ist $h \in \mathcal{U}$, so muß $\lambda' | \mathcal{P}_h$ eine Projektivität sein. Da λ_M eine projektive Polarität ist, läßt sich $\lambda_M | \mathcal{P}_g := \mathcal{P}_g \circ \lambda_M \circ \mathcal{P}_g^{-1}$ ($g \in \mathcal{U}$, bel.) als Produkt $\lambda_g = \pi_1 \dots \pi_j \pi_0$ darstellen, wobei $\pi_i (i \neq 0)$ Perspektivitäten zwischen (einander schneidenden) Punktreihen sind und π_0 eine Perspektivität zwischen einer Punktreihe und einem Ebenenbüschel ist. Es gilt:

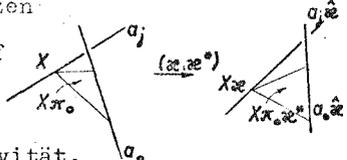
$$\lambda' | \mathcal{P}_{g\hat{z}} = \alpha^{-1} \lambda_M \alpha^* | \mathcal{P}_{g\hat{z}} = \alpha^{-1} \lambda_g \alpha^* = \alpha^{-1} \pi_1 \pi_2 \dots \pi_j \pi_0 \alpha^* = (\alpha^{-1} \pi_1 \alpha) (\alpha^{-1} \pi_2 \alpha) \dots (\alpha^{-1} \pi_j \alpha) (\alpha^{-1} \pi_0 \alpha^*)$$

$\lambda' | \mathcal{P}_{g\hat{z}}$ ist eine Projektivität, wenn die Faktoren $(\alpha^{-1} \pi_i \alpha)$ bzw. $(\alpha^{-1} \pi_0 \alpha^*)$ Perspektivitäten sind.

Die Perspektivität $\pi_i: \mathcal{P}_{a_i} \rightarrow \mathcal{P}_{a_{i+1}}$ (mit $a_i = g$) ordnet $X \in \mathcal{P}_{a_i}$ jeden Punkt $X\pi_i \in \mathcal{P}_{a_{i+1}}$ zu, der mit X und dem Perspektivitätszentrum Z_i kollinear liegt. Die Abbildung $\alpha^{-1} \pi_i \alpha$ geht von $\mathcal{P}_{a_i\hat{z}}$ nach $\mathcal{P}_{a_{i+1}\hat{z}}$ und ordnet $X\alpha \in \mathcal{P}_{a_i\hat{z}}$ den Punkt $X\pi_i \alpha \in \mathcal{P}_{a_{i+1}\hat{z}}$ zu, der mit X und dem festen Punkt $Z_i \alpha$ kollinear liegt, da α Inzidenzen erhält $\Rightarrow \Rightarrow \alpha^{-1} \pi_i \alpha$ ist die Perspektivität $\mathcal{P}_{a_i\hat{z}} \rightarrow \mathcal{P}_{a_{i+1}\hat{z}}$ mit dem Zentrum $Z_i \alpha$.



Die Perspektivität $\pi_0: \mathcal{P}_{a_0} \rightarrow \mathcal{L}_{a_0}$ ($a_0 = g\hat{\lambda}_M$) ordnet jedem $X \in \mathcal{P}_{a_0}$ die Ebene $X.a_0$ zu. Da (α, α^*) Inzidenzen erhält, geht die Abbildung $\alpha^{-1} \pi_0 \alpha^*$ von $\mathcal{P}_{a_0\hat{z}}$ nach $\mathcal{L}_{a_0\hat{z}}$, wobei $a_0\hat{z}$ windschief $a_0\hat{z}$ ist, und ordnet dem Punkt $X\alpha \in \mathcal{P}_{a_0\hat{z}}$ die Ebene $X\alpha.a_0\hat{z} \in \mathcal{L}_{a_0\hat{z}}$ zu $\Rightarrow \alpha^{-1} \pi_0 \alpha^*$ ist die Perspektivität $\mathcal{P}_{a_0\hat{z}} \rightarrow \mathcal{L}_{a_0\hat{z}}$.



Setzen wir $h = g\hat{z}$, so ist $\lambda' | \mathcal{P}_h$ eine Projektivität.

(IV) Um zu zeigen, daß λ' hyperbolisch ist, zeigen wir schärfer: Ist P in λ_M selbstkonjugiert bzw. nicht selbstkonjugiert, so ist $P\alpha$ in λ' selbstkonjugiert bzw. nicht selbstkonjugiert.

Ist P bzgl. λ_M selbstkonjugiert, so gilt $P \in P\lambda_M \Rightarrow P\alpha \in P\lambda_M \alpha^* = P\alpha \alpha^{-1} \lambda_M \alpha^* = (P\alpha)\lambda' \Rightarrow P\alpha$ ist bzgl. λ' selbstkonjugiert (ebenso für nicht selbstkonjugiert).

(b) Die projektive hyperbolische Polarität λ' bestimmt eine Quadrik M' und es gilt $M' = M\alpha$:

$P \in M \Rightarrow P$ selbstkonjugiert bzgl. $\lambda \Rightarrow P\alpha$ selbstkonjugiert bzgl. $\lambda' \Rightarrow P\alpha \in M'$. Aus $P \in M$ folgt ebenso $P\alpha \notin M'$.

Ovale bzw. ringartige Quadriken M tragen keine bzw. eine Punktreihe; da α Punktreihen in Punktreihen überführt und nicht kollineare Lage erhält, ist die Quadrik $M\alpha$ vom selben Typ wie M .

Bemerkung: Da α die durch λ vermittelte Kopplung erhält, folgt insbesondere, daß die Tangentialebene $P\lambda$ von $P \in M$ in die Tangentialebene von $P\alpha \in M\alpha$ übergeht. Das Paar $(P, P\lambda)$ mit $P \in M$ heißt "Flächenelement" der Quadrik M . Jede Kollineation $\alpha \in PGL(\Gamma_{\kappa})$ transformiert also eine Quadrik flächenelementweise in die gleichartige Bildquadrik.

7) Ein Tetraeder $\{A_0, \dots, A_3\}$ heißt "Poltetraeder" bezüglich einer Korrelation δ , wenn gilt: Jeder Ecke A_i wird durch δ die Gegenebene $\alpha_i := A_j A_k A_l$ (mit i, j, k, l pw. verschieden) zugeordnet, und jeder Tetraederebene α_k wird durch δ^* die Gegenecke A_k zugeordnet.

Die von den Nullpolaritäten verschiedenen projektiven Polaritäten sind genau jene projektiven Korrelationen, die ein Poltetraeder besitzen.

Bew.: (a) Sei λ eine projektive Nichtnullpolarität ^{Def. 4.5b}
 $\exists A_0 \in \mathcal{P}$ mit $A_0 \notin A_0\lambda =: \alpha_0 \xrightarrow{4.5, F^6}$ in der nicht selbstkonjugierten Ebene α_0 bestimmt λ eine projektive Spulpolarität λ_{α_0} und diese besitzt nach 2.4, Folg. 3 ein Poldreieck A_1, A_2, A_3 .

$\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ ist ein Poltetraeder von λ :

$$A_0\lambda = \alpha_0 = A_1 A_2 A_3$$

$$A_1 \in \alpha_0 \Rightarrow A_1 \lambda \in A_0$$

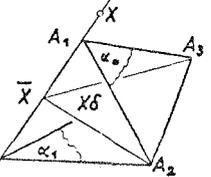
$$A_1 \lambda_{\alpha_0} = A_2 A_3 \Rightarrow A_1 \lambda \in A_2 A_3 \} \Rightarrow A_1 \lambda = A_0 A_2 A_3;$$

ebenso für $A_2 \lambda = A_0 A_1 A_3$ und $A_3 \lambda = A_0 A_1 A_2$. Wegen $\lambda \lambda^* = \iota \Rightarrow \alpha_1 \lambda^* = A_1$.

(b) Sei δ eine projektive Korrelation, die das Poltetraeder $\{A_0, \dots, A_3\}$ besitzt. Wegen $A_0 \bar{X} \alpha_0 = A_0 \delta$ ist δ sicher keine Nullpolarität. Nach 3.9, Folg. 3 ist δ als Polarität erwiesen, wenn $\delta\delta^* = \iota$ gezeigt ist.

Wegen $(A_0 A_1) \hat{\delta} = A_0 \delta \cdot A_1 \delta = \alpha_0 \alpha_1 = A_2 A_3$ usw. wird jeder Kante des Poltetraeders durch $\hat{\delta}$ die zu ihr windschiefe Poltetraederkante zugeordnet (*).

$\delta | \mathcal{P}_{A_0 A_1} : \mathcal{P}_{A_0 A_1} \rightarrow \mathcal{L}_{A_2 A_3}$ ist nach Voraussetzung eine Projektivität, also gilt für $X \in \mathcal{P}_{A_0 A_1}$ mit $\bar{X} := X\delta \cdot A_0 A_1$ $\mathcal{P}_{A_0 A_1}(X) \hat{\delta} \mathcal{L}_{A_2 A_3}(X\delta) \bar{X} \mathcal{P}_{A_0 A_1}(\bar{X})$; diese



Projektivität α_{01} ist sogar eine projektive Involution (vgl. 1.10, Folg. 8, I), denn sie leistet $A_0 \mapsto A_1$ und $A_1 \mapsto A_0$ mit $A_0 \neq A_1$.

Sei $X \in \mathcal{P}_{A_0 A_1} \Rightarrow X\delta \in \mathcal{L}_{A_2 A_3} \wedge X\delta \in \bar{X} = X\alpha_{01}$. Die Ebene $X\delta$ unterwerfen wir δ^* und erhalten den Punkt $(X\delta)\delta^*$, für den gilt:

$X\delta \in \mathcal{L}_{A_2 A_3} \xrightarrow{(*)} (X\delta)\delta^* \in \mathcal{L}_{A_0 A_1}$. Wegen $X\delta \in \bar{X}$ und $\bar{X}\alpha_{01} = X$ geht die Ebene $\bar{X}\delta$ durch X und $(X\delta)\delta^*$ liegt in $\bar{X}\delta$; da andererseits $(X\delta)\delta^*$ auf $A_0 A_1$ liegt und $\bar{X}\delta$ die Gerade $A_0 A_1$ genau in X trifft, gilt $X = X\delta\delta^*$ für alle $X \in \mathcal{P}_{A_0 A_1} \Rightarrow \delta\delta^* | \mathcal{P}_{A_0 A_1} = \iota$.

Durch Umbeschriftung findet man für alle sechs Tetraederkanten: $\delta\delta^* | \mathcal{P}_{A_i A_j} = \iota \ (i \neq j)$.

$\delta\delta^* : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ist eine Kollineation, die A_0, A_1, A_2 und damit α_0 festläßt. Wegen $\delta\delta^* | \mathcal{P}_{A_0 A_1} = \iota$ ist $\delta\delta^* | \mathcal{P}_{\alpha_0}$ eine ebene perspektive Kollineation mit der Achse $A_0 A_1$ und den beiden Fixpunkten A_2 und $P \in \mathcal{P}_{A_0 A_2} \setminus \{A_0, A_2\}$ nicht auf der Achse $\Rightarrow \delta\delta^* | \mathcal{P}_{\alpha_0} = \iota \Rightarrow \delta\delta^*$ ist eine perspektive Kollineation mit der Achse α_0 und den beiden Fixpunkten A_2 und $Q \in \mathcal{P}_{A_0 A_2} \setminus \{A_0, A_2\}$ nicht auf der Achse $\xrightarrow{3.4, E.6} \delta\delta^* = \iota$.

Bemerkung: Eine projektive Polarität in \mathbb{T}_K , die keine Nullpolarität ist, wird eindeutig festgelegt durch ein Poltetraeder $\{A_0, \dots, A_3\}$ und einmal Pol P und Polarebene π , falls $\{P, A_0, \dots, A_3\}$ bzw. $\{\pi, \alpha_0, \dots, \alpha_3\}$ eine Fundamentalfigur in \mathcal{P} bzw. \mathcal{P}^* ist ("allgemeine Lage").

Bew.: Zu diesen Fundamentalfiguren existiert in \mathbb{T}_K nach 4.5, Folg. 3 genau eine projektive Korrelation λ mit $\mathcal{P}\lambda = \pi$ und $A_i\lambda = \alpha_i$. Da λ ein Poltetraeder besitzt, ist λ eine projektive Polarität.

SATZ 4.6: In \mathbb{T}_{kl}^3 ist jede projektive hyperbolische Polarität λ das Polarsystem einer Quadrik, welche genau dann ringartig ist, wenn in λ eine selbstpolare Gerade existiert. Jede Kollineation führt eine Quadrik flächenelementweise in eine gleichartige Quadrik über und das Polarsystem einer Quadrik ist gegen Kollineationen invariant mit der Quadrik verknüpft. Die von den Nullpolaritäten verschiedenen projektiven Polaritäten sind genau jene projektiven Korrelationen, die ein Poltetraeder besitzen, und werden durch ein Poltetraeder und einmal Pol-Polarebene in allgemeiner Lage eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Eine projektive elliptische Polarität bestimmt in jeder Ebene eines Poltetraeders notwendig elliptische Spulpolaritäten, jedoch ist dies nicht hinreichend dafür, daß die projektive Polarität elliptisch ist (vgl. Bem. zu Satz 2.4).

Anwendungen:

Jeder Quadrik M ist eindeutig ihr Polarsystem λ_M , eine projektive hyperbolische Polarität, zugeordnet. Daher können Elemente des Polarsystems zur Festlegung der Quadrik dienen. Für $P, \pi = P\lambda_M$ mit $P \notin \pi$ ist die harmonische automorphe Homologie σ_P von M bekannt, und σ_P verdoppelt die anderen Angabeelemente.

(a) Nach Satz 4.6 ist eine projektive hyperbolische Polarität λ durch ein Poltetraeder und einmal Pol-Polarebene P, π in allgemeiner Lage eindeutig festgelegt. Ist λ insbesondere hyperbolisch, was z.B. für $P \notin \pi$ stets der Fall ist, so ist durch diese Angabe genau eine Quadrik festgelegt. Bei Vorliegen dieser Angabe kann zu einem beliebigen Punkt X die Polarebene $X\lambda$ konstruiert werden. Auf jeder Tetraederkante, z.B. auf A_0A_1 , bestimmt λ eine projektive Involution $\alpha_{0,1}$ konjugierter Punkte, wobei $\alpha_{0,1}$ eindeutig durch $A_0 \rightarrow A_1$, (PA_2A_3) , $A_0A_1 \rightarrow \pi \cdot A_0A_1$ festgelegt wird. Mit Hilfe dieser Involutionen $\alpha_{i,k}$ kann man zu X die Ebene $X\lambda$ finden.

(b) Aus dieser Konstruktion ergibt sich:

Kennt man auf drei kopunktalen Kanten eines Poltetraeders die projektiven Involutionen konjugierter Punkte, so ist dadurch eine projektive Polarität λ (für λ hyperbolisch die zugehörige Quadrik) eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Ist ζ eine Projektion aus einem Auge O auf eine Bildebene nicht durch O , so vermittelt ζ zwischen den nicht projizierenden Ebenen und der Bildebene einen Isomorphismus. Ist μ eine projektive Polarität in einer nicht projizierenden Ebene, so ist daher $\alpha := \zeta^{-1} \mu \zeta$ eine projektive Polarität der Bildebene. Das ζ -Bild des (u.U. existierenden) Staudtschen Kegelschnitts von μ ist der Staudtsche Kegelschnitt von α . Sind die Punkte einer nicht projizierenden Geraden in einer projektiven Involution α gekoppelt, so ist $\alpha' := \zeta^{-1} \alpha \zeta$ eine projektive Involution der Bildpunkte; Fixpunkte von α haben Fixpunkte von α' zu Bildern.

Eine Quadrik M hat, falls das Auge O ein Außenpunkt von M ist, als scheinbaren Umriß den Schnittkegelschnitt des Tangentialkegels Γ_O mit der Bildebene. Dieser kann dadurch festgelegt werden, daß man das ζ -Bild der projektiven Spurrpolarität $\lambda_{O\alpha}$ von λ in der Polarebene $O\alpha$ des Auges ermittelt. Ist O ein Innenpunkt von M , so existiert kein scheinbarer Umriß.

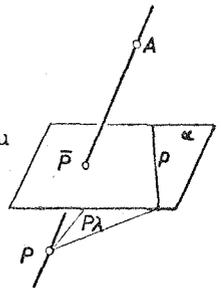
(c) Eine Quadrik M in \mathbb{W}_α ist für $N > 3$ eindeutig festgelegt durch einen Punkt P und einmal Pol A ($\neq P$) und Polarebene α mit $A \notin \alpha$ und $P \notin \alpha$, wenn man die Spurrpolarität λ_α kennt, und wenn PA die Ebene α in einem in λ_α nicht selbstkonjugierten Punkt \bar{P} durchstößt.

Bemerkung: Wäre \bar{P} in λ_α selbstkonjugiert $\Rightarrow \bar{P} \in M \Rightarrow A\bar{P}$ ist Tangente von M in \bar{P} : Widerspruch zu $P \in A\bar{P} \wedge P \in M \wedge P \neq \bar{P}$.

Bew.: Dem Punkt $\bar{P} := PA \cdot \alpha$ wird durch die gegebene Spurrpolarität λ_α die Gerade $p := \bar{P} \lambda_\alpha$ mit $p \notin \bar{P}$ zugeordnet. Gibt es eine Quadrik M , welche in die Angabe paßt, und ist λ die zugehörige projektive hyperbolische Polarität, so ist notwendig Pp die Polarebene von P :

$$\left. \begin{array}{l} P \in M \Rightarrow P\lambda \perp P \\ P, \bar{P}, A \text{ koll.} \Rightarrow P\lambda, \bar{P}\lambda, \alpha \text{ koll.} \\ \bar{P}\lambda \cdot \alpha = \bar{P}\lambda_\alpha = p \end{array} \right\} \Rightarrow P\lambda = Pp.$$

In λ_α existiert für $N > 3$ ein Poldreieck X, Y, Z , das zu \bar{P} und p allgemeine Lage besitzt (vgl. 2.4, Folg. 3, Bem.). Dieses Poldreieck bildet zusammen mit A ein Poltetraeder von λ . Da P und $P\lambda = Pp$ zum Tetraeder A, X, Y, Z allgemein liegen, ist dadurch



eine projektive Polarität λ_0 eindeutig festgelegt, die wegen $P \in P\lambda = P\lambda_0$ hyperbolisch ist und eine Quadrik M_0 bestimmt. λ_0 paßt in die Angabe, denn λ_α und λ_α leisten für \bar{P} und X, Y, Z , also für ein Viereck, dasselbe $\Rightarrow \lambda_{\alpha\alpha} = \lambda_\alpha$.

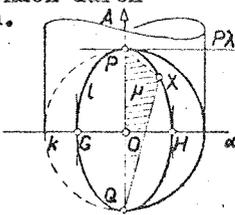
Ist M_1 eine Quadrik (λ_1 die zugehörige hyperbolische Polarität), die ebenfalls in die Angabe paßt $\Rightarrow A\lambda_1 = \alpha = A\lambda_0 \wedge \lambda_{1\alpha} = \lambda_\alpha = \lambda_{0\alpha}$. Da P bezüglich λ_1 selbstkonjugiert ist, muß nach dem ersten Beweisteil notwendig $P\lambda_1 = Pp = P\lambda_0$ gelten. Die projektiven Polaritäten λ_0 und λ_1 ordnen also den Punkten der Fundamentalfigur A, X, Y, Z, P jeweils dieselben Ebenen zu $\Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 \Rightarrow M_0 = M_1$.



Bemerkung: Unter einer Sphäre im PAR versteht man die Menge aller Punkte, die von einem festen eigentlichen Punkt O konstanten Abstand $r > 0$ haben. Dann gilt:

Eine Sphäre des PAR ist eine ovale Quadrik.

Bew.: Der Schnitt der Sphäre S mit einer beliebigen Ebene α durch den Mittelpunkt O ist ein Kreis k, welcher nach 2.2, Folg. 2 ein Kegelschnitt im PAR ist, und daher ein Polarsystem λ_k - eine projektive hyperbolische Polarität - in α festlegt. S wird längs k von einem Zylinder berührt, dessen Erzeugenden durch den Fernpunkt A einer zu α normalen Geraden gehen. Die Gerade AO durchstößt S in den beiden Punkten P und Q.



Nach (c) ist durch P, den Pol A, die Polarebene α und die Spurpolarität $\lambda_\alpha := \lambda_k$ in α genau eine Quadrik M (zugehörige projektive hyperbolische Polarität λ) festgelegt. Gemäß (c) gilt $P = AP \cdot \alpha = 0$ und p ist nun die Ferngerade von α ; daher ist die Tangentialebene $P\lambda$ in P an M die Parallelebene von α durch P. Es gilt $H(A, O; P, Q)$ (Mittelpunkt und Fernpunkt einer Strecke liegen zu den Streckenendpunkten harmonisch), also liegt Q wegen $P\sigma_\lambda = Q$ auch auf M. Es genügt $M=S$ zu zeigen, denn eine Sphäre trägt keine Geraden und ist daher sicher nicht ringartig. Nach Konstruktion gilt $P, Q, k \in M \cap S$.

(i) $X \in S \wedge X \notin k \wedge X \neq P, Q \Rightarrow \exists^* \mu := APX \in \ell$. Wir untersuchen nun $\mathcal{R}_{\mu \cap S}$ und $\mathcal{R}_{\mu \cap M}$.

$\mathcal{R}_{\mu \cap S} = l$ ist ein Kreis, der durch P geht und dort $\mu \cdot P\lambda$ als Tangente hat; außerdem geht l durch die beiden Gegenpunkte G bzw. H von k und hat dort die Geraden AG bzw. AH zu Tangenten. $\mathcal{R}_{\mu \cap M} = l'$. Es gilt $P, G, H \in l'$ und l' ist daher ein Geradenpaar oder ein Kegelschnitt. Nach 4.4, Folg. 1 (für ringartige) bzw. 4.6, Folg. 2, (IV) (für ovale Quadriken) hat jeder ebene Schnitt durch $P \in M$ in P eine Tangente der Quadrik als Tangente \Rightarrow die Gerade $\mu \cdot P\lambda$ ist Tangente in P an l' . Wegen $\mu \cdot P\lambda \perp G, H$ ist l' daher ein Kegelschnitt. Seine Tangente in G ist $\mu \cdot G\lambda$; wegen $G \in \alpha \wedge G \in M$ gilt $G\lambda \perp \alpha \wedge G\lambda \perp G \Rightarrow G\lambda \cdot \mu = GA$. Die Kegelschnitte l und l' haben die Punkte P, G, H und die Tangenten in P und G gemeinsam $\Rightarrow l = l'$.

Also gilt $X \in l = l' \subset M \Rightarrow X \in M$ und damit $S \subset M$.

(ii) Umgekehrt: $Y \in M \wedge Y \notin k \wedge Y \neq P, Q \Rightarrow \exists^* \epsilon := APY \in \ell$. Wie unter (i) erkennt man, daß $\beta_{\epsilon \cap S} = \beta_{\epsilon \cap M}$ und damit $M \subset S$ gilt.



4.7. Nullpolaritäten in dreidimensionalen Pappusräumen

Nach Definition 4.5b versteht man unter einer Nullpolarität eine Polarität ν mit $X\nu \perp X \quad \forall X \in \mathcal{P}$.
Bei Nullpolaritäten sind folgende Bezeichnungen üblich: X ist "Nullpunkt" von $X\nu$ und $X\nu$ ist "Nullebene" von X . Eine selbstpolare Gerade $g = g^\nu$ heißt "Nullgerade".
Für Nullpolaritäten ist auch die Bezeichnung "lineare Nullsysteme" gebräuchlich; wir verwenden diese Bezeichnung nicht.

Folgerungen:

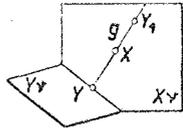
1) Alle Nullgeraden durch einen Punkt $X \in \mathcal{P}$ bilden genau das Bündel $\mathcal{O}_{X, X\nu}$.

Bew.: (a) Ist n Nullgerade mit $n \perp X \Rightarrow n = n^\nu \perp X\nu \wedge X\nu \perp X \Rightarrow n \in \mathcal{O}_{X, X\nu}$.

(b) Jede Gerade $g \in \mathcal{O}_{X, X\nu}$ ist Nullgerade:

$g = XY$ mit $X \neq Y \Rightarrow g^\nu = X\nu \cdot Y\nu$ mit $X\nu \neq Y\nu$. Für die Ebene $Y\nu$ gilt dabei wegen der Nulleigenschaft $Y\nu \perp Y$. Es ist $X\nu \cdot Y\nu = g$ zu zeigen:

(ind.) $Y\nu \cdot X\nu \neq g \Rightarrow$ der Punkt $Y_1 \in \mathcal{P}_g \setminus \{X, Y\}$ hat eine Nullebene $Y_1\nu$ mit $Y_1\nu \perp Y_1$ und wegen X, Y, Y_1 kollinear $\Rightarrow X\nu, Y\nu, Y_1\nu$ kollinear $\Rightarrow Y_1\nu \perp X\nu \cdot Y\nu \Rightarrow Y_1\nu = X\nu$: Widerspruch zur Injektivität von ν .



Bemerkungen: (a) In diesem Beweis wurden nur die Nulleigenschaft und die Eigenschaften einer Korrelation benützt. Bei Ausnützung der Symmetrie der Konjugiertheit wäre Beweisteil (b) einfacher (vgl. Bemerkung c).

(b) D_3 -dual: Alle Nullgeraden in $\xi \in \mathcal{E}$ bilden genau das Bündel $\mathcal{O}_{\xi\nu, \xi}$.

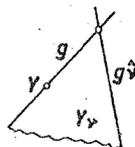
(c) Unter einer "Nullkorrelation" versteht man eine Korrelation δ mit der Nulleigenschaft, d.h. $\forall X \in \mathcal{P}$ ist $X\delta \perp X$. Dann gilt:

Jede Nullkorrelation ist eine Nullpolarität.

Bew.: Es genügt, die Symmetrie der Konjugiertheit zu erweisen. Aus $Y \perp X\delta \wedge X \neq Y \wedge X \perp X\delta \Rightarrow (XY)\delta = XY$, da Folg.1 (vgl. Bem.a) auch für Nullkorrelationen stimmt. Weiters gilt nach Folg.1 auch $YX \in \mathcal{O}_{X, X\delta} \Rightarrow XY \perp Y\delta \Rightarrow Y\delta \perp X$.

2) Nach Folg.1 ist eine Gerade g in $X\nu$ nicht durch X keine Nullgerade: $g \neq g^\nu$. Also existieren Nichtnullgeraden bezüglich einer Nullpolarität ν . (Die Existenz von ν ist jedoch noch offen !)

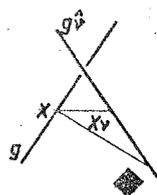
Ist g eine Nichtnullgerade, so ist $g^{\hat{v}}$ zu g windschief (Kurz: $g, g^{\hat{v}}$ ist ein Paar reziproker Polaren).



Bew.: (ind.) g schneidet $g^{\hat{v}}$: Für alle $Y \in \rho_g \wedge Y \notin \rho_{g^{\hat{v}}}$ gilt $Y \in Y_v \wedge Y_v \in g^{\hat{v}} \Rightarrow Y_v = Y_v \cdot g^{\hat{v}}$: Widerspruch zur Injektivität von ν .

3) Jede Nullpolarität ist projektiv.

Bew.: Bezüglich ν existiert sicher eine Nichtnullgerade g , und g und $g^{\hat{v}}$ sind nach Folg.2 windschief. $X \in g \Rightarrow X\nu \in g^{\hat{v}} \wedge X\nu \in X \Rightarrow X\nu = g^{\hat{v}} \cdot X$. Für

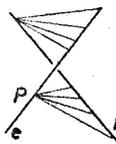


$\hat{v} | \rho_g$ gilt daher:

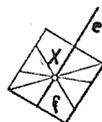
$\rho_g(X) \cap \xi_{g^{\hat{v}}}(X\nu) \Rightarrow \nu$ ist projektiv.

DEF.4.7: Die Menge aller Treffgeraden von zwei windschiefen Geraden ("Achsen") heißt ein hyperbolisches Netz. Die Menge der Geraden aller Büschel, deren Zentren auf einer Geraden ("Achse") liegen und deren Ebenen so durch diese Achse gehen, daß die Reihe der Zentren zum Büschel der Ebenen projektiv ist, heißt ein parabolisches Netz. Die Menge aller Nullgeraden einer Nullpolarität heißt ein Gewinde.

Bemerkungen: (a) Die Achsen e, f eines hyperbolischen Netzes gehören nicht zum Netz, denn die eine trifft die andere nicht. Greift man auf der Achse e einen festen Punkt P heraus, so bilden alle Netzgeraden durch P das Büschel $\mathcal{G}_{P, e}$. Das hyperbolische Netz kann also in zwei Scharen von Büscheln zerlegt werden. Aus Axiom I_2 folgt sofort: Zwei Geraden eines hyperbolischen Netzes, die einander nicht auf einer Achse treffen, sind zueinander windschief.



(b) Für $\rho_e(X) \cap \xi_e(\xi)$ ist die Menge aller Büschel $\mathcal{G}_{X, \xi}$ mit $X \in \rho_e$ nach Definition ein parabolisches Netz. Die Achse e gehört zum parabolischen Netz, denn es gilt $e \in \mathcal{G}_{X, \xi}$ für $X \in \rho_e$. Aus der Injektivität der definierenden Projektivität folgt sofort: Je zwei Geraden eines parabolischen Netzes, die keinen Punkt der Achse gemeinsam haben, sind windschief.



(c) Die Menge aller Tangenten in den Punkten einer Erzeugenden auf einer ringartigen Quadrik ist ein parabolisches Netz; nach 4.4, Folg.2 sind nämlich Tangentialebene und Berührungspunkt in der Berührprojektivität gekoppelt.

(d) Folg.1 lautet umformuliert: Alle Gewindegeraden durch einen Punkt bilden genau ein Büschel. Damit zerfällt auch ein Gewinde in Geradenbüschel.

4) Alle Nullgeraden einer Nullpolarität ν , die eine feste Nullgerade n schneiden, erfüllen ein parabolisches Netz um n . Alle Nullgeraden, die eine feste Nichtnullgerade g schneiden, erfüllen ein hyperbolisches Netz mit den Achsen g und $g\hat{\nu}$.

Bew.: (a) (i) x trifft $n=n\hat{\nu}$ und x ist Nullgerade \Rightarrow dem Punkt $X=xn$ ist die Ebene $X\nu=x\hat{\nu}.n\hat{\nu}=xn$ zugeordnet $\Rightarrow x \in \mathcal{G}_{X,x\nu} \Rightarrow x$ gehört zu dem durch die Projektivität $\rho_n(X) \times \mathcal{L}_n^*(X\nu)$ (vgl.Folg.3) definierten parabolischen Netz N .

(ii) Umgekehrt ist jede Gerade $y \in N$ eine Nullgerade:
 $y=n \Rightarrow n=n\hat{\nu}$.

$y=n\hat{\nu} \in N \Rightarrow y$ trifft n in einem Punkt P und $y \perp P\nu \Rightarrow y \in \mathcal{G}_{P,P\nu} \xrightarrow{F.1} y\hat{\nu}=y$.

(b) (i) Sei n eine Nullgerade, welche die feste Nichtnullgerade g im Punkt S trifft. Nach Folg.2 sind g und $g\hat{\nu}$ windschief und Achsen eines hyperbolischen Netzes N . Es ist $n \in N$ zu zeigen:

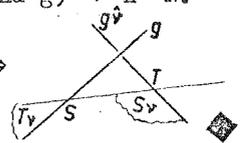
$$\left. \begin{aligned} S \perp g &\Rightarrow S\nu \perp g\hat{\nu} \wedge S\nu \perp S \Rightarrow S\nu = S.g\hat{\nu} \\ S \perp n &\Rightarrow S\nu \perp n\hat{\nu} = n \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

n und $g\hat{\nu}$ liegen in der Ebene $S\nu \Rightarrow n$ trifft $g\hat{\nu}$ (und g) $\Rightarrow n \in N$.

(ii) Ist $y \in N \Rightarrow y$ trifft g in S und $g\hat{\nu}$ in $T \Rightarrow$

$\Rightarrow y=ST \Rightarrow y\hat{\nu}=S\nu.T\nu$ mit $S\nu = S.g\hat{\nu}$ bzw. $T\nu = T.g \Rightarrow$

$\Rightarrow S\nu.T\nu = ST \Rightarrow y\hat{\nu} = y$.

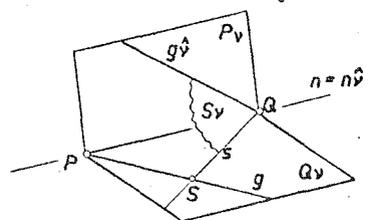


5) Seien n eine Nullgerade einer Nullpolarität ν und P, Q verschiedene Punkte auf $n \Rightarrow P\nu \neq Q\nu \wedge P\nu, Q\nu \perp I \hat{\nu} = n$. Jeder Geraden $g \in \mathcal{G}_{P,Q\nu}$ wird durch $\hat{\nu}$ eine Gerade $g\hat{\nu} \in \mathcal{G}_{Q,P\nu}$ zugeordnet.

Def.: Zwei Geradenbüschel in verschiedenen Ebenen, deren verschiedene Zentren auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen liegen, heißen "verschränkte Geradenbüschel".

$\hat{\nu} | \mathcal{G}_{P,Q\nu}$ ist eine Bijektion zwischen den beiden verschränkten Geradenbüscheln $\mathcal{G}_{P,Q\nu}$ und $\mathcal{G}_{Q,P\nu}$. Mit Ausnahme von n sind $g \in \mathcal{G}_{P,Q\nu}$ und $g\hat{\nu} \in \mathcal{G}_{Q,P\nu}$ Paare reziproker Geraden.

$\hat{\nu} | \mathcal{G}_{P,Q\nu}$ ist eine Projektivität.



Bew.: Sei s aus $\mathcal{G}_{a, a'}$ und $s \neq n \Rightarrow \exists^* gs = S$ und wegen $S \perp g \Rightarrow S \perp g \hat{=} S$; also gilt insgesamt:

$$\mathcal{G}_{p, a'}(g) \perp \mathcal{P}_s(S) \overset{r(E_3)}{\perp} \mathcal{L}_{s \hat{=} (S \perp)} \perp \mathcal{G}_{a, p'}(g \hat{=} S).$$

Jede Treffgerade irgend eines Paares verschiedener Geraden $g, g \hat{=} S$ aus den verschränkten, projektiv gekoppelten Geradenbüscheln $\mathcal{G}_{p, a'}$ und $\mathcal{G}_{a, p'}$ ist nach Folg. 4 Nullgerade. Wir wollen nun umgekehrt von obiger Figur ausgehen, um eine Nullpolarität zu erzeugen; nach Folg. 1 genügt es dann, das Gewinde der Nullgeraden festzulegen.

Sind $\mathcal{G}_{p, \epsilon}$ und $\mathcal{G}_{a, \varphi}$ zwei verschränkte Geradenbüschel und $\alpha: \mathcal{G}_{p, \epsilon} \rightarrow \mathcal{G}_{a, \varphi}$ eine Projektivität mit $(PQ)\alpha = PQ$, dann ist die Menge aller Treffgeraden von je zwei verschiedenen, in α zugeordneten Geraden eine Teilmenge eines Gewindes; zu diesem Gewinde gehört noch ein parabolisches Netz um $n := PQ$, das durch die Angabe mitbestimmt ist ("Erzeugung nach SYLVESTER").

Kurz: Ein Gewinde bzw. eine Nullpolarität ist eindeutig festgelegt durch zwei projektiv gekoppelte, verschränkte Geradenbüschel, deren gemeinsame Gerade selbstzugeordnet ist.

Bew.: Gegeben ist die Projektivität $\alpha: \mathcal{G}_{p, \epsilon} \rightarrow \mathcal{G}_{a, \varphi}$ mit $PQ = \epsilon \varphi = (PQ)\alpha = n$.

Wir gehen nach folgender Beweisidee vor: Zuerst definieren wir eine globale Abbildung $\tilde{\gamma}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}$, wobei einerseits die Angabe ausgenutzt wird und andererseits die Gesetze einer Nullpolarität berücksichtigt werden. Die Abbildung $\tilde{\gamma}$ wird sich als Nullpolarität erweisen und durch die Angabe eindeutig bestimmt sein.

(1) Definition von $\tilde{\gamma}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}$ in vier Schritten:

(I) $X = P: X\tilde{\gamma} = \varphi$, $X = Q: X\tilde{\gamma} = \epsilon$.

Diese Definition ist notwendig, wenn $\forall \mathcal{G}_{p, \epsilon} = \alpha$ gelten soll.

(II) $X \perp \epsilon \wedge X \not\perp n$:

$\Rightarrow \exists^* PX \in \mathcal{G}_{p, \epsilon}$; $(PX)\tilde{\gamma}$ muß die Gerade $(PX)\alpha \in \mathcal{G}_{a, \varphi}$ sein und wegen $X \perp PX$ muß $X\tilde{\gamma}$ durch $(PX)\alpha$ gehen. Daher muß man notwendig definieren:

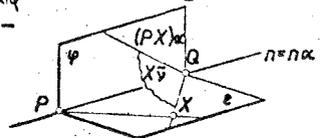
$$X\tilde{\gamma} := X \cdot (PX)\alpha.$$

Hieraus folgt $X\tilde{\gamma} \perp Q \wedge X\tilde{\gamma} \not\perp P$, was wegen

$X \perp \epsilon = Q\tilde{\gamma} \wedge X \not\perp \varphi = P\tilde{\gamma}$ mit den Gesetzen einer Nullpolarität verträglich ist.

Ebenso für $X \perp \varphi \wedge X \not\perp n$:

$$X\tilde{\gamma} := X \cdot (QX)\alpha^{-1} (\Rightarrow X\tilde{\gamma} \perp P \wedge X\tilde{\gamma} \not\perp Q).$$



Bemerkung a: Ist umgekehrt ξ eine beliebige Ebene mit $\xi \perp Q \wedge \xi \not\perp P$, so kann ξ (entsprechend der bisherigen Definition von $\tilde{\gamma}$) nur vom Punkt $(\xi \varepsilon)$. $(\xi \varphi) \alpha^{-1}$ in ε stammen.

(III) $X \not\perp \varepsilon, \varphi$:

$\Rightarrow \exists * PX =: x_1 \wedge \exists * QX =: x_2$; jede Treffgerade aus X an irgendein Paar $g, g\alpha$ mit $g \in \mathcal{U}_{P, \varepsilon} \setminus \{n\}$ ist nach Folg. 4 notwendig

Nullgerade. Wir haben also die Menge M aller Schnittgeraden $Xg, Xg\alpha$ für alle $g \in \mathcal{U}_{P, \varepsilon} \setminus \{n\}$ zu untersuchen.

Liegen alle diese Geraden in einem Geradenbüschel, dann ist entsprechend Folg. 1 die Trägerebene dieses Geradenbüschels als $X\tilde{\gamma}$ zu definieren. Die Menge M kann durch folgende Projektivität γ erzeugt werden:

$$\mathcal{L}_{x_1}(Xg) \bar{\pi} \mathcal{U}_{P, \varepsilon}(g) \bar{\pi} \mathcal{U}_{Q, \varphi}(g\alpha) \bar{\pi} \mathcal{L}_{x_2}(Xg\alpha),$$

in der jedoch wegen $n = n\alpha$ die gemeinsame Büschelebene $x_1 x_2 = Xn$ selbstzugeordnet ist; also ist γ eine Perspektivität. Das Erzeugnis von γ ist ein Geradenbüschel durch X in einer Ebene ξ und wir müssen definieren:

$$X\tilde{\gamma} := \xi.$$

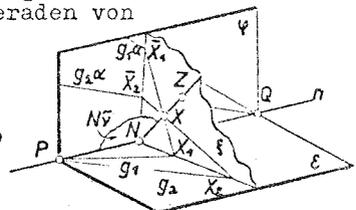
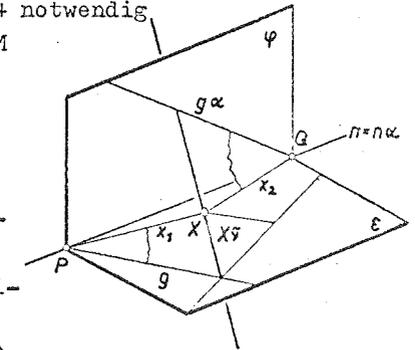
Bemerkung b: Für $X \not\perp n \Rightarrow X\tilde{\gamma} \not\perp n$ wegen:

Fall 1: $X \perp \varepsilon \stackrel{III}{\Rightarrow} X\tilde{\gamma} \not\perp P \Rightarrow X\tilde{\gamma} \not\perp n$; ebenso für $X \perp \varphi$.

Fall 2: $X \not\perp \varepsilon, \varphi$: Nach (III) enthält $X\tilde{\gamma} = \xi$ alle Treffgeraden an g und $g\alpha$; jede dieser Treffgeraden ist für $g+n$ windschief zu $n \Rightarrow X\tilde{\gamma} \not\perp n$.

Bemerkung c: Ist umgekehrt ξ eine beliebige Ebene mit $\xi \perp P, Q$, so sind als Ursprünge von ξ unter $\tilde{\gamma}$ (entsprechend der vorläufigen Definition) Punkte aus (I) und (II) ausgeschlossen. Wir betrachten die Menge aller in ξ liegenden Treffgeraden von Paaren $g, g\alpha$ für alle $g \in \mathcal{U}_{P, \varepsilon} \setminus \{n\}$.

Dies führt zur Projektivität δ :
 $\mathcal{R}_{\xi}(X_1) \bar{\pi} \mathcal{U}_{P, \varepsilon}(g) \bar{\pi} \mathcal{U}_{Q, \varphi}(g\alpha) \bar{\pi} \mathcal{R}_{\xi}(X_2)$,
 die wegen $n = n\alpha$ den Punkt $\xi \cdot n$ selbst zuordnet $\Rightarrow \delta$ ist eine Perspektivität, und das Zentrum X von δ ist der $\tilde{\gamma}$ -Ursprung von ξ . Es gilt $X \not\perp n$.



(IV) Es fehlen noch die von P und Q verschiedenen Punkte N auf n (vgl. Figur zu Bemerkung c). Wegen $n = n\alpha$ muß $N\tilde{\gamma}$ durch n gehen.

Wir wählen nun eine beliebige Ebene ξ durch $N \wedge \xi \not\perp n$. Nach Bemerkung c existiert zu ξ eindeutig der $\tilde{\gamma}$ -Ursprung $X(X \not\perp n)$ als Zentrum der Perspektivität δ . Wegen $N \perp \xi$ muß notwendig $N\tilde{\gamma} \perp X$

Bemerkung d: Um diese Definition als sinnvoll zu erweisen müssen wir zeigen, daß sie unabhängig von der Wahl der Ebene $\xi \perp n$ durch N ist. Wir wählen zunächst ξ fest. Nach 3.5, Folg. 1 existiert genau eine Elation α mit Zentrum N , Achse $N\tilde{Y}$ und $X_1 \mapsto X_2$ ($X_1 := g \cdot \xi$, $X_2 := g \cdot \alpha \cdot \xi$, vgl. Figur zu Bemerkung c). Da P in der Achse $N\tilde{Y}$ liegt, leistet α daher $g_1 \cdot \hat{\alpha} = g_2$. Der Punkt $X = X_1 \cdot X_2$ liegt in $N\tilde{Y}$, daher leistet α auch $X_1 \mapsto X_2$ ($X_1 := g_1 \cdot \alpha \cdot \xi$, $X_2 := g_2 \cdot \alpha \cdot \xi$, vgl. Figur), da außerdem $\varphi \alpha^* = \varphi$ wegen $Q \perp N$ gilt. Wegen $Q \perp N\tilde{Y}$ folgt daraus $g_1 \cdot \alpha \cdot \hat{\alpha} = g_2 \cdot \alpha$.

Sei nun $\eta \in \mathcal{E}$ mit $\eta \perp N \wedge \eta \perp n$. Entsprechend Bemerkung c kann der Ursprung Y von η konstruiert werden:

$$g_1 \cdot \eta =: Y_1, \quad g_2 \cdot \alpha \cdot \eta =: Y_2 \implies Y = Y_1 \cdot Y_2$$

Um zu zeigen, daß sich für ξ und η dieselbe Ebene $N\tilde{Y}$ einstellt, genügt es $Y \perp N\tilde{Y}$ zu zeigen. Wegen $\eta \perp N$ gilt $\eta \alpha^* = \eta \implies Y_1 \cdot \alpha = (g_1 \cdot \eta) \cdot \alpha = g_1 \cdot \eta = Y_1 \wedge Y_2 \cdot \alpha = (g_2 \cdot \alpha \cdot \eta) \cdot \alpha = g_2 \cdot \alpha \cdot \eta = Y_2 \implies (Y_1 \cdot Y_2) \cdot \hat{\alpha} = Y_1 \cdot Y_2 \implies$ der Schnittpunkt dieser zugeordneten Geraden liegt in der Achse $N\tilde{Y}$, also $(Y_1 \cdot Y_2) \cdot \hat{\alpha} = Y \perp N\tilde{Y}$.

Bemerkung e: Ist Z ein beliebiger Punkt auf NX verschieden von N und X , dann enthält die in (III) erklärte Ebene $Z\tilde{Y}$ den Punkt N : $Z\tilde{Y}$ ist Trägerebene aller Geraden $Zg \cdot Zg\alpha$ für alle $g \in \mathcal{O}_{P,\epsilon} \setminus \{n\}$. Wegen $Z \perp N\tilde{Y}$ gilt $Z\alpha = Z$ und weiters

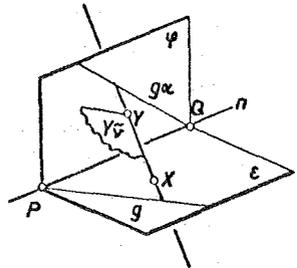
$$(Zg_1 \cdot Zg_2 \cdot \alpha) \cdot \hat{\alpha} = (Z\alpha g_1 \cdot \hat{\alpha}) \cdot (Z\alpha g_2 \cdot \hat{\alpha}) = Zg_2 \cdot Zg_2 \cdot \alpha \implies (h \cdot \epsilon) \alpha = l \cdot \epsilon \text{ wegen } \hat{\alpha} =: h$$

$\epsilon \alpha^* = \epsilon$. Die Punkte $h \cdot \epsilon$ bzw. $l \cdot \epsilon$ sind Spurpunkte von Geraden aus $Z\tilde{Y}$ in ϵ ; da diese in α zugeordnet sind, geht die Spur von $Z\tilde{Y}$ durch das Zentrum N von $\alpha \implies Z\tilde{Y} \perp N$.

(2) Die in Schritt (1) erklärte globale Abbildung $\tilde{\nu}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$ besitzt nach Def.(I)-(IV) die Nulleigenschaft. Es genügt daher, die Symmetrie der Konjugiertheit zu bestätigen, um $\tilde{\nu}$ als Nullpolarität zu erkennen.

Aus $X \perp Y\tilde{Y}$ und der Nulleigenschaft ($Y \perp Y\tilde{Y}$) folgt $XY \perp Y\tilde{Y}$ für $X \neq Y$. Dabei sind je nach Lage von XY zur Angabe einige Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: XY windschief zu $n \implies X, Y \perp n \implies X\tilde{Y}$ und $Y\tilde{Y}$ sind nach (II) oder (III) erklärt. Die Gerade YX liegt in $Y\tilde{Y}$ und geht durch Y , sie ist daher Treffgerade eines bestimmten Paares $g, g\alpha$ mit $g \in \mathcal{O}_{P,\epsilon} \setminus \{n\}$. Die Ebene $X\tilde{Y}$ enthält ihrerseits alle Treffgeraden von Paaren $g, g\alpha$, die durch X gehen $\implies XY \perp X\tilde{Y} \implies Y \perp X\tilde{Y}$.

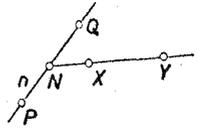


Fall 2: XY schneidet n im Punkt $N \neq P, Q$.

Fall 2.1: $X=N$: Nach Voraussetzung gilt $N=X \perp Y\tilde{Y}$;

wegen $Y=N$ gilt $Y \not\perp n$, woraus $Y\bar{\nu} \not\perp n$ nach Bemerkung b folgt. Die Ebene $Y\bar{\nu}$ kann also gemäß (IV) zur Konstruktion von $N\bar{\nu}$ benützt werden: $N\bar{\nu} = nY \Rightarrow N\bar{\nu} = X\bar{\nu} \perp Y$.

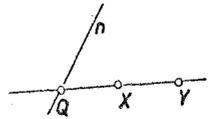
Fall 2.2: $X=N$: Nach Bemerkung c geht für alle Punkte Z der Geraden NX die Ebene $Z\bar{\nu}$ durch $N \Rightarrow X\bar{\nu} \perp N \wedge X\bar{\nu} \perp X \Rightarrow X\bar{\nu} \perp NX \wedge NX \perp Y \Rightarrow Y \perp X\bar{\nu}$.



Fall 3: XY schneidet n in Q (oder P) $\wedge XY \neq n$; wegen $XY \perp Y\bar{\nu} \Rightarrow Q \perp Y\bar{\nu}$.

Fall 3.1: $Y\bar{\nu} \not\perp n \Rightarrow Y=Q$ (ind. $Y=Q \Rightarrow Y\bar{\nu} = \epsilon \perp n$: Widerspruch).

Auf $Y\bar{\nu}$ kann Bemerkung a angewendet werden, wonach $Y \perp \epsilon$ gilt (die $\bar{\nu}$ -Bilder von Punkten aus (III) und (IV) sind stets von ϵ verschieden). Aus $Q, Y \perp \epsilon \Rightarrow QY \perp \epsilon \wedge X \perp QY \Rightarrow X \perp \epsilon \stackrel{(II)}{\Rightarrow} X\bar{\nu} \perp Q$.



Fall 3.1.1: $X=Q$: Aus $X\bar{\nu} \perp Q$ und $X\bar{\nu} \perp X$ folgt $XQ \perp X\bar{\nu} \wedge Y \perp XQ \Rightarrow Y \perp X\bar{\nu}$.

Fall 3.1.2: $X=Q \Rightarrow X\bar{\nu} = Q\bar{\nu} \stackrel{(II)}{=} \epsilon$; nach 3.1 gilt $Y \perp \epsilon = X\bar{\nu}$.

Fall 3.2: $Y\bar{\nu} \perp n \Rightarrow Y \perp n$ (aus $Y \not\perp n$ müßte nach Bemerkung b nämlich $Y\bar{\nu} \not\perp n$ folgen) $\Rightarrow Y=Q \Rightarrow Y\bar{\nu} = Q\bar{\nu} \stackrel{(II)}{=} \epsilon$. Aus $X \perp Y\bar{\nu} = \epsilon$ folgt daher nach (II) $X\bar{\nu} \perp Q=Y$.

Fall 4: $XY=n$: Nach (IV) bzw. (I) gilt dann $X\bar{\nu} \perp n \wedge Y\bar{\nu} \perp n \Rightarrow Y \perp X\bar{\nu}$.

Damit ist $\bar{\nu}$ eine Nullpolarität, die in die Angabe paßt. Das zugehörige Gewinde besteht aus allen Treffgeraden von Paaren g, g^α und einem parabolischen Netz, das durch $\bar{\nu}$ um die Nullgerade n bestimmt wird.

(3) $\bar{\nu}$ ist die einzige Nullpolarität, welche in die Angabe paßt. Alle Definitionen von $\bar{\nu}$ wurden nämlich zwingend aus den Gesetzen einer Nullpolarität hergeleitet.



Bemerkungen: (a) Damit ist gezeigt, daß in jedem Pappusraum Nullpolaritäten existieren, denn in jedem \mathbb{T}_{pp} existieren Sylvesterangaben.

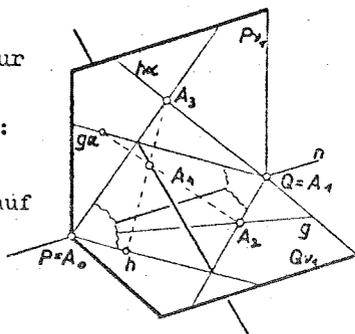
(b) PP wurde im Beweis nur beim Schluß benützt, daß zwei projektive Ebenenbüschel mit schneidenden Achsen dann perspektiv sind, wenn die gemeinsame Büschelebene selbstzugeordnet ist. Diese Aussage, PP und FS sind bekanntlich (1.9) logisch äquivalent.

6) In einem \mathbb{T}_{pp} sind je zwei Nullpolaritäten projektiv kollinear. (Im Sinne von $PGL(\mathbb{T}_{pp}^3)$ existiert genau eine Nullpolarität.)

Bew.: Seien ν_1 und ν_2 zwei Nullpolaritäten. Die Nullpolarität ν_1 ist durch eine Sylvesterangabe mit der Projektivität $\alpha: \mathcal{O}_{p,\alpha,\nu_1} \rightarrow \mathcal{O}_{q,\alpha,\nu_1}$ mit $n:=PQ=(PQ)\alpha$ nach Folg.5 eindeutig festlegbar. Wir passen nun

dieser Sylvesterangabe eine Fundamentalfigur $\{A_0, \dots, A_4\}$ so an, daß die Sylvesterangabe daraus eindeutig rekonstruiert werden kann:

$A_0 := P$, $A_1 := Q$. Wir wählen A_2 beliebig auf $g \in \mathcal{U}_{P,Q} \setminus \{n\}$ und verschiedenen A_0 ; A_3 beliebig auf $h\alpha$ mit $h \in \mathcal{U}_{P,A_0} \setminus \{n, g\}$ und verschiedenen A_1 . Schließlich sei A_4 ein beliebiger Punkt der Geraden $(g\alpha.A_2) \cdot (h.A_3)$, der nicht in $P\nu_1$ oder $Q\nu_1$ liegt; $\{A_0, \dots, A_4\}$ ist somit eine Fundamentalfigur.



Aus $\{A_0, \dots, A_4\}$ kann die Sylvesterangabe folgendermaßen eindeutig rekonstruiert werden:

$P=A_0$, $Q=A_1$, $Q\nu_1=A_0A_1A_2$, $P\nu_1=A_0A_1A_3$ und die Projektivität α ist eindeutig festgelegt durch $PQ \mapsto PQ$, $g=A_0A_2 \mapsto g\alpha=A_1(A_2A_4.P\nu_1)$, $h=A_0(A_3A_4.Q\nu_1) \mapsto h\alpha=A_1A_3$.

Analog legen wir ν_2 eindeutig durch eine Sylvesterangabe fest, welche ihrerseits wieder eindeutig durch eine analoge Fundamentalfigur $\{B_0, \dots, B_4\}$ festgelegt wird.

Nach Satz 3.7 existiert genau eine projektive Kollineation $\alpha \in \text{PGL}(\mathbb{P}_{PP}^3)$ mit $A_i\alpha = B_i$ ($i=0 \dots 4$), und α führt ν_1 in ν_2 über, da α die Sylvesterangaben zuordnet.

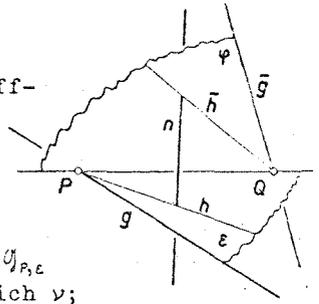


Bemerkung: Da die Punkte der Fundamentalfigur weitgehend willkürlich wählbar sind, gibt es nichttriviale projektive Kollineationen, welche eine Nullpolarität festlassen. Jede Nullpolarität gestattet also automorphe projektive Kollineationen. Ganz allgemein gilt: Ist G eine Gruppe von Abbildungen einer Menge M auf sich und besteht $G' \subset G$ aus allen Abbildungen aus G , die eine Teilmenge M' von M als Ganzes festlassen, so ist G' Untergruppe von G , da G' abgeschlossen gegen Produkt- und Inversenbildung ist. Die Menge aller automorphen projektiven Kollineationen eines Gewindes ist daher eine Untergruppe von $\text{PGL}(\mathbb{P}_{PP}^3)$; sie heißt die "Symplektische Gruppe" von \mathbb{P}_{PP}^3 .

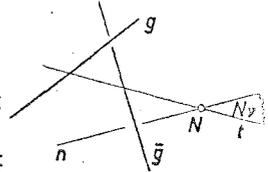
7) Eine Nullpolarität ν in \mathbb{P}_{PP} ist eindeutig festgelegt durch ein Paar reziproker Polaren g, \bar{g} und eine Nullgerade n , die zu g und \bar{g} windschief ist.

Bew.: (a) Existenz: Wir legen in die Angabe eine Sylvestererzeugung. Dazu wählen wir $P \in \mathcal{R}_g$ und $Q \in \mathcal{R}_{\bar{g}}$ beliebig; wegen $P \perp g$ ist notwendig die Ebene $P\bar{g}$ als Ebene $P\nu =: \varphi$ zu benutzen; analog gilt $\varepsilon =: Q.g$. Die Büschel $\mathcal{U}_{P,\varepsilon}$ und $\mathcal{U}_{Q,\varphi}$ sind verschränkt und die Projektivität $\alpha: \mathcal{U}_{P,\varepsilon} \rightarrow \mathcal{U}_{Q,\varphi}$ ist in \mathbb{P}_{PP} eindeutig festgelegt durch:

(1) $PQ \mapsto PQ$, (2) $g \mapsto \bar{g}$, (3) der einzigen Treffgeraden h des Büschels $\mathcal{U}_{P,\epsilon}$ an n ordne α die einzige Treffgerade \bar{h} des Büschels $\mathcal{U}_{Q,\varphi}$ an n zu. Nach Folg.5 gehört zu dieser Sylvesterangabe genau eine Nullpolarität ν , und diese paßt in die Angabe, denn g und \bar{g} sind in $\alpha = \mathcal{U}_{P,\epsilon}$ gekoppelt und damit reziproke Polaren bezüglich ν ; weiters ist n eine Nullgerade, denn n trifft die in α gekoppelten Geraden h und \bar{h} .

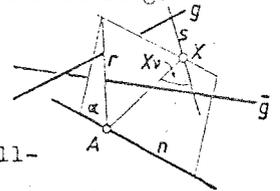


(b) Eindeutigkeit: Seien ν_1 und ν_2 zwei Nullpolaritäten, welche in die Angabe passen. Für Punkte $X \in \mathcal{P}_g$ gilt notwendig $X\bar{g} = X\nu_1 = X\nu_2$; ebenso $Y \in \mathcal{P}_{\bar{g}} \Rightarrow Yg = Y\nu_1 = Y\nu_2$. Für einen beliebigen Punkt $N \in \mathcal{P}_n$ existiert genau eine Treffgerade $t (+n)$ an g und \bar{g} und nach Folg.4 ist t notwendig Nullgerade bezüglich ν_1 und ν_2 ; nach Folg.1 liegen die Nullgeraden n und t in der Nullebene von N bezüglich ν_1 und $\nu_2 \Rightarrow nt = N\nu_1 = N\nu_2$. Aus $\mathcal{P}_g \cup \mathcal{P}_{\bar{g}} \cup \mathcal{P}_n$ kann immer eine Fundamentalfigur herausgegriffen werden und für ihre Punkte leisten ν_1 und ν_2 dasselbe. Nach 4.5, Folg.3 und 4.7, Folg.3 $\Rightarrow \nu_1 = \nu_2$.



Bemerkungen: (a) Für $N=2$ ist die Projektivität $\alpha: \mathcal{U}_{P,\epsilon} \rightarrow \mathcal{U}_{Q,\varphi}$ bereits durch (1) $PQ \mapsto PQ$, (2) $g \mapsto \bar{g}$ völlig bestimmt und daher eine Nullpolarität bereits durch ein Paar windschiefer reziproker Polaren g, \bar{g} eindeutig festgelegt.

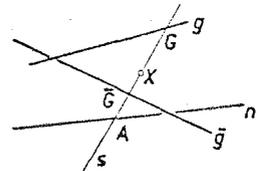
(b) Sei ν eine durch die obige Angabe g, \bar{g} und n eindeutig gegebene Nullpolarität; es soll nun für einen Punkt $X \in \mathcal{P}_g \cup \mathcal{P}_{\bar{g}} \cup \mathcal{P}_n$ die Nullebene konstruiert werden. Die eindeutig bestimmte Treffgerade s aus X an g und \bar{g} ist nach Folg.4 Nullgerade. In der eindeutig bestimmten Ebene $Xn =: \alpha$ existiert genau eine Treffgerade $r (+n)$ an g und \bar{g} , welche nach Folg.4 Nullgerade ist. Die in α liegenden Nullgeraden n und r gehen nach Folg.1, Bem.b durch den Nullpunkt $\alpha\nu^* =: A$ von α . Die eindeutig bestimmte Gerade AX stammt aus $\mathcal{U}_{A,\alpha}$, ist also nach Folg.1 Nullgerade.



Fall 1: $s \neq XA$: Die beiden Nullgeraden s und XA durch X liegen nach Folg.1, Bem.b in der Nullebene von $X \Rightarrow X\nu = s.XA$.

Fall 2: $s = XA$: s trifft g bzw. \bar{g} in G bzw. \bar{G} und außerdem noch n im Punkt A (Fall 2 tritt also genau dann ein, wenn X auf der durch g, \bar{g} und n eindeutig festgelegten ringartigen Quadrik liegt).

Da zu den Punkten G, \bar{G} und A nach Beweisteil (b) von Folg.4 die Nullebene konstruiert werden kann, ist die Projektivität $\nu | \mathcal{P}_s : \mathcal{P}_s \rightarrow \mathcal{L}_s$ (Folg.3) in \mathbb{T}_{pp} eindeutig festgelegt und kann vervollständigt werden.



(c) D_2 -dual läßt sich der Nullpunkt einer Ebene konstruieren, wenn ν durch die Angabe aus Folg.7 bestimmt ist.

(d) Eine Nullpolarität ν in \mathbb{P}^3 ist eindeutig festgelegt durch ein parabolisches Netz von Nullgeraden und eine weitere Nullgerade n , welche zur Netzachse a windschief ist. Sind nämlich P und Q zwei verschiedene Punkte auf n , so ist die Nullebene φ bzw. $\bar{\varphi}$ von P bzw. Q die Verbindungsebene von n mit der eindeutig bestimmten Netzgeraden durch P bzw. Q . Da a Nullgerade ist, sind $g := P.a\bar{\varphi}$ und $\bar{g} := Q.a\varphi$ reziproke Polaren, die für $N=2$ bereits ν festlegen, während für $N \geq 3$ noch eine zu g und \bar{g} windschiefe Nullgerade des gegebenen Netzes benötigt wird.

SATZ 4.7: In \mathbb{P}^3 existieren Nullpolaritäten und je zwei sind projektiv äquivalent. Jede Nullpolarität ist projektiv und eindeutig festgelegt durch zwei projektive verschränkte Geradenbüschel mit selbstzugeordneter gemeinsamer Büschelgeraden bzw. durch zwei reziproke Polaren und eine zu beiden windschiefe Nullgerade. Durch jeden Punkt geht und in jeder Ebene liegt ein Büschel von Gewindegeraden und alle Gewindegeraden, die eine feste Gewindegerade bzw. Nichtgewindegerade schneiden, bilden ein parabolisches Netz bzw. ein hyperbolisches Netz mit reziprok polaren Achsen.

Anwendung:

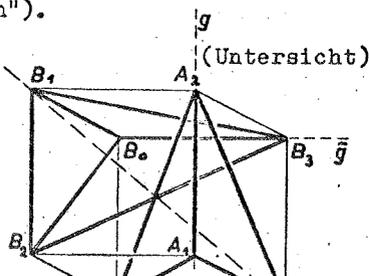
Unterwirft man ein Tetraeder $\{A_0, \dots, A_3\}$ in \mathbb{P}^3 einer Nullpolarität ν , so erhält man vier Ebenen $A_i \nu =: \alpha_i$, die nicht kopunktal sind. Diese bestimmen zu je dreien einen Schnittpunkt $B_i := \alpha_j \alpha_k \alpha_l$ (i, j, k, l pw. verschieden), und $\{B_0, \dots, B_3\}$ ist wieder ein Tetraeder.

Geht man vom Tetraeder $\{B_0, \dots, B_3\}$ aus, so gilt wegen $B_i = \alpha_j \alpha_k \alpha_l$ dann $B_i \nu = A_j A_k A_l$, also ist $B_i \nu$ eine Seitenfläche des ersten Tetraeders; diese Seitenflächen ergeben zu je dreien geschnitten das Ausgangstetraeder $\{A_0, \dots, A_3\}$.

Es gilt $A_i \in \alpha_i$ und $B_i \in B_i \nu = A_j A_k A_l$, d.h. die Ecken des ersten Tetraeders liegen in den Seitenflächen des zweiten, und die Ecken des zweiten Tetraeders in den Seitenflächen des ersten. Die beiden Tetraeder sind einander gleichzeitig ein- und umbeschrieben (ein "Paar von Möbiustetraedern").

Beispiel im PAR:

Wir gehen von einem Würfel aus und bilden aus Würfecken, die auf windschiefen Würfelkanten liegen, das Tetraeder $\{A_0, \dots, A_3\}$ (vgl. Figur). Dieses Tetraeder unterwerfen wir jener Nullpolarität ν , die nach Folg.7 durch zwei windschiefe Würfelkanten (eine davon ist Tetraederkante, die andere nicht) als reziproke Geraden g, \bar{g} und die zu diesen



windschiefe Würfeldiagonale als Nullgerade n eindeutig festgelegt ist. Konstruktion von α_1 nach Folg.7, Bem.a ergibt das Tetraeder $\{B_0, \dots, B_3\}$.

4.8. Kubiken in dreidimensionalen Pappusräumen

In Def.4.1c wurde erklärt, was unter einer projektiven Kollineation $\alpha: \mathcal{P}_\sigma \rightarrow \mathcal{P}_\tau$ zwischen verschiedenen Ebenen σ, τ in \mathbb{P}_{pp}^3 zu verstehen ist. Nach 4.1, Folg.10 ist α durch zugeordnete Vierecke eindeutig festgelegt; zu α gehört eine Geradenabbildung $\alpha^*: \mathcal{G}_\sigma \rightarrow \mathcal{G}_\tau$.

D_3 -dual ist eine projektive Kollineation $\alpha: \ell_S \rightarrow \ell_T$ zwischen den verschiedenen Koebenen S und T erklärt; $\alpha^*: \mathcal{G}_S \rightarrow \mathcal{G}_T$ ist die zugehörige Abbildung der Geraden der Bündel.

DEF.4.8a: Eine Punktmenge in \mathbb{P}_{pp}^3 heißt eine Punktkubik, wenn sie die Menge der Schnittpunkte zugeordneter schneidender Geraden zweier verschiedener projektiv kollinearere Bündel ist, in denen keine selbstzugeordnete Gerade und keine selbstzugeordnete Ebene existieren; jede Schnittgerade zugeordneter Ebenen heißt eine Sehne der Punktkubik. Eine Ebenenmenge in \mathbb{P}_{pp}^3 heißt eine Ebenenkubik, wenn sie die Menge der Verbindungsebenen zugeordneter schneidender Geraden zweier verschiedener projektiv kollinearere Ebenen ist, in denen keine selbstzugeordnete Gerade und kein selbstzugeordneter Punkt existieren; jede Verbindungsgerade zugeordneter Punkte heißt Achse der Ebenenkubik.

Punktkubik und Ebenenkubik sowie Sehne und Achse sind D_3 -duale Begriffe.

Punktkubik:

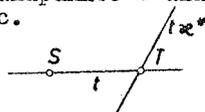
$c := \{X \in \mathcal{P} \mid X = x.x\alpha^* \text{ mit } x \in \mathcal{G}_\sigma \wedge \wedge \alpha^*: \mathcal{G}_\sigma \rightarrow \mathcal{G}_\tau \wedge \alpha^* \text{ projektive Kollineation} \wedge S+T \wedge \text{es existiert keine selbstzugeordnete Gerade in } \alpha^* \wedge \text{es existiert keine selbstzugeordnete Ebene in } \alpha\}$

Ebenenkubik:

$\mathcal{G} := \{\xi \in \ell \mid \xi = x.x\alpha^* \text{ mit } x \in \mathcal{G}_\sigma \wedge \wedge \alpha^*: \mathcal{G}_\sigma \rightarrow \mathcal{G}_\tau \wedge \alpha^* \text{ projektive Kollineation} \wedge \sigma+\tau \wedge \text{es existiert keine selbstzugeordnete Gerade in } \alpha^* \wedge \text{es existiert kein selbstzugeordneter Punkt in } \alpha\}$

S und T heißen "Grundpunkte" der Punktkubik c .
 σ und τ heißen "Grundebenen" der Ebenenkubik \mathcal{G} .

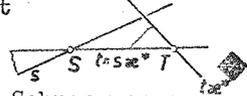
Bemerkungen: (a) Die Punktkubik c enthält die Grundpunkte S und T . Die Gerade ST enthält keinen weiteren Punkt von c .



Bew.: $ST =: t \ (\in \mathcal{U}_S)$ $\xrightarrow{\alpha^*}$ $t\alpha^*(+t) \in \mathcal{U}_T \Rightarrow T = tt\alpha^* \Rightarrow T \in c$. Ebenso erhält man $S \in c$ mit α^{*-1} . Nach Def. 4.8a sind S und T die einzigen Kubikpunkte auf ST. ◆

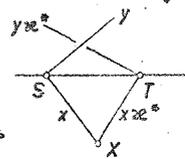
(b) $s\alpha^* := TS \in \mathcal{U}_T \Rightarrow \exists^* s \in \mathcal{U}_S$. Es gilt: s und $t\alpha^*$ sind windschief.

Bew.: Die Ebene $st \in \mathcal{E}_S$ geht bei α über in $(st)\alpha = s\alpha^*.t\alpha^* = t.t\alpha^*$. (ind.) s schneidet $t\alpha^* \Rightarrow st = tt\alpha^* \Rightarrow$ Ebene st ist selbstzugeordnet: Widerspruch zu Def. 4.8a.



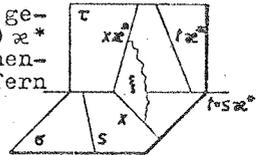
(c) Die Geraden s, ST und $t\alpha^*$ sind Sehnen von c.

Bew.: $ST = (st).$ $(st)\alpha \Rightarrow ST$ ist Sehne; $st =: \sigma\alpha \in \mathcal{E}_T \Rightarrow \exists^* \sigma \in \mathcal{E}_S$ mit $s \perp \sigma$ wegen $s\alpha^* = t \perp \sigma\alpha$. Weiters ist $\sigma \neq \sigma\alpha$ nach Voraussetzung $\Rightarrow s = \sigma.\sigma\alpha$ ist Sehne. Analoges gilt für $t\alpha^*$. ◆



(d) Existiert ein $X \in c$ mit $X \neq S, T$, so treffen einander in X zwei zugeordnete Geraden x und $x\alpha^*$. Eine beliebige Gerade $y \in \mathcal{U}_S$ wird jedoch die zugeordnete Gerade $y\alpha^* \in \mathcal{U}_T$ i.a. nicht treffen. Nur gewisse Geraden $x \in \mathcal{U}_S$ liefern Punkte X der Punktkubik, wobei x und $x\alpha^*$ je in einer Ebene durch ST liegen.

(e) D_3 -dual: Die Grundebenen σ und τ gehören zur Ebenenkubik; $s := (\sigma\tau)\alpha^{*-1}$ und $t\alpha^* := (\sigma\tau)\alpha^*$ sind windschief; s, $\sigma\tau$ und $t\alpha^*$ sind Achsen der Ebenenkubik. Nur spezielle Geraden x des Feldes \mathcal{U}_σ liefern Ebenen ξ von γ , nämlich solche, welche die zugeordnete Gerade $x\alpha^*$ auf $\sigma\tau$ treffen.

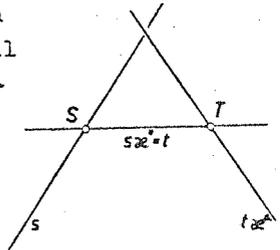


Folgerungen:

Unser Ziel ist zu zeigen, daß alle Punkte einer Punktkubik als Grundpunkte benützt werden dürfen. Dazu beweisen wir vorbereitend einige Aussagen.

1) Alle Sehnen durch den Grundpunkt S bilden einen quadratischen Geradenkegel $\mathcal{U}_T(S)$, welcher durch die Projektivität $\alpha|t$, erzeugt wird. Die Verbindungsgeraden der von S verschiedenen Punkte der Punktkubik c mit S sind genau die von s verschiedenen Sehnen durch S.

Bew.: (a) Gemäß Def. 4.8a ist eine Sehne von c Schnittgerade von in α zugeordneten Ebenen $\xi (\in \mathcal{L}_s)$ und $\xi\alpha (\in \mathcal{L}_T)$; dabei ist die Gerade $\xi, \xi\alpha$ stets eindeutig bestimmt, da nach Voraussetzung $\xi \neq \xi\alpha \ \forall \xi \in \mathcal{L}_s$ gilt. Soll nun die Sehne $\xi, \xi\alpha$ durch S gehen, so muß notwendig $\xi\alpha$ durch S gehen, also muß $\xi\alpha$ die Gerade ST enthalten: $\xi\alpha \cap ST = s\alpha^*$. Hieraus folgt $\xi \cap s$. Geht man umgekehrt von einer Ebene $\eta \in \mathcal{L}_s$ aus, so geht $\eta\alpha$ durch $s\alpha^* = ST$, und die Sehne $\eta, \eta\alpha$ geht durch S . Die Menge aller Sehnen durch S wird daher durch die Projektivität $\alpha|_{\mathcal{L}_s}: \mathcal{L}_s \rightarrow \mathcal{L}_{s\alpha^*}$ erzeugt. Nach den Voraussetzungen über α ist in $\alpha|_{\mathcal{L}_s}$ keine Ebene selbstzugeordnet und daher ist $\alpha|_{\mathcal{L}_s}$ keine Perspektivität. Die Projektivität $\alpha|_{\mathcal{L}_s}$ erzeugt somit nach Def. 4.2a einen quadratischen Geradenkegel $\mathcal{U}_{\Gamma(S)}$; nach Bem.c gilt $s \in \mathcal{U}_{\Gamma(S)}$.



(b) Sei nun $X \in c$ und $X \neq S$. Es ist zu zeigen, daß $XS =: x$ eine von s verschiedene Sehne von c ist, d.h. $x \in \mathcal{U}_{\Gamma(S)}$ mit $x \neq s$.

(ind.) $x = s \Rightarrow X = x \cdot x\alpha^* = s \cdot s\alpha^* = S$: Widerspruch.

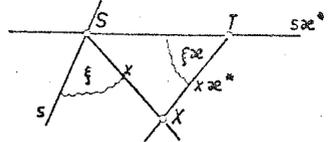
Wegen $x \neq s$ ist die Ebene $\xi := sx$ eindeutig bestimmt $\Rightarrow \xi\alpha = s\alpha^* \cdot x\alpha^* \Rightarrow \xi\alpha = STX$, da

$S, T \mid I s\alpha^* \wedge X \mid I x\alpha^* \wedge S, T, X$ nicht

kollinear ($X \notin ST$ nach Bem.a) \Rightarrow

$SX = x \cap \xi\alpha$.

$\left. \begin{array}{l} \xi \cap x \\ \xi\alpha \cap x \end{array} \right\} \xi, \xi\alpha = x \Rightarrow x$ ist nach Def. eine Sehne von c durch $S \Rightarrow x \in \mathcal{U}_{\Gamma(S)}$.



Speziell für $X = T (\in c)$ gilt nach Bem.c: ST ist Sehne, d.h. $ST \in \mathcal{U}_{\Gamma(S)}$.

(c) Ist umgekehrt $x (\neq s)$ eine Sehne durch S , d.h. $x \in \mathcal{U}_{\Gamma(S)} \setminus \{s\}$, so gilt $x = \xi, \xi\alpha$ mit $\xi \in \mathcal{L}_s$. Wegen

$\left. \begin{array}{l} x \cap \xi \Rightarrow x\alpha^* \cap \xi\alpha \\ x \cap \xi\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow x, x\alpha^* \mid I \xi\alpha$, d.h. x schneidet $x\alpha^*$ und zwar nach

Def. in einem Punkt $X \in c$. Es gilt $X \neq S$:

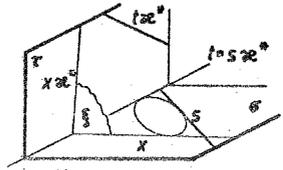
(ind.) $X = S \Rightarrow x \cdot x\alpha^* = X = S = s \cdot s\alpha^* \Rightarrow x = s$: Widerspruch. ◆

Bemerkungen: (a) Andere Formulierung: Jede Sehne durch S verschieden s enthält noch genau einen von S verschiedenen Punkt der Punktkubik c ; die Gerade s enthält genau den Punkt S von c . Verbindet man alle von S verschiedenen Punkte von c mit S , so erhält man den längs der Geraden s geschlitzten Geradenkegel $\mathcal{U}_{\Gamma(S)}$.

$\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ heißt "Sehnen(-geraden-) kegel von c in S ".

D_3 -dual: Schneidet man alle von der Grundebene σ verschiedenen Ebenen einer Ebenenkubik γ mit σ , so erhält man einen längs der Geraden s geschlitzten Geradenkegelschnitt $\mathcal{O}_{K(\sigma)}$.

$\mathcal{O}_{K(\sigma)}$ heißt "Achsen(-geraden-)kegelschnitt von γ in σ ".



(b) Jede Punktkubik ist gleichmächtig einer Punktreihe. Die Sehnenmenge einer Punktkubik ist gleichmächtig einem Punktfeld.

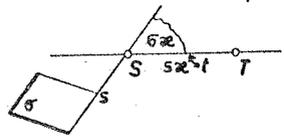
Bew.: Nach Bem. a gilt: $|c \setminus \{S\}| = |\mathcal{O}_{\Gamma(S)} \setminus \{s\}| \Rightarrow |c| = |\mathcal{O}_{\Gamma(S)}| = |\mathcal{P}_S|$. Jede Ebene $\xi \in \mathcal{L}_S$ bestimmt genau eine Sehne $\xi \cdot \xi^*$, verschiedene Ebenen ξ, η bestimmen verschiedene Sehnen $\xi \cdot \xi^*$ und $\eta \cdot \eta^*$, und jede Sehne $\zeta \cdot \zeta^*$ stammt von einer Ebene $\zeta \in \mathcal{L}_S \Rightarrow$ Menge der Sehnen von $c = |\mathcal{L}_S| = |\mathcal{P}_S|$. ◆

D_3 -dual: Jede Ebenenkubik ist gleichmächtig einem Ebenenbüschel (das seinerseits einer Punktreihe gleichmächtig ist, vgl. 4.1). Die Achsenmenge einer Ebenenkubik ist gleichmächtig einem Punktfeld.

(c) Wir wissen bereits: Auf jeder von s verschiedenen Erzeugenden von $\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ liegt genau ein von S verschiedener Punkt der Punktkubik. Wir zeigen weiters:

Jede Ebene ξ durch s verschieden von σ ($\sigma^* := st$) enthält noch genau einen von S verschiedenen Punkt der Punktkubik c ; die Ebene σ hat mit c genau den Punkt S gemeinsam.

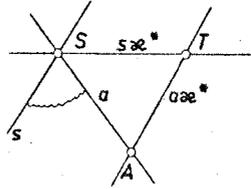
Bew.: Um die Tangentialebene des durch $\alpha \in \mathcal{L}_S : \mathcal{L}_S \rightarrow \mathcal{L}_{\alpha^*}$ erzeugten Geradenkegels längs s zu erhalten, hat man nach 4.2, Folg. 3 das Urbild der Ebene $s \cdot s\alpha^*$ zu bestimmen: $(s \cdot s\alpha^*)\alpha^{-1} = (st)\alpha^{-1} = \sigma$. Jede von der Tangentialebene σ von $\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ längs s verschiedene Ebene ξ durch s enthält nach 4.2 noch genau eine von s verschiedene Erzeugende x von $\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ und auf x liegt nach Folg. 1 genau ein von S verschiedener Punkt von c . In ξ können keine weiteren Kubikpunkte liegen, da nach Folg. 1 durch jeden Punkt von c verschieden S eine Erzeugende von $\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ geht. Speziell in der Tangentialebene σ liegt keine weitere Erzeugende von $\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ und auf s ist S der einzige Kubikpunkt. ◆



2) Alle Sehnen durch einen Punkt A einer Punktkubik bilden einen quadratischen Geradenkegel $\mathcal{O}_{\Gamma(A)}$.

Bew.: Für $A=S$ wurde dies in Folg. 1 gezeigt. Für $A=T$ ist der Beweis wie in Folg. 1 zu führen unter Verwendung von α^{-1} an Stelle

von α . Gelte i.f. $A \neq | S, T \xrightarrow{\text{Erz.}} \alpha$ A, S, T nicht kollinear und $A = a \cdot \alpha \alpha^*$ mit $a \in \mathcal{U}_S \wedge a \neq s$.



Jede Sehne durch A ist Schnittgerade von in α zugeordneten Ebenen ξ und $\xi\alpha$. Aus $\xi \cdot \xi\alpha \perp A$ folgt notwendig $\xi \perp A \wedge \xi\alpha \perp A\alpha^*$.

Umgekehrt liefert jede Ebene $\xi \in \mathcal{E}_a$ eine Sehne durch A, denn die zugeordnete Ebene $\xi\alpha$ geht durch $a\alpha^*$, also gilt:

$\xi, \xi\alpha \perp A \Rightarrow \xi \cdot \xi\alpha \perp A$. Die Menge der durch A gehenden Sehnen

wird daher durch die Projektivität $\alpha|_{\mathcal{E}_a}: \mathcal{E}_a \rightarrow \mathcal{E}_{a\alpha^*}$ erzeugt, welche nach den Voraussetzungen über α keine Perspektivität ist; daher ist das Erzeugnis von $\alpha|_{\mathcal{E}_a}$ nach Def.4.2a ein quadratischer Geradenkegel $\mathcal{G}_{\Gamma(A)}$.

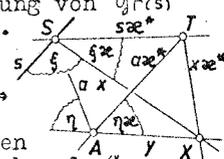
Bemerkungen: (a) Die Tangentialebene von $\mathcal{G}_{\Gamma(A)}$ längs a ist nach 4.2 die Ebene $(a \cdot \alpha \alpha^*) \alpha^* = (s \alpha^* \cdot \alpha \alpha^*) \alpha^* = sa$. Die Sehne a gehört auch zum quadratischen Geradenkegel $\mathcal{G}_{\Gamma(s)}$; dabei enthält die Ebene sa von $\mathcal{G}_{\Gamma(s)}$ die beiden Erzeugenden s und a und ist daher keine Tangentialebene von $\mathcal{G}_{\Gamma(s)}$. Die beiden quadratischen Geradenkegel $\mathcal{G}_{\Gamma(s)}$ und $\mathcal{G}_{\Gamma(A)}$ haben also die Erzeugende $a = SA$ gemeinsam und längs a verschiedene Tangentialebenen.

(b) Wir fassen nun die beiden quadratischen Geradenkegel als Menge ihrer Punkte auf und schreiben dafür $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\Gamma(A)}}$ bzw. $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\Gamma(s)}}$.

Es gilt: $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\Gamma(A)}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\Gamma(s)}} = \mathcal{R}_a \cup c$

(c ist der Restschnitt der beiden Sehnenkegel).

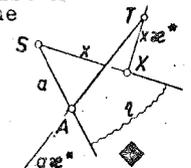
Bew.: (a) $X \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\Gamma(A)}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\Gamma(s)}} \wedge X \notin \mathcal{R}_a$. Zu zeigen: $X \in c$.
 $x := SX \in \mathcal{G}_{\Gamma(s)}$. Es gilt $x \neq s$ (ind. $x = s \Rightarrow$ Da as die Tangentialebene von $\mathcal{G}_{\Gamma(A)}$ längs a ist, folgt $\mathcal{R}_s \cap \mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\Gamma(A)}} = \{S\} \Rightarrow X \in \mathcal{R}_a$: Widerspruch zur Voraussetzung). Die Ebene $\xi := sx$ ist daher eindeutig bestimmt und wegen $x \in \mathcal{G}_{\Gamma(s)}$ und der Erzeugung von $\mathcal{G}_{\Gamma(s)}$ durch $\alpha|_{\mathcal{E}_s}$ gilt $x = \epsilon \cdot \xi\alpha \Rightarrow \xi\alpha = s\alpha^* \cdot x \Rightarrow \xi\alpha \perp X$.
 $y := AX \in \mathcal{G}_{\Gamma(A)}$. Es gilt $y \neq a$ wegen $X \notin \mathcal{R}_a \Rightarrow$
 $\exists \eta := ay$ und wegen $y \in \mathcal{G}_{\Gamma(A)}$ und der Erzeugung von $\mathcal{G}_{\Gamma(A)}$ durch $\alpha|_{\mathcal{E}_a}$ gilt $y = \eta \cdot \eta\alpha \Rightarrow \eta\alpha = a\alpha^* \cdot y \Rightarrow \eta\alpha \perp X$.



Nun ist $\xi \neq \eta$ (ind. $\xi = \eta \Rightarrow s \perp \eta = ay = ax \Rightarrow$ in η liegen die drei Erzeugenden x, a, s des quadratischen Geradenkegels $\mathcal{G}_{\Gamma(s)}$; da eine Ebene durch die Spitze des quadratischen Geradenkegels $\mathcal{G}_{\Gamma(s)}$ höchstens zwei verschiedene Geraden von $\mathcal{G}_{\Gamma(s)}$ enthält, muß wegen $x \neq s \wedge a \neq s$ notwendig $x = a$ gelten $\Rightarrow X \in \mathcal{R}_a$: Widerspruch) $\Rightarrow \xi\eta = x \Rightarrow x\alpha^* = \xi\alpha \cdot \eta\alpha$. Wegen $\xi\alpha \perp X \wedge \eta\alpha \perp X$ gilt $\xi\alpha \cdot \eta\alpha = x\alpha^* \perp X \Rightarrow X = x \cdot x\alpha^* \Rightarrow X \in c$.

Damit ist $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\Gamma(A)}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\Gamma(s)}} \subset \mathcal{R}_a \cup c$ gezeigt.

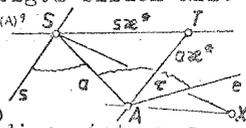
(b) Umgekehrt: $X \in c \wedge X \notin \mathcal{R}_a \Rightarrow X \neq | S, A$. Nach Folg.1 ist $x := SX$ eine Sehne von c, d.h. $SX \in \mathcal{G}_{\Gamma(s)}$. Für die Ebene $\eta := aX = ax$ gilt $\eta\alpha = a\alpha^* \cdot x\alpha^*$ mit $X = x \cdot x\alpha^*$ wegen $X \in c \Rightarrow \eta \cdot \eta\alpha = AX$ (da: $A \perp a \wedge a \perp \eta \Rightarrow A \perp \eta$; $A \perp a\alpha^* \Rightarrow A \perp \eta\alpha$; $X \perp \eta$; $X \perp x\alpha^* \wedge x\alpha^* \perp \eta\alpha \Rightarrow X \perp \eta\alpha$; $A \perp X$) $\Rightarrow AX \in \mathcal{G}_{\Gamma(A)}$ (nach Erzeugung von $\mathcal{G}_{\Gamma(A)}$ durch $\alpha|_{\mathcal{E}_a}$) $\Rightarrow X \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\Gamma(A)}}$.



3) Je zwei verschiedene Punkte einer Punktkubik c können als Grundpunkte benützt werden.

Mit anderen Worten: Projiziert man alle Sehnen von c aus zwei verschiedenen Punkten $X, Y \in c$, so sind Ebenen, welche je dieselbe Sehne projizieren, in einer projektiven Kollineation $\psi: \ell_X \rightarrow \ell_Y$ zugeordnet, und bei Projektion von c aus X und Y erhält man die einander schneidenden in ψ^* zugeordneten Bündelgeraden.

Bew.: Es genügt zu zeigen, daß der Grundpunkt T durch einen Kubikpunkt A ersetzt werden kann. Nach Folg.1 bzw. Folg.2 bilden alle Sehnen durch S bzw. A die Sehnenkegel $\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ bzw. $\mathcal{O}_{\Gamma(A)}$, welche nach Folg.2, Bem.a die Erzeugende $SA =: a$ gemeinsam haben; die Tangentialebene τ von $\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ längs a ist verschieden von der Tangentialebene α von $\mathcal{O}_{\Gamma(A)}$ längs a , daher schneidet τ aus $\mathcal{O}_{\Gamma(A)}$ noch eine von a verschiedene Erzeugende e und diese ist zu s windschief.



Eine projektive Kollineation $\psi^*: \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_A$ wird durch die folgenden zugeordneten Vierkante (d.s. vier kopunktales Geraden, von denen nie drei komplanar sind) nach 4.1, Folg.10, Bem.b eindeutig festgelegt: $s \mapsto a, a \mapsto e, ST \mapsto AT, SX \mapsto AX$ mit $X \in c \setminus \{S, T, A\}$.

(für $N \geq 3$ existiert gemäß Folg.1, Bem.b ein solcher Punkt X); wegen $s, a, ST, SX \in \mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ bzw. $a, e, AT, AX \in \mathcal{O}_{\Gamma(A)}$ liegen zwei Vierkante vor, da nie drei Erzeugenden eines quadratischen Geradenkegels komplanar sind.

In ψ^* ist die gemeinsame Bündelgerade a wegen $a \neq e$ nicht selbstzugeordnet und in ψ ist keine Ebene selbstzugeordnet (ind.:

$$\exists \xi \in \ell_S \text{ mit } \xi = \xi\psi \in \ell_A \implies \xi\psi \perp a \implies \xi \perp a\psi^{-1} = s \implies \xi = as \implies \xi\psi = a\psi^{-1} \cdot s\psi = ea = \xi = as: \text{Widerspruch, da } e \text{ windschief } s \text{ ist}).$$

Die projektive Kollineation ψ^* erfüllt daher alle Voraussetzungen, um eine Kubik c_1 festzulegen. Es genügt $c = c_1$ zu zeigen.

Gemäß Folg.1 wird der Sehnenkegel $\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ von c_1 mit der Spitze S durch die Projektivität $\varphi|_{\ell_S}: \ell_S \rightarrow \ell_A$ erzeugt, wobei $\varphi|_{\ell_S}$ festgelegt ist durch $sa \mapsto ae \wedge sT \mapsto aT \wedge sX \mapsto aX$. Projiziert man andererseits die Erzeugenden des Sehnenkegels $\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ von c aus

seinen beiden verschiedenen Erzeugenden s und a , so erhält man nach 4.2 eine Projektivität $\alpha: \ell_s \rightarrow \ell_a$, welche $\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ erzeugt.

Nach 4.2 ordnet α der gemeinsamen Büschelebene sa die Tangentialebene $\tau = ae$ von $\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ längs a zu und wegen $ST, SX \in \mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ leistet α weiters $sT \mapsto aT \wedge sX \mapsto aX$. Da die Projektivitäten $\varphi|_{\ell_S}$ und α für ein Ebenentripel übereinstimmen, gilt $\varphi|_{\ell_S} = \alpha$ nach dem FS, also erzeugen sie auch dieselben quadratischen Geradenkegel, d.h.

$$\mathcal{O}_{\Gamma(S)} = \mathcal{O}_{\Gamma(s)}.$$

Gemäß Folg.1 wird der Sehnenkegel $\mathcal{O}_{\Gamma(A)}$ von c_1 mit der Spitze A durch die Projektivität $\varphi|_{\xi_a}: \xi_a \rightarrow \xi_e$ erzeugt, wobei $\varphi|_{\xi_a}$ festgelegt ist durch $a \mapsto ea \wedge aT \mapsto eT \wedge aX \mapsto eX$. Da $a, e, AT, AX \in \mathcal{O}_{\Gamma(A)}$ gilt, und da aS Tangentialebene an $\mathcal{O}_{\Gamma(A)}$ längs a ist, erkennt man wie oben $\mathcal{O}_{\Gamma(A)} = \mathcal{O}_{\Gamma(A)}$.

Anwendung von Folg.2, Bem.b auf φ ergibt $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\Gamma(A)}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\Gamma(S)}} = \mathcal{R}_a \cup c_1$, was zusammen mit $\mathcal{O}_{\Gamma(S)} = \mathcal{O}_{\Gamma(S)} \wedge \mathcal{O}_{\Gamma(A)} = \mathcal{O}_{\Gamma(A)}$ liefert $c=c_1$.

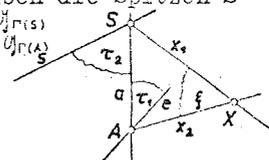
Sonderfall N=2: Die Kubik c ist dann ein Dreieck; wir können obigen Beweis nun ohne den Punkt X durchführen, da eine projektive Kollineation für N=2 bereits durch ein Dreieck und eine Projektivität für N=2 bereits durch ein Paar zugeordneter Elemente eindeutig festgelegt ist (vgl.1.9, Folg.6, Bem.b).

Anwendungen:

Gemäß Folg.3 gelten alle für die Grundpunkte einer Kubik bewiesenen Aussagen für jeden Kubikpunkt.

(a) Der Durchschnitt der Punktmenge zweier quadratischer Geradenkegel mit verschiedenen Spitzen, einer gemeinsamen Erzeugenden und verschiedenen Tangentialebenen längs dieser, ist neben der Punktreihe auf der gemeinsamen Erzeugenden eine Punktkeubik durch die Kegelspitzen.

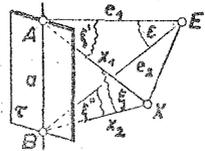
Bew.: Wir brauchen nur die Bezeichnungen der Folg.3 anzupassen. Die Geradenkegel heißen $\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ und $\mathcal{O}_{\Gamma(A)}$ und haben die Spitzen S und A; $SA=:a$. Die Resterzeugende von $\mathcal{O}_{\Gamma(A)}$ bzw. $\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ in der Tangentialebene τ_1 bzw. τ_2 von $\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ bzw. $\mathcal{O}_{\Gamma(A)}$ längs a heiße e bzw. s . Zwei Punkte X und T des Durchschnitts der Kegel erhalten wir durch die "Methode der Pendelebenen": Eine beliebige Ebene ξ ($\neq \tau_1, \tau_2$) durch die Erzeugende a schneidet $\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ bzw. $\mathcal{O}_{\Gamma(A)}$ nach einer von a verschiedenen Erzeugenden x_1 bzw. x_2 und $X=:x_1.x_2$; analog für T. Durch diese Angabe kann φ^* eindeutig festgelegt werden und nach Folg.3 bestimmt φ^* eine Punktkeubik c durch S und A, deren Sehnenkegel $\mathcal{O}_{\Gamma(S)}$ und $\mathcal{O}_{\Gamma(A)}$ sind.



D_3 -dual: Enthalten zwei Geradenkegelschnitte aus verschiedenen Ebenen σ, α die Schnittgerade $a=\sigma \cap \alpha$ und besitzen sie auf a verschiedene Berührungspunkte, so ist die Menge aller Ebenen, die je eine Gerade der beiden Geradenkegelschnitte enthalten, neben dem Ebenenbüschel um a eine Ebenenkeubik.

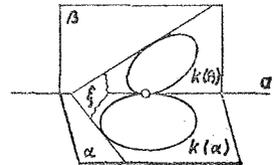
Bemerkung: Der Durchschnitt der Punktmenge zweier quadratischer Geradenkegel $\mathcal{O}_{\Gamma(A)}$ und $\mathcal{O}_{\Gamma(B)}$ mit verschiedenen Spitzen, einer gemeinsamen Erzeugenden $a=AB$ und gemeinsamer Tangentialebene längs a , besteht außer der Punktreihe auf a noch aus einem Punktkegelschnitt, der a trifft, und dessen Ebene nicht mit den Kegelspitzen A und B inzidiert.

Bew.: Wir wählen eine beliebige Ebene $\varepsilon \in \mathcal{L}_\alpha$ mit $\varepsilon \neq \tau$ fest aus. Nach 4.2 hat $\mathcal{G}_{\Gamma(A)}$ bzw. $\mathcal{G}_{\Gamma(B)}$ mit ε noch genau eine Restgerade e_1 ($\neq a$) bzw. e_2 ($\neq a$) gemeinsam. Ihr eindeutiger Schnittpunkt $E := e_1 \cdot e_2$ gehört zu $D := \mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\Gamma(A)}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\Gamma(B)}}$ und E ist der einzige Punkt von $D \setminus \mathcal{R}_\alpha$ in ε . Ebenso schneidet eine beliebige Ebene $\xi \in \mathcal{L}_\alpha \setminus \{\tau, \varepsilon\}$ die beiden Kegel nach den Resterzeugenden x_1, x_2 , und $X := x_1 \cdot x_2$ ist der einzige Punkt von $D \setminus \mathcal{R}_\alpha$ in ξ . Variiert ξ in $\mathcal{L}_\alpha \setminus \{\tau, \varepsilon\}$, so erhält man $D \setminus \mathcal{R}_\alpha$. Wir zeigen nun: Alle durch Variieren von ξ erhaltenen Punkte X liegen in einer Ebene.



$\exists^* x_1, e_1 =: \xi^1 \wedge \exists^* x_2, e_2 =: \xi^2$. Entsprechend der Erzeugung von $\mathcal{G}_{\Gamma(A)}$ nach 4.2 gilt $\mathcal{L}_\alpha(\xi^1) \times \mathcal{L}_\varepsilon(\xi^2)$, wobei diese Projektivität α die Tangentialebene τ längs a in die Verbindungsebene der Büschelachsen überführt, d.h. $\tau \alpha = \varepsilon$. Ebenso wird $\mathcal{G}_{\Gamma(B)}$ durch die Projektivität $\beta: \mathcal{L}_\alpha(\xi^1) \times \mathcal{L}_\varepsilon(\xi^2)$ mit $\tau \beta = \varepsilon$ erzeugt. Jeder Punkt $X \in D \setminus \mathcal{R}_\alpha$ liegt auf der Schnittgeraden $\xi^1 \cdot \xi^2$ und, da $\mathcal{L}_\varepsilon(\xi^1)$ und $\mathcal{L}_\varepsilon(\xi^2)$ wegen $\varepsilon \alpha = \beta = \varepsilon$ perspektiv gekoppelt sind, liegen alle Geraden $\xi^1 \cdot \xi^2$ und damit alle Punkte X in der Perspektivitätsebene $\eta(\mathcal{L}_\varepsilon, \varepsilon)$ der Perspektivität $\alpha^{-1}\beta \Rightarrow$ man erhält alle Punkte $X \in D \setminus \mathcal{R}_\alpha$, indem man z.B. $\mathcal{G}_{\Gamma(A)}$ mit η schneidet, und $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\Gamma(A)}} \cap \mathcal{R}_\eta$ ist nach 4.2 wegen $\eta \mathcal{L}_\varepsilon$ ein Punktkegelschnitt, der durch E geht und a in $\eta \cdot a$ trifft.

D_3 -dual: Ist $\mathcal{L}_{\mathcal{G}_{k(\alpha)}}$ bzw. $\mathcal{L}_{\mathcal{G}_{k(\beta)}}$ die Menge aller Ebenen, die durch je eine Gerade des Geradenkegelschnitts $k(\alpha)$ in der Ebene α bzw. $k(\beta)$ in der Ebene β gehen, wobei den Geradenkegelschnitten $\mathcal{G}_{k(\alpha)}$ und $\mathcal{G}_{k(\beta)}$ die Gerade $a = \alpha \beta$ gemeinsam ist und beide auf a denselben Berührungspunkt besitzen, so ist $\mathcal{L}_{\mathcal{G}_{k(\alpha)}} \cap \mathcal{L}_{\mathcal{G}_{k(\beta)}}$ außer dem Ebenenbüschel \mathcal{L}_a ein quadratischer Ebenenkegel, von dem eine Ebene mit a inzidiert und dessen Spitze weder in α noch in β liegt.



(b) DEF.4.8b: Eine Sehne s durch einen Punkt S einer Punktkubik c heißt Tangente von c in S , wenn sie außer S keinen Punkt von c enthält. Jede Ebene durch eine Tangente heißt Tangentialebene von c . Eine Tangentialebene σ durch eine Tangente s von S heißt Schmiegebene von c , wenn sie außer S keinen Punkt von c enthält. Eine Achse s in einer Ebene σ einer Ebenenkubik γ heißt eine Grattangente von γ in σ , wenn sie außer σ keine Ebene von γ enthält. Jeder Punkt auf einer Grattangente heißt Berührungspunkt von γ . Ein Berührungspunkt S auf der Grattangente s in σ heißt Gratpunkt von γ , wenn er außer σ keine Ebene von γ enthält.

Bemerkungen: (a) Folgende Begriffe stehen einander D_3 -dual gegenüber:
 Tangente einer Punktkubik c - Grattangente einer Ebenenkubik γ
 Tangentialebene von c - Berührungspunkt von γ
 Schmiegebene von c - Gratpunkt von γ .

(b) Während bei der Definition einer Kegelschnitt-tangente aus allen Geraden durch einen Kegelschnittpunkt S gewisse herausgegriffen werden, sind im Gegensatz dazu jetzt Tangenten gewisse Geraden aus dem Sehnenkegel durch S und nicht aus dem ganzen Bündel \mathcal{U}_S .

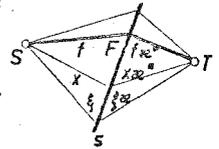
(c) In Folg.1, Bem.a bzw. Bem.c haben wir gezeigt, daß für den Grundpunkt S genau eine Tangente, nämlich $s=(ST)\alpha^{*-1}$ bzw. genau eine Schmiegebene, nämlich $\sigma=(sT)\alpha^{-1}$ existiert, sodaß nach Folg.3 gilt:

In jedem Punkt einer Punktkubik existiert genau eine Tangente und genau eine Schmiegebene.

(d) Sind S und A zwei verschiedene Kubikpunkte und $\mathcal{U}_{\Gamma(S)}$ bzw. $\mathcal{U}_{\Gamma(A)}$ die Sehnenkegel mit der Spitze S bzw. A, so ist die Tangente s in S an c die von SA verschiedene Schnittgerade der Tangentialebene von $\mathcal{U}_{\Gamma(A)}$ längs SA mit $\mathcal{U}_{\Gamma(S)}$ und die Schmiegebene σ in S an c ist die Tangentialebene längs s an $\mathcal{U}_{\Gamma(S)}$. Dies folgt aus Folg.2, Bem.a und Folg.1, Bem.c.

(c) Jede Verbindungsgerade von zwei verschiedenen Punkten einer Punktkubik ist eine Sehne, denn nach Folg.3 kann man die beiden Punkte als Grundpunkte S und T wählen und nach Bem.c vor Folg.1 ist ST eine Sehne. Nach Definition ist jede Tangente eine Sehne. Die Verbindungsgeraden von verschiedenen Kubikpunkten heißen "eigentliche Sehnen". Nach Def.4.8a, Bem.a und Folg.3 sind nie drei Kubikpunkte kollinear, also kann eine Gerade höchstens zwei Kubikpunkte tragen. Es bleibt noch die Frage: Gibt es Sehnen, die keinen Kubikpunkt tragen? Solche Sehnen sollen "uneigentliche Sehnen" heißen.

Wir gehen dazu von der Sehne $s = \xi \cdot \xi \alpha$ aus mit $\xi \in \ell_S$ und $\xi \alpha \in \ell_T$. Die Projektivität $\alpha^* | \mathcal{U}_{S,\xi} : \mathcal{U}_{S,\xi} \rightarrow \mathcal{U}_{T,\xi \alpha}$ bestimmt auf s die Projektivität $\alpha : \mathbb{P}_s \times \mathcal{U}_{S,\xi} \times \mathcal{U}_{T,\xi \alpha} \times \mathbb{P}_s$. In \mathbb{P}_p kann α nach 1.9, Folg.7 zwei, einen oder keinen Fixpunkt F besitzen. Dabei gilt: $F = F\alpha \iff F \in c \wedge F \perp s$, denn α^* ordnet die einander schneidenden Geraden SF und TF zu.



Also gilt: α hyperbolisch \iff s eigentliche Sehne
 α parabolisch \iff s Tangente
 α elliptisch \iff s uneigentliche Sehne.

Die Existenz von uneigentlichen Sehnen ist ebenso wie die Existenz von elliptischen Projektivitäten eine Körpereigenschaft.

(d) Durch sechs Punkte $A_i (i=1 \dots 6)$, von denen nie vier komplanar sind, ist eine Punktkubik eindeutig festgelegt.

Bew.: Gibt es eine Punktkubik c mit $A_1, \dots, A_6 | c$, dann hat c nach Folg.2 in A_1 und A_2 notwendig quadratische Sehnenkegel $\mathcal{U}_{\Gamma(A_1)}$ und $\mathcal{U}_{\Gamma(A_2)}$ mit $A_i A_i \in \mathcal{U}_{\Gamma(A_1)}$ für $i=2 \dots 6$ und $A_2 A_i \in \mathcal{U}_{\Gamma(A_2)}$ für $i=1, 3 \dots 6$.

Durch diese je fünf Erzeugenden, von denen nie drei komplanar sind, sind $\mathcal{U}_{\Gamma(A_1)}$ und $\mathcal{U}_{\Gamma(A_2)}$ nach 4.2 eindeutig festgelegt und es gilt $c \subset \mathcal{P} \mathcal{U}_{\Gamma(A_1)}$ sowie $c \subset \mathcal{P} \mathcal{U}_{\Gamma(A_2)}$ (nach Folg.1 und Folg.3).

$\mathcal{U}_{\Gamma(A_1)}$ und $\mathcal{U}_{\Gamma(A_2)}$ haben längs der gemeinsamen Erzeugenden A_1A_2 verschiedene Tangentialebenen (ind. $\mathcal{U}_{\Gamma(A_1)}$ berührt $\mathcal{U}_{\Gamma(A_2)}$ längs A_1A_2 Fol. 3, Anw. a, Bem. $\mathcal{P}_{\mathcal{U}_{\Gamma(A_1)} \cap \mathcal{U}_{\Gamma(A_2)}} = \mathcal{P}_{A_1A_2} \cup k$, wobei A_3, \dots, A_6 auf dem Kegelschnitt k liegen $\Rightarrow A_3, \dots, A_6$ sind komplanar: Widerspruch zur Voraussetzung). Nach Folg. 3, Anw. a gilt daher $\mathcal{P}_{\mathcal{U}_{\Gamma(A_1)} \cap \mathcal{U}_{\Gamma(A_2)}} = \mathcal{P}_{A_1A_2} \cup c$, wobei c eine Punktkubik ist mit $A_1, A_2, \dots, A_6 \in c$, d.h. c paßt in die Angabe. Da alle Überlegungen zwingend sind, ist c eindeutig festgelegt.



DEF.: Ein Punkt A einer Punktkubik zusammen mit seiner Tangente a heißt "Linielement der Punktkubik". Eine Ebene α einer Ebenenkubik zusammen mit ihrer Grattangente a , heißt "Gratelement der Ebenenkubik".

(e) Durch vier Punkte A_i ($i=2, \dots, 5$) und ein Linielement (A_1, a_1) , ist genau eine Punktkubik bestimmt, falls nie vier Punkte komplanar sind und in den Ebenen a_1A_i ($i=2 \dots 5$) kein Punkt A_j ($i \neq j, j \in \{2 \dots 5\}$) liegt.

Bew.: Analog wie bei (d), nur gilt jetzt $a_1 \in \mathcal{U}_{\Gamma(A_1)}$, und $\mathcal{U}_{\Gamma(A_2)}$ ist durch die Erzeugenden A_1A_i ($i=1, 3 \dots 5$) und durch die Tangentialebene a_1A_2 längs A_1A_2 eindeutig festgelegt.



(f) Durch zwei Punkte A_i ($i=3, 4$) und zwei Linielemente (A_j, a_j) ($j=1, 2$) ist genau eine Punktkubik bestimmt, falls die Punkte A_k ($k=1, \dots, 4$) nicht komplanar sind, in den Ebenen a_1A_j ($i=1, 2, j=3, 4$) kein Punkt A_l ($l \neq i, j; i=1, 2; j=3, 4; l=1, \dots, 4$) liegt und a_1 windschief a_2 ist. (Bew. analog zu (d).)

(g) Durch drei windschiefe Linielemente (A_i, a_i) ($i=1, 2, 3$) ist genau eine Punktkubik bestimmt.

Bew.: Analog wie bei (d), nur ist jetzt $\mathcal{U}_{\Gamma(A_i)}$ ($i=1, 2$) durch die drei Erzeugenden a_i, A_iA_j ($i \neq j$) und die beiden Tangentialebenen A_iA_j ($i \neq j$) längs A_iA_j eindeutig bestimmt.



Bemerkung: Die Angabe eines Linielements ersetzt also die Angabe von zwei Punkten.

D_3 -dual: Eine Ebenenkubik γ ist eindeutig festgelegt durch:
 sechs Ebenen, von denen nie vier kopunktal sind;
 vier Ebenen und ein Gratelement "allgemeiner Lage";
 zwei Ebenen und zwei Gratelemente "allgemeiner Lage";
 drei windschiefe Gratelemente.

4) Die Punkte einer Punktkubik werden aus je zwei Sehnen durch projektive Ebenenbüschel projiziert.

Bemerkung: Liegt auf einer dieser Sehnen ein Punkt der Punktkubik, so muß seine Verbindungsebene mit dieser Sehne zusammenfallen.

Bew.: Seien s_1 und s_2 zwei verschiedene Sehnen der Punktkubik c . Je nach der gegenseitigen Lage und dem Typus der Sehnen unterscheiden wir:

Fall 1: s_1 trifft s_2 in einem Kubikpunkt $S \Rightarrow s_1, s_2 | \in \mathcal{U}_{\Gamma(S)} \wedge c \subset \mathcal{R}_{\Gamma(S)}$
 Nach Folg.1 ist die Menge der Erzeugenden von $\mathcal{U}_{\Gamma(S)}$ bijektiv zur Menge der Punkte von c und die Projektion der Erzeugenden von $\mathcal{U}_{\Gamma(S)}$ aus s_1 und s_2 gleichwertig zur Projektion der Kubikpunkte aus s_1 und s_2 ; speziell S erhält man durch Projektion der Tangente s aus s_1 und s_2 (für $s \neq s_1, s_2$), während für den weiteren Punkt von c z.B. auf s_1 (für $s \neq s_1$) die Tangentialebene längs s_1 an $\mathcal{U}_{\Gamma(S)}$ an Stelle der Verbindungsebene mit s_1 zu nehmen ist. Für die Projektion der Erzeugenden von $\mathcal{U}_{\Gamma(S)}$ aus s_1 und s_2 gilt jedoch $\ell_{s_1} \pi \ell_{s_2}$ nach 4.2.

Bemerkung: Der Schnittpunkt P zweier Sehnen s_1, s_2 liegt stets auf der Punktkubik. Ist nämlich o.B.d.A. $P \neq S, T$ und $s_j = \xi_j \cdot \xi_j \alpha$ ($j=1, 2$), $SP =: p = \xi_1 \xi_2 \Rightarrow p \alpha^* = \xi_1 \alpha \cdot \xi_2 \alpha = TP \Rightarrow P = p \cdot p \alpha^* \Rightarrow P \in c$.

Fall 2: s_1, s_2 eigentlich und windschief: Es gibt sicher eine Gerade s_3 , die s_1 in einem Kubikpunkt und s_2 in einem Kubikpunkt trifft, und nach Folg.3, Anw.c ist s_3 Sehne von c . Nach Fall 1 gilt $\ell_{s_1} \pi \ell_{s_3}$ und $\ell_{s_3} \pi \ell_{s_2}$, also $\ell_{s_1} (s_1 X) \pi \ell_{s_2} (s_2 X)$ mit $X \in c$.

Bemerkung: Nun fehlen noch die Fälle, in denen mindestens eine Sehne uneigentlich ist. Wir zeigen vorbereitend den folgenden

Hilfssatz: In jeder Ebene durch eine uneigentliche Sehne s liegt genau ein Punkt der Punktkubik.

Bew. des Hilfssatzes: Da die Sehne s uneigentlich ist, geht sie nicht durch die Grundpunkte S, T der Punktkubik c . Für eine Ebene $\pi \in \ell_s$ kann gelten:

(α) $\pi \perp S$, dann ist S der einzige Kubikpunkt in π :

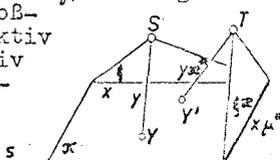
(ind.) $\exists X \in c$ mit $X \perp \pi$, $X+S \Rightarrow SX$ ist eine von s verschiedene Sehne in $\pi \Rightarrow \exists P := SX \cdot s$ und P ist als Schnittpunkt zweier Sehnen nach Bem. notwendig ein Kubikpunkt und zwar auf s : Widerspruch, da s uneigentlich ist. Analog für $\pi \perp T$.

(β) $\pi \not\perp S, T$: Die Punktkubik c wird durch $\alpha: \mathcal{U}_S \rightarrow \mathcal{U}_T$ erzeugt.

Ordnet man jeder Geraden $y \in \mathcal{U}_S$ ihren Durchstoßpunkt Y mit π zu, so wird dadurch $\mathcal{U}_S(y)$ perspektiv auf $\mathcal{R}_\pi(Y)$ bezogen; ebenso kann $\mathcal{U}_T(y\alpha)$ perspektiv auf $\mathcal{R}_\pi(y\alpha \cdot \pi =: Y')$ bezogen werden, sodaß insgesamt Y und Y' in einer projektiven Kollineation $\mu: \mathcal{R}_\pi \rightarrow \mathcal{R}_\pi$ zugeordnet sind.

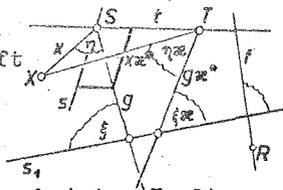
Dabei gilt für einen Fixpunkt F bzw. eine Fixgerade $f: F\mu = F \Leftrightarrow F \in c \wedge F \perp \pi$ bzw. $f\mu^* = f \Leftrightarrow f$ ist Sehne $\wedge f \perp \pi$.

Daher ist s Fixgerade von μ und wegen der Voraussetzung von PP folgt daraus nach 2.7, Folg.3 die Existenz eines Fixpunkt F von $\mu \Rightarrow F \in c$. Daß F der einzige Kubikpunkt in π ist, kann wie in (α) eingesehen werden.



Fall 3: Mindestens eine Sehne, z.B. s_1 ist uneigentlich. Es genügt zu zeigen, daß die Punktkubik c das Ebenenbüschel ℓ_s und das Ebenenbüschel ℓ_{ST} projektiv bezieht, wobei ST jene eigentliche Sehne ist, welche die Grundpunkte S und T verbindet; ist nämlich s_2 eine weitere Sehne, so gilt entweder nach Fall 1, Fall 2 oder Fall 3 dann $\ell_s \pi \ell_{ST} \pi \ell_{s_2}$.

Die uneigentliche Sehne s_1 ist notwendig windschief zur Sehne ST und zur Tangente s in S . In der Ebene sT liegt daher genau eine Gerade $g \in \mathcal{U}_s$, welche s_1 trifft $\Rightarrow g \times^* \in \mathcal{U}_T$ trifft ebenfalls s_1 , denn für $\xi = s_1 g$ gilt $\xi \times = s_1 \cdot g \times^*$. Die Geraden g und $g \times^*$ sind windschief: (ind.) $\exists^* G := g \cdot g \times^* \Rightarrow G \in c$; da s_1 uneigentlich ist, gilt $G \not\perp s_1$ und daher liegen nach Axiom I_2 die Kubikpunkte S, T und G und die uneigentliche Sehne s_1 in einer Ebene: Widerspruch zum obigen Hilfssatz.



Die Projektivität $\alpha | \ell_s : \ell_s \rightarrow \ell_{g \times^*}$ erzeugt daher nach 4.3, Folg. 1 einen Regulus \mathcal{U}_ϕ , dem die Sehne s_1 wegen $s_1 = \xi \cdot \xi^* \wedge \xi \in \ell_s$ nach Def. 4.3a angehört; da $sT \in \ell_s$ die zugeordnete Ebene längs ST schneidet (vgl. Bem. c nach Def. 4.8), ist auch $ST \in \mathcal{U}_\phi$.

Es gilt $c \subset \Phi$: Für $S, T | \in c$ ist $S, T | \in \Phi$. Ist $X \in c \setminus \{S, T\}$, so folgt $X \not\perp s_1 \wedge X = x \cdot x^*$ mit $x = XS$; die Ebene $\eta := gX = gx \in \ell_s$ geht bei α über in $\eta^* = g \times^* \cdot x \times^*$, d.h. η und η^* sind auch in $\alpha | \ell_s$ zugeordnet $\Rightarrow \eta \cdot \eta^* \in \mathcal{U}_\phi$, woraus wegen $XI \eta \cdot \eta^*$ folgt $X \in \Phi$.

Wegen $c \subset \Phi$ geht durch jeden Kubikpunkt X genau eine Gerade f_X des zu \mathcal{U}_ϕ ergänzenden Regulus $\overline{\mathcal{U}}_\phi$. Es gilt jedoch auch umgekehrt: Jede Gerade $f \in \overline{\mathcal{U}}_\phi$ trägt genau einen Kubikpunkt. Ist nämlich $f \in \overline{\mathcal{U}}_\phi \Rightarrow f$ trifft $s_1 \in \mathcal{U}_\phi \Rightarrow fs_1$ ist Tangentialebene von $\Phi \Rightarrow \rho_f \cdot \rho_s = \rho_f \cup \rho_s$; da außerdem die Ebene fs_1 die uneigentliche Sehne s_1 von c enthält, trägt fs_1 nach dem Hilfssatz genau einen Kubikpunkt R , der wegen $c \subset \Phi$ zu $\rho_f \cup \rho_s$ gehört; da jedoch s_1 uneigentlich ist, muß R auf ρ_f liegen.

Die Erzeugenden von $\overline{\mathcal{U}}_\phi$ werden nach 4.3 aus den beiden Erzeugenden $s_1, ST | \in \mathcal{U}_\phi$ durch projektive Ebenenbüschel projiziert; da jede Gerade $f \in \overline{\mathcal{U}}_\phi$ genau einen Kubikpunkt trägt, und jeder Kubikpunkt X auf genau einer Erzeugenden f_X von $\overline{\mathcal{U}}_\phi$ liegt, inzidieren die Ebenen $s_1 f_X$ und $ST \cdot f_X$ gleichzeitig nur mit dem Punkt X von c , der wegen s_1 windschief ST auf ihrer eindeutig bestimmten Schnittgeraden f_X liegt, und es gilt $\ell_s (s_1 f_X) \pi \ell_{ST} (ST \cdot f_X) \forall X \in c$.

Bezeichnungen: Der durch $\alpha | \xi_0$ erzeugte Regulus \mathcal{U}_\dagger besteht nur aus Kubiksehnern; \mathcal{U}_\dagger heißt daher ein "Sehnenregulus von c". Jede Gerade des ergänzenden Regulus \mathcal{U}_\ddagger trägt genau einen Kubikpunkt; \mathcal{U}_\ddagger heißt daher ein "Monosekantenregulus von c".

Anwendungen:

(a) Nach Bew. zu Folg. 4 gilt: Je zwei Tangenten einer Punkt-kubik sind windschief; vier Punkte einer Punktkubik sind nie komplanar (d.h. eine Ebene enthält höchstens drei Kubikpunkte). D_3 -dual: Je zwei Grattangenten einer Ebenenkubik sind windschief; vier Ebenen einer Ebenenkubik sind nie kopunktal (d.h. ein Punkt enthält höchstens drei Ebenen einer Ebenenkubik).

(b) Ebenso wie man mit Hilfe der Steinereigenschaft ein Geradenbündel, dessen Scheitel auf dem Punktkegelschnitt k liegt, projektiv auf k beziehen und damit Projektivitäten, projektive Involutionen, harmonische Lage usw. auf einem Punktkegelschnitt erklären kann, gestattet die in Folg. 4 bewiesene Kubikeigenschaft, ein Ebenenbündel, dessen Träger eine Sehne ist, projektiv auf eine Punktkubik zu beziehen, und damit Projektivitäten, projektive Involutionen, harmonische Lage usw. auf einer Punktkubik zu erklären.

D_3 -dual zu Folg. 4 gilt: Die Ebenen einer Ebenenkubik schneiden je zwei Achsen der Ebenenkubik in projektiven Punktreihen. Damit können Projektivitäten, projektive Involutionen, harmonische Lage usw. für die Ebenen einer Ebenenkubik erklärt werden.

(c) Durch jeden Punkt P nicht auf der Punktkubik c geht genau eine Sehne der Punktkubik c.

D_3 -dual: In jeder Ebene, die nicht zur Ebenenkubik γ gehört, liegt genau eine Achse der Ebenenkubik γ .

Bew.: Die Punktkubik c werde durch die projektive Kollineation $\alpha: \xi_0 \rightarrow \xi_1$ erzeugt. Eine Sehne durch P ist nach Definition Schnitt von zugeordneten Ebenen ξ und $\xi\alpha$. Damit $\xi, \xi\alpha$ durch P geht, muß notwendig ξ durch $SP =: p$ und $\xi\alpha$ durch $TP =: q'$ gehen: $\xi \mid p \wedge \xi\alpha \mid q' \implies \xi \wedge p\alpha^* =: p' \wedge \xi \mid q' \wedge p'^*\alpha =: q$.

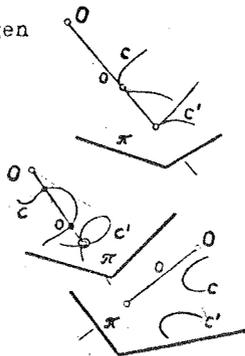
Es ist $p+q$ (ind. $p=q \implies p=q' \implies P=p.p\alpha^* \implies P \in c$: Widerspruch) $\implies p'+q'$. Damit gilt notwendig $\xi = pq \wedge \xi\alpha = p'.q'$; hieraus folgt umgekehrt $\xi \wedge \xi\alpha \mid P$. ◆

Bemerkung: Nach Folg. 3, Anw. a kann eine Punktkubik als Schnitt zweier quadratischer Geradenkegel mit verschiedenen Spitzen, einer gemeinsamen Erzeugenden und verschiedenen Tangentialebenen längs dieser erhalten werden. Speziell im PAR schneiden einander zwei quadratische Kegel nach einer Kurve i.S. der Differentialgeometrie: Ist P speziell das Auge O einer Projektion auf eine Ebene π , so können für die einzige Sehne o durch O ($\neq c$) folgende drei Fälle eintreten:

Fall 1: o Tangente: Wie wir in 5.8, Anw. (II) zeigen werden ist dann o auch Tangente an die Kurve c im Sinne der Differentialgeometrie. Nach der Differentialgeometrie hat dann c in $o \cdot \pi$ eine Spitze.

Fall 2: o eigentlich, d.h. o trifft die Kubik c in zwei verschiedenen Punkten \Rightarrow die Bildkurve c' von c hat bei Projektion aus O auf π in $o \cdot \pi$ einen Knoten (die verschiedenen Knotentangenten stammen von den windschiefen Kubiktangenten in den Kubikpunkten auf o).

Fall 3: o uneigentlich; $o \cdot \pi$ ist dann isolierter Punkt von c' .



(d) In einer Ebene liegen höchstens drei verschiedene Sehnen einer Punktkubik c .

D₃-dual: Durch einen Punkt E gehen höchstens drei verschiedene Achsen einer Ebenenkubik γ .

Bew.: Da der Schnittpunkt von je zwei Sehnen ein Punkt der Punktkubik ist, nie drei Sehnen durch einen Punkt komplanar sind und nach (a) in einer Ebene höchstens drei Punkte von c liegen, können nie vier Sehnen komplanar sein. ◆

(e) Haben in Π_{pp} zwei ringartige Quadriken ϕ und ϕ' genau eine gemeinsame Erzeugende e , ohne einander längs e zu berühren (d.h. ϕ und ϕ' besitzen längs e verschiedene Berührprojektivitäten α_e bzw. α'_e), so gilt $\phi \cap \phi' = \rho_e \cup c$, wobei c eine Punktkubik ist.

Bew.: (I) Ist \overline{Q}_ϕ bzw. $\overline{Q}_{\phi'}$ jener Regulus auf ϕ bzw. ϕ' , dem e nicht angehört, so geht durch jeden Punkt $X \in c \subset \phi$ genau eine Gerade $f_X \in \overline{Q}_\phi$. Umgekehrt trägt jede Gerade $f \in \overline{Q}_\phi$ genau einen Punkt von c : $f \in \phi'$ nach Vor. und $f \in \phi$ nach $f \in \overline{Q}_\phi$. Ist f nicht Tangente von ϕ' in F , so trägt f noch genau einen Punkt von ϕ' nicht auf e , also einen Punkt von c ; ist dagegen f Tangente von ϕ' in F , so zählen wir F zu c .

Damit ist c bijektiv \overline{Q}_ϕ ; analog ist c bijektiv $\overline{Q}_{\phi'}$. Auf e liegen maximal zwei Punkte von c , da in einem solchen Punkt f eine Tangente an ϕ' sein muß und daher die Tangentialebene an ϕ bzw. ϕ' in die Ebene e fällt; solche Punkte sind daher genau die Fixpunkte von $\alpha_e \cdot \alpha_e^{-1}$.

(II) Durch $A \in c$, $A \notin e$ gehen die Geraden e_A bzw. $e_{A'}$ der Reguli \overline{Q}_ϕ bzw. $\overline{Q}_{\phi'}$; nach Vor. ist $e_A \neq e_{A'}$. Ist f_X bzw. f'_X die Gerade aus \overline{Q}_ϕ bzw. $\overline{Q}_{\phi'}$, die den Punkt X von c enthält, so gilt nach (I) und der Tatsache, daß die Geraden eines Regulus aus zwei Geraden des ergänzenden Regulus durch projektive Ebenenbündel projiziert werden: $e_A(e_A f_X) \times e(e f_X) = e(e f'_X) \times e'_A(e'_A f'_X)$. (*)

Da keine Ebene durch e existiert, der in den Projektivitäten zu α_e bzw. α'_e dieselbe Ebene entspricht (im anderen Fall hätten ϕ und ϕ' eine Erzeugende aus \overline{Q}_ϕ gemeinsam), ist die in (*) definierte Projektivität $\alpha_{e_A} \rightarrow \alpha'_{e_{A'}}$ nicht perspektiv und erzeugt einen quadratischen Geradenkegel $\mathcal{Q}_{\Gamma(A)}$, der c trägt.

(III) Existiert kein Punkt $B \in c$ mit $A \neq B$, $B \notin e$, so ist notwendig $N=2$ und auf e liegen zwei Punkte von c ; dann ist aber c ein Dreieck und damit eine Punktkubik. In jedem anderen Fall existiert ein solcher Punkt B und damit ein weiterer durch $e_B(e_B f_X) \times e'_B(e'_B f'_X)$ bestimmter Geradenkegel $\mathcal{Q}_{\Gamma(B)}$, der c trägt und $s := AB$ mit $\mathcal{Q}_{\Gamma(A)}$ gemeinsam hat. Wegen $s \in \mathcal{Q}_{\Gamma(A)}$ bzw. $s \in \mathcal{Q}_{\Gamma(B)}$ gilt für $X \in c$:

$s(sX) \times e_A(e_A f_X) \times e(e f_X)$, wobei für $X=A$ bzw. $X=B$ die Ebene sX die Tangentialebene längs s an $\mathcal{U}_{\Gamma(B)}$, bzw. an $\mathcal{U}_{\Gamma(A)}$ bedeutet. Wegen f_A windschief f_B ist $e f_A \neq e f_B$, und daher sind die Tangentialebenen von $\mathcal{U}_{\Gamma(A)}$ und $\mathcal{U}_{\Gamma(B)}$ längs s verschieden. Nach Folg. 3, Anw. a ist $\mathcal{P}_{\mathcal{U}_{\Gamma(A)}} \cap \mathcal{P}_{\mathcal{U}_{\Gamma(B)}} = \mathcal{P}_s \cup c_1$, wobei c_1 eine Punktkubik durch A und B ist. Die Menge der Erzeugenden von $\mathcal{U}_{\Gamma(A)}$ läßt sich bijektiv auf c_1 beziehen und nach (*) gilt gleiches auch für c . Da außerdem $c \subset \mathcal{P}_{\mathcal{U}_{\Gamma(A)}} \cap \mathcal{P}_{\mathcal{U}_{\Gamma(B)}}$ und $c \cap \mathcal{P}_s = c_1 \cap \mathcal{P}_s = \{A, B\}$ ist, folgt $c = c_1$.

In den Übungen wird ferner gezeigt:

(f) Haben in \mathbb{P}^3 ein quadratischer Geradenkegel \mathcal{U}_Γ und eine ringartige Quadrik Φ genau eine gemeinsame Erzeugende e , so gilt $\mathcal{P}_{\mathcal{U}_\Gamma} \cap \Phi = \mathcal{P}_e \cup c$, wobei c eine Punktkubik ist.

Haben in \mathbb{P}^3 zwei ringartige Quadriken Φ und Φ' eine gemeinsame Erzeugende e und längs dieser dieselbe Berührprojektivität, so ist $\Phi \cap \Phi'$ entweder \mathcal{P}_e , oder Φ und Φ' haben noch genau eine e treffende Erzeugende oder noch genau zwei e treffende Erzeugenden gemeinsam.

(g) Nach Folg. 4 wird eine Punktkubik c aus je drei ihrer Sehnen durch projektive Ebenenbüschel projiziert. Wir geben nun drei Ebenenbüschel ℓ_{s_i} um nicht kopunktales Achsen s_i ($i=1,2,3$) vor und zwei Projektivitäten $\alpha_{12}: \ell_{s_1} \rightarrow \ell_{s_2}$ und $\alpha_{13}: \ell_{s_1} \rightarrow \ell_{s_3}$; durch $\alpha_{12}^{-1} \cdot \alpha_{13}: \ell_{s_2} \rightarrow \ell_{s_3}$ wird auch das dritte Paar projektiv gekoppelt. Dann gilt:

(I) Drei projektive nicht perspektive Ebenenbüschel, deren Achsen s_1 ein Dreieck bilden, bestimmen eine Punktkubik.

Bew.: α_{12} und α_{13} bestimmen zwei quadratische Geradenkegel $\mathcal{U}_{\Gamma(s_1, s_2)}$ bzw. $\mathcal{U}_{\Gamma(s_1, s_3)}$, die einander längs s_1 nicht berühren, da α_{12} nicht perspektiv ist. Damit ist $\mathcal{U}_{\Gamma(s_1, s_2)} \cap \mathcal{U}_{\Gamma(s_1, s_3)} = \mathcal{P}_{s_1} \cup c$, wobei c eine Punktkubik ist.

(II) Drei projektive nicht perspektive Ebenenbüschel, deren Achsen s_2 und s_3 windschief sind aber s_1 schneiden, bestimmen eine Punktkubik.

Bew.: analog zu (I)

(III) Drei projektive Ebenenbüschel, deren Achsen s_2 und s_3 zu s_1 windschief sind, bestimmen eine Punktkubik, falls die durch α_{12} und α_{13} festgelegten ringartigen Quadriken außer s_1 keine Gerade gemeinsam haben und einander längs s_1 nicht berühren.

Bew.: Unter Benützung von (e) analog zu (I).

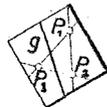
(h) Als Anwendung zur Def.4.8a und Folg.3 ergibt sich:

Eine Punktkubik in \mathbb{P}^3 ist eindeutig festgelegt durch:

- (I) vier Sehnen s_i und zwei Punkte A_k (mit $A_k \notin s_i$) "allgemeiner Lage",
- (II) drei Sehnen s_i und drei Punkte A_k (mit $A_k \notin s_i$) "allgemeiner Lage",
- (III) eine Sehne s_1 und fünf Punkte A_k (mit $A_k \notin s_1$) "allgemeiner Lage".

Bew.: Zu (I): Gibt es eine Punktkubik c , die in die Angabe paßt, so wird sie gemäß Def.4.8a und Folg.3 durch eine projektive Kollineation $\alpha: \ell_{A_1} \rightarrow \ell_{A_2}$ erzeugt, wobei α notwendig der Ebene $A_1 s_1 \in \ell_{A_1}$, die Ebene $A_2 s_1 \in \ell_{A_2}$ zuordnet ($i=1 \dots 4$). "Allgemeine Lage" soll heißen: Diese vier Paare zugeordneter Bündelebenen legen genau eine projektive Kollineation $\alpha: \ell_{A_1} \rightarrow \ell_{A_2}$ fest (daher müssen $\{A_1 s_i\}$ und $\{A_2 s_i\}$ je ein Bündelvierflach bilden), und α soll keine selbstzugeordneten Geraden und Ebenen besitzen. Durch α wird eindeutig eine Punktkubik c definiert, die durch A_1 und A_2 geht und s_1, \dots, s_4 zu Sehnen hat. Da alle obigen Überlegungen zwingend sind, ist c eindeutig bestimmt.

Zu (II): Analog zu (I): α leistet notwendig $A_1 s_i \mapsto A_2 s_i$ ($i=1,2,3$) und $A_1 A_3 \mapsto A_2 A_3$. Von einer projektiven Kollineation zwischen den Koebenen ℓ_{A_1} und ℓ_{A_2} kennt man also drei Paare zugeordneter Kopunkte und ein Paar zugeordneter Geraden (=Koger.). Durch diese Angabe ist genau eine projektive Kollineation α zwischen PP-Ebenen festgelegt, falls die Angabepunkte P_i bzw. P'_i jeweils Dreiecke bilden und die Angabegerade g bzw. g' zu dem jeweiligen Dreieck allgemein liegt. Gibt es nämlich ein passendes α , so ordnet α^* dem Vierseit $\{P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_1, g\}$ notwendig das Vierseit $\{P'_1 P'_2, P'_2 P'_3, P'_3 P'_1, g'\}$ zu; durch zugeordnete Vierseite ist genau eine projektive Kollineation α^* (und damit α) zwischen PP-Ebenen bestimmt und (α, α^*) leistet das Gewünschte. "Allgemeine Lage" soll also heißen: Die drei Paare zugeordneter Bündelebenen und das Paar zugeordneter Bündelgeraden sollen genau eine projektive Kollineation $\alpha: \ell_{A_1} \rightarrow \ell_{A_2}$ festlegen (daher müssen die Geraden $A_1 A_3$ bzw. $A_2 A_3$ allgemein zum Dreiflach $A_1 s_1$ bzw. $A_2 s_1$ liegen) und α soll keine selbstzugeordneten Geraden und Ebenen besitzen. Die durch α eindeutig festgelegte Punktkubik c paßt in die Angabe. Da alle Überlegungen zwingend sind, ist c eindeutig bestimmt.



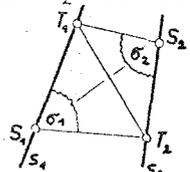
Zu (III): Gibt es eine Punktkubik c , die in die Angabe paßt, so sind nach Folg.3, Anw. c die Geraden $A_3 A_4 =: s_2$, $A_4 A_5 =: s_3$ und $A_5 A_1 =: s_4$ notwendig Sehnen von c ; somit liegt die Angabe (I) vor. Umgekehrt ist der Schnittpunkt von zwei Sehnen nach Folg.4 ein Kubikpunkt, also paßt die Punktkubik auch in die Angabe.

Bemerkung: Durch zwei Sehnen s_1, s_2 und vier Punkte X_1, \dots, X_4 ist im allgemeinen keine Punktkubik bestimmt: Gibt es eine Punktkubik, so müssen ihre Punkte nach Folg.4 aus den Sehnen s_1 und s_2 durch projektive Ebenenbüschel projiziert werden. Durch $s_1 X_i \rightarrow s_2 X_i$ für $i=1,2,3$ ist diese Projektivität bereits eindeutig bestimmt; im allgemeinen wird sie jedoch $s_1 X_4$ nicht in $s_2 X_4$ überführen.

5) DEF.4.8c: Ist S ein Punkt, s die Tangente in S und σ die Schmiegeebene in S einer Punktkubik c , so heißt das Tripel (S, s, σ) ein Schmiegeelement von c . Alle Geraden des Büschels $\mathcal{G}_{s, \sigma}$ heißen Schmiegegeraden der Punktkubik c in S .

Bemerkung: (a) Zwei verschiedene Kubikpunkte S_1 und S_2 bestimmen ein "Schmiegetetraeder von c ":

Nach Folg.4, Anw.a sind die Tangenten s_1, s_2 an c in S_1, S_2 windschief; die Schmiegeebene σ_1 von c in S_1 enthält nach Definition S_2 als einzigen Kubikpunkt $\Rightarrow \sigma_1 \not\perp S_2$; ebenso $\sigma_2 \not\perp S_1 \Rightarrow \exists^* T_1 := s_1 \sigma_2 \wedge T_2 := s_2 \sigma_1$ und $\{S_1, S_2, T_1, T_2\}$ ist ein Tetraeder.



(b) Sei $X \in c \setminus \{S_1, S_2\}$, dann gilt: $\{S_1, S_2, T_1, T_2, X\}$ ist eine Fundamentalfigur, denn:
 $X \in \sigma_1 = S_1 T_1 T_2 \wedge X \in \sigma_2 = S_2 T_1 T_2$ nach Definition der Schmiegeebene;
 $X \in S_1 S_2 T_2$, da in der von der Schmiegeebene verschiedenen Ebene $S_1 S_2 T_2$ durch die Kubiktangente $s_2 T_2$ genau ein weiterer Kubikpunkt liegt, nämlich S_1 (vgl. Folg.1, Bem.c und Folg.3).
 Analog zeigt man $X \in S_1 S_2 T_1$.

(c) Die Bildmenge c^μ einer Punktkubik c unter einer Kollineation $\mu \in \text{PFL}(W_{pp})$ ist eine Punktkubik und μ bildet c schmiegelementweise auf c^μ ab.

Bew.: Bei μ geht nach 4.2 ein quadratischer Geradenkegel in einen quadratischen Geradenkegel über, wobei jede Tangentialebene in eine Tangentialebene abgebildet wird. Damit geht der Restschnitt zweier Sehnenkegel von c in den Restschnitt zweier quadratischer Geradenkegel mit einer gemeinsamen Erzeugenden und verschiedenen Tangentialebenen längs dieser über, welcher nach Folg.3, Anw.a eine Punktkubik ist. Der Sehnenkegel $\mathcal{G}_{r(S)}$ von c , der c aus S projiziert, geht in den Sehnenkegel von c^μ in S^μ über. Da die Tangente s in $S \in c$ jene Gerade des quadratischen Sehnenkegels $\mathcal{G}_{r(S)}$ von c in S ist, die nur den Kubikpunkt S trägt, geht s in die Tangente s^μ in S^μ an c^μ über; die Schmiegeebene σ in S wird als Tangentialebene von $\mathcal{G}_{r(S)}$ längs s in die Schmiegeebene in S^μ an c^μ abgebildet.

6) Durch ein Schmiegetetraeder (S_i, s_i, σ_i) ($i=1,2$) und einen Punkt X , der mit dem Tetraeder eine Fundamentalfigur bestimmt, ist genau eine Punktkubik bestimmt. Je zwei Punktkubiken sind projektiv kollinear.

Bew.: (a) Gibt es eine passende Punktkubik, so wird diese nach Folg.1, Bem.c und Folg.3 aus S_1 durch einen quadratischen Geradenkegel $\mathcal{U}_{\Gamma(S_1)}$ projiziert, der die Tangente s_1 zur Erzeugenden hat und längs dieser von σ_1 berührt wird. Nach Folg.3, Anw.b, Bemerkungd ist $S_1 S_2$ notwendig Erzeugende von $\mathcal{U}_{\Gamma(S_1)}$ und $S_1 s_2$ ist Tangentialebene längs $S_1 S_2$; außerdem muß $S_1 X \in \mathcal{U}_{\Gamma(S_1)}$ gelten. Dadurch ist $\mathcal{U}_{\Gamma(S_1)}$ eindeutig festgelegt. $\mathcal{U}_{\Gamma(S_2)}$ wird ebenso eindeutig festgelegt. $\mathcal{U}_{\Gamma(S_1)}$ und $\mathcal{U}_{\Gamma(S_2)}$ haben längs der gemeinsamen Erzeugenden $S_1 S_2$ verschiedene Tangentialebene $S_1 s_2$ bzw. $S_2 s_1$, denn s_1 und s_2 sind windschief. Nach Folg.3, Anw.a ist der Restschnitt der beiden Geradenkegel eine Punktkubik c , die in die Angabe paßt. Da alle obigen Überlegungen zwingend sind, ist c die einzige Lösung.

(b) Greift man aus den beiden Punktkubiken c und c' die Punkte S_1, S_2 bzw. S'_1, S'_2 heraus und bildet die Schmiegtetraeder $\{S_1, S_2, T_1, T_2\}$ bzw. $\{S'_1, S'_2, T'_1, T'_2\}$, so bestimmen diese zusammen mit $X \in c \setminus \{S_1, S_2\}$ bzw. $X' \in c' \setminus \{S'_1, S'_2\}$ Fundamentalfiguren, durch welche c bzw. c' nach (a) eindeutig bestimmt sind. In \mathbb{P}_p existiert genau ein $\alpha \in \text{PGL}(\mathbb{P}_p)$, welche die erste in die zweite Fundamentalfigur überführt; die Punktkubiken c' und $c\alpha$ haben (vgl.Folg.5, Bem.c) die zwei Schmiegelemente zu $S'_1 = S_1 \alpha$ und $S'_2 = S_2 \alpha$ und den Punkt $X\alpha = X'$ gemeinsam, daher gilt $c\alpha = c'$ nach Beweisschritt a.



Bemerkung: Wie man aus Beweisschritt b erkennt, gibt es viele Möglichkeiten, um α festzulegen; man kann nämlich S'_1, S'_2, X' beliebig auf c' wählen. Insbesondere folgt für $c = c'$, daß die Menge M der automorphen projektiven Kollineationen einer Punktkubik nicht nur aus der Identität besteht. Bezüglich des Hintereinanderausführens bildet M eine Untergruppe von $\text{PGL}(\mathbb{P}_p)$.

7) Wir setzen i.f. einen klassischen projektiven Raum $\mathbb{P}_{kl}(K)$ voraus, dessen Körper K außerdem eine Charakteristik $\neq 3$ besitzt. Dann gilt:

Die Schmiegebenen in drei verschiedenen Punkten einer Punktkubik sind nie kollinear.

Bew.: (ind.) Selen $S_1, S_2, X \in c$, pw. verschieden und ihre Schmiegeebenen σ_1, σ_2, ξ kollinear; da in keiner Schmiegeebene zwei Punkte von c liegen, sind σ_1, σ_2, ξ paarweise verschieden. Zu S_1, S_2 ge-

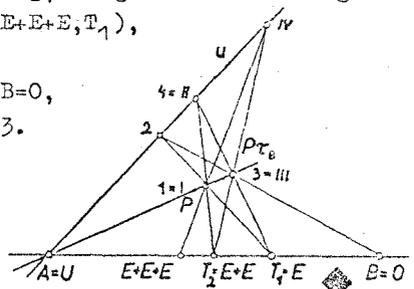
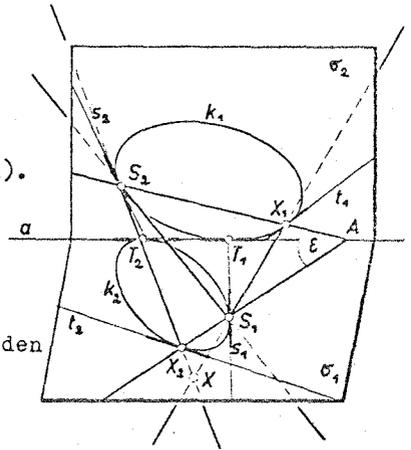
hören ein Schmiegtetraeder $\{S_1, S_2, T_1, T_2\}$ und zwei Sehnenkegel $\mathcal{U}_{r(s_1)}, \mathcal{U}_{r(s_2)}$, die σ_2 bzw. σ_1 in je einem Kegelschnitt k_1 bzw. k_2 schneiden, wobei k_1 in S_2 die Tangente s_2 der Punktkubik und in T_1 die Schnittgerade $a = \sigma_1 \sigma_2$ berührt; analoges gilt für k_2 . Die Ebene $XS_1S_2 =: \epsilon$ trifft k_1 bzw. k_2 noch in je einem Punkt X_1 bzw. X_2 mit $X = S_1X_1 \cdot S_2X_2$. Wegen $c \subset \mathcal{U}_{r(s_1)} \cap \mathcal{U}_{r(s_2)}$ liegt die Tangente x in X an c in der Tangentialebene von $\mathcal{U}_{r(s_1)}$ längs S_1X_1 und in der Tangentialebene von $\mathcal{U}_{r(s_2)}$ längs S_2X_2 , welche σ_1 bzw. σ_2 in der Tangente t_1 bzw. t_2 an k_1 bzw. k_2 in X_1 bzw. X_2 schneiden. Von k_1 sind zwei Linienelemente $(S_2, s_2), (T_1, a)$ bekannt, und daher kann die Tangente t_1 in X_1 gemäß

der in \mathbb{P}_{kl} gültigen Konstruktion 2.1, Folg. 8, Anw. b konstruiert werden, nach der gilt $H(\epsilon, a, T_1; T_2, t_1, a)$; analog gilt für t_2 dann $H(\epsilon, a, T_2; T_1, t_2, a)$. Falls nun ξ durch a geht, muß x die Gerade a schneiden und daher müssen t_1 und t_2 einander auf a treffen.

Setzen wir $\epsilon \cdot a =: A, t_1 \cdot a = t_2 \cdot a =: B$, so gilt $H(A, T_1; T_2, B) \wedge H(A, T_2; T_1, B)$, wobei nach den Vorausss. die Punkte A, B, T_1, T_2 pw. verschieden sind. Wählen wir auf a die Punkte A bzw. B bzw. T_1 als Grundpunkte

U bzw. O bzw. E einer Algebraisierung, so gilt nach der Figur $H(T_1, A, E+B, B)$, also $T_2 = E+E$ und $H(T_2, A, E+E+E, T_1)$, also $H(A, T_2, T_1, E+E+E)$.

Zusammen mit $H(A, T_2, T_1, B)$ folgt $E+E+E=B=0$, also $1+1+1=0$ im Widerspruch zu $\text{Char. } K \neq 3$.



8) Wir setzen i. f. einen klassischen projektiven Raum $\mathbb{P}_{kl}(K)$ voraus mit $\text{Char. } K \neq 3$.

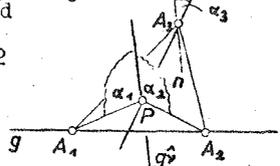
Alle Schmiegeraden einer Punktkubik liegen in genau einem Gewinde. Die Menge aller Schmiegebenen einer Punktkubik ist eine Ebenenkubik.

D_3 -dual: Die Menge aller Gratpunkte einer Ebenenkubik ist eine Punktkubik.

Bew.: Sei c eine Punktkubik, $S \in c$ und σ die Schmiegeebene in S . Um zu zeigen, daß jede Gerade aus $\mathcal{U}_{S,\sigma}$ Gewindegerade ist, muß die Existenz einer Nullpolarität ν erwiesen werden, welche jedem Kubikpunkt S dessen Schmiegeebene σ zuordnet. Wir verwenden dabei einen Hilfssatz, der in 4.9, Folg. 10, Anw. c bewiesen wird.

Hilfssatz: Sind A_1, A_2, A_3 drei Punkte einer Punktkubik c in Π_{κ_1} und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die zugehörigen Schmiegeebenen, dann haben $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ einen Punkt P der Ebene $A_1 A_2 A_3$ gemeinsam, der allgemein zum Dreieck $A_1 A_2 A_3$ liegt.

(I) Zu drei Kubikpunkten A_1, A_2, A_3 mit den Schmiegeebenen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ existiert genau eine Nullpolarität ν , die $A_j \mapsto \alpha_j$ ($j=1,2,3$) leistet: $A_1 A_2 =: g$; für ν gilt notwendig $g^\hat{=} = \alpha_1 \cdot \alpha_2$ und g und $g^\hat{=}$ sind als Kanten des durch A_1 und A_2 bestimmten Schniegtetraeders windschief.

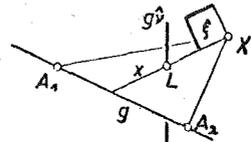


Wegen Char. $K \neq 3$ und Folg. 7 gilt $\alpha_3 \not\perp g^\hat{=}$, und daher existiert eine Gerade $n \in \mathcal{U}_{A_3, \alpha_3}$, die windschief $g, g^\hat{=}$ ist; sie ist notwendig Nullgerade bezüglich ν . Die durch die reziproken Polaren $g, g^\hat{=}$ und die Nullgerade n nach 4.7, Folg. 7 eindeutig bestimmte Nullpolarität ν ist die einzig mögliche Nullpolarität, und ν paßt in die Angabe, wie aus dem Hilfssatz und der Tatsache folgt, daß $A_3 P(I\alpha_3)$ als Treffgerade von g und $g^\hat{=}$ eine Nullgerade ist.

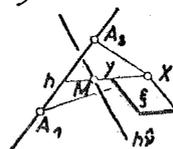
(II) Ist $X \in c \setminus \{A_1, A_2, A_3\}$, so stimmt

$X\nu$ mit der Schmiegeebene ξ von X überein:

Auf das von den Kubikpunkten A_1, A_2, X gebildete Dreieck wenden wir wieder den Hilfssatz an $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \xi$ haben einen Punkt $L \in A_1 A_2 X$ gemeinsam, der allgemein zum Dreieck $A_1 A_2 X$ liegt \Rightarrow die Gerade $x := LX$ trifft g und $g^\hat{=}$ $\Rightarrow x^\hat{=} = x$ ist Nullgerade $\Rightarrow X\nu \perp x$, und natürlich gilt $\xi \perp x$. Ebenso bilden die Kubikpunkte A_1, A_3, X ein Dreieck und nach dem Hilfssatz gilt: α_1, α_3, ξ haben einen Punkt $M \in A_1 A_3 X$ gemeinsam, der allgemein zum Dreieck $A_1 A_3 X$ liegt. Für



$A_1 A_3 =: h$ gilt $h^\hat{=} = \alpha_1 \cdot \alpha_3$ mit $h^\hat{=} \perp M$. Da $y := MX$ die reziproken Polaren h und $h^\hat{=}$ trifft, ist y Nullgerade $\Rightarrow X\nu \perp y$, und natürlich gilt $\xi \perp y$. Also gilt $X\nu = xy = \xi$, falls $x \neq y$



erwiesen ist (ind. $x=y \Rightarrow X \in A_1 A_2 A_3$: Widerspruch, denn nach Folg. 4, Anw. a sind nie vier Punkte einer Punktkubik kollinear.)

(III) Wenden wir auf die Punktkubik c die durch (I) eindeutig bestimmte Nullpolarität ν an, so werden alle Punkte von c in die zugehörige Schmiegebene von c abgebildet; wir bezeichnen diese durch c bestimmte Nullpolarität i. f. mit ν_c . Die projektive Korrelation ν_c führt die Erzeugung von c durch projektiv kollineare Ebenenbündel ohne selbstzugeordnete Geraden und Ebenen in eine Erzeugung von $c\nu_c$ durch projektiv kollineare Punktfelder ohne selbstzugeordnete Geraden und Punkte über $\Rightarrow c\nu_c$, also die Menge der Schmiegeebenen von c , ist eine Ebenenkubik. \blacklozenge

Bemerkungen: (a) Da einerseits Tangenten und Grattangenten einer Punktkubik einander D_3 -dual gegenüberstehen, und da andererseits jede Tangente als Schmiegerade eine Nullgerade ist, folgt: Die Tangenten der Punktkubik c stimmen überein mit den Grattangenten jener Ebenenkubik, die von den Schmiegeebenen von c gebildet wird.

(b) D_3 -dual: Zu jeder Ebenenkubik γ gehört eine Nullpolarität ν_γ^* : $\xi \rightarrow \rho$ und $\gamma\nu_\gamma^*$ ist eine Punktkubik, die aus allen Gratzpunkten von γ gebildet wird.

(c) Die Menge der Schmiegeebenen einer Punktkubik c ist eine Ebenenkubik γ , deren Gratzpunktmenge die Punktkubik c ist.

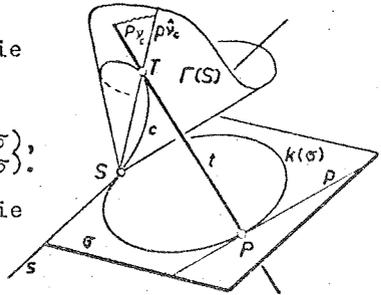
Bew.: Für ein Schmiegeelement (A, a, α) von c gilt $\alpha = A\nu_c$, $a\nu_c = A$. Wegen $A \perp a$ ist A ein Berührungspunkt von γ in α und sogar der Gratzpunkt in α , da durch A nur die Ebene $\alpha \in \gamma = c\nu_c$ geht. \blacklozenge

(d) Die Schmiegeebenenmenge und die Punktmenge einer Punktkubik werden in $\Pi_{\nu_c}(K)$ mit $\text{Char. } K \neq 3$ durch die Nullpolarität ν_c gekoppelt; wir nennen das Paar $(c, c\nu_c = \gamma)$ eine "Kubik"; dieser Begriff ist selbstdual. Die Menge der Tangenten von c stimmt dabei mit der Menge der Grattangenten von $c\nu_c$ überein.

Unterwirft man den quadratischen Sehnenkegel $\Gamma(S)$ einer Kubik der Nullpolarität ν_c , so gehen seine Erzeugenden in Achsen von $\gamma = c\nu_c$ über, die alle Tangenten eines Kegelschnitts $k(\sigma)$ in der Schmiegebene σ von S sind, wobei die Kegelschnittpunkte von den Tangentialebenen des Kegels $\Gamma(S)$ stammen; man bezeichnet diesen Achsenkegelschnitt als "Schmiegekegelschnitt von c ". Speziell die Tangente s in S von c bleibt bei ν_c fest, also berührt $k(\sigma)$ auch s ; der Berührungspunkt ist S , denn S ist ν_c^* -Bild der Schmiegebene σ , die $\Gamma(S)$ längs s berührt. Weiters gilt:

Man erhält alle von S verschiedenen Punkte des Achsenkegelschnitts $k(\sigma)$, wenn man alle von s verschiedenen Tangenten von c mit σ schneidet.

Bew.: Gelte $T \in c \setminus \{S\}$ und sei t bzw. τ die Tangente bzw. Schmiegeebene in T an c . Wegen $t \in \mathcal{U}_{T,\tau}$ gilt $t \hat{=} \tau$. Da t in der Tangentialebene St von $\Gamma(S)$ liegt, geht $t = t \hat{=} \tau$ durch den Punkt $S \hat{=} t \hat{=} \tau$ von $k(\sigma)$, also gehört der Durchstoßpunkt $\sigma \cdot t$ zu $k(\sigma)$. Ist umgekehrt P ein Punkt von $k(\sigma) \setminus \{S\}$ mit der Tangente $p(+s)$ an $k(\sigma)$, so ist die Gerade $p \hat{=} s$ eine von $s = s \hat{=} c$ verschiedene Erzeugende von $\Gamma(S)$, und $P \hat{=} c$ ist die Tangentialebene von $\Gamma(S)$ längs $p \hat{=} c$. Nach Folg.1, Anw.c und Folg.3 liegt auf der Erzeugenden $p \hat{=} c$ genau ein von S verschiedener Kubikpunkt T , dessen Kubiktangente t in der Tangentialebene $P \hat{=} c$ von $\Gamma(S)$ liegt $\Rightarrow t = t \hat{=} c \cdot I P$.



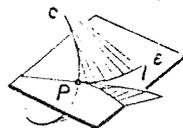
(e) In $\mathbb{K}_K(K)$ mit Char. $K \neq 3$ ist eine Kubik (c, γ) eindeutig festgelegt entweder durch eine Angabe der Punktkubik c oder durch eine Angabe der Ebenenkubik γ . Es gilt also z.B.: Eine Kubik ist eindeutig festgelegt durch ein Schmiegetetraeder und eine Schmiegeebene (vgl. Folg.6), falls nie vier Ebenen kopunktal sind.

SATZ 4.8: Alle Sehnen bzw. Punkte einer Punktkubik werden aus zwei verschiedenen ihrer Punkte durch projektiv kollineare Ebenenbündel bzw. quadratische Geradenkegel projiziert. Der Durchschnitt der Punktmengen zweier quadratischer Geradenkegel mit verschiedenen Spitzen und einer gemeinsamen Erzeugenden, längs der sie einander nicht berühren, ist abgesehen von der gemeinsamen Erzeugenden eine Punktkubik. Die Punkte einer Punktkubik werden aus je zwei Sehnen durch projektive Ebenenbüschel projiziert. Duale Aussagen gelten für Ebenenkubiken. In \mathbb{K}_K^3 über einem Körper der Charakteristik ungleich drei gehören alle Schmiegegeraden einer Punktkubik genau einem Gewinde an und die zugehörige Nullpolarität führt die Punktkubik in die Ebenenkubik ihrer Schmiegeebenen über. Ein Schmiegekegelschnitt der Gratkubik ist bestimmt durch die Spurpunkte der Tangenten der Gratkubik in einer festen Schmiegeebene.

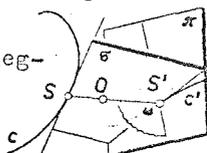
Bemerkungen: (a) Da der Körper des PAR nach Satz 3.5 isomorph zum Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen und \mathbb{R} kommutativ von Char.0 ist, gehören alle Tangenten einer Kubik im PAR einem Gewinde an. Speziell im PAR ist eine Punktkubik eine Kurve (vgl. Folg.4, Anw.c, Bem.). Man nennt eine Kurve, deren sämtliche Tangenten in einem festen Gewinde liegen, eine "Gewindekurve". Im PAR ist eine Kubik also Gewindekurve.

(b) Im PAR stimmen unser Tangenten- und Schmiegeebenenbegriff, wie in 5.8, Anw.(II) gezeigt wird, mit den gleichnamigen differentialgeometrischen Begriffen überein. Alle Tangenten an die Kubik c bilden die Tangentenfläche von c . Nach Sätzen der

Differentialgeometrie gilt: Ist ϵ eine Ebene durch einen Punkt $P \in c$, die nicht die Kurventangente enthält, so schneidet ϵ die Tangentenfläche von c nach einer Kurve l , die in P eine Spitzentangente besitzt, welche die Schnittgerade von ϵ mit der Schmiegeebene von c in P ist. Hieraus und aus dem in Folg.8 verwendeten Hilfssatz folgt für den PAR: Die Schnittkurve l der Tangentenfläche einer Kubik c mit einer Ebene ϵ , welche drei Kubikpunkte A_1, A_2, A_3 enthält, hat in A_1, A_2, A_3 Spitzen und die Spitzentangenten sind kopunktal.



(c) Im PAR gilt nach der Differentialgeometrie ferner: Liegt das Auge O einer Projektion auf π in der Schmiegeebene σ eines Kurvenpunktes S der Kurve c , aber nicht auf der Tangente in S , so hat die Bildkurve c' im Bildpunkt S' einen Wendepunkt. Da speziell die Schmiegeebenen einer Kubik c eine Ebenenkubik bilden, können nach Folg.4 höchstens drei Punkte von c Schmiegeebenen durch das Auge O besitzen; c' hat daher höchstens drei Wendepunkte.



Aus $O \in \sigma = S v_c$ folgt $OS \in \mathcal{U}_{S, \sigma} \Rightarrow (OS) v_c = OS \Rightarrow O v_c =: \omega \mid O \Rightarrow S' \in \omega \pi$. Daher gilt: Jeder Wendepunkt der Bildkurve c' einer Punktkubik c im PAR liegt notwendig auf der Bildspur der (projizierenden) Nullebene $O v_c$ des Auges O , wobei v_c die mit der Punktkubik c verknüpfte Nullpolarität ist. Falls c' drei Wendepunkte besitzt, sind diese kollinear.

4.9. Netze in dreidimensionalen Pappusräumen

Nach Def.4.7 heißt die Menge aller Nullgeraden einer Nullpolarität ein Gewinde. Zwei verschiedene Nullpolaritäten bestimmen zwei verschiedene Gewinde und der Durchschnitt zweier verschiedener Gewinde ist eine echte Teilmenge von \mathcal{U} .

Def.4.9a: Der Durchschnitt zweier verschiedener Gewinde heißt ein Netz.

Folgerungen:

1) Für $N \geq 3$ gilt: Ein hyperbolisches Netz im Sinne von Def.4.7 ist ein Netz im Sinne von Def.4.9a. Ein Netz \mathcal{N} im Sinne von Def.4.9a ist genau dann ein hyperbolisches Netz im Sinne von Def.4.7, wenn die \mathcal{N} bestimmenden beiden Nullpolaritäten ein gemeinsames Paar reziproker Polaren besitzen.

Bew.: (a) Sind e und f die Achsen eines hyperbolischen Netzes \mathcal{N} und $n_1 \in \mathcal{U}$ windschief e und f , so wird durch $e, f =: c \hat{\lambda}$ und n_1 als Nullgerade nach 4.7, Folg.7 eine Nullpolarität v_c festgelegt, deren Gewinde nach 4.7, Folg.4 alle Geraden des hyperbolischen Netzes \mathcal{N} enthält.

Ist $n_2 \in \mathcal{G}$ windschief e und f und keine Nullgerade von ν_1 (Existenz folgt aus $N > 2$), so wird durch $e, f := e \hat{\nu}_2$ und n_2 als Nullgerade eine von ν_1 verschiedene Nullpolarität ν_2 festgelegt, deren Gewinde ebenfalls die Geraden von \mathcal{N} enthält. \mathcal{N} gehört somit zum Durchschnitt der beiden verschiedenen Gewinde und ist mit dem Durchschnitt sogar identisch, da die verschiedenen Nullpolaritäten wegen 4.7, Folg.7 außer dem hyperbolischen Netz \mathcal{N} keine weitere Nullgerade gemeinsam haben können.

(b) Sind e und f ein Paar reziproker Polaren in zwei verschiedenen Nullpolaritäten ν_1 und ν_2 , so enthält der Durchschnitt der zugehörigen Gewinde das hyperbolische Netz mit den Achsen e und f und ist nach (a) mit diesem identisch. Ist umgekehrt der Durchschnitt zweier verschiedener Gewinde ein hyperbolisches Netz mit den Achsen e und f , so ist f reziproke Polare zu e in beiden Nullpolaritäten, da alle Nullgeraden durch einen Punkt von e ein Büschel in einer Ebene durch f erfüllen. ◆

Bemerkung: Für $N=2$ gibt es im Sinne von Def.4.7 hyperbolische Netze, doch ein solches kann nicht als Durchschnitt zweier verschiedener Gewinde erhalten werden, da ein Gewinde für $N=2$ nach 4.7, Folg.7, Bem.a bereits durch ein Paar reziproker Polaren festgelegt ist.

2) Ein parabolisches Netz im Sinne von Def.4.7 ist ein Netz im Sinne von Def.4.9a. Ein Netz \mathcal{N} im Sinne von Def.4.9a ist genau dann ein parabolisches Netz im Sinne von Def.4.7, wenn die \mathcal{N} bestimmenden beiden Nullpolaritäten allen Punkten einer Geraden je dieselbe Nullebene durch diese Gerade zuordnen.

Bew.: (a) Ist e die Achse eines parabolischen Netzes \mathcal{N} und $n_1 \in \mathcal{G}$ windschief e , so wird durch das parab.Netz \mathcal{N} aus Nullgeraden und n_1 als Nullgerade nach 4.7, Folg.7, Bem.c eine Nullpolarität ν_1 festgelegt. Ist $n_2 \in \mathcal{G}$ windschief e und keine Nullgerade von ν_1 , so wird durch das parabolische Netz \mathcal{N} aus Nullgeraden und n_2 als Nullgerade eine von ν_1 verschiedene Nullpolarität ν_2 festgelegt. \mathcal{N} gehört zum Durchschnitt der beiden verschiedenen Gewinde und diese haben nach 4.7, Folg.7, Bem.c sonst keine Gerade gemeinsam.

(b) Unter Benützung von (a) ist der zweite Teil von Folg.2 trivial. ◆

Bemerkung: Aus der Konstruktion der beiden verschiedenen Gewinde durch ein hyperbolisches bzw. parabolisches Netz in Folg.1 bzw. Folg.2 erkennt man, daß ein solches Netz für $N=4$ bzw. $N=3$ in mehr als zwei Gewinden enthalten ist.

3) Durch jeden Punkt, dem die ein Netz definierenden beiden Nullpolaritäten ν_1 und ν_2 verschiedene Nullebenen bzw. dieselbe Null-

Netzgeraden. In jeder Ebene, der die beiden Nullpolaritäten verschiedene Nullpunkte bzw. denselben Nullpunkt zuweisen, liegt genau eine Netzgerade bzw. ein Büschel von Netzgeraden.

Bew.: $X \in \rho$ mit $X\nu_1 \neq X\nu_2 \implies n = X\nu_1.X\nu_2$ ist Netzgerade durch X und zwar wegen $X\nu_1 \neq X\nu_2$ die einzige. Für $X\nu_1 = X\nu_2$ besteht \mathcal{U}_{X, ν_1} aus Netzgeraden und sonst geht keine durch X , da \mathcal{U}_{X, ν_1} die Menge aller Nullgeraden z.B. von ν_1 durch X ist. Die dualen Aussagen werden auf duale Weise bewiesen. ◆

Bemerkung: Ist ein Netz parabolisch bzw. hyperbolisch, so wird genau den Punkten auf der Netzachse bzw. auf den beiden Netzachsen in beiden Nullpolaritäten je dieselbe Nullebene zugeordnet; dies folgt daraus, daß genau durch diese Punkte nach 4.7, Folg.3, Bem.b bzw. Bem.a ein Büschel von Netzgeraden hindurchgeht.

DEF.4.9b: Ein Netz heißt elliptisch, wenn die beiden das Netz bestimmenden Nullpolaritäten keinem Punkt dieselbe Nullebene zuordnen.

Bemerkung: Unabhängig von der Existenz elliptischer Netze gilt nach Folg. 3: Mit jedem Punkt und mit jeder Ebene inzidiert genau eine Gerade eines elliptischen Netzes; je zwei Geraden eines elliptischen Netzes sind daher windschief.

4) Ist \mathcal{N} ein durch die Nullpolaritäten ν_1 und ν_2 bestimmtes Netz und g eine Nichtnetzgerade, die keinen Punkt enthält, dem in ν_1 und ν_2 dieselbe Nullebene zugewiesen wird, so ist die Menge aller Netzgeraden, die g treffen, ein Regulus.

Bew.: Werden die zu ν_1 bzw. ν_2 gehörigen Gewinde mit \mathcal{U}_1 bzw. \mathcal{U}_2 bezeichnet, so gilt $\mathcal{N} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, und g kann wegen $g \notin \mathcal{N}$ höchstens einem der beiden Gewinde angehören.

Wir unterscheiden:

Fall 1: $g \notin \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \implies g\nu_1$ und $g\nu_2$ sind windschief g . Je nach Lage von $g\nu_1$ und $g\nu_2$ zueinander treten folgende Unterfälle auf:

Fall 1.1: $g\nu_1$ windschief $g\nu_2 \implies g, g\nu_1$ und $g\nu_2$ sind paarweise windschief. Nach 4.7, Folg.4 ist die Menge aller g treffenden \mathcal{U}_i -Geraden das durch g und $g\nu_i$ als Achsen bestimmte hyperbolische Netz ($i=1,2$) \implies die Menge aller Geraden von $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \mathcal{N}$, die g treffen, ist gleich der Menge aller Geraden, die $g, g\nu_1$ und $g\nu_2$ treffen und somit ein Regulus.

Fall 1.2: $g\nu_1 + g\nu_2$ und $g\nu_1$ trifft $g\nu_2 \implies$ der Spurpunkt S der Geraden g in der Ebene $g\nu_1.g\nu_2 =: \sigma$ ist eindeutig bestimmt und liegt nicht auf $g\nu_1$ bzw. $g\nu_2$. Wegen $S \in g$ gilt $S\nu_1 = S.g\nu_1 = \sigma$

Fall 1.3: $g \hat{\nu}_1 = g \hat{\nu}_2 \implies \mathcal{N}$ ist hyperbolisches Netz mit den Achsen g und $g \hat{\nu}_1 = g \hat{\nu}_2$ und jedem Punkt von g wird in ν_1 und ν_2 dieselbe Null-ebene zugewiesen: Widerspruch.

Fall 2: $g \in \mathcal{U}_1 \wedge g \notin \mathcal{U}_2 \implies g \hat{\nu}_1 = g$ und $g \hat{\nu}_2$ ist windschief g . Nach 4.7, Folg. 4 bilden alle \mathcal{U}_1 -Geraden, die g treffen, ein parabolisches Netz. Dieses parabolische Netz bestimmt eine Projektivität $\rho_g(X) \propto \ell_g(\xi)$. Alle Geraden dieses parabolischen Netzes, welche zusätzlich $g \hat{\nu}_2$ treffen, verbinden jeweils den Punkt X mit dem eindeutig bestimmten Punkt $\xi \cdot g \hat{\nu}_2 =: X'$ und die Zuordnung $X \mapsto X'$ ist wegen $\rho_g(X) \propto \ell_g(\xi) \propto \rho_{g \hat{\nu}_2}(X')$ eine Projektivität. Die Menge der Verbindungsgeraden XX' ist daher ein Regulus. ◆

5) Sind σ und τ zwei verschiedene Ebenen durch eine Gerade n eines Netzes \mathcal{N} , wobei $\sigma \nu_1^* + \sigma \nu_2^*$ und $\tau \nu_1^* + \tau \nu_2^*$ gilt, so sind die Schnittpunkte in σ und τ der von n verschiedenen Netzgeraden in einer projektiven Kollineation $\varkappa: \rho_\sigma \rightarrow \rho_\tau$ zugeordnet, in der n als Ganzes aber nicht punktweise festbleibt.

Bemerkung: Sei n eine beliebige Netzgerade, die im Falle eines parabolischen Netzes von der Netzachse verschieden ist. Da $\nu_1^* | \ell_n$ und $\nu_2^* | \ell_n$ zwei Projektivitäten $\ell_n \rightarrow \ell_n$ sind, die nicht übereinstimmen (nach Folg. 2 wäre n sonst Achse eines parabolischen Netzes), hat $\nu_1^* | \ell_n \cdot (\nu_2^* | \ell_n)^{-1} + \iota$ maximal zwei Fixebenen (für $N=2$ maximal eine Fixebene), sodaß stets zwei verschiedene Ebenen σ, τ mit $\sigma \nu_1^* + \sigma \nu_2^*$ und $\tau \nu_1^* + \tau \nu_2^*$ durch n existieren.

Bew.: Wir definieren eine Abbildung $\varkappa^*: \mathcal{U}_\sigma \rightarrow \mathcal{U}_\tau$ durch:

(I) $n \varkappa^* := n$.

(II) $g \varkappa^*$ ist für $g \in \mathcal{U}_\sigma \setminus \{n\}$ die Verbindungsgerade der Spurpunkte in τ zweier g treffender Netzgeraden verschieden n .

Diese Definition ist sinnvoll, denn $g \varkappa^*$ ist unabhängig von den beiden gewählten Netzgeraden: In σ liegt nach Vor. und Folg. 3 nur die Netzgerade n , sodaß $g \varkappa \mathcal{N}$ für $g \neq n$ gilt. Enthält weiters g keinen Punkt, dem in ν_1 und ν_2 dieselbe Nullebene zugewiesen ist, so ist nach Folg. 4 die Menge der g treffenden Netzgeraden ein Regulus, der n enthält. Die Ebene $\tau \cap \mathcal{N}$ ist daher Tangentialebene der zugehörigen ringartigen Quadrik und enthält eine Leitgerade des Regulus, nämlich $g \varkappa^*$. Trägt dagegen g einen Punkt G mit $G \nu_1 = G \nu_2$, so folgt aus $G \in \sigma$ dann $G \nu_1 \in \sigma \nu_1^*$, $G \nu_2 \in \sigma \nu_2^*$ und wegen $\sigma \nu_1^* + \sigma \nu_2^*$ und $G \nu_1^* \cdot \sigma \nu_2^* = n$ dann $G \nu_1 = G \nu_2 \in n$. Ist $G \notin n$, so ist wegen $G \in \mathcal{U}_\sigma = \mathcal{U}_\tau$ dann $G \in \sigma$ und $\sigma \nu_1^* = \sigma \nu_2^*$ im Widerspruch zur Voraussetzung; enthält also g einen solchen Punkt G , so muß notwendig $G \in n$ gelten. Die Geraden des Büschels $\mathcal{U}_{g, g \nu_1}$ sind g treffende Netzgeraden und schneiden alle τ in G , da $G \nu_1 = G \nu_2 + \tau$ wegen $\tau \nu_1^* + \tau \nu_2^*$ gilt. Da $g \hat{\nu}_1, g \hat{\nu}_2 \in \mathcal{U}_\sigma = \mathcal{U}_\tau$ und wegen $\sigma \in \mathcal{U}_\sigma$ und $\sigma \nu_1^* + \sigma \nu_2^*$ sicher $g \hat{\nu}_1 \neq g \hat{\nu}_2$ gilt, bilden alle anderen g treffenden Netzgeraden das Büschel

um $g \hat{\vee} \cdot g \hat{\vee} =: H$ in der Ebene H_g (wegen g windschief $g \hat{\vee}$ gilt nämlich $H \not\perp g$). Diese Ebene schneidet τ in einer Geraden $g \alpha^*$ durch G , da g nicht in τ liegt.

α^* ist eine projektive Kollineation:

(α) α^* ist nach Definition eine globale Abbildung und es existiert α^{*-1} , denn man kann $\alpha^{*-1}: \mathcal{U}_\tau \rightarrow \mathcal{U}_\sigma$ analog zu α^* definieren; somit ist α^* bijektiv.

(β) Da ein Punkt von σ , dem in beiden Nullpolaritäten dieselbe Nullebene zugewiesen wird, nach den Überlegungen zu Beginn des Beweises notwendig auf n liegt, geht wegen Folg. 3 durch jeden Punkt $X \in \mathcal{P}_\sigma \setminus \mathcal{P}_n$ genau eine Netzgerade; diese ist stets windschief zu n , da in σ nur die Netzgerade n liegt. Nach Teil (II) der Def. von α^* haben daher die α^* -Bilder von Geraden aus $\mathcal{U}_\sigma \setminus \{n\}$, die mit einem Punkt $X \not\perp n$ inzidieren, einen Punkt aus $\mathcal{P}_\tau \setminus \mathcal{P}_n$ gemeinsam. Inzidieren zwei verschiedene Geraden aus \mathcal{U}_σ mit einem Punkt $Y \perp n$, so sind ihre α^* -Bilder nach (α) verschieden und ihr Schnittpunkt muß auf n liegen, da jeder andere Punkt von \mathcal{P}_τ von einem Punkt aus $\mathcal{P}_\sigma \setminus \mathcal{P}_n$ stammt; Geraden, die mit einem Punkt auf n inzidieren, besitzen daher α^* -Bilder, die einander auf n schneiden.

(γ) Die oben definierte Abbildung $\alpha^*: \mathcal{U}_\sigma \rightarrow \mathcal{U}_\tau$ ist nach (α) und (β) eine Kollineation. Die zu α^* gehörende Kollineation $\alpha: \mathcal{P}_\sigma \rightarrow \mathcal{P}_\tau$ läßt \mathcal{P}_n als Ganzes fest; weiters ist $\alpha|_{\mathcal{P}_n} \neq \text{id}$, da sonst \mathcal{P}_σ perspektiv \mathcal{P}_τ wäre und auch drei nichtkomplanare Geraden des Bündels um das Perspektivitätszentrum im Netz \mathcal{N} enthalten wären, was Folg. 3 widerspricht. Schließlich ist α projektiv, da die Reihen auf den Leitgeraden g und $g \alpha^*$ eines Regulus aus Netzgeraden durch diese projektiv gekoppelt werden.

6) Jedes Netz ist entweder ein elliptisches oder ein hyperbolisches oder ein parabolisches Netz.

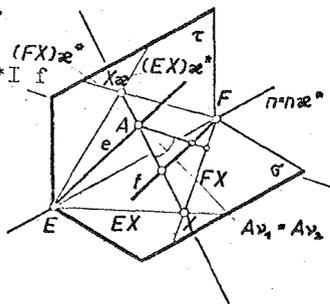
Bew.: Sind σ und τ zwei verschiedene Ebenen wie in Folg. 5 und α die nach Folg. 5 durch ein Netz \mathcal{N} bestimmte projektive Kollineation $\mathcal{P}_\sigma \rightarrow \mathcal{P}_\tau$, so ist wegen Beweisteil (γ) in Folg. 5 dann $\alpha|_{\mathcal{P}_n} \neq \text{id}$ und kann daher eine elliptische, hyperbolische oder parabolische Projektivität sein.

(a) $\alpha|_{\mathcal{P}_n}$ ist eine elliptische Projektivität: Enthält \mathcal{P}_σ einen Punkt X mit $X \nu_1 = X \nu_2$, so liegt dieser nach dem Beweise zu Folg. 5 auf n , und für jede Gerade $g \in \mathcal{U}_{\sigma, \tau} \setminus \{n\}$ gilt $g \alpha^* \perp X$. Der Punkt X ist dann Fixpunkt von $\alpha|_{\mathcal{P}_n}$ im Widerspruch zur Voraussetzung; analog existiert in \mathcal{P}_τ kein Punkt X mit $X \nu_1 = X \nu_2$. Existiert dagegen ein

Punkt X mit $X\nu_1 = X\nu_2$ und $X \notin \sigma, \tau$, und setzt man $X\nu_1 \cdot \sigma =: g$, so ist $g \neq n$, da $n = n^*$ und $X \notin n$ gilt. Die in Folg.5 erklärte Gerade $g\alpha^*$ ist $X\nu_2 \cdot \tau$, und da $g \cdot g\alpha^* =: G \cap n$ und $n = n^*$ ist, folgt $G\alpha = G$ im Widerspruch zur Annahme. Damit ist nach Def.4.9b das Netz elliptisch.

(b) $\alpha | \mathcal{P}_n \neq \nu$ besitzt einen Fixpunkt E : Ist $g \in \mathcal{U}_{\varepsilon, \sigma} \setminus \{n\}$, so gilt $g\alpha^* \cap E$ und alle Netzgeraden ($\neq n$), die g treffen, liegen in der Ebene $\varepsilon =: gg\alpha^*$. Die Projektivität $\alpha^* | \mathcal{U}_{\varepsilon, \sigma} = \mathcal{U}_{\varepsilon, \sigma} - \mathcal{U}_{\varepsilon, \tau}$ ist wegen $n\alpha^* = n$ eine Perspektivität und daher gehen die Ebenen $\varepsilon = g \cdot g\alpha^*$ durch eine Perspektivitätsachse e mit $e \cap E$, $e \notin \sigma, \tau$ (D_3 -dual zu 1.7, Bem.c). In ε liegt sicher mehr als eine Netzgerade, nach Folg.3 gilt daher $\varepsilon\nu_1^* = \varepsilon\nu_2^*$ und somit ist $e\hat{\nu}_1 = e\hat{\nu}_2$. Ist $e = e\hat{\nu}_1 (= e\hat{\nu}_2)$, also $e \in \mathcal{N}$, so gilt $(en)\nu_1^* = (en)\nu_2^* = E$ und für jede Ebene $\varepsilon \in \mathcal{E} \setminus \{en\}$ ist $\varepsilon\nu_1^* = \varepsilon\nu_2^*$, also $\nu_1^* | \mathcal{E} = \nu_2^* | \mathcal{E}$ und daher $\nu_1 | \mathcal{E} = \nu_2 | \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{N}$ ist nach Folg.2 ein parabolisches Netz. Ist dagegen $e \neq e\hat{\nu}_1 (= e\hat{\nu}_2)$, so sind diese Geraden nach 4.7, Folg.2 zueinander windschief, und ν_1 und ν_2 haben ein gemeinsames Paar reziproker Polaren; dann ist \mathcal{N} nach Folg.1 ein hyperbolisches Netz.

Bemerkungen: (a) Ist $\alpha | \mathcal{P}_n$ eine hyperbolische Projektivität, so existiert durch den zweiten Fixpunkt F ebenfalls eine Gerade f mit analogen Eigenschaften wie die Gerade e . Die Netzgerade durch einen Punkt $X \in \mathcal{P}_\sigma \cap \mathcal{P}_\tau$, die X mit $X\alpha$ verbindet, liegt in der Ebene $(EX) \cdot (EX)\alpha^* \cap e$ und in der Ebene $(FX) \cdot (FX)\alpha^* \cap f$ und schneidet daher e und f . Durch jeden von E verschiedenen Punkt A von e gehen sicher zwei verschiedene, f treffende Netzgeraden, welche $A\nu_1 = A\nu_2$ aufspannen; somit gilt $f = e\hat{\nu}_1 = e\hat{\nu}_2$. Die Gerade f ist somit zu e windschief und \mathcal{N} hyperbolisch. Ist umgekehrt \mathcal{N} hyperbolisch mit den Achsen e und f , so schneiden diese den Netzstrahl n und liegen weder in σ noch in τ , da diesen Ebenen je verschiedene Nullpunkte zugeordnet sind. Die Punkte $E := en$ und $F := fn$ sind dann verschiedene Fixpunkte von $\alpha | \mathcal{P}_n$, da die Netzgeraden, die z.B. $g \in \mathcal{U}_{\varepsilon, \sigma} \setminus \{n\}$ schneiden, Spurpunkte in τ auf einer Geraden $g\alpha^* \in \mathcal{U}_{\varepsilon, \tau} \setminus \{n\}$ besitzen. Da ein elliptisches bzw. hyperbolisches Netz genau dann vorliegt, wenn $\alpha | \mathcal{P}_n$ elliptisch bzw. hyperbolisch ist, wird ein parabolisches Netz nach Folg.6 durch $\alpha | \mathcal{P}_n$ parabolisch gekennzeichnet.



(b) Für $N=2$ existieren im Sinne von Def.4.9a keine hyperbolischen Netze (jedoch natürlich im Sinne von Def.4.7), da jede Projektivität mit zwei verschiedenen Fixpunkten für $N=2$ notwendig die Identität ist.

(c) Die in Folg.5 geforderten Bedingungen $\sigma\nu_1^* + \sigma\nu_2^*$ und $\tau\nu_1^* + \tau\nu_2^*$ bedeuten wegen Folg.6, Folg.3, Bem. und Def.4.9b, daß σ und τ keine Achse des Netzes enthalten. Weiters gilt Folg.4 für jede Nichtnetzgerade g , die keine Achse des Netzes schneidet.

7) Nach Folg.5 und Folg.6, Bem.b werden zwei Ebenen σ, τ durch eine Netzgerade n , die keine Achse des Netzes enthalten, von den Netzgeraden $*n$ in Punkten geschnitten, die in einer projektiven Kollineation $\alpha: \mathcal{P}_\sigma \rightarrow \mathcal{P}_\tau$ mit $\alpha|\mathcal{P}_n \neq \iota$ gekoppelt sind. Umgekehrt gilt:

Ist $\alpha: \mathcal{P}_\sigma \rightarrow \mathcal{P}_\tau$ eine projektive Kollineation, welche die Schnittgerade n der verschiedenen Ebenen σ und τ als Ganzes aber nicht punktweise festläßt, so gehören die Verbindungsgeraden $X, X\alpha$ für $X \in \mathcal{P}_\sigma \setminus \mathcal{P}_n$ einem Netz \mathcal{N} an, das n enthält und keine Achse in σ und τ besitzt.

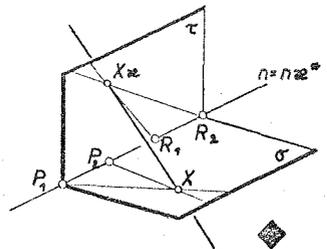
Bew.: Wegen $\alpha|\mathcal{P}_n \neq \iota$ hat $\alpha|\mathcal{P}_n$ höchstens zwei Fixpunkte, speziell für $N=2$ höchstens einen \Rightarrow es existieren Punkte $P_1 \neq P_2 \in \mathcal{P}_n$ mit $P_1 \alpha =: R_1 + P_1 \wedge P_2 \alpha =: R_2 + P_2$; sicher ist dann $R_1 \neq R_2$. Die Projektivitäten $\alpha_j := \alpha|_{\mathcal{G}_{P_j, \sigma}} = \mathcal{G}_{P_j, \sigma} \rightarrow \mathcal{G}_{R_j, \tau}$ leisten $n\alpha_j = n$ und können zur Sylvestererzeugung zweier Nullpolaritäten ν_j ($j=1,2$) benützt werden. Wegen $\sigma\nu_1^* = R_1 + R_2 = \sigma\nu_2^* \wedge \tau\nu_1^* = P_1 + P_2 = \tau\nu_2^*$ ist $\nu_1^* \neq \nu_2^*$, und die beiden zugehörigen Gewinde haben ein Netz \mathcal{N} gemeinsam, dem n angehört und das in σ und τ keine Achse besitzt; es bleibt zu zeigen, daß $XX\alpha$ für $X \in \mathcal{P}_\sigma \setminus \mathcal{P}_n$ stets in \mathcal{N} liegt.

Für $X \in \mathcal{P}_\sigma \setminus \mathcal{P}_n$ gilt:

$$(P_1 X) \alpha^* = R_1 . X \alpha = (P_1 X) \alpha_1,$$

$$(P_2 X) \alpha^* = R_2 . X \alpha = (P_2 X) \alpha_2.$$

Da $(P_j X) \alpha_j$ die reziproke Polare von $P_j X$ in ν_j ist, liegt $XX\alpha$ in beiden Gewinden und daher im Netz \mathcal{N} .



Bemerkungen: (a) Der Typus des Netzes \mathcal{N} hängt nach Folg.6, Bem. b von der Anzahl der Fixpunkte von $\alpha|\mathcal{P}_n$ ($\alpha \neq \iota$) ab. Im elliptischen Fall ist das Netz identisch mit der Menge der Verbindungsgeraden von in α zugeordneten (und stets verschiedenen) Punkten. Im parabolischen und hyperbolischen Fall besteht die Menge aller Geraden, die gleichzeitig mit in α zugeordneten Punkten inzidieren, aus $\{n\}$, den Geraden des Netzes \mathcal{N} durch Punkte $X \in \mathcal{P}_\sigma \setminus \mathcal{P}_n$ und dem Geradenbündel um jeden Fixpunkt von $\alpha|\mathcal{P}_n$ (vgl. 4.10). In diesen beiden Fällen "bestimmt" die projektive Kollineation α das Netz \mathcal{N} .

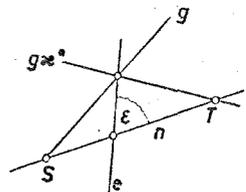
(b) Elliptische Netze existieren nur in solchen \mathbb{P}_{pp} , in denen elliptische Projektivitäten existieren, was eine Eigenschaft des Körpers der Geometrie ist.

8) Jedes Netz gestattet auch eine duale Festlegung:

Ist $\alpha: \mathcal{L}_S \rightarrow \mathcal{L}_T$ eine projektive Kollineation, welche die Verbindungsgerade n der verschiedenen Punkte S und T als Ganzes aber nicht ebenenweise festläßt, so gehören die Schnittgeraden $\xi, \xi\alpha$ für $\xi \in \mathcal{L}_S \setminus \mathcal{L}_n$ einem Netz \mathcal{N} an, das n enthält und keine Achse durch S und T besitzt. \mathcal{N} ist elliptisch bzw. parabolisch bzw. hyperbolisch, falls $\alpha|_{\mathcal{L}_n}$ elliptisch bzw. parabolisch bzw. hyperbolisch ist.

Bew.: D_3 -dual zum Beweis von Folg.7 wählen wir Ebenen $\pi_1 + \pi_2 \in \mathcal{L}_n$ mit $\pi_1\alpha =: \rho_1 + \pi_1\alpha =: \rho_2 + \pi_2$; sicher ist dann $\rho_1 + \rho_2$. Die Projektivitäten $\alpha_i := \alpha^*|_{\mathcal{U}_{S,\pi_i}}: \mathcal{U}_{S,\pi_i} \rightarrow \mathcal{U}_{T,\pi_i}$ leisten $n\alpha_i = n$ und legen zwei verschiedene Gewinde fest, deren Schnittnetz \mathcal{N} die Gerade n enthält und wegen $S\nu_1 = \rho_1 + \rho_2 = S\nu_2$, $T\nu_1 = \pi_1 + \pi_2 = T\nu_2$ keine Achse durch S und T besitzt. Für $\xi \in \mathcal{L}_S \setminus \mathcal{L}_n$ gilt $(\pi_1\xi)\alpha^* = \rho_1, \xi\alpha = (\pi_1\xi)\alpha_1, (\pi_2\xi)\alpha^* = \rho_2, \xi\alpha = (\pi_2\xi)\alpha_2$. Da $(\pi_i\xi)\alpha_i$ die reziproke Polare von $\pi_i\xi$ in ν_i ist, liegt $\xi\xi\alpha$ im Netz \mathcal{N} .

Besitzt \mathcal{N} eine Achse e , so trifft e die Netzgerade n und die Ebene $\epsilon := en$ ist Fixebene von $\alpha|_{\mathcal{L}_n}$, da die Netzgeraden, die in Ebenen durch $g \in \mathcal{U}_{S,\mathcal{N}} \setminus \{n\}$ liegen, den Punkt $g.e$ enthalten und daher aus T durch Ebenen eines Büschels $\mathcal{L}_{g\alpha^*}$ projiziert werden, wobei $g\alpha^* \perp g$; wegen $\epsilon = en = gn$ gilt $\epsilon\alpha = (gn)\alpha = g\alpha^*.n = \epsilon$. Umgekehrt liegt in jeder Fixebene ϵ von $\alpha|_{\mathcal{L}_n}$ eine Achse des Netzes \mathcal{N} , da



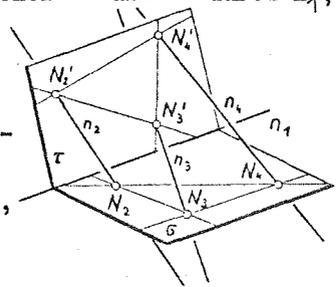
$\alpha^*|_{\mathcal{U}_{S,\epsilon}}: \mathcal{U}_{S,\epsilon} \rightarrow \mathcal{U}_{T,\epsilon}$ wegen $n\alpha^* = n$ eine Perspektivität ist und daher zugeordnete Büschelgeraden g und $g\alpha^*$ einander auf einer Perspektivitätsachse $e \perp \epsilon$, $e \perp \{S, T\}$ treffen. Durch jeden Punkt $g.g\alpha^*$ auf e (nicht auf n) geht sicher mehr als eine Netzgerade, da jede Ebene ξ aus \mathcal{L}_g (nicht durch n) die zugeordnete Ebene $\xi\alpha \in \mathcal{L}_{g\alpha^*}$ in einer Geraden durch $g.g\alpha^*$ schneidet; nach Folg.3, Bem. ist daher $g.g\alpha^*$ ein Punkt einer Netzachse. Die Anzahl der Netzachsen stimmt daher mit der Anzahl der Fixebenen von $\alpha|_{\mathcal{L}_n}$ überein. ◆

9) Für $N \geq 3$ ist ein Netz eindeutig festgelegt durch vier paarweise windschiefe Netzgeraden n_1, \dots, n_4 , die keinem Regulus angehören.

Bew.: n_2, n_3, n_4 bestimmen genau einen Regulus \mathcal{U}_ϕ und $n_1 \notin \mathcal{U}_\phi$.
 Weiters ist $n_1 \notin \mathcal{U}_\phi$, da n_1 zu n_2, n_3 und n_4 windschief ist. Durch
 die Gerade n_1 , die keine Erzeugende von ϕ ist, gehen nach 4.4,
 Folg.1, Bem.d und Bem.e höchstens zwei Tangentialebenen von ϕ .
 Es gibt wegen $N \geq 3$ zwei verschiedene Ebenen σ und τ durch n_1 ,
 die keine Tangentialebenen von ϕ sind.

Wegen n_2, n_3, n_4 windschief n_1 gilt:

$\exists^* n_j \sigma =: N_j \wedge \exists^* n_j \tau =: N'_j$ für $j=2,3,4$ und
 $n_1 \not\subset N_j, N'_j$. Da σ und τ keine Tangential-
 ebenen von ϕ sind, bilden N_2, N_3, N_4 bzw.
 N'_2, N'_3, N'_4 ein Dreieck und $\{n_1, N_2, N_3, N_4$,
 $N_4, N_2\}$ bzw. $\{n_1, N'_2, N'_3, N'_4, N'_4, N'_2\}$ sind
 Vierseite. In \mathbb{P}^3 existiert genau eine



projektive Kollineation $\alpha^*: \mathcal{U}_\sigma \rightarrow \mathcal{U}_\tau$, welche diese Vierseite
 zuordnet. Für die projektive Kollineation $\alpha: \mathcal{P}_\sigma \rightarrow \mathcal{P}_\tau$ gilt $\alpha|_{\mathcal{P}_n} = \tau$,
 da n_2, n_3, n_4 nicht kopunktal sind, und α bestimmt somit ein Netz \mathcal{N}
 mit $n_1, \dots, n_4 \in \mathcal{N}$. Mit α ist \mathcal{N} eindeutig bestimmt. ◆

Bemerkung: Vier paarweise windschiefe Geraden n_1, \dots, n_4 , die
 keinem Regulus angehören, besitzen höchstens zwei Treffgeraden ($N \geq 3$).

Bew.: n_1, \dots, n_4 bestimmen genau ein Netz \mathcal{N} und dieses hat höchstens
 zwei Achsen e und f ; die Geraden e und f treffen n_1, \dots, n_4 . Außer
 den Achsen von \mathcal{N} gibt es keine Treffgeraden an n_1, \dots, n_4 :
 (ind.) $\exists t \neq e, f \wedge t$ trifft $n_1, \dots, n_4 \Rightarrow t$ trifft o.B.d.A. n_1 in
 einem Punkt $S \notin e, f \Rightarrow t \notin \mathcal{N}$ nach Folg.3. Wir unterscheiden:
 Fall 1: t trifft $e \Rightarrow n_1, \dots, n_4$ liegen in der durch e und t aufge-
 spannten Ebene: Widerspruch zu n_i paarweise windschief.
 Fall 2: t trifft keine Netzachse (insbesondere \mathcal{N} ist elliptisch):
 Nach Folg.4 bilden alle t treffenden Netzgeraden von \mathcal{N} einen
 Regulus, dem n_1, \dots, n_4 angehören müssen: Widerspruch zur Voraus-
 setzung. ◆

Zur Konstruktion der Treffgeraden an n_1, \dots, n_4 geht man nach
 TIMMERDING so vor:

(1) Man wähle zwei verschiedene Ebenen $\sigma, \tau \mid n_1$ und konstruiere
 unter Benützung der Dreiecke N_2, N_3, N_4 und N'_2, N'_3, N'_4 die Fixpunkte
 von $\alpha|_{\mathcal{P}_n}$. (sind N_2, N_3, N_4 oder N'_2, N'_3, N'_4 kollinear, so ist ihre
 Trägergerade bereits eine Lösung).

(2) Ist E ein solcher Fixpunkt auf n_1 , so lege man die eindeutige
 Treffgerade e aus E an n_2 und n_3 ; e trifft auch n_4 und ist Achse
 des Netzes \mathcal{N} .

10) Nach 3.5, Folg.6, (II) sind die harmonischen Homologien die einzigen perspektiven involutorischen Kollineationen eines $\mathbb{P}_{\kappa 1}^3$. Wir bestimmen nun alle projektiven involutorischen Kollineationen eines $\mathbb{P}_{\kappa 1}^3$.

Zuerst leiten wir notwendige Bedingungen für eine solche Kollineation her. Ist $\alpha \in \text{PGL}(\mathbb{P}_{\kappa 1}^3)$ und involutorisch ($\alpha^2 = \iota \wedge \alpha \neq \iota$), so existiert eine Ebene α mit $\alpha\alpha^* =: \beta \neq \alpha$. Für $s := \alpha\beta$ gilt $s\hat{\alpha} = (\alpha\beta)\hat{\alpha} = \alpha\alpha^*\beta\alpha^* = \beta.(\alpha\alpha^*\alpha^*) = \beta.\alpha\iota = \beta\alpha = s$. Die Projektivität $\alpha|_{\rho_s}$ ist entweder eine projektive Involution oder die Identität ι . Da eine projektive Involution hyperbolisch oder elliptisch sein kann, sind drei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $\alpha|_{\rho_s} = \iota$: Nach 4.1, Folg.8c ist $\alpha|_{\rho_s}: \rho_s \rightarrow \rho_s$ eine Perspektivität, d.h. es existiert $Z \in \rho_s$, $Z\alpha, Z\beta$ mit $X, X\alpha, Z$ kollinear für alle $X \in \rho_s$. Auf jeder Geraden $x \in \rho_s$, die s nicht trifft, sind die Schnittpunkte mit α und β verschieden und in x zugeordnete Punkte X und $X\alpha \Rightarrow x\hat{\alpha} = (XX\alpha)\hat{\alpha} = X\alpha.X\alpha\alpha = X\alpha.X\iota = X\alpha.X = x$. Da in ρ_s vier nichtkomplanare Geraden existieren, die s nicht treffen, folgt $\hat{\alpha}|_{\rho_s} = \iota \Rightarrow \alpha$ ist eine perspektive involutorische Kollineation $\xrightarrow{3.5, 6} \alpha$ ist eine harmonische Homologie.

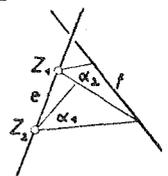
Fall 2: $\alpha|_{\rho_s}$ ist hyperbolisch: Die projektive Kollineation $\alpha|_{\rho_s}$ bestimmt nach Folg.6, Bem.a und Folg.7 ein hyperbolisches Netz \mathcal{N} , dessen Achsen e, f durch die Fixpunkte E, F von $\alpha|_{\rho_s}$ gehen und nicht in α, β liegen. Auf jeder Geraden $x \in \mathcal{N}$, die s nicht trifft, sind die Schnittpunkte mit α und β verschieden und in x zugeordnet $\Rightarrow x\hat{\alpha} = x$ wie bei Fall 1. Die Punkte E und F sind Fixpunkte von α ; durch jeden anderen Punkt von e oder f gehen sicher zwei Netzgeraden, die s nicht treffen und als Ganzes festbleiben $\Rightarrow \alpha|_{\rho_e} = \iota \wedge \alpha|_{\rho_f} = \iota \Rightarrow$ alle Geraden des Netzes \mathcal{N} sind Fixgeraden. Außer den Punkten aus $\rho_e \cup \rho_f$ existiert kein Fixpunkt von α , da sonst eine Fundamentalfigur aus Fixpunkten vorhanden wäre, was $\alpha \neq \iota$ widerspricht. Für jede Netzgerade n ist $\alpha|_{\rho_n} \neq \iota$ dann eine hyperbolische projektive Involution mit den Fixpunkten auf e und $f \Rightarrow H(X, X\alpha; e, f)$.

Falls eine solche projektive involutorische Kollineation α existiert, so erfüllt sie daher notwendig folgende Bedingungen:
(I) Zwei windschiefe Geraden e und f bleiben punktweise fest
(II) Für $X \notin e, f$ trifft die Gerade $XX\alpha$ sowohl e als auch f und es gilt $H(X, X\alpha; e, f)$.

Wir überprüfen nun umgekehrt, ob es eine projektive involutorische Kollineation gibt, die (I) und (II) erfüllt. Dazu definieren wir eine Abbildung $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ durch

- (I) $X\alpha = X \quad \forall X \in \mathcal{P}_e \cup \mathcal{P}_f$ mit $e, f \in \mathcal{U}$ und windschief
- (II) Für $X \notin \mathcal{P}_e \cup \mathcal{P}_f$ liegen X und $X\alpha$ auf der Treffgeraden von X an e und f mit $H(X, X\alpha; e, f)$.

Diese Abbildung α ist nach ihrer Definition global und involutorisch; es bleibt zu zeigen, daß sie eine projektive Kollineation ist. Dazu wählen wir $Z_1, Z_2 \in I_e$ mit $Z_1 \neq Z_2$. Die Ebenen $Z_1 f =: \alpha_2$ und $Z_2 f =: \alpha_1$ sind eindeutig bestimmt, und es existiert je genau eine harmonische Homologie σ_i mit der Achse α_i und dem Zentrum Z_i ($i=1,2$). Wir zeigen $\alpha = \sigma_1 \cdot \sigma_2$.



Zu (I): $\sigma_1 \cdot \sigma_2 | \mathcal{P}_e = \text{id}$, denn f liegt in der Achse α_i von σ_i bzw. α_2 von σ_2 .

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 | \mathcal{P}_f = \text{id}$: Für $Z_1 (I_e)$ gilt $Z_1 \sigma_1 = Z_1$ und wegen $Z_1 \in \alpha_2$ gilt $Z_1 \sigma_2 = Z_1$, also $Z_1 \sigma_1 \cdot \sigma_2 = Z_1$; ebenso $Z_2 \sigma_1 \cdot \sigma_2 = Z_2$.

Für $X \in \mathcal{P}_e \setminus \{Z_1, Z_2\}$ gilt:

$$\left. \begin{aligned} H(X, X\sigma_1; Z_1, \alpha_1) &\Rightarrow H(X, X\sigma_1; Z_1, Z_2) \\ H(X\sigma_1, X\sigma_1\sigma_2; Z_2, \alpha_2) &\stackrel{1,10}{\Rightarrow} H(X\sigma_1\sigma_2, X\sigma_1; Z_1, Z_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow X = X\sigma_1\sigma_2,$$

denn in einem Desarguesraum ist der vierte harmonische Punkt eindeutig bestimmt. Damit ist (I) für $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ erfüllt.

Zu (II): $X \notin I_e, f$: Aus X existiert genau eine Treffgerade n an e und f , die e in E_1 und f in F_1 trifft mit $E_1 \neq F_1$; da $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ die Eigenschaft (I) erfüllt, bleibt n als Ganzes fest $\Rightarrow X\sigma_1\sigma_2 \in n$.

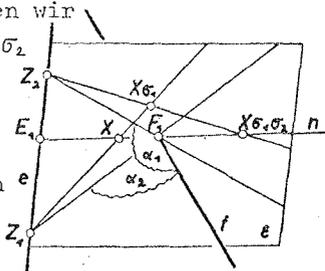
Um die Lage von $X\sigma_1\sigma_2$ festzulegen, betrachten wir

die Ebene $Xe =: \varepsilon$, wobei $F_1 = f\varepsilon$ gilt. Da σ_1, σ_2 harmonische Homologien sind, folgt

$$\begin{aligned} H(X, X\sigma_1; Z_1, \alpha_1, \varepsilon) &\text{ mit } \alpha_1 \varepsilon = F_1 Z_2, \\ H(X\sigma_1, X\sigma_1\sigma_2; Z_2, \alpha_2, \varepsilon) &\text{ mit } \alpha_2 \varepsilon = F_1 Z_1. \end{aligned}$$

Projiziert man die letzten vier harmonischen

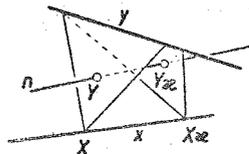
Punkte aus Z_1 auf die Gerade $E_1 F_1$, so folgt $H(X, X\sigma_1\sigma_2; E_1, F_1)$. Damit ist (II) für $\sigma_1 \cdot \sigma_2$



erfüllt. Da (I) und (II) die Abbildung α eindeutig festlegen, ist $\alpha = \sigma_1 \cdot \sigma_2$, und α als Produkt zweier perspektiver Kollineationen eine projektive Kollineation.

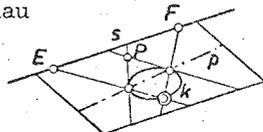
Bemerkungen: (a) Nach (I) und (II) ist die projektive involutorische Kollineation α durch das hyperbolische Netz \mathcal{N} bereits vollständig festgelegt.

(b) Ohne Benützung der Netzachsen kann bei gegebenem hyperbolischen Netz zu X der Bildpunkt $X\alpha$ konstruiert werden, wenn man die Beschränkung von α auf eine Netzgerade n kennt. $X\alpha$ liegt auf der durch X gehenden Netzgeraden x . Sei y eine weitere, zu x und n windschiefe Netzgerade. Nach Voraussetzung ist zum Punkt $Y := (Xy)_n$ der Bildpunkt $Y\alpha$ (in n) bekannt, und es gilt $X\alpha = x(yY\alpha)$ wegen $X \in (yY)$ und $(yY)\alpha^* = y\alpha Y\alpha = y.Y\alpha$.



(c) Ist das hyperbolische Netz \mathcal{N} durch eine projektive Kollineation $\varphi: \mathcal{P}_s \rightarrow \mathcal{P}_\tau$ mit $s\varphi^* = s$ und $\varphi|_{\mathcal{N}}$ hyperbolisch ($s = \sigma\tau$) gegeben, so ist die projektive involutorische Kollineation α mit dem Fixnetz \mathcal{N} nach (b) durch $\alpha|_{\mathcal{N}}$ vollständig bestimmt. Diese projektive Involution $\alpha|_{\mathcal{N}}$ hat dieselben Fixpunkte wie $\varphi|_{\mathcal{P}_s}$, da die Fixpunkte beider Projektivitäten die Schnittpunkte E, F der Netzachsen e, f mit s sind; durch diese Fixpunkte ist $\alpha|_{\mathcal{N}}$ und damit α festgelegt.

(d) Die projektive Involution $\alpha|_{\mathcal{N}}$ kann ohne Verwendung der Fixpunkte von $\varphi|_{\mathcal{P}_s}$ wie folgt festgelegt werden: In einer Ebene durch s sei k ein Kegelschnitt, der als Steinerkegelschnitt zur Vervollständigung der Projektivität $\varphi|_{\mathcal{N}}$ benützt wird. Die Projektivitätsachse p der Projektivität auf k schneidet k in den Fixpunkten der Projektivität auf k und die projektive Involution $\alpha|_{\mathcal{N}}$ führt auf eine projektive Involution auf k , deren Zentrum der Pol P von p bezüglich k sein muß; genau dann hat die projektive Involution auf k nämlich dieselben Fixpunkte wie die Projektivität auf k . Man beherrscht $\alpha|_{\mathcal{N}}$ und damit α durch Angabe des Involutionenzentrums P .



Fall 3: $\alpha|_{\mathcal{N}}$ ist elliptisch: Die projektive Kollineation $\alpha|_{\mathcal{P}_s}: \mathcal{P}_s \rightarrow \mathcal{P}_s$ bestimmt nach Folg.6, Bem.a und Folg.7 ein elliptisches Netz \mathcal{N} , dem s angehört. Jede Gerade $x \in \mathcal{N}$ mit $x \neq s$ ist nach Def.4.9b, Bem. zu s windschief und schneidet α und β in verschiedenen, in α gekoppelten Punkten $\Rightarrow x\hat{\alpha} = x$ wie bei Fall 1. Alle Geraden des Netzes \mathcal{N} sind daher Fixgeraden. In α existiert kein Fixpunkt; verbindet man nämlich einen Fixpunkt $F = F\alpha$ mit einer Netzgeraden n , die nicht mit F inzidiert, so bleibt wegen $n = n\hat{\alpha}$ die Ebene Fn bei α^* fest und $(Fn.\alpha)\hat{\alpha} = Fn.\beta$, sodaß der auf $s = s\hat{\alpha}$ liegende Schnittpunkt dieser zugeordneten Spuren von Fn in α und β im Widerspruch zur Voraussetzung ein Fixpunkt von $\alpha|_{\mathcal{N}}$ ist.

Die Existenz eines elliptischen Netzes in \mathbb{T}_{kl}^3 ist nach Folg.7, Bem.b eine Körpereigenschaft. Zu jedem elliptischen Netz \mathcal{N} gibt es ebenfalls genau eine projektive involutorische Kollineation, deren Fixgeraden das Netz \mathcal{N} erfüllen. Um den umständlichen direkten Beweis zu umgehen, benützen wir folgende in 5.4, Folg.5, Bem.e

zusammen mit 5.6 bewiesene Aussage:

Jeder klassische projektive Raum ist isomorph zu einem sogenannten arithmetischen projektiven Raum \mathbb{T} und es genügt daher, Probleme in diesem zu lösen. Durch Hinzufügen neuer Elemente kann \mathbb{T} so zu einem klassischen projektiven Raum $\tilde{\mathbb{T}}$ erweitert werden, daß jede in \mathbb{T} elliptische Projektivität in $\tilde{\mathbb{T}}$ hyperbolisch wird. Bezeichnen wir mit $\mathbb{T}_{\kappa l}^3$ den zum gegebenen klassischen projektiven Raum isomorphen arithmetischen projektiven Raum, so gilt:

Ist das elliptische Netz \mathcal{N} in $\mathbb{T}_{\kappa l}^3$ durch eine projektive Kollineation $\varphi: \mathcal{R}_\sigma \rightarrow \mathcal{R}_\tau$ mit $s\varphi^* = s$ und $\varphi|_{\mathcal{R}_s}$ elliptisch ($s = \sigma\tau$) bestimmt, so existiert ein projektiver Raum $\tilde{\mathbb{T}}_{\kappa l}^3(\tilde{\mathcal{R}})$ so, daß $\tilde{\varphi}|_{\tilde{\mathcal{R}}_s}$ mit $\tilde{\varphi}|_{\mathbb{T}_{\kappa l}^3} = \varphi \wedge \wedge \tilde{\mathcal{R}}_s \cap \mathcal{R} = \mathcal{R}_s$ hyperbolisch ist; in $\tilde{\mathbb{T}}_{\kappa l}^3$ liegt Fall 2 vor, $\tilde{\mathcal{N}}$ mit $\tilde{\mathcal{N}} \cap \mathcal{U} = \mathcal{N}$ ist ein hyperbolisches Netz in $\tilde{\mathbb{T}}_{\kappa l}^3$ und bestimmt in $\tilde{\mathbb{T}}_{\kappa l}^3$ genau eine projektive involutorische Kollineation $\tilde{\alpha}$ mit den Geraden aus $\tilde{\mathcal{N}}$ als Fixgeraden. Diese Kollineation $\tilde{\alpha}$ ist nach Bem.c durch $\tilde{\alpha}|_{\tilde{\mathcal{R}}_s}$ völlig bestimmt; zur Festlegung von $\tilde{\alpha}|_{\tilde{\mathcal{R}}_s}$ benutzen wir zugeordnete Tripel aus $\alpha|_{\mathcal{R}_s}$ und betrachten gemäß Bem.d einen Steinerkegelschnitt k in $\mathbb{T}_{\kappa l}^3$ und die Projektivitätsachse $p \in \mathcal{U}$, für die jetzt $\mathcal{R}_p \cap k = \emptyset$ gilt; der Pol $P \in \mathcal{R}$ von p bezüglich k ist durch geeignete vollständige Vierecke in $\mathbb{T}_{\kappa l}^3$ bestimmt und stimmt daher mit dem Pol von \tilde{p} bezüglich \tilde{k} überein. Durch das Involutionszentrum P wird auf \tilde{k} eine projektive Involution bestimmt, aber auch bereits auf k , welche $\alpha|_{\mathcal{R}_s}$ und damit α nach Bem.c festlegt. Damit beherrscht man auch im ursprünglichen klassischen projektiven Raum die involutorische Kollineation, wenn das elliptische Netz gegeben ist.

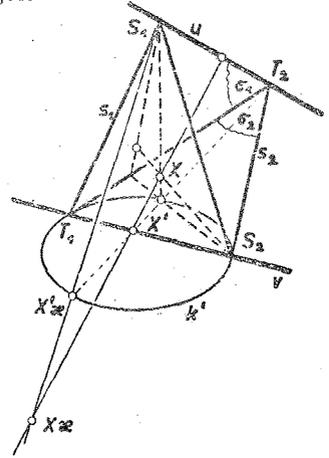
DEF.4.9c: Eine projektive involutorische Kollineation eines $\mathbb{T}_{\kappa l}^3$, bei der ein hyperbolisches bzw. elliptisches Netz von Fixgeraden existiert, heißt hyperbolische bzw. elliptische windschiefe Involution; im hyperbolischen Fall heißen die Achsen des hyperbolischen Netzes Involutionsachsen.

Anwendungen: (a) Jede Quadrik ϕ in $\mathbb{T}_{\kappa l}^3$ gestattet hyperbolische windschiefe Involutionen, deren Involutionsachsen reziproke Polaren von ϕ sind.

Bew.: Sind g und $g\hat{\lambda}_\phi$ reziproke Polaren von ϕ , so existieren auf g höchstens zwei Punkte von $\phi \Rightarrow \exists Z_1, I g$ mit $Z_1 \notin \phi$. Setzen wir $Z_2 := Z_1 \lambda_\phi \cdot g \Rightarrow Z_2 \lambda_\phi = Z_1 \cdot g \hat{\lambda}_\phi$. Die Ebenen $Z_1 \lambda_\phi$ bzw. $Z_2 \lambda_\phi$ gehen daher durch $g \hat{\lambda}_\phi$ und nicht durch Z_1 bzw. Z_2 , und die harmonischen Homologien σ_i ($i=1,2$) mit Zentrum Z_i und Achse $Z_i \lambda_\phi$ lassen ϕ als Ganzes fest $\Rightarrow \phi$ bleibt bei σ_1, σ_2 als Ganzes fest und σ_1, σ_2 ist entsprechend dem in Fall 2 geführten Beweis die hyperbolische windschiefe Involution mit den Involutionsachsen g und $g \hat{\lambda}_\phi$.

(b) Jede Kubik c in \mathbb{T}_{κ}^3 gestattet hyperbolische windschiefe Involutionen, deren Involutionenachsen in jenen Gegenkanten eines Schmiegtetraeders von c liegen, die Schmieggeraden von c , aber keine Tangenten sind.

Bew.: Aus den Punkten $S_1, S_2 \in c$ konstruieren wir wie in 4.8, Folg.5, Bem.a das Schmiegtetraeder $\{S_1, S_2, T_1, T_2\}$. $S_1 T_1 =: u$ und $S_2 T_2 =: v$ sind jene Tetraedergegenkanten, die Schmieggeraden, aber nicht Tangenten von c sind. Durch die windschiefen Achsen u, v wird genau eine hyperbolische windschiefe Involution α festgelegt; wegen $S_1, T_1 \parallel u$ bzw. $S_2, T_2 \parallel v$ gilt $S_1 \alpha = S_1, T_1 \alpha = T_1$ ($i=1,2$); wegen $\sigma_1 \perp u$ bzw. $\sigma_2 \perp v$ gilt $\sigma_1 \alpha = \sigma_1, \sigma_2 \alpha = \sigma_2$. Die Kubiktangenten s_1 in S_1 und s_2 in S_2 gehören zu dem durch u, v bestimmten hyperbolischen Netz $\Rightarrow s_i \alpha = s_i$. Nach 4.8, Folg.5, Bem.c wird die Kubik c schmiegelementweise durch α in eine Kubik $c\alpha$ transformiert $\Rightarrow c$ und $c\alpha$ haben das Schmiegtetraeder $\{S_1, S_2, T_1, T_2\}$ gemeinsam.



Ist $X \in c$ ein beliebiger Punkt mit $X \notin S_1, S_2$ und daher $X \notin S_1 S_2$, so durchstößt $S_1 X \in \mathcal{U}_{\Gamma(S_1)}$ die Ebene σ_2 in einem Punkt X' , der dem Kegelschnitt $\Gamma(S_1) \cap \mathcal{P}_{\sigma_2} =: k'$ angehört; aus 4.8, Folg.7 wissen wir, daß k' auch (S_2, s_2) und $(T_1, T_1 T_2)$ zu Linienelementen hat $\Rightarrow T_2$ und v sind Pol und Polare von k' . Andererseits ist $\alpha \perp \mathcal{P}_{\sigma_2}$ die harmonische Homologie mit dem Zentrum T_2 und der Achse $v \Rightarrow k' \alpha =: k'' \Rightarrow X' \alpha \in k'' \Rightarrow S_1 X' \alpha \in \mathcal{U}_{\Gamma(S_1)} \Rightarrow S_1 X \alpha \in \mathcal{U}_{\Gamma(S_1)}$, denn mit S_1, X, X' kollinear sind auch $S_1 \alpha = S_1, X \alpha$ und $X' \alpha$ kollinear; ebenso: $S_2 X \alpha \in \mathcal{U}_{\Gamma(S_2)}$. Damit folgt $X \alpha \in \Gamma(S_1) \cap \Gamma(S_2) = S_1 S_2 \cup c$, und da aus $X \notin S_1 S_2$ folgt $X \alpha \notin S_1 S_2$, ergibt sich $X \alpha \in c$ und damit $c = c\alpha$. ◆

Nun kann auch der Beweis des in 4.8, Folg.8 bereits benützten Hilfsatzes nachgetragen werden:

(c) Sind A_1, A_2, A_3 drei Punkte einer Kubik c im \mathbb{T}_{κ}^3 und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ihre Schmiegebenen, dann haben α_1, α_2 und α_3 einen Punkt gemeinsam, der in der Ebene $A_1 A_2 A_3$ und allgemein zum Dreieck $A_1 A_2 A_3$ liegt.

Bew.: Da nach 4.8, Folg.6 genau eine projektive Kollineation existiert, die eine Kubik so in eine Kubik überführt, daß drei gegebene Punkte der Urkubik in drei gegebene Punkte der Bildkubik übergehen, genügt es, die Behauptung für die drei Punkte $S_1, X, X\alpha$ aus Anwendung b zu beweisen. Ist ξ die Schmiegebene von c in X , so ist $\xi \alpha^*$ die Schmiegebene von c in $X\alpha$; da ξ nur den einzigen Kubikpunkt X trägt, gilt $u \perp \xi$ und $U := u\alpha$ mit $U\alpha = U$ liegt auch in $\xi \alpha^*$. Die Schmiegebenen $\sigma_1, \xi, \xi \alpha^*$ in $S_1, X, X\alpha$ haben also einen Punkt U gemeinsam, der (wegen $XX\alpha$ trifft u) in $S_1, XX\alpha$ liegt. Der Punkt U liegt zum Dreieck $S_1, X, X\alpha$ allgemein, da sonst eine der drei Schmiegebenen zwei verschiedene Punkte von c enthält. ◆

SATZ 4.9: Zwei projektiv kollineare Punktfelder mit selbstzugeordneter Schnittgeraden erzeugen ein hyperbolisches bzw. parabolisches bzw. elliptisches Netz, je nachdem die Projektivität auf der Schnittgeraden hyperbolisch bzw. parabolisch bzw. elliptisch ist. Jedes Netz ist selbstdual. Alle Geraden eines Netzes schneiden zwei Ebenen durch eine Netzgerade, die keine Netzachse enthalten, in projektiv kollinearen Feldern. Für $N \geq 3$ bestimmen vier Netzgeraden, die keinem Regulus angehören, genau ein Netz. Die einzigen projektiven involutorischen Kollineationen in \mathbb{P}_{κ}^3 sind die harmonischen Homologien und die windschiefen Involutionen, die je durch ein hyperbolisches oder elliptisches Netz eindeutig bestimmt sind. Jede Quadrik und jede Kubik in \mathbb{P}_{κ}^3 gestattet automorphe hyperbolische windschiefe Involutionen.

4.10. Erzeugnisse projektiv kollinearere Grundgebilde 2.Stufe in dreidimensionalen Pappusräumen

In Def.4.1c wurde eine projektive Kollineation $\alpha: \mathcal{P}_\sigma \rightarrow \mathcal{P}_\tau$ zwischen verschiedenen Ebenen σ, τ in \mathbb{P}_p^3 definiert; zu α gehört eine Geradenabbildung $\alpha^*: \mathcal{G}_\sigma \rightarrow \mathcal{G}_\tau$. D₃-dual ist eine projektive Kollineation $\alpha: \mathcal{E}_\sigma \rightarrow \mathcal{E}_\tau$ zwischen den verschiedenen Koebenen \mathcal{S} und \mathcal{T} erklärt und $\alpha^*: \mathcal{G}_\sigma \rightarrow \mathcal{G}_\tau$ ist die zugehörige Abbildung der beiden Geradenbündel.

DEF.4.10a: Ist (α, α^*) eine projektive Kollineation zwischen verschiedenen Ebenen (Bündeln), so heißt die Menge aller Geraden $\mathcal{G}^{(\alpha)}$ bzw. die Menge aller Ebenen $\mathcal{E}^{(\alpha^*)}$ (Punkte $\mathcal{P}^{(\alpha^*)}$), die mit in α bzw. α^* zugeordneten Punkten (Ebenen) bzw. Geraden inzidieren, das Erzeugnis von α bzw. α^* .

Bemerkungen: (a) $\alpha: \mathcal{P}_\sigma \rightarrow \mathcal{P}_\tau: \mathcal{G}^{(\alpha)} = \{g \in \mathcal{G} \mid g \cap X \wedge g \cap X\alpha \text{ mit } X \in \mathcal{P}_\sigma\}$
 $\mathcal{E}^{(\alpha^*)} = \{\xi \in \mathcal{E} \mid \xi \cap x \wedge \xi \cap x\alpha^* \text{ mit } x \in \mathcal{G}_\sigma\}$
 $\alpha: \mathcal{E}_\sigma \rightarrow \mathcal{E}_\tau: \mathcal{G}^{(\alpha^*)} = \{g \in \mathcal{G} \mid g \cap \xi \wedge g \cap \xi\alpha \text{ mit } \xi \in \mathcal{E}_\sigma\}$
 $\mathcal{P}^{(\alpha^*)} = \{X \in \mathcal{P} \mid X \cap x \wedge X \cap x\alpha^* \text{ mit } x \in \mathcal{G}_\sigma\}$.

(b) Existiert in $\alpha: \mathcal{P}_\sigma \rightarrow \mathcal{P}_\tau$ keine selbstzugeordnete Gerade und kein selbstzugeordneter Punkt, so gilt stets $X + X\alpha$ und $x + x\alpha^*$. Das Erzeugnis $\mathcal{G}^{(\alpha)}$ ist als Menge der Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte nach Def.4.8a die Achsenmenge einer Ebenenkubik und das Erzeugnis $\mathcal{E}^{(\alpha^*)}$ als Menge der Verbindungsebenen zugeordneter schneidender Geraden eine Ebenenkubik.

(c) Existiert in $\alpha: \ell_s \rightarrow \ell_\tau$ keine selbstzugeordnete Gerade und keine selbstzugeordnete Ebene, so ist stets $\xi * \xi^*$ und $x * x^*$; das Erzeugnis $\mathcal{U}^{(\alpha)}$ ist als Menge der Schnittgeraden zugeordneter Ebenen nach Def. 4.8a die Sehnenmenge einer Punktkubik und das Erzeugnis $\mathcal{P}^{(\alpha^*)}$ als Menge der Schnittpunkte zugeordneter schneidender Geraden eine Punktkubik.

(d) Damit fehlt noch:

Fall (1) $\alpha: \mathcal{P}_\sigma \rightarrow \mathcal{P}_\tau$ besitzt eine selbstzugeordnete Gerade $(\sigma\tau)\alpha^* = \sigma\tau =: s$

- {1a): $\alpha | \mathcal{P}_s = \iota$
- {1b): $\alpha | \mathcal{P}_s$ ist eine hyperbolische Projektivität
- {1c): $\alpha | \mathcal{P}_s$ ist eine parabolische Projektivität
- {1d): $\alpha | \mathcal{P}_s$ ist eine elliptische Projektivität.

Fall (2) $\alpha: \mathcal{P}_\sigma \rightarrow \mathcal{P}_\tau$ besitzt keine selbstzugeordnete Gerade, aber einen selbstzugeordneten Punkt.

Natürlich existiert zu jedem Fall die D_3 -duale Angabe.

Fall (1a): $\alpha | \mathcal{P}_s = \iota$. Nach 4.1 sind die Punktfelder dann perspektiv mit einem Perspektivitätszentrum $Z \Rightarrow \mathcal{U}_Z \subset \mathcal{U}^{(\alpha)} \wedge \ell_Z \subset \ell^{(\alpha^*)}$.

Jeder Punkt $X \in \mathcal{P}_\sigma \setminus \mathcal{P}_\tau$ führt auf eine Gerade aus \mathcal{U}_Z , während für $X \in s$ gilt $X = X\alpha$ und daher $\mathcal{U}_X \subset \mathcal{U}^{(\alpha)} \forall X \in \mathcal{P}_\sigma$; ebenso gilt $\ell_X \subset \ell^{(\alpha^*)}$.

DEF. 4.10b: Ist $s \in \mathcal{U}$, so heißt die um s vermehrte Menge aller Geraden, die s schneiden, das Gebüsch \mathcal{U}_s mit der Achse s .

Damit gilt im Fall (1a): $\mathcal{U}^{(\alpha)} = \mathcal{U}_Z \cup \mathcal{U}_s$, $\ell^{(\alpha^*)} = \ell_Z \cup \ell_s$.

Bemerkung: D_3 -dual gilt für $\alpha | \ell_s = \iota$, daß die Ebenenbündel perspektiv sind mit einer Perspektivitätsachse $\xi \Rightarrow \mathcal{U}^{(\alpha)} = \mathcal{U}_\xi \cup \mathcal{U}_s$, $\mathcal{P}^{(\alpha^*)} = \mathcal{P}_\xi \cup \mathcal{P}_s$.

Fall (1b): $\alpha | \mathcal{P}_s$ ist eine hyperbolische Projektivität. Nach 4.9, Folg. 7 gehören alle Verbindungsgeraden $XX\alpha$ für $X \in \mathcal{P}_\sigma \setminus \mathcal{P}_\tau$ einem Netz \mathcal{N} an, das s enthält, und nach Folg. 6, Bem. a ist \mathcal{N} hyperbolisch; die Netzachsen e und f gehen durch die Fixpunkte E, F von $\alpha | \mathcal{P}_s$ und liegen nicht in σ oder τ . Gilt $X = E \Rightarrow \mathcal{U}_E \subset \mathcal{U}^{(\alpha)}$; für $X \in \mathcal{P}_\sigma \setminus \{E, F\}$ ist $X * X\alpha$ und $s = XX\alpha$. Damit gilt:

$$\mathcal{U}^{(\alpha)} = \mathcal{N} \cup \mathcal{U}_E \cup \mathcal{U}_F.$$

Weiters gilt $s\alpha^* = s$. Für jede Gerade $x \in \mathcal{U}_\sigma \setminus \{s\}$ ist $x * x\alpha^*$. Falls x schneidet $x\alpha^*$, so liegt der Schnittpunkt auf s , und xs ist dann ein Fixpunkt von $\alpha | \mathcal{P}_s$; die Ebene $\xi = xx\alpha^* \cap e$, da alle x treffenden Geraden aus \mathcal{N} die Gerade $x\alpha^*$ und die Netzachse e schneiden. Damit folgt:

$$\ell^{(\alpha^*)} = \ell_s \cup \ell_e \cup \ell_f.$$

Bemerkungen: (a) Die Ebenenkubik aus Bemerkung b ist degeneriert in drei Ebenenbüschel mit s, e, f paarweise verschieden, e und f schneiden s, sowie e windschief f; die Achsenmenge ist in ein hyperbolisches Netz und zwei Geradenbündel ausgeartet.

(b) D_3 -dual gilt, falls $\alpha | \zeta$, eine hyperbolische Projektivität mit den Fixebenen ϵ und φ ist: $\mathcal{U}^{(\alpha)} = \mathcal{N} \cup \mathcal{U}_\epsilon \cup \mathcal{U}_\varphi$, $\mathcal{R}^{(\alpha^{-1})} = \mathcal{R}_\epsilon \cup \mathcal{R}_\varphi \cup \mathcal{R}_t$, wobei \mathcal{N} nach 4.9, Folg. 8 ein hyperbolisches Netz mit den Achsen e und f ist. In diesem Fall ist die Punktkubik aus Bem. c degeneriert in drei Punktreihen mit s, e, f paarweise verschieden, e und f schneiden s, sowie e windschief f; die Sehnenmenge ist in ein hyperbolisches Netz und zwei Geradenfelder ausgeartet.

(c) Der Fall (1b) ist nur für $N \geq 3$ möglich.

Fall (1c): $\alpha | \mathcal{R}$ ist eine parabolische Projektivität mit Fixpunkt E: Nach 4.9, Folg. 7 und Folg. 6, Bem. a erhält man analog zu Fall (1b): $\mathcal{U}^{(\alpha)} = \mathcal{N} \cup \mathcal{U}_E$, $\zeta^{(\alpha^{-1})} = \zeta_s \cup \zeta_t$, wobei \mathcal{N} ein parabolisches Netz mit der s in E schneidenden Achse e ist.

Bemerkungen: (a) Die Ebenenkubik degeneriert in zwei Ebenenbüschel mit schneidenden Achsen s, e, die Achsenmenge in ein parabolisches Netz und ein Geradenbündel.

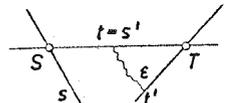
(b) D_3 -dual gilt, falls $\alpha | \zeta$, eine parabolische Projektivität mit der Fixebene ϵ ist: $\mathcal{U}^{(\alpha)} = \mathcal{N} \cup \mathcal{U}_\epsilon$, $\mathcal{R}^{(\alpha^{-1})} = \mathcal{R}_s \cup \mathcal{R}_e$, wobei \mathcal{N} ein parabolisches Netz mit der Achse e ist. Die Punktkubik degeneriert in zwei schneidende Punktreihen, die Sehnenmenge in ein parabolisches Netz und ein Geradenfeld.

Fall (1d): $\alpha | \mathcal{R}$ ist eine elliptische Projektivität: Nach 4.9, Folg. 7 und Folg. 6, Bem. a erhält man für $X \in \mathcal{R}_\sigma \setminus \mathcal{R}_s$ die Geraden eines elliptischen Netzes \mathcal{N} , dem s angehört; für $X \in \mathcal{R}_s$ ist $X + X\alpha$ und $XX\alpha = s$. Damit gilt: $\mathcal{U}^{(\alpha)} = \mathcal{N}$, $\zeta^{(\alpha^{-1})} = \zeta_s$.

Bemerkungen: (a) Die Ebenenkubik degeneriert in ein Ebenenbüschel, die Achsenmenge in ein elliptisches Netz.

(b) D_3 -dual gilt, falls $\alpha | \zeta$, eine elliptische Projektivität ist: $\mathcal{U}^{(\alpha)} = \mathcal{N}$, $\mathcal{R}^{(\alpha^{-1})} = \mathcal{R}_s$, wobei \mathcal{N} ein elliptisches Netz ist. Die Punktkubik degeneriert in eine Punktreihe, die Sehnenmenge in ein elliptisches Netz.

Fall (2): Wir behandeln zuerst den Fall $\alpha: \zeta_s \rightarrow \zeta_t$ mit $(ST) \alpha^{-1} =: t'$, $t' + ST =: t \wedge \exists \epsilon \in \zeta$ mit $\epsilon\alpha = \epsilon$.



Für $(ST) \alpha^{-1} =: s' \Rightarrow s' =: s\alpha = ST$ und es gilt $s + t$. (ind.) $s = t \Rightarrow (ST) \alpha^{-1} = ST \Rightarrow ST = (ST) \alpha^{-1}$: Widerspruch.

Wegen $\epsilon = \epsilon\alpha \Rightarrow \epsilon \in \mathcal{R}_S \wedge \epsilon = \epsilon\alpha \in \mathcal{R}_T \Rightarrow \epsilon \in \mathcal{R}_{ST} = t \Rightarrow \epsilon = \epsilon\alpha \in t' \Rightarrow \epsilon = tt'$; es gibt also genau eine selbstzugeordnete Ebene, nämlich $\epsilon = tt'$. Wegen $\epsilon = \epsilon\alpha \in \mathcal{R}_{ST} = s\alpha \Rightarrow \epsilon \in \mathcal{R}_s \Rightarrow s$ schneidet t' .

Bestimmung von $\mathcal{P}^{(\alpha')}$:

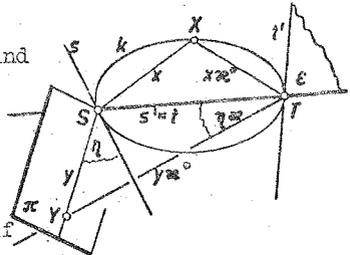
$\forall x \in \mathcal{U}_{S,\varepsilon}$ gilt $x\alpha = \varepsilon \Rightarrow x$ trifft $x\alpha^* \Rightarrow X := x\alpha\alpha^* \in \mathcal{P}^{(\alpha')}$.

Die Projektivität $\alpha^* | \mathcal{U}_{S,\varepsilon} : \mathcal{U}_{S,\varepsilon} \rightarrow \mathcal{U}_{T,\varepsilon}$ ist wegen $t+t'$ nicht perspektiv, daher ist die Menge der Schnittpunkte $X = x\alpha\alpha^* \forall x \in \mathcal{U}_{S,\varepsilon}$ ein Punktekegelschnitt $k \subset \mathcal{P}^{(\alpha')}$ in ε mit den Linienelementen (S,s) und (T,t') . Nach Konstruktion ist $k = \mathcal{P}^{(\alpha')} \cap \mathcal{P}_\varepsilon$.

Sei nun $Y \in \mathcal{P}^{(\alpha')} \setminus k \Rightarrow Y \not\subset \varepsilon \Rightarrow \exists^* SY =: y$ und $y\alpha^* = TY$ und $\exists^* \eta = ys$ mit $Y \perp \eta \Rightarrow$

$\eta\alpha = (ys)\alpha = y\alpha^* \cdot s\alpha^* = y\alpha^* \cdot t \Rightarrow Y \perp \eta\alpha$.

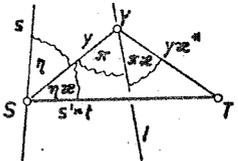
Die Punkte $Y \in \mathcal{P}^{(\alpha')} \setminus k$ werden also aus s und t durch die Ebenen η und $\eta\alpha$ projiziert, und daher liegt $\mathcal{P}^{(\alpha')} \setminus k$ auf dem Erzeugnis der Projektivität $\alpha | \varepsilon : \varepsilon \rightarrow \varepsilon$; diese ist wegen $\varepsilon = st = \varepsilon\alpha$ perspektiv und erzeugt ein Geradenbündel $\mathcal{U}_{S,\pi}$ in der Perspektivitätsebene $\pi (I S, \lambda | s, t \Rightarrow \pi \neq \varepsilon)$. Wir betrachten die Projektivität $\alpha^* | \mathcal{U}_{S,\pi} : \mathcal{U}_{S,\pi} \rightarrow \mathcal{U}_{T,\pi\alpha}$. Aus $\pi \neq \varepsilon$ folgt $\pi \neq \pi\alpha$, denn ε ist die einzige selbstzugeordnete Ebene $\Rightarrow \exists^* l := \pi, \pi\alpha$.



Für $Y \in \mathcal{P}^{(\alpha')} \setminus k \Rightarrow Y \in \mathcal{P}_l$.

Es gilt l windschief t (ind. l trifft t . Ist der Schnittpunkt von S verschieden $\Rightarrow s' = t \perp \pi$: Widerspruch; ist dagegen der Schnittpunkt $S \Rightarrow \pi \perp t = s' \Rightarrow \pi \perp s$: Widerspruch).

Für $Y \in \mathcal{P}_l \Rightarrow y := SY \perp \pi \Rightarrow y\alpha^* \perp \pi\alpha$; der Ebene $\eta := ys$ wird, da π die Perspektivitätsebene von $\alpha^* | \varepsilon$ ist, die Ebene $\eta\alpha = ys'$ zugeordnet. Wegen $y = \eta\pi \Rightarrow y\alpha^* = \eta\alpha \cdot \pi\alpha = \pi Y \Rightarrow y$ trifft $y\alpha^*$ in $Y \Rightarrow Y \in \mathcal{P}^{(\alpha')} \Rightarrow \mathcal{P}_l \subset \mathcal{P}^{(\alpha')}$.



Die Gerade l liegt wegen l windschief t ($l \in \varepsilon$) nicht in ε und trifft ε in einem Punkt $L \in \mathcal{P}^{(\alpha')} \Rightarrow L := \varepsilon l \in k$; die Gerade l schneidet also den Punktekegelschnitt in einem Punkt und liegt nicht in seiner Ebene (ε (l ist "Sekante" von k)). Übrigens gilt wegen l windschief t dann $l \not\perp S, T$.

Nach Konstruktion ist $\mathcal{P}^{(\alpha')} \setminus k = \mathcal{P}_l$, also $\mathcal{P}^{(\alpha')} = k \cup \mathcal{P}_l$.

Bestimmung von $\mathcal{U}^{(\alpha)}$:

$\forall g \in \mathcal{U}_\varepsilon$ gilt $g \perp \varepsilon \wedge g \perp \varepsilon\alpha = \varepsilon \Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon \subset \mathcal{U}^{(\alpha)}$.

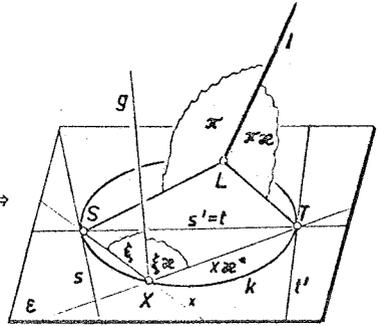
Sei nun $g \in \mathcal{U}^{(\alpha)} \setminus \mathcal{U}_\varepsilon$; für $g \perp S, T$ ist die Ebene $\xi := gS$ eindeutig bestimmt, und ihr wird wegen $g \in \mathcal{U}^{(\alpha)}$ notwendig die Ebene $\xi\alpha = gT$ zugeordnet. Wegen $g \perp \varepsilon \Rightarrow \xi \neq \varepsilon \Rightarrow \xi\alpha \neq \varepsilon\alpha = \varepsilon \Rightarrow \exists^* x := \xi\alpha, \xi\alpha^* = \xi\alpha \cdot \varepsilon\alpha = \xi\alpha \cdot \varepsilon$.

Wegen $X = x \cdot x^* \in k$ und $X \in g$ trifft g notwendig k ; im Fall $g \in \mathcal{U}_\varepsilon \vee g \in \mathcal{U}_T$ ist dies trivialerweise erfüllt.

Speziell für l ist $lS = \pi$ und $lT = \pi \varepsilon \Rightarrow l \in \mathcal{U}_\varepsilon$.

Sei $g \in \mathcal{U}_\varepsilon \setminus \mathcal{U}_\varepsilon$ und $g \neq l$; dann ist g Sekante von k . Die Gerade g trifft auch l , da gilt:

$g \neq l \wedge g \not\perp \varepsilon \Rightarrow g \not\perp \pi$ (ind.: $g \perp \pi \Rightarrow \xi = \pi \Rightarrow \xi \varepsilon = \pi \varepsilon$; wegen $g \in \mathcal{U}_\varepsilon \Rightarrow g \perp \pi \wedge g \perp \pi \varepsilon \Rightarrow g = l$: Widerspruch) $\Rightarrow \xi \neq \pi \Rightarrow \xi \varepsilon = Tg$ wegen $g \in \mathcal{U}_\varepsilon \Rightarrow \exists^* y := \xi \cdot \pi \wedge y \in \mathcal{U}_{S, \pi}$; wegen $\rho_L \subset \rho^{(\infty)}$ haben $y \varepsilon^*$ und y einen Punkt Y auf l gemeinsam. $y \in \xi \Rightarrow y \varepsilon^* \in \xi \varepsilon$. Da $\xi \neq \xi \varepsilon$ (aus $g \not\perp \varepsilon$ folgt $\xi \neq \varepsilon$ und ε ist die einzige selbstzugeordnete Ebene) gilt $g = \xi \cdot \xi \varepsilon$. Für den Punkt Y gilt $Y \in y$ ($\wedge y \in \xi$) sowie $Y \in y \varepsilon^*$ ($\wedge y \varepsilon^* \in \xi \varepsilon$) $\Rightarrow Y \in \xi \cdot \xi \varepsilon = g \Rightarrow g$ trifft l .



Sei umgekehrt $g (\neq l)$ eine Gerade, welche k (in X) und l (in Y) trifft; insbesondere erfüllt mit $X=Y=L$ jede Gerade $\mathcal{U}_\varepsilon \setminus \{l\}$ diese Bedingung. Wir unterscheiden daher:

Fall 1: $g \in \mathcal{U}_\varepsilon \Rightarrow X=Y \wedge Y \not\perp \varepsilon$. Wir suchen das ε -Bild der Ebene $\xi := Sg$ (für $X=S$ gelte $\xi := Sg$).

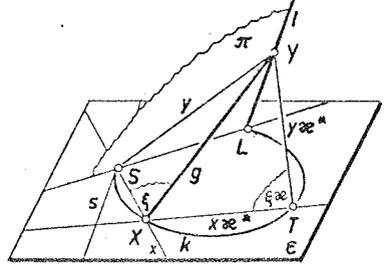
$Y \not\perp \varepsilon \Rightarrow g \not\perp \varepsilon \Rightarrow \xi \neq \varepsilon \Rightarrow \exists^* x := \xi \cdot \varepsilon$.

$g \perp \xi \wedge g \perp L \wedge L \perp \pi \Rightarrow \xi \neq \pi \Rightarrow$

$\exists^* y := \xi \pi = SY \wedge y \perp \varepsilon \wedge y \neq x \Rightarrow \xi = xy$.

Wegen $X \in k$ gilt $x \varepsilon^* = TX$ und wegen $Y \in \rho_L$ gilt $y \varepsilon^* = TY$.

$\xi = xy \Rightarrow \xi \varepsilon = x \varepsilon^* \cdot y \varepsilon^* = TX \cdot TY = TXY = Tg$, also gilt $g \perp \xi \wedge g \perp \xi \varepsilon \Rightarrow g \in \mathcal{U}_\varepsilon$.



Alle Geraden aus \mathcal{U}_ε und alle Geraden, die k und l in verschiedenen Punkten treffen, gehören somit zu \mathcal{U}_ε . Da alle Geraden aus $\mathcal{U}_\varepsilon \setminus \mathcal{U}_\varepsilon$ den Punktkegelschnitt k und die Sekante l treffen, ist nur noch offen:

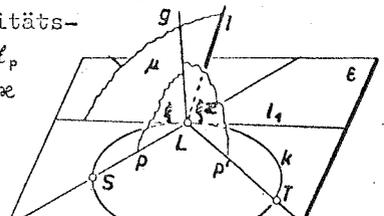
Fall 2: $g \in \mathcal{U}_\varepsilon$ und $g \notin \mathcal{U}_\varepsilon$.

Wegen $L \in k \setminus \{S, T\}$ gilt $p := SL \mapsto p' := p \varepsilon^* = TL$. Aus $g \perp \varepsilon \Rightarrow g \neq p, p' \Rightarrow \xi := Sg = pg$.

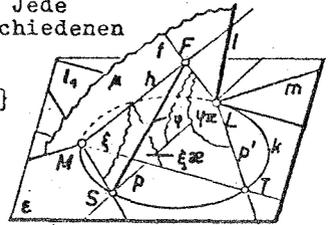
Gilt $g \in \mathcal{U}_\varepsilon \Rightarrow \xi \varepsilon \perp g \Rightarrow \xi \varepsilon = p'g$. Die Gerade g gehört daher

notwendig zum Erzeugnis der Projektivität $\alpha|_{\mathcal{E}_p}: \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{E}_{p'}$, welche wegen $\varepsilon = \varepsilon \varepsilon$ ($\perp p$) perspektiv ist. Das Erzeugnis ist daher ein Geradenbüschel $\mathcal{G}_{L, \mu}$ in der Perspektivitätsebene $\mu(I L, \mathcal{I} p, p')$. Die Projektivität $\alpha|_{\mathcal{E}_p}$

ordnet speziell der Ebene ε die Ebene $\pi \varepsilon$ zu $\Rightarrow \pi \cdot \pi \varepsilon = l \perp \mu$. Außerdem geht die Ebene μ durch die Tangente l_1 in L an k :



(ind.) μ schneidet ε in $m+1$, und enthält daher außer L noch einen Punkt M von k , wobei wegen $m+p$ gilt $M \neq S$. Jede Gerade $h \in \mathcal{U}_{L,\mu} \setminus \{m\}$ trifft k und l in verschiedenen Punkten und gehört daher nach Fall 1 zu $\mathcal{U}^{(\infty)}$. Wegen $S \notin h \Rightarrow \exists^* \xi := Sh$ und $\xi \neq Th$. Eine beliebige Gerade $f \in \mathcal{U}_{L,\mu} \setminus \{m, l\}$ trifft h in einem Punkt F mit $F \notin l \wedge F \neq M \Rightarrow F \notin k$. Wegen $f \not\perp S \Rightarrow \exists^* \varphi := Sf = pf$ und $SF = \xi \varphi$, da $\xi \neq \varphi$ (wegen $L \neq M$) $\Rightarrow (SF)\alpha^* = \xi \alpha \cdot \varphi \alpha = Th \cdot \varphi \alpha$; die Ebene $\varphi \alpha$ trifft φ wegen $\varphi \in \mathcal{E}_p$ in einer Geraden der Perspektivitätsebene μ , also in $f \Rightarrow \varphi \alpha = Tf$. Wegen $FI \xi \cdot \varphi \wedge FI \xi \alpha \cdot \varphi \alpha \Rightarrow (SF)\alpha^* = Tf$, also $F \in \mathcal{P}^{(\infty)}$ und $F \notin k \cup \mathcal{P}_L$: Widerspruch.



Jede Gerade von $\mathcal{U}^{(\infty)}$ mit $g \not\perp \varepsilon \wedge g \in \mathcal{U}_L$ gehört notwendig zu $\mathcal{U}_{L,\mu} \setminus \{l_1\}$, wobei μ die Verbindungsebene von l mit der Tangente l_1 in L an k ist.

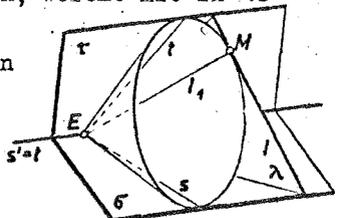
Wir zeigen abschließend noch umgekehrt $\mathcal{U}_{L,\mu} \setminus \{l_1\} \subset \mathcal{U}^{(\infty)}$: $g \in \mathcal{U}_{L,\mu} \setminus \{l_1\} \Rightarrow \exists^* gp =: \xi$; da μ die Perspektivitätsebene von $\alpha | \mathcal{E}_p$ ist, gilt $\xi \alpha = gp' \Rightarrow g = \xi \cdot \xi \alpha \Rightarrow g \in \mathcal{U}^{(\infty)}$.

Wir fassen Fall (2) zusammen:

SATZ 4.10: Ist $\alpha: \mathcal{E}_s \rightarrow \mathcal{E}_\tau$ ($S \neq T$) eine projektive Bündelkollineation ohne selbstzugeordnete Gerade und mit einer selbstzugeordneten Ebene ε , so erfüllen alle Punkte, welche mit in α^* zugeordneten Geraden inzidieren, einen Punktkegelschnitt k in ε und eine Punktreihe \mathcal{P}_L , wobei l nicht in ε liegt und ε in einem Punkt $L \neq S, T$ von k durchstößt. Die Menge aller Geraden, welche mit in α zugeordneten Ebenen inzidieren, besteht aus dem Geradenfeld in ε , aus allen Geraden, welche k und l in verschiedenen Punkten treffen, sowie aus dem Geradenbüschel $\mathcal{U}_{L,\mu}$, wobei μ die durch l und die Tangente an k in L aufgespannte Ebene ist.

Bemerkungen: a) Die Punktkubik aus Bem. c ist also degeneriert in einen Punktkegelschnitt k und eine Sekante l , die Sehnenmenge ist ausgeartet in ein Geradenfeld, ein Geradenbüschel und die Menge aller Geraden, die k und l in verschiedenen Punkten treffen.

b) D_3 -dual: Ist $\alpha: \mathcal{P}_\sigma \rightarrow \mathcal{P}_\tau$ ($\sigma \neq \tau$) eine projektive Kollineation ohne selbstzugeordnete Gerade und einem selbstzugeordneten Punkt E , so erfüllen alle Ebenen, welche mit in α^* zugeordneten Geraden inzidieren, einen quadratischen Ebenenkegel \mathcal{E}_τ mit der Spitze E und ein Ebenenbüschel \mathcal{E}_σ , dessen Trägergerade l nicht durch E geht und dessen Verbindungsebene λ ($\neq \sigma, \tau$) mit E zu \mathcal{E}_τ gehört, d.h. $\mathcal{E}^{(\alpha^*)} = \mathcal{E}_\tau \cup \mathcal{E}_\sigma$.



Die Menge $\mathcal{G}^{(2)}$ aller Geraden, welche mit in \mathcal{K} zugeordneten Punkten inzidieren, besteht aus dem Geradenbündel um B , allen Geraden, welche l treffen, nicht in λ liegen und gleichzeitig mit einer Ebene des Kegels \mathcal{K}_r inzidieren (d.h. Tangenten von \mathcal{K}_r sind), sowie dem Geradenbüschel $\mathcal{G}_{M,\lambda}$, wobei M der Schnittpunkt von l mit der Berührerzeugenden l_1 von λ an \mathcal{K}_r ist. Die Ebenenruvik aus Bem. b ist also degeneriert in einen quadratischen Ebenenkegel \mathcal{K}_r und das Ebenenbüschel \mathcal{K}_l um eine Kegeltangente l nicht durch die Spitze, die Achsenmenge ist ausgeartet in ein Geradenbündel, ein Geradenbüschel und die Menge aller Geraden, die Schnitte verschiedener Ebenen aus \mathcal{K}_r und \mathcal{K}_l sind.

