

Technische Hochschule Wien
I. Institut für Geometrie

P R O J E K T I V E G E O M E T R I E I I
2. Teil

o.Prof.Dr.Dr. Heinrich Brauner

Ausgearbeitet von
Mag.rer.nat.F. Anzböck und
Mag.rer.nat.Dr.R. Riesinger

Inhaltsverzeichnis

§ 5.	Die beiden Hauptsätze der projektiven Geometrie	
5.1.	Der projektive Raum über einem Vektorraum	111
5.2.	Der zweite Hauptsatz der projektiven Geometrie	122
5.3.	Korrelationen in projektiven Räumen über endlichdimensionalen Rechtsvektorräumen	135
5.4.	Endlichdimensionale projektive Pappusräume über Rechtsvektorräumen	146
5.5.	Projektive Korrelationen	160
5.6.	Quadratische Varietäten in klassischen projektiven Räumen über Vektorräumen	171
5.7.	Der erste Hauptsatz der projektiven Geometrie	179
5.8.	Koordinatisierung endlichdimensionaler Desarguesräume	189
5.9.	Anwendungen	195
§ 6.	Affine Räume	
6.1.	Affine Inzidenzstrukturen	203
6.2.	Affinitäten normaler affiner Räume	211
6.3.	Eigenschaften klassischer affiner Räume endlicher Dimension	215
6.4.	Die beiden Hauptsätze der affinen Geometrie	225
6.5.	Endlichdimensionale normale affine Pappusräume	236
6.6.	Zur Axiomatik der affinen Räume	242
§ 7.	Endlichdimensionale reelle projektive Räume	
7.1.	Anordnung in reellen projektiven Räumen	244
7.2.	Anwendungen der Anordnung und Orientierbarkeit reeller projektiver Räume	250
7.3.	Die komplexe Fortsetzung eines projektiven Raumes über einem reellen Vektorraum	259
7.4.	Endlichdimensionale reelle affine Räume mit Orthogonalitätsstruktur	273
7.5.	Die reelle affine Ebene mit Orthogonalitätsstruktur	284
7.6.	Der reelle dreidimensionale affine Raum mit Orthogonalitätsstruktur	293
7.7.	Kreisgeometrie in einer reellen affinen Ebene mit Orthogonalitätsstruktur	300

7.8. Abstandsmessung in euklidischen Räumen	312
7.9. Geometrien in Desarguesräumen	323

§ 5. Die beiden Hauptsätze der projektiven Geometrie

5.1. Der projektive Raum über einem Vektorraum

Zwischenbemerkung:

Wir wiederholen einige Begriffe und Aussagen der Linearen Algebra (i.f. LA).

Unter einem "Rechtsvektorraum" $\mathcal{W}$ über einem (nicht notwendig kommutativen) Körper K versteht man eine nicht leere Menge von Elementen ("Vektoren" $a, b, \dots$), eine Abbildung $+: \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ ("Addition") und eine Abbildung $\cdot: \mathcal{W} \times K \rightarrow \mathcal{W}$ ("skalare Multiplikation"), wobei folgende Eigenschaften gelten: $\{\mathcal{W}, +\}$ ist eine abelsche Gruppe (neutrales Element 0 heißt "Nullvektor") und

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \cdot a &= \alpha \cdot a + \beta \cdot a \\ \alpha \cdot (a + b) &= \alpha \cdot a + \alpha \cdot b \\ \alpha \cdot (ab) &= (\alpha \cdot a) \cdot b \\ \alpha \cdot 1_K &= \alpha \end{aligned} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{W} \wedge \forall a, b \in K$$

(1_K ist das Einselement von K ; die Addition in K wird ebenfalls mit $+$ bezeichnet; die skalare Multiplikation wird i.f. ohne Punkt geschrieben.)

Analog definiert man einen "Linksvektorraum" mit $\cdot: K \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$.

Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{U}$ von $\mathcal{W}$, die bezüglich der Operationen von $\mathcal{W}$ ein Vektorraum ist, heißt "Unterraum" von $\mathcal{W}$. Es gilt:

$\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ ist Unterraum $\iff \alpha a + \beta b \in \mathcal{U} \quad \forall \alpha, \beta \in K \wedge \forall a, b \in \mathcal{U}$.

Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{W}$; $w \in \mathcal{W}$ heißt "Linearkombination" von $\mathcal{U}$, falls w sich in der Form $w = \alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 + \dots + \alpha_n a^n$ mit $\alpha_i \in K$, $a^i \in \mathcal{U}$ (endlich viele α_i !) darstellen läßt. Unter der "Hülle" $H(\mathcal{U})$ von $\mathcal{U}$ versteht man die Menge aller Vektoren von $\mathcal{W}$, die Linearkombinationen von $\mathcal{U}$ sind. Es gilt: $H(\mathcal{U})$ ist ein Unterraum (LA).

Endlich viele Vektoren $\alpha_i \in \mathcal{W}$ heißen linear unabhängig (l.u.), wenn gilt: $\alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 + \dots + \alpha_n a^n = 0 \implies a^1 = a^2 = \dots = a^n = 0$, und sonst linear abhängig (l.a.).

Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ heißt l.u., wenn je endlich viele Vektoren aus $\mathcal{U}$ l.u. sind; sonst heißt $\mathcal{U}$ l.a.

Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{W}$ heißt "Basis" von $\mathcal{W}$, wenn $\mathcal{B}$ linear unabhängig

ist und $H(\mathcal{L}) = \mathcal{W}$ gilt. Nach dem Austauschsatz von Steinitz (IA) sind je zwei Basen gleichmächtig. Jeder Vektorraum, der nicht nur aus dem Nullvektor besteht, besitzt Basen, wie man mit Hilfe des Auswahlaxioms erschließt. Daher ist folgende Unterscheidung sinnvoll: Existiert eine Basis $\mathcal{L}$ von $\mathcal{W}$ mit $|\mathcal{L}| = n < \infty$, so heißt $\mathcal{W}$ n -dimensional ($\dim \mathcal{W} = n$); der Vektorraum $\mathcal{W} = \{0\}$ heißt nulldimensional; in jedem anderen Fall heißt $\mathcal{W}$ unendlichdimensional.

In einem endlichdimensionalen Vektorraum $\mathcal{W}$ ($\dim \mathcal{W} = n < \infty$) gilt: Ist $\{e_1, \dots, e_n\} = \mathcal{L}$ eine Basis, so besitzt jeder Vektor $x \in \mathcal{W}$ eine eindeutige Darstellung der Form: $x = e_1 x^1 + \dots + e_n x^n =: e; x^1$. (Tritt in einem Produkt der gleiche Index einmal als unterer Index und einmal als oberer Index auf, so ist i. f. von 1 bis $\dim \mathcal{W}$ zu summieren.) Das n -tupel $(x^1, \dots, x^n) \in K^n$ heißt das "Koordinaten- n -tupel von x bezüglich der Basis $\mathcal{L}$ ".

Speziell aus der Menge K^n aller n -tupel aus Elementen des Körpers K kann man einen Rechtsvektorraum bilden, indem man $+: K^n \times K^n \rightarrow K^n$ und $\cdot: K^n \times K \rightarrow K^n$ komponentenweise erklärt:

$$(x^1, \dots, x^n) + (y^1, \dots, y^n) := (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n),$$

Addition im Vektorraum Addition im Körper K

$$(x^1, \dots, x^n) \cdot a := (x^1 a, \dots, x^n a).$$

Damit wird K^n zum Rechtsvektorraum $\mathcal{M}^n$ über K ; $\mathcal{M}^n$ heißt "arithmetischer Rechtsvektorraum über K " und seine Dimension ist n , da $(j_1^1, \dots, j_n^1)$ ($j=1, \dots, n$) eine Basis ist (dabei bedeutet $j_j^1 = 0$ bzw. 1 für $j \neq k$ bzw. $j=k$). Analog läßt sich K^n zu einem Linksvektorraum $\mathcal{M}_n$ über K machen; wir wollen seine Vektoren i. f. mit $[x_1, \dots, x_n]$ bezeichnen.

Ist $\mathcal{W}$ ein beliebiger Vektorraum über K mit $\dim \mathcal{W} = n$ und der Basis $\mathcal{L}$, so ist die Abbildung, welche jedem Vektor $x \in \mathcal{W}$ sein Koordinaten- n -tupel $(e; \mathcal{M}^n)$ zuordnet, ein Vektorraumisomorphismus $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{M}^n$. Bis auf Isomorphismen gibt es zu gegebener endlicher Dimension n und gegebenem Skalarenkörper K genau einen Rechtsvektorraum bzw. einen Linksvektorraum, nämlich $\mathcal{M}^n$ bzw. $\mathcal{M}_n$ (IA).

Unser Ziel ist es, aus dem Rechtsvektorraum $\mathcal{W}(K)$ einen projektiven Raum zu konstruieren.

$$\alpha \in \mathcal{W} \setminus \{0\}, H(\alpha) = \{\alpha a \mid a \in K\} =: \alpha K, \dim H(\alpha) = 1.$$

Umgekehrt kann jeder eindimensionale Unterraum so dargestellt werden. Wir bezeichnen die Menge aller eindimensionalen Unterräume von $\mathcal{W}$ mit $u^1 \mathcal{W}$.

$$\alpha, \beta \in \mathcal{W} \wedge \{\alpha, \beta\} \text{ l.u. } (\Rightarrow \alpha, \beta \neq 0), H(\alpha, \beta) = \{\alpha a + \beta b \mid a, b \in K\} =: \alpha K + \beta K,$$

$$\dim H(\alpha, \beta) = 2.$$

Umgekehrt kann jeder zweidimensionale Unterraum so dargestellt werden. Wir bezeichnen die Menge aller zweidimensionalen Unterräume von $\mathcal{W}$ mit $u^2 \mathcal{W}$.

Die mengentheoretische Inklusion $\subset (\alpha K \subset e K + \eta K)$ ist eine Teilmenge von $u^1 \mathcal{W} \times u^2 \mathcal{W}$.

Setzen wir $\mathcal{P} := u^1 \mathcal{W}$, $\mathcal{Q} := u^2 \mathcal{W}$, $I := \subset$, so ist das Tripel $\mathbb{T}(u^1 \mathcal{W}, u^2 \mathcal{W}, \subset) =: \mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$ eine Inzidenzstruktur.

Bemerkungen: (a) $\dim \mathcal{W} = 0$, d.h. $\mathcal{W} = \{0\} \Rightarrow u^1 \mathcal{W} = \emptyset, u^2 \mathcal{W} = \emptyset \Rightarrow c = \emptyset \Rightarrow \Pi(\mathcal{W}) = \Pi(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ ist also der leere projektive Raum Π_0 .

(b) $\dim \mathcal{W} = 1$, d.h. $\mathcal{W} = \alpha K$ mit $\alpha \neq 0 \Rightarrow u^1 \mathcal{W} = \{0\} =: A$, d.h. $\mathcal{W}$ besteht aus einem einzigen Punkt, $u^2 \mathcal{W} = \emptyset, c = \emptyset \Rightarrow \Pi(A, \emptyset, \emptyset) = \Pi_A$ ist also der einpunktige projektive Raum.

(c) $\dim \mathcal{W} \geq 2$: $A, B \in \mathcal{P}$, d.h. $A = \alpha K, B = \beta K$ mit $\alpha, \beta \neq 0$. Es gilt $A+B \iff \{\alpha, \beta\}$ l.u., denn nach LA sind zwei eindimensionale Unterräume αK und βK genau dann verschieden, wenn α und β l.u. sind.

(d) $\dim \mathcal{W} \geq 3$: $A, B, C \in \mathcal{P}$, d.h. $A = \alpha K, B = \beta K, C = \gamma K$ mit $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$. Es gilt A, B, C kollinear $\iff \{\alpha, \beta, \gamma\}$ l.a.

Bew.: (a) A, B, C kollinear $\Rightarrow \exists g \in \mathcal{G}$, d.h. $\varphi K + \psi K$ mit $\{\varphi, \psi\}$ l.u., wobei gilt $A, B, C \in g$, d.h. $\alpha K, \beta K, \gamma K \subset \varphi K + \psi K \Rightarrow$ es existieren Darstellungen der Form:

$$\alpha = \varphi a_1 + \psi a_2, \beta = \varphi b_1 + \psi b_2, \gamma = \varphi c_1 + \psi c_2.$$

Um zu zeigen, daß $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ l.a. sind, genügt es zu zeigen, daß $\lambda, \mu, \nu \in K$ existieren mit $(\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0)$ und $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$.

Nach Einsetzen muß also gelten:

$$\varphi(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) + \psi(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) = 0; \text{ wegen } \{\varphi, \psi\} \text{ l.u.} \Rightarrow$$

$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$. Dieses lineare homogene Gleichungssystem für λ, μ, ν hat weniger Gleichungen als Unbekannte, und nach LA existiert dann sicher eine nicht triviale Lösung.

(b) $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ l.a. $\Rightarrow \exists (\lambda, \mu, \nu) \in K^3, \neq (0, 0, 0)$ mit $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$; gelte o.B.d.A. $\nu \neq 0 \Rightarrow \nu = \alpha\lambda + \beta\mu$, also $\gamma K \subset \alpha K + \beta K$. Wir unterscheiden:

Fall 1: $\{\alpha, \beta\}$ l.u. $\Rightarrow \alpha K + \beta K$ ist eine Gerade g , für welche gilt: $A, B, C \in g \Rightarrow A, B, C$ kollinear.

Fall 2: $\{\alpha, \beta\}$ l.a. $\Rightarrow \alpha K = \beta K \Rightarrow \gamma K \subset \alpha K$, d.h. $\gamma K = \alpha K = \beta K \Rightarrow A=B=C$. $\dim \mathcal{W} \geq 2 \Rightarrow \exists \mathcal{W}$ mit $\{\alpha, \beta\}$ l.u. und $\alpha K + \beta K$ ist eine Gerade g mit $\alpha K = \beta K = \gamma K \subset \alpha K + \beta K$, d.h. $A=B=C \in g \Rightarrow A, B, C$ kollinear.

$\Pi(\mathcal{W}(K))$ ist ein projektiver Raum.

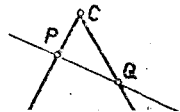
Bew.: Für $\dim \mathcal{W} = 0, 1$ haben wir dies in Bem. a, b eingesehen; wir setzen i.f. $\dim \mathcal{W} \geq 2$ voraus.

Zu I_1 : $\forall A, B \in \mathcal{P}, \neq \exists g \in \mathcal{G}$ mit $A \in g \wedge B \in g$:

$A = \alpha K, B = \beta K$ und verschieden, d.h. $\{\alpha, \beta\}$ l.u. $\Rightarrow H(\alpha, \beta) = \alpha K + \beta K$ ist eine Gerade g mit $A \in g \wedge B \in g$. Die Gerade g ist die einzige Gerade mit $A \in g \wedge B \in g$: Jeder zweidimensionale Unterraum g' , der αK und βK enthält, enthält notwendig auch alle Linearkombinationen von α und β , d.h. $g' \supset H(\alpha, \beta) = g$. Enthält jedoch ein k -dimensionaler Unterraum U' einen k -dimensionalen Unterraum U , so ist $U = U'$ (vgl. LA); speziell für $k=2 \Rightarrow g' = g$.

Zu I_2 : Ist A, B, C ein Dreieck und $P \in AC \wedge Q \in BC \Rightarrow \exists R \in \mathcal{P}$ mit R, P, Q kollinear und R, A, B kollinear. Nach 3.1 genügt es I_2 zu überprüfen, wenn gilt $A+P+C \wedge B+Q+C (\Rightarrow P+Q)$:

$A = \alpha K, B = \beta K, C = \gamma K$ bilden ein Dreieck $\Rightarrow \{\alpha, \beta, \gamma\}$ l.u.



P, A, C kollinear $\stackrel{\text{Bem. d.}}{\Rightarrow} \{y, a, v\}$ l.a. $\Rightarrow y = \alpha a + \epsilon c$ mit $\alpha \neq 0$ wegen $P \neq A \wedge P \neq C$.
 Q, B, C kollinear $\stackrel{\text{Bem. d.}}{\Rightarrow} \{y, b, v\}$ l.a. $\Rightarrow y = \epsilon b + \epsilon d$ mit $\epsilon d \neq 0$ wegen $Q \neq B \wedge Q \neq C$.
 Wir setzen $w := y c^{-1} - q d^{-1}$; dabei gilt $w \neq v$, da y und q l.u. sind $\Rightarrow$
 $\Rightarrow vK = R$ ist ein Punkt. Wegen $\{w, y, q\}$ l.a. $\Rightarrow R, P, Q$ kollinear und
 aus $w = (\alpha a c^{-1} + \epsilon) - (\epsilon b d^{-1} + \epsilon)$ folgt $\{v, a, b\}$ l.a. $\Rightarrow R, A, B$ kollinear.

Zu E: Auf jeder Geraden g existieren mindestens drei Punkte:
 $g = \alpha K + \epsilon K$ mit $\{a, b\}$ l.u. Auf g liegen die Punkte $A = \alpha K$, $B = \epsilon K$ und
 $C := (\alpha + \epsilon)K$ (wegen $\alpha + \epsilon \neq 0$ und $(\alpha + \epsilon)K \in H(a, b)$). Die Punkte A, B, C
 sind paarweise verschieden:
 $\{a, b\}$ l.u. $\Rightarrow A \neq B$; $\{a, \alpha + b\}$ l.u. $\Rightarrow A \neq C$; $\{b, \alpha + b\}$ l.u. $\Rightarrow C \neq B$.

DEF. 5.1: Ist $\mathcal{W}(K)$ ein Rechtsvektorraum über einem Körper K , so
 heißt $\mathbb{P}(\mathcal{W}(K))$ der projektive Raum über dem Rechtsvektor-
 raum $\mathcal{W}$. Ist speziell $\mathcal{W} = \mathcal{W}^n$, dann heißt $\mathbb{P}(\mathcal{W}^n)$ ein arithmetischer
 projektiver Raum über K .

Bemerkungen: (a) In analoger Weise kann zu jedem Linksvektorraum
 ein projektiver Raum definiert werden.

(b) Zu den Punkten $yK = P$ und $qK = Q$ mit $\{y, q\}$ l.u., d.h.
 $P \neq Q$, kann $P \vee Q = PVQ$ gebildet werden, und nach dem für $\mathbb{P}_1$ geführten
 Beweis gilt:

$$P \vee Q = u^1 (yK + qK) = u^1 H(y, q) = \bigcup_{\substack{y\lambda, q\mu \in K \\ \lambda, \mu \neq 0}} (y\lambda + q\mu)K.$$

"Menge aller eindimensionalen Unterräume in $yK + qK$ ".

Folgerungen:

1) Sind die Vektoren $y_1, \dots, y_k \in \mathcal{W}(K)$ l.u., so sind $y_i K = P_i$ ($i=1, \dots, k$)
 Punkte und $H(y_1, \dots, y_k)$ ist ein k -dimensionaler Unterraum von
 $\mathcal{W}(K)$; bildet man den projektiven Raum $\mathbb{P}(H(y_1, \dots, y_k))$, so gilt:
 $\{P \in \mathbb{P} \mid P \in \mathbb{P}(H(y_1, \dots, y_k))\} = u^1 H(y_1, \dots, y_k) = \bigvee_{\text{Bem.}} P_1 \vee P_2 \dots \vee P_k.$

Bew.:

Für $k=2$ ist die Behauptung nach Bem.b richtig. Wir führen einen
 Induktionsschluß:

$$\underbrace{P_1 \vee \dots \vee P_{k-1}}_{=: \mathbb{P}'} \vee P_k \stackrel{\text{Bem. b}}{=} \bigcup_{P \in \mathbb{P}'} P \vee P_k = \bigcup_{\substack{y\lambda, q\mu \in K \\ \lambda, \mu \neq 0 \\ q \in H(y_1, \dots, y_{k-1})}} (y\lambda + q\mu)K =$$

$$= \bigcup_{\substack{(y_1, \dots, y_{k-1}, y_k) \in K \\ \lambda_1, \lambda_2, \mu_1 \neq 0}} [(y_1 \lambda_1 + \dots + y_{k-1} \lambda_{k-1}) \lambda + y_k \mu] K = \bigcup_{\substack{(y_1, \mu_1 + \dots + y_{k-1} \mu_{k-1} + y_k \mu) K \\ \mu_1, \mu \neq 0}} (y_1 \mu_1 + \dots + y_{k-1} \mu_{k-1} + y_k \mu) K = u^1 H(y_1, \dots, y_k).$$

Bemerkung: $P_1=q_1K, \dots, P_k=q_kK$ ist ein Simplex $\Leftrightarrow \{q_1, \dots, q_k\}$ l.u.

Bew.: Simplex bedeutet $P_i \notin P_1 \vee \dots \vee P_{i-1} \vee P_{i+1} \vee \dots \vee P_k$ für $i=1, \dots, k$, d.h.
 $q_i K \notin u^1 H(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_k) \Leftrightarrow q_i \notin H(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_k) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \{q_1, \dots, q_k\}$ l.u.

2) Es gilt: $\text{Dim } \mathcal{W}(K) = n+1 \Leftrightarrow \dim \mathbb{T}(\mathcal{W}(K)) = n$ ($-1 \leq n < \infty$) und $\text{Dim } \mathcal{W}(K) = \infty$
 $\Leftrightarrow \dim \mathbb{T}(\mathcal{W}(K)) = \infty$.

Bem.: Dim ist die "Vektorraumdimension" der LA und dim ist die in Def. 3.7b erklärte "projektive" Dimension.

Bew.: (a) Für $n=-1$ ist nach Bem. a die Behauptung richtig.

(b) $\text{Dim } \mathcal{W}(K) = n+1 \geq 1 \Leftrightarrow \exists q_1, \dots, q_{n+1} \in \mathcal{W}, \text{ l.u. mit } H(q_1, \dots, q_{n+1}) = \mathcal{W} \Leftrightarrow q_1K = P_1, \dots, q_{n+1}K = P_{n+1}$ sind Punkte und nach Folg. 1 gilt
 $P_1 \vee \dots \vee P_{n+1} = u^1 H(q_1, \dots, q_{n+1}) = u^1 \mathcal{W} = \mathcal{P} \Leftrightarrow \{P_j\}$ bilden ein Basis-simplex $\Leftrightarrow \dim \mathbb{T}(\mathcal{W}) = n$.

(c) $\text{Dim } \mathcal{W}(K) = \infty \Leftrightarrow$ es existieren Vektoren $\neq 0$ aber nicht endlich viele l.u. Vektoren, deren Hülle $\mathcal{W}(K)$ ist, d.h. $\mathbb{T}(\mathcal{W}) \neq \mathbb{T}$.
 $\Leftrightarrow$ es existieren nicht endlich viele Punkte, deren Verbindungsraum $\mathbb{T}(\mathcal{W})$ ist $\Leftrightarrow \dim \mathbb{T}(\mathcal{W}) = \infty$.

Bemerkungen: (a) Speziell für den arithmetischen Vektorraum $\mathcal{R}^{n+1}$ gilt $\text{Dim } \mathcal{R}^{n+1} = n+1 \Rightarrow \dim \mathbb{T}(\mathcal{R}^{n+1}) = n$.

(b) $\text{Dim } \mathcal{W} = 3 \Rightarrow \dim \mathbb{T}(\mathcal{W}) = 2$, d.h. $\mathbb{T}(\mathcal{W})$ ist eine projektive Ebene. $\text{Dim } \mathcal{W} > 3 \Rightarrow \dim \mathbb{T}(\mathcal{W}) > 2 \Rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{W})$ ist desarguessch.

3) Der projektive Raum $\mathbb{T}(\mathcal{W})$ über einem Vektorraum $\mathcal{W}$ ist für $\text{Dim } \mathcal{W} \geq 3$ stets desarguessch.

Bew.: Nach Bem. b genügt der Beweis für $\text{Dim } \mathcal{W} = 3$. Nach 1.5 ist in einer projektiven Ebene in Sonderfällen der Satz von Desargues trivialerweise richtig und wir dürfen voraussetzen (Bezeichnungen aus 1.5): $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, Z \mid \text{pw.}^* ; z_1, z_2, z_3 \mid \text{pw.}^*$.

Zu zeigen ist: A_1, A_2, A_3 sind kollinear mit $A_1 = P_j P_k \cdot Q_j Q_k$ ($j, k, l \mid *$).

$Z = z_3 K, P_j = q_j K, Q_j = q_j K$ und pw. verschieden $\Rightarrow$

$\{z_3, q_j\}$ l.u. $\wedge \{z_3, q_i\}$ l.u. $\wedge \{q_j, q_i\}$ l.u. ($j=1, 2, 3$).

P_1, Q_1, Z kollinear $\Rightarrow \{q_1, q_1, z_3\}$ l.a. $\Rightarrow$

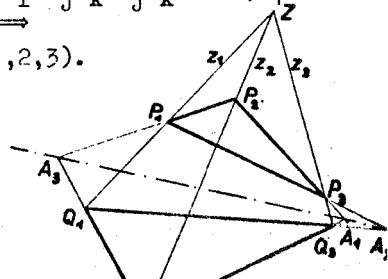
$\exists \lambda, \mu, \nu \in K, \neq (0,0)$ mit $z_3 = q_1 \lambda + q_1 \mu$. (wegen

$\{z_3, q_j\}$ l.u. gilt $\mu \neq 0$, wegen $\{z_3, q_1\}$ l.u.

gilt $\lambda \neq 0$).

Setzen wir $\tilde{q}_j := q_j \lambda, \tilde{q}_i := -q_i \mu$, so gilt

$z_3 = \tilde{q}_1 - \tilde{q}_1$ mit $\tilde{q}_1 K = q_1 K = P_1 \wedge \tilde{q}_1 K = q_1 K = Q_1$.



Analog: $3 = \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1, 2 = \tilde{q}_3 - \tilde{q}_1 \Rightarrow \tilde{q}_1 - \tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1 = \tilde{q}_3 - \tilde{q}_1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2 = \tilde{q}_1 - \tilde{q}_3 =: \alpha_3, \tilde{q}_2 - \tilde{q}_3 = \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1 =: \alpha_1, \tilde{q}_3 - \tilde{q}_1 = \tilde{q}_3 - \tilde{q}_2 =: \alpha_2.$

Für den Vektor α_3 gilt $\alpha_3 \neq 0$ (wegen $P_1 + P_2$ ist $\{\tilde{q}_1, \tilde{q}_2\}$ l.u.);

ebenso $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0 \Rightarrow \alpha_i K$ sind Punkte, und zwar gilt $A_1 = \alpha_1 K$:

$\alpha_3 = \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2 \Rightarrow \{\alpha_3, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2\}$ l.a. $\Rightarrow \alpha_3 K, P_1, P_2$ kollinear
 $\alpha_1 = \tilde{q}_2 - \tilde{q}_3 \Rightarrow \{\alpha_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3\}$ l.a. $\Rightarrow \alpha_1 K, Q_1, Q_2$ kollinear $\Rightarrow \alpha_3 K = P_1 P_2 \cdot Q_1 Q_2 = A_3.$

Ebenso für $l=1, 2$.

Nun ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ l.a. $\Rightarrow A_1, A_2, A_3$ kollinear.

Bemerkung: Da jeder projektive Raum über einem Vektorraum desarguessch ist, jedoch nicht jede projektive Ebene eine Desarguesebene ist, lassen sich sicher nicht alle projektiven Räume aus Vektorräumen ableiten.

4) Der Desarguesraum $\Pi(\mathcal{W}(K))$ mit $\dim \mathcal{W}(K) \geq 3$ kann nach 1.12 bzw. 3.5 algebraisiert werden, und man erhält einen Körper K_{alg} .

Es gilt: $K_{\text{alg}} \cong K$.

Bew.: (a) $\dim \mathcal{W} \geq 3 \Rightarrow \exists q_0, q_1, q_2 \in \mathcal{W}$, l.u. $\Rightarrow q_i K = P_i$ ($i=0, 1, 2$) sind nicht kollineare Punkte aus $\Pi(\mathcal{W})$. Nach 1.12 bzw. 3.5 ist die Algebraisierung unabhängig von der Auswahl der Geraden x , den paarweise verschiedenen Punkten O, E, U auf P_x und der Hyperebene Π_ω

($x \notin \Pi_\omega, U \in P_\omega$); wir wählen $O = P_O = q_0 K$, $U = P_U = q_1 K$ und $E = (q_0 + q_1) K \Rightarrow P_x = P_O \vee P_U$. Für einen beliebigen Punkt $X \in P_x \setminus \{U\} =: \tilde{P}_x$ gilt $X = \epsilon K \in u^1 H(q_0, q_1) \Rightarrow \epsilon = q_0 \lambda_0 + q_1 \lambda_1$ mit $\lambda_0 \neq 0$ wegen $X \neq U$ und $\epsilon \neq 0 \Rightarrow \tilde{\epsilon} := \epsilon \lambda_0^{-1} = q_0 \cdot 1 + q_1 \lambda_0^{-1} =: q_0 + q_1 x$ mit $x \in K$.

Jedem Punkt $X \in \tilde{P}_x$ wird dadurch ein $x \in K$ zugeordnet; dies ist sogar eine (globale) Abbildung $\mu: \tilde{P}_x \rightarrow K$, denn x ist unabhängig von der Wahl des Vektors ϵ aus ϵK : $X = \epsilon K = \epsilon' K$ mit $\epsilon' = \epsilon \lambda' \wedge \lambda' \neq 0 \Rightarrow \epsilon' = (q_0 \lambda_0 + q_1 \lambda_1) \lambda' \Rightarrow \tilde{\epsilon}' := \epsilon' (\lambda_0 \lambda')^{-1} = q_0 + q_1 (\lambda_1 \lambda') (\lambda_0 \lambda')^{-1} = q_0 + q_1 \lambda_1 \lambda' \lambda_0^{-1} \lambda'^{-1} = q_0 + q_1 \lambda_1 \lambda_0^{-1} = q_0 + q_1 x$.

Die Abbildung μ ist sogar eine Bijektion: Umgekehrt ist zu jedem $x \in K$ der Vektor $q_0 + q_1 x \neq 0$, da $\{q_0, q_1\}$ l.u. ist, und $(q_0 + q_1 x) K$ ist der einzige Punkt von $\tilde{P}_x$, der x als μ -Bild hat.

(b) In der Punktmenge $\tilde{P}_x$ wurden in 1.12 bzw. 3.5 eine Addition + und eine Multiplikation $\cdot$ erklärt, und damit ist $\{\tilde{P}_x, +, \cdot\}$ der Algebraisierungskörper K_{alg} . Wir zeigen:

Die Bijektion $\mu: \tilde{P}_x \rightarrow K$ ist ein Körperisomorphismus $K_{\text{alg}} \rightarrow K$, d.h.

$(A + B)\mu = A\mu + B\mu$ und $(A \cdot B)\mu = A\mu \cdot B\mu$.

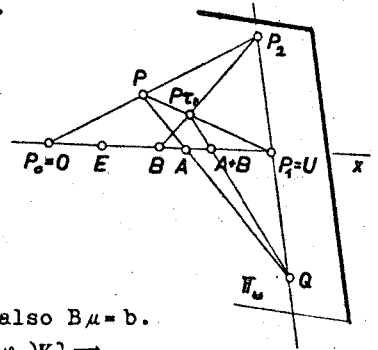
Addition in $\tilde{P}_x$ Addition in K Multipl. in $\tilde{P}_x$ Multipl. in K

(c) Addition:

π sei eine zu P_0 komplementäre Hyperebene durch $P_1 \vee P_2$ (nach 3.2, Folg. 4 existiert eine solche); $A, B \in \pi_x$.

Nach 1.12 ist $A+B=A\tau_a$, wobei τ_a jene
 Elation aus $\text{PGL}(U, \Pi_w)$ ist, die $0 \mapsto B$
 leistet.

Speziell in $\mathbb{T}(M)$ wollen wir bei der Konstruktion von $A+B$ (vgl. nebenstehende Inzidenztabelle) den Hilfspunkt $P = (\varphi_1 + \varphi_2)K \not\equiv x$, $P \in P_0 P_2$ benutzen.


$$A = (q_0 + q_1, a)K, \text{ also } A\mu = a; B = (q_0 + q_1, b)K, \text{ also } B\mu = b.$$

$$P\tau_a = \mu_{\theta\tau_1} \cap \mu_{\theta\tau_2} = [(y_0 + y_1 b)K + y_2 K] \cap [y_2 K + (y_0 + y_2)K] \Rightarrow \\ \exists \lambda_j \in K \text{ mit } (y_0 + y_1 b)\lambda_1 + y_2 \lambda_2 = y_2 \lambda_3 + (y_0 + y_2)\lambda_4.$$

Wegen $\{u_0, u_1, u_2\}$ l.u. gilt $\lambda_1 - \lambda_4 = \lambda_1 - \lambda_3 = \lambda_2 - \lambda_4 = 0$, also

$$(y_0 + y_1 b) \lambda_1 + y_2 \lambda_1 = (y_0 + y_1 b + y_2) \lambda_1 \Rightarrow P\tau_B = (y_0 + y_1 b + y_2) K.$$

$$Q = P_{A_1} \cap P_{P_1, P_2} = [(y_0 + y_1, a)K + (y_0 + y_2)K] \cap [y_1K + y_2K] \Rightarrow$$

$$(y_1 + y_2)a\lambda_1 + (y_1 + y_2)\lambda_2 = y_1\lambda_3 + y_2\lambda_1 \implies \lambda_1 + \lambda_2 = a\lambda_1 - \lambda_3 = \lambda_2 - \lambda_1 = 0,$$

also $Q = (y_1a - y_2)K$.

$$A+B = \rho_{P,P_1} \cap \rho_{Q,P_1} = [\varphi_0.K + \varphi_1.K] \cap [(\varphi_1.a - \varphi_2).K + (\varphi_0 + \varphi_1.b + \varphi_2).K] \Rightarrow$$

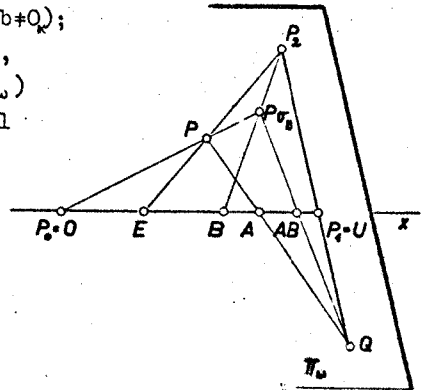
$$\begin{aligned} g_0 \lambda_1 + g_1 \lambda_2 &= (g_0 a - g_2) \lambda_3 + (g_0 + g_1 b + g_2) \lambda_4 \implies \lambda_4 - \lambda_3 = \lambda_2 - a \lambda_3 - b \lambda_4 = \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ \text{also } A+B &= [g_0 + g_1(a+b)]K \implies (A+B)\mu = a+b = A\mu + B\mu. \end{aligned}$$

(d) Multiplikation:

In $K_{\text{alg}} = \{\tilde{p}_x, +, \cdot\}$ gilt $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$ nach Def. 1.12. Dem Punkt $0 = q_x K$ wird durch μ das Nullelement 0_K des Körpers K zugeordnet, denn es gilt $q_x = \tilde{q}_x = q_x + q_x \cdot 0_K \Rightarrow 0\mu = 0_K$. Andererseits gilt in K : $x \cdot 0_K = 0_K \cdot x = 0_K \quad \forall x \in K \Rightarrow (A \cdot 0)\mu = 0\mu = 0_K = a \cdot Q = A\mu \cdot 0\mu$, und ebenso $(0 \cdot A)\mu = 0\mu \cdot A\mu$.

Seien i.f. $A, B \in \dot{\mathbb{R}}_x \setminus \{0\}$ ($\Rightarrow a \neq 0_x \wedge b \neq 0_x$);

wir konstruieren den Punkt $A.B=A\sigma_a$, wobei σ_a jene Homologie aus $PGL(O, \mathbb{T}_w)$ ist, welche $E \mapsto B$ leistet. Speziell in $\mathbb{T}(N)$ wollen wir dabei den Hilfspunkt $P=(q_0+q_1+q_2)K \nmid x, P \in EP_2$ benutzen.



$$\begin{aligned} P\sigma_B &= P_{\sigma_B} \cap P_{\sigma_C} = [(q_0 + q_1 b)K + q_2 K] \cap [q_0 K + (q_0 + q_1 + q_2)K] \Rightarrow \\ &(q_0 + q_1 b)\lambda_1 + q_2 \lambda_2 = q_0 \lambda_3 + (q_0 + q_1 + q_2)\lambda_4 \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_4 = b\lambda_1 - \lambda_4 = \lambda_2 - \lambda_4 = 0, \\ &\text{also } P\sigma_B = (q_0 + q_1 b + q_2 b)K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= P_{AP} \cap P_{A_1 A_2} = [(q_0 + q_1 a)K + (q_0 + q_1 + q_2)K] \cap [q_1 K + q_2 K] \Rightarrow \\ &(q_0 + q_1 a)\lambda_1 + (q_0 + q_1 + q_2)\lambda_2 = q_1 \lambda_3 + q_2 \lambda_4 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = a\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = \lambda_2 - \lambda_4 = 0, \\ &\text{also } Q = [(q_0 + q_1 + q_2)(-\lambda_1) + (q_0 + q_1 a)\lambda_1]K = [q_1(a-1) - q_2]K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= P_{P_{AB}} \cap P_{AP\sigma_C} = [q_0 K + q_1 K] \cap [(q_1(a-1) - q_2)K + (q_0 + q_1 b + q_2 b)K] \Rightarrow \\ &q_0 \lambda_1 + q_1 \lambda_2 = (q_1(a-1) - q_2)\lambda_3 + (q_0 + q_1 b + q_2 b)\lambda_4 \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_4 = \lambda_2 - (a-1)\lambda_3 - b\lambda_4 = \\ &= \lambda_2 - b\lambda_4 = 0, \\ &\text{also } A \cdot B = [q_0 + q_1(b + (a-1)b)]K = [q_0 + q_1(ab)]K \Rightarrow (A \cdot B)\mu = a \cdot b = A\mu \cdot B\mu. \end{aligned}$$

Bemerkungen: (a) Für $\dim \mathcal{W} \geq 3$ gilt nach 1.12 bzw. 3.5 und $K_{\text{alg}} \cong K$:
 $\mathbb{P}(\mathcal{W}(K))$ ist pappussch $\Leftrightarrow K$ kommutativ
 $\mathbb{P}(\mathcal{W}(K))$ ist fanosch $\Leftrightarrow \text{Char } K \neq 2$
 $\mathbb{P}(\mathcal{W}(K))$ ist klassisch $\Leftrightarrow K$ kommutativ und $\text{Char } K \neq 2$.

(b) Zu jedem n mit $2 \leq n < \infty$ und jedem Algebraisierungs-körper K existiert ein Rechtsvektorraum $\mathcal{W}$ über K mit $\dim \mathcal{W} = n+1$, und dazu existiert ein projektiver Raum $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ mit $K_{\text{alg}} \cong K$ und $\dim \mathbb{P}(\mathcal{W}) = n$; speziell ist $\mathbb{P}(\mathcal{W}^{n+1})$ ein solcher projektiver Raum. Damit kann die Lücke aus 1.12 geschlossen werden, ob es nicht-pappussche Desarguesräume gibt. Um einen solchen zu finden, nehme man einen beliebigen nicht kommutativen Körper K (z.B. den Quaternionenkörper); der arithmetische projektive Raum $\mathbb{P}(\mathcal{W}^{n+1})$ über K ist ein n -dimensionaler Desarguesraum, der nicht pappussch ist.

5) Ist $\mathcal{W}$ ein Rechtsvektorraum über K und $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ der projektive Raum über $\mathcal{W}$, so gilt:

Die Menge $u\mathcal{W}$ aller Unterräume des Vektorraumes $\mathcal{W}$ und die Menge $u\mathbb{P}(\mathcal{W})$ aller Unterräume des projektiven Raumes $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ sind in "natürlicher Weise" bijektiv.

Bew.: (a) Jeder Unterraum $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ des Rechtsvektorraumes $\mathcal{W}$ ist selbst ein Rechtsvektorraum, und daher kann zum Rechtsvektorraum $\mathcal{U}$ der projektive Raum $\mathbb{P}(\mathcal{U})$ konstruiert werden, dessen Punktmenge U gemäß Def. 5.1 durch $U := \{ \kappa K \in \mathbb{P}(\mathcal{W}) \mid \kappa \in \mathcal{U} \setminus \{0\} \}$ erklärt ist; wegen $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ ist $U \subset \mathbb{P}(\mathcal{W})$. Für $X = \kappa K$, $Y = \eta K \mid \kappa \in \mathcal{U}$ gilt $\kappa x + \eta y \in \mathcal{U}$ und für $\kappa x + \eta y \neq 0$ gilt $(\kappa x + \eta y) K \in U$, sodaß $\mathcal{P}_X, \subset U$ folgt; damit ist $\mathbb{P}(\mathcal{U})$ nach 3.1 ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(\mathcal{W})$.

(b) Sei umgekehrt U die Punktmenge eines projektiven Unterraumes des projektiven Raumes $\mathbb{P}(\mathcal{W})$. Falls zu U ein Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{W}$ gehört, muß dieser außer dem Nullvektor notwendig genau alle

Vektoren $\epsilon \in \mathcal{W} \setminus \{0\}$ mit $\epsilon K \in U$ enthalten. Diese Menge $U := \{\epsilon \in \mathcal{W} \mid \epsilon K \in U\} \cup \{0\}$ ist tatsächlich ein Unterraum von $\mathcal{W}$, da

$$\forall \epsilon, \eta \in U \Rightarrow \epsilon' := \epsilon x + \eta y \in U \quad \forall x, y \in K \text{ gilt:}$$

Wir unterscheiden dazu

$$(\alpha) \epsilon' = 0 \Rightarrow \epsilon' \in U. \text{ I.f. sei } \epsilon' \neq 0.$$

$$(\beta) \epsilon = 0, \eta \neq 0 \Rightarrow \epsilon' K = (\eta y) K = \eta K \in U \Rightarrow \epsilon' \in U.$$

$$(\gamma) \epsilon \neq 0, \eta \neq 0 \Rightarrow \epsilon K = X, \eta K = Y \in U, \text{ und } \epsilon' K = X' \text{ ist ein Punkt von } \Pi(\mathcal{W}),$$

der wegen $\{\epsilon, \eta, \epsilon'\}$ l.a. nach Bem.d mit X, Y kollinear ist. Da U ein Unterraum von $\Pi(\mathcal{W})$ ist, gilt $X' = \epsilon' K \in U \Rightarrow \epsilon' \in U$.

Man kann daher $\Pi(U)$ bilden und nach Definition von U ist $\Pi(U) = U$. ◆

Zwischenbemerkung:

Sei $\mathcal{W}(K)$ ein Rechtsvektorraum über dem Körper K . Der Körper K kann als Rechtsvektorraum $\mathcal{W}$ über K aufgefaßt werden.

Eine Abbildung $\alpha^*: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W} (=K)$ heißt linear (Vektorraumhomomorphismus), wenn α^* global ist und

$$(\epsilon x + \eta y) \alpha^* = (\epsilon \alpha^*) x + (\eta \alpha^*) y \quad \forall \epsilon, \eta \in \mathcal{W} \wedge \forall x, y \in K \text{ gilt.}$$

Statt $\epsilon \alpha^* (\epsilon \in K)$ verwenden wir i.f. das "Klammersymbol" $\langle \alpha^*, \epsilon \rangle := \langle \alpha^*, \epsilon \rangle (\epsilon \in K)$.

Die Linearität schreibt sich dann $\langle \alpha^*, \epsilon x + \eta y \rangle = \langle \alpha^*, \epsilon \rangle x + \langle \alpha^*, \eta \rangle y$.

Die Menge $\text{Hom}(\mathcal{W}, K)$ aller linearen Abbildungen von $\mathcal{W}$ in K kann durch folgende Definition einer Addition und einer skalaren Multiplikation in $\text{Hom}(\mathcal{W}, K)$ zu einem Linksvektorraum gemacht werden:

$$\left. \begin{aligned} \langle \alpha^* + \beta^*, \epsilon \rangle &:= \langle \alpha^*, \epsilon \rangle + \langle \beta^*, \epsilon \rangle \\ \langle a \alpha^*, \epsilon \rangle &:= a \langle \alpha^*, \epsilon \rangle \end{aligned} \right\} \forall \alpha^*, \beta^* \in \text{Hom}(\mathcal{W}, K) \wedge \forall a \in K.$$

Der Linksvektorraum $\{\text{Hom}(\mathcal{W}, K), +, \cdot\} =: \mathcal{W}^*$ heißt "dualer Vektorraum" zu $\mathcal{W}$. Der Nullvektor 0^* von $\mathcal{W}^*$ ist die Nullabbildung: $\mathcal{W} \rightarrow K$ mit $\langle 0^*, \epsilon \rangle = 0 \quad \forall \epsilon \in \mathcal{W}$.

Das Klammersymbol ist daher eine Abbildung $\langle, \rangle: \mathcal{W}^* \times \mathcal{W} \rightarrow K$. Sei i.f. $\dim \mathcal{W} = n < \infty$; dann besitzt $\mathcal{W}$ eine Basis $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ und jeder Vektor $\epsilon \in \mathcal{W}$ hat eine eindeutige Darstellung der Form $\epsilon = \pi_j x^j$. Nach LA ist der Vektorraumhomomorphismus α^* eindeutig festgelegt, wenn man die Bilder der Vektoren einer Basis von $\mathcal{W}$ kennt; durch $\langle \alpha^*, \pi_j \rangle := a_j \in K$ für $j=1, \dots, n$ ist α^* bestimmt und es gilt: $\langle \alpha^*, \epsilon \rangle = \langle \alpha^*, \pi_j x^j \rangle = \langle \alpha^*, \pi_j \rangle x^j = a_j x^j (\epsilon \in K)$.

$\mathcal{W}^*$ heißt daher auch Vektorraum der Linearformen von $\mathcal{W}$; es gilt $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{W}^*$ (LA). Eine Basis von $\mathcal{W}^*$ wird nach LA z.B. durch die Vektorraumhomomorphismen $\pi^{*j} \in \text{Hom}(\mathcal{W}, K)$ gebildet, welche gemäß $\langle \pi^{*j}, \pi_k \rangle := \delta_k^j \quad (j=1, \dots, n)$ definiert werden. Diese spezielle Basis $\{\pi^{*j}\}$ heißt "duale Basis" zur Basis $\{\pi_j\}$.

Ist φ eine lineare Abbildung des Vektorraumes $\mathcal{W}$ in den Vektorraum $\mathcal{W}'$, so heißt die Menge $\{\epsilon \in \mathcal{W} \mid \epsilon \varphi = 0\} =: \ker \varphi$ der "Kernraum" von φ . Nach LA ist $\ker \varphi$ ein Unterraum von $\mathcal{W}$.

6) Ist $\alpha^* \in \mathcal{H}^*, \alpha^* \neq \sigma^*$, so ist

$$\Pi_{\alpha} := \{ \kappa \in \Pi(\mathcal{H}) \mid \langle \alpha^*, \kappa \rangle = 0 \wedge \kappa \neq \sigma \} = \Pi(\ker \alpha^*)$$

eine Hyperebene in $\Pi(\mathcal{H})$. Jede Hyperebene läßt sich so darstellen.

Für $\dim \mathcal{H} < \infty$ ist der zu $\Pi(\mathcal{H})$ duale projektive Raum $[\Pi(\mathcal{H})]^*$ zum projektiven Raum $\Pi(\mathcal{H}^*)$ über dem Linksvektorraum $\mathcal{H}^*$ isomorph.

Bew.: (a) Π_{α} ist eine Hyperebene:

Wegen $\alpha^* \neq \sigma^* \Rightarrow \exists \eta \in \mathcal{H}$ mit $\eta \neq \sigma \wedge \langle \alpha^*, \eta \rangle =: p \in K \setminus \{0\}$.

$$\eta p^{-1} := \eta \neq \sigma \Rightarrow \langle \alpha^*, \eta \rangle = \langle \alpha^*, \eta p^{-1} \rangle = \langle \alpha^*, \eta \rangle p^{-1} = p p^{-1} = 1;$$

daher ist $\eta K = E$ ein Punkt von $\Pi(\mathcal{H})$ mit $E \notin \Pi_{\alpha}$. Da $\ker \alpha^*$ ein Unterrraum von $\mathcal{H}$ ist, ist Π_{α} nach Folg. 5 ein (projektiver) Unterrraum von $\Pi(\mathcal{H})$. Sei $Y = \eta K \in \Pi(\mathcal{H})$ ($\Rightarrow \eta \neq \sigma$) mit $Y \notin E$ ($\Rightarrow \{\eta, \sigma\}$ l.u.), so gilt

$\eta_1 := \eta - \eta \cdot \langle \alpha^*, \eta \rangle \cdot \sigma$, da $\{\eta, \sigma\}$ l.u. $\Rightarrow Y_1 = (\eta - \eta \langle \alpha^*, \eta \rangle) K$ ist ein Punkt von $\Pi(\mathcal{H})$, der wegen $\{\eta, \eta_1, \sigma\}$ l.a. auf der Geraden EVY liegt.

Außerdem gilt $Y_1 \in \Pi_{\alpha}$ wegen $\langle \alpha^*, \eta_1 \rangle = \langle \alpha^*, \eta - \eta \langle \alpha^*, \eta \rangle \cdot \sigma \rangle = \langle \alpha^*, \eta \rangle - \langle \alpha^*, \eta \rangle \cdot \langle \alpha^*, \sigma \rangle = 0_K \Rightarrow \eta_1 \in \ker \alpha^*$.

Für alle $Y \in \Pi(\mathcal{H})$ und insbesondere für $Y = E$ gilt daher $Y \in EV \Pi_{\alpha} \Rightarrow EV \Pi_{\alpha} = \Pi(\mathcal{H}) \Rightarrow \Pi_{\alpha}$ ist eine Hyperebene.

(b) Nach Folg. 5 gehört zu einer Hyperebene Π_{β} von $\Pi(\mathcal{H})$ der Unterrraum $\mathcal{H}_{\beta} := \{ \kappa \in \mathcal{H} \mid \kappa \in \Pi_{\beta} \} \cup \{ \sigma \}$ von $\mathcal{H}$. Es genügt zu zeigen, daß ein $\beta^* \in \mathcal{H}^* \setminus \{ \sigma^* \}$ existiert mit $\mathcal{H}_{\beta} = \ker \beta^*$:

Π_{β} ist Hyperebene $\Rightarrow \exists E = \eta K \in \Pi(\mathcal{H})$ ($\eta \neq \sigma$) mit $E \notin \Pi_{\beta} \wedge EV \Pi_{\beta} = \Pi(\mathcal{H})$; wir definieren β^* schrittweise:

(i) $\langle \beta^*, \eta \rangle := 1 \wedge \langle \beta^*, \eta \lambda \rangle := \lambda \quad \forall \lambda \in K$.

Ist $\kappa \in \mathcal{H}$ ein Vektor mit $\{\kappa, \eta\}$ l.u. ($\Rightarrow \kappa \neq \sigma$), so ist

$X = \kappa K \in \Pi(\mathcal{H})$ ein von E verschiedener Punkt und wegen $EV \Pi_{\beta} = \Pi(\mathcal{H})$ existiert ein eindeutig bestimmter Punkt $X_1 = \kappa_1 K$ in Π_{β} mit X_1, X, E kollinear $\Rightarrow \{\kappa_1, \kappa, \eta\}$ l.a. $\Rightarrow \kappa$ kann, da $\{\kappa_1, \eta\}$ l.u. wegen $X_1 \neq E$, eindeutig dargestellt werden in der Form $\kappa = \kappa_1 \lambda + \eta x$ mit $\lambda \neq 0$ wegen $X \neq E$ und $\kappa_1 \lambda \in \mathcal{H}_{\beta}$. Der Koeffizient x von η ist dabei unabhängig von der Wahl des Vektors κ_1 aus dem eindimensionalen Unterrraum X_1 , da nur λ von dieser Wahl betroffen ist. Jedem Vektor $\kappa \in \mathcal{H}$ mit $\{\kappa, \eta\}$ l.u. wird daher eindeutig ein $x \in K$ zugeordnet; wir definieren:

(ii) $\langle \beta^*, \kappa \rangle := x$.

Wir zeigen nun, daß die durch (i) und (ii) definierte Abbildung $\beta^*: \mathcal{H} \rightarrow K$ linear ist, d.h. $\beta^* \in \mathcal{H}^*$:

$$\begin{aligned} \kappa a &= (\kappa \lambda + \eta x) a = \kappa \lambda a + \eta x a \quad (\text{mit } \kappa \lambda \in \mathcal{H}_{\beta} \text{ ist } \kappa \lambda a \in \mathcal{H}_{\beta}) \Rightarrow \langle \beta^*, \kappa a \rangle = x a = \\ &= \langle \beta^*, \kappa \rangle a; \end{aligned}$$

$\epsilon + \eta = (\epsilon \cdot \lambda + \eta \cdot x) + (\eta \cdot \mu + \eta \cdot y) = (\epsilon \cdot \lambda + \eta \cdot \mu) + \eta(x+y)$ (mit $\epsilon \cdot \lambda, \eta \cdot \mu \in \mathfrak{h}$ ist $\epsilon \cdot \lambda + \eta \cdot \mu \in \mathfrak{h}$) $\Rightarrow \langle \mathfrak{b}^*, \epsilon + \eta \rangle = x + y = \langle \mathfrak{b}^*, \epsilon \rangle + \langle \mathfrak{b}^*, \eta \rangle$.

Wegen $\langle \mathfrak{b}^*, \eta \rangle = 1$ ist $\mathfrak{b}^* \neq 0$.

Wir zeigen $\mathfrak{h} = \ker \mathfrak{b}^*$: Sicher ist $0 \in \ker \mathfrak{b}^*$; es gilt $\epsilon \in \mathfrak{h} \setminus \{0\} \Leftrightarrow \epsilon K \in \mathbb{T}_A \Leftrightarrow X = X_1 \Leftrightarrow \epsilon K = \epsilon_1 K \Leftrightarrow \epsilon = \epsilon \cdot \lambda + \eta \cdot 0 \Leftrightarrow \langle \mathfrak{b}^*, \epsilon \rangle = 0 \Leftrightarrow \epsilon \in \ker \mathfrak{b}^* \setminus \{0\}$.

(c) Die Elemente von $\Pi(\mathcal{W}^*)$ sind die eindimensionalen Unterräume $K\alpha^*$ ($\alpha^* \neq 0$) des Linksvektorraumes $\mathcal{W}^*$. Ordnen wir jedem Element $A^* = K\alpha^* \in \Pi(\mathcal{W}^*)$ die als Kopunkt aufgefaßte Hyperebene $\Pi(\ker \alpha^*)$ von $\Pi(\mathcal{W})$ zu, so ist damit eine globale Abbildung $\mu: \Pi(\mathcal{W}^*) \rightarrow [\Pi(\mathcal{W})]^*$ erklärt mit $A^* \mu = \Pi(\ker \alpha^*)$ (für $\alpha^* \in \mathcal{W}^*$ mit $\alpha \in K \setminus \{0\}$ ist wegen $\langle \alpha^*, \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha \langle \alpha^*, \alpha \rangle = \langle \alpha \alpha^*, \alpha \rangle = 0$ nämlich $\ker \alpha^* = \ker \alpha \alpha^*$). Die globale Abbildung μ ist ein Isomorphismus:

(α) μ ist surjektiv, denn nach (b) kann zu jedem Kopunkt α (zu jeder Hyperebene Π_α von $\Pi(\mathcal{W})$) ein $\alpha^* \in \mathcal{W}^* \setminus \{0\}$ gefunden werden mit $\Pi_\alpha = \Pi(\ker \alpha^*)$.

(β) μ ist injektiv: $A^* = K\alpha^* \neq B^* = K\mathfrak{b}^* \Rightarrow \{\alpha^*, \mathfrak{b}^*\}$ l.u. Dann gilt $\ker \alpha^* \neq \ker \mathfrak{b}^*$:

ind.: $\ker \alpha^* = \ker \mathfrak{b}^* =: \mathfrak{h} \Rightarrow \mathfrak{h}$ ist ein Unterraum, zu dem die Hyperebene $\Pi(\mathfrak{h})$ gehört $\Rightarrow \exists E = \eta K \in \Pi(\mathcal{W})$ mit $E \in \Pi(\mathfrak{h}) \Rightarrow \eta \neq 0 \wedge \eta \in \mathfrak{h}$
 $\Rightarrow \langle \alpha^*, \eta \rangle \neq 0 \wedge \langle \mathfrak{b}^*, \eta \rangle \neq 0 \Rightarrow$

$\exists a \in K \setminus \{0\}$ mit $a \langle \mathfrak{b}^*, \eta \rangle = \langle \alpha^*, \eta \rangle \Rightarrow \langle a\mathfrak{b}^*, \eta \rangle = \langle \alpha^*, \eta \rangle$.

Jeder Vektor $\epsilon \in \mathcal{W}$ läßt sich nach (b) eindeutig darstellen in der Form $\epsilon = \epsilon \cdot \lambda + \eta \cdot x$ mit $\epsilon \cdot \lambda \in \mathfrak{h} \wedge \eta \notin \mathfrak{h}$. Wegen
 $\langle \alpha^*, \epsilon \rangle = \langle \alpha^*, \epsilon \cdot \lambda + \eta \cdot x \rangle = \langle \alpha^*, \epsilon \cdot \lambda \rangle + \langle \alpha^*, \eta \rangle x = 0 + \langle \alpha^*, \eta \rangle x$ (da $\epsilon \cdot \lambda \in \mathfrak{h} = \ker \alpha^*$)
 $\langle a\mathfrak{b}^*, \epsilon \rangle = \langle a\mathfrak{b}^*, \epsilon \cdot \lambda + \eta \cdot x \rangle = a \langle \mathfrak{b}^*, \epsilon \cdot \lambda \rangle + \langle a\mathfrak{b}^*, \eta \rangle x = 0 + \langle \alpha^*, \eta \rangle x$ (da $\epsilon \cdot \lambda \in \mathfrak{h} = \ker \mathfrak{b}^*$)
gilt $\langle \alpha^*, \epsilon \rangle = \langle a\mathfrak{b}^*, \epsilon \rangle \forall \epsilon \in \mathcal{W} \Rightarrow \alpha^* = a\mathfrak{b}^* \Rightarrow \{\alpha^*, \mathfrak{b}^*\}$ l.a.: Widerspruch.

$\ker \alpha^* \neq \ker \mathfrak{b}^* \wedge 0 \in \ker \alpha^* \cap \ker \mathfrak{b}^* \Rightarrow \exists \epsilon \in \mathcal{W}$ mit $\epsilon \in \ker \alpha^* \wedge \epsilon \notin \ker \mathfrak{b}^* \wedge \epsilon \neq 0 \Rightarrow X = \epsilon K$ ist ein Punkt von $A^* \mu = \Pi(\ker \alpha^*)$, der nicht zu $B^* \mu = \Pi(\ker \mathfrak{b}^*)$ gehört $\Rightarrow A^* \mu \neq B^* \mu \Rightarrow \mu$ ist injektiv.

(γ) Die Bijektion μ ist für $\dim \mathcal{W} < \infty$ ein Isomorphismus:

Wegen $\dim[\Pi(\mathcal{W})]^* = \dim \Pi(\mathcal{W})$ und $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{W}^* \Rightarrow \dim \Pi(\mathcal{W}^*) = \dim[\Pi(\mathcal{W})]^*$. Für die μ bestimmende Kollineation genügt es daher nach 3.7, Folg. 6, Bem. b zu zeigen:

Sind $A^*, B^*, C^* \in \Pi(\mathcal{W}^*)$ kollinear, also $\{\alpha^*, \mathfrak{b}^*, \mathfrak{c}^*\}$ l.a., so sind die Kopunkte $A^* \mu, B^* \mu, C^* \mu$ kollinear, d.h. die Hyperebenen $\Pi(\ker \alpha^*), \Pi(\ker \mathfrak{b}^*), \Pi(\ker \mathfrak{c}^*)$ gehören einem Büschel an. Ist $A^* \neq B^*$ o.B.d.A., so gilt nach Voraussetzung $\mathfrak{c}^* = a\alpha^* + b\mathfrak{b}^*$; jeder Punkt $X = \epsilon K$ aus $\Pi(\ker \alpha^*) \cap \Pi(\ker \mathfrak{b}^*)$ erfüllt wegen $\langle \alpha^*, \epsilon \rangle = \langle \mathfrak{b}^*, \epsilon \rangle = 0$ auch $\langle \mathfrak{c}^*, \epsilon \rangle = \langle a\alpha^* + b\mathfrak{b}^*, \epsilon \rangle = a\langle \alpha^*, \epsilon \rangle + b\langle \mathfrak{b}^*, \epsilon \rangle = 0$ und liegt somit in $\Pi(\ker \mathfrak{c}^*)$, sodaß $\Pi(\ker \mathfrak{c}^*) \supset \Pi(\ker \alpha^*) \cap \Pi(\ker \mathfrak{b}^*)$ gilt $\Rightarrow A^* \mu, B^* \mu, C^* \mu$ sind kollinear in $[\Pi(\mathcal{W})]^*$.

Bemerkungen: (a) Der Isomorphismus μ ermöglicht die i.f. stets benützte Identifizierung $\Pi(\mathcal{W}^*) = [\Pi(\mathcal{W})]^*$, wobei jeder Kopunkt $\alpha \in [\Pi(\mathcal{W})]^*$ als jener eindimensionaler Unterraum $A^* = K\alpha^*$ des Linksvektorraumes $\mathcal{W}^*(K)$ aufgefaßt wird, für den $\Pi(\ker \alpha^*) = \Pi_{\alpha^*}$ gilt.

(b) Gilt speziell $\dim \mathcal{W} < \infty$ und sind $\{n_i\}$ bzw. $\{n^{*i}\}$ duale Basen in $\mathcal{W}$ bzw. $\mathcal{W}^*$, so gilt $e = n_i x^i \in \mathcal{W}$ bzw. $\alpha^* = a_i n^{*i} \in \mathcal{W}^*$. Der projektive Raum $\Pi(\mathcal{W})$ bzw. $\Pi(\mathcal{W}^*)$ ist nach Auszeichnung der Basis bzw. der dualen Basis isomorph zum arithmetischen projektiven Raum $\Pi(\mathcal{W}^{n+1})$ über dem Rechtsvektorraum $\mathcal{W}^{n+1}$ der n -Tupel $(x^1, \dots, x^n)$ bzw. zum arithmetischen projektiven Raum $\Pi(\mathcal{W}_{n+1})$ über dem Linksvektorraum $\mathcal{W}_{n+1}$ der n -Tupel $[a_1, \dots, a_n]$. Die Inzidenz $X \perp \alpha$ bedeutet $\langle \alpha^*, e \rangle = 0$, also $\langle a_i n^{*i}, n_k x^k \rangle = a_i \langle n^{*i}, n_k \rangle x^k = a_i \delta_i^k x^k = a_i x^i = 0$. Für α fest ist das die Gleichung der Hyperebene Π_{α^*} , für X fest die "Gleichung der Kohyperebene Λ " (=Hyperebenenbündel). Für die Koordinaten a_i von α bzw. x^i von X gilt dabei:

$$\begin{aligned} \langle \alpha^*, n_i \rangle &= \langle a_k n^{*k}, n_i \rangle = a_k \delta_k^i = a_i. \\ \langle n^{*i}, e \rangle &= \langle n^{*i}, n_k x^k \rangle = \delta_k^i x^k = x^i. \end{aligned}$$

SATZ 5.1: Zu jedem Rechtsvektorraum $\mathcal{W}$ mit $\dim \mathcal{W} \geq 3$ über einem (nicht notwendig kommutativen) Körper K gehört ein projektiver Desarguesraum $\Pi(\mathcal{W}(K))$ mit $\dim \Pi(\mathcal{W}(K)) = \dim \mathcal{W} - 1$, dessen Punkte bzw. Geraden die ein- bzw. zweidimensionalen Unterräume von $\mathcal{W}$ sind und dessen Algebraisierungskörper isomorph zu K ist. Die Menge der Unterräume von $\mathcal{W}$ ist bijektiv zur Menge der Unterräume von $\Pi(\mathcal{W})$, wobei speziell den Kernräumen der nichttrivialen linearen Abbildungen von $\mathcal{W}$ in K die Hyperebenen von $\Pi(\mathcal{W})$ entsprechen. Für $\dim \mathcal{W} < \infty$ ist der zu $\Pi(\mathcal{W})$ duale projektive Raum isomorph zum projektiven Raum über dem zu $\mathcal{W}$ dualen Linksvektorraum $\mathcal{W}^*$.

5.2. Der zweite Hauptsatz der projektiven Geometrie

Zwischenbemerkung:

Ist $f: K \rightarrow K'$ ein Isomorphismus des Körpers K auf den Körper K' und ist $\mathcal{W}(K)$ bzw. $\mathcal{W}'(K')$ ein Rechtsvektorraum über K bzw. K' , so heißt eine globale Abbildung $f: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}'(K')$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} (x+y)f &= xf + yf \\ (rx)f &= (rf)(xf) \end{aligned} \quad \forall x, y \in \mathcal{W} \wedge \forall x \in K$$

eine "halblinare (semilineare) Abbildung $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$ zum Körperisomorphismus f ".

Für f gilt stets $\alpha_n f = \alpha_n$. Ist f bijektiv, so gilt $\ker f = \{0_n\}$, d.h. aus $xf = 0_n$ folgt $x = 0_n$; f heißt dann auch "regulär". Gilt zusätzlich $\dim \mathcal{W}(K) = \dim \mathcal{W}'(K') < \infty$, so ist $\ker f = \{0_n\}$ hinreichend für die Bijektivität von f . Mit f ist auch f^{-1} eine halblinare Bijektion,

und zwar zum Körperisomorphismus $f^{-1}:K' \rightarrow K$.

Gilt speziell $K=K'$ und $f=1_K$, so heißt f eine "lineare Abbildung". Ist eine lineare Abbildung $f: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}'(K)$ zusätzlich bijektiv, so heißt f Vektorraumisomorphismus.

Für $\mathcal{W}=\mathcal{W}' (\Rightarrow K=K')$ bildet die Menge aller bijektiven halblinearen Abbildungen $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ bezüglich der Zusammensetzung eine Gruppe, welche die "halblineare Gruppe $\Gamma L(\mathcal{W})$ von $\mathcal{W}$ " heißt.

Die Untergruppe aller bijektiven linearen Abbildungen $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ (Vektorraumautomorphismen) heißt die "lineare Gruppe $GL(\mathcal{W})$ von $\mathcal{W}$ ".

Bemerkungen: (a) In der Definition einer halblinearen Abbildung genügt es zu verlangen, daß $f:K \rightarrow K'$ bijektiv ist. Aus den beiden Eigenschaften von f kann dann gefolgert werden, daß f ein Körperisomorphismus ist (vgl. LA).

(b) Für einen Körperisomorphismus f gilt bekanntlich: $0_K f = 0_{K'}$, und $1_K f = 1_{K'}$.

(c) Für eine halblineare Bijektion $f: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}'(K')$ gilt: Die Bildmenge einer endlichen Menge l.u. bzw. l.a. Vektoren ist l.u. bzw. l.a.

Bew.: (a) $\{x_1, \dots, x_k\}$ l.a. $\Rightarrow \exists (c^1, \dots, c^k) \in K^n, \neq (0_K, 0_K, \dots, 0_K)$ mit $x_1 c^1 + x_2 c^2 + \dots + x_k c^k = 0_K$. Wendet man hierauf f an, so ergibt sich $(x_1 c^1 + \dots + x_k c^k) f = (x_1 f)(c^1 f) + \dots + (x_k f)(c^k f) = 0_K f = 0_{K'}$, mit $(c^1 f, \dots, c^k f) \neq (0_{K'}, \dots, 0_{K'}) \Rightarrow \{x_1 f, \dots, x_k f\}$ l.a.
(b) $\{x_1, \dots, x_k\}$ l.u. Ind.: $\{x_1 f, \dots, x_k f\}$ ist l.a. $\Rightarrow \exists (c^1, \dots, c^k) \in K'$, $\neq (0_{K'}, \dots, 0_{K'})$ mit $(x_1 f) c^1 + \dots + (x_k f) c^k = 0_{K'}$. Wir wenden f^{-1} an und erhalten $[(x_1 f) c^1 + \dots + (x_k f) c^k] f^{-1} = (x_1 f f^{-1})(c^1 f^{-1}) + \dots + (x_k f f^{-1})(c^k f^{-1}) = 0_K f^{-1} = 0_K$ mit $(c^1 f^{-1}, \dots, c^k f^{-1}) \neq (0_K, \dots, 0_K) \Rightarrow \{x_1, \dots, x_k\}$ l.a.: Widerspruch zur Voraussetzung.

(d) Aus (c) folgt: Bei einer halblinearen Bijektion gehen eindimensionale Unterräume von $\mathcal{W}$ in eindimensionale Unterräume von $\mathcal{W}'$ über.

Folgerungen:

1) Sei $f: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}'(K')$ eine halblineare Bijektion. Wir definieren eine Abbildung $\alpha_f: \Pi(\mathcal{W}(K)) \rightarrow \Pi(\mathcal{W}'(K'))$ durch $(xK)\alpha_f := (x f)K'$. Wir zeigen: Diese Abbildung α_f ist eine Kollineation (kurz: "Jede halblineare Bijektion bestimmt eine Kollineation").

Bew.: Nach Bem.d ist α_f eine Abbildung der Punktmenge von $\mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$.

Zu (I): α_f ist global, denn α_f ist für alle Punkte $\epsilon \in \mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$ erklärt, weil f für alle $\epsilon \in \mathcal{W}$ erklärt ist.

α_f ist injektiv: $X = \epsilon K + \eta K = Y \Rightarrow \{\epsilon, \eta\} \text{ l.u.} \Rightarrow X \alpha_f = (\epsilon f)K' \wedge (\eta f)K' = (Y \alpha_f)K'$. Wegen $\{\epsilon, \eta\} \text{ l.u.} \xrightarrow{\text{Bem. c}} \{\epsilon f, \eta f\} \text{ l.u.} \Rightarrow X \alpha_f \neq Y \alpha_f$.

α_f ist surjektiv: $X' = \epsilon' K' \in \mathbb{T}(\mathcal{W}'(K')) \Rightarrow \epsilon' \in \mathcal{W}' \setminus \{0_{\mathcal{W}'}\}$; da f eine Bijektion, also surjektiv ist, existiert $\epsilon \in \mathcal{W} \setminus \{0_{\mathcal{W}}\}$ mit $\epsilon f = \epsilon' \Rightarrow (\epsilon K) \alpha_f = (\epsilon f)K' = \epsilon' K'$.

Zu (II): Sind $X = \epsilon K, Y = \eta K, Z = \zeta K \mid \epsilon \in \mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$ drei kollineare Punkte $\Rightarrow \{\epsilon, \eta, \zeta\} \text{ l.a.} \xrightarrow{\text{Bem. c}} \{\epsilon f, \eta f, \zeta f\} \text{ l.a.} \Rightarrow (\epsilon f)K' = X \alpha_f, (\eta f)K' = Y \alpha_f, (\zeta f)K' = Z \alpha_f$ sind kollinear.

Zu (III): Aus X, Y, Z nicht kollinear folgt $\{\epsilon, \eta, \zeta\} \text{ l.u.} \xrightarrow{\text{Bem. c}} \{\epsilon f, \eta f, \zeta f\} \text{ l.u.} \Rightarrow X \alpha_f, Y \alpha_f, Z \alpha_f$ nicht kollinear. ◆

Bemerkungen: (a) Ist $f: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}'(K')$ bzw. $g: \mathcal{W}'(K') \rightarrow \mathcal{W}''(K'')$ halblini-
are Bijektion zum Körperisomorphismus $\dot{f}: K \rightarrow K'$ bzw. $\dot{g}: K' \rightarrow K''$, so
ist $f \circ g: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}''(K'')$ eine halbliniare Bijektion zum Körper-
isomorphismus $\dot{f} \circ \dot{g}: K \rightarrow K''$ und es gilt: $\alpha_{f \circ g} = \alpha_f \circ \alpha_g$.

Bew.: (a) $f \circ g$ ist eine Bijektion $\mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}''(K'')$ mit

$$\begin{aligned} (\epsilon + \eta) f \circ g &= [(\epsilon + \eta) f] g = (\epsilon f + \eta f) g = \epsilon (f \circ g) + \eta (f \circ g), \\ (\epsilon x) f \circ g &= [(\epsilon x) f] g = [(\epsilon f)(x f)] g = \epsilon (f \circ g) x (f \circ g). \end{aligned}$$
 (b) $(\epsilon K) \alpha_f = (\epsilon f)K' \wedge (\epsilon' K') \alpha_g = (\epsilon' g)K''$.

$$\begin{aligned} (\epsilon K) \alpha_f \circ \alpha_g &= [(\epsilon K) \alpha_f] \alpha_g = [(\epsilon f)K'] \alpha_g = [(\epsilon f)g]K'' \quad \forall \epsilon K \in \mathbb{T}(\mathcal{W}) \\ (\epsilon K) \alpha_{f \circ g} &= [\epsilon (f \circ g)]K'' = [(\epsilon f)g]K'' \end{aligned} \Rightarrow$$

 $\Rightarrow \alpha_f \circ \alpha_g = \alpha_{f \circ g}$. ◆

(b) Ist speziell $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$ ($\Rightarrow K = K'$), so ist $\mathbb{T}(\mathcal{W}) = \mathbb{T}(\mathcal{W}')$.
Zu $f \in \Gamma L(\mathcal{W})$ gehört nach Folg.1 genau eine Kollineation $\alpha_f \in P\Gamma L(\mathbb{T}(\mathcal{W}))$
und damit ist eine globale Abbildung $\Gamma L(\mathcal{W}) \rightarrow P\Gamma L(\mathbb{T}(\mathcal{W}))$ erklärt, die
nach Bem.a mit den Gruppenoperationen verträglich ist, also ein
Gruppenhomomorphismus. (Offen ist, ob dieser Homomorphismus surjek-
tiv ist.)

Zwischenbemerkungen:

Sind $\mathcal{W}(K)$ und $\mathcal{W}'(K')$ Rechtsvektorräume mit $3 \leq \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{W}' = n+1 < \infty$,
 $\dot{f}: K \rightarrow K'$ ein Körperisomorphismus und $\{q_0, \dots, q_n\}$ bzw. $\{q'_0, \dots, q'_n\}$
eine Basis in $\mathcal{W}$ bzw. $\mathcal{W}'$, dann existiert genau eine halbliniare
Bijektion f zum Körperisomorphismus $\dot{f}$ mit $q_i f = q'_i$ für $i=0, \dots, n$.

Bew.: (a) Falls ein solches f existiert, so muß es notwendig den
Vektor $\epsilon \in \mathcal{W}$ mit der eindeutigen Darstellung $\epsilon = \sum_{i=0}^n q_i x^i =: q_i x^i$
überführen in $\epsilon f = (q_i x^i) f = (q_i f)(x^i f) =: q'_i x'^i$ mit $x'^i = x^i \dot{f}^i$ (*); es
existiert also höchstens eine Lösung.

(b) Die durch (*) definierte Abbildung $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$ ist eine halblineare Bijektion, denn:
 $(x+y)f = (q_j x^j + q_j y^j)f = [q_j (x^j + y^j)]f \stackrel{(*)}{=} q_j [(x^j + y^j)f] = q_j [(x^j f) + (y^j f)] =$
 $= q_j x^j f + q_j y^j f = (x+y)f$;
 $(\alpha x)f = [\alpha q_j x^j]f = [q_j (\alpha x^j)]f = q_j [(\alpha x^j)f] = q_j (\alpha x^j f) = (\alpha x)f$;
 $(x^j f)(x^k f) = (q_j x^j)(q_k x^k)f = q_j q_k (x^j x^k)f = q_j q_k (x^j x^k)f = (q_j x^j)(q_k x^k)f = (x^j f)(x^k f)$;
 $x^j f = 0_{K'} \Leftrightarrow (q_j x^j)f = 0_{K'} \Leftrightarrow q_j (x^j f) = 0_{K'} \Leftrightarrow x^j f = 0_{K'} \Leftrightarrow x^j = 0_K \Leftrightarrow x = 0_K \Rightarrow f$ ist bijektiv.

2) Ist $\mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$ bzw. $\mathbb{T}(\mathcal{W}'(K'))$ ein projektiver Raum über dem Rechtsvektorraum $\mathcal{W}$ bzw. $\mathcal{W}'$ mit $2 \leq \dim \mathbb{T}(\mathcal{W}(K)) = \dim \mathbb{T}(\mathcal{W}'(K')) = n < \infty$, $f: K \rightarrow K'$ ein Körperisomorphismus und $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ bzw. $\{P'_0, \dots, P'_{n+1}\}$ eine Fundamentalfigur in $\mathbb{T}$ bzw. $\mathbb{T}'$, dann existiert mindestens eine halblineare Bijektion f zu f' so, daß die nach Folg. 1 bestimmte Kollineation α_f leistet $P_\alpha \alpha_f = P'_\alpha$ für $\alpha = 0, \dots, n+1$.

Bew.: Die Punkte $P_\alpha = q_\alpha K$ bzw. $P'_\alpha = q'_\alpha K'$ bilden eine Fundamentalfigur in $\mathbb{T}$ bzw. $\mathbb{T}' \Rightarrow \{q_0, \dots, q_n\}$ bzw. $\{q'_0, \dots, q'_n\}$ ist eine Basis in $\mathcal{W}$ bzw. $\mathcal{W}' \Rightarrow$ es existieren eindeutige Darstellungen $q_{n+1} = \sum_{i=0}^n q_i e^i =: q_i e^i$ und $q'_{n+1} = \sum_{i=0}^n q'_i e'^i =: q'_i e'^i$; dabei gilt $e^j + 0_K \wedge e'^j + 0_{K'}$ für $j = 0, \dots, n$ (ind.: $e^0 = 0_K$ o. B. d. A. $\Rightarrow q_{n+1} \in H(q_0, \dots, q_n) \xrightarrow{S_1, F_1} P_{n+1} \in P_1 \vee \dots \vee P_n$: Widerspruch, denn die P_α bilden eine Fundamentalfigur).

Wir nehmen folgende Umnormung vor:

$$\tilde{q}_j := q_j e^j + 0_K, \quad \tilde{q}'_j := q'_j e'^j + 0_{K'}, \quad \text{für } j = 0, \dots, n. \quad (\text{NICHT summieren!})$$

$\{\tilde{q}_0, \dots, \tilde{q}_n\}$ bzw. $\{\tilde{q}'_0, \dots, \tilde{q}'_n\}$ ist wieder eine Basis in $\mathcal{W}$ bzw. $\mathcal{W}'$ und nun gilt:

$$q_{n+1} = \tilde{q}_0 + \dots + \tilde{q}_n, \quad q'_{n+1} = \tilde{q}'_0 + \dots + \tilde{q}'_n.$$

Gemäß dem in der Zwischenbemerkung bewiesenen Satz existiert genau eine halblineare Bijektion f zum Körperisomorphismus f' mit $\tilde{q}_j f = \tilde{q}'_j$ für $j = 0, \dots, n$. Außerdem gilt für f :

$$q_{n+1} f = (\tilde{q}_0 + \dots + \tilde{q}_n) f = \tilde{q}_0 f + \dots + \tilde{q}_n f = \tilde{q}'_0 + \dots + \tilde{q}'_n = q'_{n+1}.$$

Für die zu f entsprechend Folg. 1 konstruierte Kollineation α_f gilt daher $P_j \alpha_f = (q_j K) \alpha_f = (\tilde{q}_j K) \alpha_f = (\tilde{q}_j f) K' = \tilde{q}'_j K' = q'_j K' = P'_j$ ($j = 0, \dots, n$) und $P_{n+1} \alpha_f = (q_{n+1} K) \alpha_f = (q_{n+1} f) K' = q'_{n+1} K' = P'_{n+1}$.

Bemerkung: Die halblineare Bijektion f ist nicht eindeutig bestimmt, denn durch $\{P_0, \dots, P_n\}$ ist die Basis $\{q_0, \dots, q_n\}$ nicht eindeutig festgelegt.

3) Zwei projektive Räume $\mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$ und $\mathbb{T}(\mathcal{W}'(K'))$ über den Rechtsvektorräumen $\mathcal{W}(K)$ und $\mathcal{W}'(K')$ mit $2 \leq \dim \mathbb{T}(\mathcal{W}) < \infty$ und $2 \leq \dim \mathbb{T}(\mathcal{W}') < \infty$ sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension besitzen und K isomorph K' ist.

Bew.: (a) π isomorph π' $\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{3.1, 5.6} \dim \pi = \dim \pi' \\ \xrightarrow{3.5, 5.7} K_{\text{alg}} = K'_{\text{alg}} (*) \end{array} \right.$

Nach 5.1, Folg.4 gilt für den Algebraisierungskörper K_{alg} bzw. K'_{alg} von $\pi(\mathcal{W}(K))$ bzw. $\pi'(\mathcal{W}(K'))$: $K_{\text{alg}} \cong K$ bzw. $K'_{\text{alg}} \cong K' (*)$.

$(*) \wedge (**) \Rightarrow K \cong K'$.

(b) Gelte nun $\dim \pi = \dim \pi' (< \infty) \wedge K \cong K'$ (Körperisomorphismus $\hat{f}$). Nach 5.7 existieren in projektiven Räumen endlicher Dimension stets Fundamentalfiguren, also z.B. $\{P_0, \dots, P_{n+1}\} \subset \pi$ und $\{P'_0, \dots, P'_{n+1}\} \subset \pi'$. Wegen $\dim \pi = \dim \pi'$ kann Folg.2 angewendet werden, und es existiert eine halblinare Bijektion f zum Körperisomorphismus $\hat{f}$ so, daß die Kollineation $\alpha: \pi \rightarrow \pi'$ die beiden Fundamentalfiguren vertauscht $\Rightarrow \pi$ kollinear $\pi' \Rightarrow \pi$ isomorph π' . ◆

4) Sei $\pi(\mathcal{W}(K))$ ein projektiver Raum über dem Rechtsvektorraum $\mathcal{W}$ mit $2 \leq \dim \pi = n < \infty$ und $\alpha: \pi \rightarrow \pi$ eine Kollineation, welche alle Punkte der Fundamentalfigur $\{P_\alpha | \alpha = 0, \dots, n+1\}$ einzeln festläßt. Dann existieren ein Körperautomorphismus $\hat{f}: K \rightarrow K$ und eine halblinare Bijektion $f: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}(K)$ zum Körperautomorphismus $\hat{f}$ so, daß $\alpha = \alpha_f$ gilt.

Bemerkung: Dies ist der erste Schritt um zu zeigen, daß sich jede Kollineation $\alpha: \pi(\mathcal{W}(K)) \rightarrow \pi(\mathcal{W}(K'))$ durch halblinare Bijektionen erfassen läßt; in Folg.4 wird die Aussage zunächst nur für ganz spezielle Kollineationen bestätigt.

Zur Vorbereitung des Beweises zeigen wir folgenden

Hilfssatz: Ist π ein projektiver Desarguesraum endlicher Dimension n und $\alpha: \pi \rightarrow \pi$ eine Kollineation, welche die Punkte $P_\alpha (\alpha = 0, \dots, n+1)$ einer Fundamentalfigur einzeln festläßt und zusätzlich alle Punkte einer Verbindungsgeraden von zwei Fundamentalpunkten, so ist α die Identität.

Bew.: Für die Kollineation $\alpha: \pi \rightarrow \pi$ gilt nach Voraussetzung $P_\alpha \alpha = P_\alpha$ für $\alpha = 0, \dots, n+1$ und o.B.d.A. $\alpha|_{P_0 \vee P_1} = \text{id}$.

Wir zeigen zuerst $\alpha|_{P_0 \vee P_k} = \text{id}$ für $k=2, \dots, n+1$.

Als Verbindungsraum von n Punkten einer Fundamentalfigur ist $\pi_{1k} := P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_{k-1} \vee P_{k+1} \vee \dots \vee P_{n+1}$ eine Hyperebene und die Gerade $P_1 \vee P_k$ liegt nicht in π_{1k} , denn $P_1 \notin \pi_{1k}$ und $P_k \notin \pi_{1k}$; nach 5.2, Folg.5 hat daher $P_1 \vee P_k$ mit π_{1k} genau einen Punkt E_{1k} gemeinsam mit $E_{1k} \neq P_1, P_k$ und $E_{1k} \notin P_0 \vee P_1$, da P_0, P_1, P_k nicht kollinear sind. Aus $P_\alpha \alpha = P_\alpha$ für $\alpha = 0, \dots, n+1$ folgt $(P_1 \vee P_k) \alpha = P_1 \vee P_k \wedge \pi_{1k} \alpha = \pi_{1k} \Rightarrow E_{1k} \alpha = E_{1k}$. Für die ebene Autokollineation $\alpha|_{P_0 \vee P_1 \vee P_k}$ gilt $\alpha|_{P_0 \vee P_1} = \text{id} \Rightarrow \alpha|_{P_0 \vee P_1 \vee P_k}$ ist eine perspektive Kollineation mit der Achse $P_0 \vee P_1$, die außerhalb der Achse die beiden verschiedenen Fixpunkte P_k und E_{1k} besitzt $\Rightarrow$ $\alpha|_{P_0 \vee P_1 \vee P_k} = \text{id}$; hieraus folgt insbesondere $\alpha|_{P_0 \vee P_k} = \text{id}$ für $k=1, \dots, n+1$.

Ebenso wie man aus der Voraussetzung $\alpha|P_{\alpha} \vee P_{\beta} = \iota$ die Aussage $\alpha|P_{\alpha} \vee P_{\beta} = \iota$ für $k=1, \dots, n+1$ erschließt, folgt aus $\alpha|P_{\alpha} \vee P_{\beta} = \iota$ nun $\alpha|P_{\alpha} \vee P_{\beta} = \iota$ für $l=0, \dots, n+1 \wedge l \neq k$.

Damit ist α eine Kollineation, die alle Verbindungsgeraden $P_{\alpha} \vee P_{\beta}$ ($\alpha, \beta \neq \iota \in \{0, \dots, n+1\}$) der Punkte einer Fundamentalfigur einzeln festläßt.

Wir benützen nun vollständige Induktion.

Induktionsannahme: $\alpha|P_{\alpha} \vee P_{\beta} \vee \dots \vee P_{\gamma} = \iota$ ($\alpha \neq \alpha_i$ für $i \neq k \wedge \alpha_i \in \{0, \dots, n+1\}$, $2 \leq m \leq n$) für alle aus $\{P_{\alpha}\}$ zu bildenden $(m-1)$ -dimensionalen Verbindungsräume. Um $\alpha|P_{\alpha} \vee P_{\beta} \vee \dots \vee P_{\gamma} = \iota$ für alle m -dimensionalen Verbindungsräume zu zeigen, genügt es etwa $\alpha|P_{\alpha} \vee \dots \vee P_{\gamma} = \iota$ zu erweisen.

Für $P_{\alpha} \vee \dots \vee P_{\gamma} =: \Pi_{m-1}$ gilt nach Induktionsannahme $\alpha|\Pi_{m-1} = \iota$ und Π_{m-1} ist eine Hyperebene in $\Pi_m := P_{\alpha} \vee \dots \vee P_{\gamma} \Rightarrow \alpha|\Pi_m$ ist eine perspektive Kollineation mit der Achse Π_{m-1} . Die Gerade $P_{m-1} \vee P_m$ liegt (wegen $P_m \notin \Pi_{m-1}$) nicht in der Hyperebene Π_{m-1} , $\overset{11.17}{\Rightarrow}$ der einzige Punkt von $P_{m-1} \vee P_m$ in Π_{m-1} ist $P_{m-1} \Rightarrow \exists P \in P_{m-1} \vee P_m$ mit $P \neq P_{m-1}, P_m \Rightarrow P \in \Pi_{m-1}$. Nach Voraussetzung ist $P_m \neq P_{m-1}$ und aus $\alpha|P_{\alpha} \vee P_{\beta} = \iota$ folgt $P \neq P_m \Rightarrow$ die perspektive Kollineation $\alpha|\Pi_m$ hat außerhalb der Achse Π_{m-1} zwei verschiedene Fixpunkte $P, P_m \overset{11.17}{\Rightarrow} \alpha|\Pi_m = \iota$.

Für $m=n$ ergibt sich $\alpha|P_{\alpha} \vee \dots \vee P_{n+1} = \alpha|\Pi = \alpha = \iota$.

15

Bew.: Von der Fundamentalfigur $P_{\alpha} = q_{\alpha} K$ für $\alpha=0, \dots, n+1$ gelangen wir wie im Beweis von Folg.2 durch Umnormung zu einer Basis $\{\tilde{q}_0, \dots, \tilde{q}_n\}$ mit $P_i = \tilde{q}_i K$ für $i=0, \dots, n$ und $q_{n+1} = \tilde{q}_0 + \dots + \tilde{q}_n$.

Nach dem Beweis des Hilfssatzes gilt für den Punkt $E_{01} \in \Pi_{01} = P_0 \vee \dots \vee P_{n+1}$ dann $E_{01} \neq E_{01}$ mit E_{01}, P_0, P_1 kollinear und $E_{01} \neq P_0, P_1$.

$E_{01} = \pi_{01} K, P_0, P_1$ kollinear $\Rightarrow \pi_{01} = \tilde{q}_0 \lambda_0 + \tilde{q}_1 \lambda_1$ (*).

$E_{01} \in \Pi_{01} \overset{5.1, F.1}{\Rightarrow} \pi_{01} \in H(\tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n, q_{n+1}) \Rightarrow$

$\pi_{01} = \tilde{q}_2 \lambda_2 + \dots + \tilde{q}_n \lambda_n + (\tilde{q}_0 + \dots + \tilde{q}_n) \lambda_{n+1}$ (*).

(*) $\wedge$ (*) $\wedge \{\tilde{q}_0, \dots, \tilde{q}_n\}$ Basis $\Rightarrow \lambda_0 = \lambda_{n+1}, \lambda_1 = \lambda_{n+1}, 0 = \lambda_j + \lambda_{n+1}$ für $j=2, \dots, n \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 \Rightarrow \pi_{01} = (\tilde{q}_0 + \tilde{q}_1) \lambda_0 \Rightarrow \pi_{01} K = (\tilde{q}_0 + \tilde{q}_1) K$.

Um den Körperautomorphismus $\hat{f}: K \rightarrow K$ zu konstruieren, algebraisieren wir auf der Geraden $P_0 \vee P_1 =: \hat{P}_x$. Wir wählen dazu $O = P_0, E = E_{01}, U = P_1$,

und $\{\hat{P}_x, +, \cdot\} = K_{\text{alg}}$ ist der Algebraisierungskörper von $\mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$. K_{alg} ist isomorph zu K und nach 5.1, Folg.4 ordnet dieser

Isomorphismus $\mu: \hat{P}_x = K_{\text{alg}} \rightarrow K$ jedem Punkt $X \in \hat{P}_x$ die Zahl $X\mu = x \in K$ zu, wobei gilt $X = xK = (\tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 x)K$; diese Darstellung ist eindeutig. Wir definieren $\hat{f}: K \rightarrow K$ durch:

$\hat{f} := \mu^{-1} \circ \alpha|_{\hat{P}_x} \circ \mu$.

$\hat{f}$ ist ein Körperautomorphismus:

μ und μ^{-1} sind Körperisomorphismen; da $Ox = O, Ex = E$ und $Ux = U$, ist analog zu 1.12, Folg.2 die Kollineation α mit den Körperoperationen in $\hat{P}_x$ verträglich $\Rightarrow \hat{f}$ ist Produkt von Körperisomorphismen $\Rightarrow \hat{f}$ ist ein Körperisomorphismus $K \rightarrow K$, also ein Körperautomorphismus.

$\hat{f}$ leistet

$x (x \in K) \xrightarrow{\mu^{-1}} X = (\tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 x)K (x \in \hat{P}_x) \xrightarrow{\alpha} X\alpha =: (\tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 x')K \xrightarrow{\mu} x',$ also $x\hat{f} = (X\alpha)\mu$.

Nach Folg.2 existiert zum Körperautomorphismus $\hat{f}:K \rightarrow K$ und zur gegebenen Fundamentalfigur $\{P_\alpha\}$ in $\mathbb{T}$ mindestens eine halblineare Bijektion $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ so, daß $P_\alpha x_f = P_\alpha$ für $\alpha=0, \dots, n+1$ gilt (dabei läßt f die Basis $\{\tilde{q}_0, \dots, \tilde{q}_n\}$ fest). Es genügt $x_f = x$ zu zeigen.

$P_\alpha x = P_\alpha \wedge P_\alpha x_f = P_\alpha$..für $\alpha=0, \dots, n+1$.

Für einen Punkt $X = (\tilde{q}_0 + \tilde{q}_1, x) \in \mathcal{P}_x$ gilt nach Definition von x' :

$$Xx = (\tilde{q}_0 + \tilde{q}_1, x')K$$

$$Xx_f = (\tilde{q}_0 + \tilde{q}_1, x')K = [(\tilde{q}_0 + \tilde{q}_1, x)f]K = [\tilde{q}_0 f + (\tilde{q}_1 f)(x\hat{f})]K = [\tilde{q}_0 + \tilde{q}_1, x']K = Xx \Rightarrow$$

$$Xx = Xx_f \quad \forall X \in \mathcal{P}_x \wedge P_1 x = P_1 x_f = P_1 \Rightarrow x|_{\mathcal{P}_{P_1}} = x_f|_{\mathcal{P}_{P_1}} \Rightarrow$$

$x x_f^{-1} = \varphi$ ist eine Kollineation $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, welche die Fundamentalfigur $\{P_\alpha\}$ punktweise festläßt, und für die $\varphi|_{\mathcal{P}_{P_1}} = \text{id}$ gilt $\stackrel{hs}{\Rightarrow} \varphi = x x_f^{-1} = \text{id} \Rightarrow x = x_f$.

5) Sind $\mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$ und $\mathbb{T}(\mathcal{W}'(K'))$ zwei projektive Räume über Rechtsvektorräumen mit $2 \leq \dim \mathbb{T}(\mathcal{W}) < \infty$ und ist $x: \mathbb{T}(\mathcal{W}) \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{W}')$ eine Kollineation, dann existiert mindestens eine halblineare Bijektion $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$ mit $x = x_f$.

Bew.: Nach Folg.3 folgt aus den Voraussetzungen $\dim \mathbb{T}(\mathcal{W}) = \dim \mathbb{T}(\mathcal{W}') =: n \wedge K \cong K'$, d.h. es existiert ein Körperisomorphismus $\hat{f}_0: K \rightarrow K'$. Nach 3.7 existiert in $\mathbb{T}(\mathcal{W})$ eine Fundamentalfigur $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ und $\{P_0 x =: P'_0, \dots, P_{n+1} x =: P'_{n+1}\}$ ist eine Fundamentalfigur in $\mathbb{T}(\mathcal{W}')$. Nach Folg.2 existiert zum Körperisomorphismus $\hat{f}_0$ mindestens eine halblineare Bijektion $f_0: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$ mit $P_\alpha x_{f_0} = P'_\alpha = P_\alpha x$ für $\alpha=0, \dots, n+1 \Rightarrow$ die Kollineation $x x_{f_0}^{-1}: \mathbb{T}(\mathcal{W}) \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{W}')$ läßt die Fundamentalfigur $\{P_\alpha = 0, \dots, n+1\}$ punktweise fest; daher existiert nach Folg.4 ein Körperautomorphismus $\hat{f}_1: K \rightarrow K$ und eine halblineare Bijektion $f_1: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ zu $\hat{f}_1$ mit $x_{f_1} = x x_{f_0}^{-1} \Rightarrow x = x_{f_1} \circ x_{f_0}$. Nach Folg.1, Bem.a ist $f := f_1 \circ f_0: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$ eine halblineare Bijektion zum Körperisomorphismus $\hat{f} := \hat{f}_1 \hat{f}_0: K \rightarrow K'$ und es gilt $x = x_{f_1} \circ x_{f_0} = x_{f_1 \circ f_0} = x_f$.

Bemerkung: Zeichnet man in $\mathcal{W}$ bzw. $\mathcal{W}'$ je eine Basis $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ bzw. $\{\pi'_1, \dots, \pi'_n\}$ aus ($2 \leq n < \infty$), so ist die halblineare Bijektion $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$ zum Körperisomorphismus $\hat{f}: K \rightarrow K'$ nach der Zwischenbemerkung vor Folg.2 durch die Menge $\{\pi_i f, \dots, \pi_n f\}$, welche eine neue Basis in $\mathcal{W}'$ darstellt, eindeutig festgelegt, und wird daher durch die $(n+1, n+1)$ -Matrix (a_{ij}^x) , welche durch $\pi_i f = \pi'_k a_{ik}^x$ mit $a_{ik}^x \in K'$ definiert ist, völlig beschrieben.

Gilt $x = \pi_i x' \in \mathcal{W}$, so ist $x f = (\pi_i x') f = \pi_i f(x' \hat{f}) = \pi'_k a_{ik}^x (x' \hat{f})$. Andererseits besitzt $x f \in \mathcal{W}'$ eine Darstellung $x f = \pi'_j x''^j$; da die Darstellung in einer Basis eindeutig ist, folgt

$$x''^k = a_{ij}^x (x' \hat{f}) \text{ mit } a_{ij}^x \in K'.$$

Da f eine Bijektion ist, gilt $\epsilon f = \sigma_{\epsilon} \Rightarrow \epsilon = \sigma_{\epsilon}$, also $a_i^*(x^i f) = 0 \Rightarrow x^i = 0$, da $x^0 = \dots = x^n = 0_K$ gleichbedeutend ist mit $x^0 f = \dots = x^n f = 0_K$ hat das System $a_i^* z^i = 0_K$ nur die triviale Lösung und daher die Matrix (a_i^*) den rechten Zeilenrang $n+1$.

Zu f gehört die Kollineation $\alpha_f: T(\mathcal{W}(K)) \rightarrow T(\mathcal{W}'(K'))$, welche nach Folg. 1 durch $X \alpha_f = (\epsilon K) \alpha_f = (\epsilon f) K'$ bestimmt ist und daher bei festen Basen in $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}'$ die "Koordinatendarstellung" $(x^0, \dots, x^n) K \mapsto (a_i^*(x^i f), \dots, a_n^*(x^i f)) K'$ besitzt. Dafür ist auch die Schreibweise

$$x^i \varphi^i = a_i^*(x^i f) \text{ mit } \varphi^i \in K' \setminus \{0_K\}$$

üblich.

Zwischenbemerkungen:

(1) Ist K ein Körper und $a \in K \setminus \{0\}$, so ist die Abbildung $j_a: K \rightarrow K$, die jedem $x \in K$ das Element $a^{-1}xa \in K$ zuordnet, ein Körperautomorphismus ("innerer Körperautomorphismus"). Zu jedem a gehört ein innerer Automorphismus j_a , jedoch folgt aus $a \neq b$ nicht notwendig $j_a \neq j_b$. Z.B. gilt für einen kommutativen Körper $j_a = 1_K \forall a \in K \setminus \{0\}$.

(2) Unter einer "Dilatation" des Rechtsvektorraumes $\mathcal{W}(K)$ versteht man eine globale Abbildung $j_a: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ mit $\epsilon j_a = \epsilon a$, wobei $a \in K \setminus \{0\}$ fest ist. Dann gilt:

Die Dilatation j_a ist eine halblineare Bijektion zum inneren Körperautomorphismus j_a .

Bew.: $(\epsilon + \eta) j_a \stackrel{\text{Def.}}{=} (\epsilon + \eta) a = \epsilon a + \eta a \stackrel{\text{Def.}}{=} \epsilon j_a + \eta j_a$,
 $(\epsilon x) j_a \stackrel{\text{Def.}}{=} (\epsilon x) a = \epsilon (xa) = \epsilon (a a^{-1} xa) = \epsilon a (a^{-1} xa) \stackrel{\text{Def.}}{=} (\epsilon j_a)(x j_a)$,
 d.h. j_a ist halblinear zu j_a . Aus der Definition von j_a folgt unmittelbar, daß j_a bijektiv ist.

Bemerkungen: (a) Speziell für einen kommutativen Körper ist j_a für alle $a \in K \setminus \{0\}$ die Identität und daher ist j_a dann eine lineare Bijektion $j_a: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$, also ein Vektorraumautomorphismus.

(b) Alle Dilatationen von $\mathcal{W}$ bilden eine Untergruppe $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ von $\Gamma L(\mathcal{W})$, welche (für $\dim \mathcal{W} \geq 1$) isomorph zur multiplikativen Gruppe des Körpers K ist. $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ ist Normalteiler von $\Gamma L(\mathcal{W})$.

Bew.: (I) Jedem $a \in K \setminus \{0\}$ wird genau ein $j_a \in \mathcal{A}(\mathcal{W})$ zugeordnet und umgekehrt; zu $a \neq b$ folgt $j_a \neq j_b$ (ind. $j_a = j_b \Rightarrow$ Da $\dim \mathcal{W} \geq 1 \Rightarrow \exists \epsilon \in \mathcal{W} \setminus \{0\} \Rightarrow \epsilon j_a = \epsilon a = \epsilon b = \epsilon b \Rightarrow \epsilon(a-b) = 0 \wedge \epsilon \neq 0 \Rightarrow a-b=0$: Widerspruch) und außerdem gilt $j_a \circ j_b = j_{ab}$ wegen:
 $\epsilon(j_a \circ j_b) = (\epsilon j_a) j_b = (\epsilon a) j_b = (\epsilon a) b = \epsilon(ab) = \epsilon j_{ab} \quad \forall \epsilon \in \mathcal{W}$.

(II) Sei $j_a \in \mathcal{D}(\mathcal{W})$ und $f \in \Gamma L(\mathcal{W})$. Nach 1.8 ist $f^{-1} j_a f \in \mathcal{D}(\mathcal{W})$ zu zeigen.
 $\epsilon(f^{-1} j_a f) = [(\epsilon f^{-1}) j_a] f = [(\epsilon f^{-1}) a] f = (\epsilon f^{-1} f)(\epsilon a) = \epsilon(\epsilon a) = \epsilon j_a \quad \forall \epsilon \in \mathcal{W},$
 $a f \in K \setminus \{0\}$ wegen $a \in K \setminus \{0\} \Rightarrow f^{-1} j_a f = j_{a f} \in \mathcal{D}(\mathcal{W})$. $\blacklozenge$

(c) Ist speziell K kommutativ, so ist jede Dilatation linear und $\mathcal{D}(\mathcal{W})$ Normalteiler von $GL(\mathcal{W})$.

Bew.: $j_a \in \mathcal{D}(\mathcal{W})$, $j_a: x \mapsto a^{-1} x a = x \quad \forall x \in K \Rightarrow j_a \in GL(\mathcal{W})$.
 $f \in GL(\mathcal{W}) \Rightarrow f = \iota_x \Rightarrow f^{-1} j_a f = j_a \in \mathcal{D}(\mathcal{W})$ nach Bem.b. $\blacklozenge$

6) Seien $\mathcal{W}(K)$ und $\mathcal{W}(K')$ Rechtsvektorräume mit $3 \leq \dim \mathcal{W}(K)$. Die halblinare Bijektion $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ beschreibt genau dann die Identität von $\Gamma(\mathcal{W})$, d.h. $\epsilon_f = 1$, wenn $f \in \mathcal{D}(\mathcal{W})$ gilt. Zwei halblinare Bijektionen $f: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}(K')$ und $g: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}(K')$ beschreiben genau dann die gleiche Kollineation $\Gamma(\mathcal{W}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W}')$, d.h. $\epsilon_f = \epsilon_g$, wenn es eine Dilatation $j_{a'} \in \mathcal{D}(\mathcal{W}')$ zu $a' \in K' \setminus \{0_{K'}\}$ gibt mit $g = f j_{a'}$.

Bew.: (a) Vs.: $j_a \in \mathcal{D}(\mathcal{W})$, Beh.: $\epsilon_{j_a} = 1$.

$X \epsilon_{j_a} = (\epsilon K) \epsilon_{j_a} = (\epsilon j_a) K = (\epsilon a) K = \epsilon K = X \quad \forall X \in \mathcal{P}$.

(b) Vs.: $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ ist eine halblinare Bijektion mit $\epsilon_f = 1$,

Beh.: $\exists a \in K \setminus \{0_K\}$ mit $f = j_a$.

$\forall X \in \mathcal{P}$ gilt $X \epsilon_f = (\epsilon f) K = \epsilon K = X \Rightarrow \epsilon f \in \epsilon K \Rightarrow \epsilon f = \epsilon a_\epsilon$ mit $a_\epsilon \in K \setminus \{0_K\}$;

wir sind fertig, wenn gezeigt ist, daß das Skalar a_ϵ nicht von der Wahl des Vektors ϵ abhängt:

$$\left. \begin{aligned} (\epsilon + \eta) f &= \epsilon f + \eta f = \epsilon a_\epsilon + \eta a_\eta \\ (\epsilon + \eta) f &= (\epsilon + \eta) a_{\epsilon + \eta} = \epsilon a_{\epsilon + \eta} + \eta a_{\epsilon + \eta} \end{aligned} \right\}$$

Sind $\{\epsilon, \eta\}$ l.u., so folgt hieraus $a_\epsilon = a_{\epsilon + \eta} \wedge a_\eta = a_{\epsilon + \eta} \Rightarrow a_\epsilon = a_\eta =: a$.

Sind $\{\epsilon, \eta\}$ l.a. ($\wedge \epsilon, \eta \neq 0$), so existiert wegen $\dim \mathcal{W}(K) \geq 3$

ein Vektor ζ mit $\{\epsilon, \zeta\}$ l.u. ($\Rightarrow \{\eta, \zeta\}$ l.u.) und man erschließt

wie oben $a_\epsilon = a_\eta = a_\zeta =: a$. Wegen $\sigma f = \sigma = \sigma a$ gilt daher $\epsilon f = \epsilon a \quad \forall \epsilon \in \mathcal{W}$.

(c) Vs.: $g = f j_{a'}$, Beh.: $\epsilon_g = \epsilon_f$.

$X \epsilon_g = (\epsilon K) \epsilon_g = (\epsilon g) K' = [(\epsilon f j_{a'})] K' = [(\epsilon f) a'] K' = (\epsilon f) K' = X \epsilon_f \quad \forall X \in \mathcal{P}$.

(d) Vs.: f, g halblinare Bijektionen $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$ mit $\epsilon_f = \epsilon_g$,

Beh.: $\exists j_{a'} \in \mathcal{D}(\mathcal{W}')$ mit $g = f j_{a'}$.

$\epsilon_g = \epsilon_f \Rightarrow \epsilon_{f^{-1} \circ \epsilon_g} = \Gamma(\mathcal{W}') \rightarrow \Gamma(\mathcal{W}')$ ist die Identität. Wegen

$\epsilon_{f^{-1} \circ \epsilon_g} = \epsilon_{f^{-1} \circ g}$ gilt $\epsilon_{f^{-1} \circ g} = 1 \stackrel{(b)}{\Rightarrow} \exists a' \in K' \setminus \{0_{K'}\}$ mit $f^{-1} \circ g = j_{a'} \Rightarrow g = f \circ j_{a'}$. $\blacklozenge$

Bemerkungen: (a) Durch ϵ wird f nur bis auf eine Dilatation in $\mathcal{W}'$ bestimmt. Da nach Folg.1, Bem.a zu $f j_{a'}$ der Körperisomorphismus $f j_{a'}: K \rightarrow K'$ gehört, wird durch ϵ der Körperisomorphismus nur bis auf innere Automorphismen von K' bestimmt. Ist speziell $K (= K')$ kommutativ, so ist die Identität der einzige innere Automorphismus und daher f durch ϵ eindeutig bestimmt.

(b) Ist $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ bzw. $\{\pi'_1, \dots, \pi'_n\}$ ($3 \leq n < \infty$) eine feste Basis in $\mathcal{W}$ bzw. $\mathcal{W}'$ und besitzt f die Koordinatendarstellung $x'^k = a'^k_j (x^j)$, so ist wegen $\pi'_j f a = (\pi_j f) a' = (\pi'_k a'^k_j) a' = \pi'_k (a'^k_j a')$ die Transformationsmatrix durch π bis auf einen Rechtsfaktor $a' \in K' \setminus \{0_{K'}\}$ bestimmt, wie dies auch in der Koordinatendarstellung von π in Folg. 5, Bem. zum Ausdruck kommt.

Zwischenbemerkung:

Sei H eine Untergruppe der Gruppe G . Ist a ein beliebiges Element aus G , so heißt die Menge aH aller möglichen Produkte ah , wobei h die Untergruppe H durchläuft, die durch a definierte "linksseitige Nebenklasse" der Gruppe G nach der Untergruppe H ; analog ist die "rechtsseitige Nebenklasse" Ha erklärt.

Ist speziell H ein Normalteiler, so gilt $aH = Ha \quad \forall a \in G$ nach Definition eines Normalteilers. Die Menge aller Nebenklassen nach einem Normalteiler H heißt "Zerlegung der Gruppe nach dem Normalteiler H ". Für die Nebenklassen einer Zerlegung nach einem Normalteiler H kann eine Multiplikation kanonisch definiert werden durch $aH \cdot bH := (a \cdot b)H$
geg. Multiplikation in G .

Die Zerlegung der Gruppe G nach dem Normalteiler H bildet bezüglich dieser Multiplikation selbst eine Gruppe, welche die "Faktorgruppe G/H von G nach H " heißt.

Sei $\mu: G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus der Gruppe G in die Gruppe G' und e' das neutrale Element von G' ; unter dem Kern von μ versteht man die Menge $\ker \mu := \{x \in G \mid x\mu = e'\}$.

Es gilt ("Homomorphiesatz für Gruppen"):

Ist $\mu: G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus der Gruppe G in die Gruppe G' , so ist $\ker \mu$ ein Normalteiler von G ; ist μ surjektiv, so gilt $G/\ker \mu \cong G'$.

7) Die Kollineationsgruppe $P\Gamma L(\Pi(\mathcal{W}))$ des projektiven Raumes $\Pi(\mathcal{W})$ über dem Rechtsvektorraum $\mathcal{W}(K)$ ist isomorph zur Faktorgruppe der halblinaren Gruppe $\Gamma L(\mathcal{W})$ nach der Dilatationsgruppe $\mathcal{J}(\mathcal{W})$ (=Normalteiler): $\Gamma L(\mathcal{W})/\mathcal{J}(\mathcal{W}) \cong P\Gamma L(\Pi(\mathcal{W}))$.

Bew.: Die Abbildung $\mu: \Gamma L(\mathcal{W}) \rightarrow P\Gamma L(\Pi(\mathcal{W}))$, die jeder halblinaren Bijektion f die Kollineation π_f zuordnet (vgl. 5.2, Folg. 1), ist nach 5.2, Folg. 1, Bem. b wegen $\pi_{f \circ g} = \pi_f \circ \pi_g$ ein Gruppenhomomorphismus, also $(f \circ g)\mu = f\mu \circ g\mu$. Die Abbildung μ ist sogar surjektiv, denn nach 5.2, Folg. 5 existiert zu jeder Kollineation $\pi \in P\Gamma L(\Pi(\mathcal{W}))$ mindestens eine halblinare Bijektion $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ mit $\pi = \pi_f$, d.h.

$f\mu = \alpha$. Das neutrale Element von $P\Gamma L(\Pi(\mathcal{W}))$ ist die Identität ($\Rightarrow$ $\ker \mu = \{f \in \Gamma L(\mathcal{W}) \mid f\mu = 1_{\Pi(\mathcal{W})}\}$). Nach 5.2, Folg. 6 beschreibt eine halblinareare Bijektion $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ genau dann die Identität von $\Pi(\mathcal{W})$, wenn $f \in \mathcal{O}(\mathcal{W})$ gilt, d.h. $\ker \mu = \mathcal{O}(\mathcal{W})$. Wendet man auf μ den Homomorphiesatz an, so ergibt sich:
 $\Gamma L(\mathcal{W})/\mathcal{O}(\mathcal{W}) \cong P\Gamma L(\Pi(\mathcal{W}))$.

Bemerkungen: (a) Nach Auszeichnung einer Basis $\{\pi_0, \dots, \pi_n\}$ ($2 \leq n < \infty$) in $\mathcal{W}$ ist eine halblinareare Bijektion $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ zum Körperautomorphismus $\hat{f}: K \rightarrow K$ bestimmt durch $\pi_i f = \pi_i a_i^{k_i}$ mit $a_i^{k_i} \in K$ und rechtem Zeilenrang $(a_i^{k_i}) = n+1$, und f besitzt nach Folg. 5, Bem. die Koordinatendarstellung $x^{k_i} = a_i^{k_i}(x^i f)$, wobei $\alpha f = \pi_i x^{k_i}$ gesetzt wurde (die gestrichenen Indizes gehören zum Bildvektor und laufen wie jeder Index von 0 bis n). Die Kollineationen $\alpha \in P\Gamma L(\Pi(\mathcal{W}))$ haben dann die Koordinatendarstellungen

$$x^{k_i} = a_i^{k_i}(x^i \hat{f}) \quad \text{mit } \hat{f} \in K \setminus \{0\}.$$

(b) Sind $\Pi(\mathcal{W}(K))$ und $\Pi(\mathcal{W}'(K'))$ projektive Räume gleicher (endlicher) Dimension (≥ 2) mit $K \cong K'$, so folgt $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{W}'$ und daher ist $\mathcal{W}(K)$ (vektorraum-) isomorph $\mathcal{W}'(K') \xrightarrow{\cong} \Gamma L(\mathcal{W}) \cong \Gamma L(\mathcal{W}')$; wegen $K \cong K'$ ist $\mathcal{O}(\mathcal{W}) \cong \mathcal{O}(\mathcal{W}') \Rightarrow \Gamma L(\mathcal{W})/\mathcal{O}(\mathcal{W}) \cong \Gamma L(\mathcal{W}')/\mathcal{O}(\mathcal{W}') \xrightarrow{\cong} P\Gamma L(\Pi(\mathcal{W})) \cong P\Gamma L(\Pi(\mathcal{W}'))$.

Zwischenbemerkung:

Seien $\mathcal{W}(K)$ und $\mathcal{W}'(K')$ Rechtsvektorräume mit $3 \leq \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{W}' < \infty$ und $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$ eine halblinareare Bijektion zum Körperisomorphismus $\hat{f}: K \rightarrow K'$. Wir definieren eine Abbildung $f^T: \mathcal{W}'^* \rightarrow \mathcal{W}^*$, indem wir die Wirkung der Linearform $\alpha'^* f^T$ auf einen beliebigen Vektor $\alpha \in \mathcal{W}$ angeben:

$$\underbrace{\langle \alpha'^* f^T, \alpha \rangle}_{\substack{\in \mathcal{W}^* \quad \in \mathcal{W} \\ \in K}} := \underbrace{\langle \alpha'^*, \alpha f \rangle}_{\substack{\in \mathcal{W}'^* \quad \in \mathcal{W}' \\ \in K'}} \hat{f}^{-1} \quad \forall \alpha'^* \in \mathcal{W}'^* \quad \wedge \quad \forall \alpha \in \mathcal{W}.$$

f^T heißt die zu f transponierte Abbildung.

f^T ist eine halblinareare Bijektion zum Körperisomorphismus $\hat{f}^{-1}: K' \rightarrow K$.

Bew.: (1) $(\alpha'^* + \beta'^*) f^T = \alpha'^* f^T + \beta'^* f^T$:
 $\langle (\alpha'^* + \beta'^*) f^T, \alpha \rangle \stackrel{\text{Def.}}{=} \langle \alpha'^* + \beta'^*, \alpha f \rangle \hat{f}^{-1} \stackrel{\text{Def. der Add. in Hom}(\mathcal{W}', K') \wedge \text{Körperisomorphismus}}{=} \langle \alpha'^*, \alpha f \rangle \hat{f}^{-1} + \langle \beta'^*, \alpha f \rangle \hat{f}^{-1} \stackrel{\text{Def.}}{=} \langle \alpha'^* f^T, \alpha \rangle + \langle \beta'^* f^T, \alpha \rangle = \langle \alpha'^* f^T + \beta'^* f^T, \alpha \rangle$
 $\forall \alpha \in \mathcal{W}$.
 Def. der Add. in $\text{Hom}(\mathcal{W}, K)$

halblineare Bijektion $f^T: \mathcal{W}'^* \rightarrow \mathcal{W}^*$, welche $\alpha'^* = a'_i \pi'^{*j}$ überführt in $\alpha'^* f^T = a_j \pi^{*j}$ gemäß der Definition von f^T :

$$\langle \alpha'^* f^T, x \rangle = (a_j \langle \pi'^{*j}, \pi_k \rangle x^k) = a_k x^k \\ \langle \alpha'^* f^T, x \rangle f^{-1} = (a_j \langle \pi'^{*j}, \pi_k \rangle a_k^i (x^k f)) f^{-1} = (a_j a_k^i) f^{-1} x^k \quad \forall x^k \in K \Rightarrow \\ a_k = (a_j a_k^i) f^{-1}$$

Nach LA existiert zur Matrix (a_k^i) mit dem rechten Zeilenrang $n+1$ eindeutig eine durch $a_k^i \alpha_k^* = \delta_j^i$ bestimmte rechtsinverse Matrix (α_i^k) mit $\alpha_i^k \in K'$ und dem linken Spaltenrang $n+1$, und damit lautet die Koordinatendarstellung von $(f^T)^{-1}: \mathcal{W}'^* \rightarrow \mathcal{W}^*$

$$\alpha_i^k = (a_k f) \alpha_i^k.$$

Zu $(f^T)^{-1}$ gehört die duale Kollineation $\alpha_{(f^T)^{-1}} = \alpha_{f^T}^*: \Pi(\mathcal{W}(K)) \rightarrow \Pi(\mathcal{W}'(K'))$, welche nach Folg. 5, Bem. daher in obigen Basen die Koordinatendarstellung

$$\{a_i\} = (a_k f) \alpha_i^k \quad \text{mit } \{i\} \in K' \setminus \{0_K\}$$

besitzt.

(c) Ist speziell $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$ und f linear, also $f = 1_K$, so wird f bzw. f^T bzgl. der Basis $\{\pi_0, \dots, \pi_n\}$ bzw. $\{\pi^{*0}, \dots, \pi^{*n}\}$ durch $x^k = a_k^i x^i$ bzw. $a_k = a_j a_k^i$ beschrieben, also durch transponierte Matrizen.

Satz 5.2: Jede reguläre halblineare Abbildung $\mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}'(K')$ beschreibt eine Kollineation $\alpha_f: \Pi(\mathcal{W}(K)) \rightarrow \Pi(\mathcal{W}'(K'))$ und jede Kollineation läßt sich durch eine halblineare Bijektion beschreiben. Zwei halblineare Bijektionen f und g beschreiben genau dann dieselbe Kollineation, wenn es eine Dilatation $j_\alpha: \mathcal{W}' \rightarrow \mathcal{W}'$ mit $g = f j_\alpha$ gibt.

Zwei projektive Räume über endlichdimensionalen Rechtsvektorräumen $\mathcal{W}(K)$ und $\mathcal{W}'(K')$ sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension (≥ 2) haben und K isomorph K' ist. Beschreibt f die Kollineation α , so beschreibt $(f^T)^{-1}$ die duale Kollineation α^* . Die Kollineationsgruppe $PGL(\Pi(\mathcal{W}(K)))$ ist isomorph zur Faktorgruppe der halblinearen Gruppe $PL(\mathcal{W}(K))$ nach der Dilatationsgruppe $\mathcal{J}(\mathcal{W}(K))$. Zwei projektive Räume gleicher (endlicher) Dimension (≥ 2) mit K isomorph K' besitzen isomorphe Kollineationsgruppen.

Bemerkungen: (a) Wir führen ohne Beweis an: Bis "I" gelten die Aussagen auch für unendlichdimensionale Räume.

(b) Ein Beispiel eines projektiven Raumes der Dimension n über einem gegebenen Körper K ist der arithmetische projektive Raum $\Pi(\mathcal{W}^{n+1})$. Alle projektiven Räume Π (über Rechtsvektorräumen) mit $\dim \Pi = n$ ($3 \leq n < \infty$) und $K_\alpha = K$ sind nach Satz 5.2 zu $\Pi(\mathcal{W}^{n+1})$ isomorph. Zu jedem Algebraisierungskörper gibt es einen projektiven Desarguesraum vorgeschriebener Dimension n ($2 \leq n < \infty$).

(c) Satz 5.2 heißt der "Zweite Hauptsatz der projektiven Geometrie". Er gilt für jene projektiven Räume, die sich als projektive Räume über Vektorräumen darstellen lassen.

5.3. Korrelationen in projektiven Räumen über endlichdimensionalen Rechtsvektorräumen

Wir setzen i.f. stets $2 \leq \dim \mathbb{T}(\mathcal{W}) < \infty$ voraus.

Zwischenbemerkungen:

(1) Sei K ein (nicht notwendig kommutativer) Körper mit der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$. Aus K kann der "entgegengesetzte Körper aK " ("Antikörper") zu K konstruiert werden, indem man für die Menge aK setzt ${}^aK = K$ und die Operationen $+$ und $\cdot$ definiert durch:

$$a+b := a+b, \quad a \cdot b := b \cdot a \quad \forall a, b \in {}^aK.$$

Damit ist, wie man leicht sieht, aK ein Körper. Speziell für einen kommutativen Körper K gilt ${}^aK = K$.

(2) Sei $\mathcal{W}$ eine abelsche Gruppe, K ein Körper und $\mathcal{W}(K)$ ein Linksvektorraum mit dem skalaren Produkt $\cdot : K \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$.

Zum Linksvektorraum $\mathcal{W}(K)$ soll nun der "entgegengesetzte Vektorraum $\mathcal{W}({}^aK)$ " ("Antivektorraum") erklärt werden: Die Vektormenge $\mathcal{W}({}^aK)$ ist die Vektormenge $\mathcal{W}(K)$ und die Vektoradditionen in $\mathcal{W}({}^aK)$ und in $\mathcal{W}(K)$ stimmen überein; in $\mathcal{W}(K)$ wird eine skalare Multiplikation $\cdot : \mathcal{W} \times {}^aK \rightarrow \mathcal{W}$ definiert durch

$$\epsilon \cdot x := x \cdot \epsilon \quad \forall \epsilon \in \mathcal{W} \wedge \forall x \in K = {}^aK.$$

↑
skalare Mult. in $\mathcal{W}(K)$

Mit diesen beiden Operationen wird $\mathcal{W}({}^aK)$ ein Rechtsvektorraum über aK . Die Abbildung, die jedem $\epsilon \in \mathcal{W}(K)$ denselben Vektor $\epsilon \in \mathcal{W}({}^aK)$ zuordnet, ist ein Vektorraumisomorphismus, also gilt $\mathcal{W}(K) \cong \mathcal{W}({}^aK)$; man darf daher identifizieren.

Folgerungen:

1) Zum Linksvektorraum $\mathcal{W}(K)$ gehört der projektive Raum $\mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$, dessen Punkte die eindimensionalen Unterräume $K\epsilon$ mit $\epsilon \in \mathcal{W} \setminus \{0\}$ sind. Zum Rechtsvektorraum $\mathcal{W}({}^aK)$ gehört der projektive Raum $\mathbb{T}(\mathcal{W}({}^aK))$, dessen Punkte die eindimensionalen Unterräume ϵK mit $\epsilon \in \mathcal{W} \setminus \{0\}$ sind. Die Identifikation von $\mathcal{W}(K)$ und $\mathcal{W}({}^aK)$ bewirkt eine Identifikation von $\mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$ und $\mathbb{T}(\mathcal{W}({}^aK))$ gemäß $K\epsilon = \epsilon {}^aK$.

Ist $\mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$ ein projektiver Raum zum Rechtsvektorraum $\mathcal{W}(K)$, so gilt $K_{\text{alg}} \cong K$. Der duale projektive Raum $[\mathbb{T}(\mathcal{W}(K))]^*$ kann nach 5.1, Folg. 6 mit $\mathbb{T}(\mathcal{W}^*(K))$ identifiziert werden, wobei $\mathbb{T}(\mathcal{W}^*(K))$ ein projektiver Raum über dem Linksvektorraum $\mathcal{W}^*(K)$ ist. Dieser Linksvektorraum $\mathcal{W}^*(K)$ kann nach oben identifiziert werden mit dem Rechtsvektorraum $\mathcal{W}^*({}^aK)$, und $\mathbb{T}(\mathcal{W}^*({}^aK))$ kann mit $\mathbb{T}(\mathcal{W}^*(K))$ identifiziert werden. Für den Algebraisierungskörper K_{alg}^* von $[\mathbb{T}(\mathcal{W}(K))]^* = \mathbb{T}(\mathcal{W}^*(K)) = \mathbb{T}(\mathcal{W}^*({}^aK))$ gilt somit $K_{\text{alg}}^* \cong {}^aK$.

2) Sei $\delta: \mathbb{T}(\mathcal{W}(K)) \rightarrow [\mathbb{T}(\mathcal{W}'(K'))]^*$ eine Korrelation (vgl. 3.9). Nach Ausüben der beiden obigen Identifikationen ist δ eine Kollineation $\mathbb{T}(\mathcal{W}(K)) \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{W}^*({}^aK'))$, und auf δ kann somit der zweite Hauptsatz angewendet werden: Die Vektorräume $\mathcal{W}(K)$ und $\mathcal{W}^*({}^aK')$ sind Rechtsvektorräume und es gibt eine halblineare Bijektion ${}^a f: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}^*({}^aK')$ zum Körperisomorphismus ${}^a f: K \rightarrow {}^aK'$ mit $\delta = \alpha_f$.

Für ${}^a f$ gilt dabei

$$(\alpha + \eta) {}^a f = \alpha {}^a f + \eta {}^a f = \alpha {}^a f + \eta {}^a f, (\epsilon x) {}^a f = (\epsilon {}^a f) {}^a (x {}^a f) = (x {}^a f) \cdot (\epsilon {}^a f),$$

und für den Körperisomorphismus ${}^a f: K \rightarrow {}^aK'$ gilt

$$(x+y) {}^a f = x {}^a f + y {}^a f = x {}^a f + y {}^a f, (x \cdot y) {}^a f = x {}^a f \cdot y {}^a f = y {}^a f \cdot x {}^a f.$$

Wir haben also in ${}^a f$ auch eine bijektive Abbildung ${}^a f: K \rightarrow K'$, welche mit der Addition und der Multiplikation nach Vertauschen der Faktoren verträglich ist. Eine solche Abbildung heißt "Körper-antihomomorphismus", und ${}^a f$ heißt daher auch antihalblineare Abbildung $\mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}^*(K')$. Damit gilt: Jede Korrelation läßt sich durch eine antihalblineare Bijektion beschreiben und jede antihalblineare Bijektion beschreibt eine Korrelation.

3) Es existiert also genau dann eine Korrelation $\delta: \mathbb{T}(\mathcal{W}(K)) \rightarrow [\mathbb{T}(\mathcal{W}'(K'))]^*$; wenn es eine antihalblineare Bijektion ${}^a f: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}^*(K')$

gibt und eine solche existiert genau dann, wenn K und K' antiisomorph sind und $\text{Dim } \mathcal{W}(K) = \text{Dim } \mathcal{W}^*(K')$ gilt.

Speziell für $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$ muß K einen Antiautomorphismus gestatten, damit $\mathbb{T}(\mathcal{W})$ Korrelationen gestattet, denn es gilt stets $\text{Dim } \mathcal{W} = \text{Dim } \mathcal{W}^*$ (bei endlicher Dimension).

Ist K kommutativ, so gestattet K stets einen Antiautomorphismus, nämlich die Identität $\iota_K \Rightarrow$ jeder projektive Raum zu einem Vektorraum über einem kommutativen Körper K ($\Leftrightarrow \mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$ ist PP-Raum) gestattet korrelative Selbstabbildungen.

Speziell gilt: Gestattet $\mathcal{W}(K)$ eine korrelative Selbstabbildung ($\Leftrightarrow K$ gestattet einen Antiautomorphismus), dann gilt nach 3.9

$$\mathcal{W}(K) \cong [\mathcal{W}(K)]^* \Rightarrow \text{PGL}(\mathcal{W}(K)) \cong \text{PGL}([\mathcal{W}(K)]^*).$$

Wir führen ohne Beweis eine von H. KNEISER (1935) gefundene Aussage an: Es gibt nicht kommutative Körper, die keinen Antiautomorphismus gestatten. Hieraus folgt: Es gibt Desarguesräume, die keine Korrelation gestatten, also zu ihren Dualräumen nicht isomorph sind.

Bemerkungen: (a) Sind K und K' kommutative Körper und $\dim \mathcal{W}(K) = \dim \mathcal{W}(K')$, so existiert eine Korrelation $\mathcal{W}(K) \rightarrow [\mathcal{W}(K')]^*$ genau dann, wenn K und K' isomorph sind, da im kommutativen Fall jeder Antiisomorphismus ein Isomorphismus ist. Gibt es also im kommutativen Fall Kollineationen $\mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}(K')$, so gibt es auch Korrelationen.

(b) Zeichnet man in $\mathcal{W}$ bzw. $\mathcal{W}^*$ je eine Basis $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ bzw. $\{\pi^{*1}, \dots, \pi^{*n}\}$ aus ($2 \leq n < \infty$), so ist die antihalblineare Bijektion $\alpha_f: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}^*(K')$ zum Körperantiisomorphismus $\alpha_f: K \rightarrow K'$ durch die $(n+1, n+1)$ -Matrix (a'_{jk}) eindeutig festgelegt, welche durch $\pi_j \alpha_f = a'_{jk} \pi^{*k}$ bestimmt ist mit $a'_{jk} \in K'$. Die Koordinatendarstellung von α_f , welche $x = x_i \pi_i \rightarrow x \alpha_f = a'_j \pi^{*j}$ leistet, lautet wegen $x \alpha_f = (x^i \alpha_f) a'_{ik} \pi^{*k}$ dann

$$a'_k = (x^i \alpha_f) a'_{ik} \text{ mit } a'_{ik} \in K'.$$

Da α_f eine Bijektion ist, gilt $x \alpha_f = 0_{\mathcal{W}^*} \Leftrightarrow x = 0_{\mathcal{W}}$, also $(x^i \alpha_f) a'_{ik} = 0_{K'} \Rightarrow x^i = 0_K$; da $x^1 = \dots = x^n = 0_K$ gleichbedeutend ist mit $x^1 \alpha_f = \dots = x^n \alpha_f = 0_{K'}$, hat das System $x^i a'_{ik} = 0_{K'}$ nur die triviale Lösung und daher hat die Matrix (a'_{ik}) den linken Spaltenrang $n+1$.

Zu α_f gehört die Korrelation $\delta: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}^*(K')$, welche durch $X \delta = (x K) \delta = K'(x \alpha_f)$ bestimmt ist und daher bei festen Basen in $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}^*$ die Koordinatendarstellung

$$\delta a'_k = (x^i \alpha_f) a'_{ik} \text{ mit } \delta \in K' \setminus \{0_{K'}\}$$

besitzt.

Zwischenbemerkung:

Seien $\mathcal{W}(K)$ und $\mathcal{W}(K')$ Rechtsvektorräume und $\alpha_f: K \rightarrow K'$ ein Körperantiisomorphismus. Eine globale Abbildung $\sigma: \mathcal{W} \times \mathcal{W}' \rightarrow K'$, also $(\epsilon, \epsilon') \mapsto (\epsilon, \epsilon') \sigma$, heißt (linksseitige) Sesquilinearform zum Körperantiisomorphismus α_f , wenn sie folgende Gesetze erfüllt:

(1) $(\epsilon, \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2) \sigma = (\epsilon, \eta_1) \sigma y_1 + (\epsilon, \eta_2) \sigma y_2 \quad \forall \epsilon \in \mathcal{W}, \forall \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{W}', \forall y_1, y_2 \in K'.$

Kurz: " σ ist linear im zweiten Argument".

(2) $(\epsilon, x_1 + \epsilon_2 x_2, \eta) \sigma = (x_1 \alpha_f)(\epsilon, \eta) \sigma + (x_2 \alpha_f)(\epsilon, \eta) \sigma \quad \forall \eta \in \mathcal{W}', \forall \epsilon, \epsilon_2 \in \mathcal{W}, \forall x_1, x_2 \in K$

Kurz: " σ ist antihalblinear im ersten Argument".

Die linksseitige Sesquilinearform σ heißt nicht ausgeartet, wenn $(\epsilon, \eta) \sigma = 0_{K'} \quad \forall \eta \in \mathcal{W}' \Rightarrow \epsilon = 0_{\mathcal{W}} (*)$ und $(\epsilon, \eta) \sigma = 0_{K'} \quad \forall \epsilon \in \mathcal{W} \Rightarrow \eta = 0_{\mathcal{W}'} (**)$ gilt.

Für $\dim \mathcal{W} < \infty$ und $\dim \mathcal{W}' < \infty$ gilt $(*) \Leftrightarrow (*)$ (vgl. Folg. 4, Bem. b).
Bei uns genügt also der Nachweis der Richtigkeit von $(*)$, um σ als
nicht ausgeartet zu erkennen.

Speziell für $K=K'$ und $\alpha_f = 1_K$ ($\Rightarrow K$ kommutativ wegen $(xy)^{\alpha_f} =$
 $= y^{\alpha_f} \cdot x^{\alpha_f} \Rightarrow xy=yx$) spricht man statt von einer Sesquilinearform
zu 1_K von einer Bilinearform. Bilinearformen existieren also nur in
Vektorräumen über kommutativen Körpern.

Für nicht ausgeartete Sesquilinearformen gelten folgende Eigen-
schaften:

I. Ist $\alpha_f: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}'(K')$ eine antihalbbilineare Bijektion zum
Körperantiisomorphismus $\alpha_f: K \rightarrow K'$ mit $\dim \mathcal{W} < \infty$, dann ist

$$(\alpha, \eta')\sigma := \langle \alpha^a f, \eta' \rangle \in K'$$

eine nicht ausgeartete Sesquilinearform $\mathcal{W} \times \mathcal{W}' \rightarrow K'$ zum Körperanti-
isomorphismus α_f .

Bew.: Überprüfung von (1):

$$(\alpha, \eta'_1 y'_1 + \eta'_2 y'_2)\sigma \stackrel{\text{Def.}}{=} \langle \alpha^a f, \eta'_1 y'_1 + \eta'_2 y'_2 \rangle = \langle \alpha^a f, \eta'_1 y'_1 \rangle + \langle \alpha^a f, \eta'_2 y'_2 \rangle \stackrel{\text{Def.}}{=} (\alpha, \eta'_1)\sigma y'_1 + (\alpha, \eta'_2)\sigma y'_2.$$

Überprüfung von (2):

$$(\alpha, x_1 + x_2, \eta')\sigma \stackrel{\text{Def.}}{=} \langle (\alpha, x_1 + x_2)^a f, \eta' \rangle = \langle \alpha^a f, (\alpha, x_1 + x_2)^a f, \eta' \rangle \stackrel{\text{Def.}}{=} \langle \alpha^a f, (\alpha, x_1)^a f + (\alpha, x_2)^a f, \eta' \rangle = \langle \alpha^a f, (\alpha, x_1)^a f, \eta' \rangle + \langle \alpha^a f, (\alpha, x_2)^a f, \eta' \rangle \stackrel{\text{Def.}}{=} (\alpha, x_1)^a f (\alpha, \eta')\sigma + (\alpha, x_2)^a f (\alpha, \eta')\sigma.$$

Überprüfung von $(*)$:

$$(\alpha, \eta')\sigma = 0_{K'} \quad \forall \eta' \in \mathcal{W}' \stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} \langle \alpha^a f, \eta' \rangle = 0_{K'} \quad \forall \eta' \in \mathcal{W}' \stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} \alpha^a f = 0_{\mathcal{W}'} \stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} \alpha = 0_{\mathcal{W}}.$$

II. Für $\dim \mathcal{W}(K) = \dim \mathcal{W}'(K') < \infty$ gilt: Zu jeder nicht ausgearteten
Sesquilinearform $\sigma: \mathcal{W} \times \mathcal{W}' \rightarrow K'$ zum Körperantiisomorphismus

$\alpha_f: K \rightarrow K'$ existiert eine antihalbbilineare Bijektion

$\alpha_f: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}'(K')$ zu α_f so, daß gilt

$$(\alpha, \eta')\sigma = \langle \alpha^a f, \eta' \rangle.$$

Bew.: Wir definieren α_f :

Dem festen Vektor $\alpha \in \mathcal{W}$ werde durch α_f jene Abbildung $h_\alpha: \mathcal{W}' \rightarrow K'$
zugeordnet, welche dem beliebigen Vektor $\eta' \in \mathcal{W}'$ die Zahl

$(\alpha, \eta')\sigma \in K'$ zuordnet. Die Abbildung h_α ist linear, d.h. $h_\alpha \in \mathcal{W}'^*$,
denn es gilt

$$(\eta'_1 y'_1 + \eta'_2 y'_2)h_\alpha \stackrel{\text{Def.}}{=} (\alpha, \eta'_1 y'_1 + \eta'_2 y'_2)\sigma \stackrel{(1)}{=} (\alpha, \eta'_1)\sigma y'_1 + (\alpha, \eta'_2)\sigma y'_2 \stackrel{\text{Def.}}{=} (\eta'_1 h_\alpha) y'_1 + (\eta'_2 h_\alpha) y'_2.$$

α_f mit $\alpha \mapsto h_\alpha := \alpha^a f$ ist also eine Abbildung von $\mathcal{W}$ in $\mathcal{W}'^*$, wobei
nach Definition gilt $(\alpha, \eta')\sigma = \langle h_\alpha, \eta' \rangle = \langle \alpha^a f, \eta' \rangle$.

α_f ist antihalbbilinear zu α_f :

$$\begin{aligned} \alpha(x_1 + x_2, \eta') &= (\alpha, x_1 + x_2)^a f = (\alpha, x_1)^a f + (\alpha, x_2)^a f; \quad \forall \eta' \in \mathcal{W}' \text{ gilt } \eta' h_{\alpha(x_1 + x_2)} \stackrel{\text{Def.}}{=} \\ &= (\alpha, x_1 + x_2, \eta')\sigma \stackrel{(2)}{=} (\alpha, x_1)^a f (\alpha, \eta')\sigma + (\alpha, x_2)^a f (\alpha, \eta')\sigma \stackrel{\text{Def.}}{=} (\alpha, x_1)^a f (\eta' h_{\alpha(x_1)} + \\ &+ (\alpha, x_2)^a f (\eta' h_{\alpha(x_2)}) = [\text{nach Def. von } \cdot \text{ und } + \text{ in } \text{Hom}(\mathcal{W}', K')] = \\ &= \eta' [(x_1^a f) h_{\alpha(x_1)} + (x_2^a f) h_{\alpha(x_2)}] \Rightarrow \\ &= (\alpha, x_1 + x_2)^a f = h_{\alpha(x_1 + x_2)} = (x_1^a f) h_{\alpha(x_1)} + (x_2^a f) h_{\alpha(x_2)} = (\alpha, x_1)^a f (\alpha, \eta')\sigma + (\alpha, x_2)^a f (\alpha, \eta')\sigma. \end{aligned}$$

α_f ist regulär:

$$\alpha_f = 0_{\mathcal{W}'} \Rightarrow h_\alpha = 0_{\mathcal{W}'^*} \Rightarrow (\alpha, \eta')\sigma = 0_{K'} \quad \forall \eta' \in \mathcal{W}'. \text{ Da } \sigma \text{ nicht ausgeartet ist} \\ \Rightarrow \alpha = 0_{\mathcal{W}}.$$

4) Sei $\delta: \mathbb{T}(\mathcal{W}(K)) \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{W}'^*(K'))$ eine Korrelation, welche durch die antihalbbilineare Bijektion $\overset{a}{f}: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}'^*(K')$ beschrieben wird. Dem Punkt $X = \kappa K \in \mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$ wird durch δ die Hyperebene $X\delta = (\kappa K)\delta = \kappa'(\kappa \overset{a}{f}) = \mathbb{T}(\ker \kappa \overset{a}{f})$ zugeordnet. Der Punkt $Y' = \eta' K' \in \mathbb{T}(\mathcal{W}'^*(K'))$ heißt nach 3.9 konjugiert zu X , wenn gilt $Y' \notin X\delta \Leftrightarrow Y' \in \mathbb{T}(\ker \kappa \overset{a}{f}) \Leftrightarrow \langle \kappa \overset{a}{f}, \eta' \rangle = 0_{K'}$.

Nach der Eigenschaft I ist $\langle \kappa \overset{a}{f}, \eta' \rangle = (\kappa, \eta')\sigma$ eine nicht ausgeartete (linksseitige) Sesquilinearform zu $\overset{a}{f}$. Kurz: Konjugierte Lage in einer Korrelation wird durch das Verschwinden einer nicht ausgearteten Sesquilinearform beschrieben. Umgekehrt bestimmt dies konjugierte Lage in einer Korrelation, da jede nicht ausgeartete (linksseitige) Sesquilinearform nach Eigenschaft II eine antihalbbilineare Bijektion $\overset{a}{f}$ definiert.

Bemerkungen: (a) Alle Sesquilinearformen, welche die konjugierte Lage bezüglich einer festen Korrelation δ beschreiben, sind in K' linksproportional.

Bew.: Nach dem zweiten Hauptsatz beschreiben zwei antihalbbilineare Bijektionen $\overset{a}{f}$ und $\overset{a}{g}$ genau dann dieselbe Korrelation δ , wenn gilt $\overset{a}{g} = \overset{a}{f}j_a$ mit $j_a \in \mathcal{U}(\mathcal{W}'^*(K'))$. Zu $\overset{a}{f}j_a$ gehört gemäß Eigenschaft I die Sesquilinearform

$$(\kappa, \eta')\sigma = \langle \kappa(\overset{a}{f}j_a), \eta' \rangle = \langle \kappa \overset{a}{f}, \eta' \rangle = \langle \kappa \overset{a}{f}, \eta' \rangle \sigma.$$

σ ergibt sich also aus σ durch Linksmultiplikation mit $a \in K' \setminus \{0_{K'}\}$.

(b) Besitzt nach Auszeichnung von Basen $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ bzw. $\{\pi_1^{\prime\prime}, \dots, \pi_n^{\prime\prime}\}$ ($2 \leq n < \infty$) die Korrelation $\delta: \mathbb{T}(\mathcal{W}(K)) \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{W}'^*(K'))$ nach Folg. 3, Bem. b die Koordinatendarstellung $\delta a_k = (x^{\overset{a}{f}}) a_{jk}$ und bezeichnet $\{\pi_1^{\prime\prime}, \dots, \pi_n^{\prime\prime}\}$ jene Basis in $\mathcal{W}'$, deren duale Basis $\{\pi_1^{\prime\prime}, \dots, \pi_n^{\prime\prime}\}$ ist, so ist ein Punkt $Y' = \eta' K' \in \mathbb{T}(\mathcal{W}'^*(K'))$ genau dann konjugiert zu $X = \kappa K \in \mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$, wenn $\langle \kappa \overset{a}{f}, \eta' \rangle = (\kappa, \eta')\sigma = 0_{K'}$ gilt. Wegen $\langle a^{\prime\prime}, \pi_i^{\prime\prime} \rangle = (x^{\overset{a}{f}}) a_{jk} \langle \pi_i^{\prime\prime}, \pi_j^{\prime\prime} \rangle = (x^{\overset{a}{f}}) a_{jk} \delta_{ij}$ lautet die Koordinatendarstellung der Sesquilinearform zu δ :

$$(\kappa, \eta')\sigma = (x^{\overset{a}{f}}) a_{jk} \eta^k \text{ mit } a_{jk} \in K'.$$

Dabei hat (a_{jk}) den linken Spaltenrang $n+1$ und dies ist gleichbedeutend mit $(*)$, wie man aus $\eta' = \pi_i^{\prime\prime}$ ($i=1, \dots, n$), also $\eta^k = \delta_{ik}$ erkennt. Andererseits ist $(\ddagger)$ gleichbedeutend damit, daß (a_{jk}) den rechten Zeilenrang $n+1$ besitzt, wie man aus $\kappa \overset{a}{f} = \pi_i^{\prime\prime}$ ($i=1, \dots, n$), also $x^{\overset{a}{f}} = \delta_{ik}$ erkennt. Nach LA ist aber der linke Spaltenrang stets gleich dem rechten Zeilenrang.

Zwischenbemerkungen:

(1) Ist $\mathcal{W}'^*(K)$ der zu $\mathcal{W}(K)$ duale Vektorraum mit $\dim \mathcal{W}(K) < \infty$ und $\mathcal{W}^{**}(K)$ als Vektorraum der linearen Abbildungen $\mathcal{W} \rightarrow K$ der zu $\mathcal{W}'^*$ duale Vektorraum, so ist $j: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}^{**}$ ein Isomorphismus, wenn man definiert:

$$\langle \eta, \alpha^* \rangle := \langle \alpha^*, \eta \rangle \quad \forall \alpha^* \in \mathcal{W}'^*.$$

Durch j können $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}^{**}$ identifiziert werden.

(2) Ist $\alpha_f: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}'^*(K')$ eine halblineare Bijektion zum Körperisomorphismus $\alpha_f: K \rightarrow K'$, so gilt für die transponierte halblineare Bijektion $\alpha_f^T: \mathcal{W}'^{**}(K') \rightarrow \mathcal{W}^*(K)$ zum Körperisomorphismus $\alpha_f^{-1}: K' \rightarrow K$ nach Def. in 5.2 vor Folg. 8:

$$\langle \underbrace{\alpha'^{**} \alpha_f^T}_{\in \mathcal{W}^*}, \underbrace{\epsilon}_{\in K} \rangle = \langle \underbrace{\alpha'^{**}}_{\in \mathcal{W}'^{**}}, \underbrace{\epsilon \alpha_f}_{\in K'} \rangle \alpha_f^{-1}$$

Identifizieren wir $\mathcal{W}'$ und $\mathcal{W}'^{**}$ gemäß $\langle \eta' j, \alpha'^{**} \rangle = \langle \alpha'^{**}, \eta' \rangle$, so lautet die obige Bedingung mit $\alpha'^{**} = \eta' j = \eta'$:

$$\langle \eta'^{a_f T}, \epsilon \rangle = \langle \epsilon^{a_f}, \eta' \rangle \alpha_f^{-1}.$$

Faßt man $\alpha_f: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}'^*(K')$ als antihalblineare Bijektion zum Körperantihomomorphismus $\alpha_f: K \rightarrow K'$ auf, so heißt $\alpha_f^T: \mathcal{W}'(K') \rightarrow \mathcal{W}^*(K)$ die transponierte antihalblineare Bijektion.

5) Wird die Korrelation $\delta: \mathbb{T}(\mathcal{W}(K)) \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{W}'^*(K'))$ durch die antihalblineare Bijektion $\alpha_f: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}'^*(K')$ beschrieben, so wird die duale Korrelation $\delta^*: [\mathbb{T}(\mathcal{W}(K))]^{**} \xrightarrow{\alpha_f^T} \mathbb{T}(\mathcal{W}'(K')) \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{W}'^*(K'))$ durch die antihalblineare Bijektion $(\alpha_f^T)^{-1}: \mathcal{W}'^*(K') \rightarrow \mathcal{W}^*(K)$ beschrieben, d.h. es gilt: $\delta^* = (\alpha_f)^* = \alpha_{(a_f)^{-1}}$.

Bew.: Sei $K\alpha^* \in \mathbb{T}(\mathcal{W}^*(K))$, so gilt

$$(K\alpha^*)(\alpha_{a_f})^{**} = \{ \epsilon \in \mathbb{T}(\ker \alpha^*) \mid \langle \alpha^*, \epsilon \rangle = 0 \} \alpha_{a_f} = \{ (\epsilon K) \alpha_{a_f} = K'(\epsilon^{a_f}) \in \mathbb{T}(\mathcal{W}'^*(K')) \mid \langle \alpha^*, \epsilon \rangle = 0 \} = \{ K' \epsilon'^{**} \in \mathbb{T}(\mathcal{W}'^*(K')) \mid \langle \alpha^*, \epsilon'^{**} \alpha_f^{-1} \rangle = 0 \}.$$

Entsprechend der Definition von $(\alpha_f^T)^{-1}$ gilt (wir setzen dabei $\eta'^{a_f T} = \alpha^*$ und $\epsilon^{a_f} = \epsilon'^{**}$)

$$Q = \langle \alpha^*, \epsilon'^{**} \alpha_f^{-1} \rangle = \langle \epsilon'^{**}, \alpha^* (\alpha_f^T)^{-1} \rangle \alpha_f^{-1} \Leftrightarrow$$

$\langle \epsilon'^{**}, \alpha^* (\alpha_f^T)^{-1} \rangle = 0$; nach der Identifizierung von $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}^{**}$ ist $\alpha^* (\alpha_f^T)^{-1} \in \mathcal{W}$ eine Linearform über $\mathcal{W}^*$ und die letzte Gleichung ist gleichbedeutend mit $\epsilon'^{**} \in \ker \alpha^* (\alpha_f^T)^{-1}$. Somit gilt

$$(K\alpha^*)(\alpha_{a_f})^* = \{ K' \epsilon'^{**} \in \mathbb{T}(\mathcal{W}'^*(K')) \mid \epsilon'^{**} \in \ker \alpha^* (\alpha_f^T)^{-1} \} = \mathbb{T}(\ker \alpha^* (\alpha_f^T)^{-1}) \xrightarrow{\alpha_f^T} (\alpha^* (\alpha_f^T)^{-1}) K = (K\alpha^*) \alpha_{(a_f)^{-1}}.$$

dual zu Identifikation von 5.1,6

Dies gilt $\forall K\alpha^* \in \mathbb{T}(\mathcal{W}^*) \Rightarrow \delta^* = (\alpha_f)^* = \alpha_{(a_f)^{-1}}$.

Bemerkung: Zeichnet man in $\mathcal{W}$ bzw. $\mathcal{W}'$ je eine Basis $\{n_1, \dots, n_n\}$ bzw. $\{n'_1, \dots, n'_n\}$ aus $(2 \leq n < \infty)$ und ist $\{n^{**}_1, \dots, n^{**}_n\}$ bzw. $\{n'^{**}_1, \dots, n'^{**}_n\}$ die duale Basis in $\mathcal{W}^*$ bzw. $\mathcal{W}'^*$, ist ferner $a_k = (x^{i a_f}) a'_{ik}$ die Koordinatendarstellung von $\alpha_f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'^*$, so gilt für die transponierte antihalblineare Bijektion $\alpha_f^T: \mathcal{W}' \rightarrow \mathcal{W}^*$, welche $\epsilon' = n'_i x^{i'}$ überführt in $\epsilon'^{a_f T} = a_{ij} n^{**}_j$ gemäß der Def.: $\langle \epsilon'^{a_f T}, \epsilon \rangle = \langle a_{ij} n^{**}_j, \epsilon \rangle = \langle a_{ij} x^{i' a_f} \rangle = \langle (x^{i' a_f}) (a_{ij} \epsilon') \rangle \quad \forall x^{i' a_f} \in K \Rightarrow$
 $\langle \epsilon'^{a_f T}, \epsilon \rangle = \langle (x^{i' a_f}) a'_{ik} n^{**}_k, n'_j \rangle x^{j' a_f} = \langle x^{i' a_f} \rangle a'_{ik} x^{j' a_f}$
 $a_j = (x^{i' a_f}) (a'_{ik} \epsilon'^{j' a_f}).$

Ist (α^{ik}) mit $\alpha^{ij} a_{jk} = \delta_k^i$ die zu (a_{jk}) linksinverse Matrix, deren rechter Zeilenrang gleich dem linken Spaltenrang von (a_{jk}) , also gleich $n+1$ ist, so lautet die Koordinatendarstellung von $(\alpha^{ij})^{-1}: \mathcal{W}^* \rightarrow \mathcal{W}'$:
 $x^{ie} = \alpha^{ie} (a_j^e f)$.

Zu $(\alpha^{ij})^{-1}$ gehört die duale Korrelation $\delta^*: \mathbb{T}(\mathcal{W}^*(K)) \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{W}'(K'))$, welche daher in obigen Basen die Koordinatendarstellung

$$x^{ie} g^e = \alpha^{ie} (a_j^e f) \quad \text{mit } g^e \in K' \setminus \{0_{K'}\}$$

besitzt.

Zwischenbemerkung:

Sei $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$ mit $3 \leq \dim \mathcal{W} < \infty$ und $a_f: \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}^*(K)$ eine antihalblineare Bijektion zum Körperantiautomorphismus $a_f^*: K \rightarrow K$; die durch a_f bestimmte Korrelation $\delta: \mathbb{T}(\mathcal{W}(K)) \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{W}^*(K))$ wird durch die nichtausgeartete Sesquilinearform $(\epsilon, \eta)\sigma = (\epsilon^{a_f}, \eta)$ beschrieben. Die transponierte antihalblineare Bijektion $a_f^T: \mathcal{W}^*(K) = \mathcal{W}(K) \rightarrow \mathcal{W}^*(K)$ zum Körperantiautomorphismus $a_f^{*-1}: K \rightarrow K$ bestimmt dann ebenfalls eine Korrelation $\delta_{ad}: \mathbb{T}(\mathcal{W}(K)) \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{W}^*(K))$, für welche wegen $\langle \eta^{a_f^T}, \epsilon \rangle = \langle \epsilon^{a_f}, \eta \rangle^{a_f^{-1}}$ gilt $Y \delta_{ad} \tilde{X} \Leftrightarrow X \delta \tilde{Y}$. Diese "zu δ adjungierte Korrelation δ_{ad} " wird durch a_f^T bestimmt, und da $(a_f^T)^{-1}$ die duale Korrelation δ^* bestimmt, gilt $\delta_{ad} = \delta^{*-1}$. Konjugierte Lage in δ_{ad} wird durch die "zu σ adjungierte Sesquilinearform σ_{ad} " beschrieben, für welche gilt: $(\eta, \epsilon)\sigma_{ad} = ((\epsilon, \eta)\sigma)^{a_f^{-1}}$.

Bew.: $(\eta, \epsilon)\sigma_{ad} = \langle \eta^{a_f^T}, \epsilon \rangle = \langle \epsilon^{a_f}, \eta \rangle^{a_f^{-1}} = ((\epsilon, \eta)\sigma)^{a_f^{-1}}$. ◆

Bemerkung: Sind δ und δ' zwei Korrelationen $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}^*$ mit $Y \delta' \tilde{X} \Leftrightarrow X \delta \tilde{Y}$, so ist $\delta' = \delta_{ad}$. Nach der Zwischenbemerkung hat nämlich δ_{ad} diese Eigenschaft und mehr als eine Korrelation δ' kann nicht existieren, da $Y \delta'$ durch $Y \delta' = \{X \in \mathcal{P} \mid X \delta \tilde{Y}\}$ völlig bestimmt ist.

6) Eine Korrelation $\delta: \mathbb{T}(\mathcal{W}(K)) \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{W}^*(K))$ heißt nach 3.9 selbstadjungiert, wenn $\delta = \delta^{*-1} = \delta_{ad}$ gilt; genau die Polaritäten sind die selbstadjungierten Korrelationen. Eine Polarität ist somit dadurch gekennzeichnet, daß σ und σ_{ad} dieselbe Korrelation beschreiben:

$$(\epsilon, \eta)\sigma_{ad} = a(\epsilon, \eta)\sigma \quad \text{mit } a \in K \setminus \{0_K\} \Rightarrow$$

$$[(\epsilon, \eta)\sigma_{ad}]^{a_f} = (\eta, \epsilon)\sigma = [a(\epsilon, \eta)\sigma]^{a_f} = [(\epsilon, \eta)\sigma]^{a_f} \cdot (a^{a_f}).$$

Setzen wir $a_f = c \in K \setminus \{0_K\}$, so gilt

$$((\epsilon, \eta)\sigma)^{a_f} \cdot c = (\eta, \epsilon)\sigma.$$

Dies ist ein Kriterium dafür, daß die nicht ausgeartete Sesquilinearform $\sigma: \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow K$ eine Polarität beschreibt.

Diskussion:

Fall 1: Wir definieren für $2 \leq \dim \mathbb{T}(\mathcal{W}) < \infty$:

Unter einer Nullpolarität $\nu: \mathbb{T}(\mathcal{W}) \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{W}^*)$ versteht man eine Polarität, in der jeder Punkt selbstkonjugiert ist.

$\kappa \mathbb{K}$ konjugiert $\eta \mathbb{K} \iff (\kappa, \eta)\sigma = 0$,

$\kappa \mathbb{K}$ selbstkonjugiert $\forall \kappa \in \mathbb{T}(\mathcal{W}) \iff (\kappa, \kappa)\sigma = 0 \quad \forall \kappa \in \mathcal{W}$.

Aus $(\kappa, \kappa)\sigma = 0 \quad \forall \kappa \in \mathcal{W}$ folgt bei einer nicht ausgearteten Sesquilinearform, daß σ eine Bilinearform ist, d.h. $\overset{\text{a.f.}}{\text{a.f.}} = \iota_{\mathbb{K}}$.

Bew.: Vorauss. $\Rightarrow (\kappa + \eta, \kappa + \eta)\sigma = 0 \quad \forall \kappa, \eta \in \mathcal{W} \Rightarrow$

$$\underbrace{(\kappa, \kappa)\sigma}_{\stackrel{\text{a.f.}}{=0}} + (\kappa, \eta)\sigma + (\eta, \kappa)\sigma + \underbrace{(\eta, \eta)\sigma}_{\stackrel{\text{a.f.}}{=0}} = 0 \quad \forall \kappa, \eta \in \mathcal{W} \Rightarrow (\kappa, \eta)\sigma = -(\eta, \kappa)\sigma \quad (*).$$

σ nicht ausgeartet $\Rightarrow \exists (\kappa_0, \eta_0) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ mit $(\kappa_0, \eta_0)\sigma =: y \neq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (\kappa_0, \eta_0 \overset{\text{a.f.}}{\sigma^{-1}}) = 1 \quad (*)$.

Setzen wir dies in das Kriterium für eine Polarität ein, so erhalten wir:

$$\underbrace{[(\kappa_0, \eta_0 \overset{\text{a.f.}}{\sigma^{-1}})\sigma]}_{=1} \overset{\text{a.f.}}{c} = (\eta_0 \overset{\text{a.f.}}{\sigma^{-1}}, \kappa_0)\sigma \stackrel{(*)}{=} -(\kappa_0, \eta_0 \overset{\text{a.f.}}{\sigma^{-1}})\sigma \stackrel{(*)}{=} -1 \Rightarrow 1 \cdot c = -1 \Rightarrow c = -1.$$

Damit lautet das Kriterium:

$[(\kappa, \eta)\sigma] \overset{\text{a.f.}}{=} -(\eta, \kappa)\sigma = (\kappa, \eta)\sigma$. Hieraus folgt $\overset{\text{a.f.}}{\text{a.f.}} = \iota_{\mathbb{K}}$, denn σ ist surjektiv, d.h. jede Zahl von $\mathbb{K}$ wird durch $(\kappa, \eta)\sigma$ erfaßt:

(a) $a=0$, dann gilt nach Voraussetzung $(\kappa, \kappa)\sigma = 0 = a$;

(b) $a \neq 0: (\kappa_0, \eta_0 \overset{\text{a.f.}}{\sigma^{-1}} a)\sigma = (\kappa_0, \eta_0 \overset{\text{a.f.}}{\sigma^{-1}})\sigma a \stackrel{(*)}{=} 1 \cdot a = a$.

Bemerkungen: (a) $\exists \overset{\text{a.f.}}{\text{a.f.}}: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\overset{\text{a.f.}}{\text{a.f.}} = \iota_{\mathbb{K}} \Rightarrow \mathbb{K}$ kommutativ (vgl. Folg. 3). Nullpolaritäten gibt es also nur in PP-Räumen und die zugehörige Sesquilinearform σ ist eine Bilinearform.

(b) Eine Bilinearform σ mit $(\kappa, \kappa)\sigma = 0 \quad \forall \kappa \in \mathcal{W}$ heißt "alternierend". Im obigen Beweis wurde gezeigt: Ist $\mathbb{T}(\mathcal{W}(\mathbb{K}))$ ein projektiver Raum endlicher Dimension ≥ 2 , so existiert eine Nullpolarität genau dann, wenn $\mathbb{K}$ kommutativ ist und in $\mathcal{W}(\mathbb{K})$ eine alternierende nicht ausgeartete Bilinearform existiert.

(c) Eine Bilinearform σ mit $(\kappa, \eta)\sigma = -(\eta, \kappa)\sigma \quad \forall (\kappa, \eta) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ heißt "schiefsymmetrisch". Im obigen Beweis wurde gezeigt: Eine alternierende Bilinearform ist stets schiefsymmetrisch. Für $\text{Char } \mathbb{K} \neq 2$ ist umgekehrt jede schiefsymmetrische Bilinearform alternierend, da gilt $(\kappa, \eta)\sigma = -(\eta, \kappa)\sigma \Rightarrow (\kappa, \kappa)\sigma = -(\kappa, \kappa)\sigma \Rightarrow 2(\kappa, \kappa)\sigma = 0 \Rightarrow (\kappa, \kappa)\sigma = 0 \quad \forall \kappa \in \mathcal{W}$.

(d) Eine Bilinearform σ ist für K kommutativ genau dann schiefssymmetrisch, wenn sie nach Auszeichnung einer Basis in $\mathcal{W}(K)$ eine Koordinatendarstellung $(\alpha, \eta)\sigma = x^i a_{jk} y^k$ mit schiefssymmetrischer Matrix (a_{jk}) besitzt. Die Bedingung $(\alpha, \eta)\sigma + (\eta, \alpha)\sigma = 0$ ist, nämlich wegen K kommutativ gleichbedeutend mit $0 = x^i a_{jk} y^k + y^j a_{ik} x^k = x^i a_{jk} y^k + y^k a_{ki} x^i = x^i y^k (a_{jk} + a_{ki})$, und dies ist für alle $\alpha, \eta \in \mathcal{W}$ genau dann erfüllt, wenn $a_{jk} + a_{kj} = 0$ gilt.

(e) In einem klassischen projektiven Raum $\mathbb{P}_n(\mathcal{W}(K))$ endlicher Dimension ≥ 2 existiert eine Nullpolarität genau dann, wenn $\dim \mathbb{P}_n$ eine ungerade Zahl ist.

Bew.: (a) Nach Bem.c und d ist die Existenz einer Nullpolarität gleichbedeutend mit der Existenz einer nicht ausgearteten schiefssymmetrischen Bilinearform und nach Bem.d und Folg.4, Bem.b besitzt diese nach Auszeichnung einer Basis in $\mathcal{W}(K)$ eine Koordinatendarstellung mit einer schiefssymmetrischen Matrix (a_{jk}) , wobei der linke Spaltenrang wegen K kommutativ genau dann $n+1$ ist, wenn $\det(a_{jk}) \neq 0$ gilt. Spiegelt man die schiefssymmetrische Matrix

$$A = (a_{jk}) = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & \dots \\ -a_{01} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

an ihrer Hauptdiagonale, so erhält man die transponierte Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -a_{01} & \dots \\ a_{01} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & \dots \\ -a_{01} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = -A.$$

Nach LA ist $\det A = \det A^T \Rightarrow \det A = \det [(-1)A] = (-1)^{n+1} \det A$
 $\det A \neq 0 \Rightarrow (-1)^{n+1} = 1 \Rightarrow n+1$ ist gerade $\Rightarrow \dim \mathbb{P}(n) = n$ ist ungerade.

(b) Ist umgekehrt $\dim \mathbb{P}(n) = n$ ungerade $\Rightarrow \dim \mathcal{W} = n+1$ ist gerade $\Rightarrow$ es existiert eine reguläre schiefssymmetrische Matrix, z.B.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & & 0 \\ & \boxed{0} & \ddots & \\ & & \ddots & \boxed{1} \\ & & & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

$\frac{n+1}{2}$ Kästchen der Form $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, und A ist regulär wegen

$\det A = [\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}]^{\frac{n+1}{2}} = +1 \neq 0$. Die durch A bestimmte Bilinearform $(\alpha, \eta)\sigma = (x^0 y^1 - x^1 y^0) + (x^2 y^3 - x^3 y^2) + \dots + (x^{n-1} y^n - x^n y^{n-1})$ ist wegen $\det A \neq 0$ nicht ausgeartet und schiefssymmetrisch wegen $(\eta, \alpha)\sigma = -(\alpha, \eta)\sigma$. Gilt $\text{Char } K \neq 2$, so stellt σ eine nicht ausgeartete alternierende Bilinearform dar, welche eine Nullpolarität beschreibt.

Fall 2: Wir betrachten eine Polarität λ , die keine Nullpolarität ist. Dann existiert $X_0 \in \mathcal{P}$ mit $X_0 \not\sim X_0 \Rightarrow \exists \alpha_0 \in \mathcal{W} \setminus \{0\}$ mit $(\alpha_0, \alpha_0)\sigma = -1 \neq 0$. Durch $(\alpha, \eta)\tilde{\sigma} := (\alpha, \eta)\sigma \cdot \alpha_0^{-1}$ wird eine nicht ausgeartete Sesquilinearform $\tilde{\sigma}$ definiert mit $(\alpha_0, \alpha_0)\tilde{\sigma} = 1$ und $\tilde{\sigma}$ beschreibt ebenfalls λ . Da λ eine Polarität ist, gilt für $\tilde{\sigma}$ das eingangs hergeleitete Kriterium.

Speziell für $\alpha = \eta = \alpha_0$ folgt $\underbrace{[(\alpha_0, \alpha_0)\tilde{\sigma}]^2}_{=1} \cdot c = \underbrace{(\alpha_0, \alpha_0)\tilde{\sigma}}_{=1} \Rightarrow 1 \cdot c = 1 \Rightarrow c = 1$.

Wir schreiben i.f. statt $\tilde{\sigma}$ wieder σ und das Kriterium lautet somit:

$$[(\alpha, \eta)\sigma]^2 = (\eta, \alpha)\sigma \quad \forall \alpha, \eta \in \mathcal{W} \quad (*).$$

Eine Sesquilinearform σ zum Körperantiautomorphismus $\alpha f \in \mathcal{A}_K$, die (*) erfüllt, heißt "hermitesch"; eine Bilinearform $\sigma(\alpha f = \mathcal{A}_K)$, die (*), d.h. $(\epsilon, \eta)\sigma = (\eta, \epsilon)\sigma \quad \forall \epsilon, \eta \in \mathcal{W}$ erfüllt, heißt "symmetrische Bilinearform".

Notwendig und hinreichend für die Existenz von Nichtnullpolaritäten λ in $\mathbb{T}(\mathcal{W})$ ist die Existenz von nicht ausgearteten hermiteschen Sesquilinearformen oder symmetrischen nicht alternierenden Bilinearformen.

Bemerkungen: (a) Ist σ eine nicht ausgeartete hermitesche Sesquilinearform zum Körperantiautomorphismus $\alpha f (\Rightarrow \alpha f \in \mathcal{A}_K)$, so ist αf ein involutorischer Antiautomorphismus, d.h. $(\alpha f)^2 = \mathcal{A}_K \wedge \alpha f \in \mathcal{A}_K$.

Bew.: $[(\epsilon, \eta)\sigma]^{\alpha f} = (\eta, \epsilon)\sigma \Rightarrow [(\epsilon, \eta)](\alpha f)^2 = [(\eta, \epsilon)\sigma]^{\alpha f} = (\epsilon, \eta)\sigma$.
Hieraus folgt $(\alpha f)^2 = \mathcal{A}_K$, denn σ ist surjektiv:

(a) $a=0: (\epsilon, \sigma)\sigma = 0$.

(b) $a \neq 0$: Die hermitesche Sesquilinearform σ ist nicht alternierend, denn für eine solche gilt nach Fall 1 notwendig $\alpha f \in \mathcal{A}_K$.
Es existiert daher $\epsilon_0 \in \mathcal{W} \setminus \{0\}$ mit $(\epsilon_0, \epsilon_0)\sigma =: x_0 \neq 0 \Rightarrow$

$(\epsilon_0, \epsilon_0 \cdot x_0^{-1}a) = x_0 \cdot x_0^{-1}a = a$.

(b) Eine Sesquilinearform zum involutorischen Antiautomorphismus αf des (kommutativen oder nicht kommutativen) Körpers K ist genau dann hermitesch, wenn sie nach Auszeichnung einer Basis in $\mathcal{W}(K)$ eine Koordinatendarstellung $(\epsilon, \eta)\sigma = (x^i \alpha f) a_{jk} y^k$ mit $a_{jk} = a_{kj}^{\alpha f}$ besitzt. Die Bedingung $[(\epsilon, \eta)\sigma]^{\alpha f} = (\eta, \epsilon)\sigma$ ist nämlich wegen $[(x^i \alpha f) a_{jk} y^k]^{\alpha f} = (y^k \alpha f)(a_{jk} \alpha f) x^i = (y^i \alpha f)(a_{kj}^{\alpha f}) x^k$ gleichbedeutend mit $y^i \alpha f(a_{kj}^{\alpha f} - a_{jk}) x^k = 0$, und dies ist für alle $\epsilon, \eta \in \mathcal{W}$ genau dann erfüllt, wenn $a_{kj}^{\alpha f} = a_{jk}$ gilt.

(c) Eine Bilinearform σ ist für K kommutativ genau dann symmetrisch, wenn sie nach Auszeichnung einer Basis in $\mathcal{W}(K)$ eine Koordinatendarstellung $(\epsilon, \eta)\sigma = x^i a_{jk} y^k$ mit symmetrischer Matrix (a_{jk}) besitzt. Der Beweis stimmt mit jenem von Bem.b überein, wenn man dort αf durch $\mathcal{A}_K$ ersetzt.

(d) Ein projektiver Raum $\mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$ endlicher Dimension ≥ 2 mit K nicht kommutativ gestattet genau dann eine Nichtnullpolarität, wenn K einen involutorischen Antiautomorphismus gestattet.

Bew.: (a) Da für K nicht kommutativ keine Bilinearformen existieren, ist für die Existenz einer Nichtnullpolarität λ die Existenz einer nicht ausgearteten hermiteschen Sesquilinearform und damit nach Bem.a die Existenz eines involutorischen Körperantiautomorphismus notwendig.

(b) Ist $\alpha f: K \rightarrow K$ ein Körperantiautomorphismus, so definieren wir $\sigma: \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow K$ nach Auszeichnung einer Basis in $\mathcal{W}(K)$ durch die

Koordinatendarstellung $(x, y)\sigma := (x^i a^j f) \delta_{jk} y^k$. Diese Abbildung σ ist nach Bem.b wegen $\delta_{jk} = \delta_{kj}$ eine hermitesche Sesquilinearform und zwar nicht ausgeartet, weil der linke Spaltenrang der Einheitsmatrix (δ_{jk}) gleich $n+1$ ist. Jede nicht ausgeartete hermitesche Sesquilinearform beschreibt aber eine Nichtnullpolarität.

(e) Ein projektiver Raum $\mathbb{P}(\mathcal{W}(K))$ endlicher Dimension ≥ 2 mit K kommutativ gestattet stets durch eine symmetrische Bilinearform beschriebene Nichtnullpolaritäten und eine durch hermitesche Sesquilinearform beschriebene Nichtnullpolarität genau dann, wenn K einen involutorischen Automorphismus gestattet.

Bew.: (a) Definiert man nach Auszeichnung einer Basis in $\mathcal{W}(K)$ dann $(x, y)\sigma := x^i \delta_{jk} y^k$, so ist σ nach Bem.c wegen $\delta_{jk} = \delta_{kj}$ und $\det(\delta_{jk}) = 1 \neq 0$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform. Für jeden Basisvektor n_i ($i=0, \dots, n+1$) gilt $(n_i, n_i)\sigma = 1 \neq 0$ und daher ist σ nicht alternierend und beschreibt eine Nichtnullpolarität.

(b) Ist $f: K \rightarrow K$ ein involutorischer Körperautomorphismus, so ist wegen K kommutativ f auch ein involutorischer Körperantiautomorphismus und zu diesem kann nach Bem.d, Beweisteil (b) eine Nichtnullpolarität konstruiert werden.

(f) Für $\text{Char } K \neq 2$ ist eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform σ nicht alternierend ($\Leftrightarrow$ schiefssymmetrisch):
 (ind.) σ symmetrisch $\Rightarrow \sigma$ schiefssymmetrisch, d.h.:
 $(x, y)\sigma = (y, x)\sigma = -(y, x)\sigma \quad \forall x, y \in \mathcal{W} \Rightarrow 2(y, x)\sigma = 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{W} \xrightarrow{2 \neq 0} \Rightarrow (y, x)\sigma = 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{W} \Rightarrow \sigma$ ist ausgeartet: Widerspruch.
 Für $\text{Char } K = 2$ ist jede symmetrische Bilinearform auch schiefssymmetrisch und kann alternierend sein.

SATZ 5.3: Ein projektiver Raum $\mathbb{P}(\mathcal{W}(K))$ mit $3 \leq \dim \mathcal{W}(K) < \infty$ gestattet genau dann eine Korrelation auf einen projektiven Raum $\mathbb{P}(\mathcal{W}(K'))$, wenn die Räume gleiche Dimension haben und K' zu K antiisomorph ist. Eine Korrelation wird durch eine antihalblineare Bijektion beschrieben und bestimmt bis auf einen Linksfaktor aus $K' \setminus \{0_{K'}\}$ eine nicht ausgeartete Sesquilinearform σ , die genau für konjugierte Punkte verschwindet. Der projektive Raum $\mathbb{P}(\mathcal{W}(K))$ gestattet genau dann eine Korrelation, wenn K einen Antiautomorphismus gestattet, speziell kommutativ ist. Eine Korrelation von $\mathbb{P}(\mathcal{W}(K))$ ist genau dann eine Nullpolarität, wenn σ eine nicht ausgeartete

alternierende Bilinearform ist; für ihre Existenz ist K kommutativ notwendig, und in $\mathbb{T}_K(\mathcal{W}(K))$ existieren Nullpolaritäten genau dann, wenn $\dim \mathbb{T}_K$ ungerade ist. Eine Korrelation von $\mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$ ist genau dann eine Polarität verschieden von einer Nullpolarität, wenn σ eine nicht ausgeartete hermitesche Sesquilinearform oder eine symmetrische, nicht alternierende Bilinearform ist. Eine Polarität verschieden von einer Nullpolarität existiert genau dann, wenn K kommutativ ist oder wenn K nicht kommutativ ist, und einen involutorischen Antiautomorphismus gestattet.

5.4. Endlichdimensionale projektive Pappusräume über Rechtsvektorräumen

Im folgenden setzen wir stets $\mathcal{W}(K)$ als Rechtsvektorraum über dem kommutativen Körper K mit $3 \leq \dim \mathcal{W} < \infty$ voraus. Eine Kollineation $\alpha: \mathbb{T}(\mathcal{W}) \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{W})$ wird durch eine halblinare Bijektion $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ beschrieben. Wir wollen aus $\mathbb{P}L(\mathcal{W})$ jene Bijektionen herausuchen, die eine projektive Kollineation beschreiben. Diese Frage ist auch für K nicht kommutativ sinnvoll; da wir jedoch nur über projektive Kollineationen in PP-Räumen zusätzliche Aussagen gemacht haben, beschränken wir uns auf diesen Sonderfall.

Bemerkung: Für K kommutativ existiert nur der triviale innere Körperautomorphismus, d.h. $j_a = \iota_a \forall a \in K \setminus \{0\}$, und es gilt $\mathcal{J}(\mathcal{W})$ ist ein Normalteiler von $GL(\mathcal{W})$ (vgl. 5.2, Folg. 5, Bem. c). Wird α durch eine lineare Bijektion f beschrieben, so sind alle halblinaren Bijektionen g , die ebenfalls α beschreiben, linear, denn es gilt: $\alpha_f = \alpha_g = \alpha \iff g = f j_a$ und g ist halblinear zu $\tilde{g} = f j_a = f \iota_a = f$. Im kommutativen Fall gilt also:

Wird eine projektive Kollineation durch eine lineare Bijektion beschrieben, so wird sie nur durch lineare Bijektionen beschrieben. Weiters gilt:

In einem PP-Raum über einem endlichdimensionalen Vektorraum ist eine Kollineation α genau dann projektiv, wenn jede sie beschreibende halblinare Bijektion f linear ist, d.h.

$$\alpha_f \in \text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{W})) \iff f \in GL(\mathcal{W}).$$

Bew.: (a) $\alpha = \alpha_f \in \text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{W})) \Rightarrow \alpha = \alpha_1 \dots \alpha_k$ (k endlich), wobei die α_i perspektive Kollineationen sind.

Wir zeigen zuerst, daß für $\alpha = \alpha_f$ (f_1 halblinare Bijektion zu f_1) gilt $\tilde{f}_1 = \iota_{f_1}$. Die perspektive Kollineation α_1 besitzt eine Achse, und diese enthält sicher eine Punktreihe $\mathcal{P}_{P,VP_1}$ und daher ist $\alpha|_{\mathcal{P}_{P,VP_1}} = \iota$. Wegen $q_1 K = P_0 + P_1 = q_1 K$ gilt $\{q_1, q_1\}$ l.u.; für jeden Punkt $X = xK \in \mathcal{P}_{P,VP_1} \setminus \{P_1\}$ ist die Darstellung $x = q_1 + q_1 x$ eindeutig (vgl. 5.1, Folg. 4).

$(\kappa K)\kappa_i = (\kappa K)\kappa_i = (\kappa f_1)K$; da κ_i die Punkte P_0, P_1 und X festläßt gilt

$$\left. \begin{aligned} q_i K &= (q_i K)\kappa_i = (q_i f_1)K \\ q_i K &= (q_i f_1)K \\ \kappa K &= (\kappa f_1)K \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists a_0, a_1, a_x \in K \setminus \{0\} \text{ mit } \begin{cases} q_0 a_0 = q_0 f_1, \\ q_1 a_1 = q_1 f_1, \\ \kappa a_x = \kappa f_1. \end{cases}$$

$$\kappa f_1 = (q_0 + q_1 x) f_1 = q_0 a_0 + q_1 a_1 (x f_1) = \kappa a_x = q_0 a_x + q_1 x a_x.$$

Wegen $\{q_i, q_j\}$ l.u. ist $a_x = a_0 \forall x \in K$, also $a_0 = a_x = a_1 =: a_{(i)} \in K \setminus \{0\} \Rightarrow x a_{(i)} = a_{(i)} (x f_1) \Rightarrow a_{(i)}^{-1} x a_{(i)} = x f_1 \forall x \in K \Rightarrow f_1 = j_{a_{(i)}}$.

Jede perspektive Kollineation κ_i wird also durch eine halblineare Bijektion f_1 beschrieben, wobei $f_1: x \mapsto a_{(i)}^{-1} x a_{(i)}$ ein innerer Automorphismus ist. Die projektive Kollineation $\kappa = \kappa_0 \dots \kappa_k$ wird daher durch das Produkt $f_1 \dots f_k = f$ zum Automorphismus

$$f: x \mapsto a_0^{-1} \dots a_k^{-1} x a_k \dots a_0, \text{ also } x \mapsto a^{-1} x a \text{ mit } a = a_{(0)} a_{(1)} \dots a_{(k)} \text{ beschrieben.}$$

Da K kommutativ ist folgt $f = \text{id}$, und f ist eine lineare Bijektion.

(b) Sei $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ eine lineare Bijektion. $P_0 = q_0 K, P_1 = q_1 K$ und $E = (q_0 + q_1) K$ sind für $\{q_i, q_j\}$ l.u. paarweise verschiedene kollineare Punkte $\Rightarrow P_0 \kappa_i = (q_i f) K, P_1 \kappa_i = (q_i f) K, E \kappa_i = [(q_0 + q_1) f] K$ sind kollinear und paarweise verschieden. Da ein PP-Raum vorliegt, gilt der Fundamentalsatz, also existiert genau eine Projektivität $\bar{\alpha}$ mit

$$P_0 \bar{\alpha} = P_0 \kappa_i, P_1 \bar{\alpha} = P_1 \kappa_i, E \bar{\alpha} = E \kappa_i. \text{ Nach 3.6, Folg. 6 existiert eine projektive Kollineation } \alpha: \Pi(\mathcal{W}) \rightarrow \Pi(\mathcal{W}) \text{ mit } \alpha|_{P.P.V.P.} = \bar{\alpha}.$$

Die Abbildung $\gamma := \kappa_i \alpha^{-1}$ ist eine Kollineation aus $P \Gamma L(\Pi(\mathcal{W}))$ und γ leistet $P_0 \gamma = (P_0 \kappa_i) \alpha^{-1} = (P_0 \kappa_i) \bar{\alpha}^{-1} = P_0, P_1 \gamma = P_1, E \gamma = E$.

Nach Beweisschritt (a) wird α^{-1} durch eine lineare Bijektion h ($h = \iota_K$) beschrieben: $\alpha^{-1} = \kappa_h$. Nach Voraussetzung wird κ durch die lineare Bijektion f beschrieben: $\kappa = \kappa_f \Rightarrow \gamma = \kappa_i \alpha^{-1} = \kappa_i \kappa_h = \kappa_{f \circ h}$ wird durch die lineare Bijektion $f \circ h =: g$ beschrieben.

$$X = \kappa K \in \mathcal{P}_{P.V.P.} \setminus \{P_1\} \Rightarrow \kappa = q_0 + q_1 x \Rightarrow X \gamma = (\kappa K) \kappa_i = (\kappa g) K = [(q_0 + q_1 x) g] K = [q_0 g + (q_1 g) x] K. \text{ Außerdem gilt für } \gamma:$$

$$\left. \begin{aligned} P_0 \gamma &= (q_0 g) K = P_0 = q_0 K \\ P_1 \gamma &= (q_1 g) K = P_1 = q_1 K \\ E \gamma &= [(q_0 + q_1) g] K = E = (q_0 + q_1) K \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists a_0, a_1, a_E \in K \setminus \{0\} \text{ mit } \begin{cases} q_0 a_0 = q_0 g, \\ q_1 a_1 = q_1 g, \\ (q_0 + q_1) a_E = (q_0 + q_1) g. \end{cases}$$

$$(q_0 + q_1) g = q_0 g + q_1 g = q_0 a_0 + q_1 a_1 = q_0 a_E + q_1 a_E.$$

Wegen $\{q_i, q_j\}$ l.u. ist $a_0 = a_E \wedge a_1 = a_E \Rightarrow a_0 = a_1 = a_E =: a \in K \setminus \{0\}$.

Daher gilt $X \gamma = [q_0 g + (q_1 g) x] K = (q_0 a + q_1 a x) K = (q_0 a + q_1 x a) K = [(q_0 + q_1 x) a] K = (q_0 + q_1 x) K = X \forall X \in \mathcal{P}_{P.V.P.} \setminus \{P_1\}$; für P_1 gilt ebenfalls $P_1 \gamma = P_1 \Rightarrow \gamma|_{P.V.P.} = \text{id}$.

Nach Satz 3.7 sind in einem endlichdimensionalen Desarguesraum die projektiven Kollineationen genau jene Kollineationen, deren Beschränkung auf eine Punktreihe projektiv ist; da $\iota_{P.V.P.}$ eine Projektivität ist, ist γ eine projektive Kollineation.

$$\gamma = \kappa_i \alpha^{-1} \Rightarrow \kappa_i = \gamma \alpha \text{ mit } \gamma, \alpha \in \text{PGL}(\Pi) \Rightarrow \kappa_i \in \text{PGL}(\Pi).$$

Bemerkung: Aus Beweisschr. a folgt: In einem Desarguesraum $\mathbb{T}(\mathcal{W}(\mathbb{K}))$ wird eine projektive Kollineation stets durch eine halblineare Bijektion zu einem inneren Automorphismus beschrieben. Da mit f zu $f: x \mapsto a^{-1}xa$ ($a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$) auch $f|_{\mathcal{W}}$ dieselbe Kollineation beschreibt gilt: In jedem De-Raum wird eine projektive Kollineation auch durch eine lineare Bijektion beschrieben.

Folgerungen:

1) Für den surjektiven Gruppenhomomorphismus $\mu: \text{GL}(\mathcal{W}) \rightarrow \text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{W}))$ mit $f \mapsto \mu_f$ (vgl. 5.2; Folg. 7) ist $\mu|_{\text{GL}(\mathcal{W})}$ bei kommutativen Körper $\mathbb{K}$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\text{GL}(\mathcal{W}) \rightarrow \text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{W}))$. Der Kern von $\mu|_{\text{GL}(\mathcal{W})}$ ist $\text{Ker } \mu \cap \text{GL}(\mathcal{W}) \stackrel{5.1, 6.1}{=} \mathcal{J}(\mathcal{W}) \cap \text{GL}(\mathcal{W}) = \mathcal{J}(\mathcal{W})$, denn im kommutativen Fall ist $\mathcal{J}(\mathcal{W}) \subset \text{GL}(\mathcal{W})$, und zwar ein Normalteiler von $\text{GL}(\mathcal{W})$ (vgl. 5.2, Folg. 7). Nach dem Homomorphiesatz für Gruppen gilt $\text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{W})) \cong \text{GL}(\mathcal{W}) / \mathcal{J}(\mathcal{W})$. Diese Aussage ist im nicht kommutativen Fall wegen $\mathcal{J}(\mathcal{W}) \not\subset \text{GL}(\mathcal{W})$ sinnlos.

2) Gestattet ein Körper $\mathbb{K}$ nur den trivialen Automorphismus, so ist $\mathbb{K}$ notwendig kommutativ, da dann auch jeder innere Automorphismus $x \mapsto a^{-1}xa \quad \forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ die Identität ist. Daher gilt:

Gestattet ein Körper $\mathbb{K}$ nur den trivialen Automorphismus, so ist jede halblineare Bijektion von $\mathcal{W}(\mathbb{K})$ linear, d.h. $\text{PL}(\mathcal{W}(\mathbb{K})) = \text{GL}(\mathcal{W}(\mathbb{K}))$ und daher jede Kollineation von $\mathbb{T}(\mathcal{W}(\mathbb{K}))$ projektiv, d.h. $\text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{W}(\mathbb{K}))) = \text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{W}(\mathbb{K})))$.

Beispiel: Der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen gestatten nur den trivialen Automorphismus.

Bew.: Für einen Körperisomorphismus $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$, also insbesondere für einen Körperautomorphismus $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ gilt notwendig:

(1) $0\sigma = 0$ (2) $1\sigma = 1$, (3) $(-a)\sigma = -(a\sigma)$ (4) $(a^{-1})\sigma = (a\sigma)^{-1}$.

(a) Sei σ ein Automorphismus von $\mathbb{Q}$.

1. Schritt: a natürliche Zahl $\Rightarrow$

$a = 1+1+\dots+1 =: n \Rightarrow a\sigma = (1+1+\dots+1)\sigma \stackrel{2)}{=} 1\sigma + \dots + 1\sigma = n \cdot 1 = n = a$.

2. Schritt: a negative ganze Zahl $\Rightarrow$

$a = -(1+1+\dots+1) = -n \Rightarrow a\sigma = (-n)\sigma \stackrel{3)}{=} -(n\sigma) = -n = a$.

3. Schritt: a rational $\Rightarrow$

$a = p \cdot q^{-1}$ mit p, q ganz $\wedge q \neq 0$ und p, q o.B.d.A. teilerfremd $\Rightarrow$

$a\sigma = (p \cdot q^{-1})\sigma \stackrel{4)}{=} p\sigma \cdot (q^{-1})\sigma \stackrel{4)}{=} p\sigma \cdot (q\sigma)^{-1} \stackrel{1, 2, 3)}{=} \frac{p\sigma}{q\sigma} = \frac{p}{q} = a$.

$\forall a \in \mathbb{Q}$ gilt $a\sigma = a \Rightarrow \sigma = \text{id}_{\mathbb{Q}}$.

(b) Sei σ ein Automorphismus von $\mathbb{R}$.

$\forall a \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ gilt nach (a): $a\sigma = a$.

Der Körper $\mathbb{R}$ ist bezüglich der Relation $\geq$ linear geordnet (geordneter Körper; vgl. 7.1); weiters gelten folgende zwei Eigenschaften: Jede positive reelle Zahl ist Quadrat einer reellen Zahl ($^+$) (euklidischer Körper).

Für jede positive reelle Zahl a und für jede beliebige natürliche Zahl n gilt: Es gibt eine natürliche Zahl m mit $m-1 \leq na < m$ ($^+$).

Dies zilt, weil $\mathbb{R}$ ein archimedischer Körper ist (vgl. 2.4 Bem.).

Seien nun $a, b \in \mathbb{R}$, $\neq$ mit $b > a$ (o.B.d.A.) $\Rightarrow$
 $b-a > 0 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $b-a=c^2 \Rightarrow$
 $(b-a)\sigma = b\sigma - a\sigma = (c \cdot c)\sigma = c\sigma \cdot c\sigma = (c\sigma)^2 > 0$.
 $b\sigma - a\sigma > 0 \Rightarrow b\sigma > a\sigma$. Der Automorphismus σ ist also notwendig
 monoton, d.h. $b > a \Rightarrow b\sigma > a\sigma$. (*) $\wedge \sigma$ monoton $\Rightarrow$ für $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0 \wedge$
 $\wedge$ für jede natürliche Zahl n existiert eine natürliche Zahl m mit
 $(m-1)\sigma \leq (an)\sigma < m\sigma \stackrel{(*)}{\Rightarrow} m-1 \leq a\sigma \cdot n < m$. Daraus und aus (*) folgt
 $|a\sigma \cdot n - a \cdot n| < 1 \Rightarrow n \cdot |a\sigma - a| < 1$. Aus der indirekten Annahme
 $a\sigma \neq a$ würde $n < \frac{1}{|a\sigma - a|}$ folgen, was jedoch im Widerspruch dazu steht,
 daß n in (*) beliebig gewählt werden darf. Also ist nur $a\sigma = a$
 $\forall a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ möglich (*).
 Ist $a \in \mathbb{R} \wedge a < 0 \Rightarrow s := -a$ mit $s \in \mathbb{R} \wedge s > 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} s\sigma = s \Rightarrow a\sigma = (-s\sigma) =$
 $= -s = a \stackrel{(**)}{=} a$.
 (**) $\wedge$ (***) $\Rightarrow a\sigma = a \quad \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \sigma = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

Bemerkung: Wie man aus dem Beweis erkennt, gestattet jeder (kommutative) geordnete Körper ($\Rightarrow \text{Char } K = 0$, vgl. 7.1), der euklidisch und archimedisch ist, nur den trivialen Automorphismus.

Gegenbeispiel: Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen gestattet einen nicht trivialen Automorphismus; die Bijektion $z = a+ib \mapsto \bar{z} = a-ib$ ist ein solcher, denn es gilt $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ und $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$. In den projektiven Räumen $\mathbb{P}(\mathcal{W}(\mathbb{C}))$ gibt es also auch nicht projektive Kollineationen.

3) Sei $\mathcal{W}(K)$ ein Rechtsvektorraum über dem kommutativen Körper K mit $3 \leq \dim \mathcal{W} < \infty$. Die Punkte $q_1, K = P_0$ und $q_2, K = P_1$ und $(q_1 + q_2), K = E$ mit $\{q_1, q_2\}$ l.u. sind paarweise verschieden und kollinear.
 $P_i := \mathcal{P}_{P_0, P_i}$, $P_i := \mathcal{P}_{P_0, P_i} \setminus \{P_i\}$. Nach 5.1, Folg. 4 ist für jeden Punkt $X = x \in K \in P_i$ die Darstellung $x = q_1 + q_2 \cdot x$ ($x \in K$) eindeutig, und die Zuordnung $\mu: X \mapsto x(x \in K)$ ist eine Bijektion, ja sogar ein Körperisomorphismus $\{P_i, +, \cdot\} = K_{\text{alg}} = K$.

DEF. 5.4a: Seien $A = aK$, $B = bK$, $C = cK$, $X = xK$ vier kollineare Punkte in $\mathbb{P}(\mathcal{W}(K))$ mit A, B, C paarweise verschieden $\wedge A \neq X$. Werden durch Umnormung a und b so gewählt, daß $a = b$ gilt, und wird c so gewählt, daß $c = ax + b$ gilt, so heißt $x \in K$ das Doppelverhältnis $DV(A, B, C, X)$ der vier Punkte.

Bemerkungen: (a) In Vektorschreibweise gilt $DV(aK, bK, (a+b)K, (ax+b)K) = x$.

(b) Das Doppelverhältnis ist eine Eigenschaft der Punkte in $\mathbb{P}(K)$ und nicht der ausgewählten Vektoren.

Bew.: $aa' = a'$, $bb' = b'$, $cc' = c'$, $c\lambda = c'$ ($abc\lambda \neq 0$).
 $a = c'c^{-1} = a'a^{-1} + b'b^{-1} \Rightarrow c' = \tilde{a} + \tilde{b}$ mit $\tilde{a} = a'ca^{-1} = ac$, $\tilde{b} = b'cb^{-1} = bc$.
 $c = c'\lambda^{-1} = ax + b = \tilde{a}xc^{-1} + \tilde{b}c^{-1} \Rightarrow c' = \tilde{a}x\lambda c^{-1} + \tilde{b}\lambda c^{-1}$.
 $c'K = (\tilde{a}x\lambda c^{-1} + \tilde{b}\lambda c^{-1})K = (\tilde{a}x + \tilde{b})K \Rightarrow DV(a'K, b'K, c'K, c'K) = x$.

(c) Benützt man A als U , B als O , C als E für eine Algebraisierung auf $\mathcal{P}_{AB}$, so ist $\mu: X(x \in K_{\text{alg}}) \mapsto DV(A, B, C, X) = x(x \in K)$ ein Körperisomorphismus nach 5.1, Folg. 4 und daher eine Bijektion. Wir nennen $DV(A, B, C, X) = x$ eine "inhomogene projektive Reihen-koordinate" in $\mathcal{P}_{AB}$. Wegen $X(x \in \mathcal{P}_{AB} \setminus \{A\}) = (ax + b)K$ mit $x \neq 0$

ist $x = x_0 x_1^{-1}$, d.h. $x \in K$ läßt sich als Verhältnis der "homogenen projektiven Reihenkoordinaten" x_0, x_1 schreiben.

- (d) Sonderfälle: $DV(A, B, C, C) = 1_K$ wegen $1 = \alpha + 0$.
 $DV(A, B, C, B) = 0_K$ wegen $0 = \alpha + \alpha$.

(e) In Erweiterung der Def. 5.4a definieren wir:

DEF. 5.4b: $DV(A, B, C, A) := \infty$ für A, B, C paarweise verschieden und kollinear.

Dieses Symbol ∞ ist kein Element von K und daher ist $\bar{\mu}: \rho_{AB} \rightarrow K \cup \{\infty\}$ mit $\bar{\mu}|_{\rho_{AB}} = \mu$ und $A\bar{\mu} = \infty$ eine Bijektion.
 Wegen $A = (\alpha x_1 + \beta 0)K$ ist $\infty = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{0}$ für $x_1 \in K \setminus \{0\}$.
 $K \cup \{\infty\}$ ist kein Körper.

- (f) Es gilt: $H(A, B; C, X) \iff DV(A, B, C, X) = -1$.

Bew.: Zu den Punkten $A=U$, $B=O$ und $C=E$ konstruiert man den vierten harmonischen Punkt X entsprechend der nebenstehenden Inzidenztabelle unter Benützung des Vierecks $\{1, \dots, 4\}$. Man erkennt daraus

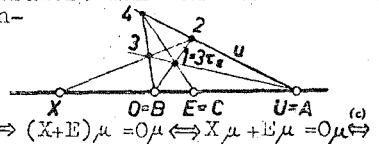
$$H(A, B; C, X) \iff X \tau_1 = O \iff X + E = O.$$

Nach 5.1, Folg. 4 ist μ ein Körper-

isomorphismus $\rho_{AB} \rightarrow K$, also gilt $X + E = O \iff (X+E)\mu = 0\mu \iff X\mu + E\mu = 0\mu \iff$

$$DV(A, B, C, X) + DV(A, B, C, C) = \underbrace{DV(A, B, C, B)}_{\substack{\text{Sym. 4} \\ = 0}} \iff$$

$$DV(A, B, C, X) = -1.$$



- (g) Sind A, B, C, D, E fünf kollineare Punkte mit A, B, C paarweise verschieden und A, B, D paarweise verschieden und $A \neq E$, so gilt $DV(A, B, C, D) \cdot DV(A, B, D, E) = DV(A, B, C, E)$.

"Multiplikationsformel für das Doppelverhältnis".

Bew.: $A = \alpha K$, $B = \beta K$ und wir normieren so, daß $C = (\alpha + \beta)K$ gilt.

$$D = \delta K = (\alpha + \beta)K \implies DV(A, B, C, D) = d \cdot d + 0 \text{ wegen } B \neq D.$$

$$E = eK = (\alpha + \beta)K \implies DV(A, B, C, E) = e.$$

Um $DV(A, B, D, E)$ zu bestimmen, normen wir um:

$$\alpha d =: \tilde{\alpha}, \quad \beta e =: \tilde{\beta} \implies \delta = \alpha + \beta \implies e = \alpha e + \beta = \tilde{\alpha} e d^{-1} + \tilde{\beta} \implies DV(A, B, D, E) = e d^{-1}.$$

Insgesamt gilt daher

$$DV(A, B, C, D) \cdot DV(A, B, D, E) = d e d^{-1} = e = DV(A, B, C, E).$$

- (h) Seien $A = \alpha K$, $B = \beta K$, $C = \gamma K$ und $D = \delta K$ vier kollineare Punkte mit A, B, C paarweise verschieden und $A \neq D \implies 1 = \alpha \lambda_0 + \beta \lambda_1$ mit $\lambda_0, \lambda_1 \neq 0$ $\delta = \alpha \mu_0 + \beta \mu_1$ mit $\mu_1 \neq 0$.

Um hieraus $DV(A, B, C, D)$ zu berechnen, normen wir um:

$$\alpha \lambda_0 =: \tilde{\alpha}, \quad \beta \lambda_1 =: \tilde{\beta} \implies 1 = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \implies \delta = \alpha \mu_0 + \beta \mu_1 = \tilde{\alpha} \lambda_0^{-1} \mu_0 + \tilde{\beta} \lambda_1^{-1} \mu_1.$$

$$D = (\tilde{\alpha} \mu_0 \lambda_0^{-1} + \tilde{\beta} \mu_1 \lambda_1^{-1})K \implies$$

$$DV(A, B, C, D) = \mu_0 \lambda_0^{-1} \lambda_1 \mu_1^{-1} = \frac{\mu_0}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_1}{\mu_1}.$$

Wir wollen eine noch allgemeinere Formel für das Doppelverhältnis herleiten: Auf der Punktreihe $\{P, Q, R, S\}$ mit $qK = P+Q = rK (\Rightarrow \{q, r\} \text{ l.u.})$ sind die vier Punkte

$A = \alpha K = (q a_0 + q a_1)K$, $B = \beta K = (q b_0 + q b_1)K$, $C = \gamma K = (q c_0 + q c_1)K$,
 $D = \delta K = (q d_0 + q d_1)K$ gegeben mit A, B, C paarweise verschieden und $A \neq D$. Die Punkte A, B, C, D haben also bezüglich $P = qK$, $Q = rK$, $E = (q+r)K$ die homogenen Reihenkoordinaten $a_0 : a_1$, $b_0 : b_1$, $c_0 : c_1$, $d_0 : d_1$.

Zwei Punkte A, B mit den homogenen Reihenkoordinaten $a_0 : a_1$ bzw. $b_0 : b_1$ sind genau dann verschieden, wenn:

$\{q a_0 + q a_1, q b_0 + q b_1\} \text{ l.u.} \Leftrightarrow \text{aus } (q a_0 + q a_1)\lambda + (q b_0 + q b_1)\mu = 0 \text{ folgt } (\lambda, \mu) = (0, 0) \Leftrightarrow \text{das homogene Gleichungssystem } a_0\lambda + b_0\mu = 0, a_1\lambda + b_1\mu = 0$
 gestattet nur die triviale Lösung $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_0 b_1 - a_1 b_0 \neq 0$.

Wir drücken zuerst q und r als Linearkombinationen von α und β aus:
 $q = \alpha p_0 + \beta p_1 = (q a_0 + q a_1)p_0 + (q b_0 + q b_1)p_1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 1 = a_0 p_0 + b_0 p_1 \\ 0 = a_1 p_0 + b_1 p_1 \end{cases} \Rightarrow p_0 = \frac{b_1}{a_0 b_1 - a_1 b_0} =: \frac{b_1}{\Delta}, p_1 = \frac{-a_1}{a_0 b_1 - a_1 b_0} = \frac{-a_1}{\Delta} \Rightarrow q = \alpha \frac{b_1}{\Delta} - \beta \frac{a_1}{\Delta}.$$

Ebenso: $r = \alpha q_0 + \beta q_1 = (q a_0 + q a_1)q_0 + (q b_0 + q b_1)q_1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 0 = a_0 q_0 + b_0 q_1 \\ 1 = a_1 q_0 + b_1 q_1 \end{cases} \Rightarrow r = -\alpha \frac{b_0}{\Delta} + \beta \frac{a_0}{\Delta}.$$

$$1 = q c_0 + r c_1 = \left(\alpha \frac{b_1}{\Delta} - \beta \frac{a_1}{\Delta}\right) c_0 + \left(-\alpha \frac{b_0}{\Delta} + \beta \frac{a_0}{\Delta}\right) c_1 = \alpha \frac{1}{\Delta} (b_1 c_0 - b_0 c_1) + \beta \frac{1}{\Delta} (-a_1 c_0 + a_0 c_1),$$

$=: \lambda_0 = 0$ wegen $B+C$ $=: \lambda_1 = 0$ wegen $C+A$

$$\delta = q d_0 + r d_1 = \frac{1}{\Delta} (b_1 d_0 - b_0 d_1) + \frac{1}{\Delta} (-a_1 d_0 + a_0 d_1) =: \mu_0 = 0 \text{ wegen } B+D \text{ } \mu_1 = 0 \text{ wegen } D+A$$

Nach obiger Formel gilt: $DV(A, B, C, D) = \frac{\mu_0}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_1}{\mu_1} \Rightarrow$

$$DV(A, B, C, D) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}}.$$

Anwendung: Wie ändert sich der Wert von $DV(A, B, C, D)$ bei Änderung der Reihenfolge der Punkte?

(I) Vertauschen der Elemente im zweiten Paar führt das Doppelverhältnis δ in seinen Reziprokwert δ^{-1} über (trivial).

(II) Gleichzeitiges Vertauschen im ersten und zweiten Paar ändert das Doppelverhältnis nicht (trivial).

(III) Vertauschen des mittleren Paares führt δ in den Wert $1-\delta$ über:

$$1 - DV(A, B, C, D) = 1 - \frac{(a_0 c_1 - a_1 c_0)(b_0 d_1 - b_1 d_0)}{(b_0 c_1 - b_1 c_0)(a_0 d_1 - a_1 d_0)}.$$

$$\text{Nun ist } [(b_0 c_1 - b_1 c_0)(a_0 d_1 - a_1 d_0) - (a_0 c_1 - a_1 c_0)(b_0 d_1 - b_1 d_0)] =$$

$$= [-(a_0 b_1 - a_1 b_0)(c_0 d_1 - c_1 d_0)] \Rightarrow$$

$$1 - DV(A, B, C, D) = \frac{(a_1 b_1 - a_0 b_0)(c_0 d_1 - c_1 d_0)}{(c_0 b_1 - c_1 b_0)(a_0 d_1 - a_1 d_0)} = DV(A, C, B, D).$$

Vier paarweise verschiedene Punkte A, B, C, D gestatten insgesamt $4! = 24$ Anordnungen. Jede Anordnung kann aus der Anordnung (A, B, C, D) durch Vertauschungen gewonnen werden, die sich als Zusammensetzungen von (I), (II) und (III) ergeben, z.B.

$$\begin{aligned} DV(A, B, C, D) &= \delta \xrightarrow{(I)} DV(B, A, D, C) = \delta \xrightarrow{(II)} DV(B, A, C, D) = \delta^{-1} \xrightarrow{(III)} DV(B, C, A, D) = 1 - \delta^{-1} \\ &\xrightarrow{(I)} DV(C, B, D, A) = 1 - \delta^{-1} \xrightarrow{(II)} DV(C, D, B, A) = 1 - (1 - \delta^{-1}) = \delta^{-1} \xrightarrow{(III)} DV(C, D, A, B) = \delta. \end{aligned}$$

Damit gilt:

(IV) Vertauschen des ersten Paares mit dem zweiten Paar ändert das Doppelverhältnis nicht.

Unter Benützung von (I)-(IV) kann für alle 24 Anordnungen von vier paarweise verschiedenen Punkten das Doppelverhältnis berechnet werden (in der Übersicht ist das Symbol DV weggelassen):

$$\begin{aligned} (A, B, C, D) &= (B, A, D, C) = (D, C, B, A) = (C, D, A, B) = \delta \\ (A, B, D, C) &= (B, A, C, D) = (C, D, B, A) = (D, C, A, B) = \delta^{-1} \\ (A, C, B, D) &= (C, A, D, B) = (D, B, C, A) = (B, D, A, C) = 1 - \delta \\ (A, C, D, B) &= (C, A, B, D) = (B, D, C, A) = (D, B, A, C) = (1 - \delta)^{-1} \\ (A, D, B, C) &= (D, A, C, B) = (C, B, D, A) = (B, C, A, D) = 1 - \delta^{-1} \\ (A, D, C, B) &= (D, A, B, C) = (B, C, D, A) = (C, B, A, D) = 1 - (1 - \delta)^{-1} \end{aligned}$$

Diese sechs Werte $\delta, \delta^{-1}, 1 - \delta, (1 - \delta)^{-1}, 1 - \delta^{-1}, 1 - (1 - \delta)^{-1}$ mit $\delta \in K \setminus \{0, 1\}$ müssen nicht alle verschieden sein; z.B. bei harmonischer Lage treten nur die Werte $-1, 2, \frac{1}{2}$ auf.

4) Wird die Kollineation $\alpha: \Pi(\mathcal{W}(K)) \rightarrow \Pi(\mathcal{W}(K'))$ durch die halblineare Bijektion f zu $\tilde{f}$ dargestellt, so gilt

$$DV(A, B, C, D)\tilde{f} = DV(A\alpha, B\alpha, C\alpha, D\alpha) \text{ für } A, B, C \text{ pw. verschieden und } A \neq D.$$

Definieren wir zusätzlich $\omega\tilde{f} = \alpha$, so stimmt die Aussage auch für $A = D$.

Bew.: $A = \alpha K, B = \beta K, C = \gamma K = (\alpha\lambda + \beta\mu)K$ mit $\{\alpha, \beta\}$ l.u. und $\lambda\mu \neq 0$.

Umnormung ergibt $\alpha\lambda =: \tilde{\alpha}, \beta\mu =: \tilde{\beta} \Rightarrow A = \tilde{\alpha}K, B = \tilde{\beta}K, C = (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})K$.

$D = \delta K$ kollinear A, B, C und o.B.d.A. $D + A \Rightarrow \delta = \tilde{\alpha}x + \tilde{\beta}$ mit $x = DV(A, B, C, D)$.

$$A\alpha = (\tilde{\alpha}K)\alpha = (\tilde{\alpha}f)K' =: \alpha'K', B\alpha = (\tilde{\beta}f)K' =: \beta'K'.$$

$C\alpha = [(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})f]K' = (\tilde{\alpha}f + \tilde{\beta}f)K' = (\alpha' + \beta')K'$, also ist bereits richtig normiert.

$$\begin{aligned} D\alpha &= (\delta f)K' = [(\tilde{\alpha}x + \tilde{\beta})f]K' = [(\tilde{\alpha}f)(xf) + (\tilde{\beta}f)]K' = [\alpha'(xf) + \beta']K' \Rightarrow \\ DV(A\alpha, B\alpha, C\alpha, D\alpha) &= xf = DV(A, B, C, D)\tilde{f}. \end{aligned}$$

5) In einem projektiven Raum $\Pi(\mathcal{W}(K))$ mit $3 \leq \dim \mathcal{W} < \infty$ und K kommutativ gilt: Genau die doppelverhältnistreuen Kollineationen sind die projektiven Kollineationen. Jede Projektivität ist

doppelverhältnistreue. Jede doppelverhältnistreue Bijektion $\rho_g \rightarrow \rho_h$ ist eine Projektivität.

Bew.: (a) $x \in \text{PGL}(\Pi(\eta)) \Rightarrow x = x_f$ mit f linear, d.h. $f = \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \Rightarrow x$ erhält das Doppelverhältnis.

(b) $\alpha: \rho_g \rightarrow \rho_h$ ist eine Projektivität $\Rightarrow$

α läßt sich zu einer projektiven Kollineation $\bar{\alpha}$ fortsetzen (vgl. 3.6, Folg. 6), d.h. $\bar{\alpha}|_{\rho_g} = \alpha$ und es gilt $DV(A\alpha, B\alpha, C\alpha, D\alpha) = DV(A\bar{\alpha}, B\bar{\alpha}, C\bar{\alpha}, D\bar{\alpha}) = DV(A, B, C, D)$.

(c) Sei $\alpha: \rho_g \rightarrow \rho_h$ eine doppelverhältnistreue Bijektion. Auf g existieren drei paarweise verschiedene Punkte $A, B, C \xrightarrow{\alpha} A\alpha, B\alpha, C\alpha \in \rho_h$ sind paarweise verschieden. Da in $\Pi_{pp} (\Leftrightarrow K \text{ kommutativ})$ der Fundamentalsatz gilt, existiert genau eine Projektivität β mit $A\beta = A\alpha, B\beta = B\alpha, C\beta = C\alpha$. Wendet man auf einen Punkt $X \in \rho_g$ die Bijektion α bzw. β an, so gilt nach Voraussetzung bzw. nach (b):

$$\left. \begin{aligned} DV(A, B, C, X) &\stackrel{(*)}{=} DV(A\alpha, B\alpha, C\alpha, X\alpha) \\ DV(A, B, C, X) &\stackrel{(**)}{=} DV(A\beta, B\beta, C\beta, X\beta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{mit } A\beta = A\alpha, B\beta = B\alpha, C\beta = C\alpha \text{ dann}$$

$$DV(A\alpha, B\alpha, C\alpha, X\alpha) = DV(A\alpha, B\alpha, C\alpha, X\beta).$$

Da das Doppelverhältnis eine inhomogene Reihencoordinate ist (vgl. Folg. 3, Bem. c), wird die Lage eines Punktes Y bezüglich der Punkte $A\alpha, B\alpha, C\alpha$ eindeutig durch $DV(A\alpha, B\alpha, C\alpha, Y)$ bestimmt $\Rightarrow X\alpha = X\beta \quad \forall X \in \rho_g \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \alpha$ ist eine Projektivität.

(d) Ist x eine doppelverhältnistreue Kollineation $\Rightarrow$

$x|_{\rho_g}: \rho_g \rightarrow \rho_h$ ist eine doppelverhältnistreue Bijektion $\stackrel{(*)}{=} x|_{\rho_g}$ ist eine Projektivität. Da nach Voraussetzung Π endlichdimensional und desarguessch ist, ist nach Satz 3.7 x eine projektive Kollineation.

Bemerkungen: (a) Die Aussage von Beweisschritt (c) kann abgeschwächt werden. Wir haben im Beweis nämlich nur benützt, daß α eine globale Abbildung ist, welche drei bestimmte pw. verschiedene Punkte A, B, C auf drei paarweise verschiedene Punkte $A\alpha, B\alpha, C\alpha$ abbildet, und daß α doppelverhältnistreue ist. Daß α eine Bijektion ist, braucht man nicht zu fordern.

(b) Wir wollen eine andere Abschwächung von (c) diskutieren. Sei $\alpha: \rho_g \rightarrow \rho_h$ eine Bijektion, welche harmonische Lage erhält, d.h. es gilt $H(A, B; C, D) \Rightarrow H(A\alpha, B\alpha; C\alpha, D\alpha)$ für alle harmonischen Quadrupeln. Logisch gleichwertig in Π_{pp} ist nach Folg. 3, Bem. f die Forderung: $DV(A, B, C, D) = -1 \Rightarrow DV(A\alpha, B\alpha, C\alpha, D\alpha) = -1$. Wir fragen: Unter welchen Bedingungen folgt aus der Invarianz der harmonischen Lage die Invarianz des Doppelverhältnisses, sodaß α dann eine Projektivität ist?

Eine Bijektion $\alpha: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_h$ in $\Pi(\mathcal{W}(K))$ mit K kommutativ, welche harmonische Lage erhält, ist eine Projektivität, wenn K nur den trivialen Automorphismus gestattet und $\text{Char } K \neq 2$ gilt.

Bew.: In $\mathcal{P}_3$ existieren drei paarweise verschiedene Punkte $A = aK, B = bK, C = cK$ und es gelte o.B.d.A. $c = a + b$. Nach 5.1, Folg. 4 ist dann $\mu: \mathcal{P}_3 \setminus \{A\} \rightarrow K$ mit $X = xK (x \in \mathcal{P}_3 \setminus \{A\}) \mapsto x \in K$ für $x = ax + b$ ein Körperisomorphismus $\mathcal{P}_3 \setminus \{A\} \rightarrow K$, wenn zur Algebraisierung $A=U, B=O, C=E$ verwendet werden. Die Bijektion $\alpha: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_h$ leistet $A\alpha = a'K, B\alpha = b'K, C\alpha = c'K$ mit $c' = a' + b'$ (o.B.d.A.) und $X\alpha = (a'x' + b')K$ für $X \in \mathcal{P}_3 \setminus \{A\}$, wobei $\mu': \mathcal{P}_h \setminus \{A'\} \rightarrow K$ mit $X\alpha (\in \mathcal{P}_h \setminus \{A'\}) \mapsto x' \in K$ ebenfalls ein Körperisomorphismus $\mathcal{P}_h \setminus \{A'\} \rightarrow K$ ist. Die Abbildung $f := \mu'^{-1} \alpha \mu: K \rightarrow K$ ist eine Bijektion, wobei nach Def. 5.4a gilt: $x' = DV(A\alpha, B\alpha, C\alpha, X\alpha) = x = DV(A, B, C, X)f$. Wir beweisen zunächst, daß f ein Körperautomorphismus ist.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_3 & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{P}_h \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu' \\ K & \xrightarrow{f} & K \end{array}$$

Aus $X\mu = x = y\mu$ folgt $\frac{x+y}{2} = \mu^{-1}(x, y)$, sodaß $X, Y, \frac{X+Y}{2} = (\frac{x+y}{2})\mu^{-1}$ drei paarweise verschiedene Punkte mit den homogenen Reihenkoordinaten $(1:x), (1:y), (1:\frac{x+y}{2})$ bezüglich A, B, C sind; zusammen mit $A(0:1)$ liefert Folg. 3, Bem. h

$$DV(X, Y, \frac{X+Y}{2}, A) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & \frac{x+y}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & \frac{x+y}{2} \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{vmatrix}} = -1 \Rightarrow H(X, Y, \frac{X+Y}{2}, A)$$

und damit nach Voraussetzung $H(X\alpha, Y\alpha, (\frac{X+Y}{2})\alpha, A\alpha)$. Andererseits haben $X\alpha = x\mu'^{-1}, Y\alpha = y\mu'^{-1}, \frac{X+Y}{2}\alpha = (\frac{x+y}{2})\mu'^{-1}$ bezüglich $A\alpha, B\alpha, C\alpha$ wegen $f = \mu'^{-1}\alpha\mu$ die Reihenkoordinaten $(1:xf)$ bzw. $(1:yf)$ bzw. $(1:\frac{x+y}{2}f)$, was zusammen mit $A\alpha(0:1)$ analog zu oben liefert $DV(X\alpha, Y\alpha, \frac{X+Y}{2}\alpha, A\alpha) = -1 \Rightarrow H(X\alpha, Y\alpha, \frac{X+Y}{2}\alpha, A\alpha)$. Da ein Desarguesraum vorliegt, gilt $(\frac{x+y}{2})\alpha = \frac{X\alpha + Y\alpha}{2}$ und wegen $\mu f \mu^{-1} = \alpha$ somit $(\frac{x+y}{2})\alpha = (\frac{x+y}{2})\mu f \mu^{-1} = (\frac{x+y}{2})f \mu^{-1} = \frac{x\mu + y\mu}{2} \mu^{-1} \Rightarrow (\frac{x+y}{2})f = \frac{x+y}{2}$.

Da diese Gleichung für $x=y$ trivialerweise gilt, ist sie für alle $x, y \in K$ gültig.

Wegen $X=B \Rightarrow X\alpha=B\alpha$ ist $0f=0$ und mit $y=0$ daher $(\frac{x}{2})f = \frac{x}{2}$ für $x \neq 0$; diese letzte Gleichung gilt aber auch für $x=0$ und damit für alle $x \in K$. Dann ist $(\frac{x+y}{2})f = \frac{(x+y)f}{2}$ und daher $(x+y)f = xf + yf \quad \forall x, y \in K$; f ist also ein Isomorphismus der additiven Gruppe $\{K, +\}$, sodaß $(-x)f = -(xf)$ gilt.

Aus $x \neq 0, 1$ und $\text{Char } K \neq 2$ folgt $x \neq -x \neq -x+1$, sodaß die Punkte $X=x\mu^{-1}, -X=(-x)\mu^{-1}, C=1\mu^{-1}$ paarweise verschieden sind, und die Punkte $X, -X, C, X^2=(x^2)\mu^{-1}$ haben bezüglich A, B, C die homogenen Reihenkoordinaten $(1:x), (1:-x), (1:1), (1:x^2)$. Nach Folg. 3, Bem. h gilt

$$DV(-X, X, C, X^2) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x & x^2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x & x^2 \end{vmatrix}} = -1 \Rightarrow H(-X, X, C, X^2)$$

und damit nach Voraussetzung $H((-X)\alpha, X\alpha, C\alpha, (X^2)\alpha)$. Andererseits haben $(-X)\alpha = (-x)\mu'^{-1}, X\alpha = x\mu'^{-1}, X^2\alpha = (x^2)\mu'^{-1}$ bezüglich $A\alpha, B\alpha, C\alpha$ wegen $f = \mu'^{-1}\alpha\mu$ homogene Reihenkoordinaten $(1:(-x)f), (1:xf), (1:1), (1:(xf)^2)$, was zusammen mit $(-x)f = -(xf)$ analog zu oben liefert $DV((-X)\alpha, X\alpha, C\alpha, (X^2)\alpha) = -1 \Rightarrow H((-X)\alpha, X\alpha, C\alpha, (X^2)\alpha)$. Da ein Desarguesraum vorliegt, gilt $(X^2)\alpha = (X\alpha)^2$ und wegen $\mu f \mu^{-1} = \alpha$ somit $(X^2)\alpha = X^2\mu'^{-1} = x^2 f \mu'^{-1} = (X\alpha)^2 = (xf)^2 \mu'^{-1} \Rightarrow x^2 f = (xf)^2$.

Diese Gleichung gilt wegen $0f=0$ und $1f=1$ (wegen: $X=C \Rightarrow X\alpha=C\alpha$) für alle $x \in K$. Damit erhält man:

$$\begin{aligned} [(x+y)^2]f &= (x^2+xy+xy+y^2)f = (x^2)f + (xy)f + (xy)f + (y^2)f \Rightarrow (xy)f = (xf)(yf) \\ [(x+y)f]^2 &= (xf+yf)^2 = (xf)^2 + (xf)(yf) + (xf)(yf) + (yf)^2 \quad \forall x,y \in K; \end{aligned}$$

f ist also ein Körperautomorphismus.

Nach Vor. gestattet K nur den trivialen Automorphismus $\Rightarrow f = 1$.
Dann ist aber $DV(A, B, C, X) = DV(A, B, C, X) \quad \forall A, B, C, X \in \mathcal{P}_2$ mit
 A, B, C pw. verschieden, sodaß die Bijektion α doppelverhältnis-
treu und daher eine Projektivität ist. $\blacklozenge$

Insbesondere gestatten $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}$ nur den trivialen Automorphismus,
also gilt: Eine Bijektion: $\mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ in $\Pi(\mathcal{W}(\mathcal{Q}))$ bzw. $\Pi(\mathcal{W}(\mathcal{R}))$, welche
harmonische Lage erhält, ist eine Projektivität (Für $K=\mathbb{R}$ ist dies
der "Satz von STAUDT").

(c) In einem endlichdimensionalen PP-Raum $\Pi(\mathcal{W})(K)$
ist eine Projektivität $\alpha: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ eindeutig durch $A \mapsto A', B \mapsto B',$
 $C \mapsto C'$ festgelegt. Für $g = PVQ = (gK) \vee (gK)$ haben A, B, C bezüglich
 gK, gK und $(g+g)K$ die homogenen Reihenkoordinaten $(a_0:a_1)$ bzw.
 $(b_0:b_1)$ bzw. $(c_0:c_1)$; analog sind für $h = RV S = (hK) \vee (hK)$ bezüglich
 $(hK), (hK), (h+g)K$ die homogenen Reihenkoordinaten von A', B', C'
dann $(a'_0:a'_1), (b'_0:b'_1), (c'_0:c'_1)$ und $(x_0:x_1)$ bzw. $(x'_0:x'_1)$ von X bzw. $X\alpha$.
Nach Folg. 5 ist die Projektivität α doppelverhältnistreue, also
gilt $DV(A, B, C, X) = DV(A', B', C', X')$, woraus mit Folg. 3, Bem. h folgt:

$$\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 & x_0 \\ b_1 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_0 & c'_0 \\ a'_1 & c'_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b'_0 & x'_0 \\ b'_1 & x'_1 \end{vmatrix}.$$

Durch Ausmultiplizieren und Umbezeichnung entsteht die Bilinearform

$$\alpha_{00}x_0x'_0 + \alpha_{01}x_0x'_1 + \alpha_{10}x_1x'_0 + \alpha_{11}x_1x'_1 = 0 \quad \alpha_{jk} \in K \quad (*).$$

Durch Auflösen nach den Reihenkoordinaten von $X\alpha$ erhält man

$$x'_0 : x'_1 = -(\alpha_{01}x_0 + \alpha_{11}x_1) : (\alpha_{00}x_0 + \alpha_{10}x_1) \quad (*).$$

Da α eine Bijektion ist, muß eindeutige Auflösung nach $x_0:x_1$

möglich sein, woraus $\begin{vmatrix} -\alpha_{01} & -\alpha_{11} \\ \alpha_{00} & \alpha_{10} \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{vmatrix} = \det(\alpha_{ik}) \neq 0$ folgt.

Die Bilinearform (*) besitzt also nicht verschwindende Determinante
und ist daher nicht ausgeartet.

Umgekehrt beschreibt eine Bilinearform (*) mit nicht verschwindender
Determinante eine Projektivität. Die Bilinearform (*) ist mit (*)
gleichwertig und (*) beschreibt eine Bijektion $\alpha: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$, da die
Determinante nicht verschwindet. Um α als Projektivität zu erkennen,
führen wir in $\Pi(\mathcal{W})$ eine Basis so ein, daß $g = \pi_0, g = \pi_1$ ist; dann
gilt für $X(\in \mathcal{P}_2) = (x_0:x_1)K = (\pi_0x_0 + \pi_1x_1)K$, also $X = (x_0, x_1, 0, \dots, 0)K$.
Ebenso gilt in einer zweiten Basis mit $h = \pi_0, h = \pi_1$, für $X'(\in \mathcal{P}_2) = (x'_0:x'_1)K =$
 $= (\pi_0x'_0 + \pi_1x'_1)K$, also $X' = (x'_0, x'_1, 0, \dots, 0)K$. Damit sind
 $(x_0:x_1)$ bzw. $(x'_0:x'_1)$ homogene Reihenkoordinaten $(x_0:x_1)$ bzw.
 $(x'_0:x'_1)$ in $\mathcal{P}_2$ bzw. $\mathcal{P}_2$.

Unter Benützung dieser Basen ist

$$\bar{\alpha}: (x^0, x^1, \dots, x^n)K \mapsto (-x^0, -\alpha_{00}x^0 - \alpha_{01}x^1, \alpha_{00}x^0 + \alpha_{01}x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)K$$

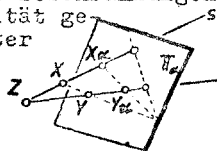
$$\text{wegen } \begin{vmatrix} \alpha_{00} & -\alpha_{01} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\alpha_{01} & -\alpha_{11} \\ \alpha_{00} & \alpha_{10} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{eine projektive Kollineation}$$

$\Pi(\mathcal{W}) \rightarrow \Pi(\mathcal{W})$ und wegen $\bar{\alpha}|_{\mathcal{P}_2} = \alpha$ ist α eine Projektivität.

(d) Ist $\alpha: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$ eine hyperbolische Projektivität im FP-Raum $\mathbb{P}(\mathcal{W}(K))$ mit den beiden Fixpunkten F_1, F_2 , so gilt für alle Punkte $X \in \mathcal{P}_3 \setminus \{F_1, F_2\}$
 $DV(F_1, F_2, X, X\alpha) = \text{konst}$ ("charakteristisches Doppelverhältnis der Projektivität α ").

Bew.: Seien $X, Y \in \mathcal{P}_3 \setminus \{F_1, F_2\}$. Ist α projektiv $\stackrel{\text{Fol. 5}}{\Rightarrow} \alpha$ ist Doppelverhältnistreue, d.h.
 $DV(F_1, F_2, X, Y) = DV(F_1, F_2, X\alpha, Y\alpha)$. Nach Folg. 3, Bem. 8 gilt:
 $DV(F_1, F_2, X, Y) \cdot DV(F_1, F_2, Y, X\alpha) = DV(F_1, F_2, X, X\alpha) \cdot DV(F_1, F_2, Y, Y\alpha)$ } Da die linken Seiten
 $DV(F_1, F_2, Y, X\alpha) \cdot DV(F_1, F_2, X\alpha, X) = DV(F_1, F_2, Y, Y\alpha) \cdot DV(F_1, F_2, X\alpha, X)$ } übereinstimmen $\Rightarrow$
 $DV(F_1, F_2, X, X\alpha) = DV(F_1, F_2, Y, Y\alpha) \quad \forall X, Y \in \mathcal{P}_3 \setminus \{F_1, F_2\} \Rightarrow$
 $DV(F_1, F_2, X, X\alpha) = \text{konst.} \quad \forall X \in \mathcal{P}_3 \setminus \{F_1, F_2\}$. ◆

Die Beschränkung einer Homologie $\sigma \in \text{PGL}(3, K)$ auf einen Kollineationsstrahl s ist eine hyperbolische Projektivität mit den Fixpunkten F_1 und F_2 . Für je zwei Kollineationsstrahlen sind die Beschränkungen durch eine (sicher doppelverhältnistreue) Perspektivität gekoppelt und daher ist es sinnvoll zu definieren: Unter dem "charakteristischen Doppelverhältnis einer Homologie" versteht man das charakteristische Doppelverhältnis der Beschränkung der Homologie auf irgendeinen Kollineationsstrahl.



In $\mathbb{P}_m(\mathcal{W}(K))$ ist genau für die hyperbolischen projektiven Involutionsen (bzw. die harmonischen Homologien) das charakteristische Doppelverhältnis -1 .

Bew.: Nach 1.10, Folg. 8, III sind die hyperbolischen projektiven Involutionsen α genau jene Abbildungen, welche zwei Punkte F_1, F_2 festlassen und für die gilt
 $H(F_1, F_2; X, X\alpha) \quad \forall X \in \mathcal{P}_3 \setminus \{F_1, F_2\} \stackrel{\text{Fol. 3, Bem. 8}}{\iff}$
 $DV(F_1, F_2, X, X\alpha) = -1 \quad \forall X \in \mathcal{P}_3 \setminus \{F_1, F_2\}$. ◆

(e) Die projektive Selbstabbildung $\alpha: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$ im endlich-dimensionalen FP-Raum $\mathbb{P}(\mathcal{W}(K))$ wird durch eine Bilinearform $\alpha_{ij} x_i x_j + \alpha_{10} x_1 x_0 + \alpha_{11} x_1 x_1 + \dots = 0$ mit $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$ beschrieben; dabei seien sowohl $x_0: x_1$ als auch $x'_0: x'_1$ homogene Reihenkoordinaten bezüglich $q(K) (= \mathbb{K})$, $q(K) (= \mathbb{C}K)$ und $(q+q)K$. Für einen Fixpunkt F von α gilt $f_0: f_1 = f'_0: f'_1 \Rightarrow f'_0 = f_0 g \wedge f'_1 = f_1 g$ mit $g \in K \setminus \{0\} \Rightarrow$
 $\alpha_{00} f_0 f_0 g + \alpha_{01} f_0 f_1 g + \alpha_{10} f_1 f_0 g + \alpha_{11} f_1 f_1 g = 0 \Rightarrow$
 $\alpha_{00} f_0^2 + (\alpha_{01} + \alpha_{10}) f_0 f_1 + \alpha_{11} f_1^2 = 0$; dies ist eine quadratische Gleichung für $f_0: f_1$, welche im kommutativen Körper K für $\alpha \neq \text{Id}$ höchstens zwei Lösungen besitzt.
 Speziell für die Identität Id gilt $x_0: x_1 = x'_0: x'_1 \quad \forall (x_0: x_1) \in K^2 \setminus \{(0,0)\} \Rightarrow$
 $x_0 x'_1 - x_1 x'_0 = 0$ beschreibt die Identität; die Koeffizienten der quadratischen Gleichung für ihre Fixpunkte verschwinden alle.

Zwischenbemerkung:

Ist K ein kommutativer Körper und $p(x) := \sum_{\mu=0}^m p_\mu x^\mu$ ein Polynom m -ten Grades mit $p_\mu \in K \wedge p_m \neq 0 \wedge m \geq 1$ und ist $a \in K$ eine Nullstelle

von $p(x)$ (also $p(a)=0$), so existiert ein Polynom $q(x)$ vom Grad $m-1$ über K mit $p(x)=(x-a)q(x)$. Besitzt $p(x)$ keine Nullstelle in K , so gibt es einen kommutativen Erweiterungskörper $\tilde{K}$ von K (mit $0_{\tilde{K}}=0_K=0$) und ein Element $\tilde{a} \in \tilde{K}$ mit $p(\tilde{a})=0$; gilt $\text{Char } K \neq 2$, so gilt auch $\text{Char } \tilde{K} \neq 2$. Ein Körper K heißt "quadratisch abgeschlossen", wenn jedes quadratische Polynom über K eine Nullstelle in K besitzt. Ein Körper K heißt "algebraisch abgeschlossen", wenn jedes Polynom über K eine Nullstelle in K besitzt.

Damit gilt: In einem endlichdimensionalen PP-Raum $\Pi(\mathcal{W}(K))$ existieren elliptische Projektivitäten (und damit z.B. elliptische Polaritäten bzw. für $n=3$ z.B. ovale Quadriken, elliptische Netze) genau dann, wenn K nicht quadratisch abgeschlossen ist, also z.B. für $K=\mathbb{R}$, aber nicht für $K=\mathbb{C}$.

Ist $\Pi(\mathcal{W}(K))$ ein endlichdimensionaler PP-Raum und α eine elliptische Projektivität, so existiert ein projektiver Erweiterungsraum $\Pi(\tilde{\mathcal{W}}(\tilde{K}))$ so, daß α in $\Pi(\tilde{\mathcal{W}}(\tilde{K}))$ mindestens einen Fixpunkt hat; ist speziell $\Pi(\mathcal{W}(K))$ klassisch, so ist auch $\Pi(\tilde{\mathcal{W}}(\tilde{K}))$ klassisch und die elliptische Projektivität ist in $\Pi(\tilde{\mathcal{W}}(\tilde{K}))$ hyperbolisch.

Bew.: Die elliptische Projektivität $\alpha: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_1$ wird durch eine Bilinearform beschrieben, in der $\alpha_{11} \neq 0$ gilt, da $(0,1)$ kein Fixpunkt ist. Die Bestimmung der Fixpunkte von α führt daher auf ein quadratisches Polynom $p(\frac{x}{y})$, welches in K keine Nullstelle besitzt. Nach dem Hilssatz existieren ein Körper $\tilde{K} \supset K$ und $\tilde{a} \in \tilde{K}$ mit $p(\tilde{a})=0$ $\tilde{a} \notin K$. Nach Auswahl einer Basis in $\mathcal{W}$ kann $\mathcal{W}(K)$ mit dem arithmetischen Rechtsvektorraum $\mathcal{W}^{n,n}$ identifiziert werden und $\tilde{\mathcal{W}}^{n,n}$ umfaßt $\mathcal{W}^{n,n}$. Der projektive Raum $\Pi(\tilde{\mathcal{W}}^{n,n})$ umfaßt $\Pi(\mathcal{W}(K)) = \Pi(\mathcal{W}^{n,n})$. Die Bilinearform beschreibt nun eine Projektivität $\tilde{\alpha}: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_1$ mit $\tilde{\alpha}|_{\mathcal{P}_1} = \alpha$ und $\tilde{\alpha}$ hat in $\Pi(\tilde{\mathcal{W}}^{n,n})$ mindestens einen Fixpunkt, nämlich den Punkt mit der inhomogenen Reihenkoordinate $\tilde{a}$. Ist $\text{Char } K \neq 2$ $\Rightarrow$ $\text{Char } \tilde{K} \neq 2$; dann ist $\tilde{\alpha}$ hyperbolisch: (ind.) Da $p(\tilde{a})=0$ gilt, existiert ein Polynom $q(\frac{x}{y})$ vom Grad 1 über K mit $p(\frac{x}{y})=(\frac{x}{y}-\tilde{a})q(\frac{x}{y})$; das lineare Polynom $q(\frac{x}{y})=\tilde{\alpha}\frac{x}{y}+\tilde{\beta}$ mit $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \tilde{K}$ hat in $\tilde{K}$ stets eine Nullstelle und diese ist im parabolischen Fall ebenfalls $\tilde{a}$. Dann gilt $q(\frac{x}{y})=\tilde{\xi}(\frac{x}{y}-\tilde{a})$ mit $\tilde{\xi} \in K \setminus \{0\}$ und daher $p(\frac{x}{y})=\alpha_{00}+(\alpha_{01}+\alpha_{10})\frac{x}{y}+\alpha_{11}(\frac{x}{y})^2=\tilde{\xi}(\frac{x}{y}-\tilde{a})^2=\tilde{\xi}((\frac{x}{y})^2-2\tilde{a}\frac{x}{y}+\tilde{a}^2)$. Diese beiden quadratischen Polynome stimmen genau dann überein, wenn gilt: $\alpha_{11}=\tilde{\xi}$, $\alpha_{01}+\alpha_{10}=-2\tilde{a}\tilde{\xi}$, $\alpha_{00}=\tilde{a}^2\tilde{\xi}$ und daher $\tilde{a}=-\frac{\alpha_{01}+\alpha_{10}}{2\alpha_{11}} \Rightarrow \tilde{a} \in K$: Widerspruch. Der letzte Schluß versagt für $\text{Char } K=2$.

(f) Für $\alpha: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_1$ in $\Pi_n(\mathcal{W}(K))$ gilt: Die nicht ausgeartete Bilinearform (*) in Bem.c beschreibt genau dann eine projektive Involution, wenn $\alpha_{01}=\alpha_{10}$, d.h. wenn (*) symmetrisch ist.

Bew.: Für $\alpha: X \dots (x_0: x_1) \mapsto X\alpha \dots (x'_0: x'_1)$ gilt

$$\alpha_{00}x_0x'_0 + \alpha_{01}x_0x'_1 + \alpha_{10}x_1x'_0 + \alpha_{11}x_1x'_1 = 0 \quad (*)$$

Ist $X\alpha^2 = X$, so folgt aus (*)

$$\alpha_{00}x_0^2 + \alpha_{01}x_0x_1 + \alpha_{10}x_1x_0 + \alpha_{11}x_1^2 = 0.$$

Durch Subtraktion ergibt sich

$$\alpha_{01}(x_0x'_1 - x'_0x_1) + \alpha_{10}(x_1x'_0 - x'_1x_0) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_0 & x'_0 \\ x_1 & x'_1 \end{vmatrix} (\alpha_{01} - \alpha_{10}) = 0.$$

Diese Gleichung gilt für alle X (und $X\alpha$) und wegen $\alpha \neq \pm 1$ existiert ein Punkt X mit $X \neq X\alpha$, also $\begin{vmatrix} x_0 & x'_0 \\ x_1 & x'_1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \alpha_{01} = \alpha_{10}$.

Gilt umgekehrt $\alpha_{01} = \alpha_{10}$, so bleibt (*) bei der Vertauschung $X \mapsto X\alpha$ $X\alpha \mapsto X$ un geändert $\Rightarrow \alpha$ ist eine projektive Involution, falls außer-

dem $\alpha \neq \pm 1$; für ± 1 ist nach Bem.e $\alpha_{01} = -\alpha_{10}$ und wegen $\text{Char } K \neq 2$ daher $\alpha_{01} \neq \alpha_{10}$.

(5) Wir erwähnen einige Aussagen für einen projektiven Raum $\Pi(\mathcal{W}(K))$ mit $\dim \Pi(\mathcal{W}(K)) < \infty$ und K nicht kommutativ. $\alpha \in \text{PGL}(\Pi(\mathcal{W}(K))) \Leftrightarrow \alpha$ wird durch eine halblinare Bijektion f beschrieben, die zu einem inneren Körperautomorphismus $f: x \mapsto a^{-1}xa$ mit $a \in K \setminus \{0\}$ gehört. Eine projektive Kollineation ist nicht notwendig doppelverhältnistreue, denn $x = DV(A, B, C, X)$ geht über in $a^{-1}xa$ und modifiziert daher den Doppelverhältnissbegriff für den nicht kommutativen Fall: "Unter einem Doppelverhältnis versteht man die Menge aller zu einer festen Zahl $x \in K$ konjugierten Zahlen", d.i. $\{y \in K \mid y = a^{-1}xa \quad \forall a \in K \setminus \{0\}\}$. Bei Verwendung dieses Doppelverhältnissbegriffes gilt

$\alpha \in \text{PGL}(\Pi(\mathcal{W}(K))) \Rightarrow \alpha$ ist doppelverhältnistreue. Trotz dieser Modifikation ist die Umkehrung dieser letzten Aussage immer noch falsch; G.KÖTHE kennzeichnete 1931 jene speziellen nicht kommutativen Körper, über denen jede doppelverhältnistreu Kollineation projektiv ist.

6) Wir wollen für einen endlichdimensionalen PP-Raum den Doppelverhältnissbegriff verallgemeinern.

DEF.5.4c: Unter einem Büschel $\mathcal{L}$ von Unterräumen U_i versteht man ein Büschel von Hyperebenen eines Unterraumes U_λ des projektiven Raumes Π . Der Unterraum U_λ heißt der Büschelraum und der Durchschnitt U_Π aller Unterräume U_i der Trägerraum des Büschels.

Bemerkungen: (a) Speziell für $U_\lambda = \Pi$ erhält man die Hyperebenenbüschel von Π .

(b) Der Trägerraum U_Π ist eine Kogerade in U_λ und eine Hyperebene jedes Unterraumes $U_i \in \mathcal{L}$. Haben die Hyperebenen U_i des Büschels $\mathcal{L}$ die Dimension k , so ist $\dim U_\lambda = k+1$, $\dim U_\Pi = k-1$.

(c) Für $k=1$ ist $\dim U_\lambda = 2$, $\dim U_\Pi = 0$ und $\mathcal{L}$ ist ein Geradenbüschel.

(d) Aus 3.2, Folg.5 folgt, daß eine Gerade in U_λ , die U_Π nicht trifft, jeden Unterraum des Büschels $\mathcal{L}$ in genau einem Punkt schneidet.

g liegt nicht in $XV U_T$, da sonst nach Axiom I_2 ein Punkt $P_g \in P_U$ existiert (vgl. Figur). Nach 3.2, Folr. 5 hat daher die Hyperebene $XV U_T$ von U_X mit g genau einen Punkt L gemeinsam; für $L \in P_g \setminus \{L\}$ ist XY eine geeignete Gerade $\bar{g}$.

SATZ 5.4: Eine Autokollineation α eines endlichdimensionalen projektiven Raumes über einem Rechtsvektorraum zu einem kommutativen Körper K ist genau dann projektiv, wenn α durch einen Vektorraumautomorphismus beschrieben wird. Genau die projektiven Kollineationen sind die doppelverhältnistreuen Kollineationen. Die doppelverhältnistreuen Bijektionen zwischen Punktreihen sind genau die Projektivitäten. Die projektive Gruppe ist isomorph zur Faktorgruppe der linearen Gruppe des Vektorraumes nach der Dilatationsgruppe. Gestattet K nur den trivialen Automorphismus, so ist jede Kollineation projektiv, und jede Bijektion zwischen Punktreihen, die harmonische Lage erhält, ist eine Projektivität.

5.5. Projektive Korrelationen

Bei einer Korrelation $\delta: \Pi \rightarrow \Pi^*$ geht eine Punktreihe P_a in ein Hyperebenenbüschel mit der Kogeraden a^δ als Träger über. Eine Projektivität zwischen einer Punktreihe und einem Hyperebenenbüschel wurde in Def. 5.4d erklärt. Dies legt folgende Definition nahe, welche Def. 1.11b und Def. 4.5a umfaßt:

DEF. 5.5a: Eine Korrelation $\delta: \Pi \rightarrow \Pi^*$ heißt projektiv, wenn ihre Beschränkung auf eine Punktreihe eine Projektivität ist.

Wir untersuchen projektive Korrelationen eines projektiven Raumes über einem Rechtsvektorraum $\mathcal{W}(K)$, wobei K nicht notwendig kommutativ ist. Dann gilt:

Eine Korrelation $\delta: \Pi(\mathcal{W}(K)) \rightarrow \Pi(\mathcal{W}^*(K))$ ($3 \leq \dim \mathcal{W} < \infty$) ist genau dann projektiv, wenn die sie beschreibende nichtausgeartete Sesquilinearform $\sigma: \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow K$ eine Bilinearform ist. Projektive Korrelationen existieren genau dann, wenn K kommutativ ist.

Bemerkung: Hieraus folgt: In einem endlichdimensionalen projektiven Raum über einem Vektorraum gilt der Satz von Pappus-Pascal genau dann, wenn der Raum eine projektive Korrelation gestattet.

Bew.: (a) Ist δ eine projektive Korrelation $\Rightarrow \exists a \in \mathcal{G}$ mit $\delta P_a: P_a \rightarrow P_a^\delta$ ist projektiv. Es gibt daher eine Gerade $b \in \mathcal{G}$, welche die Kogerade

$a\hat{d}$ nicht trifft, und die Abbildung $\alpha: \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_b$ mit $X \mapsto X\alpha = \mathcal{P}_a \cap \mathcal{P}_X$ ist eine Projektivität. Da $\Gamma(\mathcal{W}(K))$ ein Desarguesraum ist, läßt sich die Projektivität α nach 3.6, Folg. 6 zu einer projektiven Kollineation κ fortsetzen, d.h. $\kappa|_{\mathcal{P}_a} = \alpha$. Nun wird $\kappa \in \text{PGL}(\mathbb{W}_a)$ durch halblineare Bijektionen $g: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ beschrieben und nach 5.4, Bem. vor Folg. 1 kann g sogar als lineare Bijektion gewählt werden (also $\hat{g} = 1$). Wird die Korrelation δ durch die antihalblineare Bijektion $a\hat{f}: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ zum Körperantiautomorphismus $a\hat{f}: K \rightarrow K$ beschrieben, so gilt:

$$\begin{aligned} a=PQ \text{ mit } P &= qK + qK = Q \wedge X \in \mathcal{P}_a: X = \epsilon K = (q\lambda + q\mu)K \Rightarrow \\ X\delta &= (\epsilon K)\epsilon_{01} = K(\epsilon^{a\hat{f}}) = K[(q\lambda + q\mu)^{a\hat{f}}] = K[(\lambda^{a\hat{f}})(q^{a\hat{f}}) + (\mu^{a\hat{f}})(q^{a\hat{f}})]. \\ X\kappa &= (\epsilon K)\epsilon_{02} = (\epsilon g)K = [(q\lambda + q\mu)g]K = [(qg)\lambda + (qg)\mu]K. \end{aligned}$$

Aus $X\alpha = X\kappa$ und $X\alpha \tilde{\cap} X\delta \quad \forall X \in \mathcal{P}_a$ folgt

$$\begin{aligned} &\langle (\lambda^{a\hat{f}})(q^{a\hat{f}}) + (\mu^{a\hat{f}})(q^{a\hat{f}}), (qg)\lambda + (qg)\mu \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathcal{P}_a \Leftrightarrow \\ &(\lambda^{a\hat{f}})\langle q^{a\hat{f}}, qg \rangle \lambda + (\lambda^{a\hat{f}})\langle q^{a\hat{f}}, qg \rangle \mu + (\mu^{a\hat{f}})\langle q^{a\hat{f}}, qg \rangle \lambda + (\mu^{a\hat{f}})\langle q^{a\hat{f}}, qg \rangle \mu = 0 \\ &\forall (\lambda, \mu) \in K^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad (*). \end{aligned}$$

Speziell für $\lambda=1, \mu=0$ folgt $\langle q^{a\hat{f}}, qg \rangle = 0$; für $\lambda=0, \mu=1$ folgt $\langle q^{a\hat{f}}, qg \rangle = 0$.

Daraus folgt für $\lambda=\mu=1: \langle q^{a\hat{f}}, qg \rangle + \langle q^{a\hat{f}}, qg \rangle = 0 \quad (*).$

Es gilt $\langle q^{a\hat{f}}, qg \rangle =: c \neq 0$ (ind. $\langle q^{a\hat{f}}, qg \rangle = 0 \Leftrightarrow P\delta \tilde{\cap} Q\kappa = Q\alpha \Rightarrow P\alpha = Q\alpha$: Widerspruch zur Injektivität von α).

Wir normen gemäß $\tilde{q} := qc^{-1}$ um und erhalten

$$\langle q^{a\hat{f}}, \tilde{q}g \rangle = \langle q^{a\hat{f}}, (qc^{-1})g \rangle = \langle q^{a\hat{f}}, (qg)c^{-1} \rangle = \langle q^{a\hat{f}}, qg \rangle c^{-1} = 1.$$

Schreiben wir i.f. statt $\tilde{q}$ wieder q , so lautet (*) dann

$$\begin{aligned} &\langle q^{a\hat{f}}, qg \rangle = -\langle q^{a\hat{f}}, qg \rangle = 1, \text{ und damit liefert } (*): \\ &(\lambda^{a\hat{f}})\mu - (\mu^{a\hat{f}})\lambda = 0 \quad \forall (\lambda, \mu) \in K^2 \setminus \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Speziell für $\mu=1$ folgt $\lambda^{a\hat{f}} = \lambda \quad \forall \lambda \in K \Rightarrow a\hat{f} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\epsilon, \eta)\sigma := \langle \epsilon^{a\hat{f}}, \eta \rangle$ ist eine Bilinearform und daher K kommutativ.

(b) Sei δ eine durch die nichtausgeartete Bilinearform $(\epsilon, \eta)\sigma = \langle \epsilon^{a\hat{f}}, \eta \rangle$ mit $a\hat{f}=1$ beschriebene Korrelation und $a=PQ$ mit $X \in \mathcal{P}_a$, also $X = (q\lambda + q\mu)K$.

$$X\delta = (\epsilon K)\delta = K(\epsilon^{a\hat{f}}) = K[(q\lambda + q\mu)^{a\hat{f}}] = K[\lambda(q^{a\hat{f}}) + \mu(q^{a\hat{f}})].$$

Ist b eine zu $a\hat{d}$ windschiefe Gerade, so gilt für den Punkt

$\mathcal{P}_b \cap \mathcal{P}_X =: X'$ mit $P' := \mathcal{P}_b \cap \mathcal{P}_{P\delta} = q'K$ und $Q' := \mathcal{P}_b \cap \mathcal{P}_{Q\delta} = q''K$ dann

$X' = (q'\lambda' + q''\mu')K$. Wir untersuchen, wie die homogene Reihenkoordinaten $(\lambda':\mu')$ von X und $(\lambda:\mu)$ von X' gekoppelt sind.

$$X' \tilde{\cap} X\delta \Leftrightarrow \langle \lambda(q^{a\hat{f}}) + \mu(q^{a\hat{f}}), q'\lambda' + q''\mu' \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda \langle q^{a\hat{f}}, q' \rangle \lambda' + \lambda \langle q^{a\hat{f}}, q'' \rangle \mu' + \mu \langle q^{a\hat{f}}, q' \rangle \lambda' + \mu \langle q^{a\hat{f}}, q'' \rangle \mu' = 0.$$

- 0 wegen $P' \tilde{\cap} P\delta \quad =: c \quad =: d \quad = 0$ wegen $Q' \tilde{\cap} Q\delta$

Da b windschief $a\hat{d}$ ist, gilt $P' \tilde{\cap} Q\delta$ und $Q' \tilde{\cap} P\delta$, also $c \neq 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow$

$c\lambda' + d\mu' = 0$, d.h. die homogenen Reihenkoordinaten sind in einer Bilinearform gekoppelt mit $\begin{vmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{vmatrix} = -c \cdot d \neq 0 \stackrel{F_1, F_2, \text{Bem. c}}{\implies}$ die Zuordnung $X \mapsto X'$ ist eine Projektivität.

(c) Ist K kommutativ, dann existiert nach 5.3, Folg. 6, Fall 2, Bem. c eine nicht ausgeartete Bilinearform δ und diese beschreibt nach Beweisschritt (b) eine projektive Korrelation.

Bemerkungen: (a) Ist δ eine projektive Korrelation, so ist die Beschränkung auf jede Punktreihe projektiv; wie man nämlich aus dem obigen Beweis erkennt, ist die Gerade a in keiner Weise ausgezeichnet.

(b) Jede Nullpolarität wird nach 5.3 durch eine nicht ausgeartete alternierende Bilinearform beschrieben $\implies$ jede Nullpolarität ist projektiv. (Diese Aussage gilt in jedem projektiven Raum über einem Rechtsvektorraum mit beliebiger endlicher Dimension; vgl. auch 4.7, Folg. 3, die in jedem $\mathbb{T}_{pp}^3$ gilt.)

Folgerungen:

1) Ist $\mathbb{T}(\mathcal{V}(K))$ ein klassischer projektiver Raum ($\iff K$ kommutativ, $\text{Char } K \neq 2$) ungerader Dimension, so existieren nach 5.3, Folg. 6 Nullpolaritäten in $\mathbb{T}$. Dann gilt: Je zwei Nullpolaritäten in $\mathbb{T}$ sind projektiv kollinear.

(Kurz: Im Sinne von $\text{PGL}(\mathbb{T}_K(\mathcal{V}(K)))$ existiert genau eine Nullpolarität.)

Zwischenbemerkung:

Ist $\mathcal{V}(K)$ ein Rechtsvektorraum der Dimension $n+1$ über dem kommutativen Körper K mit $\text{Char } K \neq 2$ und $\delta: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow K$ eine nicht ausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform, so existiert nach LA eine Basis $\{\eta_0, \dots, \eta_n\} \subset \mathcal{V}$ so, daß mit $\epsilon = \eta_i x^i$, $\eta = \eta_j y^j$ die Koordinatendarstellung von δ die Normalform besitzt:

$$(\epsilon, \eta)\delta = (x^0 y^1 - x^1 y^0) + (x^2 y^3 - x^3 y^2) + \dots + (x^{n-1} y^n - x^n y^{n-1}).$$

Bemerkung: In dieser Basis wird die zu δ gehörige antilineare Bijektion $\alpha: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ durch die reguläre schiefsymmetrische Matrix aus $\frac{n+1}{2}$ längs der Hauptdiagonale aufgereihten Kästchen der Gestalt $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ beschrieben (vgl. 5.3, Folg. 6, Fall 1).

Bew.: Seien ν_j ($j=1, 2$) zwei Nullpolaritäten in $\mathbb{T}_K(\mathcal{V}(K))$, und ν_j werde durch die nicht ausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform δ_j beschrieben. Nach der Zwischenbemerkung existieren Basen $\mathcal{B}_j$ ($j=1, 2$) in $\mathcal{V}$ so, daß die Koordinatendarstellung von δ_j bezüglich $\mathcal{B}_j$

die Normalform besitzt. Zu den Basen $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ in $\mathcal{W}$ gibt es genau eine lineare Bijektion $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$, welche die Vektoren der ersten Basis in die gleichindizierten Vektoren der zweiten Basis überführt. α_f ist eine projektive Kollineation, die ν_i in die Nullpolarität $\alpha_f^{-1} \nu_i \alpha_f^*$ überführt, und $\alpha_f^{-1} \nu_i \alpha_f^*$ hat nach Konstruktion von f und $\mathcal{L}_2$ dieselbe Darstellung wie $\nu_i \Rightarrow \alpha_f^{-1} \nu_i \alpha_f^* = \nu_i$. ◆

2) Sei $\Pi(\mathcal{W}(K))$ ein klassischer projektiver Raum endlicher Dimension. Eine projektive Polarität λ , die keine Nullpolarität ist, wird nach Satz 5.3 durch eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform σ beschrieben; die Koordinatendarstellung von σ bezüglich einer Basis lautet daher $(\epsilon, \eta) \sigma = x^k a_{kj} y^j$ mit $a_{kj} = a_{jk}$.

Zwischenbemerkung:

Nach LA gibt es zu jeder von der Nullform verschiedenen symmetrischen Bilinearform σ in $\mathcal{W}(K)$ (mit $3 \leq \dim \mathcal{W}(K) = n+1 < \infty$) mit K kommutativ und $\text{Char } K \neq 2$ eine Basis $\mathcal{L} \subset \mathcal{W}$ so, daß die Koordinatendarstellung von σ Diagonalform besitzt:

$(\epsilon, \eta) \sigma = \lambda_0 x^0 y^0 + \lambda_1 x^1 y^1 + \dots + \lambda_k x^k y^k$ mit $0 \leq k \leq n$ und $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \neq 0$. σ ist genau dann nicht ausgeartet, wenn $k=n$ gilt.

Jede projektive Polarität λ in $\Pi_K(\mathcal{W}(K))$, die keine Nullpolarität ist, besitzt einen Polsimplex (d.i. ein Simplex $\{P_0, \dots, P_n\}$ mit $P_i \lambda = P_0 \vee \dots \vee P_{i-1} \vee P_{i+1} \vee \dots \vee P_n$ für $i=0, \dots, n$).

Bew.: Nach der Zwischenbemerkung existiert eine Basis in $\mathcal{W}$ so, daß die zugehörige Bilinearform die Diagonalform $(\epsilon, \eta) \sigma = \lambda_0 x^0 y^0 + \dots + \lambda_n x^n y^n$ mit $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$ besitzt. Die Punkte $P_0 = (1, 0, \dots, 0)K$, $P_1 = (0, 1, \dots, 0)K, \dots, P_n = (0, 0, \dots, 0, 1)K$ bilden einen Basissimplex von $\Pi(\mathcal{W}(K))$. Alle zu P_0 konjugierten Punkte $Y = (y^0, \dots, y^n)K = \eta K$ erfüllen $(\epsilon, \eta) \sigma = 0$ mit $(x^0, x^1, \dots, x^n) = (1, 0, \dots, 0)K \Rightarrow y^0 = 0 \Rightarrow$ die Punkte $P_1, P_2, \dots, P_n$ sind zu P_0 konjugiert $\Rightarrow P_1, P_2, \dots, P_n$ liegen in der Hyperebene $P_0 \delta \Rightarrow P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n = P_0 \delta$. Ebenso folgt $P_i \delta = P_0 \vee \dots \vee P_{i-1} \vee P_{i+1} \vee \dots \vee P_n$. ◆

Bemerkungen: (a) Ist $\{y_0, \dots, y_n\}$ eine Basis in $\mathcal{W}$, bezüglich der σ Diagonalform besitzt, so ist $\{y_0 K, \dots, y_n K\}$ ein Polsimplex.

(b) Für $n=2$ bzw. 3 ist ein Polsimplex ein Poldreieck bzw. Poldtetraeder.

3) DEF.5.5b: Eine projektive Polarität in $\mathbb{P}_K(\mathcal{V}(K))$, die keine Nullpolarität ist, heißt hyperbolisch, wenn ein selbstkonjugierter Punkt existiert. Die Menge aller selbstkonjugierten Punkte einer projektiven hyperbolischen Polarität heißt eine Quadrik ϕ in $\mathbb{P}_K(\mathcal{V}(K))$. Eine projektive Polarität ohne selbstkonjugierten Punkt heißt elliptisch.

Bemerkung: Für $n=2$ ist eine Quadrik dasselbe wie ein Staudtscher Kegelschnitt in $\mathbb{P}_K^2(\mathcal{V}(K))$ (vgl. Def.2.4). Für $n=3$ ist eine Quadrik dasselbe wie eine Quadrik im Sinne von Def.4.5b in $\mathbb{P}_K^3(\mathcal{V}(K))$. Die Definition 5.5b gilt für jede endliche Dimension, jedoch nur in klassischen projektiven Räumen über Vektorräumen (vgl. jedoch 5.7, Bem.e).

Zwischenbemerkung:

Ist $\mathcal{V}(K)$ ein Rechtsvektorraum über dem kommutativen Körper K mit $\text{Char } K \neq 2$, so heißt eine Abbildung $q: \mathcal{V}(K) \rightarrow K$ eine quadratische Form über $\mathcal{V}$, wenn es eine symmetrische Bilinearform $\sigma: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow K$ verschieden von der Nullform gibt mit $q = (\epsilon, \epsilon)\sigma \quad \forall \epsilon \in \mathcal{V}$. q heißt genau dann regulär, wenn σ nicht ausgeartet ist. Die Bilinearform σ mit $q = (\epsilon, \epsilon)\sigma$ heißt zur quadratischen Form q assoziiert.

Bemerkung: Ist q eine quadratische Form, so ist $\sigma q = 0$. Gilt $\epsilon \cdot q = 0$ für $\epsilon \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, so gilt $\eta q = 0$ für alle $\eta \in \epsilon \cdot K$, d.h. mit jeder Nullstelle $\epsilon \neq 0$ einer quadratischen Form q besteht der eindimensionale Unterraum $\epsilon \cdot K$ nur aus Nullstellen.

Bew.: $\sigma q = (\sigma, \sigma)\sigma = (\sigma, \alpha 0)\sigma = (\sigma, \alpha)\sigma \cdot 0 = 0$.
 $\epsilon \cdot q = (\epsilon, \epsilon)\sigma = 0 \Rightarrow (\epsilon \cdot a)q = (\epsilon \cdot a, \epsilon \cdot a)\sigma = a(\epsilon, \epsilon)\sigma = a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in K$.

Damit wird folgende Definition sinnvoll:

DEF.5.5c: Die Menge aller Punkte von $\mathbb{P}_K(\mathcal{V}(K))$, deren Bild bei einer quadratischen Form $q: \mathcal{V} \rightarrow K$ die Null ist, heißt quadratische Varietät (Hyperfläche 2.Ordnung) in $\mathbb{P}_K$, falls sie nicht leer ist. Ist q regulär, so heißt die quadratische Varietät regulär.

4) Die Quadriken in $\mathbb{P}_K(\mathcal{V}(K))$ sind genau die regulären quadratischen Varietäten.

Bew.: (a) Ist ϕ eine Quadrik in $\mathbb{P}_K(\mathcal{V}(K))$, so ist ϕ nach Def.5.5b die Menge der selbstkonjugierten Punkte einer projektiven hyperbolischen Polarität λ . Diese wird durch eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform σ beschrieben, und ein Punkt $X = \epsilon K$ ist

bezüglich λ genau dann selbstkonjugiert, wenn $(\epsilon, \epsilon)\sigma = 0$ gilt, d.h. $\Phi = \{X = \epsilon K \in \mathbb{P} \mid (\epsilon, \epsilon)\sigma = 0 \wedge \sigma \text{ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform}\}$. Zu σ gehört eine reguläre quadratische Form q mit $\epsilon q = (\epsilon, \epsilon)\sigma \forall \epsilon \in \mathbb{H}$ und es gilt $\Phi = \{X = \epsilon K \in \mathbb{P} \mid \epsilon q = 0 \wedge q \text{ regulär}\} \Rightarrow \Phi$ ist eine reguläre quadratische Varietät, falls $\Phi \neq \emptyset$ gezeigt ist: Da λ hyperbolisch ist $\exists X_0 = \epsilon_0 K$ mit $X_0 \tilde{\lambda} X_0 \iff (\epsilon_0, \epsilon_0)\sigma = 0 \Rightarrow X_0 \in \Phi \Rightarrow \Phi \neq \emptyset$.

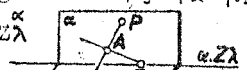
(b) Ist umgekehrt Ψ eine reguläre quadratische Varietät $\Rightarrow \Psi = \{X = \epsilon K \in \mathbb{P} \mid \epsilon q = 0 \wedge q \text{ eine reguläre quadratische Form}\} \neq \emptyset$. Die zu q assoziierte, nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform σ beschreibt eine projektive Polarität λ , d.h. $\{X \in \mathbb{P} \mid X \tilde{\lambda} X\} = \{X = \epsilon K \in \mathbb{P} \mid (\epsilon, \epsilon)\sigma = 0\} = \Psi$ ist eine Quadrik, denn λ ist wegen $\Psi \neq \emptyset$ hyperbolisch. ◆

Bemerkungen: (a) Ist g eine Gerade durch einen Punkt $Z = \xi K$ der Quadrik Φ , so ist entweder $\mathbb{P}_g \subset \Phi$ oder $\mathbb{P}_g \cap \Phi$ besteht nur aus Z oder aus Z und einem weiteren Punkt R . Eine Gerade hat also mit einer Quadrik, auf der sie nicht liegt, keinen bzw. einen bzw. zwei Punkte gemeinsam.

Bew.: Für die Quadrik Φ gilt bei Verwendung obiger Bezeichnungen: $\Phi = \{X = \epsilon K \in \mathbb{P} \mid X \tilde{\lambda} X\} = \{X = \epsilon K \in \mathbb{P} \mid (\epsilon, \epsilon)\sigma = 0\} = \{X = \epsilon K \in \mathbb{P} \mid \epsilon q = 0\} \neq \emptyset$. Die Hyperebene $Z\lambda$ besteht genau aus allen Punkten $Y = \eta K$, die zu Z konjugiert sind, d.h. $Z\lambda = \{Y = \eta K \in \mathbb{P} \mid (z, \eta)\sigma = 0\}$. Ist $g = ZS$ mit $S = \delta K \Rightarrow \forall X = \epsilon K \in \mathbb{P}_g$ gilt $\epsilon = \lambda z + \delta \mu$. Der Punkt $X \in \mathbb{P}_g$ liegt genau dann auf Φ , wenn $\epsilon q = 0$ gilt $\Leftrightarrow 0 = (\epsilon, \epsilon)\sigma = (\lambda z + \delta \mu, \lambda z + \delta \mu)\sigma \Leftrightarrow \lambda^2 (z, z)\sigma + 2\lambda\mu (z, \delta)\sigma + \mu^2 (\delta, \delta)\sigma = 0 \Leftrightarrow \mu [2\lambda (z, \delta)\sigma + \mu (\delta, \delta)\sigma] = 0$; $\neq 0$ wegen $z \neq \delta$ σ ist symm.
Hieraus folgt einerseits $\mu = 0$, d.h. $\lambda : \mu = 1 : 0$, was den Punkt $Z \in \mathbb{P}_g \cap \Phi$ beschreibt, und andererseits $2\lambda (z, \delta)\sigma + \mu (\delta, \delta)\sigma = 0$. Ist $(\delta, \delta)\sigma = 0 \wedge (z, \delta)\sigma = 0 [\Leftrightarrow S \tilde{\lambda} Z] \Rightarrow (\epsilon, \epsilon)\sigma = (\lambda z + \delta \mu, \lambda z + \delta \mu)\sigma = 0 \forall (\lambda : \mu) \Rightarrow \forall X \in \mathbb{P}_g$ gilt $X \in \Phi \Rightarrow \mathbb{P}_g \subset \Phi$. Im anderen Fall existiert eine Lösung $(\lambda : \mu) \neq (0 : 0)$, und dies sind die homogenen Reihenkoordinaten eines Punktes $R \in \mathbb{P}_g \cap \Phi$, der für $(z, \delta)\sigma = 0 [\Leftrightarrow S \tilde{\lambda} Z \Leftrightarrow \mathbb{P}_g \subset \mathbb{P}_{2\lambda}]$ mit Z übereinstimmt und für $(z, \delta)\sigma \neq 0 [\Leftrightarrow \mathbb{P}_g \not\subset \mathbb{P}_{2\lambda}]$ von Z verschieden ist. ◆

(b) Eine Quadrik ist nie Teilmenge einer Hyperebene.

Bew.: Ist Φ eine Quadrik zur hyperbolischen projektiven Polarität λ , so gilt $\Phi \neq \emptyset$. Ist für eine Hyperebene α dann $\Phi \cap \mathbb{P}_\alpha = \emptyset$, so gilt sicher $\Phi \not\subset \mathbb{P}_\alpha$; ansonsten gibt es einen Punkt $Z \in \mathbb{P}_\alpha \cap \Phi$. Durch den Punkt Z geht die Hyperebene $Z\lambda$. Nach Bew. zu Bem. a genügt es zu zeigen, daß es durch $Z \in \Phi$ eine Gerade g gibt, welche weder in α noch in $Z\lambda$ liegt, denn nach dem Beweis existiert auf g ein von Z verschiedener Quadrikkpunkt, der somit nicht in α liegt. Gilt $\alpha = Z\lambda$, so existiert ein Punkt A mit $A \tilde{\lambda} \alpha \Rightarrow A \in S \Rightarrow \exists^* g = AS$ mit $\mathbb{P}_g \not\subset \mathbb{P}_{2\lambda}$; gilt dagegen $\alpha \neq Z\lambda$, so existiert ein Punkt $P \in \alpha \setminus Z\lambda$ mit $P \tilde{\lambda} (\alpha \cap Z\lambda)$, d.h. $P \tilde{\lambda} Z\lambda$ und ein Punkt $Q \in Z\lambda$ mit $Q \tilde{\lambda} \alpha$. ◆



mit $Q \nmid (\alpha \cap Z\lambda)$, d.h. $Q \nmid \alpha \Rightarrow P+Q \Rightarrow \exists^* PQ \in g$.
 Wegen Axiom E existiert ein Punkt $A \in \mathcal{P}_\lambda \setminus \{P, Q\}$ und es gilt $A \nmid \alpha \wedge A \nmid Z\lambda$, da $AP=QP=QA$ und $P \nmid Z\lambda \wedge Q \nmid \alpha \Rightarrow A+Z$, und $g=AZ$ liegt weder in α noch in $Z\lambda$. ◆

5) DEF. 5.5d: Ist ϕ eine Quadrik, die zur projektiven hyperbolischen Polarität λ gehört, so heißt die Polaryhyperebene $P\lambda$ eines Quadrikpunktes P die Tangentialhyperebene von P . Jede Gerade durch den Quadrikpunkt P in der Tangentialhyperebene $P\lambda$ heißt Tangente von ϕ .

Bemerkungen: (a) Nach Beweis zu Bem.a gilt: Die Tangenten einer Quadrik sind genau jene Geraden, die entweder ganz auf der Quadrik liegen oder genau einen Punkt mit der Quadrik gemeinsam haben.

(b) Ist $Z=\mathfrak{z}K$ ein Punkt einer Quadrik und $\mathfrak{z}K+\delta K$ eine Gerade g durch Z auf ϕ , so gilt nach Folg.4, Bem.a dann $(\mathfrak{z}, \delta)\sigma = 0 \Rightarrow$ Alle Punkte $X = \epsilon K = (\mathfrak{z}\lambda + \delta\mu)K$ von g liegen wegen $(\mathfrak{z}, \epsilon)\sigma = (\mathfrak{z}, \mathfrak{z}\lambda + \delta\mu)\sigma = (\mathfrak{z}, \mathfrak{z})\sigma\lambda + (\mathfrak{z}, \delta)\sigma\mu = 0$ in der Tangentialhyperebene von Z .

(c) Ist λ eine projektive Nichtnullpolarität und g eine Gerade so, daß die Polaryhyperebene keines Punktes von g die Gerade g enthält, so existiert auf g eine projektive Involution konjugierter Punkte $\alpha: \mathcal{P}_g(X) \mapsto \mathcal{P}_g(X_1)$ mit $X_1 := X\lambda.g$; bestimmt λ eine Quadrik ϕ , so sind die Fixpunkte von α genau die Schnittpunkte von g mit ϕ .

Bew.: Nach Voraussetzung ist $X_1 = X\lambda.g$ eindeutig bestimmt $\forall X \in \mathcal{P}_g$, da $X\lambda$ niemals g enthält. Wegen $\alpha: \mathcal{P}_g(X) \mapsto \mathcal{P}_g(X_1) \mapsto \mathcal{P}_g(X_2)$ ist α eine Projektivität und mit $X_1 := Y$ wegen $Y \nmid X\lambda \Rightarrow Y\lambda \nmid X \Rightarrow Y_1 = Y\lambda.g = X$ involutorisch, falls $\alpha \neq \text{id}$ gilt. Für $\alpha = \text{id}$ sind die Punkte von g selbstkonjugiert und daher liegt g auf ϕ ; nach Bem.b ist dann g in der Tangentialhyperebene $Z\lambda$ mit $Z \nmid g$ enthalten, im Widerspruch zur Voraussetzung. Für einen Fixpunkt F von α gilt $F = F_1 \Leftrightarrow F \nmid F\lambda \Leftrightarrow F \in \phi$. ◆

Jede projektive hyperbolische Polarität λ ist Polarsystem der zu λ gehörigen Quadrik ϕ , d.h. zu jedem Punkt $P \notin \phi$ existiert genau eine harmonische Homologie σ_P mit Zentrum P und $\phi\sigma_P = \phi$, wobei die Achse von σ_P die Hyperebene $P\lambda$ ist.

Bew.: (a) Wir zeigen zuerst, daß die harmonische Homologie σ_P mit Zentrum $P \notin \phi$ und der Achse $P\lambda$ die Quadrik ϕ festläßt. Um $\phi\sigma_P = \phi$ zu beweisen, ist $X \in \phi \Leftrightarrow X\sigma_P \in \phi$ zu zeigen; da $\sigma_P^2 = \text{id}$ gilt, genügt es $X \in \phi \Rightarrow X\sigma_P \in \phi$ zu beweisen. Für $X \in \phi \cap \mathcal{P}_\lambda$ ist die Behauptung trivial. Ist dagegen $X \in \phi \wedge X \nmid P\lambda$, so liegt auf $g := PX$ sicher kein Punkt, dessen Polaryhyperebene die Gerade g enthält (ind.: $\exists S \nmid g$ mit g in $S\lambda \Rightarrow g$ ist Tangente von ϕ und liegt nicht auf ϕ wegen $P \nmid g \wedge P \notin \phi$). Nach Bem.a ist dann $\mathcal{P}_g \cap \phi = \{S\}$; andererseits gilt $X \in \mathcal{P}_g \cap \phi$ nach Voraussetzung und wegen $P \nmid S\lambda \Rightarrow P\lambda \nmid S \Rightarrow S \in \phi \cap \mathcal{P}_\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow S \neq X$: Widerspruch). Auf g existiert daher nach Bem.c eine projektive hyperbolische Involution konjugierter Punkte, wobei P und $P_1 := P\lambda.g$ zugeordnet sind und X einen Fixpunkt abgibt. Ist $\bar{X}$ der zweite Fixpunkt, so gilt $\rho_g \cap \phi = \{X, \bar{X}\}$ und $H(P, P_1, X, \bar{X}) \Rightarrow \bar{X} = X\sigma_p$ und daher $X\sigma_p \in \phi$.

(b) Um die Eindeutigkeit von σ_p zum Zentrum $P \notin \phi$ zu zeigen nehmen wir an, daß σ_p und σ'_p zwei harmonische Homologien mit dem Zentrum P seien, die beide ϕ als Ganzes festlassen. Dann hat die projektive Kollineation $\sigma_p \sigma'^{-1}_p$ den Punkt P als Fixpunkt, und jede Gerade durch P bleibt als Ganzes fest $\Rightarrow \sigma_p \sigma'^{-1}_p$ ist eine perspektive Kollineation mit dem Zentrum P . Außerdem gilt $\phi \sigma_p \sigma'^{-1}_p = \phi$ und ϕ bleibt sogar punktweise fest:

$$X \in \phi \Rightarrow X \neq P \Rightarrow \exists^* g = XP.$$

Fall 1: $\rho_g \not\subset \rho_{\lambda} \xrightarrow{P, X} \rho_g \cap \phi = \{X, \bar{X}\}$ mit $X \neq \bar{X}$ und $\bar{X} = X\sigma_p = X\sigma'_p \Rightarrow X\sigma_p \sigma'^{-1}_p = X$.

Fall 2: $\rho_g \subset \rho_{\lambda}$. Da wegen $P \notin g$ und $P \notin \phi$ sicher $\rho_g \not\subset \phi$ gilt, ist g nach Bem.a eine Tangente an ϕ in X mit $\rho_g \cap \phi = \{X\} \Rightarrow X\sigma_p = X\sigma'_p = X \Rightarrow X\sigma_p \sigma'^{-1}_p = X$.

Insgesamt besteht daher ϕ nur aus Fixpunkten von $\sigma_p \sigma'^{-1}_p$. Da ϕ nach Folg.4, Bem.b nie Teilmenge einer Hyperebene ist, gilt notwendig $\sigma_p \sigma'^{-1}_p = I \Rightarrow \sigma_p = \sigma'_p$.

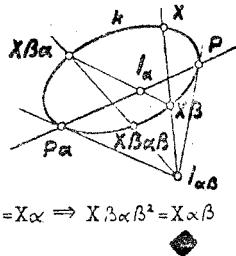
6) Ist P nicht selbstkonjugiert bezüglich einer projektiven Nichtnullpolarität λ und σ_p die harmonische Homologie mit Zentrum P und Achse $P\lambda$, so gilt $\lambda\sigma_p^* = \sigma_p\lambda$.

Bew.: Fall 1: λ ist hyperbolisch. Die zugehörige Quadrik ϕ bleibt bei σ_p wegen $P \notin \phi$ als Ganzes fest und λ ist als Polarsystem von ϕ daher mit σ_p verträglich $\Rightarrow \lambda = \sigma_p^{-1} \lambda \sigma_p^*$.

Fall 2: λ ist elliptisch. Für P gilt $P\lambda\sigma_p^* = P\lambda = P\sigma_p\lambda$; ebenso gilt für $X \notin P\lambda$ dann $X\lambda \tilde{I} P \Rightarrow X\lambda\sigma_p^* = X\lambda = X\sigma_p\lambda$. Sei nun $X \neq P \wedge X \notin \rho_{\lambda}$ und $g = PX$. Die Kogerade $\hat{g}\lambda$ ist zu g windschief, da für jeden gemeinsamen Punkt S notwendig $S \tilde{I} X\lambda \forall X \in \rho_g$ gilt $\Rightarrow S\lambda \tilde{I} X$; aus $S \notin g \Rightarrow S \tilde{I} S\lambda$ im Widerspruch zu λ elliptisch. Weiters existiert wegen λ elliptisch auf g kein Punkt, dessen Polarebene g enthält, sodaß in ρ_g eine projektive Involution α konjugierter Punkte nach Folg.5, Bem.c erklärt ist und $X\lambda = X\alpha Vg\hat{\lambda}$. Aus $P \notin g \Rightarrow P\lambda \tilde{I}^* \hat{g}\lambda$ und daher bleiben alle Punkte von $\rho_{\hat{\lambda}}$ bei σ_p einzeln fest. Ist $\beta := \sigma_p|_{\rho_g}$ die hyperbolische Involution mit den Fixpunkten P und $P\alpha = P\lambda.g$, so ist $X\lambda\sigma_p^* = X\alpha\beta Vg\hat{\lambda}$ und $X\sigma_p\lambda = X\beta\alpha Vg\hat{\lambda}$; wegen des Hilfssatzes in der folgenden Bemerkung gilt daher $\lambda\sigma_p^* = \sigma_p\lambda$.

Bemerkung: Hilfssatz: Ist α eine projektive Involution auf g mit $P \mapsto P\alpha$ ($\neq P$), so ist die hyperbolische Involution β auf g mit den Fixpunkten $P, P\alpha$ mit α vertauschbar.

Bew.: Bezeichnen wir die auf einen Steinerkegelschnitt k projizierten Punkte wie die entsprechenden Punkte in $\mathcal{P}_g$, und die Involutionen ebenfalls mit α und β , so liegt das Involutionenzentrum I_α von α nach Voraussetzung auf der Polaren $PP\alpha$ des Involutionenzentrums I_β bezüglich k . Für $X=P$ und $X=P\alpha$ gilt $X\alpha\beta=X\beta\alpha$. Ist $X \neq P, P\alpha$, so sind $X, X\beta, X\beta\alpha, X\beta\alpha\beta$ ein k einbeschriebenes Viereck mit I_β als eine Diagonalecke; eine weitere Diagonalecke liegt auf $X\beta X\beta\alpha$ und ist nach 2.5, Folg. 2a konjugiert zu $I_\beta \Rightarrow I_\alpha$ ist eine Diagonalecke $\Rightarrow XX\beta\alpha\beta \cap I_\alpha \Rightarrow X\beta\alpha\beta = X\alpha \Rightarrow X\beta\alpha\beta^2 = X\alpha\beta$ und mit $\beta^2 = 1$ folgt die Behauptung.



7) Nach Def. 5.5c wird eine nicht reguläre quadratische Varietät $\Gamma \subset \Pi_k(\mathcal{W}(K))$ durch eine nicht reguläre quadratische Form q beschrieben und q hat eine Normalform der Gestalt $q = \lambda_0(x^0)^2 + \dots + \lambda_k(x^k)^2$ mit $\lambda_0 \dots \lambda_k \neq 0 \wedge 0 \leq k < n$. Wir schreiben für diese Varietät $\Gamma_k^{(n)}$, wobei $\Gamma_n^{(n)}$ die Quadriken sind.

Eigenschaften:

(I) Auf $\Gamma_k^{(n)}$ liegt ein $(n-k-1)$ -dimensionaler Unterraum Π_5 so, daß $\forall Y \in \Gamma_k^{(n)} \wedge \forall X \in \Pi_5$ mit $X+Y$ gilt $\mathcal{P}_{XY} \subset \Gamma_k^{(n)}$. Der Unterraum Π_5 heißt "Spitzenraum von $\Gamma_k^{(n)}$ ".

Bew.: Wir betrachten die durch $x^0=0, \dots, x^k=0$ beschriebenen Hyper Ebenen, also die Kopunkte $K[\delta_j^0, \delta_j^1, \dots, \delta_j^k]$ ($j=0, \dots, k$). Diese $k+1$ Kopunkte bilden einen Simplex in Π^* und bestimmen daher einen Verbindungsraum in Π^* der Kodimension $k \Rightarrow$ die Hyperebenen haben einen Schnittraum Π_5 der Dimension $n-(k+1)$ (vgl. 3.3, Folg. 7).

Für jeden Punkt $X \in \Pi_5$ gilt daher $x^0 = \dots = x^k = 0$,

also $X = (0, \dots, 0, x^{k+1}, \dots, x^n)K$. Einsetzen in die Normalform liefert $X \in \Gamma_k^{(n)} \forall X \in \Pi_5 \Rightarrow \Pi_5 \subset \Gamma_k^{(n)}$. Für $Y \in \Pi_5 \subset \Gamma_k^{(n)}$ mit $Y+X \Rightarrow \mathcal{P}_{XY} \subset \Pi_5 \subset \Gamma_k^{(n)}$.

Sei $Y = (y^0, \dots, y^n)K \in \Gamma_k^{(n)} \setminus \Pi_5 \Rightarrow \lambda_0(y^0)^2 + \dots + \lambda_k(y^k)^2 = 0 \wedge (y^0, \dots, y^k) \neq (0, \dots, 0)$. Für jeden Punkt P der Geraden XY gilt:

$P = ((0, \dots, 0, x^{k+1}, \dots, x^n)\lambda + (y^0, \dots, y^n)\mu)K = (y^0\mu, \dots, y^k\mu, x^{k+1}\lambda + y^{k+1}\mu, \dots, x^n\lambda + y^n\mu)K$.

Einsetzen in die Normalform ergibt

$\lambda_0(y^0\mu)^2 + \dots + \lambda_k(y^k\mu)^2 = \mu^2[\lambda_0(y^0)^2 + \dots + \lambda_k(y^k)^2] = \mu^2 \cdot 0 = 0 \quad \forall \lambda: \mu$
 $\Rightarrow \forall P \in \mathcal{P}_{XY}$ gilt $P \in \Gamma_k^{(n)} \Rightarrow \mathcal{P}_{XY} \subset \Gamma_k^{(n)}$.

Bemerkung: Aus den folgenden Eigenschaften (II) und (III) ergibt sich mit Folg. 4, Bem. b sofort, daß die für die Punkte des Spitzenraumes nach (I) kennzeichnende Eigenschaft nur den Punkten von $x^0 = \dots = x^k = 0$ zukommt; deshalb wurde dieser Unterraum mit Π_5 bezeichnet.

(II) Existiert außerhalb des Spitzenraumes Π_s einer quadratischen Varietät $\Gamma_k^{(n)}$ mit $2 \leq k < n$ noch ein Punkt P von $\Gamma_k^{(n)}$, so besteht $\Gamma_k^{(n)}$ aus den Verbindungsräumen $\Pi_s \vee \bar{X}$ von Π_s mit allen Punkten $\bar{X}$ einer Quadrik $\bar{\Phi}$ in einem zu Π_s (bzgl. Π) komplementären Unterraum $\bar{\Pi}_s$.
(Kurz: $\Gamma_k^{(n)}$ entsteht durch Projektion von $\bar{\Phi}$ aus Π_s)

Bew.: Π_s wird durch $x^0 = \dots = x^k = 0$ beschrieben. Nach Voraussetzung existiert ein Punkt $P = (p^0, \dots, p^n)K \in \Gamma_k^{(n)} \setminus \Pi_s$ d.h. $(p^0, \dots, p^k) \neq (0, \dots, 0)$ und $\lambda_0(p^0)^2 + \dots + \lambda_k(p^k)^2 = 0$.

Durch $x^{k+1} = \dots = x^n = 0$ wird ein k -dimensionaler Unterraum $\bar{\Pi}_s$ beschrieben, denn die $n-k$ Kopunkte $K[\delta_j^0, \delta_j^1, \dots, \delta_j^n]$ ($j = k+1, \dots, n$) spannen einen Unterraum in Π^* der Kodimension $n-k-1$ auf; der Schnittraum $\bar{\Pi}_s$ dieser $n-k$ Hyperebene ist daher ein $(n-1)-(n-k-1) = k$ -dimensionaler Unterraum von Π . Wegen $k \geq 2$ ist $\bar{\Pi}_s$ mindestens eine projektive Ebene (für $k < 2$ würde in $\bar{\Pi}_s$ keine Quadrik $\bar{\Phi}$ existieren).

$\bar{\Pi}_s \cap \Gamma_k^{(n)} =: \bar{\Phi}$ wird durch $\lambda_0(x^0)^2 + \dots + \lambda_k(x^k)^2 = 0$ beschrieben. Diese quadratische Form ist bezüglich $\bar{\Pi}_s$ regulär wegen $k = \dim \bar{\Pi}_s$ und außerdem ist ihre Nullstellenmenge nicht leer: Speziell für $(p^{k+1}, \dots, p^n) = (0, \dots, 0)$ gilt $P \in \bar{\Pi}_s$ und damit $P \in \bar{\Pi}_s \cap \Gamma_k^{(n)}$; gilt dagegen $(p^{k+1}, \dots, p^n) \neq (0, \dots, 0)$, so schreibt sich jeder Punkt der Geraden, die den Punkt $(0, 0, \dots, 0, p^{k+1}, \dots, p^n)K \in \bar{\Pi}_s$ und den Punkt P verbindet in der Form $(p^0\mu, \dots, p^k\mu, p^{k+1}(\lambda+\mu), \dots, p^n(\lambda+\mu))K$; er gehört genau dann zu $\bar{\Pi}_s$, wenn ab der $(k+1)$ -ten Koordinate alle Koordinaten verschwinden, was z.B. für $\mu = -\lambda = 1$ zutrifft. Der Punkt $\bar{P} = (p^0, \dots, p^k, 0, 0, \dots, 0)K$ gehört also zu $\bar{\Pi}_s$ und nach Eigensch.(I) zu $\Gamma_k^{(n)} \Rightarrow \bar{P} \in \bar{\Phi}$. Nun ist noch $\Gamma_k^{(n)} = \bigcup_{\bar{X} \in \bar{\Phi}} \Pi_s \vee \bar{X}$ zu zeigen. Klar ist, daß Π_s in beiden Mengen enthalten ist.

(a) $X \in \Gamma_k^{(n)} \setminus \Pi_s$; ebenso wie oben für P erkennt man, daß ein Punkt $\bar{X}$ existiert mit $\bar{X} \in (\Pi_s \vee X) \cap \bar{\Pi}_s \wedge \bar{X} \in \bar{\Phi} \Rightarrow X \in \Pi_s \vee \bar{X} \wedge \bar{X} \in \bar{\Phi} \Rightarrow X \in \bigcup_{\bar{X} \in \bar{\Phi}} \Pi_s \vee \bar{X}$.

(b) $X \in \bigcup_{\bar{X} \in \bar{\Phi}} \Pi_s \vee \bar{X} \Rightarrow$ es existiert ein Punkt $X_1 \in \Pi_s$ mit $X \in X_1 \vee \bar{X}$ und wegen $X_1 \in \Pi_s \wedge \bar{X} \in \bar{\Phi} \subset \Gamma_k^{(n)}$ folgt nach (I): $\mathcal{P}_{X, \bar{X}} \subset \Gamma_k^{(n)} \wedge X \in \mathcal{P}_{X, \bar{X}} \Rightarrow X \in \Gamma_k^{(n)}$. ◆

(III) Wir betrachten noch die quadratischen Varietäten $\Gamma_0^{(n)}$ und $\Gamma_1^{(n)}$.
 $k=0 \Rightarrow \lambda_0(x^0)^2 = 0$ ist die Normalform $\Rightarrow$ die quadratische Varietät ist die Hyperebene $x^0 = 0$ ("Doppelhyperebene").

$k=1 \Rightarrow \lambda_0(x^0)^2 + \lambda_1(x_1)^2 = 0$ ist die Normalform. Es gilt $\dim \overline{\Pi}_5 = n-k-1 = n-2$, d.h. der Spitzenraum ist eine Kogerade. Wir haben zu unterscheiden:

Fall 1: Es existiert kein Punkt von $\Gamma_1^{(n)}$ außerhalb von $\overline{\Pi}_5 \Rightarrow \Gamma_1^{(n)} = \overline{\Pi}_5$.

Fall 2: $\exists P \in \Gamma_1^{(n)} \setminus \overline{\Pi}_5 \Rightarrow PV\overline{\Pi}_5$ ist eine Hyperebene, für die nach (I) gilt $P \vee \overline{\Pi}_5 \subset \Gamma_1^{(n)}$. Da $\overline{\Pi}_5$ durch $x^0 = x^1 = 0$ dargestellt wird, ist $P \vee \overline{\Pi}_5$ ein zu den Kopunkten $K[1, 0, \dots, 0]$ und $K[0, 1, 0, \dots, 0]$ kollinearer Kopunkt, und die Hyperebene $P \vee \overline{\Pi}_5$ hat daher eine Gleichung der Form $\alpha x^0 + \beta x^1 = 0$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Ist z.B. $\beta \neq 0$, so gilt für $P \in (\overline{\Pi}_5 \vee P) \setminus \overline{\Pi}_5$ sicher $x^0 \neq 0$; setzen wir $x := \frac{x^1}{x^0}$, $a := -\frac{\alpha}{\beta}$, so lautet die Gleichung von $\overline{\Pi}_5 \vee P$ dann $x = a$ und wegen $\overline{\Pi}_5 \vee P \subset \Gamma_1^{(n)}$ ist a eine Nullstelle des quadratischen Polynoms $\lambda_0 + \lambda_1 x^2$. Dann existiert aber ein lineares Polynom $\gamma x + \delta$ so, daß gilt $\lambda_0 + \lambda_1 x^2 = (x-a)(\gamma x + \delta)$, also $\lambda_0(x^0)^2 + \lambda_1(x^1)^2 = (\alpha x^0 + \beta x^1)(\delta x^0 + \gamma x^1)$. Dabei ist $\delta x^0 + \gamma x^1 = 0$ eine von $P \vee \overline{\Pi}_5$ verschiedene Hyperebene, denn wie Vergleich der Koeffizienten zeigt, gilt $0 = \alpha\gamma + \beta\delta, \lambda_0 = \alpha\delta \xrightarrow{\lambda_0 \neq 0} \alpha \neq 0 \wedge \delta \neq 0, \lambda_1 = \beta\gamma \xrightarrow{\lambda_1 \neq 0} \beta \neq 0 \wedge \gamma \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \beta\delta = \alpha\gamma + \alpha\gamma = 2\alpha\gamma \neq 0$ (Char $K \neq 2$).

Im Fall 2 besteht $\Gamma_1^{(n)}$ somit aus zwei verschiedenen Hyperebenen durch die Kogerade $\overline{\Pi}_5$.

Satz 5.5: Eine Korrelation $\delta: \Pi(\mathcal{Q}(K)) \rightarrow \Pi(\mathcal{Q}^*(K))$ ist genau dann projektiv, wenn sie durch eine nicht ausgeartete Bilinearform beschrieben wird. Eine projektive Korrelation existiert genau dann, wenn K kommutativ ist. Jede Nullpolarität ist projektiv. In $\Pi(\mathcal{Q}(K))$ ist jede hyperbolische Polarität das Polarsystem einer Quadrik, welche genau die regulären quadratischen Varietäten sind. Jede nicht reguläre quadratische Varietät $\Gamma_k^{(n)}$ entsteht für $k \geq 2$ durch Projektion einer in einem Unterraum $\overline{\Pi}_5$ liegenden Quadrik aus dem zu $\overline{\Pi}_5$ komplementären Spitzenraum $\overline{\Pi}_5$ von $\Gamma_k^{(n)}$ und ist für $k=1$ eine Kogerade oder ein Paar verschiedener Hyperebenen und für $k=0$ eine (doppelt zu zählende) Hyperebene.

Bemerkung: Ist bezüglich einer Basis in $\mathcal{Q}(K)$ (K kommutativ, Char $K \neq 2$, $2 \leq \dim \mathcal{Q} = n+1 < \infty$) die quadratische Form q in der Koordinatendarstellung $q = a_{jk} x^j x^k$ ($a_{jk} = a_{kj}$) gegeben, so kann man Normalform wie folgt herstellen:

Fall a: Es existiert ein rein quadratisches Glied, o.B.d.A. $a_{oo} \neq 0$ (sonst Änderung der Indizierung).
 $q = a_{jk} x^j x^k = a_{oo}(x^o + \frac{a_{o1}}{a_{oo}} x^1 + \dots + \frac{a_{on}}{a_{oo}} x^n)^2 + \sum_j b_{jk} x^j x^k$.

Zum Basiswechsel $\pi_i = a_i^k \pi_k$ mit $\pi_0 = \pi_0 + \frac{a_{01}}{a_{00}} \pi_1 + \dots + \frac{a_{0n}}{a_{00}} \pi_n$, $\pi_k = \pi_k$ ($k=k' \in \{1, \dots, n\}$) und der Transformationsdeterminante $1 \neq 0$ gehört die Koordinatentransformation $x^0 = x^0 + \frac{a_{01}}{a_{00}} x^1 + \dots + \frac{a_{0n}}{a_{00}} x^n$, $x^k = x^k$, und bezüglich der neuen Basis hat q die Koordinatendarstellung (nach Rückkehr zur alten Bezeichnung): $q = a_{00}(x^0)^2 + \sum_{i,j} b_{ij} x^i x^j$. In der letzten Summe tritt x^0 nicht auf; enthält diese Summe ein rein quadratisches Glied, wird das Verfahren iteriert. Nach endlich vielen Schritten entsteht

$$q = a_{00}(x^0)^2 + \dots + a_{nn}(x^n)^2 + \sum_{i,j} b_{ij} x^i x^j,$$

wobei die unter Umständen vorhandene Schlußsumme keine rein quadratischen Glieder enthält.

Fall b: Es gibt kein rein quadratisches Glied: $a_{ii} = 0$; nach Definition einer quadratischen Form ist ein Koeffizient $\neq 0$, z.B. $a_{01} \neq 0$ (sonst Änderung der Indizierung).

Zum Basiswechsel

$$\pi_0 = \pi_0 + \pi_1, \pi_1 = -\pi_0 + \pi_1, \pi_k = \pi_k \quad (k=k' \in \{2, \dots, n\})$$

mit der Transformationsdeterminante $2 \neq 0$ gehört die Koordinatentransformation

$x^0 = x^0 + x^1$, $x^1 = -x^0 + x^1$, $x^k = x^k$, und bezüglich der neuen Basis hat q die Koordinatendarstellung (nach Rückkehr zur alten Bezeichnung): $q = 2a_{01}(x^1)^2 + \dots$, sodaß Fall a vorliegt.

Nach endlich vielen Schritten entsteht (nach Bezeichnungsänderung) die Normalform:

$$q = \lambda_0(x^0)^2 + \dots + \lambda_k(x^k)^2 \quad 0 \leq k \leq n, \lambda_0 \dots \lambda_k \neq 0.$$

Ist die Nullstellenmenge in $\mathbb{W}(\mathcal{W}(K))$ nicht leer (leere Nullstellenmenge kann nur für $k=n$ auftreten), so kann die Varietät $\Gamma_k^{(n)}$ an Hand der Normalform von q diskutiert werden.

Aus der Konstruktion ergibt sich: Die Reduktion auf Normalform ist auf verschiedene Weisen durchführbar.

5.6. Quadratische Varietäten in klassischen projektiven Räumen über Vektorräumen

Nach 5.5, Folg. 2 besitzt jede symmetrische nicht triviale Bilinearform $(\epsilon, \eta) \sigma$ in $\mathbb{W}(\mathcal{W}(K))$ bezüglich einer geeigneten Basis in $\mathcal{W}$ die Koordinatendarstellung

$$(\epsilon, \eta) \sigma = \lambda_0 x^0 y^0 + \dots + \lambda_k x^k y^k \quad \text{mit } \lambda_0 \dots \lambda_k \neq 0, \quad 0 \leq k \leq n$$

und ist genau für $k=n$ nicht ausgeartet. Die quadratische Form $q = (\epsilon, \epsilon) \sigma$ beschreibt genau dann eine quadratische Varietät $\Gamma_k^{(n)}$, wenn ein $\epsilon_0 \in \mathcal{W} \setminus \{0\}$ existiert mit $\epsilon_0 q = 0$ und nach 5.5, Folg. 4 sind die regulären quadratischen Varietäten $\Gamma_k^{(n)}$ genau die Quadriken. Wir wollen weitere Eigenschaften quadratischer Varietäten beschreiben.

Folgerungen:

1) Dual zu Def. 5.5c: Die Menge aller Hyperebenen $K\alpha^*$ von $\mathbb{W}_K(\mathcal{W}(K))$, deren Bild bei einer quadratischen Form $q: \mathcal{W}^* \rightarrow K$ die Null ist ($\alpha^* q = 0$), heißt quadratische Varietät Γ^* (Hyperfläche 2.Klasse) in $\mathbb{W}_K^*$, falls sie nicht leer ist. Ist q^* regulär, so heißt die quadratische Varietät regulär.

Es gibt stets eine Basis $\{x^0, \dots, x^n\} \in \Pi_k^*$ so, daß q^* mit $\alpha^* = a_j x^{*j}$ koordinatenmäßig durch $\alpha^* q^* = \lambda_0 (a_0)^2 + \dots + \lambda_k (a_k)^2$ mit $Q \neq k \leq n$ dargestellt wird und q^* bzw. $\Gamma_k^{*(n)}$ ist regulär genau dann, wenn $k=n$ gilt.

Für nicht reguläre quadratische Varietäten Γ^* gelten die zu 5.5, Folg. 7 dualen Aussagen (vgl. dabei 3.8, Folg. 9):
In $\Gamma_k^{*(n)}$ liegt ein $(n-k-1)$ -dimensionaler Unterraum Π_5^* von Hyperebenen (d.i. die Menge aller Hyperebenen, die einen festen $n-1-(n-k-1)=k$ -dimensionalen Unterraum von Π enthalten), sodaß für alle Hyperebenen $\eta \in \Gamma_k^{*(n)}$ und für jede Hyperebenen $\xi(\eta) \in \Pi_5^*$ folgt: Das Hyperebenenbüschel um die Kogerade $\xi\eta$ gehört ganz zu $\Gamma_k^{*(n)}$.

Sei $\sigma: \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow K$ eine nichtausgeartete Bilinearform zur antilinearen Bijektion $a_f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}^*$, also $(\epsilon, \eta)\sigma = \langle \epsilon^{a_f}, \eta \rangle$.

Die Menge der Tangentialhyperebenen der durch $\epsilon q = (\epsilon, \epsilon)\sigma = 0$ dargestellten regulären quadratischen Varietät $\Gamma_k^{*(n)} = \Phi$ (Quadrik) in $\Pi_k(\mathcal{W}(K))$ ist eine durch $\alpha^* q^* = (\alpha^*, \alpha^*)\sigma^* = 0$ dargestellte reguläre quadratische Varietät in Π_k^* , wobei die nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform $\sigma^*: \mathcal{W}^* \times \mathcal{W}^* \rightarrow K$ bestimmt ist durch $(\alpha^*, \beta^*)\sigma^* := (\alpha^{*a_f^{-1}}, \beta^{*a_f^{-1}})\sigma$.

Bew.: Ist λ die zu Φ gehörige hyperbolische projektive Polarität, so erhält man alle Tangentialhyperebenen von Φ , wenn man jeden Punkt $X = \epsilon K \in \Phi$ der Polarität λ unterwirft:

$$\{\xi \in \Pi^* \mid \xi \text{ Tangentialhyperebene von } \Phi\} = \{X \lambda \in \Pi^* \mid X = \epsilon K \in \Phi\} =: \Phi \lambda.$$

Mit $X \lambda = (\epsilon K) \lambda = K(\epsilon^{a_f})$ folgt

$$\Phi \lambda = \{K(\epsilon^{a_f}) \in \Pi^* \mid \epsilon q = 0\} = \{K(\epsilon^{a_f}) \in \Pi^* \mid (\epsilon, \epsilon)\sigma = 0\}.$$

Wir setzen $\epsilon^{a_f} := \alpha^* (\in \mathcal{W}^*)$; da a_f bijektiv ist gilt

$$\Phi \lambda = \{K \alpha^* \in \Pi^* \mid (\alpha^{*a_f^{-1}}, \alpha^{*a_f^{-1}})\sigma = 0\}.$$

Wegen $\Phi \neq \emptyset \Rightarrow \Phi \lambda \neq \emptyset$ sind wir fertig, wenn gezeigt ist, daß $\alpha^* q^* := (\alpha^{*a_f^{-1}}, \alpha^{*a_f^{-1}})\sigma$ eine reguläre quadratische Form $\mathcal{W}^* \rightarrow K$ ist.

Dazu definieren wir $\sigma^*: \mathcal{W}^* \times \mathcal{W}^* \rightarrow K$ durch $(\alpha^*, \beta^*)\sigma^* := (\alpha^{*a_f^{-1}}, \beta^{*a_f^{-1}})\sigma$; falls σ^* eine nichtausgeartete Bilinearform ist, so ist diese nach ihrer Definition sicher symmetrisch und zu q^* assoziiert.

Überprüfung der Linearität von σ^* im ersten Argument:

$$\begin{aligned} (a_1 \alpha_1^* + a_2 \alpha_2^*, \beta^*)\sigma^* &\stackrel{\text{Def.}}{=} [(a_1 \alpha_1^* + a_2 \alpha_2^*)^{a_f^{-1}}, \beta^{*a_f^{-1}}]\sigma \stackrel{\text{antilinear}}{=} \\ &= [(a_1^{\alpha_1^* a_f^{-1}}) a_1 + (a_2^{\alpha_2^* a_f^{-1}}) a_2, \beta^{*a_f^{-1}}]\sigma \stackrel{\text{lin.}}{=} (a_1^{\alpha_1^* a_f^{-1}}, \beta^{*a_f^{-1}})\sigma a_1 + (a_2^{\alpha_2^* a_f^{-1}}, \beta^{*a_f^{-1}})\sigma a_2 \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{i=1}^k a_i (\alpha_i^*, \beta^*)\sigma^* + a_2 (\alpha_2^*, \beta^*)\sigma^* \quad \forall \alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta^* \in \mathcal{W}^* \wedge \end{aligned}$$

$$\wedge \forall a_1, a_2 \in K.$$

Ebenso ist die Linearität von σ^* im zweiten Argument zu beweisen. σ^* ist nicht ausgeartet, denn es gilt $(\alpha^*, \beta^*) \sigma^* = 0 \quad \forall \beta^* \in \mathcal{W}^* \Rightarrow (\alpha^* \alpha_f^{-1}, \beta^* \alpha_f^{-1}) \sigma = 0 \quad \forall \beta^* \in \mathcal{W}^*$. Da α_f^{-1} bijektiv ist, bedeutet dies $(\alpha^* \alpha_f^{-1}, \eta) \sigma = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{W}$ und da σ nicht ausgeartet ist, folgt hieraus $\alpha^* \alpha_f^{-1} = \alpha_0$. Nun ist α_f^{-1} bijektiv und daher $\alpha^* = \alpha_0^*$; wegen $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{W}^* < \infty$ ist somit σ^* nicht ausgeartet. ◆

Bemerkungen: (a) In gleicher Weise erkennt man, daß die Menge der Pole aller Hyperebenen einer durch $(\alpha^*, \alpha^*) \sigma^* = \alpha^* \alpha^*$ beschriebenen regulären quadratischen Varietät $\Gamma_2^{(n)}$ in $\mathbb{P}_{2n}^1(\mathcal{W}(K))$ bezüglich der durch σ^* beschriebenen hyperbolischen Polarität eine Quadrik ist. Die Vereinigungsmenge der Punkte und der Tangentialhyperebenen einer Quadrik ist daher selbstdual.

(b) Ist $\{\pi_0, \dots, \pi_n\}$ eine Basis in $\mathcal{W}$ und $\{\pi^{*0}, \dots, \pi^{*n}\}$ die duale Basis in $\mathcal{W}^*$, so wird α_f bzw. σ bzw. q bzw. ϕ durch eine reguläre symmetrische Matrix (a_{jk}) beschrieben (vgl. 5.3, Folg.3, Bem.b):
 $\pi_j \alpha_f = a_{jk} \pi^{*k}$ für $\alpha = \pi_i x^i \wedge \alpha_f = a_{ij} \pi^{*j} \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_{ij} = (x^i \alpha_f) a_{jk} [\text{vgl. 5.3, Folg.3}]; (\alpha, \eta) \sigma = x^i a_{jk} y^k; \alpha q = x^i a_{jk} x^k.$
 Nun ist für $\alpha^*, \beta^* \in \mathcal{W}^*$ dann $(\alpha^*, \beta^*) \sigma^* \stackrel{!}{=} (\alpha^* \alpha_f^{-1}, \beta^* \alpha_f^{-1}) \sigma$.
 Setzen wir $\alpha^* \alpha_f^{-1} =: \alpha = \pi_i x^i$ und $\beta^* \alpha_f^{-1} =: \eta = \pi_j y^j$, so gilt
 $(\alpha^* \alpha_f^{-1}) \alpha_f = \alpha^* = a_{jk} \pi^{*k} = (\pi_i x^i) \alpha_f = x^i (\pi_j \alpha_f) = x^i a_{jk} \pi^{*k} \Rightarrow a_{ik} = x^i a_{jk}.$
 Ist (α^{kl}) die zu (a_{jk}) durch $a_{jk} \alpha^{kl} = \delta_j^k$ eindeutig bestimmte inverse Matrix, die mit (a_{jk}) ebenfalls symmetrisch ist, so folgt
 $a_{ik} \alpha^{kl} = x^i a_{jk} \alpha^{kl} = x^i \delta_j^k = x^i \delta_j^k = x^i \delta_j^k$; ebenso: $y^l = b_{kl} \alpha^{kl} \Rightarrow$
 $(\alpha^*, \beta^*) \sigma^* = (\alpha, \eta) \sigma = x^i a_{jk} y^k = a_{ik} \alpha^{kl} b_{kl} y^k = a_{ik} b_{kl} \alpha^{kl} = a_{ik} b_{kl} \alpha^{kl}.$
 $\xRightarrow{\text{Kommutativgesetz}} (\alpha^*, \beta^*) \sigma^* = a_{ik} \alpha^{kl} b_{kl}.$

Die zu σ^* bzw. q^* gehörige Matrix (α^{kl}) ist die zu (a_{jk}) inverse Matrix.

2) In $\mathbb{P}_{2n}^1(\mathcal{W}(K))$ sind die Punktmengen der quadratischen Kegel genau jene quadratischen Varietäten $\Gamma_2^{(n)}$, welche außerhalb des Spitzenraumes einen Punkt besitzen.

Bew.: (a) Der Spitzenraum $\mathbb{T}_S$ einer quadratischen Varietät $\Gamma_2^{(n)}$ in $\mathbb{P}_{2n}^1$ ist nach 5.5, Folg.7 ein $(n-k-1)=3-2-1=0$ -dimensionaler Raum, also ein Punkt S_0 ; da $k \geq 2$ gilt und nach Voraussetzung außer S_0 noch ein Punkt von $\Gamma_2^{(n)}$ existiert, folgt nach 5.5, Folg.7: In einem zum Punkt S_0 komplementären Unterraum, also einer Ebene $\overline{\mathbb{T}}_S = \pi$ mit $S_0 \notin \pi$ existiert eine Quadrik $\overline{\phi}$, also ein Kegelschnitt k in π so, daß $\Gamma_2^{(n)}$ aus allen Verbindungsgeraden $S_0 \vee X$ mit $X \in k$ besteht. Nach 4.2, Folg.1(b) ist aber die Projektion des Kegelschnitts k aus dem Punkt S_0 ein quadratischer Geradenkegel, d.h. $\Gamma_2^{(n)}$ ist ein quadratischer Kegel.

(b) Sei umgekehrt Γ ein quadratischer Kegel in $\mathbb{P}_n(K)$ mit der Spitze $S = fK$. Wir ergänzen zu einer Basis $\{n_0, n_1, n_2, n_3 = f\}$ in $\mathcal{W}$. Dann ist $\Pi(H(n_0, n_1, n_2)) =: \pi$ eine Ebene, die wegen $\{n_0, \dots, n_3\}$ l.u. nicht durch S geht, und daher ist $\Gamma \cap \pi$ nach 4.2, Folg.1(b) ein Punktkegelschnitt k (d.h. eine Quadrik $\bar{\Phi}$ in π), und k wird durch eine quadratische Form $q: H(n_0, n_1, n_2) \rightarrow K$ beschrieben. Nach geeigneter Basiswahl in $H(n_0, n_1, n_2)$ läßt sich q in Diagonalform schreiben:

$q = \lambda_0(x^0)^2 + \lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2$ mit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ und $e = n_0 x^0 + n_1 x^1 + n_2 x^2$, wobei $\{n_0, n_1, n_2\}$ die neue Basis in $H(n_0, n_1, n_2)$ ist. Es ist q aber auch eine nicht reguläre quadratische Form zu $n=3$ und $k=2$ und beschreibt daher eine quadratische Varietät $\Gamma_2^{(n)}$. Diese ist nach (a) ein quadratischer Kegel, der nach obiger Form von eq den Kegelschnitt k enthält und den Punkt $x^0 = x^1 = x^2 = 0$, also S_0 , als Spitze besitzt; da durch Leitkegelschnitt und Spitze ein quadratischer Kegel Γ eindeutig bestimmt ist, gilt $\Gamma = \Gamma_2^{(n)}$.

Die Klassifikation der quadratischen Varietäten ist ein rein algebraisches Problem und nur durchführbar, wenn über K genügend Information vorliegt. Wir begnügen uns mit zwei Fällen:

3) In $\mathbb{P}_n(K)$ mit kommutativem, quadratisch abgeschlossenem Körper K und $\text{Char } K \neq 2$ existiert zu jedem k mit $0 \leq k \leq n$ im Sinne von $\text{PGL}(\mathbb{P}_n(K))$ genau eine quadratische Varietät $\Gamma_k^{(n)}$, also insbesondere genau eine Quadrik.

Bew.: Die quadratische Varietät $\Gamma_k^{(n)}$ ist die Nullstellenmenge $\subset \mathbb{P}_n(K)$ der quadratischen Form q , welche in einer geeigneten Basis in $\mathcal{W}$ die Diagonalform $q = \lambda_0(x^0)^2 + \dots + \lambda_k(x^k)^2$ besitzt. Da K quadratisch abgeschlossen ist, gilt $\sqrt{\lambda_i} \in K$ und $\{n_0, \dots, n_n\} \mapsto \{\sqrt{\lambda_0} n_0, \dots, \sqrt{\lambda_k} n_k, n_{k+1}, \dots, n_n\}$ ist wegen $\lambda_0, \dots, \lambda_k \neq 0$ ein Basiswechsel zur Koordinatentransformation $(x^0, \dots, x^n) \mapsto (\sqrt{\lambda_0} x^0, \dots, \sqrt{\lambda_k} x^k, x^{k+1}, \dots, x^n)$. Nach ihrer Anwendung und Rückkehr zur alten Bezeichnung gilt $q = (x^0)^2 + \dots + (x^k)^2$. Für $k < n$ ist $e_0 = (0, \dots, 0, 1)$ und für $k = n$ ist $e_0 = (1, 0, \dots, 0, \sqrt{-1})$ eine nicht-triviale Nullstelle von q , so daß zu jedem $k \in \{0, \dots, n\}$ eine quadratische Varietät existiert. Analog wie in 5.5, Folg.1 folgt, daß je zwei quadratische Varietäten zu gleichem k , deren zugehörige quadratische Formen bezüglich geeigneter Basen in $\mathcal{W}$ stets dieselbe Diagonalform besitzen, projektiv kollinear sind.

Andererseits können zwei quadratische Varietäten zu verschiedenen k -Werten nicht kollinear sein, da nach 5.5, Folg.7 für den Spitzenraum $\overline{\Pi}_5$ von $\Gamma_k^{(n)}$ gilt $\dim \overline{\Pi}_5 = n-1-k$. Zusammen mit $\overline{\Pi}_5$ hat daher auch k eine gegenüber Kollineationen invariante Bedeutung.

Bemerkungen: (a) In $\Pi_{kl}(\mathcal{V}(K))$ mit K quadratisch abgeschlossen ist im Sinne von $\text{PGL}(\overline{\Pi}_{kl})$ eine quadratische Varietät durch die Dimension $n-1-k$ ($0 \leq k \leq n$) ihres Spitzenraumes völlig gekennzeichnet.

(b) Ist K quadratisch abgeschlossen, so existiert keine elliptische projektive Polarität, da die Diagonalform $(x, y) \delta = \lambda_1 x^2 y^2 + \dots + \lambda_n x^2 y^2$ ($\lambda_i \neq 0$) einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform durch den Basiswechsel aus dem Beweis von Folg.3 in $x^2 y^2 + \dots + x^2 y^2$ übergeht und daher $\epsilon q = 0$ eine Quadrik ist.

(c) Ist K quadratisch abgeschlossen, so existiert in $\Pi_{kl}^n(K)$ ($n \geq 2$) genau eine Quadrik im Sinne von $\text{PGL}(\overline{\Pi}_{kl}^n(K))$. In $\Pi_{kl}^n(K)$ gibt es dann keine ovale Quadrik, da stets eine ringartige Quadrik existiert (vgl. 4.6, Bem.) und eine ovale Quadrik zu einer ringartigen Quadrik nicht kollinear sein kann; weiters existiert genau ein quadratischer Kegel $\Gamma_2^{(n)}$.

(d) Tabelle der quadratischen Varietäten in $\Pi_{kl}^n(K)$ und $\Pi_{kl}^{*,n}(K)$ für $n=2$ und $n=3$ mit K kommutativ, quadratisch abgeschlossen und $\text{Char } K \neq 2$:

$\Pi_{kl}^2(K)$	$\Pi_{kl}^{*,2}(K)$
$\Gamma_1^{(2)} \dots (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$ Punktmenge eines Kegelschnitts	$\Gamma_1^{*,(2)} \dots (a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 = 0$ Tangentenmenge eines Kegelschnitts
$\Gamma_1^{(2)} \dots (x^0)^2 + (x^1)^2 = 0$ Zwei verschiedene Punktreihen (nach 5.5, Folg.7: außerhalb des nulldimensionalen Spitzenraumes $(0,0,1)K$ existiert ein Punkt von $\Gamma_1^{(2)}$, z.B. $(1, \sqrt{-1}, 0)K$)	$\Gamma_1^{*,(2)} \dots (a^0)^2 + (a^1)^2 = 0$ Zwei verschiedene Geradenbüschel
$\Gamma_0^{(2)} \dots (x^0)^2 = 0$ Eine (doppelt gezählte) Punktreihe (nach 5.5, Folg.7)	$\Gamma_0^{*,(2)} \dots (a^0)^2 = 0$ Ein (doppelt gezähltes) Geradenbüschel
$\Pi_{kl}^3(K)$	$\Pi_{kl}^{*,3}(K)$
$\Gamma_3^{(3)} \dots (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$ Punktmenge einer (ringartigen) Quadrik	$\Gamma_3^{*,(3)} \dots (a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 = 0$ Tangentialebenenmenge einer (ringartigen) Quadrik
$\Gamma_2^{(3)} \dots (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$ Menge der Punkte eines quadratischen Kegels (nach Folg.2: außerhalb der Spitze $(0,0,0,1)K$ existiert ein Punkt von $\Gamma_2^{(3)}$, z.B. $(1, \sqrt{-1}, 0, 0)K$)	$\Gamma_2^{*,(3)} \dots (a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 = 0$ Menge der Ebenen durch die Tangenten eines Kegelschnitts

$$\Gamma_1^{(n)} \dots (x^0)^2 + (x^1)^2 = 0$$

Zwei verschiedene Punktfelder
(nach 5.5, Folg.7: außerhalb des
eindimensionalen Spitzenraumes,
 $x^0 = x^1 = 0$ liegt ein Punkt von $\Gamma_1^{(n)}$,
z.B. $(1, \sqrt{-1}, 0, 0) \in \mathbb{K}$)

$$\Gamma_1^{*(n)} \dots (a^0)^2 + (a^1)^2 = 0$$

Zwei verschiedene Ebenenbündel

$$\Gamma_1^{(n)} \dots (x^0)^2 = 0$$

Ein (doppelt gezähltes) Punkt-
feld (nach 5.5, Folg.7)

$$\Gamma_1^{*(n)} \dots (a^0)^2 = 0$$

Ein (doppelt gezähltes) Ebenen-
bündel

(e) Ein kommutativer, quadratisch abgeschlossener
Körper $\mathbb{K}$ mit $\text{Char } \mathbb{K} \neq 2$, wie er in Folg.3 vorausgesetzt wird, ist
insbesondere der Körper der komplexen Zahlen.

4) Besitzt ein kommutativer Körper $\mathbb{K}$ die beiden Eigenschaften:

(i) -1 ist nicht Summe von Quadraten in $\mathbb{K}$ ($\Rightarrow \text{Char } \mathbb{K} \neq 2$, da
sonst $-1 = 1 = 1 \cdot 1$),

(ii) ist $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, so ist entweder a oder $-a$ Quadrat in $\mathbb{K}$,
so existieren in $\mathbb{T}_k^n(\mathbb{K})$ im Sinne von $\text{PGL}(\mathbb{T}_k^n)$ genau $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ Quadriken
und zu jedem k mit $0 \leq k < n$ existieren genau $\left[\frac{k+1}{2}\right] + 1$ quadratische
Varietäten $\Gamma_k^{(n)}$.

Bemerkung: $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ bedeutet die größte natürliche Zahl $\leq \frac{k+1}{2}$, also
 $\left[\frac{k+1}{2}\right] = \frac{k+1}{2}$ für k ungerade, $\left[\frac{k+1}{2}\right] = \frac{k}{2}$ für k gerade.

Bew.: (a) $\Gamma_k^{(n)}$ wird in einer geeigneten Basis in $\mathbb{K}^n$ durch die quadratische
Form $q = \lambda_0(x^0)^2 + \dots + \lambda_k(x^k)^2$ beschrieben. Da q und $-q$ dieselbe
Varietät bestimmen, können wir durch Indexänderung (was einem
Basiswechsel in $\mathbb{K}^n$ entspricht) erreichen, daß $\sqrt{\lambda_0}, \dots, \sqrt{\lambda_p} \in \mathbb{K}$,
 $\sqrt{-\lambda_{p+1}}, \dots, \sqrt{-\lambda_k} \in \mathbb{K}$ mit $\frac{k+1}{2} \leq p+1 \leq k+1 \leq n+1$. Nach Anwendung des durch
 $(x^0, \dots, x^n) \mapsto (\sqrt{\lambda_0}x^0, \dots, \sqrt{\lambda_p}x^p, \sqrt{-\lambda_{p+1}}x^{p+1}, \dots, \sqrt{-\lambda_k}x^k, x^{k+1}, \dots, x^n)$ be-
schriebenen Basiswechsels und nach Rückkehr zur alten Bezeichnung
gilt $q = (x^0)^2 + \dots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \dots - (x^k)^2$ ($\frac{k+1}{2} \leq p+1 \leq k+1 \leq n+1$).
Für $k < n$ ist $\epsilon_0 = (0, \dots, 0, 1)$ eine nichttriviale Nullstelle, für
 $k = n$ und $p < n$ ist $\epsilon_0 = (1, 0, \dots, 0, 1)$ eine nichttriviale Nullstelle,
während für $k = n$ und $p = n$ wegen (i) keine nichttriviale Nullstelle
existiert (ind.: $\alpha q = 0$ mit $\alpha \neq 0$, o.B.d.A. $\alpha^0 = 1 \neq 0 \Rightarrow (a^1)^2 + \dots + (a^n)^2 = -1$:
Widerspruch zu (i)). Damit existiert zu jedem Zahlenpaar (p, k)
mit $\frac{k+1}{2} \leq p+1 \leq k+1 \leq n+1$ eine quadratische Varietät $\Gamma_k^{(n)}$ und zu jedem
Zahlenpaar (p, n) mit $\frac{n+1}{2} \leq p+1 < n+1$ eine Quadrik. Analog wie in 5.5,
Folg.1 folgt, daß je zwei quadratische Varietäten zu gleichem
 (p, k) , deren zugehörige quadratische Formen bezüglich geeigneter

Basen in $\mathcal{W}$ stets dieselbe Diagonalform besitzen, projektiv kollinear sind. Da es zu jedem $k < n$ genau $\left[\frac{k+1}{2}\right] + 1$ Zahlen p mit $\frac{k+1}{2} \leq p+1 \leq k+1$ gibt, existieren in diesem Fall höchstens ebensoviele nicht projektiv kollineare quadratische Varietäten $\Gamma_k^{(n)}$; für $k=n$ dagegen wird nur für $p < n$ eine Quadrik beschrieben, was höchstens $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ nicht projektiv kollineare Quadriken liefert.

(b) Nun ist noch zu zeigen, daß zwei quadratische Varietäten, die (abgesehen von der Indizierung) verschiedene Normalformen besitzen, nicht kollinear sind, d.h. daß k und p geometrische Bedeutung besitzen. Für k gilt dies analog Folg.3 wegen $\dim \Pi_k = n-1-k$. Weiters gilt: $n-1-p$ ist die Maximaldimension eines projektiven Unterraumes, der in $\Gamma_k^{(n)}$ enthalten ist, da:

Die $p+1$ Hyperebenen $x^0 - x^{p+1} = x^1 - x^{p+2} = \dots = x^{k-p-1} - x^k = x^{k-p} = \dots = x^p = 0$ bilden in Π^* einen p -Simplex, da die Matrix ihrer Hyperebenenkoordinaten den Rang $p+1$ besitzt; ihr Schnittraum $U \subset \Pi^n$ hat daher die Kodimension p und nach 3.8, Folg.7 somit die Dimension $n-1-p$. Der Unterraum U liegt, wie die Normalform von $\Gamma_k^{(n)}$ zeigt, ganz auf $\Gamma_k^{(n)}$. Andererseits haben die $n-p$ Hyperebenen $x^{p+1} = \dots = x^n = 0$ einen Unterraum $V \subset \Pi^n$ der Dimension $n-1-(n-p-1)=p$ gemeinsam, dessen Durchschnitt mit $\Gamma_k^{(n)}$ nach (i) leer ist, da für jeden Punkt dieses Durchschnitts $(x^0)^2 + \dots + (x^p)^2 = 0 = x^{p+1} = \dots = x^n$ gelten müßte. Ist nun $W \subset \Pi^n$ ein beliebiger Unterraum auf $\Gamma_k^{(n)}$, so gilt sicher $\dim(W \cap V) = -1$, $\dim(W \vee V) \leq n$ und damit nach dem Dimensionssatz (3.7, Folg.5) $\dim W + \dim V \leq n-1 \Rightarrow \dim W \leq n-1-p = \dim U$.

Bemerkungen: (a) In $\Pi_k^n(\mathcal{W}(K))$, wobei K die beiden Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt, ist im Sinne von $\text{PGL}(\Pi_k^n)$ eine quadratische Varietät durch die Dimension $n-1-k$ ($0 \leq k \leq n$) ihres Spitzenraumes und die Maximaldimension $n-1-p$ eines auf ihr liegenden Unterraumes völlig gekennzeichnet. Die Zahl $k-p$ heißt der Index der quadratischen Form q .

(b) Besitzt K die beiden Eigenschaften (i) und (ii), so existieren elliptische projektive Polaritäten, deren Normalform nach dem Beweis von Folg.4 lautet: $(\mathcal{U}, \mathcal{W})_6 = x^0 y^0 + \dots + x^n y^n$.

(c) Unter den Voraussetzungen für K in Folg.4 gibt es in $\Pi^3(K)$ genau zwei Quadriken, nämlich eine ringartige und eine ovale. Da die Maximaldimension eines Unterraumes auf einer ringartigen bzw. ovalen Quadrik 1 bzw. 0 ist, gilt für ringartige Quadriken $(p,n)=(1,3)$ und für ovale Quadriken $(p,n)=(2,3)$. Weiters gilt: Ist die Nullstellenmenge einer regulären quadratischen Form $q = a_{ik} x^i x^k$ für $n=3$ in Π^3 nicht leer, so bestimmt q eine ringartige oder ovale Quadrik, je nachdem $\det(a_{ik})$ in K ein Quadrat ist oder nicht.

Bew.: Für die Normalform $(x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ bzw. $(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2$ ist die Determinante 1 bzw. -1, und daher das Kriterium erfüllt. Der Übergang zur Normalform wird durch einen Basiswechsel in $\mathcal{W}$ erreicht, welcher koordinatenmäßig $x_i = t_{ij} x_j'$ mit $\det(t_{ij}) \neq 0$ lautet. Damit gilt $a_{ik} x^i x^k = a_{ik} t_{ij} t_{kl} x_j' x_l' = a_{jk} x_j' x_k' = a_{jk}' x_j' x_k' = \det(a_{jk}') \cdot \det(t_{ij})^2$.

(d) Tabelle aller quadratischen Varietäten in $\mathbb{P}_n^*(K)$ und $\mathbb{P}_n^n(K)$ für $n=2$ und $n=3$ mit K kommutativ, wobei K die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt:

$\mathbb{P}_n^n(K)$	$\mathbb{P}_n^{*n}(K)$
$\Gamma_1^{\omega} \dots (x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$ Punktmenge eines Kegelschnitts	$\Gamma_1^{*\omega} \dots (a^0)^2 + (a^1)^2 - (a^2)^2 = 0$ Tangentenmenge eines Kegelschnitts
$\Gamma_1^{\omega} \dots \begin{cases} (x^0)^2 + (x^1)^2 = 0 \\ (x^0)^2 - (x^1)^2 = 0 \end{cases}$ (a) Der Punkt $(0,0,1)K$ (nach Körpereigenschaft (i) existiert kein weiterer Punkt von Γ_1^{ω}) (b) Zwei verschiedene Punkt-reihen (nach 5.5, Folg.7: außerhalb des nulldimensionalen Spitzenraumes $(0,0,1)K$ existiert ein Punkt von Γ_1^{ω} , z.B. $(1,1,0)K$)	$\begin{cases} (a) \Gamma_1^{*\omega} \dots \begin{cases} (a^0)^2 + (a^1)^2 = 0 \\ (a^0)^2 - (a^1)^2 = 0 \end{cases} \\ (b) \end{cases}$ (a) Die Gerade $K[0,0,1]$ (b) Zwei verschiedene Geraden-büschel
$\Gamma_0^{\omega} \dots (x^0)^2 = 0$ Eine (doppelt gezählte) Punkt-reihe (nach 5.5, Folg.7)	$\Gamma_0^{*\omega} \dots (a^0)^2 = 0$ Ein (doppelt gezähltes) Geraden-büschel
$\mathbb{P}_n^3(K)$	$\mathbb{P}_n^{*3}(K)$
$\Gamma_3^{\omega} \dots \begin{cases} (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0 \\ (x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0 \end{cases}$ Nach Folg.4, Bem.c be-schreibt (a) die Punktmenge einer ovalen Quadrik (b) die Punktmenge einer ring-artigen Quadrik	$\begin{cases} (a) \Gamma_3^{*\omega} \dots \begin{cases} (a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 - (a^3)^2 = 0 \\ (a^0)^2 + (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 = 0 \end{cases} \\ (b) \end{cases}$ (a) die Tangentialebenenmenge einer ovalen Quadrik (b) die Tangentialebenenmenge einer ringartigen Quadrik
$\Gamma_2^{\omega} \dots \begin{cases} (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = 0 \\ (x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0 \end{cases}$ (a) Der Punkt $(0,0,0,1)K$ (nach Körpereigenschaft (i) existiert kein weiterer Punkt auf Γ_2^{ω}) (b) Menge der Punkte eines quadra-tischen Kegels (nach Folg.2: außerhalb der Spitze $(0,0,0,1)K$ existiert ein Punkt von Γ_2^{ω} , z.B. $(1,0,1,0)K$)	$\begin{cases} (a) \Gamma_2^{*\omega} \dots \begin{cases} (a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 = 0 \\ (a^0)^2 + (a^1)^2 - (a^2)^2 = 0 \end{cases} \\ (b) \end{cases}$ (a) Die Ebene $K[1,0,0,0]$ (b) Menge der Ebenen durch die Tangenten eines Kegelschnitts

$$\Gamma_1^{(a)} \dots \left\{ \begin{matrix} x^0 \\ x^1 \end{matrix} \right\}^2 - \left\{ \begin{matrix} x^0 \\ x^1 \end{matrix} \right\}^2 = 0$$

(a) Punktreihe auf der Verbindungsgeraden von $(0,0,1,0)K$ und $(0,0,0,1)K$ (nach 5.5, Folg.7: nach Körpereigenschaft (i) existiert außerhalb des eindimensionalen Spitzenraumes $x^0=x^1=0$ kein Punkt von $\Gamma_1^{(a)}$)
 (b) Zwei verschiedene Punktfelder (nach 5.5, Folg.7: außerhalb des eindimensionalen Spitzenraumes $x^0=x^1=0$ liegt ein Punkt von $\Gamma_1^{(a)}$, z.B. $(1,1,0,0)K$)

$$\Gamma_0^{(a)} \dots (x^0)^2 = 0$$

Ein (doppelt gezähltes) Punktfeld (nach 5.5, Folg.7)

$$(a) \Gamma_1^{(a)} \dots \left\{ \begin{matrix} a^0 \\ a^1 \end{matrix} \right\}^2 + \left\{ \begin{matrix} a^0 \\ a^1 \end{matrix} \right\}^2 = 0$$

(a) Ebenenbüschel um die Schnittgerade von $K[0,0,1,0]$ und $K[0,0,0,1]$

(b) Zwei verschiedene Ebenenbündel

$$\Gamma_0^{(a)} \dots (a^0)^2 = 0$$

Ein (doppelt gezähltes) Ebenenbündel

(e) Ein kommutativer Körper mit den Eigenschaften (i) und (ii), wie er in Folg.4 vorausgesetzt wird, ist insbesondere der Körper der reellen Zahlen.

SATZ 5.6: Die regulären quadratischen Varietäten im dualen projektiven Raum $\Pi_{K^*}^*(\mathcal{W}(K))$ sind genau die Tangentialhyperbenenmengen der Quadriken in $\Pi_K(\mathcal{W})$. Speziell für $K=C$ existiert zu jedem k mit $0 \leq k \leq n$ genau eine quadratische Varietät $\Gamma_k^{(a)}$ im Sinne von $PGL(\Pi_K^n)$, speziell für $K=R$ zu jedem k mit $0 \leq k \leq n$ genau $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 1$ quadratische Varietäten $\Gamma_k^{(a)}$ und $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ Quadriken.

5.7. Der erste Hauptsatz der projektiven Geometrie

Als spezielle Beispiele von Desarguesräumen haben wir in 5.1 die projektiven Räume über Rechtsvektorräumen kennengelernt. Unser Ziel ist zu zeigen: Zu jedem beliebigen Desarguesraum Π_{De} gibt es einen Rechtsvektorraum $\mathcal{W}(K)$ so, daß $\Pi_{De} \cong \Pi(\mathcal{W}(K))$ ist.

Nach 5.1 ist der Algebraisierungskörper K_{alg} von $\Pi(\mathcal{W}(K))$ isomorph zu K . Wenn also unser Ziel überhaupt erreichbar ist, muß K isomorph zum Algebraisierungskörper von Π_{De} sein. Wir benützen i.f. den Algebraisierungskörper von Π_{De} als Körper K und suchen einen geeigneten Rechtsvektorraum über K . Bei der Konstruktion des Algebraisierungskörpers von Π_{De} in 3.5, Folg.7 bzw. 1.12 wurden die folgenden Bezeichnungen benützt: $\mathcal{T}_\omega$; $x \in \mathcal{U}$ mit $\mathcal{P}_x \neq \mathcal{P}_\omega$; $\mathcal{P}_\omega \cap \mathcal{P}_\omega = \{U\}$; $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_x \setminus \{U\}$; $0, E \in \mathcal{P}_x$; $+$; $K = \{\mathcal{P}_x, +, \cdot\}$.

Dabei war der Punkt 0 das Null- und der Punkt E das Einselement des Algebraisierungskörpers K .

1. Schritt: Um einen Rechtsvektorraum $\mathcal{W}$ über dem Körper $K = \{\hat{p}_x, +, \cdot\}$ konstruieren zu können, benötigen wir eine abelsche Gruppe. Dazu wählen wir die Gruppe aller Elationen, welche die feste Hyperebene Π_ω als Achse haben; das Zentrum Z dieser Elationen ist beliebig aus Π_ω (nach 3.5, Folg. 3 ist dies eine abelsche Gruppe). Wir bezeichnen $PGL(Z, \Pi_\omega | Z \text{ bel.} \wedge Z \in \Pi_\omega) =: T(\Pi_\omega)$ als "Translationsgruppe von Π bzgl. Π_ω ".

Die Operation in $T(\Pi_\omega)$ ist die Zusammensetzung $\circ$ und das neutrale Element von $T(\Pi_\omega)$ ist die Identität $\iota_p =: \iota$. Wir definieren nun den Rechtsvektorraum $\mathcal{W}(K)$, indem wir verlangen, daß die Mengen $\mathcal{W}$ und $T(\Pi_\omega)$ übereinstimmen, und daß die Addition $+$ in $\mathcal{W}$ die Zusammensetzung $\circ$ von $T(\Pi_\omega)$ bedeutet. Die Elationen $\tau \in T(\Pi_\omega)$ sind nun als Vektoren anzusprechen und wir werden daher für die Elationen auch deutsche Buchstaben verwenden. Es ergibt sich also folgende Tabelle von Umbezeichnungen:

Bezeichnung in $T(\Pi_\omega)$

$$\begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_1 \circ \tau_2 \\ \iota \\ \tau_1^{-1} \end{array}$$

Bezeichnung in $\mathcal{W}$

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 \\ -\alpha_1 \end{array}$$

Wir definieren eine skalare Multiplikation $\cdot: \mathcal{W} \times K \rightarrow \mathcal{W}$, also

$T(\Pi_\omega) \times \hat{p}_x \rightarrow T(\Pi_\omega)$, wie folgt

$$\left. \begin{array}{l} \tau \cdot 0 := \iota \\ \tau \cdot X := \sigma_x^{-1} \tau \sigma_x \text{ mit } E \sigma_x = X \wedge \sigma_x \in PGL(O, \Pi_\omega) \end{array} \right\} \quad \forall \tau \in T(\Pi_\omega) \wedge X \in \hat{p}_x \setminus \{0\}.$$

Um zu überprüfen, ob $\tau X \in T(\Pi_\omega)$ gilt, zeigen wir schärfer:

τ und τX sind Elationen zum gleichen Zentrum Z in der Achse Π_ω . $\tau \cdot X := \sigma_x^{-1} \tau \sigma_x$ läßt alle Punkte von Π_ω einzeln fest und ist daher eine perspektive Kollineation mit Π_ω als Achse. Ist $\tau \in PGL(Z, \Pi_\omega)$ und $y \in Z \Rightarrow y(\tau \cdot X) = (y \sigma_x^{-1}) \hat{\tau} \sigma_x = (y \sigma_x^{-1}) \hat{\sigma}_x = y$, da $y \sigma_x^{-1} \in Z$. Daher läßt $\tau \cdot X$ jede Gerade durch Z fest.

Die abelsche Gruppe $\{\mathcal{W}, +\}$ zusammen mit der oben definierten skalaren Multiplikation ist ein Rechtsvektorraum über K .

Bew.: Wir haben noch die Verträglichkeitsgesetze nachzuprüfen.

(a) Überprüfung von $(\alpha_1 + \alpha_2)x = \alpha_1 x + \alpha_2 x \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{W} \wedge \forall x \in K$ oder

$$(\tau_1 \circ \tau_2) \cdot X = (\tau_1 \cdot X) \circ (\tau_2 \cdot X) \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in T(\Pi_\omega) \wedge \forall X \in \hat{p}_x.$$

Die Gültigkeit ist für $X=0$ klar; gelte $X \neq 0$:

$$(\tau_1 \circ \tau_2) \cdot X \stackrel{Def.}{=} \sigma_x^{-1} (\tau_1 \circ \tau_2) \sigma_x = (\sigma_x^{-1} \tau_1 \sigma_x) (\sigma_x^{-1} \tau_2 \sigma_x) \stackrel{Def.}{=} (\tau_1 \cdot X) \circ (\tau_2 \cdot X).$$

(b) Überprüfung von $(\alpha x)y = \alpha(xy) \quad \forall \alpha \in \mathcal{M} \wedge \forall x, y \in K$ oder $(\tau.X).Y = \tau.(XY) \quad \forall \tau \in T(\mathbb{T}_\omega) \wedge \forall X, Y \in \mathcal{P}_X$.

Für $X=0 \vee Y=0$ trivial; gelte $X, Y \neq 0$.

$$(\tau.X).Y \stackrel{\text{Def.}}{=} (\sigma_X^{-1} \tau \sigma_X).Y \stackrel{\text{Def.}}{=} \sigma_Y^{-1} (\sigma_X^{-1} \tau \sigma_X) \sigma_Y = (\sigma_Y^{-1} \sigma_X^{-1}) \tau (\sigma_X \sigma_Y) = (\sigma_X \sigma_Y)^{-1} \tau (\sigma_X \sigma_Y) \\ \tau.(XY) = \sigma_{XY}^{-1} \tau \sigma_{XY}$$

Wir sind fertig, wenn $\sigma_{XY} = \sigma_X \sigma_Y$ gezeigt ist. σ_{XY} und $\sigma_X \sigma_Y$ sind Homologien mit dem gleichen Zentrum 0 und der gleichen Achse $\mathbb{T}_\omega$ und stimmen daher überein, wenn sie für einen Punkt verschieden 0 nicht in $\mathbb{T}_\omega$ dasselbe leisten. Es gilt aber $E \sigma_X \sigma_Y = X \sigma_Y = XY \wedge E \sigma_{XY} = XY$.

(c) $\alpha.1_E = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathcal{M}$ oder $\tau.E = \tau \quad \forall \tau \in T(\mathbb{T}_\omega)$.

Wegen $\sigma_E = 1$ gilt $\tau.E \stackrel{\text{Def.}}{=} \sigma_E^{-1} \tau \sigma_E = 1^{-1} \tau 1 = \tau$.

(d) Überprüfung von $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall \alpha \in \mathcal{M} \wedge \forall x, y \in K$ oder $\tau.(X+Y) = (\tau.X) \circ (\tau.Y) \quad \forall \tau \in T(\mathbb{T}_\omega) \wedge \forall X, Y \in \mathcal{P}_X$.
Add. in $\mathbb{K}$ Add. in $\mathcal{M}$

$$\tau.(X+Y) = (\tau.X) \circ (\tau.Y) \quad \forall \tau \in T(\mathbb{T}_\omega) \wedge \forall X, Y \in \mathcal{P}_X.$$

Mit $\tau \in \text{PGL}(Z, \mathbb{T}_\omega)$ gilt $\tau.X, \tau.Y, \tau.(X+Y) \in \text{PGL}(Z, \mathbb{T}_\omega) \Rightarrow$

$$(\tau.X) \circ (\tau.Y) \in \text{PGL}(Z, \mathbb{T}_\omega) \wedge \tau.(X+Y) \in \text{PGL}(Z, \mathbb{T}_\omega).$$

Da diese beiden Relationen gleiches Zentrum und gleiche Achse haben, sind sie gleich, wenn sie für einen Punkt nicht in $\mathbb{T}_\omega$ dasselbe leisten. Es genügt daher $0[(\tau.X+Y)] = 0[(\tau.X) \circ (\tau.Y)]$ nachzuweisen.

Dazu unterscheiden wir:

Fall 1: $Z=U \Rightarrow \tau \in \text{PGL}(U, \mathbb{T}_\omega)$; wir schreiben jetzt besser τ_A statt τ mit $0\tau_A = A \in \mathcal{P}_X$ (vgl. 1.12).

Einerseits gilt:

$$0[\tau_A.(X+Y)] \stackrel{\text{Def.}}{=} 0(\sigma_{X+Y}^{-1} \tau_A \sigma_{X+Y}). \text{ Da } 0 \text{ Zentrum von } \sigma_{X+Y} \text{ ist gilt}$$

$$0\sigma_{X+Y} = 0, \text{ soda\ss zusammen mit } 0\tau_A = A \text{ folgt:}$$

$$0[\tau_A.(X+Y)] = A\sigma_{X+Y} \stackrel{\text{Def. 1.12}}{=} A(X+Y) = AX + AY \quad (*).$$

Andererseits gilt: 1. Dirl. ges. in $\mathbb{K}$

$$0[(\tau_A.X) \circ (\tau_A.Y)] \stackrel{\text{Def.}}{=} 0[(\sigma_X^{-1} \tau_A \sigma_X)(\sigma_Y^{-1} \tau_A \sigma_Y)]. \text{ Nach der 1. Hilfs-}$$

$$\text{überlegung in 1.12 gilt } \sigma_X^{-1} \tau_A \sigma_X = \tau_{AX} \text{ bzw. } \sigma_Y^{-1} \tau_A \sigma_Y = \tau_{AY} \Rightarrow$$

$$0[(\tau_A.X) \circ (\tau_A.Y)] = 0(\tau_{AX} \circ \tau_{AY}) = (AX)\tau_{AY} = AX + AY \quad (*).$$

(*) $\wedge$ (*) $\Rightarrow$ für $Z=U$ ist die Aussage richtig.

Fall 2: $Z \neq U$. Wir konstruieren einen Isomorphismus μ von $\text{PGL}(Z, \mathbb{T}_\omega) \subset \text{CT}(\mathbb{T}_\omega)$ auf $\text{PGL}(U, \mathbb{T}_\omega) \subset T(\mathbb{T}_\omega)$.

Eine Relation $\tau \in \text{PGL}(Z, \mathbb{T}_\omega)$ ist eindeutig festgelegt durch $0 \mapsto R = 0\tau$ mit $R \in \mathcal{P}_{0Z} \setminus \{Z\}$ und das μ -Bild von τ kann ebenso durch $0 \mapsto S = 0(\tau\mu)$ mit $S \in \mathcal{P}_{0U} \setminus \{U\}$ eindeutig festgelegt werden. Auf der Geraden UZ existiert wegen des Axioms E ein Punkt $W \neq Z, U$. Nach Axiom I_2 ist

2. Schritt: Die eindimensionalen Unterräume von $\mathcal{W}$ sind genau die Translationen zu festem Zentrum, d.h. $\forall U \in \mathcal{U}^1 \mathcal{W}(\mathbb{K})$ gilt $U = \text{PGL}(Z, \mathbb{T}_0 | Z \cap \mathbb{T}_0 \wedge Z \text{ fest})$.

Bew.: (a) Wir zeigen zuerst, daß $\text{PGL}(Z, \mathbb{T}_0 | Z \cap \mathbb{T}_0 \wedge Z \text{ fest}) \subset T(\mathbb{T}_0) = \mathcal{W}$ ein eindimensionaler Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{W}$ ist. Dazu muß das Unterraumkriterium erfüllt sein:

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in U \wedge \forall x_1, x_2 \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in U$, oder umformuliert:
 $\forall \tau_1, \tau_2 \in \text{PGL}(Z, \mathbb{T}_0 | Z \cap \mathbb{T}_0 \wedge Z = Z_0 \text{ fest}) \wedge \forall x_1, x_2 \in \dot{\mathbb{P}}_X \Rightarrow \tau_1 x_1 \circ \tau_2 x_2 \in \text{PGL}(Z_0, \mathbb{T}_0)$.

Dies ist erfüllt wegen: $\tau_1, \tau_2 \in \text{PGL}(Z_0, \mathbb{T}_0) \xrightarrow{\text{Schritt 1}} \tau_1 x_1, \tau_2 x_2 \in \text{PGL}(Z_0, \mathbb{T}_0) \xrightarrow{\text{Gruppeneig.}} \tau_1 x_1 \circ \tau_2 x_2 \in \text{PGL}(Z_0, \mathbb{T}_0)$.

Um einen Unterraum $\mathcal{U}$ als eindimensional zu erweisen, muß ein Vektor $\alpha \neq 0$ so existieren, daß $\forall \alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$ gilt $\alpha = \alpha_1 x$ mit $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$; dies bedeutet umformuliert: $\exists \tau \neq 1 \wedge \tau \in \text{PGL}(Z_0, \mathbb{T}_0)$, sodaß $\forall \tau \in \text{PGL}(Z_0, \mathbb{T}_0) \setminus \{1\}$ gilt $\tau = \tau_1 x$ mit $x \in \dot{\mathbb{P}}_X \setminus \{0\}$.

Wir legen τ bzw. τ_1 eindeutig durch

$0 \mapsto 0\tau(\neq 0)$ bzw. $0 \mapsto 0\tau_1(\neq 0)$ fest mit $0, 0\tau, 0\tau_1, Z_0$ kollinear.

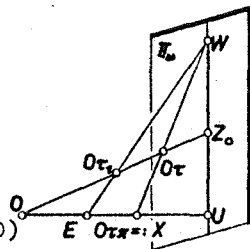
Wir unterscheiden:

Fall 1: $Z \neq U$. Nach Axiom I_2 existiert der Punkt $W := (EO\tau)U Z_0$ mit $W \not\in OU \wedge W \not\in OZ_0$ und damit die Perspektivität $\alpha: \dot{\mathbb{P}}_{OZ_0} \xrightarrow{\sim} \dot{\mathbb{P}}_{OU}$. Zum Punkt $X := 0\tau\tau_1(\neq 0)$

gehört genau eine Homologie $\sigma_x \in \text{PGL}(O, \mathbb{T}_0)$ mit $E\sigma_x = X$. Nach der Inzidenztabelle ist $0\tau = 0\tau_1 \sigma_x \xrightarrow{\text{Gruppeneig.}} 0\sigma_x^{-1} \tau_1 \sigma_x \xrightarrow{\text{P. 1}} 0(\tau_1 X) \Rightarrow \tau = \tau_1 X$ wegen $\tau, \tau_1 X \in \text{PGL}(Z_0, \mathbb{T}_0)$.

Fall 2: $Z = U$. Wird τ durch $0 \mapsto 0\tau(\neq 0)$ festgelegt und τ_1 durch $0 \mapsto 0\tau_1(\neq 0) = E$, so existiert eindeutig ein σ_x mit $E\sigma_x = 0\tau$, d.h. $0\tau = 0\tau_1 \sigma_x$; nun ist wie in Fall 1 weiterzuschließen.

(b) Sei umgekehrt $\mathcal{U} = \alpha \mathbb{K}$ mit $\alpha \neq 0$ ein beliebiger eindimensionaler Unterraum von $\mathcal{W}$, d.h. umformuliert $\mathcal{U} = \tau \cdot \mathbb{K}$ mit $\tau \neq 1$. Die Elemente von $\mathcal{U} = \tau \cdot \mathbb{K}$ sind Elationen $\tau \cdot X$ mit $X \in \dot{\mathbb{P}}_X$. Nach Schritt 1 haben τ und $\tau \cdot X$ dasselbe Zentrum Z_0 , d.h. jedes Element von $\mathcal{U}$ ist in $\text{PGL}(Z_0, \mathbb{T}_0)$ enthalten $\Rightarrow \mathcal{U} \subset \text{PGL}(Z_0, \mathbb{T}_0)$, wobei $\mathcal{U}$ nach Voraussetzung und $\text{PGL}(Z_0, \mathbb{T}_0)$ nach Beweisschritt (a) ein eindimensionaler Unterraum ist $\Rightarrow \mathcal{U} = \text{PGL}(Z_0, \mathbb{T}_0)$.



Zwischenbemerkung:

Sind $\mathcal{W}_1$ und $\mathcal{W}_2$ zwei Rechtsvektorräume über demselben Körper K , so kann das kartesische Produkt

$$\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 = \{ (w_1, w_2) \mid w_1 \in \mathcal{W}_1, w_2 \in \mathcal{W}_2 \}$$

zu einem Rechtsvektorraum über K gemacht werden, indem man die Addition in $\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$ und das skalare Produkt $(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2) \times K \rightarrow (\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2)$ komponentenweise definiert:

$$(w_1, w_2) + (w_1', w_2') := (w_1 + w_1', w_2 + w_2') \quad \forall w_1, w_1' \in \mathcal{W}_1, \forall w_2, w_2' \in \mathcal{W}_2$$

$$(w_1, w_2) \cdot x := (w_1 \cdot x, w_2 \cdot x) \quad \forall w_1 \in \mathcal{W}_1, \forall w_2 \in \mathcal{W}_2, \forall x \in K.$$

Add. in $\mathcal{W}_1$ bzw. $\mathcal{W}_2$ skal. Mult. in $\mathcal{W}_1$ bzw. $\mathcal{W}_2$

Der so erklärte Rechtsvektorraum heißt die "direkte Summe $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ von $\mathcal{W}_1$ und $\mathcal{W}_2$ ". Der Nullvektor von $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ ist das Paar (σ_1, σ_2) , wobei σ_i die Nullvektoren von $\mathcal{W}_i$ sind.

3. Schritt: Wir setzen $\mathcal{W}_1 = K = \mathcal{P}_1$; $\mathcal{W}_2 = \mathcal{W} = \mathcal{T}(\mathcal{T}_\omega)$ und studieren den Rechtsvektorraum $\mathcal{W} := K \oplus \mathcal{W}(K)$ über K . Die Elemente w von $\mathcal{W}$ sind die Paare $w = (X, \tau)$, wobei die erste Komponente ein Punkt $X \in \mathcal{P}_1$ und die zweite eine Relation $\tau \in \mathcal{T}(\mathcal{T}_\omega)$ ist; der Nullvektor von $\mathcal{W}$ ist $\sigma = (0, \iota)$.

$$w_1 + w_2 = (X_1, \tau_1) + (X_2, \tau_2) = (X_1 + X_2, \tau_1 \circ \tau_2)$$

Add. in $K = \mathcal{P}_1$ | Add. in $\mathcal{T}(\mathcal{T}_\omega)$

$$wY = (X, \tau)Y = (XY, \tau \cdot Y)$$

Mult. in $K = \mathcal{P}_1$ | skal. Prod. in $\mathcal{T}(\mathcal{T}_\omega)$

Dann gilt: $\mathcal{T}_{\mathcal{P}_e} \cong \mathcal{T}(K \oplus \mathcal{W}(K)) = \mathcal{T}(\mathcal{W}(K))$.

Bew.: (a) Es genügt eine Kollineation $\alpha: \mathcal{T}_{\mathcal{P}_e} \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{W}(K))$ anzugeben; diese muß jedem Punkt $P \in \mathcal{P}$ ein Element $P\alpha \in \mathcal{T}(\mathcal{W})$, also einen eindimensionalen Unterraum aus $u^1\mathcal{W}$ zuordnen.

Wir definieren:

- (i) für $P \in \mathcal{P}_\omega$ sei $P\alpha := (0\tau)K$ mit $\tau \in \text{PGL}(P, \mathcal{T}_\omega) \setminus \{\iota\}$;
- (ii) für $P \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_\omega$ sei $P\alpha := (E\tau)K$ mit $\tau \in \mathcal{T}(\mathcal{T}_\omega) \wedge 0\tau = P$.

Damit ist α eine Abbildung $\mathcal{T}_{\mathcal{P}_e} \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{W}(K))$, denn nach Definition ist $(0, \tau) + \sigma$, $(E, \tau) + \sigma$, und nach Schritt 2 ist der eindimensionale Unterraum $\tau K \in \mathcal{W}$ durch eine beliebige Translation aus $\text{PGL}(P, \mathcal{T}_\omega) \setminus \{\iota\}$ festgelegt.

(b) Wir überprüfen, ob α eine Kollineation ist.

Zu (I): Nach Definition ist α global. Zur Überprüfung der Injektivität unterscheiden wir:

(α) $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_\omega \wedge P_1 + P_2 \Rightarrow P_i \mathfrak{x} = (0, \tau_i) \mathbb{K}$ mit $\tau_i \in \text{PGL}(P_i, \mathbb{T}_\omega)$. Wegen $\text{PGL}(P_1, \mathbb{T}_\omega) \cap \text{PGL}(P_2, \mathbb{T}_\omega) = \{1\}$ entstammen τ_1 und τ_2 verschiedenen eindimensionalen Unterräumen $\text{PGL}(P_i, \mathbb{T}_\omega)$ (Schritt 2) $\Rightarrow \{\tau_1, \tau_2\}$ l.u. $\Rightarrow \{(0, \tau_1), (0, \tau_2)\}$ l.u. (ind.: l.a. $\Rightarrow \exists X_1, X_2 \in \mathcal{P}_\kappa \wedge (X_1, X_2) \neq (0, 0)$ mit $(0, 1) = (0, \tau_1)X_1 + (0, \tau_2)X_2 = (0, \tau_1 \cdot X_1 \circ \tau_2 \cdot X_2) \Rightarrow 1 = \tau_1 \cdot X_1 \circ \tau_2 \cdot X_2$, d.h. $\{\tau_1, \tau_2\}$ l.a.: Widerspruch) $\Rightarrow P_i \mathfrak{x} = (0, \tau_i) \mathbb{K} + (0, \tau_2) \mathbb{K} = P_2 \mathfrak{x}$.

(β) $P_1 \in \mathcal{P}_\omega \wedge P_2 \notin \mathcal{P}_\omega$; nach Definition sind $P_1 \mathfrak{x}$ und $P_2 \mathfrak{x}$ verschieden, denn $(0, \tau_i)$ mit $\tau_i \neq 1$ und (E, τ_i) sind l.u. (ind.: $\exists X_1, X_2 \in \mathcal{P}_\kappa \wedge (X_1, X_2) \neq (0, 0)$ mit $(0, 1) = (0, \tau_1)X_1 + (E, \tau_2)X_2 = (X_2, \tau_1 X_1 \circ \tau_2 X_2) \Rightarrow 0 = X_2 \Rightarrow 1 = \tau_1 \cdot X_1 = \sigma_{X_1}^{-1} \tau_1 \sigma_{X_1} \Rightarrow \tau_1 = \sigma_{X_1} \circ \sigma_{X_1}^{-1} = 1$: Widerspruch).

(γ) $P_1, P_2 \notin \mathcal{P}_\omega \wedge P_1 + P_2 \Rightarrow P_i \mathfrak{x} = (E, \tau_i) \mathbb{K}$ mit $0\tau_i = P_i$ für $i=1, 2$. Wegen $P_1 + P_2$ sind τ_1 und τ_2 l.u. Daher sind $\{(E, \tau_1), (E, \tau_2)\}$ l.u. (ind.: $\exists X_1, X_2 \in \mathcal{P}_\kappa \wedge (X_1, X_2) \neq (0, 0)$ mit $(0, 1) = (E, \tau_1)X_1 + (E, \tau_2)X_2 = (X_1 + X_2, \tau_1 X_1 \circ \tau_2 X_2) \Rightarrow \tau_1 \cdot X_1 \circ \tau_2 \cdot X_2 = 1$, was umformuliert $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \sigma$ mit $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ bedeutet $\Rightarrow \{\alpha_1, \alpha_2\}$ l.a.: Widerspruch) $\Rightarrow P_i \mathfrak{x} = (E, \tau_i) \mathbb{K} + (E, \tau_2) \mathbb{K} = P_2 \mathfrak{x}$.

Zur Überprüfung der Surjektivität beachten wir, daß jeder eindimensionale Unterraum von $\mathbb{T}(\mathcal{W})$ die Form $(X, \tau) \mathbb{K}$ mit $(X, \tau) \neq \alpha = (0, 1)$ besitzt. Wir unterscheiden daher

(α) $X=0 \Rightarrow \tau \neq 1$. Die Translation $\tau \in T(\mathbb{T}_\omega)$ stammt aus einer Untergruppe $\text{PGL}(P, \mathbb{T}_\omega)$ von $T(\mathbb{T}_\omega)$ und $(0, \tau) \mathbb{K}$ ist das $\mathfrak{x}$ -Bild des Punktes $P \in \mathcal{P}_\omega$.

(β) $X \neq 0 \Rightarrow \exists *X^{-1} \in \mathcal{P}_\kappa \setminus \{0\}$ mit $XX^{-1} = E$; mit $(X, \tau) \in (X, \tau) \mathbb{K}$ ist auch $(X, \tau)X^{-1} \in (X, \tau) \mathbb{K}$.

$(X, \tau)X^{-1} = (XX^{-1}, \tau \cdot X^{-1}) = (E, \tau \cdot X^{-1}) =: (E, \tilde{\tau})$ mit $\tilde{\tau} \in T(\mathbb{T}_\omega)$. Dem Punkt $0\tilde{\tau}$ ist als $\mathfrak{x}$ -Bild der eindimensionale Unterraum $(E, \tilde{\tau}) \mathbb{K} = (X, \tau) \mathbb{K}$ zugeordnet.

Zu (II): Um zu überprüfen, ob $\mathfrak{x}$ kollineare Lage von drei Punkten P_1, P_2, P_3 , die o.B.d.A. paarweise verschieden vorausgesetzt werden, erhält, unterscheiden wir:

(α) $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{P}_\omega \Rightarrow P_i \mathfrak{x} = (0, \tau_i) \mathbb{K}$ mit $\tau_i \in \text{PGL}(P_i, \mathbb{T}_\omega) \setminus \{1\}$. Wegen $\tau_i \neq 1$ ist $0\tau_i \neq 0 \Rightarrow \exists Q_2 = OP_2 \cdot (P_3 \cdot \alpha_1) \neq 0$ nach Anwendung des Axioms I_2 auf das Dreieck QP_1P_2 und die Gerade $P_3 \cdot \alpha_1$; analog gilt $\exists Q_3 = OP_3 \cdot (P_2 \cdot \alpha_1) \neq 0$. Für $k=2, 3$ $\exists * \tilde{\tau}_k \in \text{PGL}(P_k, \mathbb{T}_\omega)$ mit $Q_k = 0\tilde{\tau}_k$ und $\tilde{\tau}_k \neq 1$, sodaß auch $P_k \mathfrak{x} = (0, \tilde{\tau}_k) \mathbb{K}$ gilt. Nach der Inzidenztabelle ist $0\tilde{\tau}_2 \tilde{\tau}_3 = 0\tau_1$ und wegen $\tau_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{\tau}_3 \in \text{PGL}(P_1, \mathbb{T}_\omega)$ folgt $\tau_1 = \tilde{\tau}_2 \tilde{\tau}_3$.

Dann gilt

$(0, \tilde{\tau}_2) + (0, \tilde{\tau}_3) = (0, \tilde{\tau}_2, \tilde{\tau}_3) = (0, \tau_1)$, sodaß
 $\{(0, \tau_1), (0, \tilde{\tau}_2), (0, \tilde{\tau}_3)\}$ l.a. und daher
 $(0, \tau_1)K = P_1\mathfrak{x}$, $(0, \tilde{\tau}_2)K = P_2\mathfrak{x}$, $(0, \tilde{\tau}_3)K = P_3\mathfrak{x}$
 kollinear sind.

(B) Der Fall $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_\omega \wedge P_3 \notin \mathcal{P}_\omega$
 ist nicht möglich.

(r) $P_1 \in \mathcal{P}_\omega$, $P_2, P_3 \notin \mathcal{P}_\omega \implies \exists \tau' \in \text{PGL}(P_1, \mathbb{T}_\omega)$ mit $P_2\tau' = P_3 \wedge \tau' \neq 1$
 wegen $P_2 \neq P_3$; $\exists \tau_i \in T(\mathbb{T}_\omega)$ mit $0\tau_i = P_i$ für $i=2,3$. Es gilt
 $0\tau_2\tau' = P_3 = 0\tau_3$, woraus wegen $\tau_2\tau', \tau_3 \in \text{PGL}(Z_3, \mathbb{T}_\omega)$ folgt
 $\tau_2\tau' = \tau_3$.

Damit gilt

$P_1\mathfrak{x} = (0, \tau')K$; $P_k\mathfrak{x} = (E, \tau_k)K$ für $k=2,3$. Die Vektoren
 $\{(0, \tau'), (E, \tau_2), (E, \tau_3)\}$ sind l.a. wegen $(E, \tau_2) + (0, \tau') = (E+0, \tau_2\tau') =$
 $= (E, \tau_3)$, und daher sind $P_1\mathfrak{x}, P_2\mathfrak{x}, P_3\mathfrak{x}$ kollinear.

(s) $P_1, P_2, P_3 \notin \mathcal{P}_\omega \implies \exists \tau_i \in T(\mathbb{T}_\omega)$ mit $0\tau_i = P_i$ für $i=1,2,3$
 und es gilt $P_i\mathfrak{x} = (E, \tau_i)K$.

Der Punkt $Z := P_1P_2 \wedge \mathbb{T}_\omega$ ist eindeutig bestimmt

und $\exists \tau'_1 \in \text{PGL}(Z, \mathbb{T}_\omega)$ mit $P_1\tau'_1 = P_3$ und $\exists \tau'_2 \in \text{PGL}(Z, \mathbb{T}_\omega)$ mit $P_2\tau'_2 = P_3$.
 Da $\text{PGL}(Z, \mathbb{T}_\omega)$ nach Schritt 2 ein eindimensionaler Unterraum von
 $\mathcal{W} = T(\mathbb{T}_\omega)$ ist, existiert ein $X \in \mathcal{P}_\omega \setminus \{0\}$ mit $\tau'_1 = \tau'_2 \cdot X$ (*).

Aus $0\tau_1\tau'_1 = P_3 = 0\tau_3$ folgt $\tau_1\tau'_1 = \tau_3$, da $\tau_1\tau'_1, \tau_3 \in \text{PGL}(Z, \mathbb{T}_\omega)$;

ebenso: $0\tau_2\tau'_2 = P_3 = 0\tau_3 \implies \tau_2\tau'_2 = \tau_3$.

$\tau_1^{-1}\tau_3 = \tau'_1 = \tau'_2 \cdot X = (\tau_2^{-1}\tau_3) \cdot X$; dies bedeutet umformuliert

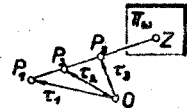
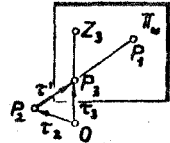
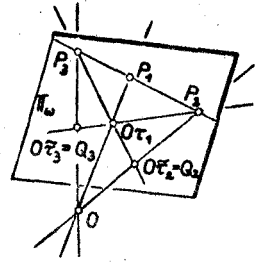
$-\alpha_1 + \alpha_3 = (-\alpha_2 + \alpha_3)X \implies \alpha_2 X = \alpha_3(X-1) + \alpha_1$, also

$\tau_2 \cdot X = [\tau_3 \cdot (X-E)] \circ \tau_1$ (*).

Die Vektoren (E, τ_i) sind l.a.:

$(E, \tau_3)(X-E) + (E, \tau_1) = (E(X-E), \tau_3 \cdot (X-E)) + (E, \tau_1) = (X-E+E, [\tau_3 \cdot (X-E)] \circ \tau_1) \stackrel{(*)}{=}$

$\stackrel{(*)}{=} (X, \tau_2 \cdot X) = (E, \tau_2)X$, und daher sind $P_1\mathfrak{x}, P_2\mathfrak{x}, P_3\mathfrak{x}$ kollinear.



Zu (III): $\mathfrak{x}$ erhält nicht kollineare Lage, d.h. drei kollineare Punkte

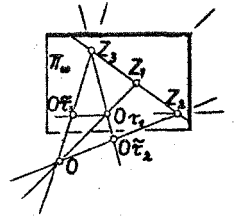
$(X_i, \tau_i)K$ für $i=1,2,3$ von $\mathbb{T}(\mathcal{W})$ stammen von kollinearen Urpunkten.

Wir dürfen o.B.d.A. $(X_j, \tau_j)K$ pw. verschieden annehmen $\iff$ je zwei
 der Vektoren (X_i, τ_i) sind l.u.; $(X_i, \tau_i)K$ kollinear $\iff \{(X_i, \tau_i)$
 $i=1,2,3\}$ l.a.

(a) $X_1 = X_2 = X_3 = 0 \wedge (X_i, \tau_i)$ l.a. $\implies \exists Y_2, Y_3 \in \mathcal{P}_\omega$ mit $(0, \tau_1) = (0, \tau_2)Y_2 +$
 $+ (0, \tau_3)Y_3 = (0, \tau_2 \cdot Y_2 \circ \tau_3 \cdot Y_3) \implies \tau_1 = \tau_2 \cdot Y_2 \circ \tau_3 \cdot Y_3$. Dabei sind τ_1 bzw.
 $\tilde{\tau}_2 := \tau_2 Y_2$ bzw. $\tilde{\tau}_3 := \tau_3 Y_3$ Elationen aus $T(\mathbb{T}_\omega) = \mathcal{W}$ mit den Zentren Z_1

bzw. Z_2 bzw. Z_3 , und es gilt $Z_i \kappa = (0, \tau_i)K$ wegen $(0, \tilde{\tau}_k)K = (0, \tau_k)K$ für $k=2,3$.

Wegen $\tau_1 = \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_1$ ist Z_1 der nach I_2 eindeutig bestimmte Punkt $Z_2 Z_3 \cdot (0, 0 \tilde{\tau}_1 \tilde{\tau}_1) \Rightarrow Z_1, Z_2, Z_3$ sind kollinear.



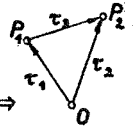
(β) $X_1 + 0 \wedge X_2 = X_3 = 0$: dieser Fall ist unmöglich, da aus $\{(X_i, \tau_i), i=1,2,3\}$ l.a. $\Rightarrow \exists Y_2, Y_3 \in \tilde{\mathcal{P}}_\kappa$ mit $(X_1, \tau_1) = (0, \tau_2)Y_2 + (0, \tau_3)Y_3 = (0, \tau_2 \cdot Y_2 \circ \tau_3 \cdot Y_3) \Rightarrow 0 = X_1$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

(γ) $X_1, X_2 \neq 0 \wedge X_3 = 0$; analog zum Beweis der Surjektivität dürfen wir o.B.d.A. $X_1 = X_2 = E$ annehmen.

$\{(E, \tau_1), (E, \tau_2), (0, \tau_3)\}$ l.a. $\Rightarrow \exists Y_1, Y_2 \in \tilde{\mathcal{P}}_\kappa$ mit $(E, \tau_1)Y_1 + (E, \tau_2)Y_2 = (0, \tau_3)$. Das Urbild von $(E, \tau_k)K$ ($k=1,2$) ist der Punkt $P_k = 0\tau_k \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_\omega$, das Urbild von $(0, \tau_3)K$ ist das Zentrum $P_3 (= \mathcal{P}_\omega)$ von τ_3 .

Damit folgt $(0, \tau_3) = (EY_1 + EY_2, \tau_1 \cdot Y_1 \circ \tau_2 \cdot Y_2) = (Y_1 + Y_2, \tau_1 \cdot Y_1 \circ \tau_2 \cdot Y_2) \Rightarrow 0 = Y_1 + Y_2 \wedge \tau_3 = \tau_1 \tau_2 \tau_3$ bzw. $0 = Y_1 + Y_2 \wedge \alpha_3 = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \Rightarrow Y_1 = -Y_2 \wedge (-\alpha_1 + \alpha_2)Y_2 = \alpha_3$, also $(\tau_1^{-1} \tau_2) \cdot Y_2 = \tau_3 \in \text{PGL}(P_3, \mathbb{P}_\omega)$.

Nach dem 1. Schritt ist $\tau_1^{-1} \tau_2 \in \text{PGL}(P_3, \mathbb{P}_\omega)$; da $\tau_1^{-1} \tau_1$ den Punkt P_1 in P_2 überführt, liegen P_1 und P_2 auf einem Kollineationsstrahl durch das Zentrum P_3 von $\tau_1^{-1} \tau_2 \Rightarrow P_1, P_2, P_3$ kollinear.



(δ) $X_1, X_2, X_3 \neq 0$; wir dürfen o.B.d.A. $X_1 = X_2 = X_3 = E$ annehmen. Das Urbild von $(E, \tau_i)K$ ist der Punkt $P_i = 0\tau_i \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_\omega$ für $i=1,2,3$.

$(E, \tau_i)K$ kollinear $\Leftrightarrow \{(E, \tau_i) i=1,2,3\}$ l.a., d.h. $\exists Y_1, Y_2 \in \tilde{\mathcal{P}}_\kappa$ mit $(E, \tau_1)Y_1 + (E, \tau_2)Y_2 = (E, \tau_3) = (E Y_1 + E Y_2, \tau_1 \cdot Y_1 \circ \tau_2 \cdot Y_2) \Rightarrow$

$Y_1 + Y_2 = E \wedge \tau_1 Y_1 \tau_2 Y_2 = \tau_3$ bzw. umformuliert: $Y_1 + Y_2 = 1 \wedge \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 = \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_1 Y_2 - \alpha_1 Y_2 = \alpha_1 (Y_1 + Y_2) + (\alpha_2 - \alpha_1) Y_2 = \alpha_3 \Rightarrow (-\alpha_1 + \alpha_2) Y_2 = -\alpha_1 + \alpha_3$, also $(\tau_1^{-1} \tau_2) Y_2 = \tau_1^{-1} \tau_3$. Wie in (γ) erkennt man hieraus, daß $\tau_1^{-1} \tau_2$ und $\tau_1^{-1} \tau_3$ zum gleichen Zentrum $Z (= \mathcal{P}_\omega)$ gehören.

$\tau_1^{-1} \tau_2$ führt P_1 in P_2 über $\Rightarrow Z \mid P_1 P_2 \Rightarrow P_2, P_3 \mid P_1 Z \Rightarrow$
 $\tau_1^{-1} \tau_3$ führt P_1 in P_3 über $\Rightarrow Z \mid P_1 P_3 \Rightarrow$
 P_1, P_2, P_3 kollinear.

SATZ 5.7: (Erster Hauptsatz der projektiven Geometrie) Ist $\mathbb{P}_{\text{De}}$ ein Desarguesraum zum Algebraisierungskörper K , so existiert ein Rechtsvektorraum $\mathcal{V}$ über K so, daß $\mathbb{P}_{\text{De}} \cong \mathbb{P}(\mathcal{V}(K))$. Der Rechtsvektorraum $\mathcal{V}$ ist dabei die direkte Summe des Rechtsvektorraumes K (über K) mit dem Rechtsvektorraum $\mathcal{W}$ der Translationen in $\mathbb{P}_{\text{De}}$ bezüglich einer Hyperebene $\mathbb{P}_\omega$.

Bemerkungen: (a) Die Abbildung $\varphi: \mathcal{W} = K \oplus \mathcal{W} \rightarrow K$ mit $(X, \tau) \mapsto X$ ist wegen $[(X_1, \tau_1) \cdot Y_1 + (X_2, \tau_2) \cdot Y_2] \varphi = (X_1 Y_1 + X_2 Y_2, \tau_1 Y_1 + \tau_2 Y_2) \varphi = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 = (X_1, \tau_1) \varphi \cdot Y_1 + (X_2, \tau_2) \varphi \cdot Y_2$ eine globale lineare Abbildung $\mathcal{W} \rightarrow K$, also ein Element aus dem zu $\mathcal{W}$ dualen Linksvektorraum $\mathcal{W}^*$; für $X \neq 0$ ist $(X, \tau) \varphi \neq 0$ und daher $\varphi \neq 0_{\mathcal{W}}$. Es ist dann $\ker \varphi = \{(X, \tau) \in \mathcal{W} \mid X = 0\}$ der Unterraum $\{0\} \oplus \mathcal{W}$ von $\mathcal{W}$ und nach 5.1, Folg. 6 ist $\mathbb{T}(\ker \varphi) = \mathbb{T}(\{0\} \oplus \mathcal{W})$ eine Hyperebene in $\mathbb{T}(\mathcal{W})$, und zwar nach der Definition von $\mathfrak{x}$ im 3. Schritt die Hyperebene $\mathbb{T}_{\omega} \mathfrak{x}^*$.

(b) Jeder Desarguesraum ist im wesentlichen (d.h. bis auf Isomorphismen) identisch mit einem projektiven Raum über einem Rechtsvektorraum. Es gibt keine anderen Desarguesräume als die projektiven Räume über Rechtsvektorräumen.

Zu beliebig vorgegebenem Algebraisierungskörper K und beliebiger endlicher Dimension n mit $2 \leq n < \infty$ ist also der arithmetische projektive Raum $\mathbb{T}(\mathcal{W}^{n+1})$ i.w. der einzige Desarguesraum mit K als Algebraisierungskörper und n als Dimension. Die Elemente des $\mathbb{T}(\mathcal{W}^{n+1})$ sind $(x^0, \dots, x^n)K$ mit $x^i \in K \wedge (x^0, \dots, x^n) \neq (0, \dots, 0)$.

(c) Mit dem 1. Hauptsatz geht die projektive Geometrie der Desarguesräume in der LA auf. Zu nichtdesarguesschen Ebenen kann kein Algebraisierungskörper konstruiert werden, daher entziehen sich diese der Behandlung durch die LA. H. HALL entwickelte 1945 ein Verfahren zur Algebraisierung von Nichtdesarguesschen Ebenen; man gelangt dabei zu Ternärringen.

(d) In 1.1 haben wir ausgehend von der Anschauungsebene AE die projektiv abgeschlossene Anschauungsebene PAE eingeführt. Wir können nun ein Axiomensystem für PAE angeben, das PAE bis auf Isomorphismen völlig bestimmt, nämlich $\{I_1, I_2, E, De, K \cong R\}$. Nach Satz 1.12 erfüllt PAE dieses Axiomensystem; jeder projektive Raum, der dieses Axiomensystem erfüllt, ist nach dem 1. Hauptsatz isomorph zum $\mathbb{T}(\mathcal{W}^3)$, insbesondere gilt also $PAE \cong \mathbb{T}(\mathcal{W}^3)$. Ein Axiomensystem, für welches je zwei Modelle isomorph sind, heißt "monomorphes Axiomensystem".

Ebenso lautet ein monomorphes Axiomensystem des PAR (vgl. 3.1) $\{I_1, I_2, E, n=3, K \cong R\}$, denn nach Satz 3.5 und wegen $\dim PAR=3$ erfüllt PAR dieses Axiomensystem, und nach dem 1. Hauptsatz ist jedes Modell dieses Axiomensystems isomorph zum $\mathbb{T}(\mathcal{W}^4)$, insbesondere gilt also $PAR \cong \mathbb{T}(\mathcal{W}^4)$.

(e) Mit dem ersten Hauptsatz sind alle Definitionen und Aussagen, die für projektive Räume über Rechtsvektorräumen (vgl. 5.1-5.6) gelten, in beliebigen Desarguesräumen gültig.

Beispiele: Aus 5.4, Folg. 5, Bem. e $\Rightarrow$ In einem Pappusraum existieren genau dann elliptische Projektivitäten, wenn der Algebraisierungskörper nicht quadratisch abgeschlossen ist. In einem dreidimensionalen PP-Raum existieren genau dann elliptische Netze, wenn der Algebraisierungskörper nicht quadratisch abgeschlossen ist.

Aus 5.6, Folg.3, Bem.c $\Rightarrow$ In einem $\mathbb{P}_K$ können elliptische projektive Polaritäten und ovale Quadriken nur existieren, wenn der Algebraisierungskörper nicht quadratisch abgeschlossen ist.

Aus 5.4, Folg.5, Bem.e $\Rightarrow$ Jeder endlichdimensionale klassische projektive Raum $\mathbb{P}_K$ ist isomorph zu einem arithmetischen projektiven Raum über einem kommutativen Körper K mit $\text{Char } K \neq 2$ und dieser kann durch Hinzufügen neuer Elemente zu einem klassischen projektiven Raum $\mathbb{P}$ über einem quadratisch abgeschlossenen Oberkörper $\bar{K}$ von K erweitert werden; jede in $\mathbb{P}$ elliptische Projektivität ist dann in $\mathbb{P}$ hyperbolisch. Damit kann für den in 4.3, Folg.7 (g), (h) fehlenden Fall, daß α Passante von k_1 und k_2 ist, eine Bedingung dafür angegeben werden, daß eine Projektivität $\alpha: k_1 \rightarrow k_2$ einen Regulus bestimmt. Nach Übergang zum isomorphen arithmetischen projektiven Raum und dessen Erweiterung zu $\mathbb{P}$ geht α in $\bar{\alpha}: \bar{k}_1 \rightarrow \bar{k}_2$ über, und $\bar{\alpha}$ ist eine Sehne von k_j . Damit liegen aber die Voraussetzungen von 4.3, Folg.7 (g) in $\mathbb{P}$ vor, und daher sind in der Erweiterung $\mathbb{P}$ die Bedingungen bekannt, unter denen α einen Regulus bestimmt.

5.8. Koordinatisierung endlichdimensionaler Desarguesräume

Ist $\mathbb{P}_K^n$ ein endlichdimensionaler projektiver De-Raum zum Algebraisierungskörper K , so ist $\mathbb{P}_K^n$ nach dem ersten Hauptsatz isomorph zu $\mathbb{P}(\mathcal{Q}^{n+1})$ und es existiert daher (mindestens) eine Kollineation $\mu: \mathbb{P}_K^n \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Q}^{n+1})$.

DEF. 5.8a: Ist $\mathbb{P}_K$ ein Desarguesraum endlicher Dimension n zum

Algebraisierungskörper K und $\mathbb{P}(\mathcal{Q}^{n+1})$ der n -dimensionale arithmetische projektive Raum über K , so heißt jede Kollineation $\mu: \mathbb{P}_K \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Q}^{n+1})$, also $X \in \mathcal{P} \mapsto X\mu = (x^0, \dots, x^n)K$ mit $(x^0, \dots, x^n) \in \mathcal{K}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ eine Koordinatisierung von $\mathbb{P}_K$. Die Punkte $P_j = ((\delta_j^0, \delta_j^1, \dots, \delta_j^n)K)\mu^{-1}$ ($j=0, \dots, n$) heißen die Grundpunkte und der Punkt $E = ((1, 1, \dots, 1)K)\mu^{-1}$ der Einheitspunkt der Koordinatisierung μ .

Bemerkungen: (a) Da die Vektoren $\pi_j = (\delta_j^0, \delta_j^1, \dots, \delta_j^n)$ ($j=0, \dots, n$) die kanonische Basis im $\mathcal{Q}^{n+1}$ bilden und daher l.u. sind, bilden die Punkte $P_j\mu$ nach 5.1, Folg.1 einen Basissimplex in $\mathbb{P}(\mathcal{Q}^{n+1})$. Da bei μ^{-1} ein Basissimplex in einen Basissimplex übergeht, ist $\{P_j | j=0, \dots, n\}$ ein Basissimplex in $\mathbb{P}_K$; er heißt der "Koordinatensimplex von μ ".

Von den $n+2$ Vektoren $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n, \pi = \pi_0 + \dots + \pi_n = (1, 1, \dots, 1)$ sind je $n+1$ l.u., alle aber l.a. und daher bilden nach 5.1, Folg.1 die Punkte $\{(1, 0, \dots, 0)K, \dots, (0, \dots, 0, 1)K, (1, 1, \dots, 1)K\}$ eine Fundamen-

talfigur in $\mathbb{P}(\mathcal{Q}^{n+1})$. Da bei μ^{-1} Fundamentalfiguren in Fundamentalfiguren übergehen, ist $\{P_0, \dots, P_n, E\}$ eine Fundamentalfigur in $\mathbb{P}_\mu$; sie heißt die "Koordinatenfundamentalfigur von μ " oder kurz ein "Koordinatensystem in $\mathbb{P}_\mu$ ".

(b) Ist speziell $\mathbb{P}_\mu = \mathbb{P}(\mathcal{M}(K))$, so wird eine Koordinatisierung festgelegt durch Einführung einer Basis $\{q_0, \dots, q_n\}$ in $\mathcal{M}$:
 $\epsilon = q_i, x_i(\epsilon \mathcal{M}) \xrightarrow{f} (x^0, \dots, x^n) \in \mathcal{Q}^{n+1}$; dabei ist f nach LA eine lineare Bijektion. Damit gilt $X = \epsilon K [\epsilon \in \mathbb{P}(\mathcal{M})] \xrightarrow{f} X\epsilon = (x^0, \dots, x^n)K$ [$\epsilon \in \mathbb{P}(\mathcal{Q}^{n+1})$], und nach 5.2 ist ϵ eine Kollineation, die eine Koordinatisierung μ nach Def. 5.8a ist.

(c) Ist μ eine Koordinatisierung mit $X(\epsilon \mathcal{P}) \xrightarrow{\mu} X\mu = (x^0, \dots, x^n)K$, so heißen $x^0, \dots, x^n$ die "projektiven Koordinaten von X bezüglich μ ". Jede Aufgabe im $\mathbb{P}_\mu$ läßt sich unter Benützung einer Koordinatisierung μ in eine analytische Aufgabe im $\mathbb{P}(\mathcal{Q}^{n+1})$ überführen.

Folgerungen:

1) Die projektiven Koordinaten x^j sind durch eine Koordinatenfundamentalfigur abgesehen von einem gemeinsamen Proportionalitätsfaktor ($\neq 0$) bis auf einen Körperautomorphismus eindeutig bestimmt, d.h. es gilt:

(a) Ist μ mit $X \mapsto X\mu = (x^0, \dots, x^n)K$ eine Koordinatisierung und ist $\hat{f}: K \rightarrow K$ ein Körperautomorphismus, dann ist $X \mapsto (x^0 \hat{f}, \dots, x^n \hat{f})K$ eine Koordinatisierung zur gleichen Koordinatenfundamentalfigur wie μ .

(b) Sind μ_1, μ_2 zwei Koordinatisierungen zur gleichen Koordinatenfundamentalfigur, dann unterscheiden sich die projektiven Koordinaten eines Punktes X bezüglich μ_1 und bezüglich μ_2 abgesehen von einem gemeinsamen Proportionalitätsfaktor nur um einen Körperautomorphismus.

Bew.: (a) Durch $(x^0, \dots, x^n) \mapsto (x^0 \hat{f}, \dots, x^n \hat{f})$ wird nach 5.2 eine projektive Kollineation $\epsilon: \mathbb{P}(\mathcal{Q}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Q}^{n+1})$ beschrieben, welche die Punkte $\epsilon_0 K, \dots, \epsilon_n K$ und $(\epsilon_0 + \dots + \epsilon_n)K$ wegen $0\hat{f}=0 \wedge 1\hat{f}=1$ festläßt. Die Abbildung $\mu \circ \epsilon: \mathbb{P}_\mu \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Q}^{n+1})$ ist demnach eine Kollineation, welche $X \mapsto (x^0 \hat{f}, \dots, x^n \hat{f})K$ leistet, und $\mu \circ \epsilon$ hat wegen

$$(\epsilon_i K)(\mu \circ \epsilon)^{-1} = (\epsilon_i K) \epsilon^{-1} \mu^{-1} = (\epsilon_i K) \mu^{-1} \quad \text{für } i=0, \dots, n \text{ und}$$

$$(\epsilon_0 + \dots + \epsilon_n)K(\mu \circ \epsilon)^{-1} = (\epsilon_0 + \dots + \epsilon_n)K \mu^{-1} \quad \text{dieselbe Koordinatenfundamentalfigur wie } \mu.$$

(b) $\mu_1^{-1} \circ \mu_2: \Pi(\mathcal{Q}^{n+1}) \rightarrow \Pi(\mathcal{Q}^{n+1})$ ist eine Kollineation α , welche die Punkte $\pi_0 K, \dots, \pi_n K$, $(\pi_0 + \dots + \pi_n)K$ einer Fundamentalfigur einzeln festlöst und nach 5.2 durch eine halblinare Bijektion $f: \mathcal{Q}^{n+1} \rightarrow \mathcal{Q}^{n+1}$ zum Körperautomorphismus $\hat{f}: K \rightarrow K$ beschrieben wird, wobei gilt $\pi_i f = \pi_i e_i$, $(\pi_0 + \dots + \pi_n) f = \pi_0 f + \dots + \pi_n f = \pi_0 e_0 + \dots + \pi_n e_n = (\pi_0 + \dots + \pi_n) e \Rightarrow e_0 = \dots = e_n = e \in K \setminus \{0\}$, da $\{\pi_0, \dots, \pi_n\}$ eine Basis ist. Nach 5.2, Folg. 7, Bem. a lautet dann mit $a_i^k = e d_i^k$ die Koordinatendarstellung von $\alpha: X\mu_1 = (x^0, \dots, x^n)K \mapsto (x^0 \hat{f}, \dots, x^n \hat{f})K = X\mu_2 \alpha = X\mu_2$.

Bemerkungen: (a) Gestattet K nur den trivialen Automorphismus, dann sind die Koordinaten bis auf einen gemeinsamen Faktor durch eine Koordinatenfundamentalfigur eindeutig bestimmt (z.B. $K=R$, $K=Q$).

(b) Gestattet K nur den trivialen Automorphismus, dann ist K nach 5.4, Folg. 2 notwendig kommutativ und nach Satz 5.4. ist dann jede Autokollineation projektiv. Damit ist Bem. a die bekannte Aussage: In jedem PP-Raum ist eine projektive Kollineation durch zugeordnete Fundamentalfiguren eindeutig festgelegt (vgl. 3.7).

2) Der erste und der zweite Hauptsatz zusammen gestatten es, eine Kollineation $\alpha: \Pi_{\mathcal{D}_e} \rightarrow \Pi'_{\mathcal{D}_e}$ zwischen Desarguesräumen analytisch zu erfassen. Wird $\Pi_{\mathcal{D}_e}$ bzw. $\Pi'_{\mathcal{D}_e}$ der Koordinatisierung μ bzw. μ' unterworfen, so entsteht das folgende Abbildungsdiagramm:

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{\mathcal{D}_e} & \xrightarrow{\alpha} & \Pi'_{\mathcal{D}_e} \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu' \\ \Pi(\mathcal{Q}^{n+1}) & \xrightarrow{\mu^{-1}\alpha\mu'} & \Pi(\mathcal{Q}^{n+1}) \end{array}$$

Die Kollineation $\mu^{-1}\alpha\mu'$ heißt die "Koordinatendarstellung von α bei den Koordinatisierungen μ, μ' ". Die Kollineation $\mu^{-1}\alpha\mu'$ leistet $(x^0, \dots, x^n)K \mapsto (x'^0, \dots, x'^n)K'$ und nach 5.2 (zweiter Hauptsatz) existiert eine halblinare Bijektion $f: \mathcal{Q}^{n+1} \rightarrow \mathcal{Q}^{n+1}$ zu $\hat{f}: K \rightarrow K'$ mit $\alpha_i = \mu^{-1}\alpha\mu'$; für diese gilt $x'^k \hat{f} = a_i^k (x^j \hat{f})$ mit $\hat{f} \in K' \setminus \{0_K\}$, $a_i^k \in K'$ und rechter Zeilenrang von (a_i^k) gleich $n+1$.

Bemerkungen: (a) Sonderfall: $\Pi_{\mathcal{D}_e} \stackrel{!}{=} \Pi'_{\mathcal{D}_e}$

$$\begin{array}{ccc} & \mu & \mu' \\ & \swarrow & \searrow \\ \Pi(\mathcal{Q}^{n+1}) & \xrightarrow{\mu^{-1}\alpha\mu'} & \Pi(\mathcal{Q}^{n+1}) \end{array}$$

$\mu^{-1}\alpha\mu' \in \text{PGL}(\Pi(\mathcal{Q}^{n+1}))$

Der Übergang von einer Koordinatisierung zu einer anderen wird durch $x'^k \hat{f} = a_i^k (x^j \hat{f})$ beschrieben. Haben μ und μ' insbesondere gleiche Koordinatenfundamentalfiguren, dann ergibt sich wieder Folg. 1(b).

(b) Eine Koordinatisierung $\mu: \Pi_{\mathcal{D}_e} \rightarrow \Pi(\mathcal{Q}^{n+1})$ vermittelt einen Gruppenisomorphismus

$\gamma: \text{PGL}(\Pi_{\mathcal{D}_e}) \rightarrow \text{PGL}(\Pi(\mathcal{Q}^{n+1}))$ mit $\alpha\gamma := \mu^{-1}\alpha\mu \quad \forall \alpha \in \text{PGL}(\Pi_{\mathcal{D}_e})$.

Bew.: γ ist global und die Abbildung

$\gamma: \text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{Q}^{n+1})) \rightarrow \text{PGL}(\mathbb{T}_{\mathcal{D}_c})$ mit $\gamma(\gamma') = \mu \gamma' \mu^{-1} \quad \forall \gamma' \in \text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{Q}^{n+1}))$ existiert, ist global und invers zu $\gamma \Rightarrow \gamma$ ist bijektiv.

γ ist mit den Gruppenoperationen verträglich:

$$(\gamma_1 \circ \gamma_2) \gamma = \mu^{-1} (\gamma_1 \circ \gamma_2) \mu = (\mu^{-1} \gamma_1 \mu) \circ (\mu^{-1} \gamma_2 \mu) = \gamma_1 \circ \gamma_2 \gamma$$

lies. in $\text{PGL}(\mathbb{T}_{\mathcal{D}_c})$

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \text{PGL}(\mathbb{T}_{\mathcal{D}_c}).$$

lies. in $\text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{Q}^{n+1}))$

Anwendung:

$$\text{PGL}(\mathbb{T}_{\mathcal{D}_c}) \stackrel{\text{isom.}}{=} \text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{Q}^{n+1})) \stackrel{\text{is.}}{=} \text{GL}(\mathcal{Q}^{n+1}) / \mathcal{J}(\mathcal{Q}^{n+1}) \Rightarrow$$

$\text{PGL}(\mathbb{T}_{\mathcal{D}_c}) \cong \text{GL}(\mathcal{Q}^{n+1}) / \mathcal{J}(\mathcal{Q}^{n+1})$, wobei $\mathcal{Q}^{n+1}$ der arithmetische Vektorraum über dem Algebraisierungskörper K von $\mathbb{T}_{\mathcal{D}_c}$ ist.

(c) Der Gruppenisomorphismus γ führt die projektive Gruppe $\text{PGL}(\mathbb{T}_{\mathcal{D}_c})$ genau in die projektive Gruppe $\text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{Q}^{n+1}))$ über.

Bew. (vgl. auch 1.8, Folg. 1): $\gamma \in \text{PGL}(\mathbb{T}_{\mathcal{D}_c}) \stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} \gamma = \pi_1 \dots \pi_k$, wobei die π_i ($i=1, \dots, k$) perspektive Kollineationen sind. Ist π_1 eine perspektive Kollineation mit der Achse $\mathbb{T}_{\alpha_1}$, so gilt $\Lambda \pi_1 = \Lambda$ für $\Lambda \in \mathbb{T}_{\alpha_1}$, und $\mu^{-1} \pi_1 \mu$ ist eine Kollineation $\in \text{PGL}(\mathcal{Q}^{n+1})$, wobei für alle Punkte $\Lambda' = \Lambda \mu$ aus der Hyperebene $\mathbb{T}_{\alpha_1}' := (\mathbb{T}_{\alpha_1}) \mu^{-1} \pi_1 \mu$ wegen $\Lambda' \mu^{-1} \pi_1 = \Lambda \pi_1 = \Lambda = \Lambda' \mu^{-1}$ gilt

$\Lambda' \mu^{-1} \pi_1 \mu = (\Lambda' \mu^{-1}) \mu = \Lambda' \Rightarrow \mu^{-1} \pi_1 \mu$ ist eine perspektive Kollineation mit der Achse $\mathbb{T}_{\alpha_1}'$.

$$\mu^{-1} \gamma \mu = \mu^{-1} (\pi_1 \dots \pi_k) \mu = (\mu^{-1} \pi_1 \mu) (\mu^{-1} \pi_2 \mu) \dots (\mu^{-1} \pi_k \mu)$$

ist daher Produkt der perspektiven Kollineationen $\mu^{-1} \pi_i \mu$, also ist $\mu^{-1} \gamma \mu$ eine projektive Kollineation in $\mathbb{T}(\mathcal{Q}^{n+1})$.

Ebenso erkennt man $\mu^{-1} \gamma \mu \in \text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{Q}^{n+1})) \Rightarrow \gamma \in \text{PGL}(\mathbb{T}_{\mathcal{D}_c})$.

Anwendung:

Ist K kommutativ ($\Rightarrow \mathbb{T}_{\text{pp}}$), so ist $\text{PGL}(\mathbb{T}_{\text{pp}}) \stackrel{\text{isom.}}{=} \text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{Q}^{n+1})) \stackrel{\text{is.}}{=} \text{GL}(\mathcal{Q}^{n+1}) / \mathcal{J}(\mathcal{Q}^{n+1}) \Rightarrow \text{PGL}(\mathbb{T}_{\text{pp}}) \cong \text{GL}(\mathcal{Q}^{n+1}) / \mathcal{J}(\mathcal{Q}^{n+1})$, wobei $\mathcal{Q}^{n+1}$ der arithmetische Vektorraum über dem Algebraisierungskörper K von $\mathbb{T}_{\text{pp}}$ ist.

3) Die zur Koordinatisierung μ duale Kollineation $\mu^*: \mathbb{T}_{\mathcal{D}_c}^* \rightarrow \mathbb{T}^*(\mathcal{Q}^{n+1})$ erlaubt es, die Hyperebenen $\alpha \in \mathbb{T}_{\mathcal{D}_c}^*$ analytisch zu erfassen, und zwar gilt $\alpha \mu^* = [a_0 \dots a_n]$ mit $[a_0, \dots, a_n] \in \mathcal{Q}_{n+1} \setminus \{[0, \dots, 0]\}$. Die Gleichung einer Hyperebene lautet nach 5.2 dann $a_j x^j = 0$. Die Koordinatendarstellung einer Korrelation δ entnimmt man aus folgendem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_{\mathcal{D}_c} & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{T}_{\mathcal{D}_c}^{1*} \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu^* \\ \mathbb{T}(\mathcal{Q}^{n+1}) & \xrightarrow{\mu^* \circ \delta \circ \mu^{1*}} & \mathbb{T}^{1*}(\mathcal{Q}^{n+1}) \end{array}$$

Die "Koordinatendarstellung $\mu^{-1} \circ \delta \circ \mu^{-1}$ " von δ für die Koordinatisierungen μ, μ^{-1} ist eine Korrelation und kann nach 5.3 durch eine antihalbbilineare Bijektion a_f zum Körperantihomomorphismus $a_f: K \rightarrow K'$ beschrieben werden.

Nach 5.3, Folg.3, Bem.b gilt

$\varphi' a'_k = (x'^j a'_f) a'_{jk}$ mit $\varphi' \in K' \setminus \{0_k\}$, $a'_{jk} \in K'$ und linken Spaltenrang von (a'_{jk}) gleich $n+1$.

Bemerkung: Zur Kollineation κ bzw. zur Korrelation δ gehört die duale Kollineation κ^* bzw. die duale Korrelation δ^* und ihre Koordinatendarstellung ist die Kollineation $\mu^{*-1} \kappa^* \mu^{-1}$ bzw. die Korrelation $\mu^{*-1} \delta^* \mu^{-1}$, welche nach 5.2, Folg.8, Bem.b bzw. 5.3, Folg.5, Bem. beschrieben werden kann.

4) Für einen $\Pi_{pp}(\mathcal{W}(K))$ haben wir in Def.5.4a das Doppelverhältnis erklärt; wir wollen gestützt auf eine Koordinatisierung μ das Doppelverhältnis in beliebigen PP-Räumen erklären.

DEF.5.8b: Sind A,B,C und X vier kollineare Punkte eines Π_{pp} mit A,B,C paarweise verschieden und ist $\mu: \Pi_{pp} \rightarrow \Pi(\mathcal{Q}^{n+1})$ eine Koordinatisierung von Π_{pp} , so heißt $DV(A_\mu, B_\mu, C_\mu, X_\mu) \in K \cup \{\infty\}$ das Doppelverhältnis der vier Punkte in Π_{pp} bezüglich der Koordinatisierung μ ; wir schreiben $DV_\mu(A, B, C, X)$.

Bemerkung: $DV_\mu(A, B, C, A) = \infty$ ist unabhängig von μ , denn es gilt $A=X \Leftrightarrow A_\mu = X_\mu$.
 $DV_\mu(A, B, C, C) = 1$ ist unabhängig von μ , denn es gilt $C=X \Leftrightarrow C_\mu = X_\mu$.
 $DV_\mu(A, B, C, B) = 0$ ist unabhängig von μ , denn es gilt $B=X \Leftrightarrow B_\mu = X_\mu$.
 $DV_\mu(A, B, C, X) = -1$ ist unabhängig von μ , denn $DV_\mu(A, B, C, X) = -1 \Leftrightarrow H(A_\mu, B_\mu; C_\mu, X_\mu)$, und eine Kollineation erhält harmonische Lage.

Sind μ und μ' zwei Koordinatisierungen des Π_{pp} , so existiert ein Körperautomorphismus $\hat{f}: K \rightarrow K$ so, daß für alle zulässigen Punktequadrupel $DV_{\mu'}(A, B, C, X) = [\hat{f} DV_\mu(A, B, C, X)] \hat{f}$ gilt.

Bew.: $\mu^{-1} \circ \mu': \Pi(\mathcal{Q}^{n+1}) \rightarrow \Pi(\mathcal{Q}^{n+1})$ ist eine Kollineation $\in PGL(\Pi(\mathcal{Q}^{n+1}))$. Nach 5.2 existiert eine halbbilineare Bijektion $f: \mathcal{Q}^{n+1} \rightarrow \mathcal{Q}^{n+1}$ zum Körperautomorphismus $\hat{f}: K \rightarrow K$ mit $\kappa_f = \mu^{-1} \mu'$. Nach 5.4, Folg.4 gilt $[DV(A', B', C', X')] \hat{f} = DV(A' \kappa_f, B' \kappa_f, C' \kappa_f, X' \kappa_f)$ für alle zulässigen Quadrupel A', B', C', X' aus $\Pi(\mathcal{Q}^{n+1})$. Setzen wir $A' \mu'^{-1} =: A, \dots, X' \mu'^{-1} =: X \Rightarrow [DV(A_\mu, B_\mu, C_\mu, X_\mu)] \hat{f} = DV((A_\mu) \mu^{-1} \mu', \dots, (X_\mu) \mu^{-1} \mu') \Rightarrow [DV_\mu(A, B, C, X)] \hat{f} = DV_{\mu'}(A, B, C, X)$.

Bemerkungen: (a) Gestattet K nur den trivialen Automorphismus, dann ist das Doppelverhältnis nur eine Eigenschaft der vier Punkte allein und unabhängig von der Koordinatisierung. Dies gilt also speziell für $K=R$.
Gegenbeispiel: Für $K=C$ ist das Doppelverhältnis keine Eigenschaft der vier Punkte allein.

(b) Nach 5.4, Folg.5 gilt in einem endlichdimensionalen $\mathbb{P}_n(K)$: Eine Kollineation ist genau dann projektiv, wenn sie doppelverhältnistreue ist. Da die Gleichheit zweier Doppelverhältnisse bei Anwendung eines Körperautomorphismus unverändert bleibt, ist die Gleichheit zweier Doppelverhältnisse invariant gegen die gewählte Koordinatisierung. Damit gilt zusammen mit Folg.2, Bem.c: Eine Kollineation ist genau dann projektiv, wenn sie doppelverhältnistreue ist.

(c) Da jede Projektivität zwischen Punktreihen nach Satz 3.6 zu einer projektiven Kollineation fortgesetzt werden kann, folgt aus Bem.b und 5.4, Folg.5: Genau die doppelverhältnistreuen Bijektionen zwischen Punktreihen sind die Projektivitäten.

5) In 3.3 wurde gezeigt: Ist $\mathbb{P}$ ein mindestens dreidimensionaler projektiver Raum, so ist jede seiner Ebenen desarguessch. Die in 3.3 offen gelassene Umkehrung kann nun erledigt werden.

Ist eine projektive Ebene desarguessch, so ist sie isomorph zu einer Ebene eines mindestens dreidimensionalen projektiven Raumes.

Kurz: Der Satz von Desargues ist ein Kriterium für die Einbettbarkeit einer projektiven Ebene in einen projektiven Raum.

Bew.: Für die gegebene Desarguesebene π_α gilt nach dem ersten Hauptsatz $\pi_\alpha \cong \mathbb{P}(\mathcal{Q}^3)$. Ordnen wir jedem Punkt $(x^0, x^1, x^2) \in \mathbb{P}(\mathcal{Q}^3)$ den Punkt $(x^0, x^1, x^2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{P}(\mathcal{Q}^n)$ mit $n > 3$ zu, so ist dies nach 5.2 eine Kollineation (=Isomorphismus) des $\mathbb{P}(\mathcal{Q}^3)$ in die Ebene $\alpha \dots x^3 = \dots = x^n = 0$ des $\mathbb{P}(\mathcal{Q}^n) \Rightarrow \pi_\alpha \cong \mathbb{P}(\mathcal{Q}^3) \cong \alpha \subset \mathbb{P}(\mathcal{Q}^n)$. ◆

SATZ 5.8: Durch eine Koordinatenfundamentalfigur in einem endlichdimensionalen Desarguesraum sind die projektiven Koordinaten (abgesehen von einem gemeinsamen Proportionalitätsfaktor) bis auf einen Körperautomorphismus eindeutig bestimmt und nach fester Wahl der Koordinatisierungen besitzt eine Kollineation oder Korrelation eine eindeutige Koordinatendarstellung. Jede Koordinatisierung vermittelt einen Isomorphismus der Kollineationsgruppe bzw. der projektiven Gruppe von $\mathbb{P}_n$ auf die Kollineationsgruppe bzw. die projektive Gruppe des isomorphen arithmetischen projektiven Raumes. Genau die projektiven Desarguesebenen sind isomorph den Ebenen höherdimensionaler projektiver Räume. In $\mathbb{P}$ -Räumen ist das Doppelverhältnis bis auf Körperautomorphismen durch die Punkte bestimmt;

eine Kollineation ist genau dann projektiv, wenn sie doppelverhältnistreu ist und die doppelverhältnistreuen Bijektionen zwischen Punktreihen sind genau die Projektivitäten.

5.9. Anwendungen

1) Eine Punktmenge $\{X\}$ in einer Pappusebene $\pi_{pp}(K)$ ist genau dann ein Punktkegelschnitt, wenn bei einer Koordinatisierung $\mu: \pi_{pp}(K) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ für die Bildmenge gilt:

$$\{X_\mu\} = \left\{ \left(\sum_{j=0}^2 a_{0j} u^j, \sum_{j=0}^2 a_{1j} u^j, \sum_{j=0}^2 a_{2j} u^j \right) K \mid a_{jk} \in K \wedge \det(a_{jk}) \neq 0 \wedge u \in K \cup \{\infty\} \right\}.$$

Bemerkung: Als Bildpunkt zu $u = \infty$ erhält man nach Division durch u^2 für $u^{-1} = 0$ den Punkt $(a_{02}, a_{12}, a_{22})K$.

Bew.: (a) Eine Steinererzeugung eines Punktkegelschnitts k in π_{pp} unter Verwendung einer nicht perspektiven Projektivität $\alpha: \mathcal{U}_S \rightarrow \mathcal{U}_T$ (vgl. 2.1 und die Figur) führt auf eine Projektivität $\beta: \mathcal{P}_S \rightarrow \mathcal{P}_T$ mit $X' := XS.t' \mapsto X'' := XT.s$ für $X \in k \setminus \{S, T\}$, welche durch $T \mapsto Q = s.t'$, $Q \mapsto S$, $E' \mapsto E''$ mit $E \in k \setminus \{S, T\}$ festgelegt ist, wobei s bzw. t' die Tangente an k in S bzw. T ist.

Wählt man $\{S, Q, T; E\}$ als Koordinatenfundamentalfigur für μ , so ist $S_\mu = (1, 0, 0)K = \pi_0 K$, $Q_\mu = (0, 1, 0)K = \pi_1 K$, $T_\mu = (0, 0, 1)K = \pi_2 K$, $E_\mu = (1, 1, 1)K = (\pi_0 + \pi_1 + \pi_2)K$ und $E''_\mu = (0, 1, 1)K = (\pi_1 + \pi_2)K$, $E''_\mu = (1, 1, 0)K = (\pi_0 + \pi_1)K$.

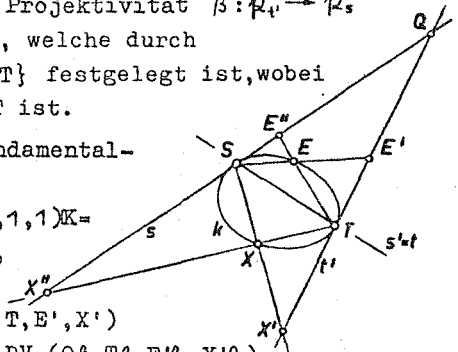
Weiters ist $X'_\mu = (\pi_1 + \pi_2 u)K$ mit $u := DV_\mu(Q, T, E', X')$

und $X''_\mu = (\pi_0 + \pi_1 v)K$ mit $v := DV_\mu(S, Q, E'', X'') = DV_\mu(Q\beta, T\beta, E'\beta, X'\beta)$.

Da β als Projektivität doppelverhältnistreu ist, gilt $u = v$ und daher $X_\mu = (\pi_0 K + (\pi_1 + \pi_2 u)K) \cap (\pi_1 K + (\pi_0 + \pi_1 u)K) \Rightarrow \pi_0 \lambda_0 + (\pi_1 + \pi_2 u) \lambda_1 = \pi_1 \lambda_2 + (\pi_0 + \pi_1 u) \lambda_3 \Rightarrow \lambda_0 - \lambda_3 = \lambda_1 - u \lambda_3 = u \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow X_\mu = (\pi_0 + \pi_1 u + \pi_2 u^2)K = (1, u, u^2)K$, also eine Darstellung obiger Art.

(b) Unterwirft man den Punktkegelschnitt $k_\mu = \{(1, u, u^2)K \mid u \in K \cup \{\infty\}\}$ in $\mathbb{P}_{pp}(\mathbb{Q})$ der projektiven Kollineation $\alpha: (x^0 : x^1 : x^2) \mapsto (\sum_{j=0}^2 a_{0j} x^j : \sum_{j=0}^2 a_{1j} x^j : \sum_{j=0}^2 a_{2j} x^j)$ mit $\det(a_{jk}) \neq 0$, so ist $k_\mu \alpha$ die oben angegebene Punktmenge $\{X_\mu\}$, und diese daher ebenso wie $k_\mu \alpha \mu^{-1}$ ein Punktkegelschnitt.

Bemerkungen: (a) Aus $X_\mu = (1, u, u^2)K$ erhält man durch Elimination des "Parameters" u als Gleichung eines Punktkegelschnitts bezogen auf ein "Tangentendreieck" $x_0 x_2 - x_1^2 = 0$, wobei $x_0 x_2 - x_1^2$ eine reguläre quadratische Form ist in Übereinstimmung mit Satz 5.5.



Zwischenbemerkung:

Ist K ein kommutativer Körper und $K[x]$ der kommutative Ring der Polynome über K , so heißt die Abbildung $D: K[x] \rightarrow K[x]$ mit $p(x) := \sum_0^n a_k x^k \mapsto \dot{p}(x) := \sum_0^n k a_k x^{k-1}$ (formale) Differentiation in $K[x]$; diese erfüllt die übliche Summen- und Produktregel. Speziell für $K=\mathbb{R}$ kann $\dot{p}(x)$ unter Benützung der Stetigkeit von $\mathbb{R}$ als Differentialquotient erhalten werden.

Weiters gilt: Sind in $\Pi_{pp}(\mathbb{P}^{n+1})$ die projektiven Koordinaten x^j eines Punktes $X=(x^0, \dots, x^n) \in K$ jene Werte, welche Polynome $p_j(u)$ an einer Stelle $u_0 \in K$ annehmen (also $x^j = p_j(u_0)$) und α eine projektive Kollineation $x^j \mapsto a_k^j x^k$, so erhält man denselben Punkt, wenn man entweder zuerst differenziert, u zu u_0 spezialisiert und dann α anwendet oder wenn man zuerst α anwendet, dann differenziert und schließlich u zu u_0 spezialisiert.

(Kurz: Ausüben einer projektiven Kollineation und Differenzieren sind vertauschbar.)

Bew.: $\dot{X}(u_0)\alpha := (\dot{p}_0(u_0), \dots, \dot{p}_n(u_0))K \Rightarrow \dot{X}(u_0) = (\sum_k a_k^0 \dot{p}_k(u_0), \dots, \sum_k a_k^n \dot{p}_k(u_0))K$.
 $X(u)\alpha = (\sum_k a_k^0 p_k(u), \dots, \sum_k a_k^n p_k(u))K \Rightarrow [X(u)\alpha]' = (\sum_k a_k^0 \dot{p}_k(u), \dots, \sum_k a_k^n \dot{p}_k(u))K$
 und für $u=u_0$ ist dies $\dot{X}(u_0)\alpha$.

(b) Ist $X(u) := \{(\sum_0^2 a_{0k} u^k, \sum_0^2 a_{1k} u^k, \sum_0^2 a_{2k} u^k)K \mid u \in K\}$

ein im Punkt $u=\infty$ aufgeschnittener Punktkegelschnitt in $\Pi_{pp}(\mathbb{P}^3)$, so sind für jedes $u_0 \in K$ die Punkte $X(u_0)$, $\dot{X}(u_0) := (\sum_0^2 k a_{0k} u_0^{k-1}, \sum_0^2 k a_{1k} u_0^{k-1}, \sum_0^2 k a_{2k} u_0^{k-1})K$ verschieden und $X(u_0) \vee \dot{X}(u_0)$ die Tangente in $X(u_0)$ an den Punktkegelschnitt.

Bew.: (1) Speziell für $X(u) = (1, u, u^2)K$ und $u_0=0$ ist mit obiger Bezeichnung $X(0)=S\mu$, $\dot{X}(0)=Q\mu$ mit $S \neq Q$ und SQ die Tangente in S .

(2) Speziell für $X(u) = (1, u, u^2)K$ mit $u_0 \in K \setminus \{0\}$ üben wir die projektive Kollineation $\alpha: (x^0, x^1, x^2)K \mapsto (x^0, -u_0 x^0 + x^1, u_0 x^0 - 2u_0 x^1 + x^2)K$ aus, wobei für den Bildpunktkegelschnitt gilt $(1, -u_0 + u, u_0 - 2u_0 u + u^2)K = (1, \bar{u}, \bar{u}^2)K$ mit $\bar{u} := -u_0 + u \in K$. Für $\bar{u}=0$ gilt nach (1) die Behauptung für den Bildpunktkegelschnitt, und da α mit der Differentiation vertauschbar ist, α verschiedene Punkte in verschiedene Punkte und Tangenten in Tangenten überführt, gilt die Behauptung überall für $(1, u, u^2)K$.

(3) Führt man durch die Folg. 1 benützte projektive Kollineation den Punktkegelschnitt $(1, u, u^2)K$ in den gegebenen über, so folgt analog wie in Beweisschritt (2) die Behauptung.

(c) Speziell für $\text{Char } K=2$ ist für $X(u) = (1, u, u^2)K$ dann $\dot{X}(u_0) = (0, 1, 0)K$ und daher sind alle Tangenten kopunktal (vgl. 2.1, Folg. 8, Anw. b).

(d) Speziell für $K=R$ ist ein in einem Punkt aufgeschnittener Kegelschnitt in $\mathbb{P}(\mathbb{Q}^3)$ das Bild von R bei einer analytischen Abbildung $\varphi: R \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{Q}^3)$, also eine analytische Kurve im Sinne der Differentialgeometrie, wobei die Tangenten im Sinne der projektiven Geometrie mit den durch Grenzübergang erzeugten Tangenten im Sinne der Differentialgeometrie übereinstimmen.

2) Eine Punktmenge $\{X\}$ in einem dreidimensionalen Pappusraum $\mathbb{P}_p(K)$ ist genau dann eine Punktkubik, wenn bei einer Koordinatisierung $\mu: \mathbb{P}_p(K) \rightarrow \mathbb{P}_p(\mathbb{Q}^4)$ für die Bildmenge gilt:
 $\{X\mu\} = \{(\sum_0^3 a_{0k} u^k, \sum_0^3 a_{1k} u^k, \sum_0^3 a_{2k} u^k, \sum_0^3 a_{3k} u^k)K \mid a_{jk} \in K \wedge \det(a_{jk}) \neq 0 \wedge u \in K \cup \{\infty\}\}.$

Bew.: (a) Eine Punktkubik c in $\mathbb{P}_p$ ist nach 4.8, Folg. 6 durch ein Schmiegtetraeder $\{S_1, S_2, T_1, T_2\}$ und einen Punkt $E \notin S_1, S_2$ eindeutig festgelegt, wenn $\{S_1, T_1, T_2, S_2, E\}$ eine Fundamentalfigur ist. Wählen wir diese als Koordinatenfundamentalfigur von μ mit $S_1\mu = (1, 0, 0, 0)K = \pi_0 K$, $T_1\mu = (0, 1, 0, 0)K = \pi_1 K$, $T_2\mu = (0, 0, 1, 0)K = \pi_2 K$, $S_2\mu = (0, 0, 0, 1)K = \pi_3 K$, $E\mu = (1, 1, 1, 1)K = (\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3)K$, so gilt für die Punkte $E' = S_1 E \cdot \sigma_2$, $E'' = S_2 E \cdot \sigma_1$ mit $\sigma_1 = S_2 T_1 T_2 \wedge \sigma_2 = S_1 T_1 T_2$ dann $E'\mu = (0, 1, 1, 1)K = (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)K$ und $E''\mu = (1, 1, 1, 0)K = (\pi_0 + \pi_1 + \pi_2)K$. Da der Punkte Kegelschnitt $\mathcal{R}_{q_{r(s_1)}} \cap \mathcal{R}_{\sigma_1} =: k'$ die Linienelemente $(T_1, T_1 T_2)$ und $(S_2, S_2 T_2)$ sowie den Punkt E' enthält, gilt nach Anw. 1 für $k'\mu = \{(0, 1, u, u^2)K \mid u \in K \cup \{\infty\}\}$; wegen $\sigma_1^* \mu$ ist $x^0 = 0$. Analog erhält man für $\mathcal{R}_{q_{r(s_2)}} \cap \mathcal{R}_{\sigma_2} =: k''$ dann $k''\mu = \{(1, v, v^2, 0)K \mid v \in K \cup \{\infty\}\}$; wegen $\sigma_2^* \mu$ ist $x^3 = 0$.

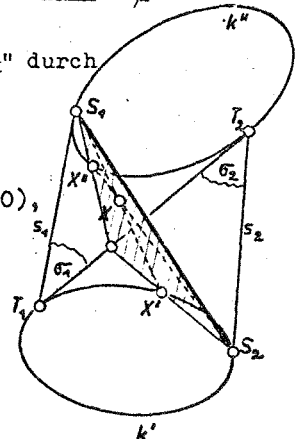
Durch die Punkte $X \in c \setminus \{S_1, S_2\}$ werden k' und k'' durch $X' := \mathcal{R}_{S_1 X} \cap \mathcal{R}_{\sigma_1} =: \mathcal{R}_{S_1 X} \cap \mathcal{R}_{\sigma_1}$ gekoppelt, wobei X, X', X'' stets in einer Ebene durch die Sehne $S_1 S_2$ von c liegen. Die Punkte $S_1\mu, S_2\mu, X'\mu, X''\mu$ sind genau dann komplanar, wenn die Vektoren $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 1, u, u^2), (1, v, v^2, 0)$ l.a. sind,

$$\text{was } 0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & u & u^2 \\ 1 & v & v^2 & 0 \end{vmatrix} = v(v-u) \text{ liefert; wegen } X \neq S_1 \text{ ist } v \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Damit gilt } X\mu &= [S_1\mu X'\mu] \cdot [S_2\mu X''\mu] = \\ &= [\pi_0 K + (\pi_1 + \pi_2 u + \pi_3 u^2)K] \cap [\pi_3 K + (\pi_0 + \pi_1 u + \pi_2 u^2)K] \Rightarrow \\ X\mu &= (\pi_0 + \pi_1 u + \pi_2 u^2 + \pi_3 u^3)K = (1, u, u^2, u^3)K. \end{aligned}$$

Diese Darstellung erfaßt für $u=0$ bzw. $u=\infty$ auch die Punkte $S_1\mu$ bzw. $S_2\mu$ von $c\mu$ und ist eine Darstellung obiger Art.

(b) Unterwirft man die Punktkubik $c\mu = \{(1, u, u^2, u^3)K \mid u \in K \cup \{\infty\}\}$ in $\mathbb{P}_p(\mathbb{Q}^4)$ der projektiven Kollineation $\alpha: (x^0: \dots: x^3) \mapsto (\sum_0^3 a_{0k} x^k: \dots: \sum_0^3 a_{3k} x^k)$ mit $\det(a_{jk}) \neq 0$, so ist $c\mu\alpha$ die oben angegebene Punktmenge $\{X\mu\}$, und diese daher ebenso wie $c\mu\alpha\mu^{-1}$ eine Punktkubik.



Bemerkungen: (a) Ist $X(u) := \left\{ \left(\sum_0^3 a_{0k} u^k, \dots, \sum_0^3 a_{3k} u^k \right) \in \mathbb{K}^4 \mid u \in \mathbb{K} \right\}$ eine im Punkt $u = \infty$ aufgeschnittene Punktkubik in $\mathbb{P}_{\text{pp}}(\mathbb{Q}^4)$, so sind für jedes $u_0 \in \mathbb{K}$ die Punkte $X(u_0), \dot{X}(u_0), \ddot{X}(u_0)$ mit $\ddot{X} := (\ddot{X})$ nicht kollinear, die Gerade $X(u_0) \vee \dot{X}(u_0)$ die Tangente und die Ebene $X(u_0) \vee \dot{X}(u_0) \vee \ddot{X}(u_0)$ die Schmiegebene in $X(u_0)$ an die Punktkubik.

Bew.: (1) Speziell für $X(u) = (1, u, u^2, u^3) \in \mathbb{K}$ und $u_0 = 0$ ist mit obigen Bezeichnungen $X(0) = S_\mu, \dot{X}(0) = T_\mu, \ddot{X}(0) = T_1 \mu$ mit S_1, T_1, T_2 nicht kollinear, $S_1 T_1$ die Tangente s_1 in S_1 und $S_1 T_1 T_2$ die Schmiegebene σ_1 in S_1 . (2) Speziell für $X(u) = (1, u, u^2, u^3) \in \mathbb{K}$ mit $u_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ über wir die projektive Kollineation $\alpha: (x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto (x^0, -u_0 x^0 + x^1, u_0^2 x^0 - 2u_0 x^1 + x^2, -u_0^3 x^0 + 3u_0^2 x^1 - 3u_0 x^2 + x^3) \in \mathbb{K}$ aus, was auf $(1, \bar{u}, \bar{u}^2, \bar{u}^3) \in \mathbb{K}$ mit $\bar{u} := -u_0 + u \in \mathbb{K}$ führt. Der restliche Beweis und Beweisschritt (3) sind wie bei Anw. 1, Bem. b über Punktkegelschnitte zu führen. $\blacklozenge$

(b) Speziell für $\text{Char } \mathbb{K} = 2$ ist für $X(u) = (1, u, u^2, u^3) \in \mathbb{K}$ dann $\dot{X}(u_0) = (0, 1, 0, u^3) \in \mathbb{K}$, d.h. die Tangenten der Punktkubik treffen die Gerade $x^0 = x^1 = 0$ und liegen daher in einem Gebüsch. Speziell für $\text{Char } \mathbb{K} = 3$ ist $\dot{X}(u_0) = (0, 1, 2u_0, 0) \in \mathbb{K}$, $\ddot{X}(u_0) = (0, 0, 1, 0) \in \mathbb{K}$, und daher sind die Schmieebenen kollinear mit $x^0 = x^1 = 0$ (vgl. 4.8, Folg. 7).

(c) Speziell für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist eine in einem Punkt aufgeschnittene Kubik in $\mathbb{P}(\mathbb{Q}^4)$ das Bild von $\mathbb{R}$ bei einer analytischen Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{Q}^4)$, also eine analytische Kurve im Sinne der Differentialgeometrie, und der Tangenten- bzw. Schmieebenenbegriff der projektiven Geometrie und der Differentialgeometrie stimmen überein.

(d) Allgemein versteht man unter einer "rationalen Normkurve" in $\mathbb{P}(\mathbb{Q}^{n+1})$ eine Punktmenge mit

$$\left\{ \left(\sum_0^n a_{0k} u^k, \dots, \sum_0^n a_{nk} u^k \right) \in \mathbb{K} \mid a_{jk} \in \mathbb{K} \wedge \det(a_{jk}) \neq 0 \wedge u \in \mathbb{K} \cup \{\infty\} \right\}.$$

In Analogie zu den Beweisschritten b von Anw. 1 und Anw. 2 ergibt sich:

SATZ 5.9a: In $\mathbb{P}(\mathbb{Q}^{n+1})$ existiert im Sinne der projektiven Gruppe $\text{PGL}(\mathbb{P}(\mathbb{Q}^{n+1}))$ genau eine rationale Normkurve, nämlich $\{(1, u, u^2, \dots, u^n) \in \mathbb{K} \mid u \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}\}$, welche für $n=2$ ein Punktkegelschnitt und für $n=3$ eine Punktkubik sind.

3) Unter Verwendung einer Koordinatisierung $\mu: \mathbb{P}_{\text{kl}} \rightarrow \mathbb{P}_{\text{kl}}(\mathbb{Q}^{n+1})$ können Probleme in einem endlichdimensionalen klassischen projektiven Raum durch Rechnung im Vektorraum $\mathbb{Q}^{n+1}$ über dem kommutativen Körper $\mathbb{K}$ mit $\text{Char } \mathbb{K} \neq 2$ gelöst werden. Dabei sind stets Punktmenge gesucht, welche aus gegebenen Punktmenge so zu konstruieren sind, daß vorgeschriebene Bedingungen erfüllt sind, welche in $\mathbb{P}(\mathbb{Q}^{n+1})$ durch Gleichungen zwischen den Koordinaten der beteiligten Punkte beschrieben werden.

DEF.5.9: Ein geometrisches Problem heißt algebraisch, wenn zur Lösung das Aufsuchen gemeinsamer Nullstellen von endlich vielen Polynomen erforderlich ist. Kann man durch schrittweises Eliminieren der Variablen die Lösung auf die Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms g -ten Grades über K in einer Veränderlichen, aber keines Polynoms niedrigeren Grades zurückführen, so heißt g der Grad des algebraischen Problems.

Dieser Grad ist natürlich unabhängig von der gewählten Koordinatisierung. Das Aufsuchen des Schnitt- oder Verbindungsraumes von Unterräumen ist eine lineare Aufgabe ($g=1$), wie die Anwendung des Gaußschen Algorithmus auf ein lineares Gleichungssystem lehrt. Ein lineares Problem ist über beliebigem Körper K stets lösbar.

1.Beispiel: Die Bestimmung der Fixpunkte einer projektiven Kollineation $\alpha: \mathbb{P}_K^n \rightarrow \mathbb{P}_K^n$ ist eine algebraische Aufgabe $n+1$ -ten Grades. Ist nämlich $x^{j'} \varrho = a_{k'}^{j'} x^k$ mit $\varrho \in K \setminus \{0\}$ die Koordinatendarstellung $\mu^{-1} \alpha \mu$ von α , so liegt ein Fixpunkt $(f^0, \dots, f^n) \in K \setminus \{0, \dots, 0\} \times K$ vor, wenn $(a_{k'}^{j'} - \delta_{k'}^{j'} \varrho) f^k = 0$ ($j'=0, \dots, n$) gilt, was $\det(a_{k'}^{j'} - \delta_{k'}^{j'} \varrho) = 0$ nach sich zieht. Diese Eigenwertgleichung von $a_{k'}^{j'}$ ist algebraisch vom $n+1$ -ten Grad, und zu jedem Eigenwert ϱ_0 ist die Bestimmung der zugehörigen Fixpunkte eine lineare Aufgabe; zu jedem Eigenwert ϱ_0 bilden die zugehörigen Fixpunkte nämlich einen Unterraum, welcher der Durchschnitt der $n+1$ Hyperebenen $(a_{k'}^{j'} - \delta_{k'}^{j'} \varrho_0) x^k = 0$ ist.

2.Beispiel: Jede quadratische Aufgabe verlangt die Bestimmung der Nullstellen eines irreduziblen quadratischen Polynoms $p(t) := \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma$ ($\alpha \gamma \neq 0$) und ist äquivalent der Bestimmung der Schnittpunkte eines Kegelschnitts mit einer Geraden seiner Ebene, wie man für die Gerade $\gamma x^0 + 2\beta x^1 + \alpha x^2 = 0$ und den Kegelschnitt $x^0 : x^1 : x^2 = 1 : u : u^2$ ($u \in K \cup \{\infty\}$) in der Ebene $x^3 = \dots = x^n = 0$ erkennt.

3.Beispiel: Jede kubische Aufgabe, welche durch $p(u) = \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta$ ($\alpha \delta \neq 0$) bestimmt ist, kann auf die Ermittlung der Restschnittpunkte zweier komplanarer Kegelschnitte $k: (x^0)^2 - x^1 x^2 = 0$ und $l: \gamma (x^0)^2 + \beta x^0 x^1 + \delta x^0 x^2 + \alpha (x^1)^2 = 0$ (wegen $\alpha \delta \neq 0$ ist l ein Kegelschnitt) in der Ebene $\pi: x^3 = \dots = x^n = 0$ zurückgeführt werden, welche in π den Punkt $(0, 0, 1) \in K$ gemeinsam haben und dort verschiedene

Tangenten $x^1=0$ bzw. $x^0=0$ besitzen. Setzt man nämlich $\frac{x^0}{x^1}=u$, $\frac{x^1}{x^1}=v$, so gilt $u^2=v$, $\gamma u^2 + \beta uv + \delta u + \alpha v^2 = 0 \Rightarrow u(\gamma u + \beta u^2 + \delta + \alpha u^3) = 0$.

Die Bestimmung der Restschnittpunkte zweier Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Punkt und verschiedenen Tangenten dort ist nach 2.7, Folg.2, Bem.e äquivalent der Bestimmung der Fixpunkte einer projektiven Kollineation in π . Da dies nach dem 1.Beispiel eine kubische Aufgabe ist, gilt: Jede kubische Aufgabe ist äquivalent der Bestimmung der Fixpunkte einer projektiven Kollineation in einer projektiven Ebene.

4.Beispiel: Jede biquadratische Aufgabe, welche durch $p(u) := \alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 + \delta u + \epsilon (\alpha \epsilon \neq 0)$ bestimmt ist, führt auf die Ermittlung der gemeinsamen Punkte zweier komplanarer Kegelschnitte $k: x^0:x^1:x^2 = -u:1:u^2$ ($u \in K \cup \{\infty\}$) und $l: \gamma(x^0)^2 + \epsilon(x^1)^2 + \delta x^0 x^1 + \beta x^0 x^2 + \alpha(x^2)^2 = 0$ in $\pi: x^3 = \dots = x^n = 0$ (wäre l ein Geradenpaar, so wäre die Aufgabe äquivalent der Bestimmung der gemeinsamen Punkte von k und zwei Geraden, also nur quadratisch).

Nach der Algebra ist die Lösung einer Gleichung 4.Grades äquivalent der Lösung einer Gleichung 3.Grades ("kubische Resolvente") und der nachfolgenden Lösung von Gleichungen 2.Grades, falls K kubisch abgeschlossen ist. Um dies auch geometrisch einzusehen, betrachten wir die Polarsysteme λ_k und $\lambda_l (*\lambda_k)$ und die projektive Kollineation $\alpha := \lambda_k \lambda_l^*: \pi \rightarrow \pi$. Die Fixpunkte von α sind wegen $\lambda_l^* = \lambda_l^{-1}$ genau jene Punkte in π , denen in λ_k und λ_l dieselbe Polare zugeordnet wird; ihre Bestimmung ist nach dem 3.Beispiel eine kubische Aufgabe. Da K kubisch abgeschlossen ist, existiert mindestens ein Fixpunkt.

Die projektive Kollineation $\alpha(*1)$ hat daher eine Fixelementfigur wie sie in 2.7, Folg.4 unter ② - ⑥ angegeben ist. In den Fällen ② und ③ existiert eine Fixpunktgerade und daher sicher ein Fixpunkt auf k , da K auch quadratisch abgeschlossen ist; liegt aber ein Fixpunkt F von α auf k , so ist wegen $F\lambda_k = F\lambda_l$ dann F auch Punkt von l , und die beiden Kegelschnitte haben das Linienelement $(F, F\lambda_k)$ gemeinsam. In den Fällen ⑤ und ⑥ geht durch einen Fixpunkt F notwendig die Fixgerade $f := F\lambda_k = F\lambda_l$ wegen $f\alpha^* = (F\lambda_k)\lambda_k^*\lambda_l = F\lambda_l = f$, und daher haben k und l wieder ein Linienelement $(F, F\lambda_k)$ gemeinsam. Haben die beiden Kegelschnitte jedoch ein gemeinsames Linienelement (F, f) , so existiert nach 2.6, Folg.1 genau eine perspektive Kollineation zum Zentrum F , welche k in l überführt, und die restlichen gemeinsamen Punkte von k und l sind genau die Schnittpunkte

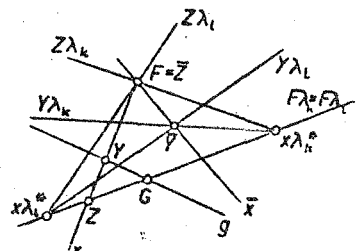
der Kollineationsachse mit k ; deren Ermittlung ist nach dem 2. Beispiel eine quadratische Aufgabe und über einem kubisch abgeschlossenen Körper stets lösbar.

Es ist also nur noch der Typus ④ offen, in dem α ein Fixpunkt-dreieck F_0, F_1, F_2 besitzt. Dann gilt $F_0 \mid F_0 \lambda_k = F_0 \lambda_1$, da mit $F_0 \mid F_0 \lambda_k$ für mindestens einen weiteren Fixpunkt, z.B. F_1 , notwendig $F_1 \mid F_1 \lambda_k = F_1 \lambda_1$ gilt, und k und l somit die Linienelemente $(F_0, F_0 \lambda_k)$ und $(F_1, F_1 \lambda_k)$ gemeinsam haben; wegen 2.5, Folg. 2c haben dann alle Punkte von $F_0 F_1$ bezüglich k und l dieselbe Polare im Widerspruch zur Existenz von genau drei Fixpunkten F_0, F_1, F_2 . Die Punkte F_0, F_1, F_2 liegen daher weder auf k noch auf l und bestimmen ein gemeinsames Poldreieck von λ_k und λ_1 . Ist X kein Fixpunkt von α , so gilt $X \lambda_k \neq X \lambda_1$, und die Abbildung $\zeta: \mathcal{P}_\pi \rightarrow \mathcal{P}_\pi$ mit $X \mapsto \bar{X} := X \lambda_k \cdot X \lambda_1$ ist für alle Nichtfixpunkte von α erklärt und wegen $\bar{\bar{X}} := Y \mapsto Y \lambda_k \cdot Y \lambda_1 = \bar{Y}$ mit $Y \mid X \lambda_k \Rightarrow Y \lambda_k \mid X$, $Y \mid X \lambda_1 \Rightarrow Y \lambda_1 \mid X$ gilt $\bar{\bar{X}} = X$, falls ζ für Y erklärt und daher $Y \lambda_k \neq Y \lambda_1$ ist; wo ζ^2 erklärt ist gilt $\zeta^2 = \text{id}$, und daher ist ζ in der Definitionsmenge von ζ^2 involutorisch. Die Punkte X und $\bar{X}$ sind nach Definition von ζ bezüglich k und l konjugiert und daher heißt $\bar{X}$ "doppelt konjugiert zu X ". Die Fixpunkte von ζ sind genau die gemeinsamen Punkte von k und l , da ein solcher Punkt durch $X \mid X \lambda_k \wedge X \mid X \lambda_1 \wedge X \lambda_k = X \lambda_1$ (sonst wäre X Fixpunkt bereits von α) gekennzeichnet ist.

Um die Fixpunkte von ζ zu ermitteln, verwenden wir folgenden Hilfssatz: Die Verbindungsgerade $x = XF$, $\bar{x} = \bar{X}F$ doppelt konjugierter Punkte $X, \bar{X}$ ($\neq F$) mit einem Fixpunkt F von α gehören einer projektiven Involution $\mathcal{Q}_F \rightarrow \mathcal{Q}_F$ an.

Die Ermittlung ihrer Fixgeraden ist nach dem zweiten Beispiel eine quadratische Aufgabe und die gemeinsamen Punkte von k und l sind als die Schnittpunkte dieser Fixgeraden mit k daher durch zwei weitere quadratische Aufgaben bestimmt (gibt es zwei verschiedene Fixpunkte von α , so kann man die gemeinsamen Punkte von k und l auch als Schnittpunkte der beiden Paare von Fixgeraden ermitteln).

Bew. des Hilfssatzes: Aus $Y \mid x = XF \Rightarrow Y \lambda_k \mid x \lambda_k^* = x \lambda_k^*$ und $\mathcal{P}_x(Y) \neq \mathcal{Q}_{x \lambda_k^*}(Y \lambda_k)$; analog gilt $\mathcal{P}_x(Y) \neq \mathcal{Q}_{x \lambda_1^*}(Y \lambda_1) \Rightarrow \mathcal{Q}_{x \lambda_k^*}(Y \lambda_k) \neq \mathcal{Q}_{x \lambda_1^*}(Y \lambda_1)$, wobei zunächst $x \lambda_k^* \neq x \lambda_1^*$ vorausgesetzt sei. Speziell für $Y = F \Rightarrow F \lambda_k = F \lambda_1$, sodaß mit $F \lambda_k = F \lambda_1 \mid x \lambda_k^*, x \lambda_1^*$ die obige Projektivität als Perspektivität erwiesen ist; die Perspektivitätsachse trägt alle Punkte $Y \zeta = Y \lambda_k \cdot Y \lambda_1$ (falls $Y \zeta$ existiert) und ist $\bar{x} = XF$, da sie insbesondere $\bar{X}$ und auch F enthält, wie man mit $Z := x \cdot F \lambda_k = x \cdot F \lambda_1$ erkennt. Ist dagegen $x \lambda_k^* = x \lambda_1^* = \bar{x}$ ($\neq F$, da $x \neq F \lambda_k$), so ist für alle $Y \mid x = XF$, für welche ζ erklärt ist, dann $\bar{Y} = x \lambda_k^* = x \lambda_1^* = \bar{x}$ und daher



(durch F_0, F_1, F_2) übergeht, heißt ξ eine quadratische Abbildung.

(c) Der Körper $K = \mathbb{C}$ ist kubisch abgeschlossen, aber nicht der Körper $K = \mathbb{R}$.

(d) Ist K nicht quadratisch abgeschlossen, und sind λ_1, λ_2 zwei verschiedene projektive Polaritäten in $\pi_n(K)$, die auch elliptisch sein können, so ist $\lambda = \lambda_1 \lambda_2^* : \pi \rightarrow \pi$ eine projektive Kollineation, deren Fixpunkte genau jene Punkte in π sind, denen λ_1 und λ_2 dieselbe Polare zuweist. Abgesehen von diesen Fixpunkten ist die Abbildung $\xi : X \mapsto X\lambda_1 X\lambda_2$ doppelt konjugierter Punkte auch in diesem Fall definiert und in der Definitionsmenge von ξ^2 involutorisch. Aus dem Beweis des obigen Hilfssatzes erkennt man: Besitzt π einen Fixpunkt F , der nicht auf $F\lambda_k = F\lambda_1$ liegt, und eine Nichtfixgerade g , die durch keinen Fixpunkt von π geht, so werden doppelt konjugierte Punkte aus F durch Geraden projiziert, die entweder in einer projektiven Involution oder in der Identität gekoppelt sind.

SATZ 5.9b: In π_{K1} ist jede kubische Aufgabe äquivalent der Bestimmung der Fixpunkte einer projektiven Kollineation in einer Ebene des π_{K1} , und jede biquadratische Aufgabe ist auf eine kubische zurückführbar, falls K kubisch abgeschlossen ist. Ist K kubisch abgeschlossen, so gehören je zwei komplanare Kegelschnitte einem Kegelschnittbüschel an. Im Falle eines Büschels 1. Art ist die quadratische Abbildung ξ doppelt konjugierter Punkte nur für die Ecken des gemeinsamen Poldreiecks nicht definiert, und zugeordnete Punkte werden aus jeder Ecke durch eine projektive Involution projiziert, deren Fixgeraden die gemeinsamen Punkte der beiden Kegelschnitte, welche die Fixpunkte von ξ abgeben, enthalten.

§ 6. Affine Räume

6.1. Affine Inzidenzstrukturen

Sei $\pi(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ ein projektiver Raum, in dem eine Hyperebene existiert ($\Leftrightarrow \dim \pi \geq 0$). Wir greifen eine feste Hyperebene π_∞ heraus und nennen sie "Fernhyperebene". Ihre Punkte sollen "Fernpunkte", ihre Geraden sollen "Ferngeraden" heißen.

$\hat{\mathcal{P}} := \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_\infty$ Menge der "eigentlichen Punkte",

$\hat{\mathcal{G}} := \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_\infty$ Menge der "eigentlichen Geraden".

$I_{\text{ind}} := I \cap (\hat{\mathcal{P}} \times \hat{\mathcal{G}})$ ist die durch die Inzidenz I in der Menge der eigentlichen Punkte und Geraden induzierte Inzidenz. Das Tripel $(\hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{G}}, I_{\text{ind}} =: I)$ ist dann eine neue Inzidenzstruktur (vgl. 1.1), die wir aus einem projektiven Raum abgeleitet haben. In 1.3 wurde der Begriff Isomorphismus zwischen Inzidenzstrukturen definiert.

Folgerungen:

1) Nach Def.1.3a heißt ein Paar von Bijektionen (φ_A, φ_B) ein Isomorphismus $\tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{\Pi}'$, wenn die Eigenschaften (II) und (III) aus Def.1.3a erfüllt sind; dann ist φ_A trivialerweise eine Affinität (vgl.1.3, Folg.1 und 3.4, Folg.1).

Umkehrung: Jede Affinität $\tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{\Pi}'$ "bestimmt" einen Isomorphismus.

Bew.: (ist im wesentlichen wie in 1.3, Folg.2 bzw. 4.3, Folg.2 zu führen)

$\varphi_A := \tilde{\alpha}$. Wir erklären φ_B wie folgt: Auf der Geraden $g \in \tilde{\mathcal{G}}$ existieren wegen $N \geq 2$ zwei verschiedene Punkte P, Q, und wir setzen $g\varphi_B := P\tilde{\alpha}.Q\tilde{\alpha}$. Wegen $\tilde{\alpha}$ injektiv und I_1 ist $g\varphi_B$ eindeutig festgelegt und wegen (II) in Def.6.1b ist φ_B eine globale Abbildung $\tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}'$. Um zu zeigen, daß (φ_A, φ_B) ein Isomorphismus ist, gehe man wie früher vor: φ_B ist surjektiv, denn wegen $\tilde{E}$ kann jede Gerade im Bildraum durch zwei Punkte aufgespannt werden. Die Gültigkeit von (II) und (III) in Def.1.3a des Isomorphismus ist wie dort unmittelbar aus (II) und (III) in Def.6.1b herzuleiten. φ_B ist injektiv, wie analog zu 1.3 aus der Eigenschaft (III) folgt.

Bemerkung: Aus diesem Beweis entnehmen wir ein Kriterium dafür, wann eine Inzidenzstruktur A ein affiner Raum ist:
A affiner Raum $\Leftrightarrow$ (1) $\exists$ Abbildung $\alpha: A \rightarrow \tilde{\Pi}$, welche (I), (II), (III) in Def.6.1b erfüllt, wobei $\tilde{\Pi}$ ein projektiv eingebetteter affiner Raum ist (wir nennen α wieder eine Affinität),

- (2) A erfüllt I_1 ,
- (3) A erfüllt $\tilde{E}$.

2) Ist $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ eine Kollineation und π_ω eine Hyperebene in Π , so ist $\alpha|(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_\omega)$ eine Affinität: $\Pi \setminus \pi_\omega \rightarrow \Pi' \setminus \pi_\omega^*$. Dies folgt sofort aus Def.6.1b.

3) Sind Π und Π' zwei isomorphe, projektive Desarguesräume und ist π_ω bzw. π_ω' eine Hyperebene in Π bzw. Π' , so ist $\tilde{\Pi} = \Pi \setminus \pi_\omega \cong \Pi' \setminus \pi_\omega'$.

Bew.: $\Pi \cong \Pi' \Leftrightarrow \exists$ Kollineation $\alpha: \Pi \rightarrow \Pi'$ und $\pi_\omega \alpha^*$ ist eine Hyperebene in Π' . Nach 3.5, Anw.a existiert im Desarguesraum Π' eine (perspektive) Kollineation σ mit $(\pi_\omega \alpha^*)\sigma^* = \pi_\omega'$ (für $\pi_\omega \alpha^* = \pi_\omega'$ setzen wir $\sigma = \text{id}$). Die Abbildung $\alpha\sigma|(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_\omega)$ ist dann nach Folg.2 eine Affinität: $\tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{\Pi}'$.

Bemerkungen: (a) Diese Aussage verliert für Nichtdesarguesebenen ihre Gültigkeit.

(b) Sonderfall $\pi_\omega = \pi_\omega'$: Schneidet man einen projektiven Desarguesraum nach verschiedenen Hyperebenen auf, so sind die entstehenden affinen Räume isomorph. Auch dies ist für Nichtdesarguesebenen falsch.

(c) DEF.: Ein projektiv eingebetteter affiner Raum $\tilde{\Pi}$ heißt ein projektiv eingebetteter affiner Desarguesraum genau dann, wenn $\tilde{\Pi}$ ein Desarguesraum ist. Ein affiner Raum heißt affiner Desarguesraum genau dann, wenn er zu seinem projektiv eingebetteten affinen Desarguesraum isomorph ist.

(d) Ist $\tilde{\Pi} = \Pi \setminus \Pi_\infty$ ein projektiv eingebetteter affiner Desarguesraum, so kann $\tilde{\Pi}$ algebraisiert werden und man erhält den Algebraisierungskörper K . Dabei wurden in Π , also in einer affinen Punktreihe, eine Addition und eine Multiplikation eingeführt. Es ist daher sinnvoll K auch "Algebraisierungskörper von $\tilde{\Pi}$ " zu nennen. Ist K kommutativ, so sprechen wir von einem "affinen PP-Raum", gilt $\text{Char } K \neq 2$, so von einem "affinen Fanoraum". In den Grundlagen der Geometrie zeigt man, daß De bzw. PP in affinen Räumen schon folgt, wenn nur gewisse affin-ausgezeichnete Figuren die De- bzw. PP-Eigenschaft besitzen. Diese Fragen sind erst sinnvoll, wenn der affine Raum axiomatisch gefaßt ist und nur durch innere Kennzeichen beschrieben wird.

4) Ist $\tilde{\alpha}: \tilde{\rho} \rightarrow \tilde{\rho}'$ eine Affinität der projektiv eingebetteten affinen Räume $\tilde{\Pi} = \Pi \setminus \Pi_\infty$ und $\tilde{\Pi}' = \Pi' \setminus \Pi'_\infty$ und gilt $N(\tilde{\Pi}) > 2$, dann existiert genau eine Kollineation $\alpha: \rho \rightarrow \rho'$ mit $\tilde{\alpha} = \alpha|(\rho \setminus \rho_\infty)$.

Kurz: Jede Affinität kann in eindeutiger Weise zu einer Kollineation fortgesetzt werden, wenn $N(\tilde{\Pi}) > 2$ ist.

Bew.: (a) Wir definieren eine Abbildung $\alpha: \rho \rightarrow \rho'$ durch:

(I) $\forall X \in \rho \setminus \rho_\infty: X\alpha := X\tilde{\alpha} (\in \rho' \setminus \rho'_\infty)$; d.h. $\alpha|(\rho \setminus \rho_\infty) = \tilde{\alpha}$;

(II) $\forall X \in \rho_\infty$: Sei O ein fest gewählter Punkt aus $\rho \setminus \rho_\infty \Rightarrow O \neq X$. Die affine Punktreihe $\tilde{\rho}_{Ox} = \rho_{Ox} \setminus \{X\}$ enthält einen von O verschiedenen Punkt $P (\in \tilde{\rho}_{Ox})$; wir definieren $X\alpha := \rho_{Ox} \cap \rho'_\infty$. Der Punkt $X\alpha$ ist bei fest gewähltem Punkt O und fest gewähltem $P \in \tilde{\rho}_{Ox}$ eindeutig bestimmt, jedoch ist die Wahl von $P \in \tilde{\rho}_{Ox} \setminus \{X\}$ belanglos, da $\tilde{\alpha}$ kollineare Lage in $\tilde{\Pi}$ erhält.

Wenn wir zeigen können, daß die so definierte Abbildung α eine Kollineation ist, haben wir die Existenz einer $\tilde{\alpha}$ fortsetzenden Kollineation sichergestellt.

(α) α ist nach (I) und (II) global. Umgekehrt kann man von ρ' ausgehend α^{-1} analog definieren, wenn man $O\tilde{\alpha}$ dabei als fest gewählten ausgezeichneten Punkt nimmt. Da α^{-1} dann auch eine globale Abbildung ist $\Rightarrow \alpha$ ist bijektiv.

(β) Seien $X, Y, Z \in \rho$ kollinear und o.B.d.A. paarweise verschieden; wir haben zu zeigen, daß die (paarweise verschiedenen Punkte) $X\alpha, Y\alpha, Z\alpha$ ebenfalls kollinear sind. Dabei unterscheiden wir:
Fall 1: $X, Y, Z \in \tilde{\rho} \Rightarrow X\alpha = X\tilde{\alpha}, Y\alpha = Y\tilde{\alpha}, Z\alpha = Z\tilde{\alpha}$, und $\tilde{\alpha}$ erhält nach Definition einer Affinität kollineare Lage in $\tilde{\Pi}$.

Fall 2: $X, Y \in \mathcal{P} \wedge Z =: Z_u \in \mathcal{P}_u$. Gilt $O \in XY$, so ist man nach Schritt II der Definition von α fertig. Gelte i.f.O $O \notin XY$.

$\exists^* X_u := \mathcal{P}_{OX} \cap \mathcal{P}_u \wedge \exists^* Y_u := \mathcal{P}_{OY} \cap \mathcal{P}_u \wedge X_u, Y_u, Z_u \text{ p.w. verschieden und kollinear, wie man aus der Anwendung des Axioms } I_2 \text{ auf das Dreieck } OXY \text{ und die Gerade } X_u Y_u \text{ erkennt. Wegen } N(\mathbb{T}) > 2 \text{ existiert } S \in \mathcal{P}_{OY} \setminus \{O, Y\}; \text{ wendet man das Axiom } I_2 \text{ auf das Dreieck } O, Y, Z_u \text{ und die Gerade } XS \text{ an, so erkennt man: } \exists^* T := XS.OZ_u. \text{ Auf die Menge } \{O, X, Y, S, T\} \subset \mathcal{P} \text{ wenden wir } \alpha, \text{ also } \tilde{\alpha} \text{ an und beachten, da\ss } \tilde{\alpha} \text{ in } \mathbb{T} \text{ kollineare Lage erh\ddot{a}lt. Nach Definitionsschritt (II) von } \alpha \text{ gilt}$

$X_u \tilde{\alpha} = \mathcal{P}_{O\tilde{\alpha}X\tilde{\alpha}} \cap \mathcal{P}'_u, Y_u \tilde{\alpha} = \mathcal{P}_{O\tilde{\alpha}Y\tilde{\alpha}} \cap \mathcal{P}'_u, Z_u \tilde{\alpha} = \mathcal{P}_{O\tilde{\alpha}Z\tilde{\alpha}} \cap \mathcal{P}'_u.$

Wenden wir I_2 auf das Dreieck $X\tilde{\alpha}, Y\tilde{\alpha}, S\tilde{\alpha}$ und die Gerade $O\tilde{\alpha}.T\tilde{\alpha}$ an, so folgt $\exists^* U' := X\tilde{\alpha}Y\tilde{\alpha}.O\tilde{\alpha}.T\tilde{\alpha}$. Nun gilt $U' \in \mathcal{P}'_u$:

(ind.) $U' \notin \mathcal{P}_u \Rightarrow \exists U \in \mathcal{P}$ mit $U\tilde{\alpha} = U'$; da $\tilde{\alpha}^{-1}$ kollineare Lage in $\mathbb{T}'$ erh\ddot{a}lt, folgt $U \in XY \wedge U \in OT \Rightarrow U = Z_u \in \mathcal{P}_u$: Widerspruch zu $U \in \mathcal{P}$. Also gilt $U' = \mathcal{P}_{O\tilde{\alpha}X\tilde{\alpha}} \cap \mathcal{P}'_u \Rightarrow U' = Z_u \tilde{\alpha}$ und wegen $U' \in X\tilde{\alpha}Y\tilde{\alpha}$ sind $X\tilde{\alpha}, Y\tilde{\alpha}, Z\tilde{\alpha}$ kollinear.

Fall 3: $X \in \mathcal{P} \wedge Y, Z \in \mathcal{P}_u$ ist unm\oglich.

Fall 4: $X_u, Y_u, Z_u \in \mathcal{P}_u$. Sei P ein beliebiger Punkt der Geraden OX_u mit $P \neq O, X_u$. Nach I_2 existiert $Q := OY_u.PZ_u$. Wir bilden $\{O, P, Q\} \subset \mathcal{P}$ durch α , also $\tilde{\alpha}$ ab, und nach Definitionsschritt II von α gilt dann

$X_u \tilde{\alpha} = \mathcal{P}_{O\tilde{\alpha}P\tilde{\alpha}} \cap \mathcal{P}'_u, Y_u \tilde{\alpha} = \mathcal{P}_{O\tilde{\alpha}Q\tilde{\alpha}} \cap \mathcal{P}'_u.$

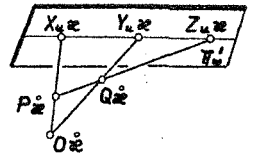
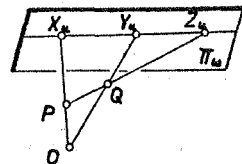
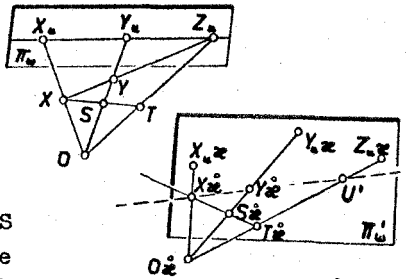
Nach Fall 2 gilt $Z_u \tilde{\alpha} = \mathcal{P}_{O\tilde{\alpha}Q\tilde{\alpha}} \cap \mathcal{P}'_u$.

Wendet man I_2 auf das Dreieck $O\tilde{\alpha}, X_u \tilde{\alpha}, Y_u \tilde{\alpha}$ und die Gerade $P\tilde{\alpha}.Q\tilde{\alpha}$ an, so folgt die Existenz von $P\tilde{\alpha}.Q\tilde{\alpha}.X_u \tilde{\alpha} Y_u \tilde{\alpha}$, und da dieser Punkt in $\mathcal{P}'_u$ liegt, mu\ss er mit $Z_u \tilde{\alpha}$ identisch sein $\Rightarrow$

$X_u \tilde{\alpha}, Y_u \tilde{\alpha}, Z_u \tilde{\alpha}$ sind kollinear.

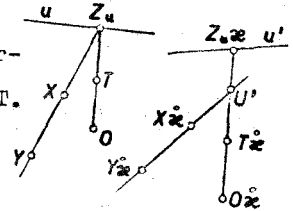
(γ) α^{-1} erh\ddot{a}lt kollineare Lage, was nach der zu (I) und (II) analogen Definition von α^{-1} wie in (β) folgt; damit erh\ddot{a}lt α nicht kollineare Lage.

(b) Nach (a) existiert eine $\tilde{\alpha}$ fortsetzende Kollineation α , jedoch ist α nach Definition abh\angig von der Auswahl des Punktes O (wir schreiben jetzt deutlicher α_o) und nach Auszeichnung von O eindeutig bestimmt. Zu $\bar{O} \in \mathcal{P}$ geh\ddot{o}rt eine $\tilde{\alpha}$ fortsetzende



Kollineation α_5 mit $\alpha_0|_{\tilde{\mathcal{P}}} = \alpha_0|_{\tilde{\mathcal{P}}} = \tilde{\alpha}$. Um den Punkt $X_u \in \mathcal{P}_u$ unter α_0 bzw. α_5 abzubilden, benutzen wir Punkte $P, Q \in \tilde{\mathcal{P}}$ mit X_u, P, Q kollinear; da α_0 und α_5 kollineare Lage erhalten und $\mathcal{P}_u \alpha_0^* = \mathcal{P}_u \alpha_5^*$ gilt, folgt $X \alpha_0 = \mathcal{P}_u \alpha_0 \cap \mathcal{P}' = X \alpha_5 \quad \forall X \in \mathcal{P}_u \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_5$. Die Definition von α ist somit von $O \in \tilde{\mathcal{P}}$ unabhängig, und α durch $\tilde{\alpha}$ eindeutig bestimmt. ◆

Bemerkungen: (a) Für eine projektiv eingebettete affine Ebene $\tilde{\pi} = \pi \setminus u$ ist die Aussage von Folg. 4 auch ohne die Zusatzvoraussetzung $N(\tilde{\pi}) > 2$ richtig. Im obigen Beweis geht nämlich nur in Beweisschritt (a), Fall 2 für $O \notin XY$ die Voraussetzung $N > 2$ ein. Dieser Fall kann für eine projektiv eingebettete affine Ebene $\tilde{\pi}$ folgendermaßen erledigt werden: Auf der Geraden $Z_u O$ existiert ein von Z_u und O verschiedener Punkt T . Unterwerfen wir das Viereck $\{X, Y, O, T\} \subset \tilde{\mathcal{P}}$ der Kollineation α , also der Affinität $\tilde{\alpha}$, so erhalten wir das Bildviereck $\{X\tilde{\alpha}, Y\tilde{\alpha}, O\tilde{\alpha}, T\tilde{\alpha}\}$, und nach den Axiomen i_1 und i_2 existiert der Punkt $U' = X\tilde{\alpha}Y\tilde{\alpha}.O\tilde{\alpha}T\tilde{\alpha}$ eindeutig. Da alle Punkte von $\tilde{\pi}$ im Verbindungsraum eines Dreiecks liegen und $\tilde{\alpha}$ kollineare Lage erhält, gilt gleiches für $\tilde{\pi}'$ und $\tilde{\pi}'$ ist daher eine affine Ebene, welche aus einer projektiven Ebene π' durch Entfernen der Ferngeraden u' entsteht. Nach Definitionsschritt II von α gilt $Z_u \alpha = \mathcal{P}_u \alpha \cap \mathcal{P}'$; wie im allgemeinen Fall ist nun $U' = Z_u$ einzusehen $\Rightarrow X\alpha, Y\alpha, Z_u \alpha$ sind kollinear.



(b) Es gilt: $\text{Char } K \neq 2 \Rightarrow N(\tilde{\pi}) > 2$, denn $K = \tilde{\mathcal{P}}_A$ enthält dann die verschiedenen Punkte $O, E, E+E$. Die Umkehrung der Aussage ist jedoch falsch (Gegenbeispiel: Jeder Oberkörper L des Minimalkörpers hat mehr als zwei Elemente, obwohl $\text{Char } L = 2$ gilt).

(c) Für $\dim \tilde{\pi} > 2$ mit $N(\tilde{\pi}) = 2$ gibt es Affinitäten $\tilde{\alpha}$, die sich nicht zu einer Kollineation fortsetzen lassen (ohne Beweis).

DEF. 6.1c: Ein affiner Raum $\tilde{\pi}$ heißt normal, wenn entweder $\dim \tilde{\pi} = 2$ oder $\dim \tilde{\pi} > 2 \wedge N(\tilde{\pi}) > 2$ gilt.

Somit lautet Folg. 4 kurz: Eine Affinität eines projektiv eingebetteten normalen affinen Raumes in einen projektiv eingebetteten affinen Raum läßt sich eindeutig zu einer Kollineation fortsetzen.

5) Sind zwei projektiv eingebettete affine Räume $\tilde{\pi} = \pi \setminus u$ und $\tilde{\pi}' = \pi' \setminus u'$ isomorph und ist $\tilde{\pi}$ normal, dann sind auch π und π' isomorph.

Bew.: $\tilde{\pi} \cong \tilde{\pi}' \Rightarrow \exists$ eine Affinität $\tilde{\alpha}: \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}'$; da $\tilde{\pi}$ normal ist, kann $\tilde{\alpha}$ zu einer Kollineation $\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ fortgesetzt werden $\Rightarrow \pi \cong \pi'$. ◆

Bemerkung: Aus Folg. 3 und 5 und dem 1. Hauptsatz der projektiven Geometrie erkennt man: Zwei normale endlichdimensionale affine

Desarguesräume sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension und isomorphe Algebraisierungskörper besitzen.

6) DEF.6.1d: Ist $\tilde{T} = T \setminus T_\omega$ ein projektiv eingebetteter affiner Raum und $\tilde{T}_1 = \{\tilde{p}_1, \tilde{q}_1, I_1 := I \cap (\tilde{p}_1 \times \tilde{q}_1)\} \subset \tilde{T}$ eine Inzidenzstruktur, so heißt $\tilde{T}_1$ ein affiner Unterraum von $\tilde{T}$, wenn ein projektiver Unterraum $T_1 = \{p_1, q_1, I\}$ von Π (vgl. Def.3.1b) existiert mit $T_1 \not\subset T_\omega$ und $\tilde{p}_1 = p_1 \setminus (p_1 \cap p_\omega) \wedge \tilde{q}_1 = q_1 \setminus \{q_1 \cap q_\omega\}$.

Ist A ein zu $\tilde{T}$ isomorpher normaler affiner Raum und $A_1 \subset A$, so heißt A_1 genau dann affiner Unterraum von A , wenn A_1 isomorph zu einem affinen Unterraum von $\tilde{T}$ ist.

Bemerkungen: (a) Diese Definition für $\tilde{T}_1$ ist naheliegend. Bei A dagegen benötigt man die Normalität; die Definition ist nämlich nur sinnvoll, wenn sie vom gewählten Isomorphismus unabhängig ist, und dies gilt nach Folg.4 für normale affine Räume. Sind nämlich $\alpha_1, \alpha_2: A \rightarrow \tilde{T}$ zwei Affinitäten, so läßt sich, da $\tilde{T}$ normal ist, $\alpha_1, \alpha_2: \tilde{T} \rightarrow \tilde{T}$ zu einer Kollineation α fortsetzen, und α führt Unterräume in Unterräume über.

(b) Ein affiner Unterraum $\tilde{T}_1$ von $\tilde{T} = T \setminus T_\omega$ ist selbst ein projektiv eingebetteter affiner Raum, denn die von p_1 weggenommene Punktmenge $p_1 \cap p_\omega$ ist nach 3.4, Folg.5, Bem. eine Hyperebene in $\tilde{T}_1$; daher gilt nach Def.6.1a $\dim \tilde{T}_1 = \dim T_1$, und wir schreiben i.f. auch $\tilde{T}_1 = T_1 \setminus T_1 \cap T_\omega$.

(c) Die Menge der Unterräume eines affinen Raumes ist für $\dim \tilde{T} \geq 1$ kein Verband. Der Schnitt zweier verschiedener null-dimensionaler Unterräume (Punkte) ist nämlich die leere Menge, und diese ist kein affiner Raum. (Für $\dim \tilde{T} = 0$ sind die Verbandsaxiome zwar erfüllt, der Verband ist aber nicht komplementiert.)

(d) Jede Affinität normaler affiner Räume führt affine Unterräume in affine Unterräume über, denn man kann die Affinität zu einer Kollineation fortsetzen und diese besitzt die betreffende Eigenschaft.

7) DEF.6.1e: Zwei projektiv eingebettete affine Unterräume $\tilde{T}_1 = T_1 \setminus T_1 \cap T_\omega$ und $\tilde{T}_2 = T_2 \setminus T_2 \cap T_\omega$ mit $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2 \subset \tilde{T} = T \setminus T_\omega$ heißen genau dann parallel ($\tilde{T}_1 \parallel \tilde{T}_2$), wenn

$p_1 \cap p_\omega \subset p_2 \cap p_\omega$ oder $p_2 \cap p_\omega \subset p_1 \cap p_\omega$ gilt.

Zwei affine Unterräume A_1, A_2 des normalen affinen Raumes A heißen genau dann parallel, wenn sie bei einem Isomorphismus $A \rightarrow \tilde{T}$ in parallele Unterräume von $\tilde{T}$ übergehen.

Bemerkungen: (a) Zwei affine Unterräume von $\tilde{\mathbb{T}}$ sind parallel, wenn jeder Fernpunkt des einen auch Fernpunkt des anderen Unterraumes ist. Für den PAE bzw. PAR stimmt die hier definierte Parallelität mit der elementargeometrischen überein, denn die hinzugefügten Fernpunkte wurden über die Parallelität erklärt.

(b) Zwei Punkte $P, Q \in \tilde{\mathbb{T}}$ sind immer parallel, denn es gilt $P \cap \mathbb{P}_\infty = \emptyset \subset Q \cap \mathbb{P}_\infty = \emptyset$.

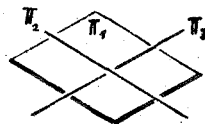
Zwei Geraden $x, y \in \tilde{\mathbb{T}}$ sind genau dann parallel, wenn sie denselben Fernpunkt haben.

Aus dem Axiom I_1 in $\mathbb{P}$ folgt $x \parallel y \wedge \tilde{\mathbb{T}}_x \cap \tilde{\mathbb{T}}_y \neq \emptyset \Leftrightarrow x = y$.

Nach dem Dimensionssatz gilt: Verschiedene parallele Geraden bestimmen eine affine Ebene.

Da I_1 in $\mathbb{T}$ gilt, folgt: Durch jeden Punkt $Q \in \tilde{\mathbb{T}}$ außerhalb einer Geraden g gibt es genau eine zu g parallele Gerade ("Parallelenaxiom").

(c) Die Parallelität ist auf der Menge der affinen Unterräume eine reflexive und symmetrische Relation, im allgemeinen ist sie jedoch nicht transitiv. Die beiden ersten Eigenschaften sind unmittelbar der Definition zu entnehmen; wählt man im PAR eine Ebene $\mathbb{T}_1$ und zwei zu $\mathbb{T}_1$ parallele windschiefe Geraden $\mathbb{T}_2$ und $\mathbb{T}_3$, so gilt $\mathbb{T}_2 \parallel \mathbb{T}_1 \wedge \mathbb{T}_1 \parallel \mathbb{T}_3$ jedoch nicht $\mathbb{T}_2 \parallel \mathbb{T}_3$.



(d) In einem endlichdimensionalen projektiv eingebetteten affinen Raum $\tilde{\mathbb{T}}$ gilt: Die Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Unterräume gleicher Dimension.

Bew.: $\dim \tilde{\mathbb{T}}_1 = \dim \tilde{\mathbb{T}}_2 \wedge \tilde{\mathbb{T}}_1 \parallel \tilde{\mathbb{T}}_2 \Rightarrow \dim \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_\infty = \dim \mathbb{T}_2 \cap \mathbb{T}_\infty \wedge$ o.B.d.A.

$\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_\infty \subset \mathbb{T}_2 \cap \mathbb{T}_\infty \Rightarrow \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_\infty = \mathbb{T}_2 \cap \mathbb{T}_\infty$.

Umgekehrt gilt stets: $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_\infty = \mathbb{T}_2 \cap \mathbb{T}_\infty \Rightarrow \mathbb{T}_1 \parallel \mathbb{T}_2$. Für gleichdimensionale Unterräume gilt also: $\tilde{\mathbb{T}}_1 \parallel \tilde{\mathbb{T}}_2 \Leftrightarrow \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_\infty = \mathbb{T}_2 \cap \mathbb{T}_\infty$. Da die Gleichheit projektiver Unterräume transitiv ist, gilt dasselbe für die Parallelität gleichdimensionaler affiner Unterräume. $\blacklozenge$

(e) Vom logischen Standpunkt ist die Struktur der projektiven Räume einfacher als jene der affinen Räume. In den affinen Räumen gilt das Dualitätsprinzip nicht. Sind z.B. $\mathbb{T}_a, \mathbb{T}_b$ zwei verschiedene Hyperebenen von $\mathbb{T}$, so existiert durch die Kogerade $\alpha \beta$ noch eine weitere Hyperebene $\mathbb{T}_c \neq \mathbb{T}$ (denn E gilt auch im dualen projektiven Raum); im affinen Raum $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_\infty$ ist dann $\tilde{\mathbb{T}}_a \cap \tilde{\mathbb{T}}_b = \emptyset$ und daher die duale Aussage zur richtigen Aussage I_4 falsch.

8) DEF.6.1f: Ein Paar (P, Q) von verschiedenen Punkten P und Q eines affinen Raumes heißt Strecke. Ist $\tilde{\mathbb{T}}_M$ ein klassischer projektiv eingebetteter affiner Raum, (P, Q) eine Strecke und $\mathbb{P}_{Pa} \cap \mathbb{P}_{Qa} =: U$, so heißt der eindeutig bestimmte Punkt $M \in \tilde{\mathbb{T}}$ mit $H(M, U; P, Q)$ der Mittelpunkt der Strecke.

Affinen existieren keine Fixpunkte. Bei einer Streckung ($\neq 1$) heißt das Zentrum $Z \in \mathbb{P}^1$ das "Streckungszentrum" und Z ist der einzige Fixpunkt im Affinen.

Aus der Definition folgt sofort: Eine nichttriviale Affinität ist genau dann eine Translation bzw. Streckung, wenn jede Gerade auf eine parallele Gerade abgebildet wird und kein bzw. ein Fixpunkt existiert.

Die Menge aller Translationen eines affinen Raumes bildet bezüglich der Zusammensetzung die abelsche Gruppe $T(\mathbb{A}_n)$ (vgl. 3.5, Folg. 3 und 5.7). Die Menge aller Streckungen mit festem Zentrum bildet eine Gruppe, welche genau dann kommutativ ist, wenn der affine Raum pappussch ist (vgl. Satz 1.6).

2) Wir treffen eine Einteilung der perspektiven Affinitäten α ; die fortsetzende Kollineation α leistet $\pi_\omega \alpha^* = \pi_\omega$. Gilt für die Achse π_α von α dann $\pi_\alpha = \pi_\omega$, so ist α eine Translation oder eine Streckung; ist dagegen $\pi_\alpha \neq \pi_\omega$, so muß wegen $\pi_\omega \alpha^* = \pi_\omega$ das Zentrum Z von α notwendig in π_ω liegen, d.h. die Affinitätsstrahlen sind zueinander parallel. Ist α eine Homologie ($Z \notin \pi_\alpha$), so sind die Affinitätsstrahlen zur Affinitätsachse π_α nicht parallel, ist α eine Elation ($Z \in \pi_\alpha$), so sind die Affinitätsstrahlen zu π_α parallel ("Scherung").

Sei nun ein $\mathbb{A}_n$ ($\Rightarrow$ normal) vorausgesetzt. Aus 3.5, Folg. 6 wissen wir: Die harmonischen Homologien sind genau die involutorischen perspektiven Kollineationen. Daraus ergibt sich für eine involutorische perspektive Affinität:

Fall 1: $\pi_\alpha = \pi_\omega$ ($\Rightarrow Z \in \pi_\omega$)... "Spiegelung am Zentrum Z ". Es gilt $H(Z, \pi_\alpha = \pi_\omega; P, P\alpha) \quad \forall P \in \mathbb{P}^n \setminus \{Z\}$, d.h. Z ist der Mittelpunkt von $(P, P\alpha)$.

Fall 2: $\pi_\alpha \neq \pi_\omega$ ($\Rightarrow Z \in \pi_\omega$)... "Spiegelung an der Hyperebene π_α ". Es gilt $H(Z, \pi_\alpha; P, P\alpha) \quad \forall P \in \mathbb{P}^n \setminus \pi_\alpha$, d.h. der Punkt $\rho_{P, P\alpha} \in \pi_\alpha$ ist stets Mittelpunkt von $(P, P\alpha)$ wegen $H(\rho_{P, P\alpha}, \pi_\alpha; Z, Z) \in \pi_\omega$; $P, P\alpha$).

Für eine klassische projektive Ebene haben wir in Satz 1.10 alle involutorischen projektiven Kollineationen angegeben. Daraus folgt: Die einzigen involutorischen projektiven Affinitäten in $\mathbb{A}_2$ sind die Spiegelungen an einem Punkt und die Spiegelungen an einer Geraden.

Demit ist $\bar{A}_1 \vee \dots \vee \bar{A}_l \vee \bar{A}_{l+1} \vee \dots \vee \bar{A}_n =: \bar{\pi}_l$ für $l=1, \dots, n$ eine Kogerade und $\pi_l := A_l \vee \bar{\pi}_l$ sind n Hyperebenen mit $\pi_l \cap \pi_m = \bar{\pi}_l$.

Nach 3.7, Folg. 5, Anw. c haben n Hyperebenen in einem π^n mindestens einen gemeinsamen Punkt. Die Hyperebenen π_l haben nun genau einen gemeinsamen Punkt A mit $A \notin \pi_m$:

(ind.) $\exists A, B \mid *, \in \bar{\pi}_i$. Da $\bar{\pi}_i$ ein projektiver Unterraum ist, folgt $A \vee B \in \bar{\pi}_i$. Auf $A \vee B$ existiert wegen 3.2, Folg. 5 mindestens ein Punkt $\bar{A} \in \bar{\pi}_i \Rightarrow \bar{A} \in (\bar{\pi}_i \cap \pi_m) \Rightarrow \bar{A} \in \bar{\pi}_i \cap (\pi_i \cap \pi_m) = \bar{\pi}_i$. Die Unterräume $\bar{\pi}_i$ sind jene Hyperebenen von π_m , die man durch je $n-1$ verschiedene Punkte des Basissimplex $\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n\}$ von π_m aufspannen kann, und solche Hyperebenen haben stets einen leeren Durchschnitt, denn $(\bar{\pi}_1 \cap \dots \cap \bar{\pi}_k) \vee \bar{\pi}_{k+1} = \pi_m$ ($1 \leq k < n$) wegen $\bar{A}_{k+1} \in \bar{\pi}_1 \cap \dots \cap \bar{\pi}_k$ und damit gilt

$\dim \bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_2 = \dim \bar{\pi}_1 + \dim \bar{\pi}_2 - \dim \bar{\pi}_1 \vee \bar{\pi}_2 = (n-2) + (n-2) - (n-1) = n-3$
 $\dim[(\bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_2) \cap \bar{\pi}_3] = \dim \bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_2 + \dim \bar{\pi}_3 - \dim[(\bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_2) \vee \bar{\pi}_3] = (n-3) + (n-2) - (n-1) = n-4$
 usf.

$\dim(\bar{\pi}_1 \cap \dots \cap \bar{\pi}_{n-1}) \cap \bar{\pi}_n = \dim(\bar{\pi}_1 \cap \dots \cap \bar{\pi}_{n-1}) + \dim \bar{\pi}_n - \dim[(\bar{\pi}_1 \cap \dots \cap \bar{\pi}_{n-1}) \vee \bar{\pi}_n] =$
 $= [n - (n-1+1)] + (n-2) - (n-1) = -1$: Widerspruch zur Existenz von $\bar{A}$.

Analog geht der Schluß für $A = \bar{A} \in \pi_m$.

Die $(n+2)$ -punktige Menge $\{A_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, A\}$ ist eine Fundamentalfigur in π :

$\{A_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n\}$ ist ein Basissimplex, da $A_0 \in \bar{\pi}$ und $\{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n\}$ ein Simplex in π_m ist; ebenso erkennt man, daß $\{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, A\}$ ein Basissimplex ist. Es genügt, wenn o.B.d.A. noch $\{A_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{n-1}, A\}$ als Basissimplex erwiesen wird:

(ind.) $A \in A_0 \vee \bar{A}_1 \vee \dots \vee \bar{A}_{n-1} =: \pi_k$; da $A \in \bar{\pi}_i \Rightarrow A \in \pi_n = A_n \vee \bar{A}_1 \vee \dots \vee \bar{A}_{n-1}$. Die beiden verschiedenen Hyperebenen π_k und π_n schneiden einander nach der Kogeraden $\bar{A}_1 \vee \dots \vee \bar{A}_{n-1} \Rightarrow A \in \bar{A}_1 \vee \dots \vee \bar{A}_{n-1} \subset \pi_m$: Widerspruch zu $A \notin \pi_m$.

Wir haben damit aus einem Simplex von eigentlichen Punkten $\{A_0, \dots, A_n\}$ eine Fundamentalfigur $\{A_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, A\}$ in π konstruiert, von welcher die n Punkte $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ in π_m liegen.

(c) Sind $\{A_0, \dots, A_n\}$ und $\{A'_0, \dots, A'_n\}$ zwei n -Simplices in $\bar{\pi}$, so können dazu gemäß (b) die Fundamentalfiguren $\{A_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, A\}$ und $\{A'_0, \bar{A}'_1, \dots, \bar{A}'_n, A'\}$ in π konstruiert werden. Nach Satz 3.7, Folg. 8 existiert in π_p mindestens ein $x \in \text{PGL}(\pi_p)$ mit $A_0 x = A'_0$, $\bar{A}_1 x = \bar{A}'_1$ ($i=1, \dots, n$) und $A x = A'$.

$x = x|_{\pi}$ ist eine Affinität wegen $\pi_m x^* = (\bar{A}_1 \vee \dots \vee \bar{A}_n) x^* = \bar{A}_1 x \vee \dots \vee \bar{A}_n x = \bar{A}'_1 \vee \dots \vee \bar{A}'_n = \pi_m$, und da $A_1 = (A_0 \vee A_1) \cap (A \vee \bar{A}_2 \vee \dots \vee \bar{A}_n)$ usf. und $\vee$ und $\cap$ mit einer Kollineation verträglich sind, gilt $A_j x = A'_j$ ($j=0, \dots, n$).

(d) Ist $\tilde{\mathbb{T}}$ ein PP-Raum, so auch $\mathbb{T}$ und da $\{A_0, \dots, A_n\}$ festbleibt unter $\tilde{\alpha} \Rightarrow \{A_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n, A\}$ bleibt fest unter der projektiven Kollineation α nach der Konstruktion der Fundamentalfigur in (b) $\stackrel{b.1}{\Rightarrow} \alpha = \iota \Rightarrow \tilde{\alpha} = \iota$. Jede projektive Affinität, welche die Punkte eines Simplex einzeln festläßt, ist also notwendig die Identität; wie in 3.7, Folg.8, Beweisteil (c) folgt daraus die scharfe Transitivität von $\text{AGL}(\tilde{\mathbb{T}}_0^n)$ auf der Menge der n-Simplices in $\tilde{\mathbb{T}}$. ◆

Bemerkung: Unter Benützung eines Isomorphismus kann man Folg.3 von einem projektiv eingebetteten normalen affinen Raum auf einen normalen affinen Raum übertragen.

SATZ 6.2: In einem normalen affinen Desarguesraum endlicher Dimension n ist die Gruppe der projektiven Affinitäten (affine Gruppe) transitiv auf der Menge der n-Simplices und scharf transitiv, wenn PP gilt. In klassischen affinen Räumen sind die involutorischen perspektiven Affinitäten genau die Spiegelungen an Punkten und an Hyperebenen. Für n=2 sind dies die einzigen involutorischen projektiven Affinitäten, während für n=3 genau die Spiegelungen an Geraden dazukommen.

6.3. Eigenschaften klassischer affiner Räume endlicher Dimension

In $\mathbb{T}_K^n$ mit $2 < n < \infty$ existieren stets Polaritäten λ , die keine Nullpolaritäten sind, und Nullpolaritäten ν genau dann, wenn n ungerade ist. Die Nullpolaritäten sind stets projektiv. Bildet man den projektiv eingebetteten affinen Raum $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}_K^n \setminus \mathbb{T}_\infty$, so be-
ruhen die affinen Eigenschaften von λ bzw. ν auf der Auszeichnung von $\omega\lambda^*$ bzw. $\omega\nu^*$.

DEF.6.3a: Ist δ eine Polarität in $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}_K^n \setminus \mathbb{T}_\infty$, so heißt jeder Unterraum von $\tilde{\mathbb{T}}$ durch den $\text{Pol } \omega\delta^*$ der Fernhyperebene ω ein Durchmesserunterraum von δ ; gilt $\omega\delta^* \in \tilde{\mathbb{T}}$, so heißt $\omega\delta^*$ Mittelpunkt von δ . Ist λ eine projektive hyperbolische Polarität mit einem Mittelpunkt, so heißt die durch λ bestimmte Quadrik eine Mittelpunktquadrik in $\tilde{\mathbb{T}}$; ist in λ die Fernhyperebene selbstkonjugiert, so heißt die Quadrik ein Paraboloid in $\tilde{\mathbb{T}}$.

Bemerkungen: (a) Ist λ eine projektive hyperbolische Polarität, so werden die Begriffe, welche für λ definiert wurden, auch auf die durch λ bestimmte Quadrik übertragen, z.B. Durchmesserunterraum, Mittelpunkt der Quadrik.

(b) Eine Polarität δ hat genau dann einen Mittelpunkt, wenn die Fernhyperebene nicht selbstkonjugiert ist. Insbesondere besitzt eine Nullpolarität keinen Mittelpunkt.

(c) Da für eine Mittelpunktquadrik die Fernhyperebene nicht selbstkonjugiert ist, liegt der Mittelpunkt $\omega\lambda^*$ nicht auf der Mittelpunktquadrik.

(d) Speziell für $\dim \mathbb{P}_k = 2$ spricht man von Mittelpunktkegelschnitten und Parabeln.

Folgerungen:

1) Eine Nullpolarität gestattet jede Translation in Durchmesser-richtung, d.h. $\forall \tau \in \text{PGL}(\omega\nu^*, \mathbb{P}_\omega)$ gilt $\nu\tau^* = \tau\nu$.

Bew.: $X \in \dot{\mathbb{P}} \Rightarrow X\nu$ ist eine von $\mathbb{P}_\omega$ verschiedene Hyperebene $\Rightarrow X\nu \cap \mathbb{P}_\omega =: \Sigma$ ist eine Kogerade in $\mathbb{P}_\omega$ mit $X \notin \mathbb{P}_\omega \xrightarrow{\text{Dim. Satz}}$

$X\nu\Sigma = X\nu \Rightarrow X\nu\tau^* = (X\nu\Sigma)\tau^* = X\tau\nu\Sigma\bar{\tau} = X\tau\nu\Sigma$,

denn wegen $\tau|_{\mathbb{P}_\omega} = 1 \wedge \mathbb{P}_\omega \subset \mathbb{P}_\omega$ gilt $\Sigma\bar{\tau} = \Sigma$.

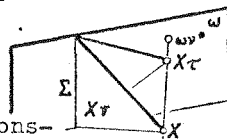
$X \in \dot{\mathbb{P}} \Rightarrow X\tau \in \dot{\mathbb{P}}$ und $X, X\tau$ und das Kollineations-

zentrum $\omega\nu^*$ sind kollinear $\Rightarrow$ die Hyperebenen $X\nu, (X\tau)\nu$ und $(\omega\nu^*)\nu = \omega$

haben eine Kogerade gemeinsam $\Rightarrow (X\tau)\nu \cap (X\nu \cap \mathbb{P}_\omega) = \Sigma$. Aus $X\tau \cap \tilde{\mathbb{P}}(X\tau)\nu$

und $X\tau \notin \mathbb{P}_\omega$ folgt nach dem Dimensionssatz $X\tau\nu = X\tau\nu\Sigma = X\nu\tau^*$

$\forall X \in \dot{\mathbb{P}}$; für $X \in \mathbb{P}_\omega$ ist die Aussage trivial $\Rightarrow \nu\tau^* = \tau\nu$. ◆



2) Ist λ eine projektive Nichtnullpolarität mit dem Mittelpunkt $M = \omega\lambda^*$ und ist $\hat{\sigma}_M$ die Spiegelung an M , so gilt $\lambda \hat{\sigma}_M^* = \hat{\sigma}_M \lambda$.

Ist α eine Durchmesserhyperebene einer projektiven Nichtnullpolarität λ , die nicht selbstkonjugiert ist und $\hat{\sigma}_\alpha$ die Spiegelung an α , so gilt $\lambda \hat{\sigma}_\alpha^* = \hat{\sigma}_\alpha \lambda$.

Bew.: (a) Der Nullpunkt $M = \omega\lambda^* \tilde{\lambda} \omega$ ist nicht selbstkonjugiert bezüglich λ , und daher gilt $\lambda \hat{\sigma}_M^* = \hat{\sigma}_M \lambda$ nach 5.5, Folg. 6 in $\mathbb{P}$; dabei ist $\hat{\sigma}_M$ die harmonische Homologie mit dem Zentrum M und der Achse $M\lambda = \omega$ und daher $\hat{\sigma}_M|_{\tilde{\mathbb{P}}}$ die Spiegelung $\hat{\sigma}_M$ an M .

(b) Ist α eine in λ nicht selbstkonjugierte Durchmesserhyper-ebene, so ist $\alpha\lambda^* \tilde{\Gamma}\omega$, da $\alpha \tilde{\Gamma}\omega\lambda^*$ gilt. Nach 5.5, Folg.6 gilt $\lambda\sigma_{\alpha\lambda^*}^* = \sigma_{\alpha\lambda^*} \lambda$; dabei ist $\sigma_{\alpha\lambda^*}$ die harmonische Homologie mit dem Fernzentrum $\alpha\lambda^*$ und der Achse α und daher $\sigma_{\alpha\lambda^*} | \uparrow$ die Spiegelung $\tilde{\sigma}_\alpha$ an α .

Bemerkungen: (a) Ist λ speziell eine hyperbolische projektive Polarität, so bestimmt sie eine Quadrik ϕ und die obige Aussage lautet:
Jede Mittelpunktquadrik gestattet die zentrischen Spiegelungen am Mittelpunkt; jede Quadrik gestattet die Spiegelungen an den nicht selbstkonjugierten Durchmesserhyper-ebenen.

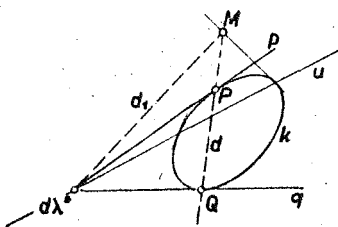
(b) Für einen dreidimensionalen klassischen affinen Raum $\tilde{\mathbb{R}}^3_{KL}$ erhält man aus Def.4.9c, Anw.a: Jede Quadrik gestattet axiale Spiegelungen an den nicht selbstkonjugierten Durchmessergeraden.

(c) Trifft eine Durchmessergerade eine Mittelpunktquadrik ϕ in zwei verschiedenen Punkten P und Q, so gilt $Q = P\sigma_M$ wegen (a), und daher ist der Mittelpunkt M von ϕ der Mittelpunkt der Strecke (P,Q). Die Tangentialhyper-ebenen $P\lambda$ und $Q\lambda$ in den verschiedenen Punkten P,Q auf einer Durchmessergeraden sind wegen $Q\lambda = P\sigma_M\lambda = (P\lambda)\sigma_M^*$ parallel.

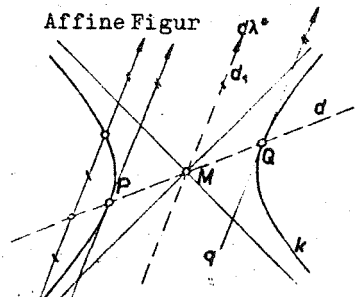
(d) Ist α eine nicht selbstkonjugierte Durchmesserhyper-ebene, so liegen die Berührungspunkte aller Tangentialhyper-ebenen aus dem Fernpol $A = \alpha\lambda^*$ von α wegen der Symmetrie der konjugierten Lage in der Hyper-ebene α , und auf jeder Geraden durch A, die ϕ in zwei verschiedenen Punkten P und Q trifft, liegt der Mittelpunkt der Strecke (P,Q) in α , wie aus den Eigenschaften von $\tilde{\sigma}_\alpha$ folgt.

(e) Speziell für $\tilde{\Gamma}_{KL} = 2$ lautet Bem.c bzw. Bem.d:
Schneidet eine Durchmessergerade d einen Mittelpunktkegelschnitt k in zwei verschiedenen Punkten P und Q, so sind die Tangenten in P und Q parallel; sie gehen durch den Fernpunkt des zu d konjugierten Durchmessers d_1 .
Ist d eine nicht selbstkonjugierte Durchmessergerade eines Kegel-schnitts k, so liegen die Berührungspunkte der Tangenten aus dem Fernpol $d\lambda^*$ auf d, und die Durchmessergerade d "halbiert" alle Sehnen der zu d konjugierten Richtung.

Projektive Figur

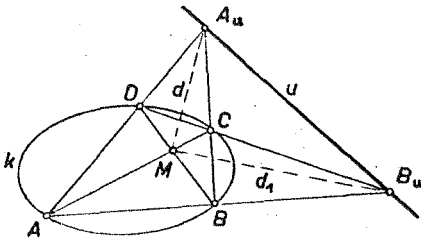


Affine Figur

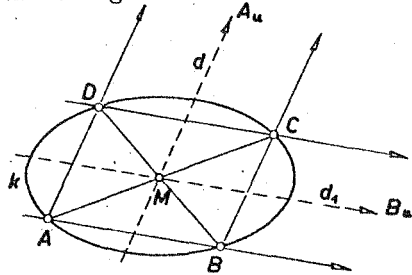


(f) Die Mittellinien d, d_1 eines einem Mittelpunkt-kegelschnitt eingeschriebenen Parallelogramms (d.i. ein Viereck mit zwei Paaren paralleler Gegenseiten) sind konjugierte Durchmesser (durch affine Spezialisierung aus: Das Diagonaldreieck eines einem Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks ist ein Poldreieck, vgl. Satz 2.5a).

Projektive Figur



Affine Figur



3) In 4.5, Folg.7 wurde für eine projektive Polarität λ in $\mathbb{P}_{kl}^3$ eine Spurpolarität λ_r in einer nicht selbstkonjugierten Ebene π erklärt. Wir wollen dies auf eine projektive Polarität $\lambda: \mathbb{P}_{kl}^n \rightarrow \mathbb{P}_{kl}^n$ (vgl. Def.3.9b und Def.5.5a) übertragen.

DEF.6.3b: Ist $\lambda: \mathbb{P}_{kl}^n \rightarrow \mathbb{P}_{kl}^n$ (mit $n \geq 3$) eine projektive Polarität und $\mathbb{T}_\omega$ eine nicht selbstkonjugierte Hyperebene, so heißt $\lambda_\omega: \mathcal{P}_\omega \rightarrow \{\text{Menge der Hyperebenen von } \mathbb{T}_\omega\}$ mit $X \mapsto X\lambda_\omega := X\lambda \cap \mathbb{T}_\omega$ die Spurpolarität von λ in $\mathbb{T}_\omega$.

Es ist zu zeigen, daß diese Definition sinnvoll und λ_ω eine projektive Polarität in $\mathbb{T}_\omega$ ist. λ_ω ist eine globale Abbildung, denn jedem Punkt $X \in \mathbb{T}_\omega$ wird unter λ eine Hyperebene $X\lambda$ von $\mathbb{T}$ durch den Punkt $M := \mathbb{T}_\omega \lambda^*(\lambda \mathbb{T}_\omega)$ zugeordnet $\Rightarrow X\lambda \neq \mathbb{T}_\omega \Rightarrow X\lambda \cap \mathbb{T}_\omega$ ist eine eindeutig bestimmte Hyperebene von $\mathbb{T}_\omega$. Die konjugierte Lage bezüglich λ_ω ist symmetrisch (mit $\tilde{\lambda}_\omega$ bezeichnen wir die Inzidenz eines Punktes von $\mathbb{T}_\omega$ mit einer Hyperebene von $\mathbb{T}_\omega$): $Y \tilde{\lambda}_\omega X\lambda_\omega = X\lambda \cap \mathbb{T}_\omega$ (mit $X, Y \in \mathbb{T}_\omega$) $\Rightarrow Y \tilde{\lambda}_\omega X\lambda \Rightarrow Y\lambda \tilde{\lambda}_\omega X (\wedge X \tilde{\lambda}_\omega \mathbb{T}_\omega) \Rightarrow X \tilde{\lambda}_\omega (Y\lambda \cap \mathbb{T}_\omega) = Y\lambda_\omega$. λ_ω ist projektiv: Sei $g=XY$ eine beliebige Gerade in $\mathbb{T}_\omega$; $g\hat{\lambda}$ ist die Kogerade $X\lambda \cap Y\lambda$ von $\mathbb{T}$ und wegen $X, Y \in \mathbb{T}_\omega$ gilt $X\lambda, Y\lambda \cap M \Rightarrow M \in \varphi_{g\hat{\lambda}} \Rightarrow g\hat{\lambda} \hat{\lambda}^* \omega$. Das Hyperebenenbüschel mit dem

Träger $g\hat{\lambda}$ schneidet daher $\mathbb{T}_\omega$ nach einem zu ihm perspektiven Büschel $\mathcal{L}$ von Unterräumen mit dem Büschelraum $\mathbb{T}_\omega$ und dem Träger-
raum $g\hat{\lambda} \cap \mathbb{T}_\omega = (X\lambda \cap Y\lambda) \cap \mathbb{T}_\omega = (X\lambda \cap \mathbb{T}_\omega) \cap (Y\lambda \cap \mathbb{T}_\omega) = X\lambda_\omega \cap Y\lambda_\omega = (XY)\lambda_\omega = g\hat{\lambda}_\omega$.

Also gilt insgesamt:
 $\mathcal{P}_\omega(X) \hat{\wedge} \mathcal{P}_\omega(Y) (\hat{\lambda}\lambda) \hat{\wedge} \mathcal{L}_{g\hat{\lambda}_\omega} (X\lambda_\omega)$.

Übrigens gilt: Die Menge der bezüglich λ_ω selbstkonjugierten Punkte stimmt überein mit der Menge der selbstkonjugierten Punkte bezüglich λ in $\mathbb{T}_\omega$.

Im affinen Raum $\mathbb{T}_\omega^n$ (mit $n \geq 3$) bestimmt eine Mittelpunktsquadrik eine Fernspurpolarität λ_ω , während für $n=2$ auf der Ferngeraden u , welche die Tangente eines Mittelpunktskegelschnitts ist, eine projektive Involution λ_u konjugierter Punkte existiert; die projektive Involution λ_u soll hier Ferninvolution genannt werden.

DEF.6.3c: Ist für $n \geq 3$ bzw. $n=2$ die Fernspurpolarität λ_ω bzw. die Ferninvolution λ_u einer Mittelpunktsquadrik bzw. eines Mittelpunktskegelschnitts hyperbolisch, so heißt die Quadrik ein Hyperboloid bzw. der Kegelschnitt eine Hyperbel; jede eigentliche Tangentialhyperebene in einem Fernpunkt heißt asymptotische Tangentialhyperebene. Ist dagegen λ_ω bzw. λ_u elliptisch, so liegt ein Ellipsoid bzw. eine Ellipse vor.

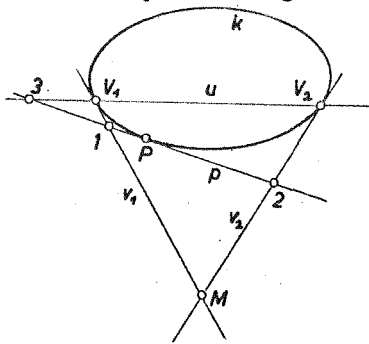
Bemerkungen; (a) Die Existenz von Ellipsoiden ist eine Körpereigenschaft. Ist der Algebraisierungskörper von $\mathbb{T}_\omega^n$ ($\hat{\wedge} \mathbb{T}(\mathbb{Q}^{n+1})$) mit K kommutativ und $\text{Char } K \neq 2$ quadratisch abgeschlossen, so ist jede Mittelpunktsquadrik (jeder Mittelpunktskegelschnitt) ein Hyperboloid (eine Hyperbel). Nach 5.6, Folg.3, Bem.b existiert dann nämlich keine elliptische projektive Polarität und daher ist λ_ω stets hyperbolisch; ebenso existieren keine elliptischen projektiven Involutionen.

(b) Alle asymptotischen Tangentialhyperebenen enthalten den Mittelpunkt: $P \in \phi \wedge P \in \mathbb{T}_\omega \Rightarrow P \lambda \hat{\wedge} \omega \lambda^* = M$.

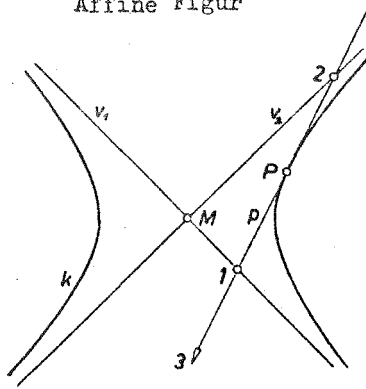
(c) Speziell für $n=2$ heißen die Tangenten v_1 und v_2 in den Fernpunkten V_1 und V_2 einer Hyperbel Asymptoten; sie sind die Fixgeraden der projektiven Involution konjugierter Durchmesser.

Die zu 2.1, Folg.8, Anw.b duale Aussage lautet: Schneidet man eine Kegelschnittstangente p (Berührungspunkt P) mit zwei anderen Kegelschnittstangenten v_1 und v_2 (Berührungspunkte V_1 und V_2), so gilt $H(p, v_1 =: 1, p, v_2 =: 2; P, p, V_1, V_2 =: 3)$. Hieraus erhält man durch affine Spezialisierung: Der Berührungspunkt einer (nicht asymptotischen) Hyperbelstangente ist der Mittelpunkt der durch die Schnittpunkte mit den beiden Asymptoten bestimmten Strecke.

Projektive Figur



Affine Figur



4) Wir behandeln in diesem Punkt speziell Quadriken in einem projektiv eingebetteten klassischen dreidimensionalen affinen Raum $\mathbb{P}_3^1$. Für eine ringartige Quadrik ϕ gilt stets $\phi \cap \mathcal{P}_\omega \neq \emptyset$, also ist eine ringartige Quadrik stets ein Hyperboloid oder ein Paraboloid. In $\mathbb{P}_3^1$ werden folgende Bezeichnungen verwendet:

ringartiges Hyperboloid	"einschaliges Hyperboloid"
ringartiges Paraboloid	"hyperbolisches Paraboloid"
ovales Hyperboloid	"zweischaliges Hyperboloid"
ovales Paraboloid	"elliptisches Paraboloid".

Ellipsoide sind stets oval.

Die ersten beiden Typen existieren in jedem $\mathbb{P}_3^1$, während die Existenz der letzten drei Typen eine Körpereigenschaft ist. Paraboloiden bestimmen im Gegensatz zu Ellipsoiden und Hyperboloiden keine Fernspurpolarität λ_ω , denn $\mathcal{T}_\omega$ ist selbstkonjugiert.

Eigenschaften:

(I) Alle asymptotischen Tangentialebenen eines Hyperboloids bilden einen quadratischen Kegel ("Asymptotenkegel") mit der Spitze im Mittelpunkt. Alle asymptotischen Tangentialebenen eines hyperbolischen Paraboloids bilden zwei Parallelebenenbüschel; ein elliptisches Paraboloid besitzt keine asymptotische Ebene.

Bew.: (a) Affine Spezialisierung von 4.6, Folg.3, Anw.a für $P=M$ und $PA=MA=\omega$.

(b) Für ein hyperbolisches bzw. elliptisches Paraboloid ϕ gilt nach 4.3: $\phi \cap \mathcal{P}_\omega = \{P_e, P_f\}$ bzw. $\phi \cap \mathcal{P}_\omega = \emptyset$; dabei sind e, f zwei verschiedene Erzeugenden von ϕ , die einander im Berührungspunkt $O = \omega^*$ von $\mathcal{T}_\omega$ schneiden. Jede Tangentialebene eines hyperbolischen Paraboloids enthält daher entweder e oder f .

(II) Auf jeder ringartigen Quadrik ϕ liegen zwei Reguli $\mathcal{U}_\phi$ und $\overline{\mathcal{U}}_\phi$. Die Menge aller Geraden e durch einen Punkt $S \in \mathcal{P}_\phi$, die zu einer Erzeugenden von $\mathcal{U}_\phi$ parallel sind, heißt "Richtkegel von $\mathcal{U}_\phi$ mit

der Spitze S'' ; ist speziell der Richtkegel ein Geradenbüschel, so heißt seine Ebene eine "Richtebene" von $\mathcal{U}_\phi$. Dann gilt:

Jeder Regulus eines einschaligen Hyperboloids besitzt den Asymptotenkegel als Richtkegel mit der Spitze im Mittelpunkt. Jeder Regulus eines hyperbolischen Paraboloids besitzt eine Richtebene.

Bew.: (a) Alle Fernpunkte E_u der Erzeugenden e der Schar $\mathcal{U}_\phi$ eines einschaligen Hyperboloids bilden den Kegelschnitt $k_u = \phi \cap \rho_u$. Man erhält die zu e parallele Gerade durch den Mittelpunkt M , wenn man E_u mit M verbindet. Verbindet man jeden Punkt von k_u mit $M = \omega \lambda_\phi^*$, so erhält man den Asymptotenkegel von ϕ ; gleiches gilt für $\mathcal{U}_\phi$.

(b) Jede Erzeugende e der Schar $\mathcal{U}_\phi$ eines hyperbolischen Paraboloids trifft die Fernerzeugende $f_u \in \mathcal{U}_\phi$ in einem Punkt E_u . Die Geraden SE_u liegen für alle Erzeugenden in der Ebene Sf_u ; analoges gilt für $\mathcal{U}_\phi$.

(III) Ist ϕ eine Quadrik und $\alpha(*\omega)$ eine Nichttangentialebene, so ist $\rho_\alpha \cap \phi$ im ringartigen Fall stets ein Kegelschnitt und im ovalen Fall ein Kegelschnitt oder die leere Menge. Der affine Typus dieses Kegelschnitts hängt von der Anzahl der Schnittpunkte der Ferngeraden $\alpha.\omega =: a_u$ von α mit ϕ ab. Insbesondere existieren daher auf einem Ellipsoid keine Hyperbeln und keine Parabeln, auf einem hyperbolischen bzw. elliptischen Paraboloid keine Ellipsen bzw. Hyperbeln. Jeder Nichttangentialschnitt eines Paraboloids mit einer Durchmesserene ist eine Parabel.

5) Wir diskutieren die quadratischen Kegel Γ in $\tilde{\mathbb{P}}_K^3$. Liegt die Spitze S des Kegels Γ nicht in der Fernebene ω , so ist $\Gamma \cap \rho_\omega =: \Gamma_u$ ein Kegelschnitt. Durch Projektion des Polarsystems λ_ω von Γ_u aus der Spitze S erhalten wir das Polarsystem λ_r von Γ (vgl. Def.4.2c).

Eigenschaften:

(I) Jeder quadratische Kegel (mit eigentlicher Spitze) in einem $\tilde{\mathbb{P}}_K^3$ gestattet genau die Spiegelungen an jeder Nichttangentialebene α durch S in Richtung der zu α in λ_r polaren Geraden. Alle zu α parallelen ebenen Schnitte von Γ nicht durch S sind Kegelschnitte mit gemeinsamen Fernpunkten und besitzen Mittelpunkte auf der zu α polaren Geraden a .

Bew.: (a) Die Spiegelung σ_α an α stammt von einer harmonischen Homologie $\mathcal{G}_\alpha$ mit der Achse α und dem Zentrum im Pol $A_\alpha := a_\omega$ der Ferngeraden a_ω von α bezüglich Γ_ω . Daher gilt $\Gamma_\omega \mathcal{G}_\alpha = \Gamma_\omega$ und wegen $S \cap \alpha = S_\alpha = S$. Da der Kegel Γ durch Γ_ω und die Spitze S eindeutig festgelegt ist, folgt $\Gamma \mathcal{G}_\alpha = \Gamma$.
 (b) Der Schnitt Γ_ω von Γ mit ω und der Schnitt von Γ mit einer Parallelebene $\bar{\alpha}$ ($\bar{\alpha} \not\subset S$) zu α sind perspektiv kollinear mit dem Zentrum S ; da A_α Pol von a_ω bezüglich Γ_ω ist, durchstößt $A_\alpha S = \alpha$ die Ebene $\bar{\alpha}$ im Pol von a_ω bezüglich $\Gamma_\omega \cap \bar{\alpha}$, d.h. $a_\omega \bar{\alpha}$ ist der Mittelpunkt des Kegelschnitts $\Gamma_\omega \cap \bar{\alpha}$.

Bemerkung: Aus (a) folgt: Jeder quadratische Kegel Γ in $\mathbb{P}_k^3$ gestattet jede harmonische Homologie, deren Achse eine Nichttangentialebene α durch S ist und deren Zentrum ein beliebiger von S verschiedener Punkt der zu α polaren Geraden a ist.

Ein Hyperboloid gestattet die gleichen planaren Spiegelungen wie sein Asymptotenkegel.

Bew.: (a) Ist σ eine planare Spiegelung des Hyperboloids ϕ , so ist σ eine automorphe Kollineation mit dem Zentrum Z_ω in ω . Wegen $\omega \sigma = \omega$ und $\phi \sigma = \phi$ geht die Achse $Z_\omega \lambda_\phi$ notwendig durch die Polare z_ω von Z_ω bezüglich $\mathcal{P}_\omega \cap \phi = k_\omega$; wegen $Z_\omega \cap \omega$ gilt $Z_\omega \lambda_\phi \cap \omega \lambda_\phi^* = M \Rightarrow Z_\omega \lambda_\phi = z_\omega M$. Also gilt $k_\omega \sigma = k_\omega$ und $M \sigma = M$; da der Asymptotenkegel Γ von ϕ durch k_ω und M eindeutig festgelegt ist, läßt σ auch Γ fest.

(b) Ist umgekehrt σ eine planare Spiegelung des Asymptotenkegels Γ von ϕ , so ist die Achse ζ von σ notwendig eine Ebene durch M und das Zentrum Z_ω von σ ist notwendig der Pol der Fernspur z_ω von ζ . Um $\phi \sigma = \phi$ zu erweisen, genügt es $Z_\omega \lambda_\phi = \zeta$ zu zeigen. Da k_ω die Spurpolarität von ϕ in ω festlegt, geht $Z_\omega \lambda_\phi$ durch die Polare z_ω von Z_ω bezüglich k_ω und wegen $Z_\omega \cap \omega$ gilt $Z_\omega \lambda_\phi \cap \omega \lambda_\phi^* = M \Rightarrow Z_\omega \lambda_\phi = z_\omega M = \zeta$.

DEF. 6.3d: Ein quadratischer Kegel Γ in $\mathbb{P}_k^3$, dessen Spitze in der Fernebene ω liegt, heißt ein quadratischer Zylinder in $\mathbb{P}_k^3$; ist die Anzahl seiner Fernerzeugenden zwei bzw. eins bzw. null, so heißt er hyperbolisch bzw. parabolisch bzw. elliptisch. Die zur Fernebene ω im Polarsystem λ_Γ polare Gerade heißt für nicht parabolische Zylinder Mittengerade; jede Ebene durch die Mittengerade bzw. durch die Ferngerade eines parabolischen Zylinders heißt Durchmesserene.

Bemerkungen: (a) Alle Nichtfernerzeugenden eines Zylinders sind zueinander parallel.

(b) Elliptische Zylinder existieren genau dann, wenn der Algebraisierungskörper nicht quadratisch abgeschlossen ist. Ein Zylinder ist genau dann parabolisch, wenn die Fernebene Tangentialebene ist.

(II) Da je zwei Schnitte eines quadratischen Kegels mit Ebenen nicht durch die Spitze perspektiv kollinear mit dem Zentrum in der Spitze sind, gilt insbesondere für quadratische Zylinder: Je zwei Schnitte mit Ebenen nicht parallel zu den Erzeugenden sind perspektiv affin in Richtung der Erzeugenden und daher vom gleichen affinen Typ.

Ein hyperbolischer Zylinder wird von jeder zu den Erzeugenden nicht parallelen Ebene α nach einer Hyperbel k geschnitten, deren Fernpunkte die Schnittpunkte von α mit den beiden Fernerzeugenden e_u und f_u des Zylinders sind. Die Asymptoten von k sind die Schnittgeraden der Tangentialebenen von Γ längs e_u und f_u ("asymptotische Ebenen des Zylinders") mit α ; die beiden asymptotischen Ebenen gehen durch die Mittellinie m des Zylinders, und m trägt alle Mittelpunkte der ebenen Schnitte. Auf einem hyperbolischen Zylinder liegen keine Parabeln und keine Ellipsen. Jeder Schnitt eines parabolischen Zylinders mit einer zu den Erzeugenden nicht parallelen Ebene ist eine Parabel, deren Durchmesser von den Durchmessererebenen des Zylinders ausgeschnitten werden. Auf einem parabolischen Zylinder liegen keine Hyperbeln und keine Ellipsen.

Jeder Schnitt eines elliptischen Zylinders mit einer Ebene nicht parallel zu den Erzeugenden ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt auf der Mittellinie liegt; auf einem elliptischen Zylinder liegen keine Hyperbeln und keine Parabeln.

(III) Da ein quadratischer Kegel alle Homologien mit dem Zentrum in der Spitze verträgt, gestattet ein quadratischer Zylinder alle planaren Spiegelungen in Richtung der Erzeugenden. Weitere planare Spiegelungen eines Zylinders erhält man aus der Bem. nach (I):

Ein nicht parabolischer Zylinder gestattet die planaren Spiegelungen an den nichttangentialen Durchmessererebenen in einer von der Erzeugendenrichtung verschiedenen zur konjugierten Durchmessererebene parallelen Richtung; ein parabolischer Zylinder gestattet die planare Spiegelung an jeder Durchmessererebene α , wobei das Zentrum ein beliebiger von der Fernspitze verschiedener Punkt auf der zu α in λ_r polaren Ferngeraden ist.

6) Abschließend sollen die Kubiken in einem $\mathbb{K}_\kappa^3$ besprochen werden.

DEF. 6.3e: Eine Kubik c , welche die Fernebene ω als Schmiegeebene besitzt, heißt eine kubische Parabel. Ist ω eine von einer Schmiegeebene verschiedene Tangentialebene, so heißt c eine kubische parabolische Hyperbel. Besitzt c drei verschiedene Fernpunkte, so heißt c eine kubische Hyperbel; sonst heißt c eine kubische Ellipse. Jede eigentliche Tangente in einem Kubikfernpunkt heißt Asymptote.

Bemerkungen: (a) Kubische Parabeln existieren immer, denn man kann das Fernschmiegeelement (U, u, ω) beliebig vorgeben; durch diese Angabe ist die Kubik noch nicht eindeutig bestimmt (vgl. 4.8, Folg. 6). Der Sehnenkegel $\mathcal{Q}_{r(u)}$ einer kubischen Parabel zu ihrem Fernpunkt U ist ein parabolischer Zylinder.

(b) Eine kubische parabolische Hyperbel mit dem Fernlinienelement (U, u) besitzt noch genau einen Fernpunkt V ; die Fernebene ω ist nämlich eine von der Schmiegeebene in U verschiedene Ebene durch die Erzeugende u des Sehnenkegels $\mathcal{Q}_{r(u)}$ und trägt daher nach 4.8, Folg. 1, Bem. c noch genau einen Kubikpunkt V . Kubische parabolische Hyperbeln existieren immer, und man kann sie durch das Fernlinienelement (U, u) und den zweiten Fernpunkt samt Asymptote festlegen. $\mathcal{Q}_{r(u)}$ ist ein hyperbolischer Zylinder mit den Fernerzeugenden u und UV , während $\mathcal{Q}_{r(v)}$ ein parabolischer Zylinder mit der Fernerzeugenden UV ist.

(c) Kubische Hyperbeln existieren immer; man kann sie eindeutig durch drei paarweise windschiefe Asymptoten u, v, w zu den Fernpunkten U, V, W festlegen (aus 4.8, Folg. 3, Anw. g). $\mathcal{Q}_{r(u)}$ bzw. $\mathcal{Q}_{r(v)}$ bzw. $\mathcal{Q}_{r(w)}$ ist ein hyperbolischer Zylinder mit den Fernerzeugenden UV, UW bzw. VU, VW bzw. WU, WV .

(d) Die Existenz kubischer Ellipsen ist eine Körpereigenschaft. Da nie vier Kubikpunkte komplanar und zwei Kubiktangenten stets windschief sind, eine von der Schmiegeebene verschiedene Ebene durch einen Kubikpunkt noch genau einen weiteren Kubikpunkt und eine Schmiegeebene genau einen Kubikpunkt trägt, sind für die Fernpunkte einer kubischen Ellipse c folgende Möglichkeiten denkbar:

(i) c hat keinen Fernpunkt.
Für eine Kubik ohne Fernpunkt geben wir ein Beispiel in $\mathbb{T}(\mathbb{Q}^4)$ wobei K der Restklassenkörper modulo 2 ist, an (vgl. 5.9, Folg. 2):

$$c = \{X(u) := (1, u, u^2, u^3)K \mid u \in K \cup \{\infty\}\} \Rightarrow$$

$$c = \{X(0) := (1, 0, 0, 0)K, X(1) := (1, 1, 1, 1)K, X(\infty) := (0, 0, 0, 1)K\};$$

man überprüft, daßB keiner der drei Punkte der Kubik in der als Fernebene ω ausgezeichneten Ebene $x^0 + x^1 + x^3 = 0$ liegt.

(ii) c hat genau einen Fernpunkt U mit eigentlicher Tangente u . Der Sehnenzylinder $\mathcal{Q}_{r(u)}$ einer kubischen Ellipse mit genau einem Fernpunkt U und der Asymptote u ist notwendig ein elliptischer Zylinder (ind.: $\mathcal{Q}_{r(u)}$ besitzt eine Fernerzeugende e_u ; die Ebene $e_u \cdot u$ ist keine Kubikschmiegeebene, da sie $\mathcal{Q}_{r(u)}$ nach zwei Erzeugenden schneidet, und daher existiert auf e_u nach 4.8, Folg. 1, Bem. c noch ein Kubikfernpunkt; dies ist bei einer kubischen Ellipse unmöglich: Widerspruch).

Für eine kubische Ellipse mit genau einem Fernpunkt geben wir ein Beispiel in $\mathbb{T}(\mathbb{Q}^4)$ ($\neq \text{PAR}$) an:

$$c = \{X(u) := (1 + u^3, 1, u, u^2)R \mid u \in R \cup \{\infty\}\}.$$

$X(0)=(1,0,0,0)R$ liegt nicht in der als Fernebene ω benützten Ebene $x^0=0$. Für einen Fernpunkt von c muß $1+u^3=0$ gelten, und $u^3=-1$ hat in R genau die Lösung -1 , also ist $X(-1)=(0,1,-1,1)R$ der einzige Kubikfernpunkt.

(iii) c hat genau zwei Fernpunkte U, V mit eigentlichen Tangenten u, v .

Fall (iii) ist unmöglich: $\mathcal{Q}_{R(\omega)}$ ist nämlich ein Zylinder mit der Fernerzeugenden UV und der Tangentialebene $Uv(*\omega)$ längs dieser, also besitzt $\mathcal{Q}_{R(\omega)}$ noch eine Resterzeugende in ω ; ebenso hat $\mathcal{Q}_{R(v)}$ eine Resterzeugende in ω und der Schnittpunkt der beiden Resterzeugenden ist ein dritter Kubikfernpunkt, sodaß eine kubische Hyperbel vorliegt.

(e) Aus Def.4.9c, Anw.b können wir die axialen Spiegelungen bestimmen, welche eine Kubik gestattet. Die Achsen einer solchen windschiefen projektiven Involution sind notwendig von den Tangenten verschiedene Schmieggeraden. Damit von Kubiktangenten verschiedene Fernschmieggeraden existieren, muß die Kubik notwendig einen Fernpunkt U besitzen; ist die Tangente u in U eigent-lich, so schneidet die Schmiegeebene σ in U die Fernebene ω nach einer geeigneten Fernschmieggeraden; ist dagegen u uneigentlich, so existiert nur eine von u verschiedene Fernschmieggerade, wenn die Fernebene Schmiegeebene in U ist. Daraus erkennt man: Nur kubische Ellipsen ohne Fernpunkte gestatten keine axialen Spiegelungen.

SATZ 6.3: Eine Nullpolarität gestattet jede Translation in Durchmesserrichtung. Jede projektive Polarität in einem endlichdimensionalen klassischen affinen Raum, in der die Fernhyperebene nicht selbstkonjugiert ist, gestattet die zentrischen Spiegelungen am Mittelpunkt und die Spiegelungen an den nicht selbstkonjugierten Durchmesserhyperebenen.

6.4. Die beiden Hauptsätze der affinen Geometrie

Zwischenbemerkung:

Seien $\mathcal{W}$ ein Rechtsvektorraum über einem (nicht notwendig kommutativen) Körper K , $\mathcal{U}$ ein Unterraum von $\mathcal{W}$ und α ein beliebiger Vektor aus $\mathcal{W}$. Unter der "Nebenklasse von α bezüglich $\mathcal{U}$ " versteht man die Vektormenge $\{\alpha + \epsilon \mid \epsilon \in \mathcal{U}\} =: \alpha + \mathcal{U}$.

Unter der Dimension der Nebenklasse versteht man $\dim \mathcal{U}$. Zwei Vektoren $\epsilon, \eta \in \mathcal{W}$ gehören genau dann zur selben Nebenklasse bezüglich $\mathcal{U}$, wenn $\epsilon - \eta \in \mathcal{U}$ gilt.

Die Menge aller nulldimensionalen Nebenklassen $n^0 \mathcal{M}$ von $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ ist mit $\mathcal{M}$ identisch.

Für die Menge $n^1 \mathcal{M}$ aller eindimensionalen Nebenklassen von $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ gilt $n^1 \mathcal{M} = \{\alpha + \ell \mathbb{K} \mid \ell \neq \sigma \wedge \alpha, \ell \in \mathcal{M}\}$.

Wir konstruieren aus dem Rechtsvektorraum $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ eine Inzidenzstruktur $A(\mathcal{M})$, indem wir setzen:

$$\mathcal{P} = n^0 \mathcal{M} = \mathcal{M}, \mathcal{L} = n^1 \mathcal{M}, I = \epsilon; \quad A(\mathcal{M}) := (\mathcal{M}, n^1 \mathcal{M}, \epsilon).$$

Bemerkungen: (a) $\dim \mathcal{M} = 0 \Rightarrow \mathcal{M} = \{\sigma\} \Rightarrow A(\mathcal{M}) = \{\sigma, \emptyset, \emptyset\}$; diese Menge ist deutbar als einpunktiger affiner Raum.

(b) $\dim \mathcal{M} = 1 \Rightarrow \mathcal{M} = \alpha \mathbb{K}$ mit $\alpha \neq \sigma \Rightarrow A(\mathcal{M}) = (\alpha \mathbb{K}, \{\alpha \mathbb{K}\}, \epsilon)$; diese Menge ist deutbar als affine Gerade, denn aus einer projektiven Geraden $\{\mathcal{P}, \{\mathcal{P}\}, \epsilon\}$ (wobei $\mathcal{P}$ eine beliebige mindestens dreielementige Menge ist) gewinnt man mit $\mathcal{P} = \mathcal{P} \setminus \{U\}$ für $U \in \mathcal{P}$ die affine Gerade $\{\mathcal{P}, \{\mathcal{P}\}, \epsilon\}$, und $\alpha \mathbb{K}$ enthält stets die beiden Elemente $\alpha \cdot 1$ und $\alpha \cdot 0$. Umgekehrt kann jedoch nicht jede affine Gerade als $A(\mathcal{M})$ mit $\dim \mathcal{M} = 1$ erhalten werden, denn $\alpha \mathbb{K}$ ist für endliches $\mathbb{K}$ stets eine Primzahlpotenz, und nicht jede natürliche Zahl ist eine Primzahlpotenz.

(c) $\dim \mathcal{M} \geq 2$: Drei Punkte $\epsilon, \eta, \zeta \in A(\mathcal{M})$ sind genau dann kollinear, wenn $\{\zeta - \epsilon, \eta - \epsilon\}$ l.a. ist.

Bew.: ϵ, η, ζ kollinear $\Leftrightarrow$ es existiert eine eindimensionale Nebenklasse $\alpha + \ell \mathbb{K}$ mit $\epsilon, \eta, \zeta \in \alpha + \ell \mathbb{K} \Leftrightarrow \zeta - \epsilon, \eta - \epsilon \in \ell \mathbb{K} \Leftrightarrow \{\zeta - \epsilon, \eta - \epsilon\}$ l.a.

(d) In der Inzidenzstruktur $A(\mathcal{M})$ gilt das Axiom I_1 .

Bew.: $\epsilon, \eta \in \mathcal{P} = \mathcal{M}, +$; die Gerade (d.h. eindimensionale Nebenklasse) $\epsilon + (\eta - \epsilon)\mathbb{K}$ enthält ϵ wegen $\epsilon + (\eta - \epsilon) \cdot 0 = \epsilon$ und η wegen $\epsilon + (\eta - \epsilon) \cdot 1 = \eta$. Die Verbindungsgerade ist eindeutig bestimmt:

$\epsilon, \eta \in \alpha + \ell \mathbb{K}$ mit $\ell \neq \sigma \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{K}$, sodaß gilt
 $\epsilon = \alpha + \ell x$
 $\eta = \alpha + \ell y$
 Daraus folgt durch Subtraktion

$\eta - \epsilon = \ell(y - x)$; wegen $\ell \neq \sigma$ gilt $x \neq y$ und in $\mathbb{K}$ ist $(y - x) \cdot z = 1$ mit $z = (y - x)^{-1}$ lösbar $\Rightarrow$

$$\epsilon = (\eta - \epsilon)(y - x)^{-1} \Rightarrow \alpha = \epsilon - (\eta - \epsilon)(y - x)^{-1} \cdot x.$$

Wir können damit die beiden Geraden (d.h. die beiden eindimensionalen Nebenklassen) vergleichen:

$$\begin{aligned} \alpha + \ell \mathbb{K} &= \epsilon - (\eta - \epsilon)(y - x)^{-1} \cdot x + [(\eta - \epsilon)(y - x)^{-1}] \mathbb{K} = \\ &= \epsilon + (\eta - \epsilon)[(y - x)^{-1} \mathbb{K} - (y - x)^{-1} x] = \epsilon + (\eta - \epsilon) \mathbb{K}. \end{aligned}$$

(Variiert nämlich λ in $\mathbb{K}$, so variiert in bijektiver Weise auch $(y - x)^{-1} \lambda - (y - x)^{-1} \cdot x$ in $\mathbb{K}$.)

(e) In der Inzidenzstruktur $A(W)$ mit $\dim W > 0$ gilt die Aussage $\tilde{E}$, denn: Für $\dim W > 0$ existieren eindimensionale Nebenklassen $a+tK$ mit $t \neq 0$ und jede enthält die beiden verschiedenen Punkte a und $a+t$.

$A(W)$ ist ein affiner Raum, der für $\dim W \geq 2$ desarguessch ist.

Bew.: (a) Die Fälle $\dim W = 0$ bzw. 1 wurden in Bem.a bzw. b erledigt.

(b) Gelte i.f. $\dim W \geq 2$ (vgl. beim folgenden Beweis die in 5.7 beim ersten Hauptsatz der projektiven Geometrie benutzte Konstruktion). Die direkte Summe $W := K \oplus W$ ist ein Rechtsvektorraum über K , und zu diesem können wir den projektiven Raum $\Pi(W(K))$ bilden. Nach 5.7, Bem.a ist $\Pi(0 \oplus W) =: \Pi_\omega$ eine Hyperebene und damit ist $\Pi \setminus \Pi_\omega =: \tilde{\Pi}$ ein affiner Raum. $A(W)$ ist als affiner Raum erwiesen, wenn $A(W) \cong \Pi(K \oplus W) \setminus \Pi(0 \oplus W)$ gezeigt ist; dazu genügt es nach 6.1, Folg.1, Bem. eine Affinität $\varepsilon: A(W) \rightarrow \tilde{\Pi} = \Pi \setminus \Pi_\omega$ anzugeben, denn $A(W)$ erfüllt I_1 und $\tilde{E}$.

Wir definieren ε durch $\varepsilon[\varepsilon A(W)] \xrightarrow{\varepsilon} (1, \varepsilon)K$.

$(1, \varepsilon)K$ ist als eindimensionaler Unterraum von $K \oplus W = W$ ein Punkt von $\Pi(K \oplus W)$ und $(1, \varepsilon)K$ liegt nicht in Π_ω , denn ein Punkt von Π_ω hat die Form $(0, \varepsilon)K$.

Die Abbildung ε ist sicher global.

(I) Um ε als Bijektion zu erweisen, genügt es zu zeigen, daß eine globale Umkehrabbildung ε^{-1} existiert. Ist $(x, w)K$ ein Punkt von $\Pi \setminus \Pi_\omega$, so folgt $x \neq 0$ und man kann eindeutig unnormen: $(x, w)K = (1, w x^{-1})K$ und $(1, w x^{-1})K \mapsto w x^{-1} \varepsilon A(W)$ ist die globale Umkehrabbildung von ε .

(II) ε erhält kollineare Lage: $\varepsilon, \eta, \zeta \mid \varepsilon \in A(W)$ kollinear und o.B.d.A. pw. verschieden $\xrightarrow{\text{Bem. d}}$ $\{ \eta - \varepsilon, \zeta - \varepsilon \}$ l.a. $\wedge \zeta - \varepsilon \neq 0 \Rightarrow \eta - \varepsilon = (\zeta - \varepsilon)\lambda \Rightarrow \varepsilon_0 = -\eta + \zeta\lambda + \varepsilon(1-\lambda)$.

Die ε -Bilder $\varepsilon\varepsilon = (1, \varepsilon)K$, $\eta\varepsilon = (1, \eta)K$, $\zeta\varepsilon = (1, \zeta)K$ sind nach 5.1 genau dann kollinear, wenn $\{(1, \varepsilon), (1, \eta), (1, \zeta)\}$ l.a. in W ist; dies ist erfüllt, wie folgende nicht triviale Linearkombination des Nullvektors ε_0 von W zeigt:

$$(1, \varepsilon)(1-\lambda) - (1, \eta) + (1, \zeta)\lambda = \varepsilon_0.$$

(III) Statt zu zeigen, daß ε nicht kollineare Lage erhält, zeigen wir die gleichwertige Aussage: Kollineare Bildpunkte stammen von kollinearen Ursprüngen. Die kollinearen Bildpunkte seien $(1, \varepsilon)K$, $(1, \eta)K$, $(1, \zeta)K$ (wir setzen o.B.d.A. die normierten Darstellungen und $(1, \varepsilon)K, (1, \eta)K, (1, \zeta)K$ pw. verschieden voraus); die Ursprünge ε, η, ζ

sind nach Bem. d genau dann kollinear, wenn $\{z-y, \epsilon-y\}$ l.a. ist.
 $(1, \epsilon)K, (1, y)K, (1, z)K$ kollinear $\xrightarrow{5.1} \{(1, \epsilon), (1, y), (1, z)\}$ l.a. $\Rightarrow$
 $\exists \lambda, \mu \in K$ mit $(1, z) = (1, \epsilon)\lambda + (1, y)\mu = (\lambda + \mu, \epsilon\lambda + y\mu) \Rightarrow$
 $1 = \lambda + \mu \wedge z = \epsilon\lambda + y\mu \Rightarrow z = \epsilon\lambda + y(1 - \lambda) = y + (\epsilon - y)\lambda \Rightarrow$
 $z - y = (\epsilon - y)\lambda \Rightarrow \{z - y, \epsilon - y\}$ l.a.
 (c) $\dim \mathcal{M} \geq 2$: Nach (b) gilt $A(\mathcal{M}) \cong \mathbb{P}(K \oplus \mathcal{M}) \setminus \mathbb{P}(0 \oplus \mathcal{M})$, wo-
 bei $\mathbb{P}(K \oplus \mathcal{M})$ nach 5.1 als projektiver Raum über einem Rechts-
 vektorraum desarguessch ist, da wegen $\dim \mathcal{M} \geq 2$ dann $\dim(K \oplus \mathcal{M}) \geq 3$
 und daher $\dim \mathbb{P}(K \oplus \mathcal{M}) \geq 2$ gilt. Somit ist auch $A(\mathcal{M})$ desarguessch.

DEF. 6.4a: Ist $\mathcal{M}(K)$ ein Rechtsvektorraum, so heißt die Inzidenz-
 struktur $A(\mathcal{M}) = (\mathcal{M}, n^1 \mathcal{M}, \epsilon)$

der affine Raum über $\mathcal{M}$. Ist speziell $\mathcal{M} = \mathbb{Z}^n$, so heißt $A(\mathbb{Z}^n)$ der
 n-dimensionale arithmetische affine Raum über K .

Bemerkungen: (a) $A(\mathcal{M})$ ist kein projektiv eingebetteter affiner
 Raum, jedoch gilt $A(\mathcal{M}) \cong \mathbb{P}(K \oplus \mathcal{M}) \setminus \mathbb{P}(0 \oplus \mathcal{M})$.
 Die nicht surjektive Abbildung $\epsilon: A(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{M}(K))$ heißt die
 "kanonische projektive Einbettung des affinen Raumes $A(\mathcal{M})$ ".

Aus dem Beweis erkennt man für $\dim \mathcal{M} < \infty$:

$$\dim A(\mathcal{M}) = \dim \mathbb{P}(K \oplus \mathcal{M}) = \dim(K \oplus \mathcal{M}) - 1 = \dim K + \dim \mathcal{M} - 1 = 1 + \dim \mathcal{M} - 1 = \dim \mathcal{M}.$$

(b) $A(\mathcal{M})$ ist normal für $\dim \mathcal{M} = 2$ oder $\dim \mathcal{M} > 2 \wedge |K| > 2$.

(c) Sei $\alpha_0 + \mathcal{U}$ eine Nebenklasse in $\mathcal{M}$ mit $\dim \mathcal{U} \geq 1$.
 Sind ϵ, η zwei verschiedene Elemente von $\alpha_0 + \mathcal{U}$, so ist ihre Ver-
 bindungsgerade $\epsilon + (\eta - \epsilon)K$ eine ganz in $\alpha_0 + \mathcal{U}$ enthaltene eindimensi-
 onale Nebenklasse, denn es gilt

$$\epsilon, \eta \in \alpha_0 + \mathcal{U} \Rightarrow \epsilon = \alpha_0 + \tilde{u}_1, \eta = \alpha_0 + \tilde{u}_2 \text{ mit } \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in \mathcal{U}.$$

Für alle $f \in \epsilon + (\eta - \epsilon)K$ gilt

$$f = \epsilon + (\eta - \epsilon)h = \alpha_0 + \tilde{u}_1 + (\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1)h \in \alpha_0 + \mathcal{U} \quad (h \in K).$$

Es ist also sinnvoll, von der Menge aller eindimensionalen Neben-
 klassen der Nebenklasse $\alpha_0 + \mathcal{U}$ zu sprechen und wir schreiben dafür

$$n^1(\alpha_0 + \mathcal{U}) := \{\alpha + \epsilon K \mid \alpha, \epsilon \in \mathcal{M} \wedge \epsilon \neq 0 \wedge \alpha + \epsilon K \subset \alpha_0 + \mathcal{U}\}.$$

(d) Sind $\mathcal{M}$ ein Rechtsvektorraum und $\mathcal{M}_1$ ein Unter-
 vektorraum, so ist die mit $\alpha_0 \in \mathcal{M}$ gebildete Inzidenzstruktur

$$A(\alpha_0 + \mathcal{M}_1) := (\alpha_0 + \mathcal{M}_1, n^1(\alpha_0 + \mathcal{M}_1), \epsilon)$$

ein zu $A(\mathcal{M}_1)$ isomorpher affiner Raum.

Bew.: Da $A(\mathcal{M}_1)$ die Axiome I₁ und E erfüllt, genügt es nach 6.1,
 Folg. 1, Bem. zu zeigen, daß die Abbildung $\alpha: A(\mathcal{M}_1) \rightarrow \alpha_0 + \mathcal{M}_1$, er-
 klärt durch $\epsilon \mapsto \alpha_0 + \epsilon$ eine Affinität ist. Sicher ist α eine
 Bijektion und die Gültigkeit von (II) und (III) aus Def. 6.1b er-
 sieht man unmittelbar aus der folgenden Äquivalenz:

$$\{z - \epsilon, \eta - \epsilon\} \text{ l.a.} \Leftrightarrow \{(\alpha_0 + z) - (\alpha_0 + \epsilon), (\alpha_0 + \eta) - (\alpha_0 + \epsilon)\} \text{ l.a.}$$

Folgerungen:

1) Sei $\mathcal{W}_1$ ein Untervektorraum des Rechtsvektorraumes $\mathcal{W}$. Wir bilden $A(\mathcal{W})$ und zu $\alpha_0 \in \mathcal{W}$ den affinen Raum (vgl. Bem. c) $A(\alpha_0 + \mathcal{W}_1)$. Es gilt $\alpha_0 + \mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}$, d.h. $A(\alpha_0 + \mathcal{W}_1)$ ist ein in $A(\mathcal{W})$ enthaltener affiner Raum.

In Def. 6.1d wurde ein affiner Unterraum definiert. Es besteht folgender Zusammenhang:

Ist $A(\mathcal{W})$ ein normaler affiner Raum, so ist $A_1 \subset A(\mathcal{W})$ genau dann ein affiner Unterraum im Sinne der Definition 6.1d, wenn die Punktmenge von A_1 eine Nebenklasse in $\mathcal{W}$ ist. Zwei affine Unterräume $A_1 = \alpha_0 + \mathcal{W}_1$ und $A_2 = \alpha_0 + \mathcal{W}_2$ von $A(\mathcal{W})$ sind genau dann parallel, wenn $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2$ oder $\mathcal{W}_2 \subset \mathcal{W}_1$ gilt.

Bew.: (a) Sei $A_1 \subset A$ ein affiner Unterraum von A im Sinne von Def. 6.1d. Für $\pi(\mathcal{W}) = \pi(K \oplus \mathcal{W})$ und $\pi_\omega = \pi(O \oplus \mathcal{W})$ gilt $A(\mathcal{W}) \stackrel{\circ}{=} \tilde{\pi} = \pi \setminus \pi_\omega$. Das Bild $A_1 \varepsilon$ von A_1 ist ein affiner Unterraum von $\tilde{\pi}$, der durch einen projektiven Unterraum π_1 von π bestimmt wird; nach 5.1, Folg. 5 existiert daher ein Untervektorraum $\mathcal{W}_1$ von $\mathcal{W}$, sodaß $\pi_1 = \pi(\mathcal{W}_1)$ ist. Da π_1 auf einen affinen Unterraum A_1 führt, gilt $\pi_1 \not\subset \pi_\omega$ und daher ist $\pi(\mathcal{W}_1) \cap \pi_\omega$ nach 3.4, Folg. 5, Bem. eine Hyperebene von $\pi(\mathcal{W}_1)$. Somit ist $A_1 \varepsilon = \pi(\mathcal{W}_1) \setminus \pi(\mathcal{W}_1) \cap \pi_\omega =: \tilde{\pi}(\mathcal{W}_1)$ ein projektiv eingebetteter affiner Raum und mit $A_0 \in \pi(\mathcal{W}_1) \setminus \pi(\mathcal{W}_1) \cap \pi_\omega$ gilt $\pi(\mathcal{W}_1) = A_0 \vee [\pi(\mathcal{W}_1) \cap \pi_\omega]$.

Der Untervektorraum $\mathcal{W}_1$ von $\mathcal{W} = K \oplus \mathcal{W}$ hat die Gestalt $\mathcal{W}_1 = K \oplus \mathcal{W}_1$, wobei $\mathcal{W}_1$ ein Untervektorraum von $\mathcal{W}$ ist (dies ergibt sich sofort durch Ausnützen des Unterraumkriteriums). Da außerdem $\pi_\omega = \pi(O \oplus \mathcal{W})$ gilt, folgt $\pi(\mathcal{W}_1) \cap \pi_\omega = \pi(O \oplus \mathcal{W}_1)$. Wegen $A_0 \notin \pi_\omega$ gilt $A_0 = (a, \mathcal{W})K$ mit $a \neq 0$ und daher kann normiert werden zu $A_0 = (1, \alpha_0)K$.

$$\pi(\mathcal{W}_1) = A_0 \vee [\pi(\mathcal{W}_1) \cap \pi_\omega] = \bigcup_{x \in \pi(\mathcal{W}_1) \cap \pi_\omega} \mathcal{R}_{A_0, x} = \bigcup_{x \in \mathcal{W}_1 \setminus \{0\}} [(1, \alpha_0)K + (0, x)K].$$

Da der Fernpunkt jeder Punktreihe $\mathcal{R}_{A_0, x}$ der Punkt $(0, x)K$ ist, gilt nach Normierung $\mathcal{R}_{A_0, x} = \mathcal{R}_{A_0, x} \setminus \mathcal{R}_{A_0, x} \cap \mathcal{R}_\omega = (1, \alpha_0) + (0, x)K = (1, \alpha_0 + xK)$ und daher $A_1 = \tilde{\pi}(\mathcal{W}_1) \varepsilon^{-1} = \left[\bigcup_{x \in \mathcal{W}_1 \setminus \{0\}} (1, \alpha_0 + xK) \right] \varepsilon^{-1} = (1, \alpha_0 + \mathcal{W}_1) \varepsilon^{-1} = \alpha_0 + \mathcal{W}_1$.

Die Punktmenge von A_1 ist daher die Nebenklasse $\alpha_0 + \mathcal{W}_1$ von $\mathcal{W}$.

(b) Sei $A_1 = \alpha_0 + \mathcal{W}_1$ eine Nebenklasse von $\mathcal{W}_1$. Wir definieren einen in der Fernhyperebene $\mathbb{T}_\infty$ von $\mathbb{T}(\mathcal{W})$ liegenden projektiven Unterraum $\mathbb{T}_{1,\infty}$ durch $\mathbb{T}_{1,\infty} := \{(O, e)K \mid e \in \mathcal{W}_1 \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{T}_\infty$ und bilden $\mathbb{T}_1 := A_0 \vee \mathbb{T}_{1,\infty}$ mit $A_0 = (1, \alpha_0)K \notin \mathbb{T}_\infty$. Damit gilt $\mathbb{T}_{1,\infty} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_\infty$ und $\mathbb{T}_1 = \bigcup_{e \in \mathcal{W}_1 \setminus \{0\}} [(1, \alpha_0)K + (O, e)K]$. Wie in (a) folgt $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_1 \setminus \mathbb{T}_{1,\infty} \cap \mathbb{T}_\infty = \bigcup_{e \in \mathcal{W}_1 \setminus \{0\}} [(1, \alpha_0) + (O, e)K] = (1, \alpha_0 + \mathcal{W}_1) = A_1 \varepsilon$, d.h. A_1 ist ε^{-1} -Bild eines Unterraumes $\mathbb{T}_1$, des projektiv eingebetteten affinen Raumes $\mathbb{T}_0$. Damit ist A_1 als affiner Unterraum im Sinne von Def. 6.1d erwiesen.

(c) Sind $A_1 = \alpha_0 + \mathcal{W}_1$ und $A_2 = \beta_0 + \mathcal{W}_2$ zwei affine Unterräume von $A(\mathcal{W})$, so ist $A_1 \varepsilon = \mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_1 \setminus \mathbb{T}_{1,\infty}$, $A_2 \varepsilon = \mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_2 \setminus \mathbb{T}_{2,\infty}$ mit $\mathbb{T}_{i,\infty} = \{(O, e)K \mid e \in \mathcal{W}_i \setminus \{0\}\}$. Wegen $\mathbb{T}_{1,\infty} \subset \mathbb{T}_{2,\infty} \Leftrightarrow \mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2$ gilt insgesamt $A_1 \parallel A_2 \Leftrightarrow \mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2 \vee \mathcal{W}_2 \subset \mathcal{W}_1$.

Bemerkungen: (a) Zwei Geraden $\alpha_0 + \mathcal{W}_1 K$ und $\beta_0 + \mathcal{W}_2 K$ sind genau dann parallel, wenn $\mathcal{W}_1 K = \mathcal{W}_2 K$, d.h. $\{\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2\}$ l.a. ist.

(b) Gelte $\dim \mathcal{W} < \infty$: Jeder affine Unterraum A_1 von $A(\mathcal{W})$ hat die Gestalt $A_1 = \alpha_0 + \mathcal{W}_1$, wobei $\mathcal{W}_1$ ein Unterraum von $\mathcal{W}$ ist; $\mathcal{W}_1$ kann durch eine endliche Basis aufgespannt werden: $\mathcal{W}_1 = H(\pi_1, \dots, \pi_t)$. Man hat damit: $e \in A \Leftrightarrow e \in \alpha_0 + H(\pi_1, \dots, \pi_t) \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ mit $e = \alpha_0 + \pi_1 \lambda_1 + \dots + \pi_t \lambda_t$; variiert $(\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ in K^t , so erfaßt man alle Punkte des affinen Unterraumes A_1 von $A(\mathcal{W})$ ("Parameterdarstellung" von A_1).

(c) Ist $A(\mathcal{W})$ nicht normal, so kann $\alpha_0 + \mathcal{W}_1$ ($\mathcal{W}_1$ ein Untervektorraum von $\mathcal{W}$ und $\alpha_0 \in \mathcal{W}$) als affiner Unterraum von $A(\mathcal{W})$ definiert werden; für nicht normale affine Räume, die nicht affine Räume über einem Vektorraum sind, ist dieser Weg ungangbar.

2) Ist A ein affiner Desarguesraum, so existiert ein Rechtsvektorraum $\mathcal{W}(K)$ so, daß $A \cong A(\mathcal{W}(K))$ gilt ("Erster Hauptsatz der affinen Geometrie").

Bew.: Nach Definition von A existiert ein Isomorphismus α von A auf einen projektiv eingebetteten affinen Raum $\mathbb{T} = \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_\infty$, wobei $\mathbb{T}$ ein Desarguesraum ist. Nach dem ersten Hauptsatz der projektiven Geometrie existiert ein Rechtsvektorraum $\mathcal{W}(K)$ mit $\mathbb{T} \cong \mathbb{T}(\mathcal{W}(K))$;

dabei gilt $\mathcal{W} = K \oplus \mathcal{W}(K)$ nach 5.7 mit $K \cong K_{\text{alg}}$ und $\mathcal{W} = T(\pi_{\mathcal{W}})$ und $\pi_{\mathcal{W}} = \pi(0 \oplus \mathcal{W})$. Nach 6.1, Folg.3 existiert ein Isomorphismus $\beta: \tilde{\pi} \rightarrow T(K \oplus \mathcal{W}) \setminus T(0 \oplus \mathcal{W})$.

Zum Rechtsvektorraum $\mathcal{W}$ gehört ein affiner Raum $A(\mathcal{W})$, der sich durch die Affinität $\varepsilon: A(\mathcal{W}) \rightarrow T(K \oplus \mathcal{W})$ mit $\kappa(\in \mathcal{W}) \mapsto (1, \kappa)K$ kanonisch in $T(K \oplus \mathcal{W})$ einbetten läßt. Die Zusammensetzung $\alpha \beta \varepsilon^{-1}: A \rightarrow A(\mathcal{W})$ ist der gewünschte Isomorphismus.

Bemerkungen: (a) Bis auf Isomorphismen sind die Räume $A(\mathcal{W}(K))$ alle affinen Desarguesräume. Die einzigen affinen Räume, die sich nicht durch Vektorräume erfassen lassen, sind für $\dim A \geq 2$ die nichtdesarguesschen affinen Ebenen.

(b) Zu vorgegebener endlicher Dimension $n \geq 2$ und vorgegebenem Algebraisierungskörper K ist der arithmetische affine Raum $A(\mathcal{W}^n)$ ein affiner Desarguesraum und nach Folg.4, Bem.c (s.u.) sogar bis auf Isomorphismen der einzige.

3) Seien $g: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$ eine halblineare Bijektion zum Körperisomorphismus $\tilde{g}: K \rightarrow K'$ und $\iota' \in \mathcal{W}'$ ein fest gewählter Vektor. Die durch

$$\kappa[\in A(\mathcal{W})] \mapsto \kappa\alpha := \kappa g + \iota' [\in A(\mathcal{W}')]]$$

definierte Abbildung $\alpha: A(\mathcal{W}) \rightarrow A(\mathcal{W}')$ ist eine Affinität.

Bew.: Die Bijektivität von α ergibt sich sofort aus der Bijektivität von g . Daß α kollineare und nicht kollineare Lage erhält, ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} \{\kappa, \eta, \zeta\} \text{ kollinear} &\stackrel{6.1}{\Leftrightarrow} \{\zeta - \kappa, \eta - \kappa\} \text{ l.a.} \stackrel{5.2}{\Leftrightarrow} \{(\zeta - \kappa)g, (\eta - \kappa)g\} \text{ l.a.} \\ &\Leftrightarrow \{\zeta g - \kappa g = \zeta\alpha - \kappa\alpha, \eta g - \kappa g = \eta\alpha - \kappa\alpha\} \text{ l.a.} \Leftrightarrow \{\kappa\alpha, \eta\alpha, \zeta\alpha\} \text{ kollinear.} \end{aligned}$$

4) Ist $\alpha: A(\mathcal{W}(K)) \rightarrow A(\mathcal{W}'(K'))$ eine Affinität, wobei A endlichdimensional und normal ist, dann existiert eine halblineare Bijektion $g: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$ zum Körperisomorphismus $\tilde{g}: K \rightarrow K'$ und ein fester Vektor $\iota' \in \mathcal{W}'$ so, daß $\kappa\alpha = \kappa g + \iota' \forall \kappa \in A(\mathcal{W})$ gilt.

Bew.: $A(\mathcal{W}(K))$ und $A(\mathcal{W}'(K'))$ lassen sich kanonisch einbetten:

$$\varepsilon: A(\mathcal{W}(K)) \rightarrow \tilde{\pi} = \pi(K \oplus \mathcal{W}) \setminus \pi(0 \oplus \mathcal{W}) \text{ mit } \kappa \mapsto (1, \kappa)K \text{ bzw.}$$

$$\varepsilon': A(\mathcal{W}'(K')) \rightarrow \tilde{\pi}' = \pi(K' \oplus \mathcal{W}') \setminus \pi(0_{K'} \oplus \mathcal{W}') \text{ mit } \kappa' \mapsto (1_{K'}, \kappa')K.$$

Mit A ist auch $\tilde{\pi}$ ein normaler affiner Raum und die Zusammenstzung $\varepsilon^{-1} \alpha \varepsilon': \tilde{\pi} \rightarrow \tilde{\pi}'$ ist eine Affinität; nach 6.1, Folg.4 existiert daher genau eine Kollineation $\alpha: \pi(K \oplus \mathcal{W}) \rightarrow \pi(K' \oplus \mathcal{W}')$ mit

$\alpha|_{\mathcal{H}} = \varepsilon^{-1} \alpha \varepsilon'$. Nach dem zweiten Hauptsatz der projektiven Geometrie existiert eine halblineare Bijektion $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}' = K' \otimes \mathcal{H}'$ zu einem Körperisomorphismus $f: K \rightarrow K'$, sodaß gilt $\alpha = \alpha_f = \alpha_{f|_{\mathcal{H}}}$ mit $j_a \in \mathcal{H}'$.

Wir wenden α speziell auf den Punkt $(1, \sigma)K$ an:

$[(1, \sigma)K] \alpha = [(1, \sigma)f] K' = [(1, \sigma)f \circ j_a] K' \Rightarrow (1, \sigma)f \cdot a' = (b', \xi')$ mit $\xi' \in \mathcal{H}'$ und $b' \in K'$, wobei $b' \neq 0_{K'}$ gilt, denn α führt als Fortsetzung einer Affinität den eigentlichen Punkt $(1, \sigma)K$ in einen eigentlichen Punkt über.

Zu $a' \in K' \setminus \{0_{K'}\}$ existiert ein inverses Element a'^{-1} und daher ist $(1, \sigma)f = (b'a'^{-1}, \xi'a'^{-1})$. Da a' beliebig aus $K' \setminus \{0_{K'}\}$ wählbar ist, können wir so normieren, daß $b'a'^{-1} = 1_{K'} = 1'$ gilt, und bezeichnen den mit diesem a' erhaltenen Vektor $\xi'a'^{-1}$ mit $\nu' \in \mathcal{H}'$. Zu diesem a' gehört eine Bijektion $f \circ j_a$, mit $(1, \sigma)f \circ j_a = (1', \nu')$; wir schreiben i.f. für diese spezielle Bijektion $f \circ j_a$, wieder f .

Der Fernpunkt $(0, \varepsilon)K$ wird durch α auf einen Fernpunkt $[(0, \varepsilon)f] K' = (0_{K'}, \varepsilon')K'$ abgebildet. Wir definieren eine Abbildung $g: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ durch: $(0, \varepsilon)f = (0_{K'}, \varepsilon'g) \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \wedge \nu'g := \varepsilon_{\mathcal{H}'}$.

g ist eine halblineare Bijektion zum Körperisomorphismus $\hat{g} = f$:

$$\begin{aligned} [0_{K'}, (\varepsilon + \eta)g] &\stackrel{H}{=} (0, \varepsilon + \eta)f = [(0, \varepsilon) + (0, \eta)]f \stackrel{H}{=} (0, \varepsilon)f + (0, \eta)f \stackrel{H}{=} \\ (0_{K'}, \varepsilon'g) + (0_{K'}, \eta'g) &= (0_{K'}, \varepsilon'g + \eta'g) \Rightarrow (\varepsilon + \eta)g = \varepsilon'g + \eta'g. \\ [0_{K'}, (\varepsilon x)g] &\stackrel{H}{=} (0, \varepsilon x)f = [(0, \varepsilon)x]f \stackrel{H}{=} (0, \varepsilon)f(xf) \stackrel{H}{=} (0_{K'}, \varepsilon'g)(xf) = (0_{K'}, \varepsilon'g(xf)) \\ &\Rightarrow (\varepsilon x)g = \varepsilon'g(xf). \end{aligned}$$

g ist bijektiv: Da zwischen $\Lambda(\mathcal{H})$ und $\Lambda(\mathcal{H}')$ eine Affinität α existiert, ist $\dim \Lambda(\mathcal{H}) = \dim \Lambda(\mathcal{H}') \Rightarrow \dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}'$; in diesem Fall ist $\ker g = \{0\}$ das Kriterium für die Bijektivität. Für $\nu' \in \ker g \Rightarrow \varepsilon'g = \varepsilon_{\mathcal{H}'} \stackrel{H}{=} (0, \varepsilon)f = (0, \varepsilon_{\mathcal{H}})$; da f bijektiv ist, bedeutet dies $(0, \varepsilon) = \varepsilon_{\mathcal{H}} = (0, \sigma) \Rightarrow \nu' = \sigma$.

Die zum Paar (g, ν') gemäß Folg. 3 gehörende Affinität stimmt mit α überein:

$$\left. \begin{aligned} [(1, \varepsilon)K] \alpha &= [(1, \varepsilon)f] K' \\ (1, \varepsilon)f &= [(1, \sigma) + (1, \varepsilon)]f = (1, \sigma)f + (0, \varepsilon)f = (1', \nu') + (0', \varepsilon'g) = (1', \nu' + \varepsilon'g) \\ [(1, \varepsilon)K] \alpha &= (1', \nu' + \varepsilon'g)K' \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Nach Konstruktion ist $\alpha = \varepsilon^{-1} \alpha \varepsilon'$, also folgt

$$\left. \begin{aligned} [(1, \varepsilon)K] \varepsilon^{-1} \alpha \varepsilon' &= (1', \nu' + \varepsilon'g)K' \\ [(1, \varepsilon)K] \varepsilon^{-1} \alpha \varepsilon' &= \varepsilon' \alpha \varepsilon' = (1', \varepsilon' \alpha)K' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nu' \alpha = \nu' + \varepsilon'g = \varepsilon'g + \nu'.$$

Bemerkungen: (a) Folg. 3 und 4 bilden zusammen den zweiten Hauptsatz der affinen Geometrie: Zu jeder Affinität zweier affiner Räume über Vektorräumen endlicher Dimension gehört ein Paar (ν', g) , wobei ν' ein fester Vektor und g eine halblineare Bijektion der Vektorräume ist, und umgekehrt legt ein solches Paar eine Affinität fest.

Wir erwähnen ohne Beweis, daß der zweite Hauptsatz der affinen Geometrie auch für unendlichdimensionale Vektorräume gilt.

(b) Wir können nun eine Affinität $\alpha: A(W) \rightarrow A(W')$ koordinatenmäßig erfassen. Zu α existiert eine halblineare Bijektion $g: W \rightarrow W' (\Rightarrow \dim W = \dim W')$, und bei festen Basen $\{u_1, \dots, u_n\}$ bzw. $\{u'_1, \dots, u'_n\}$ von W bzw. W' wird g durch $u_k g = u'_k a'_k$ eindeutig festgelegt; dabei ist (a'_k) eine Matrix vom rechten Zeilenrang n .
 $u = \sum x^i u_i, u' = \sum x'^i u'_i, u' = u g \wedge u' = u g + v \Rightarrow$

$$x'^j = a'^j_k (x^k g) + c'^j.$$

(c) Bei endlicher Dimension gilt: $A(W(K)) \cong A(W'(K'))$
 $\Leftrightarrow \dim W = \dim W' \wedge K \cong K'.$

Bew.: (a) $A(W(K)) \cong A(W'(K')) \Rightarrow \dim A(W) = \dim A(W') \wedge \dim A(W) = \dim W \wedge \dim A(W') = \dim W' \Rightarrow \dim W = \dim W'$. Wegen $A(W) \cong A(W')$ existiert eine Affinität $\alpha: A(W) \rightarrow A(W')$; ist $A(W)$ normal, so existiert eine halblineare Bijektion $g: W \rightarrow W'$ zum Körperisomorphismus $g: K \rightarrow K'$, d.h. $K \cong K'$; ist dagegen $A(W)$ nicht normal, so ist $N=2=|K|=|K'|$, und der einzige Körper mit genau zwei Elementen ist bis auf Isomorphie der Restklassenkörper modulo 2 (Minimalkörper).

(b) $\dim W = \dim W' \wedge K \cong K' \xrightarrow{L_A} W \cong W' \Rightarrow$ es existiert ein Vektorraumisomorphismus g und nach Folg. 3 ist $u \mapsto u g$ eine Affinität $A(W) \rightarrow A(W') \Rightarrow A(W) \cong A(W')$.

(d) Durch $\varepsilon: A(W) \rightarrow \mathbb{P}$ können wir einen normalen affinen Raum $A(W)$ stets kanonisch projektiv einbetten, und in $\mathbb{P}$ wurden Streckungen und Translationen erklärt (vgl. Def. 6.2a). Sie sind unter den Autoaffinitäten dadurch gekennzeichnet, daß jede Gerade zu ihrer Bildgeraden parallel ist (vgl. 6.2, Folg. 1). Die durch (g, v) beschriebene Autoaffinität α von $A(W)$ führt die Gerade $u + v K$ mit $v \neq 0$ in die Gerade $v + u g + (v g) K$ über. Bild- und Urgerade sind nach Folg. 1, Bem. a genau dann parallel, wenn $v g = v a_v (a_v \in K \setminus \{0\})$ ist; bei einer Translation oder Streckung muß dies für alle $v \in W \setminus \{0\}$ gelten $\Rightarrow$
 $\Rightarrow a_v = a + 0 \quad \forall v \in W$ (vgl. Bew. zu 5.2, Folg. 6) ist unabhängig von $v \Rightarrow$
 $\Rightarrow v g = v a \quad \forall v \in W$, also gilt $g = j_a \in \mathcal{O}(W)$. Ist umgekehrt g eine Dilatation, so beschreibt das Paar (v, g) eine Streckung oder Translation. Für eine Streckung oder Translation α gilt somit $u \alpha = u a + v$.

Ist f ein Fixpunkt von α , so gilt $f = f \alpha = f a + v \Rightarrow f(1-a) = v$. Für $(1-a) \neq 0$ folgt $f = v(1-a)^{-1}$ als einziger Fixpunkt von α und α ist daher eine Streckung ($\neq 1$). Gilt dagegen $(1-a) = 0$, so müssen wir unterscheiden:
 $v = 0 \Rightarrow u \alpha = u$, d.h. α ist die Identität;
 $v \neq 0 \Rightarrow \alpha(\neq 1)$ besitzt keinen Fixpunkt, also ist α eine Translation.

Für eine Translation $\alpha(\neq 1)$ gilt $u \alpha = u + v \quad (v \neq 0)$.
 Für eine Streckung $\alpha(\neq 1)$ mit Zentrum f gilt $u \alpha = u a + f(1-a) \quad (a \neq 1)$.

(e) Die Menge aller Translationen $T(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$ ist eine abelsche Untergruppe von $\text{AFL}(\mathcal{W})(K)$ und zwar ein Normalteiler, wie man aus der Darstellung einer Translation nach Bem. c sofort erkennt. Jede halbbilineare Bijektion $g \in \Gamma L(\mathcal{W})$ ist nach Folg. 3 eine Affinität α mit dem Fixpunkt σ , also gilt $\Gamma L(\mathcal{W}) \subset \text{AFL}(\mathcal{W})$. Das Paar (g, ι) , welches eine Affinität α beschreibt, ist also ein Element von $\Gamma L(\mathcal{W}) \times \mathcal{W}$, und jede Affinität $\alpha: \epsilon \mapsto \epsilon g + \iota$ entsteht durch Zusammensetzung der halbbilinearen Bijektion $\epsilon \mapsto \epsilon g$ und der Translation $\epsilon \mapsto \epsilon + \iota$; diese Zerlegung ist sogar eindeutig: $\epsilon g + \iota = \epsilon' g' + \iota' \quad \forall \epsilon \in \mathcal{W} \Rightarrow \epsilon g - \epsilon' g' = \iota' - \iota$, also gilt für $\epsilon = \sigma$ insbesondere: $\iota' - \iota = \sigma$; aus $\epsilon g - \epsilon' g' = \sigma \quad \forall \epsilon \in \mathcal{W}$ folgt aber $g = g'$.

Man schreibt für diese Aussage auch:

$\text{AFL}(\mathcal{W})(K) = \Gamma L(\mathcal{W}) \cdot T(\mathcal{W}) := \{g \circ \tau \mid g \in \Gamma L(\mathcal{W}) \wedge \tau \in T(\mathcal{W})\}$,
d.h. $\Gamma L(\mathcal{W})$ und $T(\mathcal{W})$ sind als Teilmengen der Gruppe $\text{AFL}(\mathcal{W})(K)$ aufzufassen, und diese ist das Komplexprodukt dieser beiden Mengen.

5) Die Koordinatisierung endlichdimensionaler affiner Desarguesräume beruht auf folgender Isomorphismenkette:

$$A_{pe}(K) \stackrel{\text{is}}{\cong} A(\mathcal{W})(K) \stackrel{\text{is. b.}}{\cong} A(\mathcal{Q}^n).$$

DEF. 6.4b: Ist A ein n -dimensionaler affiner Desarguesraum zum Algebrasierungskörper K und $A(\mathcal{Q}^n)$ der n -dimensionale arithmetische affine Raum über K , so heißt jede Affinität $\hat{\mu}: A \rightarrow A(\mathcal{Q}^n)$, also $X \mapsto (x^1, \dots, x^n)$, eine Koordinatisierung von A . Der Punkt $O := (0, 0, \dots, 0) \hat{\mu}^{-1}$ heißt Ursprung der Koordinatisierung und die Punkte $E_j := (\delta_j^1, \dots, \delta_j^n) \hat{\mu}^{-1}$ ($j=1, \dots, n$) heißen Einheitspunkte der Koordinatisierung.

Bemerkungen: (a) Die durch eine gegebene Koordinatisierung $\hat{\mu}$ mitbestimmte Punktmenge $\{O, E_1, \dots, E_n\}$ heißt "affines Koordinatensystem". Diese Punkte bilden einen n -Simplex. Man erkennt dies, wenn man $A(\mathcal{Q}^n)$ durch ε in $\mathbb{T}(K \oplus \mathcal{Q}^n)$ kanonisch einbettet; die Punkte $(1, 0, \dots, 0)K$ und $(1, \delta_j^1, \dots, \delta_j^n)K$ bilden nämlich einen $(n+1)$ -Simplex in $\mathbb{T}(K \oplus \mathcal{Q}^n)$, denn die Vektoren $\{(1, 0, \dots, 0), (1, \delta_j^1, \dots, \delta_j^n) \mid j=1, \dots, n\}$ sind linear unabhängig und spannen daher einen n -dimensionalen Unterraum von $\mathbb{T}(K \oplus \mathcal{Q}^n)$ auf, was zusammen mit dem $\mathbb{T}(K \oplus \mathcal{Q}^n) = n$ ergibt, daß die $n+1$ Punkte einen Basissimplex bilden.

(b) Für $\hat{\mu}: X \mapsto (x^1, \dots, x^n)$ heißen die Zahlen $x^j \in K$ die "affinen Koordinaten des Punktes X bezüglich $\hat{\mu}$ ".

(c) Speziell für $A = A(\mathcal{W})$ ist eine Auszeichnung einer Koordinatisierung gleichbedeutend mit der Einführung einer Basis in $\mathcal{W}$.

(d) Ist A ein normaler affiner Desarguesraum, so sind bei gegebenem affinen Koordinatensystem die affinen Koordinaten bis auf einen Körperautomorphismus $\dot{g}: K \rightarrow K$ eindeutig bestimmt.

Bew.: Sind μ_1 und μ_2 zwei Koordinatisierungen zum gleichen affinen Koordinatensystem, dann ist $\mu_1^{-1}\mu_2: A(\mathcal{Q}^n) \rightarrow A(\mathcal{Q}^n)$ eine Affinität, welche die Punkte $\sigma := (0, \dots, 0)$ und $\pi_j := (\delta_1^j, \dots, \delta_n^j)$ für $j=1 \dots n$ einzeln festläßt. Nach dem 2. Hauptsatz der affinen Geometrie läßt sich $\mu_1^{-1}\mu_2$ durch ein Paar (g, ι) mit $\iota \in A(\mathcal{Q}^n) \wedge g \in \Gamma L(\mathcal{Q}^n)$ zu $\dot{g}$ beschreiben: $\mu_1^{-1}\mu_2 = \iota g \iota^{-1}$; wegen $\sigma = \sigma g \iota^{-1} \Rightarrow \iota = \sigma$ und weiters ist $\pi_j = \pi_j g$; nach 5.2, Folg. 1, Zwischenbemerkung existiert zu gegebenem beliebigem Körperautomorphismus $\dot{g}$ genau eine halblinare Bijektion $g: \mathcal{Q}^n \rightarrow \mathcal{Q}^n$, die eine Basis $\{\pi_j\}$ festläßt. $\mu_1^{-1}\mu_2 = \iota g$ und $\iota = \pi_j x^j \Rightarrow \iota g = \pi_j g(x^j \dot{g}) = \pi_j (x^j \dot{g})$, d.h. es gilt $\mu_1 = (x^1, \dots, x^n)$ und $\mu_2 = (x^1 \dot{g}, \dots, x^n \dot{g})$. Ist umgekehrt die letzte Koppelung der affinen Koordinaten mit beliebigem Körperautomorphismus $\dot{g}$ gegeben, so liegen zwei Koordinatisierungen zum gleichen affinen Koordinatensystem vor, denn $x^j = x^j \dot{g}$ beschreibt nach dem 2. Hauptsatz eine Affinität, die Ursprung und Einheitspunkte festläßt.

(e) Die Koordinatendarstellung einer Affinität entnimmt man folgendem Abbildungsdiagramm:

$$\begin{array}{ccc} A_{\mu} & \xrightarrow{\alpha} & A_{\mu'} \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu' \\ A(\mathcal{Q}^n) & \xrightarrow{\mu^{-1}\alpha\mu'} & A(\mathcal{Q}'^n) \end{array}$$

Die Affinität $\mu^{-1}\alpha\mu'$ heißt die "Koordinatisierung von α bei μ, μ' " und $\mu^{-1}\alpha\mu'$ lautet nach dem 2. Hauptsatz der affinen Geometrie

$$x'^k = a'^k(x^j \dot{g}) + c'^k \quad (k=1 \dots n)$$

Dabei hat (a'^k_j) den rechten Zeilenrang n .

Speziell für $a'^k_j = \delta^k_j$ und $c'^k = 0 \forall k$ erhält man Bem. d.

(f) Für die dualen Darstellungen der Kollineationen und die Korrelationen wurde das Dualitätsprinzip benützt, welches im affinen Raum nicht gilt. Diese Abbildungen sind daher zweckmäßig im projektiven Raum zu untersuchen, wozu man also zuerst projektiv einbetten muß.

SATZ 6.4: Zu jedem Rechtsvektorraum $\mathcal{W}$ mit $2 \leq \dim \mathcal{W}$ über einem (nicht notwendig kommutativen) Körper K gehört ein affiner Desarguesraum $A(\mathcal{W}(K))$, dessen Punkte bzw. Geraden die null-bzw. eindimensionalen Nebenklassen von $\mathcal{W}$ sind; ist $A(\mathcal{W})$ normal, so ist die Menge der Nebenklassen bijektiv zur Menge der affinen Unterräume von A . Jeder affine Desarguesraum ist isomorph zu einem affinen Raum über einem Rechtsvektorraum. Jede Affinität $A(\mathcal{W}(K)) \rightarrow A(\mathcal{W}'(K'))$ mit A normal ist eindeutig bestimmt durch eine halblinare Bijektion $g: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$ und einen festen Vektor $v' \in \mathcal{W}'$. Jede Affinität der Affinitätsgruppe $A\Gamma L(\mathcal{W}(K))$ gestattet eine eindeutige Zusammensetzung aus einer halblinaren Bijektion

von $\mathcal{M}$ und einer Translation; die Translationen von $A(\mathcal{M}(K))$ bilden einen abelschen Normalteiler von $AGL(\mathcal{M}(K))$. Zwei endlichdimensionale affine Desarguesräume sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension und isomorphe Algebraisierungskörper besitzen.

6.5. Endlichdimensionale affine normale Pappusräume

Der affine Raum $A(\mathcal{M}(K))$ ist genau dann pappussch, wenn K kommutativ ist. Die affine Gruppe $AGL(\mathcal{M})$ ist eine Untergruppe von $AGL(\mathcal{M}(K))$.

Eine Affinität $\alpha \in AGL(\mathcal{M})$, die durch das Paar (g, ι) mit $g \in GL(\mathcal{M})$ beschrieben wird, ist genau dann projektiv, wenn g linear ist (d.h. $\dot{g} = \iota_K$).

Bew.: (vgl. 5.4) Wir gehen analog zu 6.4, Folg. 4 vor. Da $\mathbb{T}$ normal ist, existiert zur Affinität $\epsilon^{-1}\alpha\epsilon: \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_\omega \rightarrow \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_\omega$ genau eine Kollineation $\alpha: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ mit $\alpha|_{\mathbb{T}} = \epsilon^{-1}\alpha\epsilon$ und α ist genau dann projektiv, wenn α durch eine lineare Bijektion f mit $\alpha = \alpha_f$ beschrieben wird; für die nach 6.4, Folg. 4 aus f gewonnene Bijektion $\dot{g}$ gilt aber $\dot{g} = \dot{f}$. ◆

Anwendungen: (a) Gestattet der Körper K nur den trivialen Automorphismus ($\Rightarrow K$ kommutativ; z.B. $K=Q$ oder $K=R$), so ist jede Affinität projektiv.

(b) Analog zu 6.4, Folg. 4, Bem. e läßt sich bei kommutativem Körper jede projektive Affinität eindeutig als Produkt einer linearen Bijektion und einer Translation schreiben: $AGL(\mathcal{M}) = GL(\mathcal{M}) \cdot T(\mathcal{M})$.

DEF. 6.5a: Sind $A = \alpha$, $B = \beta$ und $X = \gamma$ drei kollineare Punkte von $A(\mathcal{M})$ mit $A \neq B$ und gilt $\gamma = \beta + (\alpha - \beta)x$, dann heißt $x \in K$ das Teilverhältnis $TV(X, A, B)$.

Bemerkungen: (a) Wir schreiben dafür auch in Vektorschreibweise:
 $TV(\beta + (\alpha - \beta)x, \alpha, \beta) = x$.
 Speziell gilt $TV(\alpha, \alpha, \beta) = 1$ und $TV(\beta, \alpha, \beta) = 0$.

(b) x heißt "affine Reihencoordinate" in $\mathcal{P}_{AB}$, weil die Zuordnung $X \in \mathcal{P}_{AB} \mapsto x = TV(X, A, B) \in K$ bijektiv ist.

(c) $A(\mathcal{W})$ kann vermöge der kanonischen Einbettung ε als projektiv eingebetteter affiner Raum aufgefaßt werden. Sei daher $A(\mathcal{W}) = \mathbb{P}(K \otimes \mathcal{W}) \setminus \mathbb{P}(0 \otimes \mathcal{W}) =: \mathbb{P}$, dann gilt $A = (1, \alpha)K$, $B = (1, \beta)K$, $X = (1, \kappa)K$. Die affine Gerade $\mathbb{P}_{AB}$ ist die eindimensionale Nebenklasse $\beta + (\alpha - \beta)K$ und die zugehörige projektive Punktreihe $\mathbb{P}_{AB} = \{(1, \alpha)K + (1, \beta)K\}$ besitzt genau einen Fernpunkt $U := \mathbb{P}_{AB} \cap \mathbb{P}_\infty$; nach 6.4, Folg. 1 gehört zum affinen Unterraum $\iota + \mathcal{U}K$ der Fernraum $\{(0, \kappa)K \in \mathbb{P} \mid \kappa \in \mathcal{U} \setminus \{0\}\}$ und damit ist $U = (0, \alpha - \beta)K$. Unter Benützung des Fernpunktes U gilt

$$DV(U, B, A, X) = TV(X, A, B).$$

Bew.: $DV(U, B, A, X) = DV((0, \alpha - \beta)K, (1, \beta)K, (1, \alpha)K, (1, \beta + (\alpha - \beta)x)K)$.
Wegen $(1, \alpha) = (0, \alpha - \beta) + (1, \beta)$ und $(0, \alpha - \beta)x + (1, \beta) = (1, \beta + (\alpha - \beta)x)$ folgt nach 5.8 $DV(U, B, A, X) = TV(X, A, B)$.

Sind insbesondere A, B, X pw. verschieden ($\Rightarrow U, A, B, X$ pw. verschieden), so können wir die Vertauschungsregeln aus 5.4, Folg. 3, Bem. h anwenden:

$$DV(U, B, A, X) = DV(X, A, B, U) = TV(X, A, B) \Rightarrow$$

Ein Doppelverhältnis von vier paarweise verschiedenen Punkten, bei dem an letzter Stelle ein Fernpunkt steht, stimmt mit dem Teilverhältnis der ersten drei überein.

Insbesondere ist C der Mittelpunkt der Strecke (A, B) genau dann, wenn $TV(A, B, C) = -1$.

(d) Für eine Streckung α in $A(\mathcal{W})$ mit dem Fixpunkt $\mathfrak{f}$ gilt nach 6.4, Folg. 4, Bem. d

$$\kappa\alpha =: \kappa' = \kappa a + \mathfrak{f}(1-a) \quad \text{mit } a \in K \setminus \{0\}.$$

Unter dem "charakteristischen Teilverhältnis" der Streckung α versteht man $TV(X, X\alpha, \mathfrak{f}) = TV(\kappa, \kappa', \mathfrak{f}) =: \delta$; wegen $\kappa' = \mathfrak{f} + (\kappa - \mathfrak{f})a^{-1}$ ist $\delta = a^{-1}$.

In $\mathbb{P}_\infty$ gilt speziell für eine zentrische Spiegelung

$$H(X, X\alpha; \mathfrak{f}, U) \Leftrightarrow DV(X, X\alpha, \mathfrak{f}, U) = -1 \Leftrightarrow TV(X, X\alpha, \mathfrak{f}) = \delta = -1 \Leftrightarrow a^{-1} = -1.$$

Eine zentrische Spiegelung hat daher die Darstellung $\kappa' = -\kappa + 2\mathfrak{f}$. Wegen $\delta = -1$ ist $\mathfrak{f}$ der Mittelpunkt der Strecke $(X, X\alpha)$ für $X \neq \mathfrak{f}$.

(e) Die kollinearen Punkte A bzw. B bzw. C mit $B+C$ haben bezüglich $P=q$ und $Q=q$ die affinen Reihenkoordinaten a bzw. b bzw. c mit $b+c$, also $A = \alpha = q + (q-q)a$, $B = \beta = q + (q-q)b$, $C = \gamma = q + (q-q)c$. Aus diesen Darstellungen folgt $\alpha = \mathfrak{f} + (\beta - \mathfrak{f})(a-c)(b-c)^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow TV(A, B, C) = (a-c)(b-c)^{-1}.$$

(f) Sind A, B, C, D vier paarweise verschiedene kollineare Punkte von $\mathbb{P} = \mathbb{P}(K \otimes \mathcal{W}) \setminus \mathbb{P}(0 \otimes \mathcal{W})$, so gilt:

$$DV(A, B, C, D) = TV(A, B, C) \cdot TV(A, B, D)^{-1}$$

(das Doppelverhältnis ist das Verhältnis zweier Teilverhältnisse).

Bew.: A, B, C, D und der Fernpunkt U der Geraden $\mathcal{P}_{AB}$ sind paarweise verschieden, daher kann der Multiplikationssatz für Doppelverhältnisse (vgl. 5.4, Folg. 3, Bem. g) angewendet werden:
 $DV(A, B, C, D) \cdot TV(A, B, D) = DV(A, B, C, D) \cdot DV(A, B, D, U) = DV(A, B, C, U) = TV(A, B, C)$.

(g) Wird die Affinität $\alpha \in \text{Aff}(A(\mathcal{W}))$ durch $x \mapsto \alpha x + 1$ mit $g \in \text{GL}(\mathcal{W})$ zu $\tilde{g}$ beschrieben, so gilt $TV(X, A, B)_{\tilde{g}} = TV(X\alpha, A\alpha, B\alpha)$.

Bew.: Wegen $0\tilde{g}=0 \wedge 1\tilde{g}=1$ dürfen o.B.d.A. die Punkte X, A, B pw. verschieden vorausgesetzt werden. Für die zu α gehörige Fortsetzung $\alpha x = \alpha_f$ gilt $f = \tilde{g}$ nach 6.4, Folg. 4 und daher wegen $U\alpha \in \mathbb{T}_0$
 $TV(X, A, B)_{\tilde{g}} = DV(X, A, B, U)_{\tilde{g}} = DV(X\alpha, A\alpha, B\alpha, U\alpha) = TV(X\alpha, A\alpha, B\alpha) = TV(X\alpha, A\alpha, B\alpha)$.

Anwendungen: (a) Genau die projektiven Affinitäten ($\tilde{g} = \iota_K$) sind teilverhältnistreu (vgl. 5.4, Folg. 5).

(b) Gestattet K nur den trivialen Automorphismus (z.B. $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{R}$), so ist jede Affinität teilverhältnistreu.

Der Begriff Teilverhältnis und alle obigen Bemerkungen spielen bisher nur in affinen PP-Räumen über Rechtsvektorräumen. Mit Hilfe einer Koordinatisierung können wir alle Aussagen in normale affine PP-Räume übertragen:

DEF. 6.5b: Sind A, B, X mit $A \neq B$ drei kollineare Punkte in einem endlichdimensionalen normalen affinen Pappusraum und $\tilde{\mu}: \mathcal{P}_{AB} \rightarrow A(\mathcal{W}^n)$ eine Koordinatisierung, dann heißt $TV(X\tilde{\mu}, A\tilde{\mu}, B\tilde{\mu}) =: TV_{\tilde{\mu}}(A, B, C)$ das Teilverhältnis der Punkte A, B, C bezüglich der Koordinatisierung $\tilde{\mu}$.

Bemerkungen: (a) $TV_{\tilde{\mu}}(X, A, B) = |0, 1, -1|$ der Punkte X, A, B ist unabhängig von der Koordinatisierung $\tilde{\mu}$, denn Gleichheit von Punkten und Mittelpunkt sind affin invariante Begriffe.

(b) Das Übereinstimmen zweier Teilverhältnisse ist unabhängig von der Auswahl der Koordinatisierung.

(c) Geht man von einer Koordinatisierung zu einer anderen über, so sind die Teilverhältnisse einem Körperautomorphismus zu unterwerfen. Gestattet K nur den trivialen Automorphismus, so ist das Teilverhältnis eine Eigenschaft der Punkte allein.

SATZ 6.5: Jede projektive Affinität eines endlichdimensionalen normalen affinen FP-Raumes über einem Rechtsvektorraum gestattet eine eindeutige Zusammensetzung aus einem Vektorraumautomorphismus und einer Translation. Durch ein affines Koordinatensystem sind die affinen Koordinaten bis auf einen Körperautomorphismus eindeutig bestimmt; das Teilverhältnis ist bis auf einen Körperautomorphismus durch die Punkte bestimmt und eine Affinität genau dann projektiv, wenn sie teilverhältnistreu ist.

Anwendungen:

(I) Sei speziell $A_{\mathbb{P}^n} = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^n_\infty$ ein normaler projektiv eingebetteter affiner Desarguesraum, $\hat{\mu}: \mathbb{P}^n \rightarrow A(\mathbb{P}^n)$ eine Koordinatisierung mit $0\hat{\mu} = (0, \dots, 0)$ und $E_j\hat{\mu} = (\delta_j^1, \dots, \delta_j^n)$ für $j=1, \dots, n$ und $\varepsilon: A(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathbb{P}(K \oplus \mathbb{P}^n)$ die kanonische Einbettung mit $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (1, x^1, \dots, x^n)K$; dabei ist $\varepsilon: A(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathbb{P}(K \oplus \mathbb{P}^n) \setminus \mathbb{P}(0 \oplus \mathbb{P}^n)$ eine Affinität. Zur Affinität $\hat{\mu}\varepsilon: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}(K \oplus \mathbb{P}^n) \setminus \mathbb{P}(0 \oplus \mathbb{P}^n)$ existiert wegen der Normalität von $\mathbb{P}^n$ genau eine Kollineation $\mu: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}(K \oplus \mathbb{P}^n) = \mathbb{P}(\mathbb{P}^{n+1})$ mit $X \mapsto (x^1, \dots, x^n)K$; daher ist μ eine Koordinatisierung von $\mathbb{P}^n$ und $\mu|_{\mathbb{P}^n} = \hat{\mu}\varepsilon$.

DEF. 6.5c: Ist $\hat{\mu}$ eine Koordinatisierung des endlichdimensionalen normalen affinen Raumes $\mathbb{P}^n_{\mathbb{P}^n}$ zum affinen Koordinatensystem $\{0, E_j\}$, so heißt die Koordinatisierung μ von $\mathbb{P}^n$ mit $\hat{\mu}\varepsilon = \mu|_{\mathbb{P}^n}$ die projektive Fortsetzung von $\hat{\mu}$.

Ist $\{0, E_j \mid j=1, \dots, n\}$ das zu $\hat{\mu}$ gehörige affine Koordinatensystem, so ist $\{0, \bar{E}_j := \mathcal{P}_{0\varepsilon_j} \cap \mathcal{P}_\infty (j=1, \dots, n), E := (E_1 \vee \bar{E}_2 \dots \vee \bar{E}_n) \cap \dots \cap (\bar{E}_1 \vee \bar{E}_2 \dots \vee \bar{E}_{n-1} \vee E_n)\}$ die Koordinatenfundamentalfigur von μ .

Bew.: $0\mu = (0\hat{\mu})\varepsilon = (0, \dots, 0)\varepsilon = (1, 0, \dots, 0)K$.

$\mathcal{P}_{0\varepsilon_j} (j=1, \dots, n)$ ist die eindimensionale Nebenklasse $\sigma + (\pi_j - \sigma)K$; für

$\mathcal{P}_{0\varepsilon_j} \cap \mathcal{P}_\infty$ gilt nach 6.4, Folg. 1:

$$(\mathcal{P}_{0\varepsilon_j} \cap \mathcal{P}_\infty)\mu = \{(0, \pi)K \mid \pi \in (\pi_j - \sigma)K \setminus \{\sigma\}\} \Rightarrow \bar{E}_j\mu = (0, \pi_j)K = (0, \delta_j^1, \dots, \delta_j^n)K.$$

Weiters ist $E_j\mu = E_j\hat{\mu}\varepsilon = \pi_j\varepsilon = (1, \pi_j)K$ und $E \in E_1 \vee \bar{E}_2 \vee \dots \vee \bar{E}_n \Rightarrow$

$$E\mu = (e, \pi)K \in E_1\mu \vee E_2\mu \dots \vee \bar{E}_n\mu = (1, \pi_1)K \vee (0, \pi_2)K \vee \dots \vee (0, \pi_n)K \Rightarrow$$

$$\exists \lambda_j \in K \text{ mit } (e, \pi) = (1, \pi_1)\lambda_1 + (0, \pi_2)\lambda_2 + \dots + (0, \pi_n)\lambda_n.$$

Ebenso folgt aus den anderen Bedingungen für E

$$(e, \pi) = (0, \pi_1)\lambda_1 + (1, \pi_2)\lambda_2 + \dots + (0, \pi_{n-1})\lambda_{n-1} + (0, \pi_n)\lambda_n$$

$$\dots \dots \dots (e, \pi) = (0, \pi_1)\lambda_{n1} + (0, \pi_2)\lambda_{n2} + \dots + (0, \pi_{n-1})\lambda_{n,n-1} + (1, \pi_n)\lambda_{nn}$$

$$\Rightarrow e = \lambda_{n1} = \lambda_{n2} = \dots = \lambda_{nn}, \pi = \sum_{j=1}^n \pi_j \lambda_{1j} = \dots = \sum_{j=1}^n \pi_j \lambda_{nj}. \text{ Da } \{\pi_1, \dots, \pi_n\} \text{ l.u.} \Rightarrow$$

alle λ_i sind gleich ($=:\lambda \neq 0$) $\Rightarrow$

$$E\mu = (e, n)K = [(1, n_1)\lambda + (0, n_2)\lambda + \dots + (0, n_n)\lambda]K = (1, n_1 + n_2 + \dots + n_n)K = (1, 1, \dots, 1)K.$$

Bemerkungen: (a) Für die projektive Fortsetzung μ von $\hat{\mu}$ gilt:

$$X \in \hat{\mathbb{T}} \Leftrightarrow X\mu = (x^0, \dots, x^n)K \text{ mit } x^0 \neq 0 \Rightarrow X\mu = (1, \frac{x^1}{x^0}, \dots, \frac{x^n}{x^0})K = X\hat{\mu} \Leftrightarrow$$

$$X\hat{\mu} = (\frac{x^1}{x^0}, \dots, \frac{x^n}{x^0}).$$

$$X \in \mathbb{T}_\omega \Leftrightarrow X\mu = (0, x^1, \dots, x^n)K.$$

(b) Zur Affinität α des normalen affinen Raumes $\hat{\mathbb{T}}$ auf $\hat{\mathbb{T}}'$ gewinnt man aus

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{T}} & \xrightarrow{\alpha} & \hat{\mathbb{T}}' \\ \downarrow A(\mathcal{Q}) & & \downarrow A(\mathcal{Q}') \\ A(\mathcal{Q}) & \xrightarrow{\alpha} & A(\mathcal{Q}') \end{array}$$

die Koordinatendarstellung $\hat{\mu}^{-1}\alpha\hat{\mu}' = : \beta$ mit

$$x^i k = a_j^i (x^j \hat{g}) + c^i k.$$

(c) Um die Affinität α zu einer Kollineation fortzusetzen, benützen wir:

$$\begin{array}{ccc} A(\mathcal{Q}'') & \xrightarrow{\alpha} & A(\mathcal{Q}''') \\ \downarrow \hat{g} & & \downarrow \hat{g}' \end{array}$$

$$\mathbb{T}(K \oplus \mathcal{Q}'') = \mathbb{T}(K \oplus \mathcal{Q}') \xrightarrow{\alpha} \mathbb{T}(K' \oplus \mathcal{Q}''') = \mathbb{T}(K' \oplus \mathcal{Q}''')$$

Da $\mathbb{T}(K \oplus \mathcal{Q}'') \setminus \mathbb{T}(K \oplus \mathcal{Q}')$ normal ist, existiert zur Affinität $\hat{\alpha} = \hat{g}^{-1}\beta\hat{g}'$ genau eine Kollineation $\alpha: \mathbb{T}(K \oplus \mathcal{Q}'') \rightarrow \mathbb{T}(K' \oplus \mathcal{Q}''')$, und nach dem zweiten Hauptsatz der projektiven Geometrie existiert eine halblineare Bijektion $f: \mathcal{Q}'' \rightarrow \mathcal{Q}'''$ mit $\alpha = \alpha_f$. Nach 6.4, Folg. 4 gilt $(1, v)f = (1', v')$ und $(0, v)f = (0', v')$ mit $f = \hat{g}$ und $(1, v)f = (1', v' + \tau \hat{g}) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{für } x^0 \neq 0 \text{ gilt} \\ [(x^0, \dots, x^n)K]\alpha_f = [(1, \frac{x^1}{x^0}, \dots, \frac{x^n}{x^0})f]K' = [1', c'^1 + a_k'^1 (\frac{x^k}{x^0} \hat{g}), \dots, c'^n + a_k'^n (\frac{x^k}{x^0} \hat{g})]K' \\ = [x^0 \hat{g}, c'^1 (x^0 \hat{g}) + a_k'^1 (x^k \hat{g}), \dots, c'^n (x^0 \hat{g}) + a_k'^n (x^k \hat{g})]K'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{für } x^0 = 0 \text{ gilt} \\ [(0, x^1, \dots, x^n)K]\alpha_f = [(0', a_k'^1 (x^k \hat{g}), \dots, a_k'^n (x^k \hat{g}))]K' = \\ = [x^0 \hat{g}, c'^1 (x^0 \hat{g}) + a_k'^1 (x^k \hat{g}), \dots, c'^n (x^0 \hat{g}) + a_k'^n (x^k \hat{g})]K'. \end{aligned}$$

Also gilt insgesamt

$$(x^0, \dots, x^n)K \xrightarrow{\alpha} [x^0 \hat{g}, c'^1 (x^0 \hat{g}) + a_k'^1 (x^k \hat{g}), \dots, c'^n (x^0 \hat{g}) + a_k'^n (x^k \hat{g})]K'.$$

Speziell für $\hat{g} = \hat{g}_k$ ist wegen

$$\begin{vmatrix} a_1'^1 & a_1'^2 & \dots & a_1'^n \\ a_2'^1 & a_2'^2 & \dots & a_2'^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n'^1 & a_n'^2 & \dots & a_n'^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c'^1 & a_1'^1 & \dots & a_1'^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c'^n & a_n'^1 & \dots & a_n'^n \end{vmatrix}$$

die Determinante der Koordinatendarstellung von α gleich der Determinante der Koordinatendarstellung von α .

(II) Ist $A = \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_\omega$ ein projektiv eingebetteter endlichdimensionaler klassischer ($\Leftrightarrow$ normaler) affiner Raum und Φ eine Quadrik in $\mathbb{T}$, so heißt $\Phi \cap A$ eine Quadrik in A . Ist $\hat{\mu}: A \rightarrow A(\mathcal{Q}'')$ eine Koordinatisierung von A und μ ihre projektive Fortsetzung, so wird $\Phi\mu =: \Phi'$ durch eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform $(v, w)\beta = x^i a_{ik} x^k$ mit $a_{ik} = a_{ki} \wedge \|a_{ik}\| \neq 0$ beschrieben.

(a) Ist ϕ' eine Mittelpunktsquadratik, so ist $\Pi_{\omega} \mu^* =: \Pi_{\omega}'(x^0=0)$ nicht selbstkonjugiert und der Mittelpunkt M ist eigentlich; wir wählen o.B.d.A. $M = {}^n K$.

$M \lambda_{\phi'} = \{ \kappa \in \mathbb{Q} \mid (\kappa, {}^n \sigma) \sigma = 0 \} = \{ (x^0, \dots, x^n) \in K \mid x^0 a_{00} \cdot 1 + x^1 a_{10} \cdot 1 + \dots + x^n a_{n0} \cdot 1 = 0 \}$;
andererseits gilt $M \lambda_{\phi'} = \Pi_{\omega}' = \{ (x^0, \dots, x^n) \in K \mid x^0 = 0 \} \Rightarrow a_{10} = \dots = a_{n0} = 0$.

Daraus folgt
 $0 = (x^0)^2 + \sum_{\alpha, \beta} x^{\alpha} a_{\alpha\beta} x^{\beta}$ mit $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} \wedge \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \|a_{\alpha\beta}\| \neq 0$.

Eine reguläre quadratische Form in $\mathbb{Q}^n$ besitzt nach Satz 5.5, Bem. eine Normalform $\lambda_1(x^1)^2 + \dots + \lambda_n(x^n)^2$, und damit hat die Gleichung einer Mittelpunktsquadratik die Normalform

$$(x^0)^2 + \lambda_1(x^1)^2 + \dots + \lambda_n(x^n)^2 = 0 \text{ mit } \lambda_1 \dots \lambda_n \neq 0.$$

(b) Ist ϕ' ein Paraboloid, so ist $\Pi_{\omega}'(x^0=0)$ selbstkonjugiert. Wir wählen für den Berührungspunkt von ϕ' mit Π_{ω}' o.B.d.A. ${}^n K \Rightarrow$

$({}^n K) \lambda_{\phi'} = \{ \kappa \in \mathbb{Q} \mid (\kappa, {}^n \sigma) \sigma = 0 \} = \{ (x^0, \dots, x^n) \in K \mid x^0 a_{00} \cdot 1 + \dots + x^n a_{n0} \cdot 1 = 0 \}$;
andererseits gilt $({}^n K) \lambda_{\phi'} = \Pi_{\omega}' = \{ (x^0, \dots, x^n) \in K \mid x^0 = 0 \} \Rightarrow a_{10} = \dots = a_{n0} = 0$

$$\Rightarrow 0 \neq \|a_{jk}\| = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0,n-1} & a_{0n} \\ a_{01} & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{0,n-1} & a_{1,n-1} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{0n} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\| \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \right\| a_{0n}^2 (-1) \Rightarrow \left\| \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \right\| \neq 0 \wedge a_{0n} \neq 0.$$

Damit gilt

$\phi' \dots 0 = a_{00} (x^0)^2 + 2a_{01} x^0 x^1 + \dots + 2a_{0,n-1} x^0 x^{n-1} + \sum_{\alpha, \beta} x^{\alpha} a_{\alpha\beta} x^{\beta}$, und nach Ausführung des Basiswechsels $x^j = x^j + \sum_{\alpha=0}^{n-1} x^{\alpha} a_{\alpha j} x^0$ ($j=0, \dots, n-1$)

mit $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 2a_{0n} \neq 0$ entsteht nach Weglassen der Striche
 $x^0 x^n + \sum_{\alpha, \beta} x^{\alpha} a_{\alpha\beta} x^{\beta} = 0$.

Wegen $\|a_{\alpha\beta}\| \neq 0$ besitzt die reguläre quadratische Form im $\mathbb{Q}^{n-1}$ eine Normalform $\lambda_1(x^1)^2 + \dots + \lambda_{n-1}(x^{n-1})^2$, und damit hat die Gleichung eines Paraboloids die Normalform

$$x^0 x^n + \lambda_1(x^1)^2 + \dots + \lambda_{n-1}(x^{n-1})^2 = 0 \text{ mit } \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \neq 0$$

Bemerkung: Für spezielle Körper können die obigen Normalformen mit den Methoden aus 5.5 weiter vereinfacht werden; wir wollen dies nur im Sonderfall $K=\mathbb{R}$ durchführen.

Für $K=\mathbb{R}$ hat eine Mittelpunktsquadratik ϕ' die Normalform (II)(a), wobei nach 5.6, Folg. 4 die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ entweder +1 oder -1 und wegen $\phi' \neq \emptyset$ nicht alle +1 sind.

ϕ' ist genau dann ein Ellipsoid, wenn in ϕ' kein Fernpunkt liegt, d.h. die Nullstellenmenge von $\lambda_1(x^1)^2 + \dots + \lambda_n(x^n)^2$ leer ist. Dies ist genau für $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = +1$ oder $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = -1$ der Fall; damit lautet die Normalform eines Ellipsoids eines n -dimensionalen reellen affinen Raumes $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - \dots - (x^n)^2 = 0$.

Man liest daraus ab: Hinsichtlich $\text{AGL}(\mathbb{R}^n)$ existiert genau ein Ellipsoid; in jedem endlichdimensionalen reellen affinen Raum sind je zwei Ellipsoide affin äquivalent.

6.6. Zur Axiomatik der affinen Räume

In 6.1 wurden die affinen Räume als spezielle Inzidenzstrukturen eingeführt, welche isomorph zu einem projektiv eingebetteten affinen Raum sind; eine axiomatische Kennzeichnung der affinen Räume ist jedoch ausständig. Um affine Ebenen axiomatisch zu fassen, gehen wir von einer Inzidenzstruktur $\{\dot{\mathcal{P}}, \dot{\mathcal{G}}, I\}$ aus, für die folgende drei Axiome erfüllt sind:

i_1 : "Existenz der eindeutigen Verbindungsgeraden": Zu zwei verschiedenen Punkten existiert genau eine Gerade, die mit beiden Punkten inzidiert (kurz: $i_1 = i_1$).

i_2 : "Parallelenaxiom": Heißt eine Gerade b parallel zu einer Geraden a ($b \parallel a$) genau dann, wenn entweder $b = a$ gilt oder kein Punkt $X \in \dot{\mathcal{P}}$ existiert mit $X I a \wedge X I b$, so gilt: Zu jedem Paar $(A, a) \in \dot{\mathcal{P}} \times \dot{\mathcal{G}}$ existiert genau eine Gerade $b \in \dot{\mathcal{G}}$ mit $A I b \wedge b \parallel a$.

$\dot{e}$: "Existenz- oder Reichhaltigkeitsaxiom": Es gibt drei nicht-kollineare Punkte.

DEF.6.6: Erfüllt eine Inzidenzstruktur $\{\dot{\mathcal{P}}, \dot{\mathcal{G}}, I\}$ die Axiome $i_1, i_2, \dot{e}$, so heißt sie eine affine Ebene π_a .

Dann gilt:

SATZ 6.6: Die affinen Ebenen $\dot{\pi}$ im Sinne von Def.6.1a sind genau die affinen Ebenen π_a im Sinne von Def.6.6.

Bew.: (a) Nach 6.1 ist $\dot{\pi} \cong \pi \setminus u$, wobei u die als Ferngerade ausgezeichnete Gerade der projektiven Ebene π ist. Nach 6.1, Bem.d gilt in $\dot{\pi}$ dann $i_1 = i_1 = I_1$ und nach 6.1, Folg.7, Bem.d auch i_2 . Da in π ein Viereck und damit nach 1.10 ein vollständiges Viereck existiert, wobei die drei Diagonalepunkte verschieden von den Vierecksecken sind und von diesen sieben verschiedenen Punkten maximal drei kollinear sind, existiert in $\dot{\pi}$ ein Dreieck.

(b) Wird in $\pi_a = \{\dot{\mathcal{P}}, \dot{\mathcal{G}}, I\}$ die Menge aller Geraden $x \in \dot{\mathcal{G}}$, die zu einer festen Geraden $g \in \dot{\mathcal{G}}$ parallel sind, ein "Fernpunkt" $G_u := \{x \in \dot{\mathcal{G}} \mid x \parallel g\}$ und die Menge aller Fernpunkte $\mathcal{P}_u := \{G_u \mid g \in \dot{\mathcal{G}}\}$ die "Ferngerade" u genannt, so entsteht eine neue Inzidenzstruktur $\pi(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ durch die Definitionen

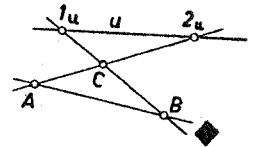
$\mathcal{P} := \dot{\mathcal{P}} \cup \{G_u \mid g \in \dot{\mathcal{G}}\}$, $\mathcal{G} := \dot{\mathcal{G}} \cup \{u\}$, $I := I \cup \{(G_u, g) \mid g \in \dot{\mathcal{G}}\} \cup \{(G_u, u) \mid g \in \dot{\mathcal{G}}\}$

mit $\pi_a = \pi \setminus u$ nach Definition. Es bleibt zu zeigen, daß π eine projektive Ebene ist.

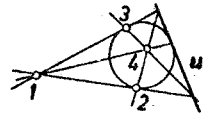
Zu i_1 : Für $A, B \in \dot{\pi}$ ist i_1 wegen i_1 erfüllt. Für $A \in \dot{\pi}$ ($\Rightarrow A \not\in u$) und $G_u \bar{\cap} u$ sei $g \in \dot{\mathcal{G}}$ mit $G_u \bar{\cap} g$; nach i_2 existiert genau eine Gerade $h \in \dot{\mathcal{G}}$ mit $A \bar{\cap} h \wedge h \parallel g$, also $A \bar{\cap} h \wedge G_u \bar{\cap} h$. Für $G_u, H_u \bar{\cap} u$ schließlich ist u nach Definition eine Verbindungsgerade und zwar die einzige: Zwei verschiedene Fernpunkte haben keine Gerade $\in \dot{\mathcal{G}}$ gemeinsam, da ein Fernpunkt die Menge aller Geraden aus $\dot{\mathcal{G}}$ ist, die zu einer Geraden parallel sind.

Zu i_2 : Für $a, b \in \dot{\mathcal{G}}$ haben wegen i_1 die verschiedenen Geraden a, b höchstens einen gemeinsamen Punkt, sodaß a und b entweder bereits i_2 erfüllen oder in π_a keinen Punkt gemeinsam haben; im letzten Fall sind sie parallel und haben nach Definition genau einen gemeinsamen Fernpunkt. Für $a \in \dot{\mathcal{G}}$ und $b = u$ ist $A_u = \{x \in \dot{\mathcal{G}} \mid x \parallel a\}$ der eindeutig bestimmte gemeinsame Punkt von a und u in π .

Zu e : Ist $A, B, C \in \dot{\pi}$ ein Dreieck, so existieren in π die Punkte $\mathcal{P}_{AC} \cap \mathcal{P}_u =: 1_u$ bzw. $\mathcal{P}_{AC} \cap \mathcal{P}_u =: 2_u$; dann ist $A, B, 1_u, 2_u$ ein Viereck in π wegen $A, B \bar{\cap} u = 1_u, 2_u$ und $A, B, 1_u$ bzw. $A, B, 2_u$ nicht kollinear (ind.: $AB \parallel AC$, also $\mathcal{P}_{AB} \cap \mathcal{P}_{AC} = \{A, 1_u\} \Rightarrow A, B, C$ kollinear: Widerspruch).



Bemerkungen: (a) Die affine Minimalebene entsteht nach Satz 6.6 aus der projektiven Minimalebene durch Aufschneiden längs einer Geraden. Sie hat demnach die Ordnung 2 und enthält vier Punkte und sechs Geraden (ein vollständiges Viereck mit den Diagonalen aber ohne Diagonalpunkte).



(b) Auch die affinen Räume, die eine affine Ebene enthalten, können axiomatisch definiert werden, jedoch hat sich noch kein solches Axiomensystem endgültig durchgesetzt (vgl. z. B. Tamaschke II, S.317).

§ 7. Endlichdimensionale reelle projektive Räume

7.1. Anordnung in reellen projektiven Räumen

Der reelle projektive Raum $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ besitzt spezielle Eigenschaften, die durch die speziellen Eigenschaften des Körpers der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bedingt werden.

Nach 5.7, Bem.d sind

$\mathcal{A}(i_1, i_2, e, De, K=\mathbb{R})$ bzw. $\mathbb{P}(I_1, I_2, E, n=3, K=\mathbb{R})$ monomorphe Axiomensysteme für PAE bzw. PAR. Alle folgenden Aussagen für $n=2$ bzw. $n=3$ können in PAE bzw. PAR veranschaulicht werden.

Zwischenbemerkung:

Ein kommutativer Körper K heißt geordnet, wenn in K eine Teilmenge $P \subset K$ so ausgezeichnet ist, daß folgende beiden Gesetze erfüllt sind:

(I) $\forall a \in K$ gilt genau eine der folgenden drei Aussagen:

$a \in P, a=0, -a \in P.$

(II) $a, b \in P \Rightarrow a+b \in P \wedge a \cdot b \in P.$

P heißt "Positivitätsbereich von K ", seine Elemente "positive Zahlen"; wir schreiben $a \in P \Leftrightarrow a > 0$ bzw. $-a \in P \Leftrightarrow a < 0$ ("negative Zahlen").

Eine Menge M heißt geordnet, wenn in M eine binäre Relation ($>$) erklärt ist, welche reflexiv und transitiv ist und das Identitätsgesetz ($x > y \wedge y > x \Rightarrow x=y$) erfüllt. Eine geordnete Menge heißt linear (vollständig) geordnet, wenn je zwei Elemente vergleichbar sind (d.h. $\forall x, y \in M \Rightarrow x > y \vee y > x$). Dann gilt:

Jeder geordnete Körper kann in kanonischer Weise zu einer linear geordneten Menge gemacht werden, indem man definiert: $a > b \Leftrightarrow a-b > 0$.

Ein geordneter Körper besitzt stets die Charakteristik 0; es existiert also in K eine zur Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen isomorphe Teilmenge, und der Primkörper eines angeordneten Körpers ist isomorph zum Körper der rationalen Zahlen.

Speziell der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist geordnet und $\mathbb{R}$ gestattet nach 5.4, Folg.2, Beispiel nur den trivialen Automorphismus. In 7.1 formulieren wir zusätzliche Aussagen über $\mathbb{P}(\mathbb{R})$, welche aus diesen beiden Körpereigenschaften folgen.

Folgerungen:

1) Nach 5.8, Folg.4, Bem.a ist in $\mathbb{T}(R)$ das Doppelverhältnis $DV_{\mu}(A,B,C,D)$ von vier kollinearen Punkten A,B,C,D (mit A,B,C pw. verschieden) unabhängig von der Algebraisierung μ , und wir dürfen also i.f. kurz $DV(A,B,C,D)$ schreiben.

DEF.7.1a: Das Paar (C,D) trennt das Paar (A,B) genau dann, wenn $DV(A,B,C,D) < 0$ gilt.

Bemerkungen: (a) Der Begriff "Trennen" ist nur für vier kollineare Punkte sinnvoll. Aus (C,D) trennt (A,B) [symbolisch $0D/AB$] folgt: A,B,C,D sind paarweise verschieden (für $D=A \Rightarrow DV(A,B,C,D) = \infty$ und ∞ steht mit keinem Körperelement in der $<$ -Relation; für $D=B$ bzw. $D=C \Rightarrow DV(A,B,C,D) = 0, 1 \mid > 0$).

Das Trennen ist eine Eigenschaft der ungeordneten Paare: Dies erkennt man unter Benützung der Vertauschungsregeln aus 5.4, Folg.3, Bem.h:

$$\begin{aligned} DV(B,A,C,D) &= DV(A,B,C,D)^{-1} \Rightarrow CD/BA, \text{ wenn } CD/AB; \\ DV(A,B,D,C) &= DV(A,B,C,D)^{-1} \Rightarrow DC/AB, \text{ wenn } CD/AB; \\ DV(C,D,A,B) &= DV(A,B,C,D) \Rightarrow AB/CD, \text{ wenn } CD/AB. \end{aligned}$$

(b) Bei jeder projektiven (insbesondere perspektiven) Abbildung einer Punktreihe gehen trennende Paare in trennende Paare über, weil in $\mathbb{T}(R)$ jede Projektivität doppelverhältnistreu ist. Trennen ist also perspektiv invariant, da auch nicht trennende Paare in nicht trennende Paare übergehen, wie man bei Betrachtung der inversen Perspektivität erkennt.

Damit kann das Trennen auch für Unterräume $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eines Büschels U_{λ} definiert werden:
 $\gamma\delta / \alpha\beta \Leftrightarrow DV(\alpha, \beta, \gamma, \delta) < 0$.

(c) $H(A,B;C,D) \Leftrightarrow DV(A,B,C,D) = -1 < 0 \Leftrightarrow$ harmonische Paare trennen einander.

2) DEF.7.1b: Ein projektiver Raum heißt angeordnet, wenn in jeder Punktreihe für Punktequadrupel eine Trennungsbeziehung CD/AB erklärt ist, für die gilt:

T_1 : $CD/AB \Rightarrow A,B,C,D$ sind paarweise verschiedene kollineare Punkte; vier paarweise verschiedene kollineare Punkte zerfallen auf genau eine Art in zwei sich trennende Paare (daraus folgt insbesondere, daß die Trennungsbeziehung eine Eigenschaft der ungeordneten Paare ist).

T_2 : Sind A,C,D drei paarweise verschiedene kollineare Punkte, so existiert stets ein Punkt B mit AB/CD .

T_3 : Sind A,B,C,D,E fünf paarweise verschiedene kollineare Punkte, so trennen von den Paaren $\{C,D\}$, $\{D,E\}$, $\{E,C\}$ genau zwei oder null Paare das Paar $\{A,B\}$.

T_4 : (Axiom der planaren Anordnung)

Seien g und h zwei verschiedene Geraden in der Verbindungsebene eines Dreiecks A,B,C, die keine Dreiecksecke enthalten. Wenn auf einer Dreiecksseite die beiden Ecken die Schnittpunkte von g und h mit dieser Seite trennen, so gilt gleiches für genau eine weitere Dreiecksseite.

Bemerkungen: (a) Für die Axiome T_1, T_2 und T_3 sagt man kurz: "Die Punkte jeder Punktreihe sind zyklisch angeordnet", da die Punkte eines Kreises der Elementargeometrie diese Axiome erfüllen.

(b) Ist Π ein projektiver Raum, in dem jede Punktreihe zyklisch angeordnet ist, dann gilt:

$T_4 \Leftrightarrow$ Trennen ist perspektiv invariant.

Bew.: (a) Sei AB/CD mit $A,B,C,D \in \rho$ und $\alpha: \rho \rightarrow \rho$ eine Perspektivität mit dem Zentrum Z.

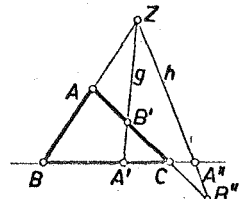
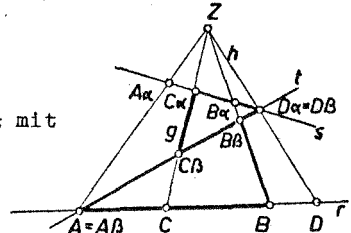
Gelte $A \neq D \wedge t := A.D \alpha \wedge t \neq r$ und sei β die Perspektivität $\rho_r \neq \rho_t$. Wenden wir T_4 auf das Dreieck A,B,B β und die Geraden $g := CZ$ und $h := DZ$ an, so folgt $A \beta B \beta / C \beta D \beta$ (auf $BB \beta$ ist nämlich Z der einzige Schnittpunkt mit g und mit h, sodaß wegen T_4 keine Trennbeziehung auf dieser Seite bestehen kann); speziell für $A=D \alpha$ bzw. $t=r$ kann $\beta = 1$ gesetzt werden.

Wiederholen wir diesen Schluß

für das Dreieck $D \alpha, C \beta, C \alpha$ und

die Geraden $A.A \alpha$ und $B.B \alpha$, so ergibt sich: $A \alpha B \alpha / C \alpha D \alpha$ (Dabei ist zu beachten, daß wegen T_1 das Trennen eine Eigenschaft der ungeordneten Paare ist).

(b) Sei das Trennen eine perspektiv invariante Eigenschaft. Wir setzen $AC/B'B''$ voraus (Bezeichnungen vergleiche nebenstehende Inzidenztabellen). Gilt speziell $g, h := Z \cap AB$, so besteht wegen T_4 auf AB keine Trennbeziehung und wegen der vorausgesetzten Invarianz bei $\rho_{AC} \neq \rho_{AC}$ folgt aus $AC/B'B''$ nun $BC/A'A''$, und damit gilt T_4 in diesem Fall; ebenso für $Z \cap BC$. Gelte i.f. $Z \nmid AB, BC \Rightarrow A'A''$ und beide Punkte sind von den Dreiecksecken verschieden, denn nach Voraussetzung gilt $g \nmid A,B,C \wedge h \nmid A,B,C$; analoges gilt für $C' \neq C''$. Aus $AC/B'B''$ folgt $PC/A'A''$ wegen $\rho_{AB} \neq \rho_{BC}$ mit $P := ZA.BC$.



Nun können die beiden folgenden Alternativen eintreten:

Fall 1: $AB/C'C''$, Fall 2: $AB/C'C''$.

Im Fall 1 bzw. Fall 2 zieht $AC/B'B''$ über

A', A'', B, C, P nach sich: $PB/A'A''$ bzw. $PB/A'A''$.

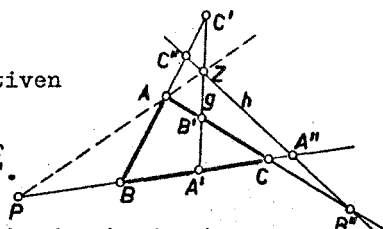
$A', A'', B, C, P \in \mathcal{P}_{AC}$ sind fünf paarweise

verschiedene kollineare Punkte und

nach T_3 muß gelten: Von den Paaren (B, C) , (C, P) , (P, B) trennen genau zwei oder null das Paar (A', A'') .

In Fall 1 gilt $PC/A'A''$ und $PB/A'A''$, also folgt notwendig $BC/A'A''$ und damit gilt T_4 .

In Fall 2 gilt $PC/A'A''$ und $PB/A'A''$, also folgt notwendig $BC/A'A''$ und damit gilt T_4 .



(c) Wir wollen die letzte Figur noch benützen, um in $\mathbb{P}(R)$ den (projektiv verallgemeinerten) Satz von MENELAOS zu beweisen:

Wegen der perspektiven Invarianz des Doppelverhältnisses gilt $DV(B', B'', C, A) = DV(A', A'', C, P)$ und $DV(C', C'', A, B) = DV(A', A'', P, B)$ und daher nach Anwendung des Multiplikationssatzes und einer Vertauschungsregel:

$DV(A', A'', B, C) \cdot DV(B', B'', C, A) \cdot DV(C', C'', A, B) = DV(A', A'', B, C) \cdot DV(A', A'', C, P) \cdot DV(A', A'', P, B) = DV(A', A'', C, B) = 1 \Rightarrow DV(A', A'', B, C) \cdot DV(B', B'', C, A) \cdot DV(C', C'', A, B) = 1$, also gilt:

In $\mathbb{P}(R)$ ist das Produkt der drei Doppelverhältnisse, welche durch die Ecken eines Dreiecks und die Schnittpunkte der Dreiecksseiten mit zwei verschiedenen Geraden der Dreiecksebene, die keine Dreiecksseite enthalten, auf jeder Dreiecksseite bestimmt werden, in obiger Reihenfolge gleich eins.

Jeder reelle projektive Raum ist bezüglich der in Def.7.1a erklärten Trennbeziehung ein angeordneter projektiver Raum.

Bew.: Wir überprüfen, ob die Trennbeziehung aus Def.7.1a die Axiome $T_1, \dots, T_4$ erfüllt.

$DV(A, B, C, D) < 0 \Rightarrow A, B, C, D$ paarweise verschieden und kollinear, und nach Def.7.1a, Bem.a ist für das Trennen aus Def.7.1a

das Axiom T_1 erfüllt. Zu den Punkten A, C, D existiert ein Punkt B mit $H(A, B; C, D) \stackrel{\text{Def.}}{=} AB/CD$, also gilt T_2 .

Für den Nachweis der Gültigkeit von T_3 benützen wir den Multiplikationssatz für Doppelverhältnisse:

$DV(A, B, C, D) \cdot DV(A, B, D, E) = DV(A, B, C, E)$; hierbei ist es unmöglich, daß genau eines oder alle drei Doppelverhältnisse negativ sind, also gilt T_3 .

Nach Bem. b ist das Trennen aus Def.7.1a perspektiv invariant, daher gilt auch T_4 .

Bemerkung: Ein projektiver Desarguesraum ist genau dann angeordnet, wenn sein Algebraisierungskörper geordnet ist (ohne Beweis). $\mathbb{T}(\bar{K})$ mit K geordnet ist daher stets fanosch.

3) Der reelle ($\Rightarrow$ normale) affine Raum $A(R)$ ist isomorph zu $\mathbb{T}(R) := \mathbb{T}(R^{n+1}) \setminus \Pi_\infty$. Da R nur den trivialen Automorphismus gestattet, ist $TV_A(X, A, B)$ von der gewählten Algebraisierung $\bar{\mu}$ unabhängig, und wir dürfen $TV(X, A, B)$ schreiben.

DEF.7.1c: Der Punkt C liegt zwischen den Punkten A und B genau dann, wenn $TV(A, B, C) < 0$ gilt.

Bemerkungen: (a) Die Zwischenrelation ist nur für kollineare Punkte erklärt. Liegt C zwischen A und B , so sind A, B, C paarweise verschieden (für $A=B$ bzw. $A=C \Rightarrow TV(A, B, C) = |0, 1 > 0$).

(b) Aus C zwischen A und B folgt C zwischen B und A wegen $TV(B, A, C) = TV(A, B, C)^{-1}$.

(c) Im projektiv eingebetteten reellen affinen Raum $\mathbb{T}(R)$ besitzt die Gerade $\mathcal{L}_{AB}$ genau einen Fernpunkt U . Sind die Punkte $A, B, C \in \mathcal{L}_{AB}$ paarweise verschieden, so ist $DV(A, B, C, U) = -TV(A, B, C)$ (vgl. Def.6.5A, Bem.c) und es folgt:
 C liegt zwischen A und $B \iff CU/AB$.

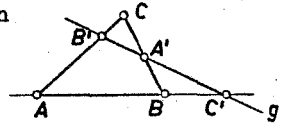
(d) Die Zwischenrelation ist affin invariant, denn jede Affinität aus $A \Gamma L(A(R))$ ist projektiv und somit teilverhältnistreu.

(e) Seien E, O zwei verschiedene Punkte einer affinen Punktreihe $\mathcal{P}_x$.
 $\mathcal{P}_x^- := \{X \in \mathcal{P}_x \mid TV(X, E, O) < 0\}$... Menge aller Punkte $X \in \mathcal{P}_x$, für die O zwischen X und E liegt;
 $\mathcal{P}_x^+ := \{X \in \mathcal{P}_x \mid TV(X, E, O) > 0\}$.
 $\mathcal{P}_x^-$ bzw. $\mathcal{P}_x^+$ heißen negative bzw. positive Halbgerade von $\mathcal{P}_x$ bezüglich $\{O, E\}$; es gilt $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_x^- \cup \mathcal{P}_x^+ \cup \{O\}$.

Ist in $A(\mathcal{M}(R))$ speziell $E=\pi$, $O=\alpha$; $\tau = \alpha + (\pi - \alpha)x$ mit $x \in R \wedge x \neq TV(X, E, O)$, so gilt
 $\mathcal{P}_x^+ = \{\tau \in \mathcal{M} \mid \tau = \alpha + (\pi - \alpha)x \text{ mit } x > 0\}$,
 $\mathcal{P}_x^- = \{\tau \in \mathcal{M} \mid \tau = \alpha + (\pi - \alpha)x \text{ mit } x < 0\}$.
 Dafür kann man mit $\pi = \pi - \alpha$ auch schreiben
 $\tau = \alpha + \pi x$ bzw. $\tau = \alpha - \pi x$ mit $x > 0$.

DEF.7.1d: Ein affiner Raum heißt angeordnet, wenn in jeder Punktreihe für Punktetripel eine Zwischenbeziehung erklärt ist, für die gilt:

- Z1: Ist C zwischen A und B, so sind A, B, C paarweise verschiedene kollineare Punkte und C liegt auch zwischen B und A.
 Z2: Sind A und C verschiedene Punkte, so existiert ein Punkt B so, daß C zwischen A und B liegt.
 Z3: Von drei paarweise verschiedenen kollinearen Punkten liegt genau einer zwischen den beiden anderen.
 Z4: (Axiom der planaren Anordnung) Ist g eine Gerade in der Ebene des Dreiecks A, B, C, die keine Ecke enthält und eine Dreiecksseite in einem Punkt zwischen den Ecken schneidet, so gilt gleiches für genau eine weitere Dreiecksseite.



Bemerkungen: (a) Die Axiome Z1, Z2, Z3, Z4 sind die Hilbertschen Anordnungsaxiome, Z4 wird auch das Axiom von Pasch genannt.

(b) In jedem angeordneten affinen Raum kann man jede Punktreihe $\dot{P}_x$ durch Auszeichnung von zwei verschiedenen Punkten $O, E \in \dot{P}_x$ in zwei Halbgeraden zerlegen:
 $\dot{P}_x^- := \{X \in \dot{P}_x \mid O \text{ zwischen } X \text{ und } E\}$, $\dot{P}_x^+ := \{X \in \dot{P}_x \mid X \neq O \wedge O \text{ nicht zwischen } X \text{ und } E\}$.

(c) Für die Axiome Z1, Z2 und Z3 sagt man kurz: "Die Punkte jeder Punktreihe sind linear angeordnet", da durch diese Axiome jede Punktreihe zu einer linear geordneten Menge (ohne erstes und letztes Element) wird, wenn man nach Auszeichnung zweier verschiedener Punkte $O, E \in \dot{P}_x$ festsetzt:

- (I) $X \in \dot{P}_x^- : X < O$, $X \in \dot{P}_x^+ : O < X$,
 (II) $X, Y \in \dot{P}_x^+ : X < Y \iff X \text{ zwischen } O \text{ und } Y$,
 $X, Y \in \dot{P}_x^- : X < Y \iff Y \text{ zwischen } X \text{ und } O$,
 (III) $X \in \dot{P}_x^-, Y \in \dot{P}_x^+ : X < Y$.

(d) Ist A, B, C ein Dreieck in einem reellen affinen Raum und g eine Gerade, die jede Dreiecksseite in einer Nichtecke C' bzw. A' bzw. B' (vgl. obige Figur) trifft, so gilt $TV(B, C, A') \cdot TV(C, A, B') \cdot TV(A, B, C') = 1$ (Satz von MENELAOS). Man erhält diese Aussage aus Folg. 2, Bem. c, wenn h die Ferngerade der Dreiecksebene ist und $DV(A', U, B, C) = DV(U, A', C, B) = TV(B, C, A')$ mit $U \in h$ benützt wird.

Jeder reelle affine Raum ist bezüglich der in Def. 7.1c erklärten Zwischenbeziehung ein angeordneter affiner Raum.

Bew.: Bem. a und b nach Def. 7.1c zeigen, daß Z_1 gilt. Da jeder affine Raum isomorph einem projektiv eingebetteten affinen Raum ist, führen wir den Beweis o.B.d.A. in $\mathbb{P}(R)$. Nach Folg. 2 gilt in $\mathbb{P}(R)$ das Axiom T_2 , also existiert zu $A, C \mid \neq$ und $U := \dot{P}_{AC} \cap \dot{P}_w$ ein Punkt B mit $AB/CU \xrightarrow{\text{Folg. 3, Bem. c}} C$ liegt zwischen A und B, d.h.

es gilt Z_2 . Ebenso folgt aus T_3 das Axiom Z_3 und aus T_4 das Axiom Z_4 , wenn h als Ferngerade benutzt wird.

Bemerkungen: (a) Auf Grund des letzten Beweises erkennt man, daß $\mathbb{T} = \mathbb{T} \setminus \mathbb{L}$ ein angeordneter affiner Raum ist, wenn $\mathbb{T}$ ein angeordneter projektiver Raum ist und die Zwischenbeziehung in $\mathbb{T}$ wie folgt definiert wird: Ein Punkt C liegt genau dann zwischen den verschiedenen Punkten A und B , wenn $\{A, B\}$ trennt $\{C, \mathbb{P}_{AB} \cap \mathbb{P}_\infty\}$.

(b) Ein affiner Desarguesraum ist genau dann angeordnet, wenn sein Algebraisierungskörper geordnet ist (ohne Beweis).

SATZ 7.1: Jeder reelle projektive Raum ist angeordnet und jeder reelle affine Raum erfüllt die Hilbertschen Anordnungsaxiome.

Bemerkung: Ein geordneter Körper K ($\Rightarrow K$ enthält einen zum Körper der rationalen Zahlen isomorphen Körper) heißt archimedisch, wenn es zu jedem Element $a \in K$ eine natürliche Zahl gibt, die größer als der Betrag von a ist. Jeder archimedische Körper ist anordnungstreu isomorph zu einem Unterkörper von $\mathbb{R}$ und daher speziell kommutativ, sodaß jeder projektive Desarguesraum zu einem archimedischen Algebraisierungskörper ein PP-Raum ist. Unter den archimedischen Körpern ist $\mathbb{R}$ schließlich durch die Stetigkeit ausgezeichnet, die für die Punktmenge $\mathbb{P}_\infty$ formuliert bedeutet: Wird $\mathbb{P}_\infty$ in zwei nichtleere Teilmengen $\mathbb{P}_\infty', \mathbb{P}_\infty''$ zerlegt, sodaß $\forall X' \in \mathbb{P}_\infty' \wedge \forall X'' \in \mathbb{P}_\infty''$ gilt $X' < X''$, so hat entweder $\mathbb{P}_\infty'$ ein letztes oder $\mathbb{P}_\infty''$ ein erstes Element. Ein projektiver Desarguesraum ist daher genau dann reell, wenn sein Algebraisierungskörper archimedisch und stetig ist.

7.2. Anwendungen der Anordnung und Orientierbarkeit reeller projektiver Räume

Wegen $P \cap L(\mathbb{T}(\mathbb{R})) = PGL(\mathbb{T}(\mathbb{R}))$ wird die Koordinatendarstellung $\mu^{-1} \circ \mu$ einer Kollineation α bei der Koordinatisierung μ durch eine lineare Bijektion beschrieben:

$$x_j^{k'} = a_j^{k'} x_j^k \quad \text{für } k' = 0 \dots n \wedge j \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge \Delta := \|a_j^{k'}\| \neq 0.$$

Genau für reelle projektive Räume ungerader Dimension ist $\text{sign } \|a_j^{k'}\|$ eine Eigenschaft von α .

Bew.: Es ist das Verhalten von $\text{sign } \Delta$ bei Umnormung und Änderung der Koordinatisierung zu untersuchen.

(a) $(x^0, \dots, x^n)R = (x^0\lambda, \dots, x^n\lambda)R$ für $\lambda \neq 0 \Rightarrow x^{k'} = a_{j'}^{k'} x^j \lambda = (a_{j'}^{k'} \lambda) x^j =: \bar{a}_{j'}^{k'} x^j \Rightarrow \bar{\Delta} := \|\bar{a}_{j'}^{k'}\| = \|a_{j'}^{k'}\| \lambda^{n+1}$. Ist $\lambda < 0$, so ist $\text{sign } \bar{\Delta} = -\text{sign } \Delta$ bei gerader projektiver Dimension; in diesem Fall hat $\text{sign } \Delta$ sicher keine geometrische Bedeutung. Für ungerade Dimension dagegen ist $\text{sign } \Delta$ invariant gegen Umnormungen.

(b) Sind μ und μ' zwei Koordinatisierungen, dann ist $\mu^{-1}\mu': \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ eine (projektive) Kollineation mit $y^j \sigma = t_{k'}^j x^k \wedge \sigma \neq 0 \wedge \|t_{k'}^j\| \neq 0$. Zu $(t_{k'}^j)$ existiert die inverse Matrix (τ_k^j) und es folgt $\tau_k^j y^j \sigma = \tau_k^j t_{k'}^j x^k = \delta_k^{j'} x^{j'} = x^{j'}$ und analog $\tau_{j'}^{k'} y^j \sigma = x^{k'}$. Damit entsteht aus $x^{k'} = a_{j'}^{k'} x^j$:

$$\tau_{j'}^{k'} y^j \sigma = a_{j'}^{k'} \tau_{m'}^{j'} y^m \sigma \Rightarrow t_{k'}^{j'} \tau_{j'}^{k'} y^j \sigma = a_{j'}^{k'} t_{m'}^{j'} \tau_{m'}^{j'} y^m \sigma \Rightarrow y^{j'} \sigma = a_{j'}^{k'} t_{m'}^{j'} \tau_{m'}^{j'} y^m \sigma =: b_{m'}^{j'} y^m \sigma.$$

Für die Koeffizientenmatrix $(b_{m'}^{j'})$ von $\mathfrak{x}$ bezüglich μ' gilt daher

$$\|b_{m'}^{j'}\| = \|a_{j'}^{k'}\| \cdot \|t_{k'}^{j'}\| \cdot \|\tau_{m'}^{j'}\| = \|a_{j'}^{k'}\| \cdot \|t_{k'}^{j'}\| \cdot \|t_{m'}^{j'}\|^{-1} = \|a_{j'}^{k'}\|,$$

d.h. der Wert der Transformationsmatrix bleibt beim Übergang zu einer anderen Koordinatisierung erhalten, und damit auch $\text{sign } \Delta$. $\blacklozenge$

Da $\text{sign } \Delta$ für ungerade Dimension eine Eigenschaft von $\mathfrak{x}$ ist, wird folgende Definition sinnvoll:

DEF. 7.2a: Eine Autokollineation $\mathfrak{x}$ eines reellen projektiven Raumes ungerader Dimension heißt gleichsinnig bzw. gegensinnig, wenn die Determinante von $\mu^{-1}\mathfrak{x}\mu$ positiv bzw. negativ ist.

Bemerkungen: (a) Sei $\mathbb{T}(\mathbb{R})$ von ungerader Dimension, dann bezeichnen wir mit $\text{PGL}(\mathbb{T}(\mathbb{R})) \subset \text{PGL}(\mathbb{T}(\mathbb{R})) = \text{P}^1\text{L}(\mathbb{T}(\mathbb{R}))$ die Menge aller gleichsinnigen Kollineationen. $\text{PGL}^-(\mathbb{T}(\mathbb{R}))$ ist eine Untergruppe von $\text{PGL}(\mathbb{T}(\mathbb{R}))$, denn es gilt $\det \mu^{-1}(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1)\mu = \det(\mu^{-1}\mathfrak{x}_1\mu) \cdot \det(\mu^{-1}\mathfrak{x}\mu) \wedge \det \mu^{-1}(\mathfrak{x}')\mu = [\det(\mu^{-1}\mathfrak{x}\mu)]^{-1}$, woraus sofort die Abgeschlossenheit von $\text{PGL}(\mathbb{T}(\mathbb{R}))$ bezüglich Zusammensetzung und Inversenbildung abzulesen ist; dagegen ist $\text{PGL}^-(\mathbb{T}(\mathbb{R}))$, die Menge aller gegensinnigen Kollineationen, keine Gruppe.

(b) Zu zwei Fundamentalfiguren $\{A_0, \dots, A_{n+1}\}$ und $\{A'_0, \dots, A'_{n+1}\}$ des $\mathbb{T}(\mathbb{R})$ existiert genau eine (projektive) Kollineation $\mathfrak{x}$ mit $A_j \mathfrak{x} = A'_j$ für $j=0, \dots, n+1$. Zwei Fundamentalfiguren heißen gleichsinnig bzw. gegensinnig, wenn die durch sie bestimmte Kollineation gleich- bzw. gegensinnig ist. Die Gleichsinnigkeit ist eine Äquivalenzrelation in der Menge der Fundamentalfiguren.

Zeichnet man im $\mathbb{T}(\mathbb{R})$ ungerader Dimension eine feste Fundamentalfigur aus, so bilden alle zu dieser gleichsinnigen Fundamentalfiguren die "Rechtsklasse" bzw. alle gegensinnigen die "Links-klasse" von Fundamentalfiguren.

Die Zerlegung der Menge der Fundamentalfiguren in zwei disjunkte

Klassen heißt Orientierung des projektiven Raumes; ein reeller projektiver Raum ungerader Dimension ist also orientierbar.

Folgerungen:

1) Eigenschaften einer reellen Punktreihe ($\dim \mathbb{P}(R)=1$).

(a) Jede gegensinnige Autoprojektivität ist notwendig hyperbolisch; jede elliptische und jede parabolische Autoprojektivität ist notwendig gleichsinnig. Eine projektive Involution ist genau dann hyperbolisch, wenn sie gegensinnig ist.

Bew.: (a) Die Koordinatendarstellung einer gegensinnigen Autoprojektivität α lautet:

$$\begin{aligned} x^0 \xi &= a_0^0 x^0 + a_1^0 x^1 \\ x^1 \xi &= a_0^1 x^0 + a_1^1 x^1 \end{aligned} \quad \text{mit } \Delta := \begin{vmatrix} a_0^0 & a_1^0 \\ a_0^1 & a_1^1 \end{vmatrix} < 0.$$

Ein Fixpunkt $F(f^0:f^1)$ liegt für $f^i = \xi f^i$ vor $\Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} (a_0^0 - \xi)f^0 + a_1^0 f^1 &= 0 \\ a_0^1 f^0 + (a_1^1 - \xi)f^1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{Dieses homogene lineare Gleichungssystem hat genau dann eine nichttriviale}$$

Lösung, wenn gilt

$$\begin{vmatrix} a_0^0 - \xi & a_1^0 \\ a_0^1 & a_1^1 - \xi \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \xi^2 - \xi(a_0^0 + a_1^1) + \Delta = 0. \text{ Die Diskriminante}$$

$D := (a_0^0 + a_1^1)^2 - 4\Delta$ dieser quadratischen Gleichung ist wegen $\Delta < 0$ positiv $\Rightarrow$ es existieren zwei verschiedene reelle Lösungen $\Rightarrow \alpha$ ist hyperbolisch.

Ist α elliptisch bzw. parabolisch, dann gilt

$$D < 0 \Leftrightarrow \Delta > (a_0^0 + a_1^1)^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \text{ ist gleichsinnig bzw.}$$

$$D = 0 \Leftrightarrow \Delta = (a_0^0 + a_1^1)^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \text{ ist gleichsinnig.}$$

(b) Ist α eine gegensinnige projektive Involution, so ist α nach (a) notwendig hyperbolisch. Ist umgekehrt α eine projektive Involution, so muß nach 5.4, Folg. 5, Bem. f die aus

$$x^0 : x^1 = (a_0^0 x^0 + a_1^0 x^1) : (a_0^1 x^0 + a_1^1 x^1)$$

durch Ausmultiplizieren gewonnene nicht ausgeartete Bilinearform

$$a_0^1 x^0 x^0 + a_1^1 x^1 x^1 - a_0^0 x^0 x^1 - a_1^0 x^1 x^0 = 0 \text{ symmetrisch sein, d.h.}$$

$$a_1^1 = -a_0^0.$$

Ist α hyperbolisch $\Leftrightarrow D > 0 \Leftrightarrow (a_0^0 + a_1^1)^2 - \Delta = -\Delta > 0 \Leftrightarrow \alpha$ ist gegensinnig.

(b) Ist eine projektive Involution α elliptisch, so gilt $AA\alpha/BB\alpha$ für je zwei beliebige verschiedene Punkte A, B mit $B \neq A\alpha$. Existiert umgekehrt in einer projektiven Involution α ein Punktepaar dieser Art, so ist α elliptisch.

Bew.: Ist α eine projektive Involution $A \mapsto A\alpha$, $B \mapsto B\alpha$ und $B \neq A\alpha$ ($\Rightarrow B\alpha \neq A$), so koordinatisieren wir die paarweise verschiedenen Punkte $A, B, A\alpha$ bzw. $B\alpha$ mit $(1:1)$, $(1:0)$, $(0:1)$ bzw. $(1:a)$ ($a \neq 0, 1$) $\Rightarrow DV(B\alpha, B, A\alpha, A) = a$. Die durch $A \mapsto A\alpha$, $B \mapsto B\alpha$ eindeutig bestimmte Involution α hat die Darstellung $(x^0:x^1) \mapsto (x^1:ax^0) \Rightarrow D = (0+0)^2 - (-a) = a$. Ist α elliptisch $\Leftrightarrow D = a < 0 \Leftrightarrow AA\alpha / BB\alpha$. ◆

2) In der reellen projektiven Ebene $\pi(\mathbb{R})$ gilt: Ist k ein Kegelschnitt, so ist genau eine Ecke jedes Poldreiecks ein Innenpunkt von k ; genau auf den Seiten durch diesen Innenpunkt ist die Involution konjugierter Punkte hyperbolisch.

Bew.: Sei k ein Kegelschnitt in der reellen projektiven Ebene und P_0, P_1, P_2 ein Poldreieck von k . Dann existiert eine Koordinatisierung $\mu: \pi(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mit $P_i \mu = (\delta_i^0, \delta_i^1, \delta_i^2) \mathbb{R}$, sodaß $k\mu$ die Darstellung $\lambda_0(x^0)^2 + \lambda_1(x^1)^2 - \lambda_2(x^2)^2 = 0$ mit $|\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2| > 0$ besitzt (vgl. 5.6, Folg. 4). Die (projektive) Kollineation $\alpha: \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mit $(x^0:x^1:x^2) \mapsto (\sqrt{\lambda_0}x^0:\sqrt{\lambda_1}x^1:\sqrt{\lambda_2}x^2)$ führt $k\mu$ in den Kegelschnitt $k\mu\alpha: (x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$ über und läßt die Punkte $P_i\mu$ einzeln fest. Da die Kollineation $\mu\alpha$ die Eigenschaft Poldreieck bzw. Innenpunkt zu sein nach 2.3, Folg. 5 nicht zerstört, genügt es, die Aussage für den Kegelschnitt $l: (x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$ und das Poldreieck $Q_i = (\delta_i^0, \delta_i^1, \delta_i^2) \mathbb{R}$ zu zeigen. Die Gerade $Q_j\lambda_c = :q_j$ hat die Gleichung $x^j = 0$. Man berechnet:

$P_{q_0} \cap l = \{(0,1,1)\mathbb{R}, (0,1,-1)\mathbb{R}\} \Rightarrow$ die projektive Involution konjugierter Punkte auf q_0 ist hyperbolisch $\Rightarrow Q_0$ ist Außenpunkt. Ebenso ist Q_1 Außenpunkt wegen $P_{q_1} \cap l = \{(1,0,1)\mathbb{R}, (1,0,-1)\mathbb{R}\}$ und die Involution konjugierter Punkte auf q_1 hyperbolisch. $P_{q_2} \cap l = \emptyset \Rightarrow Q_2$ ist Innenpunkt und auf q_2 existiert eine elliptische Involution konjugierter Punkte. ◆

Anwendungen: a) Jeder Kegelschnitt in $\pi(\mathbb{R})$ besitzt Innenpunkte.

b) Alle zu einem Innenpunkt konjugierten Punkte sind Außenpunkte.

Bew.: Ist P ein Innenpunkt des Kegelschnitts k, so liegt auf $P\lambda_k$ kein Kegelschnittpunkt, denn die Tangente in einem solchen würde durch P gehen. Für einen beliebigen Punkt A I $P\lambda_k$ ($\Rightarrow A \notin k$) bestimmt daher die Polare $A\lambda_k =: a$ I P zusammen mit AP und $P\lambda_k$ ein Poldreiseit von k. Da P nach Voraussetzung ein Innenpunkt des zugehörigen Poldreiecks ist, ist nach Folg.2 die Ecke A ein Außenpunkt von k.

c) Jede Gerade g durch einen Innenpunkt eines Kegelschnitts trifft diesen in zwei verschiedenen Punkten. Der Pol G der Geraden g ist nämlich nach b) ein Außenpunkt, womit die projektiven Involutionen konjugierter Geraden um G bzw. konjugierter Punkte auf g hyperbolisch sind.

d) Ist P ein Außenpunkt von k und a eine Gerade durch P, die k in zwei verschiedenen Punkten S_1, S_2 trifft, so ist jeder Punkt $X \in P_{S_1 S_2}$ mit $PX/S_1 S_2$ ein Innenpunkt von k.

Bew.: Wir betrachten zunächst folgende Figur:

$$k': (x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0,$$

$$S_1' := (0, 1, 1) R \in k', \quad S_2' := (0, 1, -1) R \in k' \Rightarrow S_1' S_2' \dots x^0 = 0,$$

$$H' := (1, 0, 1) R \in k' \Rightarrow \text{Tangente } h' \text{ in } H' \text{ an } k' \text{ ist } x^0 - x^2 = 0,$$

$$P' := h'. S_1' S_2' \Rightarrow P' = (0, 1, 0) R.$$

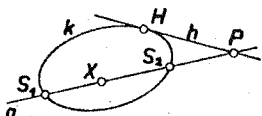
Es genügt die Richtigkeit der Aussage für diese Figur in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ zu beweisen, denn nach 2.2, Folg.4 existiert eine Kollineation

$$\alpha: \mathbb{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \text{ mit } k \alpha = k', S_1 \alpha = S_1', S_2 \alpha = S_2', H \alpha = H' \Rightarrow P \alpha = P'.$$

Aus der Voraussetzung $PX/S_1 S_2$ folgt $P'X'/S_1' S_2'$ (Trennen ist projektiv invariant) $\Rightarrow X', S_1', S_2', P'$ kollinear und pw. verschieden $\Rightarrow X' = (0, x, 1) R$ mit $x \neq \pm 1, -1$.

$$P'X'/S_1' S_2' \Leftrightarrow DV(P'X'S_1'S_2') = (x+1)(x-1)^{-1} < 0 \Leftrightarrow |x| < 1.$$

$X'\lambda_k$ hat die Gleichung $x^1 x - x^2 = 0$ und daher gilt für Punkte von $P_{X'\lambda_k} \cap k'$ die Bedingung $(x^0)^2 + (1-x^2)(x^1)^2 = 0$. Wegen $|x| < 1$ hat diese Gleichung keine nicht triviale Lösung $x^0 : x^1$, also gilt $P_{X'\lambda_k} \cap k' = \emptyset$, und X' ist Innenpunkt von k' .



e) Sind für eine (projektive) Polarität λ in $\pi(\mathbb{R})$ die projektiven Involutionen konjugierter Punkte auf allen drei Seiten eines Poldreiecks elliptisch, so ist die Polarität elliptisch (diese Bedingung ist nach 2.4 für eine elliptische Polarität notwendig, in $\pi(\mathbb{R})$ ist sie auch hinreichend). Wäre nämlich die durch diese Angabe bestimmte Polarität hyperbolisch, so besäße im Widerspruch zu 2.4, Folg.6 der zugehörige Staudtsche Kegelschnitt ein Poldreieck aus drei Innenpunkten.

f) Ist $\alpha: P_3 \rightarrow P_3$ eine elliptische projektive Involution und $\beta: P_3 \rightarrow P_3$ eine von α verschiedene projektive Involution, so existiert genau ein in beiden Involutionen zugeordnetes Punktepaar, d.h. $\exists^*(P, Q) \in P_3 \times P_3$ mit $P\alpha = Q \wedge P\beta = Q$.

Bew.: Durch Projektion auf einen Steiner Kegelschnitt k erhalten wir die elliptische Involution $\alpha: k \rightarrow k$, deren Involutionzentrum Z_α ein Innenpunkt von k ist und die Involution $\beta: k \rightarrow k$ mit dem Zentrum Z_β . Die Gerade $Z_\alpha Z_\beta$ durch den Innenpunkt Z_α trifft nach Anw. c den Kegelschnitt in zwei Punkten und genau diese beiden Punkte liefern das Lösungspaar. ◆

Bemerkungen: (a) Es existiert genau ein Punktepaar, das in einer elliptischen projektiven Involution zugeordnet ist und zu zwei verschiedenen Punkten F_1 und F_2 harmonisch liegt, denn alle zu F_1 und F_2 harmonischen Paare sind nach 1.10 in einer hyperbolischen Involution β mit den Fixpunkten F_1, F_2 zugeordnet.

(b) Sind α und β hyperbolisch, so existiert entweder ein gemeinsam zugeordnetes Punktepaar, das auch aus einem gemeinsamen Fixpunkt bestehen kann, oder kein solches Paar.

(c) Der obige Beweis liefert eine konstruktive Ermittlung des gemeinsamen Punktepaares zweier projektiver Involutionen.

(d) Die obige Anwendung c gilt auch für Quadriken in $\mathbb{P}(R)$. Wir benötigen i.f. nur einen Sonderfall: Jeder Durchmesser eines Ellipsoids ϕ in $\mathbb{P}(R)$ schneidet ϕ in zwei verschiedenen Punkten. Nach 6.5, Anwendung (II) lautet nämlich die Normalform von ϕ dann $(x^0)^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2 = 0$, und die affine Punktreihe auf einem Durchmesser g gestattet die Darstellung $[(1, \sigma) + (0, \alpha)\lambda] | R$ mit $\lambda \in R \wedge \alpha \neq 0$; für die Schnittpunkte $P_\lambda \in \phi$ gilt daher $\lambda^2 = [(a^1)^2 + \dots + (a^n)^2]^{-1}$, was zwei verschiedene Schnittpunkte ergibt.

3) Eine Affinität $\alpha \in \text{AFL}(A(R)) = \text{AGL}(A(R))$ besitzt bei der Koordinatisierung $\tilde{\mu}$ die Koordinatendarstellung $\tilde{\mu}^{-1} \alpha \tilde{\mu}$:

$$x^{k'} = a_k^k x^k + c^{k'} \quad \text{für } k' = 1, \dots, n \wedge \tilde{A} := \|a_k^k\| \neq 0.$$

Wie in Beweisschritt b zu Beginn von 7.2 erkennt man, daß $\tilde{A}$ nicht von der Koordinatisierung abhängt und daher $\text{sign } \tilde{A}$ eine Eigenschaft von α ist; der Beweisschritt a entfällt für affine Räume.

DEF. 7.2b: Eine Autoaffinität α eines reellen affinen Raumes heißt gleichsinnig bzw. gegensinnig, wenn die Determinante von $\tilde{\mu}^{-1} \alpha \tilde{\mu}$ positiv bzw. negativ ist.

Bemerkungen: (a) Die Menge $\text{AGL}^+(A(R))$ aller gleichsinnigen Affinitäten bildet eine Untergruppe der affinen Gruppe $\text{AGL}(A(R))$, dagegen bildet die Menge $\text{AGL}^-(A(R))$ aller gegensinnigen Affinitäten keine Gruppe.

(b) Zu zwei Simplexes $\{A_0, \dots, A_n\}$ und $\{A'_0, \dots, A'_n\}$ existiert genau eine (projektive) Affinität α mit $A_j \alpha = A'_j$ für $j=0, \dots, n$. Ist α gleichsinnig bzw. gegensinnig, so heißen die beiden Simplexes gleich- bzw. gegensinnig, und wir schreiben $S(A_0, \dots, A_n) = S(A'_0, \dots, A'_n)$ bzw. $S(A_0, \dots, A_n) \neq S(A'_0, \dots, A'_n)$.

Eine Zerlegung der Menge der Simplexes in zwei disjunkte Klassen heißt Orientierung; ein reeller affiner Raum ist also orientierbar.

(c) Sind $\{A_0 = \alpha_0, \dots, A_n = \alpha_n\}$ und $\{A'_0 = \alpha'_0, \dots, A'_n = \alpha'_n\}$ zwei Simplexes des affinen Raumes $A(\mathcal{M}(R))$ über einem reellen Rechtsvektorraum, so gilt:

$$S(A_0, \dots, A_n) = S(A'_0, \dots, A'_n) \iff \text{sign det}(\alpha_1 - \alpha_0, \dots, \alpha_n - \alpha_0) = \text{sign det}(\alpha'_1 - \alpha'_0, \dots, \alpha'_n - \alpha'_0).$$

Bew.: Nach Einführung einer Koordinatisierung $\hat{\mu}: A(\mathcal{M}) \rightarrow A(\mathcal{K}^n)$ ist $\alpha_j \hat{\mu} = (\alpha_j, a^1, \dots, \alpha_j, a^n)$, $\alpha'_j \hat{\mu} = (\alpha'_j, a'^1, \dots, \alpha'_j, a'^n)$ ($j=1, \dots, n$),

und die eindeutig bestimmte Affinität α mit $A_j \alpha = A'_j$ hat die Darstellung

$$x^k = a^k_j x^j + c^k \implies a^k_s = a^k_{j_0} a^j_s + c^k \quad \text{für } s=0, \dots, n \implies$$

$$(a^k_1 - a^k_0, \dots, a^k_n - a^k_0) = a^k_j (a^j_1 - a^j_0, \dots, a^j_n - a^j_0) \quad \text{für } k=1, \dots, n \implies$$

$$\det(\alpha'_1 - \alpha'_0, \dots, \alpha'_n - \alpha'_0) = \|a^k_j\| \det(\alpha_1 - \alpha_0, \dots, \alpha_n - \alpha_0).$$

Aus dieser Beziehung folgt unmittelbar die Richtigkeit des Kriteriums.

Hat ein projektiv eingebetteter reeller affiner Raum $\hat{T} = T \setminus T_\infty$ ungerade Dimension, so ist eine Affinität α genau dann gleichsinnig, wenn die fortsetzende Kollineation α gleichsinnig ist; hat der Raum gerade Dimension, so ist eine Affinität α genau dann gleichsinnig, wenn die Beschränkung $\alpha|_{T_\infty}$ der fortsetzenden Kollineation auf die Fernhyperebene gleichsinnig ist.

Bew.: Hat α die Koordinatendarstellung $x^k = a^k_j x^j + c^k$, so gilt nach 6.5, Anw.(I) für α dann $(x^0, \dots, x^n)R \mapsto (x^0, c^1 x^0 + a^1_k x^k, \dots, c^n x^0 + a^n_k x^k)R$ und $\det \hat{\mu}^{-1} \alpha \hat{\mu} = \det \mu^{-1} \alpha \mu$.

Ist $\dim \hat{T} = \dim T$ ungerade, so ist α gleichsinnig genau dann, wenn α gleichsinnig ist. Ist $\dim \hat{T} = \dim T$ gerade, so hat $\text{sign det } \hat{\mu}^{-1} \alpha \hat{\mu}$ keine geometrische Bedeutung; dagegen ist T_∞ dann von ungerader Dimension und mit $\alpha|_{T_\infty}: (x^1, \dots, x^n)R \mapsto (a^1_k x^k, \dots, x^n x^k)R$ gilt $\det \hat{\mu}^{-1} \alpha \hat{\mu} = \det \mu^{-1} \alpha|_{T_\infty} \mu$.

4) Sei im reellen projektiv eingebetteten affinen Raum $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{T}_\infty$ die affine Punktreihe $\mathbb{P}_\infty$ mit dem Fernpunkt $U := \mathbb{P}_\infty \cap \mathbb{P}_\infty$ gegeben und $\alpha: \mathbb{P}_\infty \rightarrow \mathbb{P}_\infty$ eine projektive Involution. Es können zwei Fälle eintreten:

Fall 1: $U\alpha = U \Rightarrow \alpha$ besitzt einen von U verschiedenen zweiten Fixpunkt $F \in \mathbb{P}_\infty$ mit $DV(X, X\alpha, F, U) = -1 \quad \forall X \in \mathbb{P}_\infty \setminus \{F\} \Rightarrow F$ ist Mittelpunkt jedes Paares zugeordneter Punkte und α ist somit die Beschränkung der zentrischen Spiegelung an F auf $\mathbb{P}_\infty$.

Fall 2: $U\alpha \neq U \Rightarrow U\alpha =: M \in \mathbb{P}_\infty$ und M heißt der "Zentralpunkt (Mittelpunkt) von α ". Die projektive Involution α ist eindeutig festgelegt durch Zentralpunkt M und ein zugeordnetes Punktepaar $X(+M) \rightarrow X\alpha$. Nach Folg. 1(b) ist α genau dann elliptisch, wenn $XX\alpha/MU$ gilt, d.h. wenn M zwischen X und $X\alpha$ liegt.

Ist α eine hyperbolische Involution mit den beiden eigentlichen Fixpunkten F_1, F_2 , so gilt $H(F_1, F_2; U, M)$ nach 1.10, Folg. 8, (III), d.h. der Zentralpunkt ist der Mittelpunkt der Strecke (F_1, F_2) .

Eine elliptische Involution $\alpha: \mathbb{P}_\infty \rightarrow \mathbb{P}_\infty$ besitzt stets einen Zentralpunkt $M \in \mathbb{P}_\infty$; ist $\sigma_M: \mathbb{P}_\infty \rightarrow \mathbb{P}_\infty$ die zentrische Spiegelung von $\mathbb{P}_\infty$ an M , so ist die zusammengesetzte Abbildung $\alpha^\tau := \alpha\sigma_M: \mathbb{P}_\infty \rightarrow \mathbb{P}_\infty$ eine hyperbolische projektive Involution mit demselben Zentralpunkt M .

Bew.: α^τ ist sicher eine Projektivität und wegen $U\alpha\sigma_M = M\sigma_M = M \wedge M\alpha\sigma_M = U\sigma_M = U$ ist α^τ eine projektive Involution mit dem Zentralpunkt M . Fixpunktepaar von α^τ ist genau jenes Punktepaar, welches in α und σ_M gemeinsam zugeordnet ist; nach Folg. 2, Anw. f existiert wegen α elliptisch genau ein solches (eigentliches) Paar (F_1, F_2) .

Bemerkungen: (a) Die Zuordnung $\alpha \rightarrow \alpha^\tau$ ist ein affiner und kein projektiver Begriff.

(b) Jede elliptische projektive Involution α mit dem Zentralpunkt M ist wegen $\alpha = \alpha^\tau\sigma_M^{-1} = \alpha^\tau\sigma_M$ das Produkt einer hyperbolischen projektiven Involution mit dem Zentralpunkt M und der zentrischen Spiegelung an M . Wegen $\alpha = \alpha^\tau\sigma_M = \alpha^\tau(\alpha^\tau\sigma_M)^{-1} = \sigma_M^{-1}(\alpha^\tau)^{-1} = \sigma_M\alpha^\tau$ ist dieses Produkt kommutativ.

(c) Umgekehrt ist das Produkt einer hyperbolischen projektiven Involution $\alpha: \mathbb{P}_\infty \rightarrow \mathbb{P}_\infty$ mit dem Zentralpunkt M und der zentrischen Spiegelung an M eine elliptische projektive Involution $\alpha = \alpha^\tau\sigma_M$. Ist nämlich $X \in \mathbb{P}_\infty \setminus \{U, M\}$ kein Fixpunkt von α^τ , so gilt $UM/XX\alpha^\tau$ nach Folg. 1(b); wegen $DV(U, M, X, X\alpha^\tau) \cdot DV(U, M, X\alpha^\tau, X\alpha^\tau\sigma_M) = DV(U, M, X, X\alpha)$ und $H(U, M; X\alpha^\tau, X\alpha^\tau\sigma_M) \Rightarrow DV(U, M, X, X\alpha) < 0 \Rightarrow UM/XX\alpha \Rightarrow \alpha$ ist elliptisch.

5) Sei nun $A(R) = \mathbb{P}(R) = \mathbb{T}(R) \setminus \mathbb{T}_\infty$ ein projektiv eingebetteter reeller affiner Raum mit $\dim A(R) \geq 2$. In $\mathbb{T}(R)$ existieren elliptische (projektive) Polaritäten λ , und zwar lautet nach 5.5 die Normalform der λ beschreibenden nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform $x^0 y^0 + \dots + x^n y^n = 0$. Da λ elliptisch ist, gilt $\omega \lambda^* =: M \in \mathbb{P}$, d.h. eine elliptische Polarität besitzt stets einen Mittelpunkt M . Ist $\sigma_M: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ die zentrische Spiegelung an M ($\Rightarrow \sigma_M|_{\mathbb{T}_\infty} = \iota_{\mathbb{T}_\infty}$), so gilt $\lambda \sigma_M^* = \sigma_M \lambda$ nach 5.5, Folg.6 und 6.3, Folg.2.

Die zusammengesetzte Abbildung $\lambda' := \lambda \sigma_M^*: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}^*$ ist eine hyperbolische Polarität mit dem Mittelpunkt M .

Bew.: Mit λ und σ_M^* ist auch λ' eine globale Abbildung. Unter λ' ist konjugierte Lage eine symmetrische Relation:

$$\left. \begin{aligned} X \tilde{I} Y \lambda' &= Y \lambda \sigma_M^* = X \sigma_M \tilde{I} Y \lambda \sigma_M^* \sigma_M^* = Y \lambda \Rightarrow X \sigma_M \lambda \tilde{I} Y \lambda \lambda^* = Y \\ X \sigma_M \lambda &= X \lambda \sigma_M^* = X \lambda' \end{aligned} \right\} \Rightarrow X \lambda' \tilde{I} Y.$$

Damit ist λ' eine (projektive) Polarität und M ist wegen $\omega \lambda^* = \omega \lambda' \sigma_M = M \sigma_M = M$ ihr Mittelpunkt; da $M \notin \mathbb{T}_\infty$ gilt, ist λ' keine Nullpolarität.

Ist g eine Gerade durch M , so existiert nach 5.5, Folg.5, Bem.c auf g eine projektive Involution α konjugierter Punkte bezüglich λ , da auf g sicher kein Punkt existiert, dessen Polarehyperebene bezüglich der elliptischen Polarität λ durch g geht. Diese Involution α ist elliptisch, da λ elliptisch ist, und $\sigma_M|_{\mathbb{P}_g} =: \beta$ ist eine hyperbolische Involution. Nach Folg.2, Anw.f existieren genau zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{P}_g$ mit $P\alpha = Q \wedge P\beta = Q$. Wegen $P\alpha = Q$ gilt $P\lambda \tilde{I} Q$ und wegen $Q\sigma_M = Q\beta = P$ ist $(P\lambda)\sigma_M^* = P\lambda'$ eine Hyperebene mit $P \tilde{I} P\lambda' \Rightarrow \lambda'$ ist hyperbolisch. ◆

Bemerkungen: (a) Die Zuordnung $\lambda \mapsto \lambda'$ ist ein affiner und kein projektiver Begriff.

(b) Jede elliptische Polarität λ mit dem Mittelpunkt M ist wegen $\lambda = \lambda' \sigma_M^{*-1} = \lambda' \sigma_M^*$ das Produkt einer hyperbolischen Polarität λ' mit dem Mittelpunkt M und der zentrischen Spiegelung an M . Wegen $\lambda' = \lambda \sigma_M^* = \sigma_M \lambda$ ist $\lambda = \sigma_M \lambda'$, und daher dieses Produkt kommutativ.

(c) Die hyperbolische Polarität λ' bestimmt eine Quadrik ϕ' mit Mittelpunkt M . Da bei σ_M alle Fernpunkte einzeln festbleiben, stimmen die Spurpolaritäten (bzw. projektiven Involutionen konjugierter Punkte) von λ und λ' in $\mathbb{T}_\infty$ überein, und ϕ' ist daher ein Ellipsoid (eine Ellipse).

DEF. 7.2c: Das kommutative Produkt der Polarität an einem Ellipsoid mit der zentrischen Spiegelung an seinem Mittelpunkt heißt die Antipolarität des Ellipsoids.

(d) Nach Bem.c ist jede elliptische Polarität in $\mathbb{T}(\mathbb{R})$ nach Auszeichnung einer Fernhyperebene $\mathbb{T}_\infty$ die Antipolarität eines Ellipsoides. Umgekehrt ist die Antipolarität eines Ellipsoides Φ eine elliptische Polarität $\lambda = \lambda_\Phi \cdot \sigma_M^*$. Daß λ eine Polarität ist, folgt nämlich analog zu oben aus der Symmetrie der Konjugiertheit bei λ_Φ und $\lambda_\Phi \cdot \sigma_M^* = \sigma_M \lambda_\Phi$; außerdem ist M sicher nicht selbstkonjugiert. Falls ein selbstkonjugierter Punkt P bezüglich λ existiert, so bestimmt er einen Durchmesser g von Φ , der Φ nach Folg. 2, Bem.d in zwei Punkten trifft und daher eine hyperbolische Involution konjugierter Punkte bezüglich λ_Φ trägt; die durch $\lambda = \lambda_\Phi \cdot \sigma_M^*$ auf g bestimmte Involution konjugierter Punkte ist aber dann nach Folg. 4, Bem.c elliptisch und daher P nicht selbstkonjugiert.

SATZ 7.2: Jeder reelle projektive Raum ungerader Dimension und jeder reelle affine Raum sind orientierbar. Die elliptischen Polaritäten in $\mathbb{T}(\mathbb{R})$ sind nach Auszeichnung einer Fernhyperebene $\mathbb{T}_\infty$ genau die Antipolaritäten der Ellipsoide und die elliptischen projektiven Involutionen genau die kommutativen Produkte der hyperbolischen projektiven Involutionen mit Zentralpunkt und den zentrischen Spiegelungen am Zentralpunkt.

7.3. Die komplexe Fortsetzung eines projektiven Raumes über einem reellen Vektorraum

Wir nützen in diesem Punkt aus, daß der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen in den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen eingebettet werden kann.

Zwischenbemerkung:

Ist $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen bzw. $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ ein reeller Rechtsvektorraum und definiert man in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bzw. $\mathcal{V}(\mathbb{R}) \times \mathcal{V}(\mathbb{R})$ die beiden Operationen

$$\begin{aligned} (\epsilon_1, \epsilon_2) + (\eta_1, \eta_2) &:= (\epsilon_1 + \eta_1, \epsilon_2 + \eta_2) \\ (\epsilon_1, \epsilon_2) \cdot (a_1, a_2) &:= (\epsilon_1 a_1, \epsilon_2 a_1 + \epsilon_1 a_2) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \forall (a_1, a_2) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ \forall (\epsilon_1, \epsilon_2), (\eta_1, \eta_2) &| \\ &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathcal{V}(\mathbb{R}) \times \mathcal{V}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

so wird $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Körper $\mathbb{C}$ bzw. $\mathcal{V}(\mathbb{R}) \times \mathcal{V}(\mathbb{R})$ ein Rechtsvektorraum über $\mathbb{C}$; $\mathbb{C}$ heißt der "Körper der komplexen Zahlen".

Bemerkungen: (a) $(\epsilon, \nu) \cdot (1, 0) = (\epsilon, \nu)$, $(\eta, \nu) \cdot (0, 1) = (\nu, \eta) \Rightarrow$
 $(\epsilon, \eta) = (\epsilon, \nu) + (\nu, \eta) = (\epsilon, \nu) \cdot (1, 0) + (\nu, \eta) \cdot (0, 1).$

(b) $\mathcal{W}$ bzw. $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ kann kanonisch in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathcal{W}(\mathbb{R}) \times \mathcal{W}(\mathbb{R})$ eingebettet werden durch den folgenden injektiven (nicht surjektiven) Homomorphismus:

$$x \in \mathbb{R} \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C} \text{ bzw. } \alpha \in \mathcal{W}(\mathbb{R}) \mapsto (\alpha, \alpha) \in \mathcal{W}(\mathbb{R}) \times \mathcal{W}(\mathbb{R}).$$

Wir führen folgende Identifikation durch:

$(x, 0) = x$, insbesondere $(1, 0) = 1$ bzw. $(\alpha, \alpha) = \alpha$; für das Paar $(0, 1) \in \mathbb{R}$ setzen wir $(0, 1) = i$. Entsprechend obiger Definition gilt $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$, also $i^2 = -1$.

Nach der Identifikation lautet die Darstellung aus Bem. a:

$$(\alpha, \eta) = \alpha + \eta i \text{ mit } \alpha, \eta \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathcal{W}(\mathbb{R}).$$

Dieser nach der Identifizierung entstandene Vektorraum $\tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C})$ heißt "komplexe Fortsetzung von $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ ", denn es gilt $\mathcal{W}(\mathbb{R}) \subset \tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C})$.

(c) Nach 5.1 ist die Hülle $H(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ der Vektoren $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathcal{W}(\mathbb{R})$ der Unterraum $\{\alpha \in \mathcal{W}(\mathbb{R}) \mid \alpha = \alpha_1 x^1 + \dots + \alpha_k x^k \text{ mit } x^j \in \mathbb{R}\}$ von $\mathcal{W}(\mathbb{R})$.

Als "komplexe Fortsetzung $\tilde{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ von $H(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ " definieren wir

$\tilde{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) := \{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C}) \mid \tilde{\alpha} = \alpha_1 z^1 + \dots + \alpha_k z^k \text{ mit } z^j \in \mathbb{C}\}$; dies ist ein Unterraum von $\tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C})$ und $\tilde{H}$ umfaßt H , jedoch ist H kein Unterraum von $\tilde{\mathcal{W}}$.

Ist $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ eine Basis in $\mathcal{W}(\mathbb{R})$, so ist $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ eine Basis in $\tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C})$ und daher ist $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}(\mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{C}} \tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C})$.

Folgerungen:

1) Zu den beiden Vektorräumen $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ und $\tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C})$ gehören die projektiven Räume $\mathbb{P}(\mathcal{W}(\mathbb{R}))$ und $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C}))$. Die Punkte von $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ sind die eindimensionalen Unterräume von $\mathcal{W}(\mathbb{R})$, die Punkte von $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}})$ sind die eindimensionalen Unterräume von $\tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C})$. Es liegt nun nahe, folgende "kanonische Einbettung" $\gamma: \mathbb{P}(\mathcal{W}) \rightarrow \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}})$ vorzunehmen:

$$X = \alpha \mathbb{R} = H(\alpha) \in \mathbb{P}(\mathcal{W}) \mapsto X\gamma = \alpha \mathbb{C} = \tilde{H}(\alpha) \in \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}}).$$

Diese Abbildung γ ist injektiv und erhält kollineare und nicht kollineare Lage, da eine in $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ l.a. bzw. l.u. (endliche) Vektormenge auch in $\tilde{\mathcal{W}}$ l.a. bzw. l.u. ist. Die Abbildung ist jedoch nicht surjektiv, vielmehr gilt:

Der durch den Vektor $\tilde{\alpha} = \alpha + \eta i$ mit $\alpha, \eta \in \mathcal{W}(\mathbb{R})$ bestimmte eindimensionale Unterraum $\tilde{H}(\tilde{\alpha})$ von $\tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C})$ ist genau dann die komplexe Fortsetzung eines eindimensionalen Unterraumes von $\mathcal{W}$, wenn $\{\alpha, \eta\}$ l.a. in $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ ist.

Bew.: (a) $\tilde{H}(z) = \tilde{H}(z)$ mit $z \in \mathcal{H}(R) \Rightarrow \{z, \bar{z}\}$ l.a. in $\tilde{\mathcal{H}}(C) \Rightarrow$
 $\exists \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i \in C \setminus \{0\} \wedge \lambda_2 \in R$ mit $z = \bar{c}\lambda = (c + yi)(\lambda_1 + \lambda_2 i) = c\lambda_1 - y\lambda_2 + (c\lambda_2 + y\lambda_1)i \Rightarrow$
 $c\lambda_1 + y\lambda_2 = c \Rightarrow \{c, y\}$ l.a. in $\mathcal{H}$.
 (b) $\{c, y\}$ l.a. in $\mathcal{H} \Rightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in R \times R, + (0,0)$ mit
 $c\lambda_1 + y\lambda_2 = c$. Setzen wir $z := c\lambda_1 + y\lambda_2 \in \mathcal{H}$, so gilt $z = (c + yi)(\lambda_1 + \lambda_2 i) \Rightarrow$
 $\{z = c + yi, \bar{z}\}$ l.a. in $\tilde{\mathcal{H}} \Rightarrow \tilde{H}(z) = \tilde{H}(\bar{z})$ mit $z \in \mathcal{H}$. ◆

Es ist üblich $X = cR$ und $Xy = cC$ zu identifizieren und dann ist
 $\mathbb{T}(\mathcal{H}) \subset \mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}})$.

DEF. 7.3a: Ist $\mathbb{T}(\mathcal{H}(R))$ ein projektiver Raum über einem reellen
 Vektorraum und $\tilde{\mathcal{H}}(C)$ die komplexe Fortsetzung von $\mathcal{H}(R)$,
 so heißt $\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}}(C))$ die komplexe Fortsetzung von $\mathbb{T}(\mathcal{H}(R))$.
 Identifiziert man $\mathbb{T}(\mathcal{H})$ mit seiner kanonischen Einbettung in $\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}}(C))$,
 so heißen die Punkte von $\mathbb{T}(\mathcal{H})$ reelle Punkte von $\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}})$, jene von
 $\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}}) \setminus \mathbb{T}(\mathcal{H})$ imaginäre Punkte von $\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}})$.

Bemerkung: Diese Unterscheidung hat keinen Sinn hinsichtlich der
 vollen Gruppe $P\Gamma L(\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}}))$, da zu irgend zwei Punkten X, X' aus
 $\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}})$, auch für X reell und X' imaginär, immer eine Kollineation
 aus $P\Gamma L(\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}}))$ existiert, welche den einen in den anderen überführt.
 Die Menge aller " $\mathbb{T}(\mathcal{H}(R))$ -treuen Kollineationen" aus $P\Gamma L(\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}}))$,
 die $\mathbb{T}(\mathcal{H}(R))$ als Ganzes festlassen, ist natürlich eine Untergruppe
 $P\Gamma_R L(\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}}))$ von $P\Gamma L(\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}}))$; nur hinsichtlich dieser Untergruppe
 hat die obige Einteilung der Punkte von $\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}})$ einen Sinn.

Zwischenbemerkungen:

(1) Die Abbildung $\bar{f}: C \rightarrow C$ mit $z := (x, y) = x + yi \mapsto \bar{z} := (x, -y) = x - yi$
 ist ein involutorischer Automorphismus von C und zwar der einzige
 nichttriviale Automorphismus von C , der R festläßt.

Man kann übrigens zeigen, daß die Mächtigkeit der Automorphismen-
 gruppe von C größer ist als die Mächtigkeit von R ; der einzige be-
 kannte Automorphismus $C \rightarrow C$ ist jedoch $\bar{f}$.

(2) Ist $f: \mathcal{H}(R) \rightarrow \mathcal{H}(R)$ eine lineare Bijektion, so existiert
 genau eine lineare Bijektion $\tilde{f}: \tilde{\mathcal{H}}(C) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}(C)$ mit $c\tilde{f} = cf \ \forall c \in \mathcal{H}(R)$
 und genau eine halblinare Bijektion $f_h: \tilde{\mathcal{H}}(C) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}(C)$ mit
 $cf_h = cf \ \forall c \in \mathcal{H}(R)$; dabei gilt $f_h = \bar{f}$.

$\tilde{f}$ heißt die "lineare komplexe Fortsetzung von f " und f_h heißt die "halblineare komplexe Fortsetzung von f ".

Bew.: Leistet eine halblineare Bijektion $g: \tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C}) \rightarrow \tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C})$ zum Körperautomorphismus $\tilde{g}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ für alle reellen Vektoren dasselbe wie die lineare Bijektion $f: \mathcal{W}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{W}(\mathbb{R})$, so gilt $\forall \epsilon, \eta \in \mathcal{W}(\mathbb{R}) \wedge \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} (\epsilon x)g &= (\epsilon g)(x\tilde{g}) = (\epsilon f)(x\tilde{g}) \\ (\epsilon x)g &= (\epsilon x)f = \epsilon fx \end{aligned} \right\} \Rightarrow x\tilde{g} = x. \text{ Nach (1) folgt } \tilde{g} = \text{id}_{\mathbb{C}} \text{ oder } \tilde{g} = \bar{}.$$

Im ersten Fall folgt notwendig $(\epsilon + \eta i)g = \epsilon f + \eta fi$, und g ist tatsächlich linear und bijektiv wegen $(\epsilon + \eta i)g = \sigma \Rightarrow \epsilon f + \eta fi = \sigma \Rightarrow \epsilon = \eta = \sigma \Rightarrow \epsilon + \eta i = \sigma$;
im zweiten Fall folgt notwendig $(\epsilon + \eta i)g = \epsilon f + \eta f(\bar{i}) = \epsilon f - \eta fi$, und g ist tatsächlich eine halblineare Bijektion.

Bemerkungen: (a) Speziell $\iota_{\mathcal{W}}$ wird durch $\tilde{\iota}_{\mathcal{W}} = \iota_{\tilde{\mathcal{W}}}$ linear und durch ι_h mit $(\epsilon + \eta i)\iota_h = \epsilon \iota_h - \eta \iota_h i = \epsilon - \eta i$ halblinear fortgesetzt. Der Vektor $\epsilon - \eta i$ heißt der zum Vektor $\epsilon + \eta i$ konjugiert komplexe Vektor. Ersetzt man jeden Vektor durch den konjugiert komplexen Vektor, so bedeutet dies die Anwendung jener halblinearen Bijektion von $\mathcal{W}$, welche die Identität von $\mathcal{W}$ fortsetzt. Wegen $\epsilon - (-\eta)i = \epsilon + \eta i$ gilt $\iota_h^2 = \text{id}_{\mathcal{W}}$, d.h. ι_h ist involutorisch.

(b) Die Menge aller halblinearen Bijektionen von $\Gamma L(\tilde{\mathcal{W}})$, die Vektoren aus $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ in Vektoren aus $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ überführen, ist eine Untergruppe $\Gamma_R L(\tilde{\mathcal{W}})$ von $\Gamma L(\tilde{\mathcal{W}})$. Eine Bijektion $g \in \Gamma L(\tilde{\mathcal{W}})$ liegt genau dann in $\Gamma_R L(\tilde{\mathcal{W}})$, wenn g lineare oder halblineare komplexe Fortsetzung einer linearen Bijektion $f \in GL(\mathcal{W})$ ist. Dies folgt unmittelbar aus (2).

(c) Die halblineare Bijektion $\iota_h \in \Gamma_R L(\tilde{\mathcal{W}})$ kommutiert mit allen Bijektionen von $\Gamma_R L(\tilde{\mathcal{W}})$.

Bew.: $g \in \Gamma_R L(\tilde{\mathcal{W}}) \stackrel{(a)}{\Rightarrow} \exists f \in GL(\mathcal{W}) \text{ mit } \tilde{f} = g \vee f_h = g.$

Fall 1: $g = \tilde{f}: \forall \tilde{x} = \epsilon + \eta i \in \tilde{\mathcal{W}} \wedge \epsilon, \eta \in \mathcal{W}$ gilt dann wegen $\iota_h|_{\mathcal{W}} = \text{id}_{\mathcal{W}}$:

$$(\tilde{\epsilon} f)\iota_h = [(\epsilon + \eta i)f]\iota_h \stackrel{(a)}{=} [\epsilon f + \eta fi]\iota_h = \epsilon f - \eta fi,$$

$$(\tilde{\epsilon} \iota_h)f = [(\epsilon + \eta i)\iota_h]f \stackrel{(b)}{=} [\epsilon - \eta i]f = \epsilon f - \eta fi.$$

Fall 2: $g = f_h$:

$$(\tilde{\epsilon} f_h)\iota_h \stackrel{(a)}{=} [\epsilon f - \eta fi]\iota_h \stackrel{(b)}{=} \epsilon f - (-\eta f) = \epsilon f + \eta fi.$$

$$(\tilde{\epsilon} \iota_h)f_h = [\epsilon - \eta i]f_h \stackrel{(b)}{=} \epsilon f - (-\eta f) = \epsilon f + \eta fi.$$

2) Ist $\alpha \in PGL(\Pi(\mathcal{W}(\mathbb{R})))$ eine Kollineation von $\Pi(\mathcal{W}(\mathbb{R}))$, so existieren genau eine projektive und genau eine nicht projektive Kollineation in $P\Gamma L(\Pi(\tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C})))$, deren Beschränkungen auf $\Pi(\mathcal{W}(\mathbb{R}))$ mit α übereinstimmen.

Bew.: (a) Existenz: $\alpha \in \text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{W})) \Rightarrow \exists f \in \text{GL}(\mathcal{W})$ mit $\alpha = \alpha_f$. Die projektive Kollineation α_f und die nicht projektive Kollineation α_{f_h} von $\text{P}\Gamma\text{L}(\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{W}}))$ leisten das Gewünschte: Zu $\tilde{c} \in \mathbb{T}(\tilde{\mathcal{W}})$ $\exists z \in \mathcal{W}$ mit $z\tilde{c} = \tilde{c}C$ und $(\tilde{c}C)\alpha_f = (zC)\alpha_f = [(z + \alpha i)\tilde{f}]C \stackrel{\text{def}}{=} (zf)C = (zf)R = (zR)\alpha_f$.

Analog für α_{f_h} .

(b) Eindeutigkeit: (i) Sei $\alpha_g \in \text{PGL}(\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{W}}))$ eine α_f fortsetzende projektive Kollineation, also $\alpha_g|_{\mathbb{T}(\mathcal{W})} = \alpha_f|_{\mathbb{T}(\mathcal{W})}$. Eine Fundamentalfigur in $\mathbb{T}(\mathcal{W})$ ist auch Fundamentalfigur in $\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{W}})$ und die projektiven Kollineationen α_g und α_f leisten für die Punkte der Fundamentalfigur dasselbe; wegen der scharfen Transitivität von $\text{PGL}(\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{W}}))$ auf der Menge der Fundamentalfiguren folgt $\alpha_g = \alpha_f$.

(ii) Sei $\alpha_g \in \text{P}\Gamma\text{L}(\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{W}}))$ eine α_f fortsetzende nicht projektive Kollineation ($\Rightarrow \tilde{g} \neq \iota_C$), also $\alpha_g|_{\mathbb{T}(\mathcal{W})} = \alpha_f|_{\mathbb{T}(\mathcal{W})}$. Für die Punkte einer Fundamentalfigur in $\mathbb{T}(\mathcal{W})$, die auch eine Fundamentalfigur $\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{W}})$ ist, leisten α_h und α_g dasselbe und $\alpha_h \alpha_g^{-1}$ läßt nicht nur die Fundamentalfigur sondern auch die reellen Punkte auf jeder Verbindungsgeraden von zwei Punkten der Fundamentalfigur einzeln fest. Nach 5.2, Folg. 4 ist daher $\alpha_h \alpha_g^{-1}|_{\mathbb{T}(\mathcal{W})} = \iota_{\mathbb{T}(\mathcal{W})}$. Zu $\alpha_h \alpha_g^{-1}$ gehört wegen der Kommutativität von C ein eindeutig bestimmter Körperautomorphismus (vgl. 5.2, Folg. 4), nämlich $\tilde{f}\tilde{g}^{-1}$ mit $\tilde{f}\tilde{g}^{-1}|_{R} = \iota_R$; nach (1) folgt $\tilde{f}\tilde{g}^{-1} = \iota_C$ oder $\tilde{f}\tilde{g}^{-1} = \tilde{f}$. Da der zweite Fall wegen $\tilde{f}^2 = \iota_C$ im Widerspruch zur Voraussetzung auf $\tilde{g} \neq \iota_C$ führt, gilt $\tilde{f}\tilde{g}^{-1} = \iota_C$, sodaß $\alpha_h \alpha_g^{-1}$ eine projektive Kollineation in $\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{W}}(C))$ ist, die eine Fundamentalfigur punktweise festläßt $\Rightarrow \alpha_g = \alpha_h$. ◆

Anwendungen:

(a) Eine Kollineation $\alpha \in \text{P}\Gamma\text{L}(\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{W}}(C)))$ gehört genau dann der Untergruppe $\text{P}\Gamma_R\text{L}(\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{W}}(C)))$ an, wenn sie lineare oder halblinare komplexe Fortsetzung einer (projektiven) Kollineation aus $\text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{W}(R)))$ ist, d.h. $\exists \alpha_f \in \text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{W}(R)))$ mit $\alpha = \alpha_f$ oder $\alpha = \alpha_{f_h}$.

Bew.: $\alpha \in \text{P}\Gamma_R\text{L}(\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{W}})) \Rightarrow \alpha|_{\mathbb{T}(\mathcal{W})} \in \text{PGL}(\mathbb{T}(\mathcal{W})) \Rightarrow \exists f \in \text{GL}(\mathcal{W})$ mit $\alpha|_{\mathbb{T}(\mathcal{W})} = \alpha_f \stackrel{\text{Fol. 2}}{\Rightarrow} \alpha = \alpha_f \vee \alpha = \alpha_{f_h}$. Die Umkehrung ist trivial. ◆

(b) Speziell die identische Kollineation $\iota_{\mathbb{P}(\mathcal{W})} = \mathfrak{x}_1$ besitzt als einzige projektive Fortsetzung die Identität $\iota_{\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}})} = \mathfrak{x}_1$ und als einzige nicht projektive Fortsetzung die Kollineation $\mathfrak{x}_{1_n}$; da ι_{1_n} nach Folg.1, Bem.a involutorisch ist, gilt dies auch für $\mathfrak{x}_{1_n}$. Von besonderem Interesse sind zwei Eigenschaften der involutorischen nicht projektiven Kollineation $\mathfrak{x}_{1_n}$:

(i) Genau die reellen Punkte sind $\mathfrak{x}_{1_n}$ -fix.

(ii) $\mathfrak{x}_{1_n}$ kommutiert mit allen Kollineationen $\mathfrak{x} \in \text{P}\Gamma_{\mathbb{R}}\text{L}(\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}}))$.

Bew.: (i) Wegen $\mathfrak{x}_{1_n} | \mathbb{P}(\mathcal{W}) = \iota_{\mathbb{P}(\mathcal{W})}$ bleibt jeder reelle Punkt fix.

Andererseits gilt:

$$\tilde{\mathfrak{C}} \in (\mathfrak{x} + \eta i) \mathfrak{C} \notin \mathbb{P}(\mathcal{W}) \Leftrightarrow \{\mathfrak{x}, \eta\} \text{ l.u. in } \mathcal{W} \Leftrightarrow \{\mathfrak{x}, -\eta\} \text{ l.u. in } \mathcal{W} \Leftrightarrow$$

$$(\tilde{\mathfrak{C}}) \mathfrak{x}_{1_n} = [(\mathfrak{x} + \eta i) \iota_{1_n}] \mathfrak{C} = (\mathfrak{x} - \eta i) \mathfrak{C} \notin \mathbb{P}(\mathcal{W}).$$

(ii) Aus $\mathfrak{x} \in \text{P}\Gamma_{\mathbb{R}}\text{L}(\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}}))$ folgt nach Folg.2

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 \vee \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_{f_h} \text{ mit } f \in \text{GL}(\mathcal{W}) \xrightarrow{F, A, B, C} \tilde{f}, f_h | \in \Gamma_{\mathbb{R}}\text{L}(\tilde{\mathcal{W}}) \xrightarrow{F, A, B, C} \tilde{f} \iota_{1_n} = \iota_{1_n} \tilde{f}, f_h \iota_{1_n} = \iota_{1_n} f_h \Rightarrow$$

$$\mathfrak{x}_{\tilde{f}_h} = \mathfrak{x}_{1_n} \tilde{f}, \mathfrak{x}_{\iota_{1_n} f_h} = \mathfrak{x}_{\iota_{1_n} f_h} \xrightarrow{S, Z, F, A} \mathfrak{x} \mathfrak{x}_{1_n} = \mathfrak{x}_{1_n} \mathfrak{x}.$$

3) DEF.7.3b: Zwei Unterräume $\tilde{\mathbb{T}}_1$ und $\tilde{\mathbb{T}}_2$ von $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C}))$ heißen

konjugiert komplex, wenn sie in der nicht projektiven

Kollineation $\mathfrak{x}_{1_n}$ zugeordnet sind, und speziell konjugiert

imaginär für $\tilde{\mathbb{T}}_1 \neq \tilde{\mathbb{T}}_2$.

Bemerkungen: (a) Wegen $\mathfrak{x}_{1_n}^2 = \iota_{\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}})}$ folgt aus $\tilde{\mathbb{T}}_1 \mathfrak{x}_{1_n} = \tilde{\mathbb{T}}_1$, dann $\tilde{\mathbb{T}}_1 \mathfrak{x}_{1_n} = \tilde{\mathbb{T}}_2$, sodaß " $\mathfrak{x}_{1_n}$ -zugeordnet" eine symmetrische Relation im Verband $\mathfrak{u} \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}})$ der Unterräume von $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}})$ ist. Konjugiert komplexe Unterräume von $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}})$ haben dieselbe Dimension.

(b) Die $\mathfrak{x}_{1_n}$ -Zuordnung in $\mathfrak{u} \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}})$ ist invariant gegen alle Kollineationen $\mathfrak{x} \in \text{P}\Gamma_{\mathbb{R}}\text{L}(\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}}))$, denn mit $\tilde{\mathbb{T}}_2 = \tilde{\mathbb{T}}_1 \mathfrak{x}_{1_n}$ gilt $(\tilde{\mathbb{T}}_1 \mathfrak{x}) \mathfrak{x}_{1_n} = \tilde{\mathbb{T}}_2 \mathfrak{x}_{1_n} = \tilde{\mathbb{T}}_2$, sodaß auch $\tilde{\mathbb{T}}_1 \mathfrak{x}$ und $\tilde{\mathbb{T}}_2 \mathfrak{x}$ in $\mathfrak{x}_{1_n}$ zugeordnet sind. Speziell ist daher die Eigenschaft, Fixunterraum von $\mathfrak{x}_{1_n}$ zu sein, $(\Leftrightarrow \tilde{\mathbb{T}}_1 \mathfrak{x}_{1_n} = \tilde{\mathbb{T}}_1) \text{P}\Gamma_{\mathbb{R}}\text{L}(\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}}))$ - invariant.

(c) Der Schnittraum und der Verbindungsraum zweier konjugiert komplexer Unterräume von $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C}))$ ist ein $\mathfrak{x}_{1_n}$ -Fixunterraum wegen $[\tilde{\mathbb{T}}_1 \circ \tilde{\mathbb{T}}_2] \mathfrak{x}_{1_n} = \tilde{\mathbb{T}}_1 \mathfrak{x}_{1_n} \circ \tilde{\mathbb{T}}_2 \mathfrak{x}_{1_n} = \tilde{\mathbb{T}}_1 \mathfrak{x}_{1_n} \circ \tilde{\mathbb{T}}_1$ (dabei bedeutet $\circ$ entweder $\cap$ oder $\vee$).

(d) Ist $\tilde{\mathbb{T}}_1$ speziell ein Punkt, so ist er genau dann $\mathfrak{x}_{1_n}$ -Fixpunkt, wenn er im Sinne von Def.7.3a reell ist. Aus diesem Grunde werden die $\mathfrak{x}_{1_n}$ -Fixräume gelegentlich reelle Unterräume von $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}})$ genannt. Diese von uns nicht benutzte Bezeichnung ist irreführend, da für dim $\tilde{\mathbb{T}}_1 \geq 1$ die Menge der reellen Punkte von $\tilde{\mathbb{T}}_1 = \tilde{\mathbb{T}}_1 \mathfrak{x}_{1_n}$ nur aus den $\mathfrak{x}_{1_n}$ -Fixpunkten in $\tilde{\mathbb{T}}_1$ besteht und daher nicht mit der Punktmenge von $\tilde{\mathbb{T}}_1$ übereinstimmt.

4) Jeder k -dimensionale Unterraum $\Pi_1 \subset \Pi(\mathcal{W}(R))$ ist nach 5.1 von der Form $\Pi_1 = \Pi(H(\alpha_0, \dots, \alpha_k))$ mit $\{\alpha_0, \dots, \alpha_k\}$ l.u. in $\mathcal{W}(R)$. Zum Unterraum $\tilde{H}(\alpha_0, \dots, \alpha_k) \subset \tilde{H}(C)$ gehört ein k -dimensionaler Unterraum $\Pi(\tilde{H}(\alpha_0, \dots, \alpha_k)) =: \tilde{\Pi}_1 \subset \Pi(\tilde{H}(C))$. Nach Anwendung der Identifizierung $\gamma: \Pi(\mathcal{W}) \rightarrow \Pi(\tilde{H})$ gilt $\Pi_1 \subset \tilde{\Pi}_1$, jedoch ist Π_1 kein Unterraum von $\Pi(\tilde{H})$. Wir nennen $\tilde{\Pi}_1$ die "komplexe Fortsetzung von Π_1 ". Dann gilt:

Ein Unterraum $\tilde{\Pi}_1$ von $\Pi(\tilde{H}(C))$ ist genau dann komplexe Fortsetzung eines Unterraumes Π_1 von $\Pi(\mathcal{W}(R))$, wenn $\tilde{\Pi}_1$ ein $\mathfrak{x}_{i_n}$ -Fixunterraum ist.

Bew.: (a) $\tilde{\Pi}_1 = \Pi(\tilde{H}(\alpha_0, \dots, \alpha_k))$ mit $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathcal{W}(R)$.

$\forall X = \tilde{c}C \in \tilde{\Pi}_1$ gilt $\tilde{c} = \alpha_0 \lambda_0 + \dots + \alpha_k \lambda_k$ mit $\lambda_j = \mu_j + \nu_j i \in C \wedge \mu_j, \nu_j \in R \Rightarrow X \mathfrak{x}_{i_n} = (\tilde{c}C) \mathfrak{x}_{i_n} = [((\alpha_0 \mu_0 + \dots + \alpha_k \mu_k) + (\alpha_0 \nu_0 + \dots + \alpha_k \nu_k) i) i] i_n C = [(\alpha_0 \mu_0 + \dots + \alpha_k \mu_k) - (\alpha_0 \nu_0 + \dots + \alpha_k \nu_k) i] C = (\alpha_0 \bar{\lambda}_0 + \dots + \alpha_k \bar{\lambda}_k) C \Rightarrow X \mathfrak{x}_{i_n} \in \Pi(\tilde{H}(\alpha_0, \dots, \alpha_k)) = \tilde{\Pi}_1$ und das ergibt $\tilde{\Pi}_1 \mathfrak{x}_{i_n} \subset \tilde{\Pi}_1$. Da die Kolli-neation $\mathfrak{x}_{i_n}$ dimensionstreu ist, folgt $\tilde{\Pi}_1 \mathfrak{x}_{i_n} = \tilde{\Pi}_1$.

(b) Ist $\tilde{\Pi}_1 \mathfrak{x}_{i_n} = \tilde{\Pi}_1$, so gilt $\tilde{\Pi}_1 = \tilde{\Pi}_1 \vee \tilde{\Pi}_1 \mathfrak{x}_{i_n}$. Als Unterraum von $\Pi(\tilde{H})$ besitzt $\tilde{\Pi}_1$ die Bauart $\tilde{\Pi}_1 = \Pi(\tilde{H}(\beta_0, \dots, \beta_k))$ mit $\beta_j = \epsilon_j + \eta_j i \wedge \epsilon_j, \eta_j \in \mathcal{W}(R)$.

$\tilde{\Pi}_1 \mathfrak{x}_{i_n} = (\beta_0 C \vee \dots \vee \beta_k C) \mathfrak{x}_{i_n} = (\beta_0 C) \mathfrak{x}_{i_n} \vee \dots \vee (\beta_k C) \mathfrak{x}_{i_n} = (\beta_0 i_n) C \vee \dots \vee (\beta_k i_n) C = \beta_0 C \vee \dots \vee \beta_k C = \Pi(\tilde{H}(\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_k))$.

Damit gilt $\tilde{\Pi}_1 = \tilde{\Pi}_1 \vee \tilde{\Pi}_1 \mathfrak{x}_{i_n} = \Pi(\tilde{H}(\beta_0, \bar{\beta}_0, \dots, \beta_k, \bar{\beta}_k))$. Falls $\tilde{H}(\beta_0, \bar{\beta}_0, \dots, \beta_k, \bar{\beta}_k) = \tilde{H}(\epsilon_0, \eta_0, \dots, \epsilon_k, \eta_k)$ gezeigt werden kann, ist $\tilde{\Pi}_1$ die komplexe Fortsetzung des Unterraumes $\Pi_1 := \Pi(H(\epsilon_0, \eta_0, \dots, \epsilon_k, \eta_k)) \subset \Pi(\mathcal{W})$.

Sei nun $\tilde{c} \in \tilde{H}(\beta_0, \bar{\beta}_0, \dots, \beta_k, \bar{\beta}_k) \Rightarrow \tilde{c} = (\epsilon_0 + \eta_0 i) z_0 + (\epsilon_0 - \eta_0 i) z_0' + \dots + (\epsilon_k + \eta_k i) z_k + (\epsilon_k - \eta_k i) z_k'$ mit $z_j, z_j' \in C \Rightarrow \tilde{c} = \epsilon(z_0 + z_0') + \eta_0(i z_0 - z_0') + \dots + \epsilon_k(z_k + z_k') + \eta_k(i z_k - z_k') \Rightarrow \tilde{c} \in \tilde{H}(\epsilon_0, \eta_0, \dots, \epsilon_k, \eta_k)$.

Sei nun $\tilde{c} \in \tilde{H}(\epsilon_0, \eta_0, \dots, \epsilon_k, \eta_k) \Rightarrow \tilde{c} = \epsilon_0 w_0 + \eta_0 w_0' + \dots + \epsilon_k w_k + \eta_k w_k'$ mit $w_j, w_j' \in C$. Wegen $\epsilon_j = \frac{1}{2}(z_j + \bar{z}_j)$, $\eta_j = \frac{1}{2i}(z_j - \bar{z}_j) \Rightarrow \tilde{c} \in \tilde{H}(\beta_0, \bar{\beta}_0, \dots, \beta_k, \bar{\beta}_k)$.

Bemerkung: Die Menge der reellen Punkte eines $\mathfrak{x}_{i_n}$ -Fixunterraumes $\tilde{\Pi}_1$ von $\Pi(\tilde{H})$ der Dimension k über C bildet einen Unterraum von $\Pi(\mathcal{W})$ der Dimension k über R .

Bew.: Die Teilmenge $\Pi_1 := \Pi(H(\epsilon_0, \eta_0, \dots, \epsilon_k, \eta_k)) \subset \tilde{\Pi}_1 = \Pi(\tilde{H}(\epsilon_0, \eta_0, \dots, \epsilon_k, \eta_k))$ ist nach der Identifizierung γ ein Unterraum von $\Pi(\mathcal{W})$, und jeder Punkt von Π_1 ist ein reeller Punkt von $\tilde{\Pi}_1$. Ist umgekehrt $\tilde{c}C = X$ ein reeller Punkt von $\tilde{\Pi}_1$, so gilt $X \in \Pi_1$ wegen: $\tilde{c}C$ reell $\Rightarrow \exists c \in \mathcal{W}$ mit $\tilde{c}C = cC$; $cC \in \tilde{\Pi}_1 \Rightarrow c = \epsilon_0 w_0 + \eta_0 w_0' + \dots + \epsilon_k w_k + \eta_k w_k'$ mit $w_j, w_j' \in C \Rightarrow c i_n = c = \epsilon_0 \bar{w}_0 + \eta_0 \bar{w}_0' + \dots + \epsilon_k \bar{w}_k + \eta_k \bar{w}_k'$.

Durch Addition der beiden Darstellungen von ϵ erhält man

$$\epsilon = \frac{1}{2} [\epsilon_0(w_0 + \bar{w}_0) + \epsilon_1(w_1 + \bar{w}_1) + \dots + \epsilon_n(w_n + \bar{w}_n) + \epsilon_0(w_1 + \bar{w}_1) + \dots + \epsilon_n(w_0 + \bar{w}_0)].$$

Wegen $w_j + \bar{w}_j \in \mathbb{R} \Rightarrow \epsilon \in H(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \Rightarrow \epsilon \in \mathbb{R} \in \mathbb{T}_1$.

Damit ist $\tilde{\mathbb{T}}_1 \cap \mathbb{T}(\mathcal{H}) = \mathbb{T}_1$.

$H(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ über $\mathbb{R}$ und $\tilde{H}(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ über $\mathbb{C}$ haben nach der Zwischenbemerkung dieselben Dimensionen und daher auch $\tilde{\mathbb{T}}_1$ und $\mathbb{T}_1$.

Anwendungen:

(a) Ist speziell $\tilde{\mathbb{T}}_1$ ein nicht reeller Punkt, so gilt: Der Verbindungsraum zweier $\mathfrak{x}_{l_n}$ -zugeordneter nicht reeller Punkte ist eine $\mathfrak{x}_{l_n}$ -Fixgerade $\tilde{g}$, und die Menge aller reellen Punkte in $\tilde{g}$ bildet eine Gerade g in $\mathbb{T}(\mathcal{H})$.

(b) Für eine Gerade $\tilde{g} = \tilde{\mathbb{T}}_1$ von $\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}})$ kann gelten:

Fall 1: $\tilde{\mathbb{T}}_1 \mathfrak{x}_{l_n} = \tilde{\mathbb{T}}_1$ (vgl. a)

Fall 2: $\tilde{\mathbb{T}}_1 \mathfrak{x}_{l_n} \cap \tilde{\mathbb{T}}_1 = \{\tilde{S}\} \stackrel{\text{f. d. B.}}{\Rightarrow} \tilde{S} \mathfrak{x}_{l_n} = S$, d.h. S ist reell: Schneidet eine Gerade in $\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}})$ die von ihr verschiedene konjugiert komplexe Gerade, so ist der Schnittpunkt reell. Geraden dieser Art in $\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}})$ heißen auch "niederimaginär".

In diesem Fall ist $\tilde{\mathbb{T}}_1 \mathfrak{x}_{l_n} \vee \tilde{\mathbb{T}}_1$ eine $\mathfrak{x}_{l_n}$ -fixe Ebene $\tilde{\sigma}$, d.h. eine niederimaginäre Gerade spannt mit der konjugiert imaginären Geraden eine Ebene von $\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}})$ auf, in der die Menge aller reellen Punkte eine Ebene σ von $\mathbb{T}(\mathcal{H})$ bildet.

Fall 3: $\tilde{\mathbb{T}}_1 \mathfrak{x}_{l_n} \cap \tilde{\mathbb{T}}_1 = \emptyset$ (nur für $\dim \mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}}) \geq 3$ möglich);

dann liegt auf keiner der beiden Geraden ein $\mathfrak{x}_{l_n}$ -fixer, d.h. reeller Punkt. Eine Gerade in $\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}})$, die zu ihrer konjugiert imaginären Geraden windschief ist, heißt "hochimaginär".

Wird die Gerade $\tilde{\mathbb{T}}_1$ durch die beiden verschiedenen Punkte $\tilde{z}.C = (\epsilon_0 + \epsilon_1 i).C$ und $\tilde{z}.C = (\epsilon_1 + \epsilon_0 i).C$ aufgespannt, so wird $\tilde{\mathbb{T}}_1 \mathfrak{x}_{l_n}$ durch $(\epsilon_0 - \epsilon_1 i).C$ und $(\epsilon_1 - \epsilon_0 i).C$ aufgespannt und daher gilt:

$$R_{\tilde{g}} \begin{pmatrix} \epsilon_0 + \epsilon_1 i \\ \epsilon_1 + \epsilon_0 i \\ \epsilon_0 - \epsilon_1 i \\ \epsilon_1 - \epsilon_0 i \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \Leftrightarrow \tilde{\mathbb{T}}_1 \mathfrak{x}_{l_n} = \tilde{\mathbb{T}}_1 \\ 3 \Leftrightarrow \tilde{\mathbb{T}}_1 \text{ ist niederimaginär} \\ 4 \Leftrightarrow \tilde{\mathbb{T}}_1 \text{ ist hochimaginär.} \end{cases}$$

5) Ist $\alpha: \mathcal{P}_x \rightarrow \mathcal{P}_x$ eine Projektivität (insbesondere projektive Involution) einer Punktreihe in $\mathbb{T}(\mathcal{H})$ ($\dim \mathcal{H} \geq 3$), so existiert genau eine Projektivität (insbesondere projektive Involution)

$\tilde{\alpha}: \tilde{\mathcal{P}}_x \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_x$ der komplexen Fortsetzung $\tilde{\mathcal{P}}_x$ von $\mathcal{P}_x$ in $\mathbb{T}(\tilde{\mathcal{H}})$ so, daß für alle reellen Punkte $X \in \tilde{\mathcal{P}}_x$ gilt $X\alpha = X\tilde{\alpha}$.

Bew.: Nach 3.6, Folg.6 existiert eine projektive Kollineation $\alpha_f: \mathbb{P}(\mathcal{W}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{W})$ mit $\alpha_f|_{\mathcal{P}_x} = \alpha$. Für die projektive Kollineation $\alpha_{\tilde{f}}: \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}}) \rightarrow \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}})$ gilt $\alpha_{\tilde{f}}|_{\tilde{\mathcal{P}}_x} = \alpha_f|_{\mathcal{P}_x} = \alpha$ und daher ist $\alpha_{\tilde{f}}|_{\tilde{\mathcal{P}}_x} =: \tilde{\alpha}$ eine Projektivität, die das Gewünschte leistet; ist α involutorisch, so auch $\tilde{\alpha}$, denn in α und damit in $\tilde{\alpha}$ existiert ein vertauschbar zugeordnetes Punktepaar. Die komplexe Fortsetzung $\tilde{\alpha}$ ist eindeutig, denn durch Vorgabe zugeordneter reeller Punktetripel ist die Projektivität in $\tilde{\mathcal{P}}_x$ bereits eindeutig festgelegt. ◆

$\tilde{\alpha}$ ist stets eine hyperbolische oder parabolische Projektivität. Ist α eine elliptische Projektivität, so sind die Fixpunkte von $\tilde{\alpha}$ konjugiert imaginäre Punkte (d.h. $\alpha_{\mathcal{L}_x}$ -zugeordnet; nicht $\alpha_{\mathcal{L}_x}$ -fix).

Bew.: $F\tilde{\alpha} = F \Rightarrow (F\alpha_{\mathcal{L}_x})\tilde{\alpha} = F\alpha_{\mathcal{L}_x}\alpha_{\tilde{f}} = F\alpha_{\tilde{f}}\alpha_{\mathcal{L}_x} = (F\tilde{\alpha})\alpha_{\mathcal{L}_x} = F\alpha_{\mathcal{L}_x}$, d.h. F ist ein Fixpunkt von $\tilde{\alpha}$; ebenso auch $F\alpha_{\mathcal{L}_x}$. Der Fixpunkt F ist nicht $\alpha_{\mathcal{L}_x}$ -fix, da sonst F ein reeller Fixpunkt von α wäre. Andererseits sind F und $F\alpha_{\mathcal{L}_x}$ wegen des Fundamentalsatzes die einzigen Fixpunkte von $\tilde{\alpha}$. Nach Folg.4, Anw.2 ist die Verbindungsgerade zweier konjugiert imaginärer Punkte $\tilde{F}, \tilde{F}\alpha_{\mathcal{L}_x}$ die komplexe Fortsetzung einer Geraden $\alpha R + bR$ in $\mathbb{P}(\mathcal{W}(R))$ und es gilt $\tilde{F} = (\alpha + bz)C$, $\tilde{F}\alpha_{\mathcal{L}_x} = (\alpha + b\bar{z})C$ mit $z = x + yi$. Die Abbildung $\alpha: (\alpha x' + b x'') \mapsto (\alpha x' + b x'')$, welche durch die symmetrische reelle nicht ausgeartete Bilinearform $z\bar{z}x''x' - \frac{1}{2}(z + \bar{z})(x''x' + x'x'') + x'x''$ beschrieben wird, ist eine in $\mathbb{P}(\mathcal{W}(R))$ elliptische Involution, deren komplexe Fortsetzung die Fixpunkte $\tilde{F}$ und $\tilde{F}\alpha_{\mathcal{L}_x}$ besitzt. ◆

Bemerkungen: (a) Umgekehrt kann jedes Paar konjugiert imaginärer Punkte als Fixpunktepaar genau einer projektiven Involution $\tilde{\alpha}: \tilde{\mathcal{P}}_x \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_x$ erhalten werden, welche komplexe Fortsetzung einer elliptischen projektiven Involution $\alpha: \mathcal{P}_x \rightarrow \mathcal{P}_x$ ist. Diese Tatsache hat STAUDT benutzt, um einen reellen projektiven Raum, der nicht notwendig projektiver Raum über einem Vektorraum ist, um die Paare konjugiert imaginärer Punkte zu erweitern.

(b) Versteht man unter dem charakteristischen Doppelverhältnis einer in $\mathbb{P}(\mathcal{W}(R))$ elliptischen Projektivität $\alpha: \mathcal{P}_x \rightarrow \mathcal{P}_x$ das charakteristische Doppelverhältnis der komplexen Fortsetzung $\tilde{\alpha}$ von α , also $DV(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{X}, \tilde{X}\tilde{\alpha}) = z \in \mathbb{C}$ mit $\tilde{F}_j\tilde{\alpha} = \tilde{F}_j$, so gilt $|z| = 1$.

Bew.: Die Fixpunkte $\tilde{F}_1$ und $\tilde{F}_2$ von $\tilde{\alpha}$ sind konjugiert imaginäre Punkte $\tilde{F}_1 = (\pi_0 + \pi_1 i)C$, $\tilde{F}_2 = (\pi_0 - \pi_1 i)C$. Der reelle Punkt $X = \pi_0 C$ wird durch $\tilde{\alpha}$ auf den reellen Punkt $X\tilde{\alpha} = (\pi_0 x + \pi_1)C$ mit $x \in R$ abgebildet, daher gilt

$$z = DV(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{X}, \tilde{X}\tilde{\alpha}) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -i & 0 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ -i & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ i & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{1+xi}{1-xi} \Rightarrow |z|^2 = z\bar{z} =$$

$$= \frac{1+xi}{xi-1} \cdot \frac{1-xi}{-xi-1} = 1$$

(c) Die einzigen Zahlen $z \in C$ mit $|z|=1$ und $z \in R$ sind $+1$ und -1 , wobei $+1$ wegen $X=X\tilde{\alpha}$ nicht möglich ist. Für $z=-1$ ist $\tilde{\alpha}$ eine hyperbolische projektive Involution und damit α eine (elliptische) projektive Involution. Die α_{λ_1} -zugeordneten Fixpunkte der komplexen Fortsetzung $\tilde{\alpha}$ einer elliptischen projektiven Involution α liegen harmonisch zu jedem zugeordneten Punktepaar.

(d) Entfernt man aus $\mathbb{P}(\tilde{W})$ speziell eine α_{λ_1} -fixe Hyperebene $\tilde{W}_{\lambda_1}$, so bilden die reellen Punkte von $\tilde{W}_{\lambda_1}$ eine Hyperebene $\tilde{W}_{\lambda_1}$ von $\mathbb{P}(\tilde{W})$. Dem reellen Fernpunkt U von $\mathcal{P}_{\lambda_1}$ im reellen affinen Raum $\mathbb{P}(\tilde{W}) \setminus \tilde{W}_{\lambda_1}$ entspricht in der elliptischen Involution α der Zentralpunkt $M=U\alpha \in \mathcal{P}_{\lambda_1}$. In der komplexen Fortsetzung $\mathbb{P}(\tilde{W}) \setminus \tilde{W}_{\lambda_1}$ gilt daher: M ist Mittelpunkt der aus den konjugiert imaginären Fixpunkten gebildeten Strecke. Da umgekehrt je zwei konjugiert imaginäre Punkte als Fixpunkte einer solchen projektiven Involution $\tilde{\alpha}$ erhalten werden können, folgt: Der Mittelpunkt der von zwei konjugiert imaginären eigentlichen Punkten gebildeten Strecke ist stets reell. Die projektive Fassung der letzten Aussage lautet: Der vierte harmonische Punkt zu einem reellen Punkt bezüglich zweier konjugiert imaginärer Punkte ist ein reeller Punkt.

Zwischenbemerkung:

Ist $\beta: \mathcal{W}(R) \times \mathcal{W}(R) \rightarrow R$ eine von der Nullform verschiedene symmetrische Bilinearform, so existiert genau eine symmetrische Bilinearform $\tilde{\beta}: \tilde{\mathcal{W}}(C) \times \tilde{\mathcal{W}}(C) \rightarrow C$ mit $(\epsilon, \eta)\tilde{\beta} = (\epsilon, \eta)\beta \quad \forall \epsilon, \eta \in \mathcal{W}(R)$ und es existiert genau eine hermitesche Sesquilinearform $\beta_h: \tilde{\mathcal{W}}(C) \times \tilde{\mathcal{W}}(C) \rightarrow C$ mit $(\epsilon, \eta)\beta_h = (\epsilon, \eta)\beta \quad \forall \epsilon, \eta \in \mathcal{W}(R)$; dabei ist β_h antihalbilinear im ersten Argument zu $a_{\tilde{f}_h}^{\epsilon} = \bar{f}$ (da C kommutativ ist, kann jeder Körperautomorphismus auch als Körperantiautomorphismus aufgefaßt werden und umgekehrt). Mit β sind $\tilde{\beta}$ und β_h nicht ausgeartet. $\tilde{\beta}$ heißt die "komplexe Fortsetzung von β " und β_h heißt die "hermitesche Fortsetzung von β ".

Bew.: Leistet eine Sesquilinearform $\sigma: \tilde{\mathcal{W}}(C) \times \tilde{\mathcal{W}}(C) \rightarrow C$ zum Körperantiautomorphismus $a_{\tilde{f}}^{\epsilon}: C \rightarrow C$ für alle reellen Vektorpaare dasselbe wie $\beta: \mathcal{W}(R) \times \mathcal{W}(R) \rightarrow R$, so gilt $\forall \epsilon, \eta \in \mathcal{W}(R) \wedge \forall x \in R$
 $(\epsilon x, \eta)\sigma = (x^a \epsilon, \eta)\beta$
 $(\epsilon x, \eta)\sigma = (\epsilon x, \eta)\beta = x(\epsilon, \eta)\beta \Rightarrow x^a \epsilon = x$. Nach Folg. 1, (1) folgt $a_{\tilde{f}}^{\epsilon} = \epsilon$ v $a_{\tilde{f}}^{\epsilon} = \bar{f}$.
 Im ersten Fall folgt notwendig
 $(\epsilon_1 + \epsilon_2, \eta_1 + \eta_2)\sigma = (\epsilon_1, \eta_1)\beta + (\epsilon_2, \eta_2)\beta + [(\epsilon_1, \eta_2)\beta - (\epsilon_2, \eta_1)\beta]i$, und

das ist tatsächlich eine symmetrische Bilinearform $\tilde{\beta}$; im zweiten Fall ist notwendig $(\epsilon_1 + \epsilon_2 i, \eta_1 + \eta_2 i) \sigma = (\epsilon_1, \eta_1) \beta + (\epsilon_2, \eta_2) \beta + [(\epsilon_1, \eta_1) \beta - (\epsilon_2, \eta_2) \beta] i$ und dies ist tatsächlich eine hermitesche Sesquilinearform β_h . Ist β nicht ausgeartet und z.B. $\tilde{\beta}$ ausgeartet, so existiert $\eta = \eta_1 + \eta_2 i \neq 0$, also $(\eta, \eta) \neq 0$ mit $(\tilde{\epsilon}, \eta + \eta i) \tilde{\beta} = 0 \quad \forall \tilde{\epsilon} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Dies gilt insbesondere für alle $\tilde{\epsilon} =: \epsilon \in \mathcal{H}(\mathbb{R}) \Rightarrow (\epsilon, \eta) \beta = (\epsilon, \eta) \beta = 0 \quad \forall \epsilon \in \mathcal{H}(\mathbb{R}) \Rightarrow \eta, \eta = \sigma$: Widerspruch, da β nicht ausgeartet ist. $\blacklozenge$

6) Sei im folgenden $\dim \Pi(\mathcal{H}(\mathbb{R})) \geq 2$. Eine (projektive) Polarität $\lambda: \Pi(\mathcal{H}(\mathbb{R})) \rightarrow \Pi^*(\mathcal{H}(\mathbb{R}))$ ordnet jedem Punkt $X = \epsilon \mathbb{R}$ eine Hyper-ebene $X\lambda = \Pi(H(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}))$ zu. Eine Polarität $\Pi(\mathcal{H}) \rightarrow \Pi^*(\mathcal{H})$ soll komplexe Fortsetzung von λ heißen, wenn sie jedem Punkt $X = \epsilon \mathbb{C}$ mit $\epsilon \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ die komplexe Fortsetzung $\Pi(H(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}))$ der Hyperebene $X\lambda$ zuordnet. Es gilt:

Zu einer Polarität $\lambda: \Pi(\mathcal{H}) \rightarrow \Pi^*(\mathcal{H})$ existiert genau eine projektive Polarität $\tilde{\lambda}: \Pi(\tilde{\mathcal{H}}) \rightarrow \Pi^*(\tilde{\mathcal{H}})$, welche λ fortsetzt.

Bew.: (a) Konjugierte Lage bezüglich λ wird durch die nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform σ beschrieben. Die komplexe Fortsetzung $\tilde{\sigma}$ von σ beschreibt dann eine projektive Polarität $\tilde{\lambda}$, die das Gewünschte leistet:

$$X = \epsilon \mathbb{R} \xrightarrow{\lambda} X\lambda = \{Y = \eta \mathbb{R} \mid (\epsilon, \eta) \sigma = 0 \wedge \eta \neq 0\} = \Pi(H(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}))$$

$$X = \epsilon \mathbb{C} \xrightarrow{\tilde{\lambda}} X\tilde{\lambda} = \{Z = \tilde{\eta} \mathbb{C} \mid (\epsilon, \tilde{\eta}) \tilde{\sigma} = 0 \wedge \tilde{\eta} \neq 0\};$$

es ist $X\tilde{\lambda} = \Pi(\tilde{H}(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}))$ zu zeigen:

$$Z = \tilde{\eta} \mathbb{C} = (\tilde{\eta}' + \tilde{\eta}'' i) \mathbb{C} \in X\tilde{\lambda} \Leftrightarrow 0 = (\epsilon, \tilde{\eta}' + \tilde{\eta}'' i) \tilde{\sigma} = (\epsilon, \tilde{\eta}') \tilde{\sigma} + (\epsilon, \tilde{\eta}'' i) \tilde{\sigma} \Leftrightarrow$$

$$(\epsilon, \tilde{\eta}') \tilde{\sigma} = 0 \wedge (\epsilon, \tilde{\eta}'' i) \tilde{\sigma} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\exists \lambda_j, \mu_j \in \mathbb{R} \text{ mit } \begin{aligned} \tilde{\eta}' &= \alpha_0 \lambda_0 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_{n-1} \\ \tilde{\eta}'' &= \alpha_0 \mu_0 + \dots + \alpha_{n-1} \mu_{n-1} \end{aligned} \Leftrightarrow \exists \lambda_j + \mu_j i \in \mathbb{C} \text{ mit}$$

$$\tilde{\eta} = \tilde{\eta}' + \tilde{\eta}'' i = \alpha_0 (\lambda_0 + \mu_0 i) + \dots + \alpha_{n-1} (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1} i) \Leftrightarrow \tilde{\eta} \in H(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \Leftrightarrow \tilde{\eta} \mathbb{C} \in \Pi(H(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})).$$

(b) Die durch $\tilde{\sigma}$ beschriebene projektive Polarität $\tilde{\lambda}$ ist die einzige projektive komplexe Fortsetzung von λ . Jede weitere projektive komplexe Fortsetzung λ' von λ leistet nämlich auf einer beliebigen Fundamentalfigur von reellen Punkten dasselbe, wie $\tilde{\lambda}$, sodaß $\lambda' \tilde{\lambda}^{-1}$ eine projektive Kollineation im PP-Raum $\Pi(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ ist, welche eine Fundamentalfigur festläßt $\Leftrightarrow \lambda' \tilde{\lambda}^{-1} = \iota_{\Pi(\tilde{\mathcal{H}})} \Leftrightarrow \lambda' = \tilde{\lambda}$.

Bemerkung: Es sei ohne Beweis erwähnt, daß zu λ auch genau eine nicht projektive Polarität λ_h existiert, welche komplexe Fortsetzung von λ ist; diese wird durch σ_h beschrieben.

Jede projektive Polarität $\tilde{\lambda}: \Pi(\tilde{\mathcal{H}}) \rightarrow \Pi^*(\tilde{\mathcal{H}})$, welche eine Polarität $\lambda: \Pi(\mathcal{H}) \rightarrow \Pi^*(\mathcal{H})$ fortsetzt, kommutiert mit α_{ϵ_h} , d.h. $\tilde{\lambda} \alpha_{\epsilon_h}^* = \alpha_{\epsilon_h} \tilde{\lambda}$.

Bew.: $\tilde{\lambda}$ wird durch $\tilde{\sigma}$ beschrieben und es gilt:

$$(\tilde{z} \in \tilde{\lambda}) \tilde{x}_{i_h}^* = \{ \tilde{\eta} \in (\eta' + \eta'' i) \in \tilde{\lambda} \mid (\tilde{z}, \tilde{\eta}) \tilde{\sigma} = 0 \} \tilde{x}_{i_h} = \{ (\eta' - \eta'' i) \in \tilde{\lambda} \mid (z' + z'' i, \eta' + \eta'' i) \tilde{\sigma} = 0 \} = \{ (\eta' - \eta'' i) \in \tilde{\lambda} \mid (z', \eta') \tilde{\sigma} - (z'', \eta'') \tilde{\sigma} = 0 \wedge (z'', \eta') \tilde{\sigma} + (z', \eta'') \tilde{\sigma} = 0 \}.$$

$$(\tilde{z} \in \tilde{\lambda}) \tilde{x}_{i_h} \tilde{\lambda} = [(z' - z'' i) \in \tilde{\lambda}] \tilde{\lambda} = \{ (\eta' + \eta'' i) \in \tilde{\lambda} \mid 0 = (z' - z'' i, \eta' + \eta'' i) \tilde{\sigma} \} = \{ (\eta' + \eta'' i) \in \tilde{\lambda} \mid (z', \eta') \tilde{\sigma} + (z'', \eta'') \tilde{\sigma} = 0 \wedge (z', \eta'') \tilde{\sigma} - (z'', \eta') \tilde{\sigma} = 0 \}.$$

Setzt man $\eta' = \eta'$, $\eta'' = -\eta''$, so erkennt man die Gleichheit der beiden Punktmengen. ◆

Anwendungen:

(a) Die projektive Polarität $\tilde{\lambda}$, welche die Polarität $\lambda : \mathbb{P}(\mathcal{W}(\mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{P}^*(\mathcal{W}(\mathbb{R}))$ fortsetzt, ist stets hyperbolisch, denn $\mathcal{C}$ ist quadratisch abgeschlossen. Zu $\tilde{\lambda}$ gehört eine Quadrik $\tilde{\Phi} \subset \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C}))$ und es gilt:

Ist X ein Punkt von $\tilde{\Phi}$, so gehört auch der konjugiert komplexe Punkt $X \tilde{x}_{i_h}$ zur Quadrik $\tilde{\Phi}$. Aus $X \in \tilde{\Phi}$ folgt nämlich $X \tilde{\lambda} X \tilde{\lambda} \rightarrow X \tilde{x}_{i_h} \tilde{\lambda} (X \tilde{\lambda}) \tilde{x}_{i_h}^* = (X \tilde{x}_{i_h}) \tilde{\lambda} \Rightarrow X \tilde{x}_{i_h} \in \tilde{\Phi}$. Ist ξ Tangentialebene von $\tilde{\Phi}$, so auch $\xi \tilde{x}_{i_h}^*$, wegen: $\xi \in \tilde{\Phi} \Rightarrow \xi \tilde{\lambda} \tilde{\lambda} \Rightarrow \xi \tilde{x}_{i_h} \tilde{\lambda} (\xi \tilde{\lambda}^*) \tilde{x}_{i_h} = (\xi \tilde{x}_{i_h}^*) \tilde{\lambda} \Rightarrow \xi \tilde{x}_{i_h}^* \in \tilde{\Phi}$.

Die Quadrik $\tilde{\Phi}$ bleibt somit unter $\tilde{x}_{i_h}$ als Ganzes fest. Ist $\tilde{\mathbb{T}}$, ein Unterraum auf $\tilde{\Phi}$, so liegt auch der konjugiert komplexe Unterraum auf $\tilde{\Phi}$. Die $\tilde{x}_{i_h}$ -festen Punkte auf $\tilde{\Phi}$ sind genau die reellen Punkte auf $\tilde{\Phi}$, also genau die selbstkonjugierten Punkte bezüglich $\tilde{\lambda}$. Ist $\tilde{\lambda}$ elliptisch, so gilt $\tilde{\Phi} \cap \mathbb{P}(\mathcal{W}) = \emptyset$; eine solche Quadrik $\tilde{\Phi}$ von $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ heißt "nullteilig".

Durch Entfernen einer $\tilde{x}_{i_h}$ -Fixhyperebene $\tilde{\mathbb{T}}_{\omega}$ werden $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}})$ und $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ zu affinen Räumen. Eine elliptische Polarität λ in $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ ist dann nach 7.1 die Antipolarität eines Ellipsoids ϕ^r , und $\tilde{\lambda}$ bestimmt eine nullteilige Quadrik $\tilde{\Phi}$ in $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}})$. Nach F. KLEIN heißt ϕ^r "ein reeller Vertreter von $\tilde{\Phi}$ "; diese Begriffsbildung hat nur in affinen Räumen einen Sinn.

DEF. 7.3c: Eine Quadrik in $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C}))$, welche durch die komplexe projektive Fortsetzung einer in $\mathbb{P}(\mathcal{W}(\mathbb{R}))$ elliptischen Polarität bestimmt ist, heißt nullteilige Quadrik in $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}})$. Jedes Ellipsoid in $\mathbb{P}(\mathcal{W}(\mathbb{R})) \setminus \mathbb{T}_{\omega}$, dessen Antipolarität die gegebene elliptische Polarität in $\mathbb{P}(\mathcal{W}(\mathbb{R}))$ ist, heißt ein reeller Vertreter der nullteiligen Quadrik.

(b) Die obigen Überlegungen lassen sich auch auf ausgeartete symmetrische Bilinearformen, also auf nicht reguläre quadratische

Varietäten Γ anwenden. Wird $\Gamma \subset \mathbb{P}(\mathcal{W}(R))$ durch σ beschrieben, so beschreibt $\tilde{\sigma}$ eine quadratische Varietät $\tilde{\Gamma} \subset \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}}(R))$, und mit $X \in \tilde{\Gamma}$ ist auch $X\alpha_{\mathbb{C}}$ ein Punkt der Varietät:

$$\begin{aligned} \tilde{z}C &= (\alpha + \eta i)C \in \tilde{\Gamma} \Rightarrow 0 = (\alpha + \eta i, \alpha + \eta i)\tilde{\sigma} = (\alpha, \alpha)\tilde{\sigma} - (\eta, \eta)\tilde{\sigma} + 2(\alpha, \eta)\tilde{\sigma} i \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\alpha, \alpha)\tilde{\sigma} - (\eta, \eta)\tilde{\sigma} = 0 \wedge (\alpha, \eta)\tilde{\sigma} = 0; (\tilde{z}C)\alpha_{\mathbb{C}} = (\alpha - \eta i)C \Rightarrow (\alpha - \eta i, \alpha - \eta i)\tilde{\sigma} = \\ &(\alpha, \alpha)\tilde{\sigma} - (\eta, \eta)\tilde{\sigma} - 2(\alpha, \eta)\tilde{\sigma} i = 0 \Rightarrow (\tilde{z}C)\alpha_{\mathbb{C}} \in \tilde{\Gamma}. \end{aligned}$$

Der Spitzenraum von $\tilde{\Gamma}$ ist die komplexe Fortsetzung $\tilde{\Pi}_s$ des Spitzenraumes Π_s von Γ .

Bew.: Nach 7.3, Bem. c existiert eine Basis $\{\pi_0, \dots, \pi_n\} \subset \mathcal{W}(R)$ so, daß die quadratische Form $\alpha\eta = (\alpha, \alpha)\sigma$ in der Normalform $\alpha\eta = \lambda_1(x^0)^2 + \lambda_2(x^1)^2 + \dots + \lambda_k(x^k)^2$ mit $0 < k \leq n$ und $\lambda_j = \pm 1$ dargestellt wird; nach 5.6 wird der Spitzenraum Π_s von Γ durch $x^{k+1} = \dots = x^n = 0$ beschrieben, d.h. $\Pi_s = \mathbb{P}(H(\pi_0, \dots, \pi_k))$. Auch in $\tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C})$ ist $\{\pi_0, \dots, \pi_n\}$ eine Basis, und da σ und $\tilde{\sigma}$ für die reellen Vektoren $\pi_0, \dots, \pi_n$ dasselbe leisten, gilt $\tilde{z}\tilde{\eta} = (\pi_k, z^k, \pi_k, z^k)\tilde{\sigma} = z^k z^k (\pi_k, \pi_k)\tilde{\sigma} = \lambda_k (z^0)^2 + \lambda_1 (z^1)^2 + \dots + \lambda_k (z^k)^2$. Der Spitzenraum dieser Varietät ist aber $z^1 = \dots = z^n = 0$, also $\tilde{\Pi}_s$.

(c) Beispiel für $\dim \mathbb{P}(\mathcal{W}) = 3$:

$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$ beschreibt in $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ die quadratische Varietät $\Gamma_1^{(3)}$ mit der Spitze $(0, 0, 0, 1)R$ und $\tilde{\Gamma}_1^{(3)}$ wird durch $(z^0)^2 + (z^1)^2 + (z^2)^2 = 0$ beschrieben; dies ist nach 5.6 ein quadratischer Kegel in $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}})$ mit der Spitze $(0, 0, 0, 1)C$ (ein solcher Kegel $\Gamma_1^{(n)}$ heißt gelegentlich "nullteilig"). Speziell in der Ebene $\pi(x^3 = 0)$ bzw. $\tilde{\pi}(z^3 = 0)$ bestimmen die quadratischen Formen eine elliptische Polarität λ bzw. eine hyperbolische Polarität $\tilde{\lambda}$, zu der ein nullteiliger Kegelschnitt $\tilde{k}$ gehört. Also gilt: Jeder ebene Schnitt eines nullteiligen Kegels mit einer Ebene nicht durch die Spitze ist ein nullteiliger Kegelschnitt (bei geeigneter Basiswahl ist nämlich stets die hier verwendete Darstellung zu erreichen).

Umgekehrt erkennt man: Die Projektion eines nullteiligen Kegelschnitts in einer $\alpha_{\mathbb{C}}$ -Fixebene $\tilde{\pi}$ aus einem reellen Punkt, der nicht in $\tilde{\pi}$ liegt, ist ein nullteiliger Kegel.

(d) Jede Quadrik eines dreidimensionalen komplexen projektiven Raumes $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}})$ ist ringartig, da $\mathbb{C}$ quadratisch abgeschlossen ist; insbesondere ist jede Quadrik $\tilde{\Phi}$ ringartig, die durch komplexe Fortsetzung einer Polarität λ zu einer projektiven Polarität entsteht. Bestimmt λ eine ovale Quadrik $\psi \subset \mathbb{P}(\mathcal{W}(R))$, so existieren auf der durch $\tilde{\lambda}$ bestimmten ringartigen Quadrik $\tilde{\psi} \subset \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{W}}(\mathbb{C}))$ keine $\alpha_{\mathbb{C}}$ -fixen Erzeugenden, denn die Menge ihrer reellen Punkte wäre eine Erzeugende von ψ . Ist $\tilde{\sigma}$ eine Erzeugende von $\tilde{\psi}$ durch den reellen Punkt $X = X\alpha_{\mathbb{C}} \in \tilde{\psi}$, so ist $\tilde{\sigma}\alpha_{\mathbb{C}} (\neq \tilde{\sigma})$ die zweite Erzeugende

durch X , und umgekehrt treffen einander zwei niederimaginäre Erzeugenden von $\tilde{\varphi}$ in einem reellen Punkt von $\tilde{\varphi}$.

Aus diesem Grunde kann es auf einer nullteiligen Quadrik $\tilde{\phi}$ (λ elliptisch) keine niederimaginären und erst recht keine $\mathfrak{x}_{1n}$ -fixen Erzeugenden geben. Eine Erzeugende $\tilde{e}$ und ihre $\mathfrak{x}_{1n}$ -zugeordnete Erzeugende einer nullteiligen Quadrik $\tilde{\phi}$ sind stets hochimaginär und gehören daher zur selben Erzeugendenschar auf $\tilde{\phi}$.

(e) An einem Beispiel wird gezeigt, wie man unter Benützung von $\Pi(\mathcal{W})$ Aussagen über $\Pi(\mathcal{W})$ gewinnen kann.

In der reellen projektiven Ebene gilt: Ist λ^a eine elliptische Polarität und $\lambda(+\lambda^a)$ eine weitere Polarität, so existiert mindestens ein gemeinsames Poldreieck.

Bew.: Auf Grund des ersten Hauptsatzes genügt es, den Beweis in $\Pi(\mathcal{W})$ mit $\dim \Pi(\mathcal{W})=2$ zu führen. Wir setzen λ bzw. λ^a zu λ bzw. λ^a in $\Pi(\mathcal{W})$ fort, und λ bzw. λ^a bestimmen zwei verschiedene Kegelschnitte $\tilde{k}$ bzw. $\tilde{k}^a$. Da $\mathbb{C}$ (im Gegensatz zu $\mathbb{R}$) kubisch abgeschlossen ist, gehören $\tilde{k}$ bzw. $\tilde{k}^a$ nach Def. 5.9 zu genau einem Kegelschnittbüschel. Ist $X \in \tilde{k} \cap \tilde{k}^a$, so gilt $X \mathfrak{x}_{1n} \in \tilde{k} \mathfrak{x}_{1n} \cap \tilde{k}^a \mathfrak{x}_{1n} = \tilde{k} \cap \tilde{k}^a$, und mit jeder gemeinsamen Tangente t von $\tilde{k}$ und $\tilde{k}^a$ ist auch $t \mathfrak{x}_{1n}$ eine gemeinsame Tangente von $\tilde{k}$ und $\tilde{k}^a$. Gemeinsame Punkte und gemeinsame Linienelemente von $\tilde{k}$ und $\tilde{k}^a$ treten nur in $\mathfrak{x}_{1n}$ -zugeordneten Paaren auf; dabei sind die Elemente solcher Paare stets verschieden, denn $\tilde{k}^a$ ist nullteilig und enthält daher keine reellen Punkte. Die Kegelschnitte $\tilde{k}^a$ und $\tilde{k}$ können somit nur einem Büschel 1. oder 3. Art angehören, denn nur für diese beiden Arten ist die Anzahl gemeinsamer Punkte und die Anzahl gemeinsamer Linienelemente gerade. Bestimmen $\tilde{k}^a$ und $\tilde{k}$ ein Büschel 1. Art, so ist $\tilde{k}^a \cap \tilde{k} = \{S, S \mathfrak{x}_{1n}, T, T \mathfrak{x}_{1n}\}$, wobei diese vier Punkte ein Viereck bilden; das Diagonaldreieck dieses Vierecks ist nach Satz 2.5a das einzige gemeinsame Poldreieck von λ^a und λ . Für die Punkte des Diagonaldreiecks gilt wegen $\mathfrak{x}_{1n} = t$:

$$D_1 := (S \vee S \mathfrak{x}_{1n}) \cap (T \vee T \mathfrak{x}_{1n}) \Rightarrow D_1 \mathfrak{x}_{1n} = (S \mathfrak{x}_{1n} \vee S) \cap (T \mathfrak{x}_{1n} \vee T) = D_1,$$

$$D_2 := (S \vee T) \cap (S \mathfrak{x}_{1n} \vee T \mathfrak{x}_{1n}) \Rightarrow D_2 \mathfrak{x}_{1n} = (S \mathfrak{x}_{1n} \vee T \mathfrak{x}_{1n}) \cap (S \vee T) = D_2,$$

$$D_3 := (S \vee T \mathfrak{x}_{1n}) \cap (S \mathfrak{x}_{1n} \vee T) \Rightarrow D_3 \mathfrak{x}_{1n} = (S \mathfrak{x}_{1n} \vee T) \cap (S \vee T \mathfrak{x}_{1n}) = D_3;$$

D_1, D_2, D_3 sind also reell und D_1, D_2, D_3 ist ein gemeinsames

(reelles) Poldreieck von λ und λ^a .

Falls $\tilde{k}^a$ und $\tilde{k}$ ein Büschel 3. Art bestimmen, besitzen sie die gemeinsamen Linienelemente (S, s) und $(S \mathfrak{x}_{1n}, s \mathfrak{x}_{1n})$. Nach Satz 5.2c haben $\tilde{k}^a$ und $\tilde{k}$ gemeinsame Poldreiecke, wobei eine Ecke stets der Punkt $D_1 := \rho_s \cap \rho_{s \mathfrak{x}_{1n}}$ ($\Rightarrow D_1$ reell) ist und eine Ecke D_2 beliebig aus $\rho_s \vee \rho_{s \mathfrak{x}_{1n}} \setminus \{S, S \mathfrak{x}_{1n}\}$ gewählt werden darf; D_3 ist der eindeutig bestimmte Punkt mit $H(D_2, D_3; S, S \mathfrak{x}_{1n})$. Die Gerade $S \cdot S \mathfrak{x}_{1n}$ ist $\mathfrak{x}_{1n}$ -fix, und daher bildet die Menge ihrer reellen Punkte nach Folg. 4, Anw. a eine Gerade ρ_s von $\Pi(\mathcal{W})$. Wählt man $D_2 \in \rho_s$, d.h. reell, so ist der Punkt D_3 nach Folg. 4, Anw. b ebenfalls reell. λ und λ^a haben daher unendlich viele (reelle) gemeinsame Poldreiecke.

SATZ 7.3: Ein Unterraum der komplexen Fortsetzung $\mathbb{T}(\tilde{W})$ des projektiven Raumes $\mathbb{T}(W)$ über dem reellen Rechtsvektorraum W ist genau dann komplexe Fortsetzung eines Unterraumes von $\mathbb{T}(W)$, wenn er Fixunterraum bezüglich jener involutorischen, nicht projektiven Kollineation $\alpha_{i,n}$ von $\mathbb{T}(\tilde{W})$ ist, welche alle Punkte von $\mathbb{T}(W)$ festläßt. Jede über $\mathbb{T}(W)$ elliptische Polarität λ läßt sich zum Polarsystem einer nullteiligen Quadrik komplex fortsetzen. Jede Quadrik $\tilde{\phi}$ von $\mathbb{T}(\tilde{W})$, welche zu einer projektiven Polarität $\tilde{\lambda}$ gehört, die durch komplexe Fortsetzung einer Polarität λ von $\mathbb{T}(W)$ entstand, ist $\alpha_{i,n}$ -automorph. Die komplexe Fortsetzung einer ovalen Quadrik eines dreidimensionalen reellen projektiven Raumes $\mathbb{T}(W)$ trägt niederimaginäre Erzeugenden, während alle Erzeugenden einer nullteiligen Quadrik hochimaginär sind. Eine elliptische Polarität einer reellen projektiven Ebene hat mit jeder weiteren Polarität dieser Ebene mindestens ein Poldreieck gemeinsam.

7.4. Endlichdimensionale reelle affine Räume mit Orthogonalitätsstruktur

Zwischenbemerkung:

Ist W ein Rechtsvektorraum und $\sigma: W \times W \rightarrow K$ eine hermitesche Sesquilinearform zum involutorischen Körperantiautomorphismus $\alpha: K \rightarrow K$, so heißt das Paar (W, σ) ein "metrischer Vektorraum". Ein Vektor e heißt "orthogonal" zu einem Vektor η ($e \perp \eta$), wenn $(e, \eta)\sigma = 0$ gilt; ein Unterraum $U_1 \subset W$ heißt "orthogonal" zu einem Unterraum $U_2 \subset W$, wenn $(e_1, e_2)\sigma = 0 \quad \forall e_1 \in U_1, \forall e_2 \in U_2$ gilt. Ein Vektor $e \in W \setminus \{0\}$ heißt "isotrop" ("selbstorthogonal"), wenn $(e, e)\sigma = 0$ gilt.

Ist speziell $K = \mathbb{R}$ und σ eine positiv definite symmetrische Bilinearform, so heißt (W, σ) ein "euklidischer Vektorraum". Ist speziell $K = \mathbb{C}$ und σ eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform zum involutorischen Körperautomorphismus $\alpha: \bar{z} = z$, so heißt (W, σ) ein "unitärer Vektorraum".

Bemerkungen: (a) In jedem metrischen Vektorraum ist die Orthogonalität von Vektoren eine symmetrische Relation wegen $(e, \eta)\sigma = \alpha(\eta, e)\sigma$.

(b) $K=\mathbb{R}$: Eine symmetrische Bilinearform heißt positiv definit, wenn $(v, v)\sigma > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$ gilt.
 $K=\mathbb{C}$: Eine hermitesche Sesquilinearform heißt positiv definit, wenn $(v, v)\sigma > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$ gilt; dies ist sinnvoll, denn $(v, v)\sigma$ ist für alle $v \in V$ eine reelle Zahl wegen $(v, v)\sigma = \overline{(v, v)\sigma} = (v, v)\sigma$.

(c) Wir schreiben i. f. für einen euklidischen bzw. unitären Vektorraum $V_{\mathbb{R}}$ bzw. $V_{\mathbb{C}}$, nennen σ ein "inneres Produkt" in $V_{\mathbb{R}}$ bzw. $V_{\mathbb{C}}$ und benützen i. f. die Abkürzungen

$$(v, w)\sigma =: (v, w), (v, v)\sigma =: |v|^2 (\geq 0).$$

Definiert man in $V_{\mathbb{R}}$ bzw. $V_{\mathbb{C}}$ den Betrag (die Länge) eines Vektors durch $|v| := \sqrt{(v, v)}$ (mit $|v|=0 \Leftrightarrow v=0$), so gelten die Dreiecksungleichung

$$|v+w| \leq |v| + |w|$$

und die Schwarzsche Ungleichung

$$|(v, w)| \leq |v| |w|.$$

Man kann in jedem $V_{\mathbb{R}}$ bzw. $V_{\mathbb{C}}$ einen Winkelbegriff einführen durch

$$\cos \alpha := \frac{(v, w)}{|v| |w|} \quad \text{für } v, w \in V \setminus \{0\},$$

und wegen der Schwarzschen Ungleichung gilt stets $|\cos \alpha| \leq 1$. Im besonderen gilt $\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow (v, w) = 0 \Leftrightarrow v \perp w$ für $v, w \neq 0$.

In $V_{\mathbb{R}}$ ist $\cos \alpha$ eine reelle Zahl, und wir dürfen α einschränken auf das abgeschlossene Intervall $[0, \pi]$; in $V_{\mathbb{C}}$ ist $\cos \alpha$ eine komplexe Zahl nicht außerhalb des Einheitskreises der Gaußschen Zahlenebene.

Wegen $|v-w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos \alpha$ gilt mit $\cos \alpha = 0$ in $V_{\mathbb{R}}$ und $V_{\mathbb{C}}$ der Pythagoräische Lehrsatz.

(d) Eine Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ eines $V_{\mathbb{R}}$ bzw. $V_{\mathbb{C}}$ heißt "orthonormiert", wenn $(e_i, e_k) = \delta_{ik}$ gilt. Wie man in LA mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens zeigt, existieren stets orthonormierte Basen. Bezüglich einer orthonormierten Basis in $V_{\mathbb{R}}$ bzw. $V_{\mathbb{C}}$ besitzt σ die Koordinatendarstellung

$$(v, w)\sigma = \sum_{i=1}^n x^i y^i \quad \text{bzw.} \quad (v, w)\sigma = \sum_{i=1}^n x^i \bar{y}^i.$$

(e) Der euklidische Vektorraum $V_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ kann nach 7.3 in den komplexen Vektorraum $V(\mathbb{C})$ eingebettet werden, und zum inneren Produkt $(v, w)\sigma$ existiert genau eine komplexe Fortsetzung $\tilde{\sigma}$ und genau eine hermitesche Fortsetzung $\tilde{\sigma}_h$. Mit $\tilde{\sigma}$ ist auch $\tilde{\sigma}_h$ positiv definit und daher ist $(V(\mathbb{C}), \tilde{\sigma}_h)$ ein unitärer Vektorraum; er heißt die "unitäre Fortsetzung von $V_{\mathbb{R}}$ ". In $(V(\mathbb{C}), \tilde{\sigma}_h)$ gibt es wegen $(\tilde{v}, \tilde{v}) > 0 \quad \forall \tilde{v} \in V(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ keine isotropen Vektoren. Der metrische Vektorraum $(V, \tilde{\sigma})$ heißt die "komplexe Fortsetzung von $V_{\mathbb{R}}$ ". Im Gegensatz zur unitären Fortsetzung existieren in $(V, \tilde{\sigma})$ isotrope Vektoren; wird nämlich $\tilde{\sigma}$ durch $(v, w)\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^n x^i y^i$ mit $x^i, y^i \in \mathbb{R}$ koordinatenmäßig erfaßt, so hat $\tilde{\sigma}$ dieselbe Darstellung mit $x^i, y^i \in \mathbb{C}$ und für $v=(1, 0, \dots, 0, i) \neq 0$ gilt $(v, v)\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = 0$.

Die Orthogonalität, der Winkel und der Abstand in AE bzw. AR kann elementar über ein inneres Produkt erklärt werden. Dies legt folgende Definition nahe.

DEF. 7.4a: Ist $\mathcal{W}$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum, so heißt der affine Raum $A(\mathcal{W})$ ein euklidischer bzw. unitärer Raum über $\mathcal{W}$. Sind e, η zwei Punkte von $A(\mathcal{W})$, so heißt $|e - \eta|$ der Abstand der beiden Punkte. Zwei Unterräume U_1 bzw. U_2 von $A(\mathcal{W})$, die Nebenklassen zu den Unterräumen $\mathcal{U}_1$ bzw. $\mathcal{U}_2$ von $\mathcal{W}$ sind, heißen genau dann orthogonal, wenn $\mathcal{U}_1$ orthogonal zu $\mathcal{U}_2$ ist. Ist A ein reeller bzw. komplexer affiner Raum, so heißt A ein euklidischer bzw. unitärer Raum, wenn im Vektorraum $\mathcal{W}$ der Translationen von A ein inneres Produkt gegeben ist.

Wir untersuchen, was die Vorgabe eines inneren Produkts im Vektorraum der Translationen geometrisch bedeutet. Wir beschränken uns dabei auf den euklidischen Raum.

Folgerungen:

1) Bekanntlich ist $A(R) \cong A(\mathcal{W}(R)) \cong \Pi(R \oplus \mathcal{W}) \setminus \Pi(0 \oplus \mathcal{W})$. Sei in $\mathcal{W}$ ein inneres Produkt a, b erklärt. Jede Gerade in $A(\mathcal{W})$ ist eine eindimensionale Nebenklasse $\alpha + \alpha R, \alpha \neq 0$; sie besitzt den Fernpunkt $(0, \alpha)R$. Für die Fernhyperebene $\mathbb{L}$ gilt $\mathcal{P}_{\mathbb{L}} = \{(0, \alpha)R \mid \alpha \in \mathcal{W} \setminus \{0\}\}$. Wir definieren in $\mathbb{L}$ eine Sesquilinearform β durch:

$$((0, \alpha), (0, \beta))\beta := \alpha \cdot \beta.$$

Man erkennt sofort, daß β eine symmetrische Bilinearform ist, die wegen $\alpha \cdot \alpha \neq 0$ für $\alpha \neq 0$ nicht ausgeartet ist.

Für $\dim \mathbb{L} > 2$ beschreibt β eine projektive Polarität λ^a in $\mathbb{L}$. Da das innere Produkt positiv definit ist, gilt stets $((0, \alpha), (0, \alpha))\beta > 0 \forall \alpha \in \mathcal{W} \setminus \{0\}$, d.h. in λ^a existiert kein selbstkonjugierter Punkt und λ^a ist daher elliptisch. Die durch das innere Produkt in $\mathcal{W}$ bestimmte elliptische projektive Polarität λ^a in $\mathbb{L}$ heißt "absolute Polarität". Für $\dim \mathbb{L} = 2$ ist $\mathbb{L}$ eine Gerade und β beschreibt eine elliptische projektive Involution λ^a auf der Ferngeraden; diese Involution heißt "absolute Involution" und wird i.f. meist als Sonderfall einer absoluten Polarität aufgefaßt.

Zwei Geraden sind genau dann orthogonal, wenn ihre Fernpunkte in λ^a zugeordnet sind. Die Vorgabe von λ^a bestimmt also eine "Orthogonalitätsstruktur" im reellen affinen Raum.

DEF.7.4b: Ein projektiv eingebetteter reeller affiner Raum besitzt eine Orthogonalitätsstruktur, wenn in seiner Fernhyperebene eine elliptische Polarität λ^a (eine projektive elliptische Involution) als absolut ausgezeichnet ist. Geraden heißen orthogonal, wenn ihre Fernpunkte bezüglich λ^a konjugiert sind.

Durch Vorgabe einer absoluten Polarität λ^a in $\mathbb{W}_\infty$ wird umgekehrt im Vektorraum $\mathcal{W}$ bis auf einen Faktor ein inneres Produkt bestimmt, das die durch λ^a festgelegte Orthogonalität beschreibt.

Bew.: λ^a wird durch eine symmetrische nicht ausgeartete Bilinearform σ beschrieben, und wir definieren nun umgekehrt ein inneres Produkt in $\mathcal{W}$ durch

$$\alpha, \beta := ((0, \alpha), (0, \beta)) \sigma \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{W} \setminus \{0\}.$$

Nach 5.3 beschreiben alle zu σ proportionalen Bilinearformen ebenfalls λ^a , und daher ist mit σ auch α, β nur bis auf einen Faktor ($\neq 0$) bestimmt.

Bemerkungen: (a) Die Orthogonalität von Geraden und damit von Unterräumen ist nach Definition translationsinvariant.

(b) Zu $\Pi(\mathbb{R} \oplus \mathcal{W}) = \Pi(\mathcal{W})$ existiert eine komplexe Fortsetzung $\Pi(\mathcal{W})$ und $\mathbb{W}_\infty$ ist dabei eine $\mathbb{C}$ -fixe Hyperebene. Nach 7.3 existiert zu $\lambda^a: \mathbb{W}_\infty \rightarrow \mathbb{W}_\infty^*$ genau eine komplexe Fortsetzung $\tilde{\lambda}^a$ und $\tilde{\lambda}^a$ ist eine hyperbolische projektive Polarität in $\mathbb{W}_\infty$. Da λ^a elliptisch ist, ist die durch λ^a bestimmte Quadrik $\tilde{\Phi}^a$ nullteilig und natürlich $\mathbb{C}$ -automorph. Die in $\mathbb{W}_\infty$ liegende Quadrik Φ^a heißt "absolute Quadrik"; für $\dim \mathbb{W} = 2$ besteht Φ^a aus den konjugiert imaginären Fixpunkten $\bar{1}_1, \bar{1}_2 = 1, \mathbb{C}$, der ins Komplexe fortgesetzten absoluten elliptischen Involution λ^a , für $\dim \mathbb{W} = 3$ ist Φ^a ein nullteiliger Kegelschnitt in $\mathbb{W}_\infty$. Unter einer isotropen Geraden versteht man die eindimensionale Nebenklasse eines isotropen Vektors. Eine Gerade ist somit genau dann isotrop, wenn ihr Fernpunkt auf Φ^a liegt. Verbindet man einen eigentlichen reellen Punkt P mit allen Punkten von Φ^a , so erhält man für $\dim \mathbb{W} \geq 3$ nach 5.6 und 7.3 einen nullteiligen Kegel $\cap_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}_i$, den "isotropen Kegel des Punktes P "; für $\dim \mathbb{W} = 2$ erhält man die konjugiert imaginären Geraden $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$.

(c) Die hermitesche Fortsetzung β_* von β beschreibt eine nicht projektive Polarität in $\mathbb{W}_\infty$, welche die Orthogonalitätsstruktur des unitären Raumes bestimmt. Diese kann hier nicht weiter verfolgt werden, da wir über nicht projektive Polaritäten keine Aussagen gemacht haben.

2) Wir versuchen unter Benützung der absoluten Polarität eine Winkelmessung einzuführen. Die Winkelmessung im Vektorraum $\mathcal{W}$ bestimmt eine Winkelmessung zwischen Halbgeraden in $A(\mathcal{W})$. Sind nämlich $\alpha \cdot \alpha x$ mit $x > 0$ und $\beta \cdot \beta y$ mit $y > 0$ zwei Halbgeraden, so ist durch $\frac{|\alpha \cdot \beta|}{|\alpha| |\beta|}$ der Winkel α der Halbgeraden mit $0 < \alpha < \pi$ festgelegt; geht man nämlich durch $\alpha \cdot \alpha x$ mit $x > 0$ zur anderen Halbgeraden des einen Schenkels über, so geht $\cos \alpha$ in $-\cos \alpha$ und daher α in $\pi - \alpha$ über. Beide Halbgeraden besitzen denselben Fernpunkt $(0, \alpha)R$ und daher kann eine Winkelmessung mit Hilfe von λ^α nur $|\cos \alpha|$ liefern, also einen Winkelbegriff für "ungerichtete Geraden", wobei o.B.d.A. $0 < \alpha < \pi/2$ gilt. Da λ^α das innere Produkt bis auf einen Faktor ($\neq 0$) bestimmt und dieser bei $|\cos \alpha|$ herausfällt, muß eine Winkeldefinition mit Hilfe von λ^α möglich sein.

Seien a und b zwei verschiedene (eigentliche Geraden).

Fall 1: $\angle(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \parallel b$.

Fall 2: $\angle(a, b) = \pi/2 \Leftrightarrow a \perp b$.

Beide Definitionen stehen in Übereinstimmung mit der Winkelmessung mit Hilfe des inneren Produktes.

Fall 3: Sind a, b nicht parallel und nicht normal, so sind die Fernpunkte A_a und B_a von a und b verschieden und in λ^α nicht konjugiert. Die absolute Projektivität λ^α bestimmt auf $A_a B_a$ eine elliptische projektive Involution konjugierter Punkte. Ist $A_a^\perp$ bzw. $B_a^\perp$ der Fernpunkt der zur Richtung A_a bzw. B_a orthogonalen Richtung auf $A_a B_a$, so sind nach den Voraussetzungen $A_a, A_a^\perp, B_a$ und $B_a^\perp$ vier paarweise verschiedene kollineare Punkte.

$DV(A_a, A_a^\perp, B_a, B_a^\perp) = \delta$ ist nach Def. 7.1a negativ, da die durch λ^α bestimmte projektive Involution konjugierter Punkte auf $A_a B_a$ elliptisch ist und daher $A_a A_a^\perp / B_a B_a^\perp$ gilt.

Aus $A_a = (0, \alpha)R$ und $B_a = (0, \beta)R$ kann man $A_a^\perp = (0, \alpha^\perp)R$ und $B_a^\perp = (0, \beta^\perp)R$ berechnen; einerseits gilt wegen der kollinearen Lage $(0, \alpha^\perp) = (0, \alpha)a + (0, \beta)b$ mit $a, b \in R$ und andererseits gilt $\alpha \cdot \alpha^\perp = 0$, da A_a und $A_a^\perp$ in λ^α konjugiert sind, also $0 = \alpha(\alpha a + \beta b) = \alpha \cdot \alpha a + \alpha \cdot \beta b \Rightarrow a : b = -\alpha \cdot \beta : \alpha \cdot \alpha$; für die homogenen Reihenkoordinaten von $B_a^\perp$ findet man analog $(\beta \cdot \beta : -\alpha \cdot \beta)$. Da A_a bzw. B_a die homogenen Reihenkoordinaten $(1:0)$ bzw. $(0:1)$ besitzt, gilt

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\alpha \cdot \beta & 0 \\ \alpha \alpha & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \cdot \beta \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} -\alpha \cdot \beta & \beta \cdot \beta \\ \alpha \cdot \alpha & -\alpha \cdot \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \beta \cdot \beta \\ 0 & -\alpha \cdot \beta \end{vmatrix}} = \frac{(\alpha \cdot \beta)^2 - (\alpha \cdot \alpha)(\beta \cdot \beta)}{(\alpha \cdot \beta)^2} = 1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} = -\tan^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\tan \alpha = \sqrt{-DV(A_a, A_a^\perp, B_a, B_a^\perp)} \text{ für } A_a \neq B_a \wedge A_a^\perp \neq B_a.$$

Diese Formel kann im Fall 3 als Winkeldefinition benützt werden, wenn eine absolute elliptische Polarität λ^a gegeben ist, wobei $0 < \alpha < \pi/2$ gilt.

Bemerkungen: (a) Die durch die obige Formel definierte Winkelmessung ist symmetrisch, d.h. $\angle(a,b) = \angle(b,a)$ wegen $DV(A_u, A_u^\perp, B_u, B_u^\perp) = DV(B_u, B_u^\perp, A_u, A_u^\perp)$.

(b) In der komplexen Fortsetzung $\Pi(\tilde{W})$ ist noch eine andere Definition des Winkels möglich. Die α_u -fixe Gerade $A_u B_u$ hat mit Φ^a ein Paar konjugiert imaginärer Punkte $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 = \bar{\tilde{l}}_1, \alpha_u$ gemeinsam.

Dabei gilt für $\tilde{l}_1 = (0, \tilde{i}) \in$ einerseits $(0, \tilde{i}) = (0, a)a + (0, b)b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, und wegen $\tilde{l}_1 \in \Phi^a$ andererseits

$$((0, \tilde{i}), (0, \tilde{i}))\beta = \tilde{i} \cdot \tilde{i} = 0 \Rightarrow (\alpha a + \beta b) \cdot (\alpha a + \beta b) = 0 \Rightarrow (\alpha \cdot \alpha)a^2 + 2(\alpha \cdot \beta)ab + (\beta \cdot \beta)b^2 = 0 \Rightarrow a : b|_{\tilde{l}_1} = \frac{-\alpha \cdot \beta \pm \sqrt{(\alpha \cdot \beta)^2 - (\alpha \cdot \alpha)(\beta \cdot \beta)}}{(\alpha \cdot \alpha)}$$

(Da A_u reell ist gilt $A_u \notin \Phi^a$, also $a \neq 0$; wegen der Ungleichung von Schwarz ist der Ausdruck W unter der Wurzel negativ.)

$$\begin{aligned} DV(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, A_u, B_u) &= \frac{\tilde{a}_1 \cdot \tilde{b}_1}{\tilde{b}_1 \cdot \tilde{a}_1} = \frac{-\alpha \cdot \beta - \sqrt{W}}{(\alpha \cdot \alpha)} \cdot \frac{(\alpha \cdot \alpha)}{-\alpha \cdot \beta + \sqrt{W}} = \\ &= \frac{-\frac{\alpha \cdot \beta}{\sqrt{\alpha \cdot \alpha} \sqrt{\beta \cdot \beta}} - \sqrt{\frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{(\alpha \cdot \alpha)(\beta \cdot \beta)} - 1}}{-\frac{\alpha \cdot \beta}{\sqrt{\alpha \cdot \alpha} \sqrt{\beta \cdot \beta}} + \sqrt{\frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{(\alpha \cdot \alpha)(\beta \cdot \beta)} - 1}} = \frac{-\cos \alpha - \sqrt{\cos^2 \alpha - 1}}{-\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + 1}} = \frac{-\cos \alpha - i \sin \alpha}{-\cos \alpha + i \sin \alpha} = \\ &= \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2i} \log DV(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, A_u, B_u). \end{aligned}$$

Nach dieser "Formel von LAGUERRE" kann im arithmetischen affinen Raum der Winkel in der komplexen Fortsetzung durch ein Doppelverhältnis gemessen werden.

Diskussion: (I) Aus der Laguerreformel ist die Additivität der Winkelmessung abzulesen:

$$\angle(a,b) + \angle(b,c) = \frac{1}{2i} \log DV(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, A_u, B_u) + \frac{1}{2i} \log DV(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, B_u, C_u) = \frac{1}{2i} \log [DV(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, A_u, B_u) \cdot DV(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, B_u, C_u)] = \frac{1}{2i} \log DV(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, A_u, C_u) = \angle(a,c).$$

(II) Für die komplexe Zahl $z := DV(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, A_u, B_u)$ gilt $z = re^{i\varphi}$ mit $r = |z|$ und $\varphi = \arg z$. Weiters gilt nach 7.3, Folg.5, Bem.b dann $|z| = 1$ und wegen $\log z = \log |z| + i \arg z$ und $\log 1 = 0 \Rightarrow$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arg DV(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, A_u, B_u).$$

Die Periode von $\arg z$ ist 2π und somit die Periode von α gleich π . Die Laguerre-Formel mißt den Winkel zwischen ungerichteten Geraden, jedoch ist die Winkelmessung nicht symmetrisch; es gilt vielmehr $\angle(a,b) = -\angle(b,a)$ wegen $DV(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, A_u, B_u) = DV(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, B_u, A_u) \cdot \log z^{-1} = -\log z$. Es ist also zweckmäßiger $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ zu fordern. Da jedoch der mit Hilfe des inneren Produkts gemessene Winkel in $0 \leq \alpha \leq \pi$ liegt und α nur einen Winkel mit $0 \leq \alpha < \pi/2$ liefern kann, hat nur die zu $\alpha = |\frac{1}{2i} \log DV(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, A_u, B_u)|$ geänderte Winkeldefinition einen geometrischen Sinn.

(III) Im Sonderfall der affinen Ebene kann vermöge ihrer Orientierbarkeit ein Winkeldrehsinn ausgezeichnet werden und man kann auf die Betragstriche bei der Laguerreformel verzichten; die Laguerre-formel mißt dann also im Gegensatz zum inneren Produkt einen Winkel in der orientierten Ebene (vgl. 7.5).

3) DEF.7.4c: In einem projektiv eingebetteten reellen affinen Raum $\mathbb{T}$ mit Orthogonalitätsstruktur und $\dim \mathbb{T} \geq 3$ heißt ein Ellipsoid eine Sphäre (Kugel), wenn ihre Spurpolarität in $\mathbb{T}$ die absolute Polarität ist. In einer projektiv eingebetteten reellen affinen Ebene mit Orthogonalitätsstruktur heißt eine Ellipse ein Kreis, wenn die projektive Involution konjugierter Punkte auf der Ferngeraden die absolute Involution ist.

Bemerkungen (a) Wir werden i.f. die Kreise als spezielle Sphären auffassen.

(b) Jeder Durchmesser schneidet die Sphäre in zwei zum Mittelpunkt symmetrischen Punkten; jeder Durchmesser eines Ellipsoides ist nach 7.2, Folg.2, Bem.d eine Sehne und seine beiden Schnittpunkte mit dem Ellipsoid sind nach 6.3, Folg.2, Bem.c in der Spiegelung am Mittelpunkt gekoppelt.

(c) In der komplexen Fortsetzung gehört zu einer Sphäre ϕ die ringartige Quadrik $\tilde{\phi}$. Wegen $\lambda_u = \lambda^a$ gilt $\phi \geq \tilde{\phi}^a$ in $\mathbb{T}(\mathcal{W})$. Ist in $\mathbb{T}_u = \mathbb{T}(0 \oplus \mathcal{W})$ eine absolute Polarität λ^a gegeben, so ist eine Quadrik ϕ in $\mathbb{T}(\mathcal{W}(\mathbb{R}))$ genau dann eine Sphäre, wenn ihre komplexe Fortsetzung $\tilde{\phi}$ in $\mathbb{T}(\mathcal{W}(\mathbb{C}))$ die Hyperebene $\mathbb{T}_u$ nach der absoluten Quadrik $\tilde{\phi}^a$ schneidet. Für $n=2$ ist eine Sphäre ein Kegelschnitt k , für den k durch $\mathbb{T}_1$ und $\mathbb{T}_1$ geht, für $n=3$ eine Quadrik ϕ , für die $\tilde{\phi}$ den nullteiligen Kegelschnitt $\tilde{\phi}^a$ in $\mathbb{T}_u$ enthält. Man nennt aus diesem Grund $\tilde{\phi}^a = \{\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_1\}$ für $n=2$ auch "absolute Kreispunkte" und $\tilde{\phi}^a$ für $n=3$ auch "absoluten Kugelkreis".

(d) Die elementargeometrische Orthogonalität in AR kann durch Zentralprojektion der Fernebene $\mathbb{T}_\infty$ aus einem eigentlichen Auge O auf eine eigentliche Bildebene π konstruktiv erfaßt werden. Dabei gilt:

Bei einer Perspektive geht die absolute Polarität λ^a in die Antipolarität des Distanzkreises k über.

Bew.: Ist $\zeta: \mathcal{P}_\infty \rightarrow \mathcal{P}_\pi$ die durch die Perspektive bestimmte perspektive Kollineation, so ist $\lambda^{ac} := \zeta^{-1} \lambda^a \zeta^*$ eine elliptische Polarität in π und in der affinen Ebene π daher nach 7.2, Folg.5, Bem.d die Antipolarität einer Ellipse k ; da die Involution konjugierter Punkte bezüglich λ^a und λ^{ac} auf der bei ζ festbleibenden Ferngeraden u von π übereinstimmen, ist k sogar ein Kreis. Der Mittelpunkt von k ist $u(\lambda^{ac})^*$, also das ζ -Bild des Punktes $u(\lambda^a)^*$, und da der Sehstrahl durch diesen Fernpunkt zu π normal steht, ist der Mittelpunkt von k der Hauptpunkt der Perspektive. Auf jedem Durchmesser von k existiert eine elliptische projektive Involution konjugierter Punkte bezüglich λ^{ac} , welche das Produkt der hyperbolischen projektiven Involution konjugierter Punkte im Polarsystem λ_u des Kreises k mit der Spiegelung am Hauptpunkt ist. In λ^{ac} sind daher stets Gegenpunkte von k zugeordnet, und da solche aus dem Auge durch orthogonale Geraden projiziert werden, ist k der Distanzkreis der Perspektive.

$P_j (j=1, \dots, n)$, so ist $\{0, P_1, \dots, P_n\}$ ein kartesischer Simplex. Es existieren also kartesische Simplexe, wenn es Sphären gibt.

(b) Es soll die Gleichung der Sphäre ϕ mit Mittelpunkt $0=(1,0,\dots,0)R$ durch $P_j=(1, \delta_j^1, \dots, \delta_j^n)R$ bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\{0, P_1, \dots, P_n\}$ bestimmt werden. Ihre Gleichung als Mittelpunktquadratik zum Mittelpunkt $(1,0)R$ lautet nach 6.5 Anw.b: $(x^0)^2 + \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x^i x^k = 0$. Da die Durchmesser OP_j paarweise orthogonal sind, bilden $\{P_1, \dots, P_n\}$ in $\mathbb{T}_\omega$ einen Polsimplex bezüglich λ^a ; benützen wir diesen als Koordinatensimplex in $\mathbb{T}_\omega$, so wird λ^a durch $\lambda_1 x^1 y^1 + \dots + \lambda_n x^n y^n$ beschrieben, während für die Fernpolarität der obigen Mittelpunktquadratik gilt $Y=(0, y^1, \dots, y^n)R \mapsto \mathbb{T}_\omega \cap Y\lambda = Y\lambda_\omega$, also $Y\lambda_\omega \dots x^0 = \sum_{i=1}^n a_{ik} x^i y^k = 0$. Mit $\lambda^a = \lambda_\omega$ folgt mit einem Faktor $\xi \neq 0$ als Gleichung der Sphäre $(x^0)^2 + \xi(\lambda_1 (x^1)^2 + \dots + \lambda_n (x^n)^2) = 0$. Für $\text{sign } \xi \lambda_1 = \dots = \text{sign } \xi \lambda_n = -1$ ist ϕ ein Ellipsoid mit λ^a als Fernspurpolarität, d.h. es gibt Sphären. Aus $P_j \in \phi$ folgt $1 + \xi \lambda_j = 0$ ($j=2, \dots, n$) und damit als Gleichung von ϕ bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\{0, P_1, \dots, P_n\}$ $-(x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = 0$.

Damit wird in einem kartesischen Koordinatensystem die absolute Polarität λ^a durch $Y=(0, y^1, \dots, y^n)R \mapsto x^0 = x^1 y^1 + \dots + x^n y^n = 0$ beschrieben. In der komplexen Fortsetzung hat ϕ^a die Gleichung $x^0 = 0, (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = 0$.

Eine Sphäre ist durch ihren Mittelpunkt M und einen Punkt $P(*M)$ eindeutig festgelegt.

Bew.: Ist M o.B.d.A. der Punkt $(1,0,\dots,0)R$, so lautet die Gleichung der Sphäre ϕ nach 6.5, Anw.b: $(x^0)^2 + \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x^i y^k = 0$. Benützen wir kartesische Koordinaten, so hat nach Bem.b die absolute Polarität die Koordinatendarstellung $Y=(0, y^1, \dots, y^n)R \mapsto x^0 = x^1 y^1 + \dots + x^n y^n = 0$, und ϕ ist daher genau dann eine Sphäre, wenn ihre Gleichung $(x^0)^2 + \lambda[(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2] = 0$ lautet; wegen $\phi \neq \emptyset$ ist $\lambda < 0$. Kennt man also von ϕ außer dem Mittelpunkt M einen Punkt $P=(p^0, p^1, \dots, p^n)R$ mit $P \in \phi$ und $P \neq M$, so gilt $p^0 \neq 0$ und $(p^1, \dots, p^n) \neq (0, \dots, 0)$, und mit $\lambda = -(p^0)^2 [(p^1)^2 + \dots + (p^n)^2]^{-1}$ ist ϕ eindeutig bestimmt. ◆

5) Trägt ein reeller affiner Raum eine Orthogonalitätsstruktur, so sind jene Affinitäten ausgezeichnet, die mit der Orthogonalität verträglich sind.

DEF.7.4e: Eine Affinität eines reellen affinen Raumes mit

Orthogonalitätsstruktur heißt eine Ähnlichkeit, wenn sie orthogonale Geraden in orthogonale Geraden überführt.

Bemerkungen: (a) In einem projektiv eingebetteten reellen affinen Raum $\mathbb{T} = \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_\omega$ existiert zur Affinität α genau eine fortsetzende Kollineation $\alpha: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$. Die Affinität α führt genau dann orthogonale Geraden in orthogonale Geraden über, wenn λ^a -konjugierte Punkte bei $\alpha|_{\mathbb{T}_\omega}$ in λ^a -konjugierte Punkte übergehen, d.h. wenn

$\alpha | \pi_\omega \circ \lambda^\alpha = \lambda^\alpha \circ (\alpha | \pi_\omega)^*$ gilt.

(b) In der komplexen Fortsetzung bedeutet dies: $\hat{\alpha}$ eine Ähnlichkeit $\Leftrightarrow \hat{\phi}^\alpha(\hat{\alpha} | \hat{\pi}_\omega) = \hat{\phi}^\alpha$.

(c) Wegen Bem.a ist jede Ähnlichkeit sphärentreu.

(d) Führt eine Affinität $\hat{\alpha}$ eine Sphäre ϕ in eine Sphäre ϕ' über, so ist sie eine Ähnlichkeit, da bei jeder projektiven Kollineation konjugierte Punkte einer Quadrik in konjugierte Punkte der Bildquadrik übergehen (vgl. 4.6, Folg.6).

(e) Da λ^α auch die Winkelmessung bestimmt und nach Bem. a mit der Fortsetzung einer Ähnlichkeit verträglich ist, ist jede Ähnlichkeit winkeltreu.

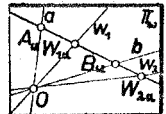
(f) Für jede Translation und jede zentrische Streckung gilt $\alpha | \pi_\omega = 1$ und daher ist nach Bem.a jede Translation und jede zentrische Streckung eine Ähnlichkeit.

(g) Ist $\hat{\sigma}_\alpha$ eine Spiegelung an einer Hyperebene π_α , so wird $\hat{\sigma}_\alpha$ durch eine harmonische Homologie σ_α mit eigentlicher Achse π_α und dem Fernzentrum Z fortgesetzt. Aus $Z(\hat{\sigma}_\alpha | \pi_\omega) = Z$ folgt mit Bem.a dann $Z(\sigma_\alpha | \pi_\omega) \cdot \lambda^\alpha = Z \lambda^\alpha = Z \lambda^\alpha \cdot (\sigma_\alpha | \pi_\omega)^* \Rightarrow$ die Kogerade $Z \lambda^\alpha$ in π_ω bleibt unter $\sigma_\alpha | \pi_\omega$ als Ganzes fest. Da λ^α elliptisch ist, geht $Z \lambda^\alpha$ nicht durch Z ; die einzige Kogerade in π_ω nicht durch Z , die bei $\sigma_\alpha | \pi_\omega$ festbleibt, ist aber $\pi_\omega \cap \pi_\alpha \Rightarrow Z \lambda^\alpha = \pi_\omega \cap \pi_\alpha$, d.h. das Zentrum Z bestimmt die zur Achse π_α orthogonale Richtung. Umgekehrt sind dadurch die ähnlichen Spiegelungen an Hyperebenen auch gekennzeichnet, denn mit $Z \lambda^\alpha = \pi_\omega \cap \pi_\alpha$ ist $\sigma_\alpha | \pi_\omega$ eine harmonische automorphe Homologie in π_ω , bei der das Zentrum Z und die Achse $Z \lambda^\alpha$ in λ^α Pol und Polarhyperebene (in π_ω) sind; nach 5.5, Folg.6 kommutieren dann $\sigma_\alpha | \pi_\omega$ und λ^α . Eine Spiegelung an einer Hyperebene π_α heißt "orthogonale Symmetrie an π_α ", wenn π_α zu den Kollineationsstrahlen orthogonal ist. Die ähnlichen Spiegelungen an Hyperebenen sind somit genau die orthogonalen Symmetrien an Hyperebenen.

(h) Seien a und b zwei verschiedene einander schneidende Geraden durch den eigentlichen Punkt O mit den Fernpunkten A_u und B_u . Zwei Geraden w_1 und w_2 mit den Fernpunkten W_{1u} und W_{2u} heißen "Winkelsymmetralen von a und b ", wenn gilt:

- 1) w_1, w_2, a, b komplanar und kopunktal;
- 2) $W_{1u} = W_{2u}$, d.h. die Fernpunkte W_{1u} und W_{2u} sind in λ^α konjugiert;
- 3) $H(W_{1u}, W_{2u}; A_u, B_u)$.

Nach 7.2, Folg.2, Anw.f existiert genau ein solches Geradenpaar, denn λ^α bestimmt auf $A_u B_u$ eine elliptische projektive Involution konjugierter Punkte. Der Name Winkelsymmetralen für diese beiden Geraden ist sinnvoll: Die Kogerade $W_{2u} \lambda^\alpha$ geht durch W_{1u} und $\pi_\alpha = O \vee W_{2u} \lambda^\alpha$ ist eine Hyperebene in π . Die harmonische Homologie mit dem Zentrum W_{2u} und der Achse π_α leistet $a \mapsto b, w_1 \mapsto w_2$,



$w_1 \rightarrow w_2$, ist wegen $W_{2n} \lambda^a = \mathbb{W}_a \wedge \mathbb{W}_a$ eine orthogonale Symmetrie und daher als Ähnlichkeit nach Bem. e winkeltreu $\Rightarrow \angle(a, w_1) = \angle(a, w_2) \wedge \angle(b, w_1) = \angle(b, w_2)$.

Sind $\{O, P_1, \dots, P_n\}$ und $\{O', P'_1, \dots, P'_n\}$ zwei kartesische Simplexes, so existiert genau eine Ähnlichkeit $\hat{\alpha}$ mit $O \hat{\alpha} = O' \wedge P_j \hat{\alpha} = P'_j$ für $j=1, \dots, n$.

Bew.: Da $AGL(\mathbb{W}(R))$ auf der Menge der Simplexes scharf transitiv operiert, ist zu zeigen, daß die durch die beiden Simplexes eindeutig bestimmte Affinität $\hat{\alpha}$ eine Ähnlichkeit ist. Es muß also gelten: Führt eine Affinität einen kartesischen Simplex in einen kartesischen Simplex über, so ist sie eine Ähnlichkeit. Die Affinität $\hat{\alpha}$ wird unter Benützung der beiden kartesischen Koordinatensysteme durch $\sigma' = \sigma g + \tau$ mit $g \in GL(n(R))$ beschrieben; wegen $O \hat{\alpha} = O'$ gilt $\sigma \xrightarrow{\hat{\alpha}} \sigma' \Rightarrow \tau = \sigma$ und wegen $P_j \hat{\alpha} = P'_j$ gilt $\sigma_j = (\delta'_1, \dots, \delta'_n) \rightarrow \tau_j = (\delta'_1, \dots, \delta'_n) \Rightarrow g = I$, also $\sigma' = \sigma$. Die Sphäre ϕ um O durch die Punkte P_j mit der Gleichung $-(x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = 0$ wird durch die durch $\hat{\alpha}$ bestimmte Kollineation α auf die Quadrik ϕ' mit der Gleichung $-(x^0')^2 + (x^1')^2 + \dots + (x^n')^2 = 0$ abgebildet, welche wegen Folg. 4, Bem. b ebenfalls eine Sphäre ist. Da $\hat{\alpha}$ die Sphäre ϕ in die Sphäre ϕ' überführt, ist $\hat{\alpha}$ nach Bem. d eine Ähnlichkeit. 

Bemerkungen: (a) Die Zusammensetzung zweier Ähnlichkeiten ist eine Ähnlichkeit und ebenso ist die Inverse einer Ähnlichkeit eine Ähnlichkeit (vgl. Def. 7.4e). Alle Ähnlichkeiten bilden die Ähnlichkeitsgruppe $AGO(A(R))$.

(b) Eine Ähnlichkeit heißt gleich- bzw. gegensinnig, wenn sie als Affinität gleich- bzw. gegensinnig ist. Alle gleichsinnigen Ähnlichkeiten bilden die Gruppe $AGO(A(R))$, dagegen bilden die gegensinnigen Ähnlichkeiten keine Gruppe.

(c) Die Gruppe $AGO(A(R))$ operiert scharf transitiv auf der Menge der kartesischen Simplexes. Die Menge der kartesischen Simplexes zerfällt dabei in zwei Orientierungsklassen (vgl. Def. 7.2, Bem. b).

SATZ 7.4: Ein reeller affiner Raum besitzt eine Orthogonalitätsstruktur, wenn er isomorph zu einem projektiv eingebetteten reellen affinen Raum ist, in dessen Fernhyperebene eine elliptische Polarität (eine elliptische projektive Involution) als absolut ausgezeichnet ist. Durch die Orthogonalitätsstruktur wird ein Winkel zwischen ungerichteten Geraden festgelegt, der

unabhängig von der Reihenfolge der Winkelschenkel ist und im Vektorraum der Translationen bis auf einen Faktor ein inneres Produkt bestimmt. Jede Sphäre ist durch Mittelpunkt und einen Punkt eindeutig bestimmt und Orthogonaltrajektorie ihres Durchmesserbündels. Alle Ähnlichkeiten bilden die Ähnlichkeitsgruppe, welche auf der Menge der kartesischen Simplizes scharf transitiv operiert.

7.5. Die reelle affine Ebene mit Orthogonalitätsstruktur

Folgerungen:

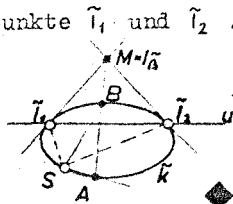
1) Ist S ein Punkt von $A(R) \cong \pi(R) \setminus u$, so ist die Abbildung $\varphi: \mathcal{G}_S \rightarrow \mathcal{G}_S$, welche jeder Geraden $x \in \mathcal{G}_S$ die Gerade $x\varphi \in \mathcal{G}_S$ mit $x\varphi \perp x$ zuordnet, eine elliptische projektive Involution, nämlich die Projektion der absoluten Involution λ^a aus S . Diese Involution φ heißt die "Rechtwinkelinvolution" um S .

Anwendungen:

(a) In $\tilde{\pi}(\mathbb{C})$ gilt für eine projektive Involution $\beta: \mathcal{G}_S \rightarrow \mathcal{G}_S$ dann $\beta = \varphi \iff (S\tilde{l}_j)\tilde{\beta} = S\tilde{l}_j; (j=1,2)$.

(b) Die projektive Involution konjugierter Durchmesser eines Kreises ist nach Def.7.4c die Rechtwinkelinvolution; daher verträgt jeder Kreis die orthogonale Symmetrie an jedem Durchmesser. Jeder Winkel, dessen Scheitel S auf dem Kreis liegt und dessen Schenkel durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, ist ein rechter Winkel (Satz von THALES); ist umgekehrt der Scheitel eines rechten Winkels ein Punkt eines Kreises, so liegen die Restschnittpunkte der Winkelschenkel mit dem Kreis auf einem Durchmesser.

Bew.: In $\tilde{\pi}(\mathbb{C})$ geht $\tilde{k}$ durch die absoluten Kreispunkte $\tilde{l}_1$ und $\tilde{l}_2$. Die Durchmesserendpunkte A, B sind in jener projektiven Involution $\beta: k \dashrightarrow k$ zugeordnet, die den Mittelpunkt M als Involutionzentrum und daher die absoluten Punkte $\tilde{l}_1$ und $\tilde{l}_2$ als Fixpunkte hat; nach 1.10. gilt dann
 $H(\tilde{l}_1; \tilde{l}_2; A, B) \iff$
 $H(S\tilde{l}_1; S\tilde{l}_2; SA, SB) \iff SA \perp SB$.



Bemerkung: Überträgt man die Rechtwinkelinvolution φ in $\mathcal{G}_S$ auf einen Steinerkreis k durch S , so ist das Involutionzentrum I_φ der Mittelpunkt von k .

(c) Ist $\beta: \mathcal{G}_S \rightarrow \mathcal{G}_S$ eine beliebige von g verschiedene projektive Involution, so existiert nach 7.2, Folg. 2, Anw. f genau ein in β und g gemeinsam zugeordnetes Geradenpaar, also zwei in β zugeordnete normale Geraden ("Normalgeradenpaar von β ").

Bemerkungen: (a) Dieses Geradenpaar wird nach Übergang zu einem Steinerkreis k mit Mittelpunkt $M=I_g$ durch die Gerade $I_\beta I_g$ aus k ausgeschnitten.

(b) Existieren in einer projektiven Involution β zwei Normalgeradenpaare, so ist β die Rechtwinkelinvolution g .

(d) DEF.: Jeder Durchmesser eines Mittelpunktkegelschnitts k , der zu seinem konjugierten Durchmesser orthogonal ist, heißt eine "Achse von k " und jeder Punkt von k auf einer Achse ein "Scheitel von k ". Ein durch zwei orthogonale Achsen bestimmtes Poldreieck von k heißt "Hauptpoldreieck".

Ein Mittelpunktkegelschnitt gestattet die orthogonale Symmetrie an jeder Achse. Jeder Durchmesser eines Kreises ist eine Achse; ein von einem Kreis verschiedener Mittelpunktkegelschnitt besitzt genau zwei Achsen. Ist σ die orthogonale Symmetrie an einer Achse einer Hyperbel k , so führt diese die Asymptoten notwendig ineinander über und daher sind die Achsen nach 7.4, Folg. 5, Bem. h die Winkelsymmetralen der Asymptoten.

(e) Je zwei orthogonale Durchmesser eines Kreises k bestimmen ein Hauptpoldreieck. Ist k ein Mittelpunktkegelschnitt verschieden von einem Kreis mit den Achsen a_1 und a_2 , so ist $\{M, a_1 \cdot u, a_2 \cdot u\}$ das einzige Hauptpoldreieck. Für eine Hyperbel ist M ein Außenpunkt, für eine Ellipse ist M ein Innenpunkt.

Aus dem Hauptpoldreieck kann ein kartesisches Koordinatensystem gebildet werden, wobei die Ferngerade u die Gleichung $x^0=0$ hat; dann lautet nach 5.6 die Gleichung des Kegelschnitts

$$\lambda_0(x^0)^2 + \lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 = 0 \text{ mit } \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \neq 0.$$

Damit $M=(1,0,0)R$ Innenpunkt bzw. Außenpunkt ist, muß $\text{sign } \lambda_1 = -\text{sign } \lambda_2$ bzw. $\text{sign } \lambda_1 \neq \text{sign } \lambda_2$ gelten, damit kein Kreis vorliegt, muß $\lambda_1 + \lambda_2$ nach 7.4, Folg. 4 gelten. Beachtet man noch, daß $k \neq \emptyset$ gilt, so folgt nach Übergang zu inhomogenen Koordinaten als Gleichung für eine

$$\begin{aligned} \text{Ellipse} & \dots \lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 = 1 & (\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2, \text{ falls } k \text{ kein Kreis ist}) \\ \text{Hyperbel} & \dots \lambda_1^2 x_1^2 - \lambda_2^2 x_2^2 = 1. \end{aligned}$$

Eine Ellipse bzw. Hyperbel hat somit vier bzw. zwei Scheitel.

Es folgt: In AE sind die hier definierten Ellipsen und Hyperbeln genau die elementargeometrischen Ellipsen und Hyperbeln.

(f) DEF.: Bin Durchmesser einer Parabel k , der normal zur Tangente in seinem eigentlichen Schnittpunkt A mit k ist, heißt "Achse von k " und A "Scheitel von k ".

Ist U der Fernpunkt der Parabel k , so ist die Achse a von k durch ihren Fernpunkt $U\lambda^\alpha$ eindeutig bestimmt.

Wir wählen $U=(0,1,0)R$, $U\lambda^\alpha=(0,0,1)R$,

$A=(1,0,0)R$; dann ist $x^0=0$ bzw. $x^1=0$

die Tangente in U bzw. A ; ferner sei

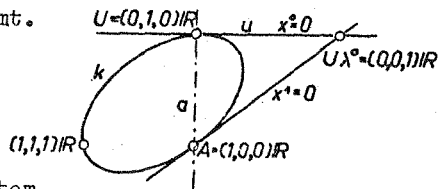
$(1,1,1)R$ ein Punkt von k . Aus $U, U\lambda^\alpha, A$

kann ein kartesisches Koordinatensystem

gebildet werden; die Gleichung der Parabel lautet $(x^2)^2 - x^0 x^1 = 0$,

und nach Übergang zu inhomogenen Koordinaten gilt für eine

Parabel.... $x^1 - (x^2)^2 = 0$.



Es folgt: In AE sind die hier definierten Parabeln genau die elementargeometrischen Parabeln.

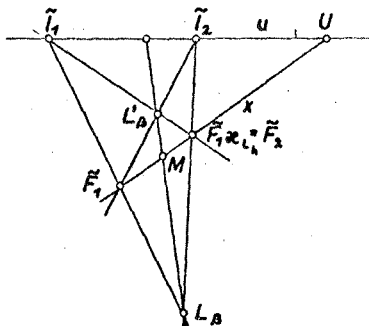
Bemerkung: Je zwei Parabeln sind ähnlich, denn die Normalform in einem geeigneten kartesischen Koordinatensystem weist keine individuelle Konstante auf.

(g) Ist $\beta: \mathcal{P}_x \rightarrow \mathcal{P}_x$ eine elliptische projektive Involution mit dem Zentralpunkt M ($\in \mathcal{P}$), dann gibt es auf einer Normalen zu x durch M zwei bezüglich x symmetrische Punkte L_β und L'_β so, daß β aus L_β und L'_β durch die Rechtwinkelinvolution projiziert wird (L_β und L'_β heißen die "Laguerrevertreter von β ").

Bew.: In $\tilde{\pi}$ hat $\tilde{\beta}$ zwei $\alpha_{1,2}$ -zugeordnete Fixpunkte $\tilde{F}_1$ und $\tilde{F}_2 = \tilde{F}_1 \alpha_{1,2}$ mit $H(M, U; \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$; diese Fixpunkte müssen nach Anw.a aus L_β notwendig durch isotrope Geraden projiziert werden $\Rightarrow$

$L_\beta = \{ \tilde{L}_1 \tilde{F}_1 \} \cdot \{ \tilde{L}_2 \tilde{F}_2 \} \quad (\Rightarrow \text{reell}) \wedge$
 $L'_\beta = \{ \tilde{L}_1 \tilde{F}_2 \} \cdot \{ \tilde{L}_2 \tilde{F}_1 \} \quad (\Rightarrow \text{reell}).$

Die orthogonale Symmetrie $\tilde{\sigma}_x$ an x muß als Ähnlichkeit in der komplexen Fortsetzung das Paar $(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)$ als Ganzes festlassen, und da außerhalb der Achse x nicht zwei Fixpunkte existieren können,



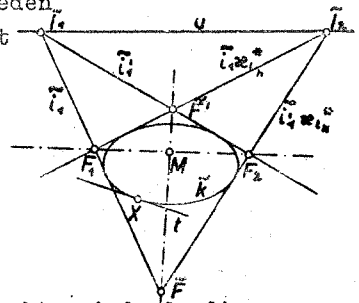
werden bei $\tilde{\sigma}_x$ die Punkte $\tilde{T}_1$ und $\tilde{T}_2$ vertauscht $\Rightarrow L_\Delta \tilde{\sigma}_x = L'_\Delta \Rightarrow L_\Delta L'_\Delta \perp x$. Der Schnittpunkt von $L_\Delta L'_\Delta$ mit x ist notwendig der Zentralpunkt M , da dieser Schnittpunkt nach der Inzidenztabelle zum Fernpunkt U von x bezüglich $\tilde{F}_1$ und $\tilde{F}_2$ harmonisch liegt.

(h) DEF.: Ist k ein Kegelschnitt in einer reellen projektiv eingebetteten affinen Ebene $A(R)$ mit Orthogonalitätsstruktur, so heißt ein Punkt $F \notin k$ ein Brennpunkt von k , wenn die projektive Involution bezüglich k konjugierter Geraden um F die Rechtwinkelinvolution ist.

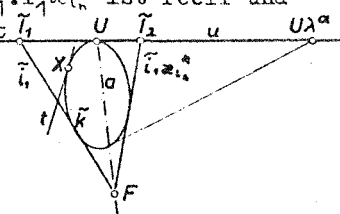
Zur Bestimmung der Brennpunkte benutzen wir die komplexe Fortsetzung von $A(R)$. Nach Anw. a gilt: F ist Brennpunkt $\Leftrightarrow F$ ist Schnittpunkt von konjugiert isotropen Tangenten von $\tilde{k}$. Nach 7.3 gilt: Ist $\tilde{t}$ eine Tangente von $\tilde{k}$ durch $\tilde{t}_1$, so ist die konjugiert imaginäre Gerade $\tilde{t} \kappa_{i_n}^*$ auch Tangente von $\tilde{k}$, und zwar durch $\tilde{t}_2 \kappa_{i_n} = \tilde{T}_2$.

Ist k ein Kreis, dann geht $\tilde{k}$ durch $\tilde{T}_1$ und $\tilde{T}_2$, und es gibt genau zwei isotrope Tangenten an $\tilde{k}$; ihr reeller Schnittpunkt ist der Mittelpunkt M von $k \Rightarrow$ Der Mittelpunkt ist der einzige Brennpunkt eines Kreises.

Ist k ein Mittelpunktkegelschnitt verschieden von einem Kreis, so ist $\tilde{k}$ ein Kegelschnitt weder durch $\tilde{T}_1$ noch durch $\tilde{T}_2$; durch $\tilde{T}_1$ gehen zwei verschiedene Tangenten $\tilde{t}_1, \tilde{t}_1'$ an $\tilde{k}$ und $\tilde{t}_1 \kappa_{i_n}^*$ und $\tilde{t}_1' \kappa_{i_n}^*$ sind die zwei verschiedenen Tangenten aus $\tilde{T}_1 \kappa_{i_n} = \tilde{T}_2$ an $\tilde{k}$. Die Punkte $F_1 := \tilde{t}_1 \cdot \tilde{t}_1' \kappa_{i_n}^*$ und $F_2 := \tilde{t}_1' \cdot \tilde{t}_1 \kappa_{i_n}^*$ sind nach 7.2 reell, also Brennpunkte, während $\tilde{F} := \tilde{t}_1' \cdot \tilde{t}_1 \kappa_{i_n}^*$ und $\tilde{F}' := \tilde{t}_1 \kappa_{i_n}^* \cdot \tilde{t}_1' = \tilde{F} \kappa_{i_n}$ konjugiert imaginäre Punkte sind, da die isotropen Geraden $\tilde{t}_1$ und $\tilde{t}_1'$ nach 7.2 nur genau einen reellen Punkt tragen. Das isotrope Tangentenvierseit besitzt als Diagonaldreieck das reelle Földreieck $\{F_1 F_2, \tilde{F} \tilde{F}', u\} \Rightarrow F_1 F_2 \cdot \tilde{F} \tilde{F}' = M$ ist der Mittelpunkt und $F_1 F_2, \tilde{F} \tilde{F}'$ sind konjugierte Durchmesser. Da ferner nach 1.10 gilt $H(M\tilde{t}_1, M\tilde{t}_1'; M\tilde{F}, M\tilde{F}') \Rightarrow F_1 F_2 \perp \tilde{F} \tilde{F}' \Rightarrow F_1 F_2$ und $\tilde{F} \tilde{F}' \cap \pi(R)$ sind die Achsen von k . Die harmonische Homologie $\tilde{\sigma}_M$ leistet $\tilde{t}_1 \rightarrow \tilde{t}_1', \tilde{t}_1 \kappa_{i_n}^* \rightarrow \tilde{t}_1' \kappa_{i_n}^* \Rightarrow F_1 \rightarrow F_2$. Jeder von einem Kreis verschiedene Mittelpunktkegelschnitt besitzt somit genau zwei Brennpunkte, die auf einer Achse ("Hauptachse") liegen und zum Mittelpunkt M symmetrisch sind.



Ist k eine Parabel, so existiert aus $\tilde{l}_1$ neben u noch genau eine isotrope Tangente $\tilde{i}_1$ an $\tilde{k}$ und $\tilde{i}_1 \cdot \tilde{i}_1^*$ ist dann die einzige isotrope Tangente aus $\tilde{l}_2 = \tilde{l}_1 \cdot \tilde{i}_1^*$ an $\tilde{k}$. Der Punkt $F := \tilde{i}_1 \cdot \tilde{i}_1^*$ ist reell und der einzige Brennpunkt der Parabel. F liegt auf der Achse a von k : Da $\tilde{l}_1$ und $\tilde{l}_2$ Fixpunkte von $\tilde{\lambda}^a$ sind, gilt $H(U, U\lambda^a; \tilde{l}_1, \tilde{l}_2) \Rightarrow$ die harmonische Homologie $\tilde{\sigma}_{U\lambda^a}$ leistet $\tilde{k} \mapsto \tilde{k}$ und $\tilde{l}_1 \mapsto \tilde{l}_2 \Rightarrow \tilde{i}_1 \mapsto \tilde{i}_1^* \Rightarrow FI(U\lambda^a)_{\lambda_k} = a$.

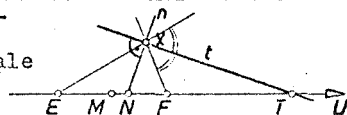


Jede Parabel hat genau einen Brennpunkt, und dieser liegt auf der Achse.

Bemerkungen: (a) Definiert man nach J. PLÜCKER in $\tilde{\pi}$ einen Brennpunkt als Schnittpunkt isotroper Kurventangenten, dann hat ein von einem Kreis verschiedener Mittelpunktkegelschnitt vier Brennpunkte in $\tilde{\pi}$.

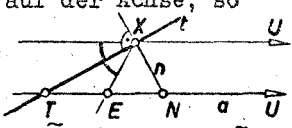
(b) In AE stimmen die von uns eingeführten Brennpunkte für von Kreisen verschiedene Mittelpunktkegelschnitte und für Parabeln und mit den elementargeometrischen Brennpunkten überein.

Bew.: (a) Sei k ein Mittelpunktkegelschnitt mit den elementaren Brennpunkten E und F und $X \in \pi$ ein Punkt von k auf keiner Achse. Die Tangente t in X ist nach der Elementargeometrie eine Winkelsymmetrale der Leitlinien XE und XF , die zweite Winkelsymmetrale ist die Normale n zu t in $X \Rightarrow H(E, F; T, N)$ nach 7.4, Folg. 5, Bem. h. Wegen $EG_N = F$ gilt $H(E, F; M, U)$, d. h. E, F sind in den projektiven hyperbolischen Involutionen α bzw. β mit den Fixpunkten T, N bzw. M, U zugeordnet.

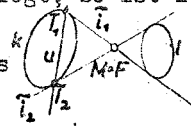


Da α und β wegen $\alpha + \beta$ nach 1.10 höchstens ein gemeinsames Punktepaar besitzen, sind E und F durch diese beiden harmonischen Würfe eindeutig festgelegt. Es genügt daher zu zeigen, daß auch F_1 und F_2 zu M, U und zu N, T harmonisch liegen.

Wir führen die Betrachtungen wieder in $\tilde{\pi}$, sodaß auf jeder Achse zwei Brennpunkte liegen. Sind F_1, F_2 die Brennpunkte auf EF , so gilt sicher $H(F_1, F_2; M, U)$. Die vier isotropen Tangenten von k bestimmen ein Vierseit in $\tilde{\pi}$ und sind somit Grundtangente einer Kegelschnittschar 1. Art, zu der auch k gehört. Da $X \in k$ auf keiner Achse von k liegt, gilt nach dem Desarguesschen Involutionsatz: Die Tangenten aus X an die Scharkurven sind in einer projektiven Involution $\tilde{\alpha}$ zugeordnet, der die Paare von Verbindungsgeraden mit den Gegeneckenpaaren des Grundvierseits angehören, und die Fixgeraden t, t' von $\tilde{\alpha}$ sind die Tangenten an die Scharkegelschnitte durch X . Somit gilt $(Xl_1)\tilde{\alpha} = Xl_2, t\tilde{\alpha} = t' \Rightarrow H(Xl_1, Xl_2; t, t') \Rightarrow t' \perp t \Rightarrow t' \perp n$ (der zweite Scharkegelschnitt durch X durchsetzt somit k in X orthogonal) $\Rightarrow H(Xl_1, Xl_2; t, n)$. Nach dem Desarguesschen Involutionsatz leistet $\tilde{\alpha}$ weiters $(XF_1)\tilde{\alpha} = XF_2 \Rightarrow H(XF_1, XF_2; t, t' \perp n) \Rightarrow H(F_1, F_2; T, N)$. Damit sind die Paare $\{E, F\}$ und $\{F_1, F_2\}$ identisch und F_1, F_2 die Brennpunkte von k in $\pi(R)$.

(b) Ist k eine Parabel mit dem Fernpunkt U und dem elementaren Brennpunkt E und $X \in \tilde{\mathcal{P}}$ ein Punkt von k nicht auf der Achse, so halbiert die Parabeltangente t in X nach Sätzen der Elementargeometrie den Winkel $\angle(XE, XU) \Rightarrow H(XE, XU; t, n) \Rightarrow H(E, U; T, N)$. Durch die Punkte U, T, N ist damit E eindeutig bestimmt; um $E=F$ zu zeigen, genügt es $H(F, U; T, N)$ zu erweisen. Durch (U, u) , i_1 und $\tilde{i}_1, \tilde{\alpha}_1^*$ wird in $\tilde{\pi}$ eine Kegelschnittschar 2. Art bestimmt, und diese bestimmt eine Desarguesinvolutions $\tilde{\alpha}$ um X mit $t\tilde{\alpha} = t'$, $(X|_1)\tilde{\alpha} = X|_2$ und $(XF)\tilde{\alpha} = XU \Rightarrow H(X|_1, X|_2; t, t')$ (dabei ist t' die Tangente des zweiten Scharkegelschnitts durch X) $\Rightarrow t \perp t' \Rightarrow t' = n$; außerdem gilt $H(XF, XU; t, t' = n) \Rightarrow H(F, U; T, N)$. 

(c) Alle Mittelpunktkegelschnitte in $\pi(R)$ mit gemeinsamem Brennpunktpaar bzw. alle Parabeln mit gemeinsamem Brennpunkt und gemeinsamer Achse nennt man eine Menge konfokaler Mittelpunktkegelschnitte bzw. konfokaler Parabeln. (In $\tilde{\pi}$ liegt eine Kegelschnittschar 1. bzw. 2. Art vor.) Wie man dem obigen Beweis entnimmt, gilt: Durch jeden Punkt $X \in \tilde{\mathcal{P}}$, der auf keiner Achse liegt, gehen je zwei konfokale Kegelschnitte, die einander in X orthogonal durchsetzen. (Nach der Elementargeometrie sind im Falle konfokaler Mittelpunktkegelschnitte t und n Tangenten an eine Ellipse und eine Hyperbel.)

(d) Folgender Satz vereinfacht konstruktive Anwendungen: Polarisiert man einen Kegelschnitt l an einem Kreis k , dessen Mittelpunkt in einem Brennpunkt F von l liegt, so ist $l\lambda_k$ ein Kreis. In $\tilde{\pi}$ gilt nämlich $\tilde{i}_1, \tilde{\alpha}_1^* = \tilde{i}_1$ und $\tilde{i}_2, \tilde{\alpha}_2^* = \tilde{i}_2$; da $\tilde{i}_1$ und $\tilde{i}_2$ Tangenten von $\tilde{l}$ sind, geht somit $\tilde{l}\tilde{\alpha}_k$ durch $\tilde{i}_1$ und $\tilde{i}_2$, und daher ist $l\lambda_k$ ein Kreis ($l\lambda_k$ trägt sicher reelle Punkte, da l reelle Tangenten besitzt). 

2) Eine Ähnlichkeit in $\pi(R)$ heißt gleich- bzw. gegensinnig, wenn sie als Affinität gleichsinnig bzw. gegensinnig ist (vgl. 7.4, Folg. 5, Bem. b).

Eine Ähnlichkeit $\tilde{\alpha}_F$ ist genau dann gleichsinnig bzw. gegensinnig, wenn die komplexe Fortsetzung $\tilde{\alpha}_F^*$ ihrer projektiven Fortsetzung α_F die Punkte $\tilde{1}_1$ und $\tilde{1}_2$ einzeln festläßt bzw. vertauscht.

Bew.: Eine Basis $\mathcal{B}$ in $\mathcal{W}$ ist auch Basis in $\tilde{\mathcal{W}}$. Hat α_F bezüglich $\mathcal{B}$ die Darstellung

$(x^0, x^1, x^2)R \mapsto (x^0, a_0^1 x^0 + a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2, a_0^2 x^0 + a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2)R$ mit $\det(a_k^j) \neq 0$ und $a_k^j \in R$, so hat $\tilde{\alpha}_F$ bezüglich $\mathcal{B}$ dieselbe Darstellung mit Koordinaten aus $\mathbb{C}$.

Wird λ^a bezüglich $\mathcal{B}$ durch die Normalform $x^1 y^1 + x^2 y^2 = 0$ beschrieben, so gilt $\tilde{1}_1 = (0, 1, i)\mathbb{C}$ und $\tilde{1}_2 = (0, 1, -i)\mathbb{C}$.

Leistet $\tilde{\alpha}_f$ nun $\tilde{l}_1 \mapsto \tilde{l}_1$, so gilt $1:i=(a_1'+a_2'i)(a_1'+a_2'i) \Rightarrow a_1'^2 = -a_2'^2 \wedge a_1' = a_1' \Rightarrow \det(a_k') = (a_1')^2 + (a_2')^2 > 0 \Rightarrow \tilde{\alpha}_f$ ist gleichsinnig.
 Leistet $\tilde{\alpha}_f$ dagegen $\tilde{l}_1 \mapsto \tilde{l}_2$, so gilt $1:-i=(a_1'+a_2'i)(a_1'+a_2'i) \Rightarrow a_1'^2 = a_2'^2 \wedge a_2' = -a_1' \Rightarrow \det(a_k') = -(a_1')^2 - (a_2')^2 < 0 \Rightarrow \tilde{\alpha}_f$ ist gegensinnig.

Bemerkung: Translationen und Streckungen sind daher gleichsinnige Ähnlichkeiten und orthogonale Symmetrien an Geraden nach Bew. zu Folg. 1, Anw. g gegensinnige Ähnlichkeiten.

Anwendungen:

(a) Ist $\tilde{\alpha}_f$ gegensinnig, d.h. $\tilde{l}_1 \tilde{\alpha}_f \tilde{l}_2$, so gilt für den gemäß der Laguerreformel gemessenen Winkel:

$$\begin{aligned} \angle(a\tilde{l}_1, b\tilde{l}_2) &= \frac{1}{2i} \log DV(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, A_u \tilde{\alpha}_f, B_u \tilde{\alpha}_f) = \frac{1}{2i} \log DV(\tilde{l}_1 \tilde{\alpha}_f, \tilde{l}_2 \tilde{\alpha}_f, A_u, B_u) = \\ &= \frac{1}{2i} \log DV(\tilde{l}_2, \tilde{l}_1, A_u, B_u) = \frac{1}{2i} \log DV(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, A_u, B_u)^{-1} = -\frac{1}{2i} \log DV \\ &= -\frac{1}{2i} \log DV(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, A_u, B_u) = -\angle(a, b) \quad (\text{dabei wurde ausgenutzt, daß } \tilde{\alpha}_f \text{ wegen } \tilde{f} = \iota_c \text{ doppelverhältnistreu ist}). \end{aligned}$$

Bei gegensinnigen Ähnlichkeiten ändert der nach der Laguerreformel bestimmte Winkel das Signum, während bei gleichsinnigen Ähnlichkeiten der Winkel mit Signum festbleibt. Daher ist die Sprechweise sinnvoll:

Die beiden Orientierungen einer euklidischen Ebene bedeuten die Auswahl eines Winkeldrehsinns (in $\tilde{\alpha}$ Auswahl einer bestimmten Reihenfolge von $\tilde{l}_1$ und $\tilde{l}_2$).

(b) DEF.: Die Einschränkung $\tilde{\alpha}^*|Q_s$ einer gleichsinnigen bzw. gegensinnigen Ähnlichkeit $\tilde{\alpha}$ auf ein Geradenbüschel Q_s heißt eine gleich- bzw. gegensinnige Kongruenz des Geradenbüschels.

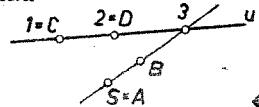
Bemerkungen: (a) Diese Definition ist sinnvoll, da alle Ähnlichkeiten $\tilde{\alpha}$, welche eine gegebene Kongruenz $\tilde{\alpha}^*|Q_s$ fortsetzen, entweder alle gleich- bzw. alle gegensinnig sind. Die Ähnlichkeit $\tilde{\alpha}$ bestimmt nämlich auf u eine Projektivität $\alpha|Q_u$ und für jede $\tilde{\alpha}^*|Q_s$ fortsetzende Ähnlichkeit $\tilde{\alpha}$ gilt $\alpha|Q_u = \alpha|Q_u$; nach 7.2, Folg. 3 stimmt der Sinn von $\tilde{\alpha}$ mit dem Sinn der Projektivität $\alpha|Q_u$ überein.

(b) Ist $\tilde{\alpha}$ eine gleichsinnige Ähnlichkeit, so gilt $\tilde{l}_1 \tilde{\alpha} \tilde{l}_1$ und $\tilde{l}_2 \tilde{\alpha} \tilde{l}_2 \Rightarrow \tilde{\alpha}^*|Q_s$ leistet $S\tilde{l}_1 \mapsto S\tilde{l}_1$ und $S\tilde{l}_2 \mapsto S\tilde{l}_2$; ist $\tilde{\alpha}$ gegensinnig, so leistet $\tilde{\alpha}^*|Q_s$ dann $S\tilde{l}_1 \mapsto S\tilde{l}_2$ und $S\tilde{l}_2 \mapsto S\tilde{l}_1$.

Die komplexe Fortsetzung $\tilde{\alpha}^*|Q_s$ ordnet also notwendig die isotropen Büschelgeraden einander zu.

Eine Projektivität $\beta: \mathcal{G}_s \rightarrow \mathcal{G}_s$ ist genau dann eine gleichsinnige bzw. gegensinnige Kongruenz, wenn in der komplexen Fortsetzung $(S\tilde{l})\tilde{\beta} = S'\tilde{l}_1$ ($\Rightarrow (S\tilde{l}_1)\tilde{\beta} = S'\tilde{l}_2$) bzw. $(S\tilde{l}_1)\tilde{\beta} = S'\tilde{l}_2$ ($\Rightarrow (S\tilde{l}_2)\tilde{\beta} = S'\tilde{l}_1$) gilt. Für eine gleich- bzw. gegensinnige Kongruenz $\beta: \mathcal{G}_s \rightarrow \mathcal{G}_s$ gilt $\angle(a,b) = \angle(a\beta, b\beta)$ bzw. $\angle(a,b) = -\angle(a\beta, b\beta) \quad \forall a, b \in \mathcal{G}_s$, wenn man den Winkel mit Hilfe der Laguerreformel mißt.

Bew.: Es bleibt nur noch zu zeigen, daß diese Bedingungen für eine Kongruenz hinreichend sind. Die jeweils zweite Bedingung folgt aus der ersten, weil $\tilde{\beta}$ als komplexe Fortsetzung einer reellen Projektivität konjugiert imaginäre Geraden in wieder solche abbildet. Die Projektivität $\tilde{\beta}$ läßt sich zu einer Affinität $\tilde{\alpha}$ fortsetzen; sind nämlich $(1,2,3)$ bzw. $(1',2',3')$ drei zugeordnete Paare jener Projektivität, welche durch β auf u ausgeschnitten wird, so wird durch das Viereck $\{S=A, B \in \mathcal{P}_s, \setminus \{S,3\}, 1=C, 2=D\}$ und ein analog konstruiertes Bildviereck genau eine (projektive) Kollineation α bestimmt, welche u als Ganzes festläßt und in der komplexen Fortsetzung die Punkte $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2$ einzeln festläßt bzw. vertauscht.



(c) Eine gleichsinnige Kongruenz $\beta: \mathcal{G}_s \rightarrow \mathcal{G}_s$ eines Geradenbüschels auf sich ist genau dann involutorisch, wenn β die Rechtwinkelinvolution ist.

Bew.: Nach Folg. 1, Anw. a ist die Rechtwinkelinvolution β eine gleichsinnige Kongruenz. Ist umgekehrt β gleichsinnig und involutorisch, so existiert eine gleichsinnige Ähnlichkeit $\tilde{\alpha}$ mit $\tilde{\alpha}^*|_{\mathcal{G}_s} = \beta$ und $\alpha|_{\mathcal{P}_u}$ ist dabei involutorisch $\Rightarrow \tilde{\alpha}|_{\mathcal{P}_u}$ leistet $l_1 \mapsto l_1$ und $l_2 \mapsto l_2$ und ist involutorisch $\Rightarrow \tilde{\alpha}|_{\mathcal{P}_u} = \tilde{\alpha}^* \Rightarrow \beta = \beta$.

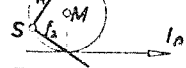
DEF.: Eine gegensinnige involutorische Kongruenz eines Geradenbüschels heißt symmetrische Involution.

Eine projektive Involution eines Geradenbüschels $\mathcal{G}_s$ ist genau dann die symmetrische Involution, wenn sie orthogonale Fixgeraden hat.

Bew.: (a) Die symmetrische Involution $\beta: \mathcal{G}_s \rightarrow \mathcal{G}_s$ bestimmt auf u eine gegensinnige projektive Involution β_u , welche nach 7.2, Folg. 1(a) hyperbolisch ist; sind F_1, F_2 ihre Fixpunkte, so gilt für β_u dann $H(l_1, l_2; F_1, F_2)$. Da $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2$ gilt $\Rightarrow$ die Fixgeraden SF_1 und SF_2 von β sind orthogonal.

(b) Sei β eine projektive Involution $\mathcal{G}_s \rightarrow \mathcal{G}_s$ mit den orthogonalen Fixgeraden f_1 und f_2 ; es genügt zu zeigen, daß eine gegensinnige Ähnlichkeit $\tilde{\alpha}$ existiert mit $\beta = \tilde{\alpha}^*|_{\mathcal{G}_s}$. Die Beschränkung $\tilde{\sigma}^*|_{\mathcal{G}_s}$ der orthogonalen Symmetrie $\tilde{\sigma}$ an f_1 ist eine projektive Involution mit den Fixgeraden f_1 und $f_2 \Rightarrow \tilde{\sigma}^*|_{\mathcal{G}_s} = \beta$; nach Bem. ist $\tilde{\sigma}$ eine gegensinnige Ähnlichkeit.

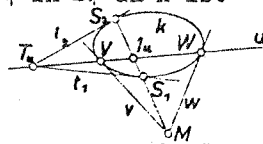
Bemerkung: Projiziert man eine projektive Involution $\beta: \mathcal{G}_S \rightarrow \mathcal{G}_S$ auf einen Steinerkreis, so gilt wegen des Satzes von Thales: β ist die symmetrische Involution $\Leftrightarrow$ Involutionenzzentrum I_β ist ein Fernpunkt.



(d) Alle Punkte eines Kreises werden aus zwei seiner Punkte durch gleichsinnig kongruente, nicht perspektive Geradenbüschel projiziert, und umgekehrt erzeugen zwei solche Büschel einen Kreis. Alle Punkte einer gleichseitigen Hyperbel (d.i. eine Hyperbel mit normalen Asymptoten) werden aus zwei Durchmesserendpunkten durch gegensinnig kongruente, nicht perspektive Geradenbüschel projiziert, und umgekehrt erzeugen zwei solche Büschel eine gleichseitige Hyperbel mit den Büschelzentren als Endpunkte eines Durchmessers.

Bew.: (i) Die beiden Aussagen für den Kreis folgen sofort aus den Definitionen nach Übergang zur komplexen Fortsetzung.

(ii) Ist $\beta: \mathcal{G}_S \rightarrow \mathcal{G}_S$ eine nichtperspektive gegenseitige Kongruenz mit $S_1 \neq S_2$, also $\beta = \alpha * |\mathcal{G}_S$, wobei α eine gegenseitige Ähnlichkeit ist, so geht der durch β erzeugte Kegelschnitt k durch die Fixpunkte von $\alpha|_{\mathcal{Q}_u}$. Dies sind jedoch zwei Fernpunkte V, W zu orthogonalen Richtungen, da für $\alpha|_{\mathcal{Q}_u}$ gilt $H(l_1, l_2; \tilde{\alpha} = l_2; V, W) \Rightarrow k$ ist eine gleichseitige Hyperbel. Die Tangente t_1 in S_1 an k ist $(S_2 S_1) \beta^{-1}$. Mit $1_u := S_1 S_2 \cdot u$ und $S_2 S_1 = S_1 1_u$ gilt $(S_2 S_1) \beta^{-1} = S_1 \cdot 1_u (\alpha|_{\mathcal{Q}_u})^{-1}$; analog erhält man für die Tangente $t_2 = (S_1 S_2) \beta$ in S_2 an k dann $S_2 \cdot 1_u (\alpha|_{\mathcal{Q}_u})$. Da $\alpha|_{\mathcal{Q}_u}$ eine Involution ist gilt $1_u (\alpha|_{\mathcal{Q}_u})^{-1} = 1_u (\alpha|_{\mathcal{Q}_u}) =: t_u \Rightarrow t_1 \parallel t_2 \Rightarrow S_1 S_2$ ist ein Durchmesser.



(iii) Ist umgekehrt k eine gleichseitige Hyperbel und S_1, S_2 zwei Durchmesserendpunkte, so sind die Tangenten t_1 bzw. t_2 in S_1 bzw. S_2 parallele Geraden durch den Pol T_u von $S_1 S_2$. Eine gegenseitige Kongruenz $\beta: \mathcal{G}_S \rightarrow \mathcal{G}_S$ ist eindeutig durch $S_1 V \mapsto S_2 V$ festgelegt, da die Winkel von in β zugeordneten Geradenpaaren entgegengesetzt gleich sind. Da β orthogonale Geraden in orthogonale Geraden überführt, gilt $(S_1 W) \beta = S_2 W \Rightarrow \beta$ erzeugt nach (ii) eine gleichseitige Hyperbel k' mit den gleichen Fernpunkten V, W wie k . Die Tangenten an k' in S_1 und S_2 gehen nach (ii) durch den zu $S_1 S_2 \cdot u$ bezüglich V, W vierten harmonischen Punkt, also durch T_u . Damit haben die Kegelschnitte k und k' die Punkte V und W und die beiden Linienelemente (S_1, t_1) und (S_2, t_2) gemeinsam und sind daher identisch.

(e) DEF.: Ist α eine nicht perspektive, nicht affine (projektive) Autokollineation der reellen projektiven Ebene $\pi(\mathbb{R})$ und trägt die affine Ebene $\hat{\pi} = \pi \setminus u$ eine Orthogonalitätsstruktur, so heißt jeder Punkt $F \in \hat{\pi}$, für den die Projektivität $\alpha^*|_{\mathcal{G}_F}$ eine Kongruenz ist, ein Brennpunkt von α .

In π existieren genau zwei Brennpunkte, und diese sind die beiden Lagerrevertreter F, F' jener projektiven Involution, die bei ∞ in die absolute Involution übergeht.

Bew.: $\infty^* | Q_F: Q_{F'} \rightarrow Q_{F\infty}$ ist genau dann eine Kongruenz, wenn in π entweder $(F | I_1) \tilde{\alpha}^* = F \tilde{\alpha} | I_1$ oder $(F | I_1) \tilde{\alpha}^* = F \tilde{\alpha} | I_2$ gilt.
 Fall 1: $(F | I_1) \tilde{\alpha}^* = F \tilde{\alpha} | I_1 \Rightarrow F \tilde{\alpha} | I_1 \tilde{\alpha} = F \tilde{\alpha} | I_1 \Rightarrow F \tilde{\alpha} | I_1 \tilde{\alpha} | I_1$. Da α_{11} kollineare Lage erhält, F reell ist und α_{11} mit $\tilde{\alpha}$ kommutiert, gilt dann auch $F \tilde{\alpha} | I_2 \tilde{\alpha} | I_1 \Rightarrow F \tilde{\alpha} = (I_1 | I_1 \tilde{\alpha}) \cdot (I_2 | I_2 \tilde{\alpha})$; nach Folg. 1, Anw. g ist der Punkt $F \tilde{\alpha}$ somit ein Lagerrevertreter der projektiven Involution mit den Fixpunkten $I_1 \tilde{\alpha}$ und $I_2 \tilde{\alpha}$, also des $\tilde{\alpha}$ -Bildes der absoluten Involution $\tilde{\lambda}^a$.
 Für den Ursprung F gilt $F = (I_1 \tilde{\alpha}^{-1} | I_1) \cdot (I_2 \tilde{\alpha}^{-1} | I_2)$, d.h. F ist ein Lagerrevertreter des $\tilde{\alpha}^{-1}$ -Bildes von $\tilde{\lambda}^a$.
 Im Fall 2 erschließt man $F' \tilde{\alpha} | I_1 \tilde{\alpha} | I_2 \wedge F' \tilde{\alpha} | I_2 \tilde{\alpha} | I_1 \Rightarrow F' \tilde{\alpha} = (I_2 | I_1 \tilde{\alpha}) \cdot (I_1 | I_2 \tilde{\alpha}) \Rightarrow F' = (I_1 \tilde{\alpha}^{-1} | I_1) \cdot (I_2 \tilde{\alpha}^{-1} | I_2)$, d.h. F' ist der andere Lagerrevertreter des $\tilde{\alpha}^{-1}$ -Bildes von $\tilde{\lambda}^a$. ◆

Bemerkung: Nach 5.9 kann jede kubische Aufgabe in die Bestimmung der Fixpunkte einer projektiven nicht perspektiven Kollineation α übergeführt werden. Diese Aufgabe ist nach 5.9, Folg. 3, (3) äquivalent der Bestimmung der Restschnittpunkte zweier Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Punkt und verschiedenen Tangenten dort. Ist eine Orthogonalitätsstruktur gegeben, so kann man stets erreichen, daß diese beiden Kegelschnitte ein Kreis und eine gleichseitige Hyperbel sind, nämlich die durch $\infty^* | Q_F$ und $\infty^* | Q_{F'}$ erzeugten Kegelschnitte.

7.6. Der reelle dreidimensionale affine Raum mit Orthogonalitätsstruktur

In 7.3 wurde gezeigt, daß in einer reellen projektiven Ebene π eine elliptische Polarität λ^a und eine weitere Polarität λ mindestens ein gemeinsames Poldreieck besitzen. Gehören in der komplexen Fortsetzung $\pi(\mathbb{C})$ die durch λ^a bzw. λ bestimmten Kegelschnitte einem Büschel 1. Art bzw. 3. Art an, so gibt es genau ein bzw. unendlich viele gemeinsame Poldreiecke in $\pi(\mathbb{R})$.

Anwendungen:

(a) Ist Γ ein quadratischer Kegel mit eigentlicher Spitze S , so bestimmt $\Gamma \cap \pi_\infty =: \Gamma_\infty$ eine Polarität λ_{Γ_∞} in π_∞ , welche mit der absoluten Polarität λ^a mindestens ein Poldreieck $X_\infty, Y_\infty, Z_\infty$ gemeinsam hat, und $SX_\infty, SY_\infty, SZ_\infty$ sind paarweise orthogonale Geraden. Jede dieser drei Geraden besitzt im Polarsystem des Kegels eine zu ihr orthogonale Polarebene.

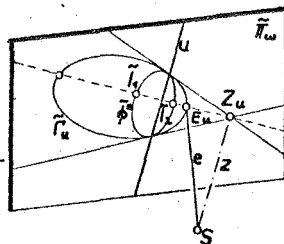
DEF.: Jede Gerade d durch die Spitze eines quadratischen Kegels Γ , der im Polarsystem von Γ eine zu d orthogonale Ebene zugeordnet wird, heißt "Achse" von Γ . Ein durch drei paarweise orthogonale Achsen bestimmtes Dreikant heißt "Hauptpoldreikant von Γ ".

Nach 6.3, Folg.5 gestaltet Γ genau in Richtung seiner Achsen orthogonale Symmetrien und es existiert mindestens ein Hauptpoldreikant $\{SX_u, SY_u, SZ_u\}$ von Γ . Nach 7.2, Folg.2 ist genau eine Ecke des Poldreiecks X_u, Y_u, Z_u von Γ_u Innenpunkt von $\Gamma_u \Rightarrow$ auf genau einer Seite ist die projektive Involution konjugierter Punkte elliptisch und daher schneiden Ebenen durch diese Ferngerade und nicht durch S den Kegel nach Ellipsen. Jeder quadratische Kegel kann somit als "gerader elliptischer Kegel" aufgestellt werden.

Bemerkung: Die konstruktive Behandlung in PAR geschieht zweckmäßig in einer Perspektive mit dem Auge S auf eine Bildebene π , bei der das Bild Γ_u^e von Γ_u der Kegelschnitt $\mathcal{K}_\pi \cap \mathcal{K}_\pi$ und das Bild λ^{ac} von λ^a nach 7.4, Folg.3 die Antipolarität des Distanzkreises k ist. Das gemeinsame Poldreieck der elliptischen Polarität λ^{ac} und des Polarsystems $\lambda_{\Gamma_u^e}$ ist durch die Fixpunkte der Kollineation $\alpha := \lambda_{\Gamma_u^e} \circ (\lambda^{ac})^*$ bestimmt und kann nach 7.5 auf den Schnitt eines Kreises mit einer gleichseitigen Hyperbel zurückgeführt werden, falls α nicht perspektiv ist (konstruktive Durchführung in den Übungen). Die Kollineation α ist perspektiv, wenn unendlich viele gemeinsame Poldreiecke existieren.

Existieren unendlich viele Hauptpoldreikante, so haben $\tilde{\Gamma}_u$ und $\tilde{\Phi}^a$ zwei Linienelemente gemeinsam. Der quadratische Kegel Γ heißt dann ein "Drehkegel" und jene Achse z , die an jedem Hauptpoldreikant beteiligt ist, heißt "Drehachse von Γ ".

Alle Ebenen nicht durch S normal zur Drehachse z schneiden Γ nach Kreisen. Jeder Drehkegel kann somit sogar als "gerader Kreiskegel" aufgestellt werden.



Bemerkungen: (a) Alle Erzeugenden eines Drehkegels Γ bilden mit der Drehachse von Γ einen festen Winkel.

Bew.: Die Homologien $\tilde{E}_1: \tilde{Q}_u \rightarrow \tilde{Q}_u$ mit Zentrum Z_u , der Achse $u := Z\lambda^e = Z\lambda_u$ und $E_u \rightarrow I_1$ bzw. $E_u \rightarrow I_2$ (vgl. Figur) leisten $\tilde{E}_u \rightarrow \tilde{\phi}^e$ und haben das charakteristische Doppelverhältnis $DV(Z, u, E_u, I_1)$ bzw. $DV(Z, u, E_u, I_2) \Rightarrow DV(Z, u, E_u, I_1) = \text{konst.} \forall E_u \in \Gamma_u \wedge E_u \notin u$ für $k=1, 2 \Rightarrow DV(Z, E_u, I_1, u) = DV(Z, E_u, I_2, u) = \text{konst.} \Rightarrow$ der Winkel zwischen z und e ist für alle $e \in \Gamma$ konstant. ◆

(b) Ein quadratischer Kegel Γ wird von einer eigentlichen Ebene α genau dann nach einem Kreis geschnitten, wenn $\tilde{\alpha}$ den Kegelschnitt $\tilde{\Gamma}_u$ in zwei Punkten von $\tilde{\phi}^e$ trifft. Für einen Drehkegel ist daher die Stellung orthogonal zur Drehachse die einzige Kreisschnittstellung. Bei einem Nichtdrehkegel sind die gemeinsamen Punkte von $\tilde{\phi}^e$ und $\tilde{\Gamma}_u$ zu Paaren α_i, α_{i+1} zugeordnet und daher existieren genau zwei (reelle) Kreisschnittstellungen, deren Ferngeraden $\tilde{A}\tilde{A}\alpha_{i_1}$ und $\tilde{B}\tilde{B}\alpha_{i_1}$ sind.



(c) Zur konstruktiven Ermittlung der Kreisschnittstellungen in PAR für einen Nichtdrehkegel benutzen wir wieder die Perspektive aus der Spitze des Kegels. Die Kegelschnitte $\tilde{\Gamma}_u$ und $\tilde{\phi}^e$ in $\tilde{\pi}$ gehören einem Büschel 1. Art an, und die Spurpunkte X_u, Y_u, Z_u der drei Achsen von Γ bilden ihr gemeinsames Poldreieck. Die Polaritäten λ_u und λ^e definieren nach 5.9, Folg. 3 eine Abbildung doppelt konjugierter Punkte, wobei zugeordnete Punkte aus X_u, Y_u und Z_u durch Geraden aus einer projektiven Involution projiziert werden; genau eine dieser drei Involutionen ist hyperbolisch (in der obigen Figur jene in q_{11}), und ihre Fixgeraden a_{11}, b_{11} sind die Zentralbilder der Ferngeraden der beiden Kreisschnittstellungen (konstruktive Durchführung in den Übungen).

(b) Eine Mittelpunktquadrik ϕ zum Mittelpunkt M bestimmt eine Fernspurpolarität λ_u , die mit der elliptischen absoluten Polarität λ^e mindestens ein gemeinsames Poldreieck X_u, Y_u, Z_u besitzt. Das Tetraeder $\{M, X_u, Y_u, Z_u\}$ ist dann ein Poltetraeder, wobei jede eigentliche Kante des Tetraeders normal zu ihrer Polarebene ist.

DEF.: Jeder Durchmesser d einer Mittelpunktquadrik ϕ , dessen Fernpunkt im Polarsystem von ϕ eine zu d orthogonale Ebene zugeordnet wird, heißt "Achse" von ϕ ; die Punkte von ϕ auf einer Achse heißen "Scheitel" von ϕ . Ein durch drei paarweise orthogonale Achsen bestimmtes Poltetraeder von ϕ heißt "Hauptpoltetraeder".

Jede Mittelpunktquadrik gestattet genau in Richtung ihrer Achsen orthogonale Symmetrien und die Achsen eines Hyperboloids sind genau die Achsen seines Asymptotenkegels. Bei einer Sphäre ($\lambda_u = \lambda^e$) ist jeder Durchmesser eine Achse, bei jeder anderen Mittelpunktquadrik existiert entweder genau ein Hauptpoltetraeder oder

unendlich viele; im zweiten Fall (der Fernkegelschnitt $\tilde{\phi}_\infty$ von $\tilde{\phi}$ und $\tilde{\phi}^a$ bilden dann ein Büschel 3. Art in $\tilde{\pi}_\infty$) heißt ϕ eine "Drehquadrik" und die allen Hauptpoltetraedern gemeinsame Achse die "Drehachse" von ϕ .

Benützt man ein Hauptpoltetraeder als kartesisches Koordinatensystem, in dem π_∞ die Gleichung $x^0=0$ hat, so lautet nach 5.5 die Gleichung der Mittelpunktquadrik ϕ zum Mittelpunkt $M=(1,0,0,0)R$: $\lambda_0(x^0)^2 + \lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + \lambda_3(x^3)^2 = 0$ (o.B.d.A. $\text{sign } \lambda_0 = 1$).

Ist ϕ ein Hyperboloid, so ist die Nullstellenmenge von $\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + \lambda_3(x^3)^2$ in $R^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ nicht leer und daher ist nicht $\text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2 = \text{sign } \lambda_3$; wegen $\phi \neq \emptyset$ darf $1 = \text{sign } \lambda_0 = \text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2 = \text{sign } \lambda_3$ nicht eintreten. Daher sind noch folgende Fälle möglich:

λ_1	λ_2	λ_3	Δ
>0	>0	<0	<0
>0	<0	<0	>0
<0	>0	>0	<0
<0	<0	>0	>0
<0	>0	<0	>0

Die letzten drei können durch Änderung der Indizierung von x^1, x^2, x^3 in die beiden ersten übergeführt werden. Im ersten Fall ist ϕ wegen $\Delta < 0$ nach 5.6 oval und im zweiten wegen $\Delta > 0$ ringartig. Ist ϕ da-

gegen ein Ellipsoid, so muß $\text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2 = \text{sign } \lambda_3$ und nicht $1 = \text{sign } \lambda_0 = \text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2 = \text{sign } \lambda_3$ gelten, sodaß $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \mid < 0$ ($\Rightarrow \Delta < 0$) folgt. Nach Übergang zu inhomogenen Koordinaten erhält man

Ellipsoid	$\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + \lambda_3^2 x_3^2 = 1;$
Einschaliges Hyperboloid	$\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 - \lambda_3^2 x_3^2 = 1;$
Zweischaliges Hyperboloid ...	$\lambda_1^2 x_1^2 - \lambda_2^2 x_2^2 - \lambda_3^2 x_3^2 = 1.$

Es folgt: Im AR sind die hier definierte Mittelpunktquadriken genau die elementargeometrischen Ellipsoide, einschaligen und zweischaligen Hyperboloide.

Bemerkungen: (a) Eine Drehquadrik hat unendlich viele Scheitel. Die Anzahl der Scheitel einer Mittelpunktquadrik mit eindeutigen Hauptpoltetraeder folgt aus obigen Gleichungen: Ein Ellipsoid hat sechs, ein einschaliges Hyperboloid vier, ein zweischaliges Hyperboloid zwei Scheitel.

(b) Die Kreisschnittstellungen in $\mathbb{T}(R)$ von ϕ werden durch jene reellen Ferngeraden bestimmt, welche in der komplexen Fortsetzung zwei konjugiert imaginäre gemeinsame Punkte von ϕ_∞ und ϕ^a tragen. Bei einer Sphäre bestimmt jede Ferngerade eine Kreisschnittstellung, bei einer Drehquadrik existiert genau eine, welche λ^a -konjugiert zum Fernpunkt der Drehachse ist, und bei jeder anderen Mittelpunktquadrik zwei, welche die λ_∞ -zugeordneten Paare der gemeinsamen Punkte von ϕ_∞ und ϕ^a verbinden.

DEF.: Ein "Nabelpunkt" einer Quadrik ϕ in $\mathbb{T}(R)$ ist ein eigentlicher Punkt von ϕ , dessen Tangentialebene Kreisschnittstellung besitzt.

(c) In einem Nabelpunkt sind in der komplexen Fortsetzung die Erzeugenden von ϕ konjugiert isotrop; Nabelpunkte können daher nur auf ovalen Quadriken existieren. Auf einer Sphäre ist jeder Punkt Nabelpunkt.

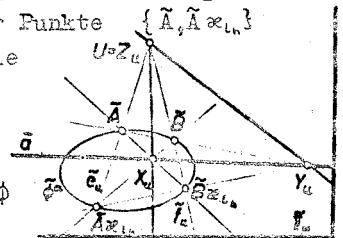
(d) Die Nabelpunkte sind genau die Schnittpunkte der reziproken Polaren einer Kreisschnittstellungsferngeraden mit ϕ . Auf einer ovalen Mittelpunkt-drehquadrik liegen daher höchstens zwei (und diese sind die Scheitel auf der Drehachse), auf einer ovalen Mittelpunkt-nichtdrehquadrik existieren höchstens vier Nabelpunkte.

(e) Daß diese Maximalzahlen die genauen Zahlen sind, erkennt man aus 7.2, Folg.2 und folgendem Hilfssatz: In einem reellen dreidimensionalen projektiven Raum sind von den projektiven Involutionen konjugierter Punkte auf zwei reziproken Polaren g und $g\lambda$ bezüglich einer ovalen Quadrik ϕ genau eine elliptisch und eine hyperbolisch; Ist nämlich $g: x^0 = x^1 = 0$ und $g\lambda: x^2 = x^3 = 0$ und das Koordinatentetraeder ein Poltetraeder, so hat ϕ in $\mathbb{T}(R)$ die Normalform $(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$, woraus die Behauptung folgt.

(c) Ein Paraboloid ϕ berührt $\mathbb{T}_u$ in einem Punkt U ; die reziproke Polare $a := \bar{a}\lambda$, von $U\lambda := \bar{a}\lambda U$ ist eine eigentliche Gerade durch U und schneidet ϕ in einem eigentlichen Punkt.

DEF.: Die reziproke Polare der absoluten Polaren a des Fernberührungspunktes U eines Paraboloids ϕ heißt "Achse" von ϕ und der von U verschiedene Punkt von ϕ auf a heißt "Scheitel" von ϕ . Eine Ebene durch die Achse heißt "Symmetrieebene" von ϕ , wenn ϕ die orthogonale Symmetrie an dieser Ebene gestattet.

Jedes hyperbolische Paraboloid ϕ besitzt zwei Fernerzeugenden e_u, f_u durch U , welche in der komplexen Fortsetzung den nullteiligen Kegelschnitt $\tilde{\phi}$ in zwei Paaren α_{1u} -zugeordneter Punkte $\{\tilde{A}, \tilde{A}\alpha_{1u}\}$ auf $\tilde{e}_u$ und $\{\tilde{B}, \tilde{B}\alpha_{1u}\}$ auf $\tilde{f}_u$ treffen; das reelle Diagonaldreieck $X_u, Y_u, Z_u = U$ dieses Vierecks hat $\bar{a} = X_u Y_u$ als eine Seite, und die beiden orthogonalen Symmetrien an den Ebenen $X_u \vee a$ und $Y_u \vee a$ zum Zentrum Y_u bzw. X_u lassen ϕ fest; ein hyperbolisches Paraboloid besitzt somit zwei zueinander orthogonale Symmetrieebenen, nämlich $X_u \vee a$ und $Y_u \vee a$. Als ringartige Quadrik trägt ein hyperbolisches

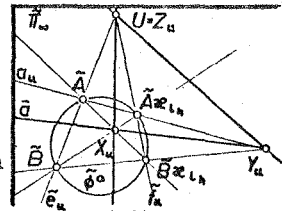


Paraboloid keine Nabelpunkte und es existieren auch keine Kreisschnittstellungen in $\mathbb{T}(R)$, da die einzigen reellen Ferngeraden, die in der komplexen Fortsetzung zwei Punkte von $\tilde{\phi}$ auf $\tilde{\phi}^\alpha$ tragen, die Fernerzeugenden e_u und f_u sind. Sind speziell e_u und f_u absolut konjugiert (d.h. sind die Richtebenen von ϕ orthogonal), so heißt ϕ ein "gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid".

Sind $\tilde{e}_u, \tilde{f}_u$ die Fernerzeugenden der komplexen Fortsetzung eines elliptischen Paraboloids ϕ und $\tilde{e}_u$ (und damit $\tilde{f}_u = \tilde{e}_u \hat{x}_{1n}$) keine Tangente von $\tilde{\phi}^\alpha$, so liegt die analoge Situation wie bei einem hyperbolischen Paraboloid vor mit dem Unterschied, daß die Paare $\hat{x}_{1n}$ -gekoppelter Punkte nun nicht auf je einer Fernerzeugenden liegen.

Wieder existieren zwei zueinander orthogonale Symmetrieebenen $X_u \vee a$ und $Y_u \vee a$. Die beiden reellen Ferngeraden a_u und b_u , die in der komplexen Fortsetzung die konjugiert imaginären Punkte $\tilde{A}, \tilde{A} \hat{x}_{1n}$ bzw. $\tilde{B}, \tilde{B} \hat{x}_{1n}$ tragen, bestimmen die beiden Kreisschnittstellungen. Die zu a_u und b_u reziproken Polaren $a_u \hat{\lambda}_\phi$ und $b_u \hat{\lambda}_\phi$ gehen beide durch U und schneiden ϕ in je einem weiteren eigentlichen Punkt; ein elliptisches Paraboloid trägt somit zwei Nabelpunkte.

Sind bei einem elliptischen Paraboloid speziell $\tilde{e}_u$ (und damit $\tilde{f}_u$) Tangenten von $\tilde{\phi}^\alpha$, so heißt ϕ ein "Drehparaboloid". Jede Ebene durch die Achse ist dann Symmetrieebene, nur der Scheitel ist Nabelpunkt und die zur Achse normale Stellung ist die einzige Kreisschnittstellung.



Legt man den Scheitel in $(1,0,0,0)R$ und benützt X_u, Y_u und $Z_u=U$ zum Aufbau eines kartesischen Koordinatensystems, in dem $\mathbb{T}_u$ die Gleichung $x^0=0$ hat, so lautet die Gleichung der Quadrik nach 6.3:

$x^0 x^3 + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0$ mit $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{R} \wedge \|a_{\alpha\beta}\| \neq 0$. Dabei gilt $H(UX_u, UY_u; e_u, f_u)$ für ein hyperbolisches Paraboloid und $H(UX_u, UY_u; \tilde{e}_u, \tilde{f}_u)$ in der komplexen Fortsetzung für ein elliptisches Paraboloid, so-daß $\{e_u, f_u\}$ bzw. $\{\tilde{e}_u, \tilde{f}_u\}$ die Gleichungen $x^0 = x^1 + \alpha x^2 = 0$ und $x^0 = x^1 - \alpha x^2 = 0$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bzw. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzen. Damit folgt für $\phi \cap \mathbb{P}_\omega$ bzw. $\tilde{\phi} \cap \tilde{\mathbb{P}}_\omega$ dann $0 = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = g((x^1)^2 - \alpha^2 (x^2)^2) \Rightarrow g, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ und $\alpha^2 > 0$ für ein hyperbolisches und $\alpha^2 < 0$ für ein elliptisches Paraboloid. Nach Übergang zu inhomogenen Koordinaten erhält man:

Elliptisches Paraboloid $x_3 + \Lambda_1 x_1^2 + \Lambda_2 x_2^2 = 0$ mit $\text{sign } \Lambda_1 = \text{sign } \Lambda_2$
 Hyperbolisches Paraboloid ... $x_3 + \Lambda_1 x_1^2 + \Lambda_2 x_2^2 = 0$ mit $\text{sign } \Lambda_1 \neq \text{sign } \Lambda_2$

Es folgt: Im AR sind die hier definierten Paraboloiden genau die elementargeometrischen Paraboloiden.

(d) Ist ν eine Nullpolarität, so besitzt die Fernebene ω den Nullpunkt $U := \omega \nu^*$. Die Ferngerade $U\lambda^a := \bar{a}$ geht nicht durch U und ist also keine Nullgerade.

DEF.: Die reziproke Polare der absoluten Polaren des Nullpunktes der Fernebene heißt "Achse" der Nullpolarität (des Gewindes).

Die Achse a ist also jener spezielle Durchmesser, dessen Punkte zu a normale Nullebenen besitzen. Kennt man die Achse a , so ist die Ferngerade $\bar{a}$ der zu a orthogonalen Ebenen die reziproke Polare von a .

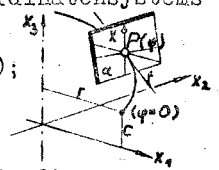
Bemerkungen: (a) Durch euklidische Spezialisierung von 4.7, Folg. 7 ergibt sich: Durch die Achse a und einen zu a windschiefen und nicht orthogonalen eigentlichen Gewindestrahl ist ein Gewinde eindeutig bestimmt.

(b) Die Menge der eigentlichen Geraden eines Gewindes im PAR ist identisch mit der Menge der Bahnnormalen einer stetigen Schraubung um die Gewindeachse.

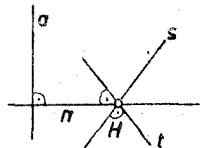
Bew.: (a) Bezüglich eines kartesischen Rechtskoordinatensystems hat eine stetige Schraubung die Parameterdarstellung

$$x^1 = r \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \varphi, \quad x^3 = p\varphi + c \quad (-\infty < \varphi, c < +\infty, r \geq 0);$$

dabei ist p konstant und $\neq 0$. Zu jedem festen r und c und variablem φ gehört eine Bahnkurve, deren Tangente die Richtung $\lambda = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, p) = (-x^2, x^1, p)$ hat. Die Gleichung der Normalebene zu λ durch den Berührungspunkt $q = (x^1, x^2, x^3)$ lautet $\lambda(x - q) = 0$, also $-x^1 x^2 + x^2 x^1 + x^3 p - p x^3 = 0$. Dies ist der Kopunkt $R[-p x^1, -x^2 + x^1, p]$. Die Koordinaten x^i des Punktes P und die Koordinaten a_i der Trägerebene der Bahnnormalen durch P sind also durch $a_1 : a_2 : a_3 = -p x^1 : -x^2 + x^1 : p$ gekoppelt. Dies ist eine Nullpolarität; ihre Achse ist die Schraubachse, da diese Bahnkurve zu jedem ihrer Punkte ist.



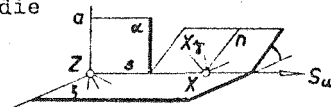
(b) Ist umgekehrt ν eine Nullpolarität, so ist ν durch die Achse a und einen Gewindestrahl s nach (a) festgelegt; durch den Fußpunkt H der zu a und s normalen Geraden n geht genau eine zu s normale Gerade t . Es existiert genau eine stetige Schraubung mit der Achse a und der Schraubtangente t , und das mit dieser Schraubung nach (a) verknüpfte Bahnnormalengewinde



hat a zur Achse und s als Gewindestrahl und stimmt somit nach Bem.a mit dem zu ν gehörigen Gewinde überein.

(c) Eine Nullpolarität gestattet jede Schraubung um seine Achse, da die Zusammensetzung coaxialer Schraubungen kommutativ ist. (Bei Verebnung eines unter Umständen mehrfach umwickelt gedachten Schraubzylinders wird eine Schraublinie geradlinig, und die beim Kommutieren zweier Schraubungen beteiligten Schraublinien liefern in der Abwicklung ein Parallelogramm.)

(d) Ist $\mathcal{N}$ ein parabolisches Netz im PAR (erzeugt durch die Projektivität $\gamma: \mathcal{P}_s \rightarrow \mathcal{E}_s$) um die eigentliche Netzachse s mit dem Fernpunkt S_a , so heißt $S_a \gamma =: \alpha$ die "asymptotische Ebene" von $\mathcal{N}$; in der zu α normalen Ebene ξ durch s gehen alle Netzgeraden durch den Punkt $Z := \xi \gamma^{-1}$, den "Zentralpunkt" von $\mathcal{N}$. Jedes parabolische Netz $\mathcal{N}$ kann in unendlich viele Gewinde eingebettet werden (vgl. 4.9, Folg. 2, Bem.); eines davon kann wie folgt festgelegt werden: Die Gewindeachse a sei die Normale zu ξ in Z und die in $X\gamma$ liegende zu s normale Gerade n durch $X \in \mathcal{P}_s \setminus \{Z\}$ ein Gewindestrahl. Für die durch a und n bestimmte Nullpolarität ν ergibt sich dann dieselbe Gleichung wie in (b). Dem Punkt $X = (1, x^1, 0, 0)R \in \mathcal{P}_s \setminus \{Z, S_a\}$ wird durch ν und γ die Ebene $X\gamma = X\gamma = R[0, -x^1, 0, p]$, d.h. $-X^1 x^1 + X^3 p = 0$ zugeordnet. Mit $x^1 = ZX$ und $X^3 = \text{tg } \angle(Z\gamma, X\gamma)$ entsteht



$$ZX = p \operatorname{tg} \angle(Z\gamma, X\gamma).$$

7.7: Kreisgeometrie in einer reellen affinen Ebene mit Orthogonalitätsstruktur

DEF. 7.7a: Die Vereinigungsmenge der Menge $\mathcal{G}$ aller Geraden von $A^2(R)$ und der Menge $\mathcal{K}$ aller Kreise von $A^2(R)$ heißt die Menge der Möbiuskreise $\mathcal{M}$. Wird der Punktmenge $\mathcal{P}$ von $A^2(R)$ ein uneigentlicher Punkt ∞ hinzugefügt, der definitionsgemäß in jeder Geraden und in keinem Kreis enthalten ist, so heißt die Inzidenzstruktur

$$\pi_M = \{ \mathcal{P}_M := \mathcal{P} \cup \{\infty\}, \mathcal{G}_M := \mathcal{M} = \mathcal{G} \cup \mathcal{K}, \epsilon \}$$

eine Möbiusebene.

Folgerungen:

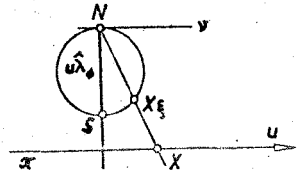
1) Wir denken die reelle affine Ebene $A^2(R) = \hat{\pi}$ in einen reellen affinen Raum $A^3(R) = \hat{\mathbb{T}}$ mit Orthogonalitätsstruktur eingebettet; dadurch ist in $\hat{\pi}$ eine Orthogonalitätsstruktur kanonisch mitbe-

stimmt. Weiters sei ϕ eine Sphäre des $A^3(R) = \tilde{\pi}$. Auf der Sphäre können wir folgende Inzidenzstruktur erklären:

$$\phi_M := \{ \mathcal{P}_{\phi_M} = \phi, \mathcal{U}_{\phi_M} = \text{Menge aller Kreise auf } \phi, \epsilon \}.$$

Die Möbiusebene π_M ist isomorph zur Inzidenzstruktur ϕ_M .

Bew.: (a) Zuerst erklären wir eine Bijektion $\xi: \mathcal{P}_M \rightarrow \phi$. Da die Sphäre ϕ auf der Ferngeraden u von π eine elliptische projektive Involution konjugierter Punkte bestimmt, durchstößt die Polare $u\lambda_\phi$ nach 7.6, Anw.b, Bem.e die ovale Quadrik ϕ in zwei verschiedenen Punkten N und S ; gelte o.B.d.A. $N \notin \pi$. Die Tangentialebene $N\lambda_\phi =: v$ ist parallel zu π . Ist X ein Punkt aus $\mathcal{P}_M$, so liegt NX nicht in der Tangentialebene $N\lambda_\phi$ und NX hat daher mit ϕ noch genau einen von N verschiedenen Restschnittpunkt $X\xi$; zusätzlich definieren wir $\infty \xi := N$. Umgekehrt hat jeder von N verschiedene Sphärenpunkt genau einen Bildpunkt in $\mathcal{P}_M$ bei Projektion aus N und daher ist ξ bijektiv.



(b) Die Elemente von $\mathcal{M}$ sind gewisse Punktmenge; wir untersuchen nun die mit ξ kanonisch verknüpfte Abbildung ξ^* der Punktmenge aus $\mathcal{M}$.

(i) Die Punkte $\in \mathcal{P}$ einer Geraden g aus $\mathcal{M}$ bilden sich bei ξ in die von N verschiedenen Punkte des Schnittkreises der Ebene Ng mit ϕ ab; wegen der Festsetzungen $\infty \in g \wedge \infty \xi = N$ wird die Punktmenge des Möbiuskreises g genau auf die Punktmenge des Kreises $k := \mathcal{P}_{Ng} \cap \phi$ abgebildet. Umgekehrt hat die Punktmenge jedes Kreises auf ϕ , der durch N geht, die um ∞ vermehrte Punktmenge auf der Schnittgeraden seiner Trägerebene ($\neq v$) mit $\tilde{\pi}$ als ξ^{-1} -Bild.

(ii) Ein Kreis k auf ϕ in der Ebene α nicht durch N wird durch ξ^{-1} auf einen Kegelschnitt $k\xi^{-1}$ in $\tilde{\pi}$ abgebildet. In der komplexen Fortsetzung schneidet die Tangentialebene $\tilde{v}$ die Quadrik $\tilde{\phi}$ nach einem Paar niederimaginärer Erzeugender $\tilde{e}_N, \tilde{f}_N$, welche wegen $\tilde{\phi}^a \subset \tilde{\phi}$ den absoluten Kegelschnitt $\tilde{\phi}^a$ in zwei Punkten $\tilde{T}_1$ und $\tilde{T}_2$ treffen; diese Punkte sind wegen $v \parallel \pi$ die absoluten Punkte von $\tilde{\pi}$. Der Kegelschnitt $\tilde{k}$ auf $\tilde{\phi}$ in der Ebene $\tilde{\alpha}$ trifft die beiden Erzeugenden $\tilde{e}_N$ und $\tilde{f}_N$ in zwei Punkten, welche bei der Projektion $\tilde{\xi}^{-1}$ aus N in $\tilde{T}_1$ und $\tilde{T}_2$ übergehen; daher ist $\tilde{k}\xi^{-1}$ ein Kegelschnitt durch $\tilde{T}_1$ und $\tilde{T}_2$, d.h. $k\xi^{-1}$ ist ein Kreis.

Umgekehrt ist ein Kreis l in $\tilde{\pi}$ wegen seiner Erzeugung durch gleichsinnig kongruente Büschel eindeutig durch drei Punkte $A, B, C \in \tilde{\pi}$ bestimmt; die drei Punkte $A\xi, B\xi, C\xi \in \phi$ sind nicht kollinear, da ϕ keine Erzeugenden trägt, und ihre Verbindungsebene schneidet ϕ nach einem Kreis k , der bei ξ^{-1} in einen Kreis $k\xi^{-1}$ durch A, B, C übergeht, d.h. $l = k\xi^{-1}$. Damit ist auch ξ^* bijektiv. Somit sind $\xi: \mathcal{R}_M \rightarrow \phi$ und $\xi^*: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}_{\phi_M}$ als Bijektionen erwiesen. Das Paar (ξ, ξ^*) erhält Inklusionen und Nichtinklusionen und ist daher ein Isomorphismus $\pi_M \rightarrow \phi_M$. ♦

Bemerkungen: (a) Wie man aus dem Beweis erkennt, kann statt der Sphäre auch eine ovale Quadrik benutzt werden, welche in einem Punkt N zwei niederimaginäre isotrope Erzeugenden in einer zu $\tilde{\pi}$ parallelen Tangentialebene besitzt (N ist dann ein Nabelpunkt). Da jede ovale Quadrik nach 7.6 Nabelpunkte besitzt, gilt: Die Punktmenge jeder ovalen Quadrik eines $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ist bijektiv zur Punktmenge einer Möbiusebene π_M .

(b) Ordnet man jedem Kreis der Sphäre ϕ den Pol seiner Trägerebene zu, so ist dies eine Bijektion zwischen den Kreisen auf ϕ und den Außenpunkten von ϕ . Die Zusammensetzung mit ξ liefert: Die Menge der Möbiuskreise $\mathcal{M}$ ist bijektiv zur Menge der Außenpunkte einer Sphäre ϕ (bzw. ovalen Quadrik) in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

(c) Die Abbildung $\xi^{-1}: \phi \rightarrow \mathcal{R}_M$ heißt "stereographische Projektion von ϕ ".

2) Die stereographische Projektion der in N punktierten Sphäre ist winkeltreu (konform), d.h. schneiden einander zwei Kreise auf ϕ in einem von N verschiedenen Punkt T , so ist ihr Schnittwinkel in T gleich dem Winkel der ξ^{-1} -Bildmöbiuskreise.

Bew.: Der Schnittwinkel der beiden Kreise k_1 und k_2 auf ϕ wird in der Tangentialebene τ des Schnittpunktes $T(+N)$ gemessen, gemäß der Formel von Laguerre über das Doppelverhältnis der beiden Kreistangenten t_1 und t_2 und der beiden in $\tilde{\tau}$ liegenden isotropen Geraden durch T . Wegen $\tilde{\phi}^a \subset \tilde{\phi}$ sind dies aber die beiden Erzeugenden $\tilde{e}_T$ und $\tilde{f}_T$ von $\tilde{\phi}$ in $\tilde{\tau}$, d.h. $\Delta(k_1, k_2) = \frac{1}{2i} DV(\tilde{e}_T, \tilde{f}_T, t_1, t_2)$. Die Erzeugende $\tilde{e}_T$ bzw. $\tilde{f}_T$ von $\tilde{\phi}$ trifft $\tilde{f}_N$ bzw. $\tilde{e}_N$, und daher führt die Perspektivität $\beta: \tilde{\pi}_T \rightarrow \tilde{\pi}_N$ dann $\tilde{e}_T$ und $\tilde{f}_T$ in die isotropen Geraden $\tilde{e}_T\tilde{\beta}$ und $\tilde{f}_T\tilde{\beta}$ von $\tilde{\pi}$ durch $T\xi^{-1}$ über. $t_j\tilde{\beta}$ ist entweder die Tangente an den Kreis $k_j\xi^{-1}$ oder die Gerade $k_j\xi^{-1}$. Also gilt $\Delta(k_1\xi^{-1}, k_2\xi^{-1}) = \frac{1}{2i} DV(\tilde{e}_T\tilde{\beta}, \tilde{f}_T\tilde{\beta}, t_1\tilde{\beta}, t_2\tilde{\beta})$.

Da die Perspektivität $\tilde{\sigma}$ doppelverhältnistreu ist, stimmen die beiden Winkel überein. ◆

Bemerkung: Ist k ein Kugelkreis in einer Ebene ε nicht durch N und ist $E = \varepsilon \lambda_{\phi}^*$ der Pol von ε bezüglich ϕ , so durchstößt NE die Ebene π im Mittelpunkt von $k \xi^{-1}$.

Bew.: Da die Erzeugenden von $\tilde{\phi}$ isotrope Geraden sind, ist die projektive Involution konjugierter Tangenten in jedem Sphärenpunkt nach 7.4 die Rechtwinkelinvolution. Die Erzeugenden des Tangentialkegels aus E an ϕ , der ϕ längs k berührt, bilden daher mit der Tangente von k im jeweiligen Berührungspunkt einen rechten Winkel. Bei Projektion aus N bleibt dieser Winkel erhalten; k wird in den Kreis $k \xi^{-1}$ und die Erzeugenden des Tangentialkegels werden wegen $E \in \gamma$ in die Geraden des Büschels $\mathcal{O}_{(NE, \pi)}$ projiziert $\Rightarrow k \xi^{-1}$ ist Orthogonaltrajektorie des Büschels $\mathcal{O}_{(NE, \pi)} \Rightarrow NE \cdot \pi$ ist Mittelpunkt von $k \xi^{-1}$. ◆

3) Jede automorphe Kollineation von ϕ ist ein Automorphismus der Inzidenzstruktur ϕ_M . Die Menge aller Kollineationen des $\Pi^3(R)$, die sich als endliches Produkt von harmonischen automorphen Homologien von ϕ darstellen lassen, bilden eine Gruppe von Automorphismen der Inzidenzstruktur ϕ_M ; es sei ohne Beweis erwähnt, daß diese sogar mit der Gruppe aller Automorphismen von ϕ_M übereinstimmt. Durch Übertragung mittels des Isomorphismus $\xi^{-1}: \phi_M \rightarrow \pi_M$ erhält man hieraus Automorphismen der Möbiusebene ("Möbiustransformationen").

DEF. 7.7b: Ist σ eine harmonische automorphe Homologie von ϕ , so heißt $\mu := \xi \sigma \xi^{-1}: \pi_M \rightarrow \pi_M$ eine Inversion der Möbiusebene.

Aus dem unbewiesenen Satz folgt: Die Gruppe aller Möbiustransformationen besteht aus allen Abbildungen $\pi_M \rightarrow \pi_M$, die endliches Produkt von Inversionen sind.

Man gewinnt Eigenschaften der Inversionen durch Übertragung von Eigenschaften der harmonischen Homologien σ :

(I) Jede Inversion bestimmt einen involutorischen Isomorphismus der Inzidenzstruktur π_M .

(II) Jede Inversion ist gegenseitig winkeltreu.

Bew.: Bei jeder harmonischen Homologie σ werden in der komplexen Fortsetzung die beiden Reguli auf ϕ vertauscht, da jede Erzeugende von $\tilde{\phi}$ in eine Erzeugende von ϕ übergeht, welche diese in einem Punkt der Achse von σ schneidet. Die Winkelmessung in $T \in \phi$

wird durch die Erzeugenden $\tilde{e}_\tau$ und $\tilde{f}_\tau$ bestimmt, wobei bei $\tilde{e}$ gilt $\tilde{e}_\tau \mapsto \tilde{f}_\tau$, $\tilde{f}_\tau \mapsto \tilde{e}_\tau$. Da $\tilde{e}_\tau$ schneidet $\tilde{f}_N$ dagegen $\tilde{f}_\tau$ schneidet $\tilde{e}_N$, führt die Projektion aus N auf $\tilde{\tau}$ von in σ zugeordneten Tangenten in T bzw. $T\sigma$ nach Folg. 2 auf entgegengesetzt gleiche Winkel in $\tilde{\tau}$, falls die Winkel mit der Laguerreformel gemessen werden.

(III) Ist das Zentrum Z von σ ein Außenpunkt von ϕ , so besitzt die Inversion $\mu = \xi \sigma \xi^{-1}$ einen Fixpunktmöbiuskreis m , der für $Z \tilde{\tau} N \lambda_\phi$ ein Kreis und für $Z \tilde{\tau} N \lambda_\phi$ eine Gerade ist. Im ersten Fall wird dem Mittelpunkt M von m durch die Inversion μ der Punkt ∞ zugeordnet und jedem Punkt $X \in \mathcal{P}_\mu \setminus \{M, \infty\}$ der zu X bezüglich m konjugierte Punkt auf dem Durchmesser MX von m ; im zweiten Fall ist die Inversion die orthogonale Symmetrie an der Fixgeraden m . Jeder m orthogonal schneidende Möbiuskreis bleibt bei μ als Ganzes fest.

Bew.: σ / ϕ läßt den Schnittkreis $k := \phi \cap \mathcal{P}_{\lambda_\phi}$ fest. Für $Z \tilde{\tau} N \lambda_\phi$ gilt $N \notin k$ und $k \xi^{-1}$ ist ein Kreis m ; für $Z \tilde{\tau} N \lambda_\phi$ gilt $N \in k$ und $k \xi^{-1}$ ist eine Gerade m .

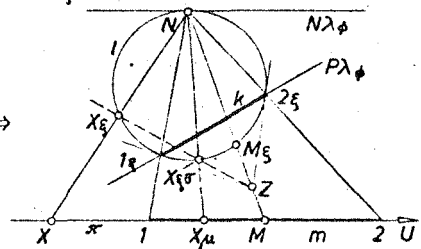
Fall 1: $Z \tilde{\tau} N \lambda_\phi$. Nach Folg. 2, Bem. ist M_ξ der von N verschiedene Restschnittpunkt von NZ mit $\phi \Rightarrow$

$$M_\xi \sigma = N \Rightarrow M_\mu = M_\xi \sigma \xi^{-1} = N \xi^{-1} = \infty.$$

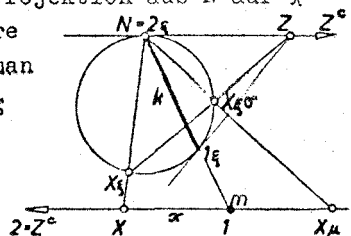
Für $X \in \mathcal{P}_\mu \setminus \{M, \infty\}$ liegen die Punkte X, X_ξ und $X_\xi \sigma$ in der Ebene $\alpha := NZX = NMX \Rightarrow$

$\Rightarrow X_\mu$ liegt auch in dieser Ebene α und demnach sind X, X_μ und M kollinear. Es ist noch zu zeigen, daß X und X_μ polar bezüglich des Kreises $m = k \xi^{-1}$ liegen.

Die Polarität von m bestimmt auf MX eine hyperbolische projektive Involution β konjugierter Punkte, welche 1 und 2 ($= \mathcal{P}_{MX} \cap k$) als Fixpunkte besitzt. Projiziert man β in der Ebene α auf den Steinerkreis $1 := \mathcal{P}_\alpha \cap \phi$, so hat $\beta' := \xi^{-1} \beta \xi : 1 \rightarrow 1$ das Involutionzentrum Z , da 1_ξ und 2_ξ die Fixpunkte von β' sind. Daher leistet β' auch $X_\xi \mapsto X_\xi \sigma$ und β daher $X \mapsto X_\mu$.



Fall 2: $Z \tilde{\tau} N \lambda_\phi$. Der Bildpunkt von Z bei der Projektion aus N auf π ist ein Fernpunkt Z^c , mit dem alle Punktepaare X, X_μ kollinear sind. Wie in Fall 1 erkennt man $H(X, X_\mu; 1, 2 = Z^c)$, also liegt eine Spiegelung an der Geraden m vor. Die Gerade $X.X_\mu$ ist stets orthogonal zu m : Der Bildpunkt Z^c



von Z gibt die zu m orthogonale Richtung an, denn m ist parallel zur Tangente an k in N und diese ist normal zu ihrer konjugierten Tangente $NZ = NZ^c$.

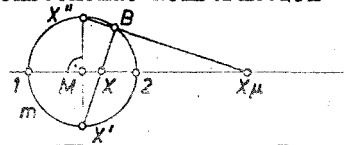
Ein $m (= k \xi^{-1})$ orthogonal durchsetzender Möbiuskreis ist das ξ^{-1} -Bild eines Kreises l auf ϕ , der k orthogonal durchsetzt, denn ξ^{-1} ist winkeltreu. Da für jeden Sphärenpunkt die projektive Involution konjugierter Tangenten die Rechtwinkelinvolution ist, geht die Trägerebene von l durch den Pol Z der Trägerebene $Z\lambda_\phi$ von k . Da Z Zentrum von σ ist, bleibt deshalb l unter σ als Ganzes fest.

Bemerkungen: (a) Wegen $H(X, X_\mu; 1, 2)$ sagt man zu einer Inversion mit einem Fixpunktkreis m auch "Spiegelung an m ".

(b) Ist in $\mathbb{R}$ der Fixpunktkreis m gegeben, so kann zu $X \in \mathbb{R} \setminus \{M, \infty\}$ der Bildpunkt X_μ durch die nebenstehende Konstruktion gefunden werden.

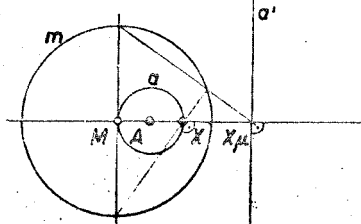
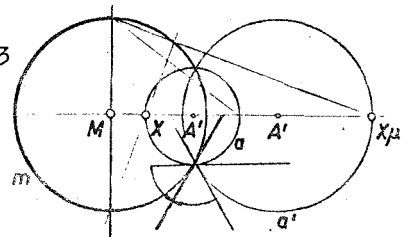
Es genügt $H(X, X_\mu; 1, 2)$ zu zeigen:

Dazu projiziert man diese vier Punkte aus B auf m und erhält X', X'' auf dem zu MX orthogonalen Durchmesser; für die projektive Involution auf m mit den Fixpunkten 1 und 2 ist der Fernpunkt der zu MX orthogonalen Richtung das Involutionszentrum und X' und X'' sind in ihr zugeordnet $\Rightarrow H(X', X''; 1, 2)$; durch Rückprojektion aus B auf MX folgt die Behauptung.



(c) Bei Spiegelung an m wird ein Kreis a nicht durch M auf einen Kreis $a_\mu := a'$ abgebildet, der nicht durch M geht (a_ξ ist ein Kreis nicht durch $M_\xi = N_\sigma$ und nicht durch N , daher geht a_ξ nicht durch N und nicht durch M_ξ und a' nicht durch ∞ und nicht durch M). Die Spiegelung an m ist nicht mittelpunktneu, jedoch liegen die Mittelpunkte A bzw. A' von a bzw. a' auf einem Durchmesser von m . Mit Bem. b ist a' leicht zu konstruieren; dabei ist zu berücksichtigen, daß die u.U. vorhandenen Schnittpunkte $a \cap m$ bei der Spiegelung an m festbleiben. Nach Folg. 3 gilt dabei $\angle(a, m) = -\angle(a'; m)$. Ist speziell $\angle(a, m) = \pi/2$, so gilt nach Obigem $a = a'$. Die Menge aller m orthogonal durchsetzenden Möbiuskreise heißt das "hyperbolische Kreisbündel zu m "; die Trägerebenen der ξ -Urkreise auf ϕ gehören zum Ebenenbündel durch den Außenpunkt Z .

Ist dagegen a ein Kreis durch M , so ist a_ξ ein Kreis durch $M_\xi = N_\sigma$ und daher a_ξ ein Kreis durch N , weshalb $a_\mu := a'$ eine Gerade ist. Speziell bleiben alle Geraden a durch M , welche dem hyperbolischen Kreisbündel zu m angehören, bei Spiegelung an m fest, denn die Trägerebene des Kreises a_ξ geht dann durch M_ξ , N und Z . Wegen der



gegenseitigen Winkeltreue der Inversion steht die Gerade a' orthogonal zum Durchmesser MA eines Kreises a durch M .

(IV) Ist das Zentrum Z von σ ein Fixpunkt von ϕ , so besitzt die Inversion $\mu = \xi \sigma \xi^{-1}$ keinen Fixpunkt. Es existiert ein Kreis m^r so, daß sein Mittelpunkt M dem Punkt ∞ zugeordnet und jedem Punkt $X \in \mathcal{R}_M \setminus \{M, \infty\}$ jener Punkt auf dem Durchmesser MX von m^r zugeordnet wird, der zu X bezüglich m^r antikonjugiert ist.

Bew.: Da Z Innenpunkt ist schneidet die Achse $Z\lambda_\phi$ von σ die Sphäre nicht und daher haben $\sigma|_\phi$ und μ keinen Fixpunkt.

$Q := ZN \cdot Z\lambda_\phi$, $\tilde{Z} \in N\lambda_\phi$, da kein Punkt von $N\lambda_\phi$

ein Innenpunkt von ϕ ist $\Rightarrow Q\lambda_\phi \tilde{Z}$

und $\phi \cap \mathcal{R}_{Q\lambda_\phi}$ ist ein Kreis k^r nicht durch N , dessen ξ^{-1} -Bild m^r den Punkt $NQ \cdot \pi$ als Mittelpunkt M hat.

Die Punkte X, X_ξ und $X_{\xi\sigma}$ liegen in der Ebene $\alpha := NZX = NMX \Rightarrow$

X_μ liegt auch in der Ebene α und demnach sind X, X_μ und M kollinear.

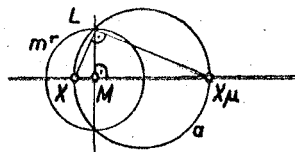
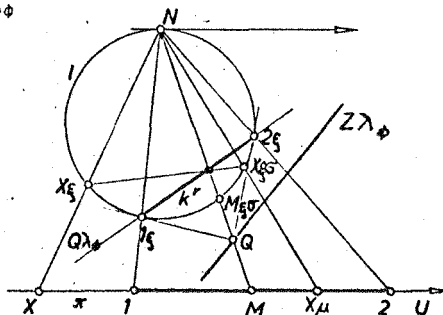
Es ist noch zu zeigen, daß X und X_μ antipolar bezüglich $k^r \xi^{-1} = m^r$ liegen.

Die Antipolarität von m^r bestimmt auf MX eine elliptische projektive Involution β konjugierter Punkte, welche $1 \mapsto 2$ und $M \mapsto U$ leistet. Projiziert man β in der Ebene α aus N auf den Steinerkreis $l := \mathcal{R}_\alpha \cap \phi$, so hat $\beta' := \xi^{-1} \beta \xi : l \rightarrow l$ das Involutionzentrum $1_\xi 2_\xi \cdot M_\xi N = Z$. Daher leistet β' auch $X_\xi \mapsto X_{\xi\sigma}$ und β daher $X \mapsto X_\mu$.

Bemerkungen: (a) Man sagt daher für μ auch "Antispiegelung an m^r ".

(b) In der komplexen Fortsetzung $\tilde{\pi}$ besteht zwischen (III) und (IV) kein Unterschied; m^r ist dann reeller Vertreter jenes nullteiligen Kreises m , der sich als ξ^{-1} -Bild von $\mathcal{R}_{\tilde{\lambda}_\phi} \cap \phi$ einstellt.

(c) Nach 7.6 erfolgt die Konstruktion des zu X bezüglich m^r antipolaren Punktes X_μ wie in der nebenstehenden Figur.



(d) Wie bei der Spiegelung gilt bei der Antispiegelung: Kreise nicht durch M werden auf Kreise, Kreise durch M auf Geraden abgebildet. Wie aus der Konstruktion in Bem.c ersichtlich, bleibt jeder Kreis a , der m' in Endpunkten eines Durchmessers schneidet, bei der Antispiegelung an m' als Ganzes fest (Der Kreis a auf ϕ hat eine durch 2 gehende Trägerebene). Die Menge aller Möbiuskreise, die einen festen Kreis in Durchmesserendpunkten schneiden, heißt "elliptisches Kreisbündel zu m' ", die Trägerebene der ξ -Umkreise auf ϕ bilden das Ebenenbündel um den Innenpunkt 2. Geraden durch M gehören zum elliptischen Kreisbündel zu m' und bleiben bei der Antispiegelung als Ganzes fest.

4) DEF.7.7c: Eine Menge von Möbiuskreisen heißt ein Büschel der Möbiusebene, wenn sie das stereographische Bild der Menge aller Kreise von ϕ in den Ebenen eines Ebenenbüschels ξ_g ist. Zwei Kreisbüschel heißen konjugiert, wenn sie von Ebenenbüscheln um polare Geraden bezüglich ϕ stammen. Ist g eine Sehne bzw. Tangente bzw. Passante von ϕ , so heißt das Kreisbüschel elliptisch bzw. parabolisch bzw. hyperbolisch.

Eigenschaften:

(I) Schneiden zwei Möbiuskreise a, b aus konjugierten Büscheln einander in einem Punkt T , verschieden ∞ , so sind sie orthogonal.

Bew.: Da ξ winkeltreu ist genügt es zu zeigen, daß $a\xi$ und $b\xi$ einander orthogonal schneiden. Da die projektive Involution konjugierter Flächentangenten in jedem Sphärenpunkt die Rechtwinkelinvolution ist bedeutet die Behauptung, daß die Tangente t_a im Schnittpunkt $T(+\infty=N)$ an $a\xi$ die polare Gerade zur Tangente t_b in T an $b\xi$ ist. Liegt $a\xi$ in der Ebene $\alpha \in \xi_g$ und $b\xi$ in der Ebene $\beta \in \xi_h$ $\Rightarrow t_a I^* \alpha \Rightarrow t_a$ trifft $g \wedge t_a I \Rightarrow t_a \wedge$ trifft $g \wedge t_a I^* T \wedge$. Andererseits gilt: t_b trifft $g \wedge t_b I^* T \wedge$. Falls $g \wedge I^* T \wedge g \wedge T$ gilt, folgt aus den letzten Inzidenzen tatsächlich $t_a \wedge t_b = t_g$. Falls $g \wedge I^* T \wedge g \wedge T$ gilt, folgt $\beta = g \wedge T = T \wedge \alpha \Rightarrow \beta \cap \alpha = \{T\}$; dies ist unmöglich, denn $\beta \cap \alpha$ ist der Kreis $b\xi$. Analog folgt im Falle $g \wedge I^* T \wedge g \wedge T$, daß $\alpha \cap \beta = \{T\}$ gilt, was $\beta \cap \alpha = a\xi$ widerspricht. Für $g \wedge I^* T \wedge g \wedge T$ folgt $g \in \phi_{T, T \wedge}$, d.h. g und $g \wedge$ sind in der projektiven Involution konjugierter Tangenten zugeordnet und daher zueinander orthogonal, was mit $t_a = g$ und $t_b = g \wedge$ in diesem Fall die Behauptung liefert. ◆

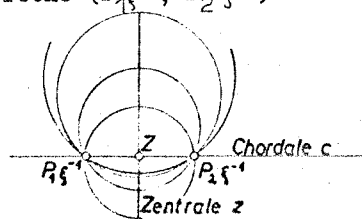
(II) Falls die Trägergerade g des Büschels ξ_g nicht durch N geht und nicht in $N \wedge$ liegt, ist $N g$ die einzige Ebene von ξ_g , die ϕ nach einem Kreis $c\xi$ durch N schneidet. Das zugehörige Büschel der Möbiusebene enthält genau eine Gerade $c = N g \cdot \pi$ ("Chordale des Büschels"). Die Mittelpunkte aller Kreise y eines Büschels sind nach Folg.2, Bem. die Projektionen der Pole Y der Trägerebenen ξ

der Sphärenkreise $y\xi$; wegen $\varepsilon \in \xi_g$ gilt $Y \in \mathcal{P}_g \lambda_4$, also liegt die Menge der Mittelpunkte aller Kreise eines Büschels auf der Geraden $z := (N.g \lambda_\phi) \cdot \pi$ ("Zentrale des Büschels"). Aus den Konstruktionen von c und z erkennt man: Die Zentrale eines Büschels stimmt überein mit der Chordalen des konjugierten Büschels. Schneiden einander die Möbiuskreise c und z aus konjugierten Büscheln in einem Punkt verschieden ∞ , so schneiden sie einander nach (I) orthogonal $\Rightarrow$ Haben Chordale und Zentrale einen von ∞ verschiedenen Schnittpunkt, so stehen sie zueinander orthogonal.

(III) Ist g eine Sehne der ovalen Quadrik ϕ , so ist nach 7.6, Anw.b, Bem.e $g \hat{\lambda}_\phi$ eine Passante und umgekehrt, d.h. das zu einem elliptischen Büschel konjugierte Büschel ist hyperbolisch und umgekehrt. Ist g Tangente von ϕ , so auch $g \hat{\lambda}_\phi$ und daher ist das zu einem parabolischen Büschel der Möbiusebene konjugierte Büschel ebenfalls parabolisch.

Fall 1: Elliptisches Kreisbüschel.

Sei zunächst g eine Sehne von ϕ nicht durch N und $\mathcal{P}_g \cap \phi = \{P_1, P_2\}$; alle Kreise, die von einer Ebene $\varepsilon \in \xi_g$ aus ϕ herausgeschnitten werden, gehen durch P_1 und P_2 , und umgekehrt wird jeder Kreis durch P_1 und P_2 von einer Ebene $\varepsilon \in \xi_g$ ausgeschnitten. Daher gehen alle Möbiuskreise des zugehörigen Büschels der Möbiusebene durch die Punkte $P_1 \xi^{-1}$ und $P_2 \xi^{-1}$ ("Grundpunkte des Büschels") und umgekehrt gehört jeder Möbiuskreis durch $P_1 \xi^{-1}$ und $P_2 \xi^{-1}$ dem Büschel an; die Chordale c des Büschels ist die Gerade $P_1 \xi^{-1} \cdot P_2 \xi^{-1}$. Die Zentrale z des Büschels ist nach (II) orthogonal zur Chordalen c und geht durch den Mittelpunkt Z der Strecke $(P_1 \xi^{-1}, P_2 \xi^{-1})$. Durch Z als Mittelpunkt und $P_1 \xi^{-1}$ ist nämlich genau ein Kreis k festgelegt, der auch durch $P_2 \xi^{-1}$ geht $\Rightarrow k$ gehört zum Büschel und sein Mittelpunkt Z liegt nach (II) notwendig auf der Zentralen z .



Ist speziell g eine durch N gehende Sehne von ϕ , so besteht das elliptische Büschel der Möbiusebene aus allen Geraden durch den Punkt $g \cdot \pi = P_1 \xi^{-1}$.



Ein Geradenbüschel ist also ein elliptisches Büschel der Möbiusebene mit den Grundpunkten $P_1 \xi^{-1} \in \mathcal{P}_2$ und ∞ .

Bemerkungen: (a) Vom Standpunkt der Möbiusgeometrie besteht zwischen den Fällen $g \nmid N$ und $g \mid N$ kein Unterschied; unterwirft man nämlich ein elliptischen Kreisbündel mit den Grundpunkten $P_1\xi^{-1}, P_2\xi^{-1} \neq \infty$ einer Spiegelung μ an einem Kreis m mit dem Mittelpunkt $P_1\xi^{-1}$, so erhält man ein elliptisches Kreisbündel mit den Grundpunkten ∞ und $P_2\xi^{-1}\mu$, also ein Geradenbündel.

(b) Geht man von der Möbiusebene π_μ zur projektiven Ebene π über, so bestimmen alle Kreise x eines elliptischen Bündels mit $g \nmid N$ in der komplexen Fortsetzung Kegelschnitte $\tilde{x}$ in $\tilde{\pi}$, welche die Punkte $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2$ und $P_1\xi^{-1}, P_2\xi^{-1}$ gemeinsam haben. Die Kegelschnitte $\tilde{x}$ gehören also einem Kegelschnittbündel 1. Art in $\tilde{\pi}$ an. Auf ein solches kann der Desarguessche Involutionssatz angewendet werden, z.B. wird auf der Zentralen $\tilde{P}_1$ eine Desarguesinvolution $\tilde{\alpha}$ bestimmt, die komplexe Fortsetzung einer projektiven elliptischen Involution $\alpha: P_1 \rightarrow P_2$ ist, wobei $P_1\xi^{-1}$ und $P_2\xi^{-1}$ nach dem Satz von Thales die Laguerrevertreter von α sind. In $\tilde{\pi}$ sind die Fixpunkte von $\tilde{\alpha}$ die Projektionen der Punkte $P_1\lambda, \cap \phi = \{Q_1, Q_2\}$ aus N auf $\tilde{\pi}$: Die Punkte P_1, P_2 und Q_1, Q_2 bestimmen nämlich ein isotropes Erzeugendenvierseit von ϕ . Da bei ξ^{-1} isotrope Erzeugenden von ϕ auf isotrope Geraden von $\tilde{\pi}$ abgebildet werden, ist $(P_1Q_1)\xi^{-1}$ die isotrope Gerade durch $P_1\xi^{-1}$; da $P_1\xi^{-1}$ Laguerrevertreter von α ist, ist Q_1 nach 7.5 ein Fixpunkt von $\tilde{\alpha}$.

Fall 2: Hyperbolisches Kreisbündel.

Sei zunächst g eine Passante von ϕ nicht in $N\lambda_\phi$. Die polare Gerade $g\hat{\lambda}_\phi$ ist dann eine Sehne von ϕ nicht durch N und $t_{g\hat{\lambda}_\phi}$ bestimmt das konjugierte elliptische Kreisbündel mit den Grundpunkten

$P_1\xi^{-1}, P_2\xi^{-1}$; dabei gilt $\{P_1, P_2\} = \phi \cap P_{g\hat{\lambda}_\phi}$. Der über den Grundpunkten

$P_1\xi^{-1}, P_2\xi^{-1}$ errichtete Kreis k des elliptischen Kreisbündels muß

wegen (I) notwendig jeden Kreis des hyperbolischen Kreisbündels

orthogonal durchsetzen; wegen (II)

ist $P_1\xi^{-1} \cdot P_2\xi^{-1}$ die Zentrale z

des hyperbolischen Bündels, und die dazu normale Gerade durch

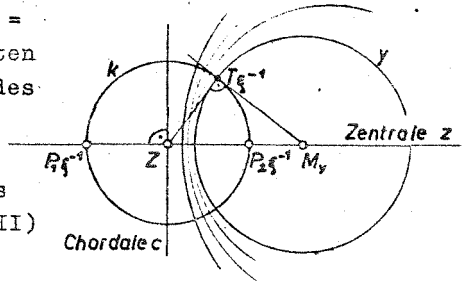
den Mittelpunkt Z von $(P_1\xi^{-1}, P_2\xi^{-1})$ ist die Chordale c des hyperbolischen Kreisbündels. Umgekehrt ist jeder Kreis y mit dem

Mittelpunkt M_y auf $P_1\xi^{-1} \cdot P_2\xi^{-1}$, der k in einem Punkt $T\xi^{-1}$

orthogonal durchsetzt, ein Kreis des hyperbolischen Kreisbündels;

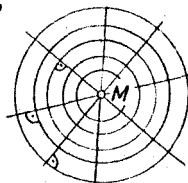
dazu ist zu zeigen, daß die Trägerebene η von $y\xi$ durch g geht.

Wegen $M_y \mid P_1\xi^{-1} \cdot P_2\xi^{-1}$ liegt der λ_ϕ -Pol Y von η nach Folg. 2, Bem. notwendig in der Ebene $NVP_1\xi^{-1}VP_2\xi^{-1} = NVP_1VP_2 = NVg\hat{\lambda}_\phi \Rightarrow \eta \tilde{\mid} N\lambda_\phi.g$ (*); die Tangente t_y in T ($\neq N$) an $y\xi$ ist normal zur Tangente t_k an $k\xi \Rightarrow t_y\hat{\lambda}_\phi = t_k$. Da t_k schneidet $g\hat{\lambda}_\phi$, trifft t_y dann g ; wegen $t_y \perp \eta$ geht η durch den Punkt $t_y.g$ ($\tilde{\mid} N\lambda_\phi$), woraus zusammen mit (*) folgt $\eta \perp g$.



Die Sphärenpunkte P_1 und P_2 sind übrigens die Berührungspunkte der aus g an ϕ legbaren Tangentialebenen; diese Ebenen schneiden jedoch ϕ nicht nach Kreisen. Man benützt gelegentlich die Sprechweise: $P_1\xi^{-1}$ und $P_2\xi^{-1}$ sind die "Nullkreise des hyperbolischen Büschels"; ein Nullkreis ist kein Möbiuskreis.

Gilt speziell $g \perp N\lambda_\phi$ und ist g Passante, so ist $g\lambda_\phi$ eine Sehne von ϕ durch N ; alle Kreise des zugehörigen hyperbolischen Büschels haben daher den Punkt $M=g\hat{\lambda}_\phi \cdot \pi$ zum Mittelpunkt, und das Büschel besteht aus konzentrischen Kreisen. Das konjugierte elliptische Büschel ist das Geradenbüschel um den gemeinsamen Mittelpunkt, denn $g\hat{\lambda}_\phi = NM$.



Bemerkungen: (a) Vom Standpunkt der Möbiusgeometrie besteht zwischen den Fällen $g \perp N\lambda_\phi$ und $g \parallel N\lambda_\phi$ kein Unterschied. Ein hyperbolisches Kreisebüschel zu $g \perp N\lambda_\phi$ kann nämlich durch eine Spiegelung an einem Kreis m , dessen Mittelpunkt in einem Nullkreis des Büschels liegt, in ein Büschel konzentrischer Kreise übergeführt werden.

(b) In der komplexen Fortsetzung $\tilde{\pi}$ durchstößt $\tilde{g}$ die Quadrik $\tilde{\phi}$ in einem Paar α_λ -zugeordneter Punkte $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2$ und durch $\tilde{Q}_1\tilde{\xi}^{-1}, \tilde{Q}_2\tilde{\xi}^{-1}$ sowie durch $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2$ gehen alle Kegelschnitte $\tilde{y}$, die durch komplexe Fortsetzung von Kreisen y des hyperbolischen Büschels entstehen, falls man von der Möbiusebene zur komplexen Fortsetzung $\tilde{\pi}$ der projektiven Ebene π übergeht. Nach Fall 1 sind $\tilde{Q}_1\tilde{\xi}^{-1}$ und $\tilde{Q}_2\tilde{\xi}^{-1}$ die Fixpunkte der durch das konjugierte elliptische Büschel auf $\tilde{g}$ bestimmten Desarguesinvolutions $\tilde{\alpha}$ und $P_1\tilde{\xi}^{-1}$ und $P_2\tilde{\xi}^{-1}$ sind die Laguerre-Vertreter von α .

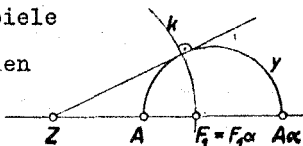
In $\tilde{\pi}$ liegt also ein Kegelschnittbüschel 1. Art vor und daher kann auf die Kreise eines hyperbolischen Büschels mit $g \perp N\lambda_\phi$ der Desarguesche Involutionsatz angewendet werden: Alle Kreise des Büschels bestimmen auf der Zentralen eine hyperbolische Desarguesinvolutions mit den Nullkreisen als Fixpunkten und Z als Zentralpunkt.

Zu den Kreisen eines hyperbolischen Büschels konzentrischer Kreise gehören Kegelschnitte in $\tilde{\pi}$, die ein Büschel 3. Art bestimmen; alle diese Kegelschnitte haben nämlich die beiden Linienelemente $(\tilde{I}_1, M\tilde{I}_1)$ und $(\tilde{I}_2, M\tilde{I}_2)$ gemeinsam.

(c) Konstruktive Anwendungsbeispiele

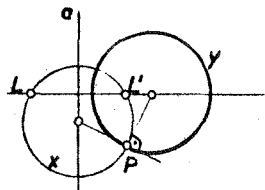
in PAE:

(i) Man kann die Fixpunkte einer hyperbolischen Involution α mit Zentralpunkt Z und $A \mapsto A\alpha$ nach Obigem wie in der nebenstehenden Figur konstruieren.



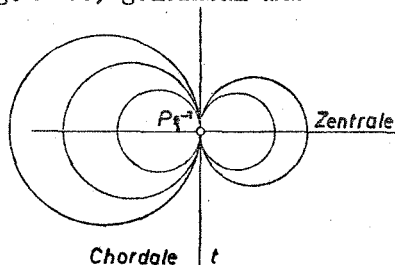
(ii) Auf der Geraden a ist eine elliptische projektive Involution α durch ihre Laguerre-Vertreter L, L' festgelegt; man konstruiere einen Kreis y , der durch einen gegebenen Punkt P geht und in der komplexen Fortsetzung die beiden Fixpunkte $\tilde{F}_1$ und $\tilde{F}_2$ von $\tilde{\alpha}$ enthält (kurz: Gesucht ist Kreis y aus einem Paar α_λ -zugeordneter Punkte und einem reellen Punkt).

Durch L und L' als Grundpunkte wird ein elliptisches Kreisbündel festgelegt und es existiert genau ein Kreis x dieses Bündels durch P . Für den x in P orthogonal durchsetzenden Kreis y des konjugierten hyperbolischen Bündels gilt nach obiger Bemerkung $F_1, F_2 \in \bar{y}$. Dabei ist y die einzige Lösung, denn durch die fünf Punkte L, L', F_1, F_2 und P existiert in $\bar{\pi}$ genau ein Kegelschnitt.



Fall 3: Parabolisches Kreisbündel.

Ist g eine Tangente von Φ in $P(=N)$, so haben alle Möbiuskreise des Bündels das Linienelement $(P\bar{g}^{-1}, Ng.\pi =:t)$ gemeinsam und umgekehrt gehört jeder Möbiuskreis mit diesem Linienelement zum Bündel. Alle Kreise des konjugierten Bündels gehen ebenfalls durch $P\bar{g}^{-1}$ und berühren dort die zu t normale Tangente, welche die Zentrale des gegebenen Bündels ist.



Ist speziell g Tangente in N , so besteht das Bündel aus zueinander parallelen Geraden. Das konjugierte Bündel besteht aus den zu diesen orthogonalen Geraden.

Bemerkungen: (a) Vom Standpunkt der Möbiusgeometrie sind diese beiden Fälle nicht zu unterscheiden, denn durch eine Spiegelung an einem Kreis mit dem Mittelpunkt $P\bar{g}^{-1}$ kann der erste Fall in den zweiten übergeführt werden.

(b) Zu den Kreisen k eines parabolischen Bündels (mit $g \not\equiv N$) gehören in $\bar{\pi}$ Kegelschnitte k , die einem Bündel 2. Art angehören.

SATZ 7.7: Die stereographische Projektion vermittelt einen Isomorphismus der Möbiusebene auf jene Inzidenzstruktur, welche durch das mengentheoretische Enthaltensein zwischen den Punkten und Kreisen einer Sphäre bestimmt wird. Jede Inversion ist eine involutorische, möbiuskreistreue und gegensinnig winkeltreue Bijektion der Möbiusebene. Eine Inversion ist entweder eine orthogonale Spiegelung, eine Spiegelung an einem Kreis oder eine Antispiegelung an einem Kreis; bei der Spiegelung bzw. Antispiegelung an einem Kreis bleibt jeder Möbiuskreis des durch den Inversionskreis bestimmten hyperbolischen bzw. elliptischen Bündels als Ganzes fest.

Zwei Möbiuskreise aus konjugierten Büscheln schneiden einander in jedem von ∞ verschiedenen gemeinsamen Punkt orthogonal. Ein elliptisches Kreisbüschel mit eigentlichen Grundpunkten kann durch Spiegelung an einem Kreis, dessen Mittelpunkt in einem Grundpunkt liegt, in ein Geradenbüschel mit eigentlichem Scheitel übergeführt werden. Ein hyperbolisches Kreisbüschel kann durch Spiegelung an einem Kreis, dessen Mittelpunkt in einem Nullkreis des hyperbolischen Büschels liegt, in ein Büschel von konzentrischen Kreisen übergeführt werden. Ein parabolisches Kreisbüschel geht durch Spiegelung an einem Kreis, dessen Mittelpunkt im gemeinsamen Berührungspunkt liegt, in ein Büschel paralleler Geraden über.

7.8. Abstandsmessung in euklidischen Räumen

Nach 7.4 ist durch Vorgabe einer elliptischen (projektiven) Polarität λ^* in $\mathbb{P}_n$ ein inneres Produkt in $\mathcal{W}$ nur bis auf einen Faktor festgelegt. Ein reeller affiner Raum mit Orthogonalitätsstruktur ist daher noch kein euklidischer Raum. Um das innere Produkt in $\mathcal{W}$ eindeutig festzulegen, definieren wir im reellen affinen Raum $A(R)$ mit Orthogonalitätsstruktur eine Abstandsmessung.

DEF. 7.8a: Unter einem Abstand verstehen wir eine Abbildung $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (=Menge der reellen Zahlen > 0), also $(X, Y) \mapsto$

$(X, Y)d := \overline{XY}$, mit folgenden Eigenschaften:

(I) d ist translationsinvariant: $\overline{XY} = \overline{X'Y'} \quad \forall t \in T(A(R)), \quad \forall X, Y \in A(R)$.

Es genügt daher i.f. als ersten Punkt X stets einen festen Punkt O zu nehmen und $\overline{OX}$ zu erklären.

(II) $X=O: \overline{OX}=0$.

(III) Ist ϕ_e eine fest gewählte Sphäre mit dem Mittelpunkt O ("Eichsphäre"), so ist $\overline{OX} := |TV(X, E, O)|$ mit E, X, O kollinear und $E \in \phi_e \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$.

Bemerkungen: (a) Diese Definition ist sinnvoll, denn ein Punkt E wie in (III) existiert nach 7.4, Folg. 3, Bem. b. Es existieren jedoch zwei zu O symmetrische Punkte $E, \bar{E}$ mit $\mathbb{R}_{Ox} \cap \phi_e = \{E, \bar{E}\}$ und daher ist zu überprüfen, ob die Abstandsdefinition unabhängig von der Wahl von E oder $\bar{E}$ ist:

$$DV(U, O, E, \bar{E}) \cdot DV(U, O, E, X) = DV(U, O, E, X) \Rightarrow (-1) \cdot TV(X, \bar{E}, O) = TV(X, E, O) \Rightarrow |TV(X, \bar{E}, O)| = |TV(X, E, O)|.$$

(b) Für alle Punkte $X \in \Phi_e$ gilt $X=E$, also $\overline{OX} = |TV(E, E, 0)| = |1| = 1$. Die Eichsphäre heißt daher auch Einheitssphäre.

(c) $M := \{X \in \mathbb{P} \mid \overline{PX} = r \text{ mit } r > 0\}$ ist eine Sphäre mit dem Mittelpunkt P (kurz: Die Sphären sind die Abstandsflächen der Abstandsmessung gemäß Def. 7.8a).

Bew.: Für $P=0$ ist $r = \overline{OX} = |TV(X, E, 0)| = |DV(X, E, 0, U)|$ auffaßbar als charakteristisches Doppelverhältnis einer zentrischen Streckung σ mit Zentrum O. Alle Punkte der Einheitssphäre werden bei σ auf Punkte von M abgebildet, d.h. $\Phi_e \sigma = M$. Da jede zentrische Streckung eine Ähnlichkeit ist (vgl. 7.4, Folg. 5? Bem. f) ist mit Φ_e auch M eine Sphäre (nach 7.4, Folg. 5, Bem. c). Ist dagegen $P \neq 0$, so existiert genau eine Translation, die $P \rightarrow 0$ leistet; nach Def. 7.8a die Abstände nicht verändert und als Ähnlichkeit Sphären in Sphären überführt.

Unser Ziel ist es zu zeigen, daß die Vorgabe eines inneren Produktes in $\mathcal{M}$ gleichwertig ist zur Vorgabe einer absoluten Polarität λ^α in $\mathbb{T}_\omega$ und einer Eichsphäre Φ_e .

Folgerungen:

1) In einem euklidischen Raum $A(\mathcal{M})$ gilt: Die Menge aller Punkte e mit $e \cdot e - r^2 = 0$ ($r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ist eine Sphäre mit Mittelpunkt σ im Sinne jener Orthogonalitätsstruktur, welche durch das innere Produkt nach 7.4, Folg. 1 bestimmt ist.

Bew.: Wir definieren eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform $\sigma: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathcal{M} = \mathbb{R} \oplus \mathcal{M}$ durch $((x, e), (y, \eta)) \sigma := e \cdot \eta - xy r^2$ $\forall e, \eta \in \mathcal{M}, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Wegen $((x_1, e_1) \lambda_1 + (x_2, e_2) \lambda_2, (y, \eta)) \sigma = (e_1 \lambda_1 + e_2 \lambda_2) \cdot \eta - (x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2) y r^2 = (e_1 \cdot \eta - x_1 y r^2) \lambda_1 + (e_2 \cdot \eta - x_2 y r^2) \lambda_2 = ((x_1, e_1), (y, \eta)) \sigma \lambda_1 + ((x_2, e_2), (y, \eta)) \sigma \lambda_2$ ist σ linear im ersten Vektor. Da das innere Produkt symmetrisch und $\mathbb{R}$ kommutativ ist, ist σ symmetrisch und daher bilinear. Aus $((x, e), (y, \eta)) \sigma = 0 \forall (y, \eta) \in \mathcal{M}$ folgt mit $(y, \eta) = (0, e)$ wegen der positiven Definitheit des inneren Produktes $e = \sigma$ und mit $(y, \eta) = (1, \sigma)$ dann $x = 0$, sodaß σ nicht ausgeartet ist.

σ beschreibt eine (projektive) Polarität in $\mathbb{T}(\mathcal{M})$, in der wegen $((0, e), (0, e)) \sigma = e \cdot e \neq 0 \forall e \in \mathcal{M} \setminus \{\sigma\}$ kein selbstkonjugierter Fernpunkt existiert. Die Menge der selbstkonjugierten Punkte $(1, e) \in \mathbb{T}$ in $\mathbb{T} = \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_\omega$ ist durch $((1, e), (1, e)) \sigma = e \cdot e - r^2 = 0$ bestimmt, sodaß alle Punkte e aus $A(\mathcal{M})$ mit $e \cdot e - r^2 = 0$ eine Quadrik ϕ erfüllen, die ein Ellipsoid ist und wegen $((1, \sigma), (0, \eta)) \sigma = 0 \forall \eta \in \mathcal{M} \setminus \{\sigma\}$ den Mittelpunkt σ besitzt. Durch das innere Produkt in $\mathcal{M}$ wird in $\mathbb{T}_\omega$ nach 7.4, Folg. 1 die absolute Polarität λ^α bestimmt und

diese ist wegen $((0, \nu), (0, \eta)) \sigma = \nu \cdot \eta$ die Fernspurpolarität von ϕ . Das Ellipsoid ϕ ist daher eine Sphäre.

2) Ist in einem reellen affinen Raum eine Orthogonalitätsstruktur und eine Eichsphäre gegeben, so wird dadurch im Vektorraum der Translationen eindeutig ein inneres Produkt bestimmt, und die Abstandsmessung im Sinne der Def. 7.8a stimmt überein mit der Abstandsmessung unter Benützung dieses inneren Produktes.

Bew.: Bekanntlich ist $A(\mathbb{R}) \cong A(\mathcal{W}) \cong \mathbb{T}(\mathbb{R} \otimes \mathcal{W}) \setminus \mathbb{T}(0 \otimes \mathcal{W})$. Die absolute elliptische Polarität λ° in $\mathbb{T}$ wird durch eine symmetrische nicht ausgeartete Bilinearform σ in $\mathbb{T}(0 \otimes \mathcal{W})$ beschrieben. Durch $((0, \nu), (0, \eta)) \sigma =: (\nu, \eta) \beta$ wird ein inneres Produkt β in $\mathcal{W}$ definiert (vgl. 7.4). Die Eichsphäre ϕ_e ist durch den Mittelpunkt $0 = \sigma$ und einen Punkt $P_0 = q_0 + \sigma$ eindeutig festgelegt. Wegen $(q_0, q_0) \beta > 0$ können wir normieren und erhalten in

$$\nu \cdot \eta := \frac{(\nu, \eta) \beta}{(q_0, q_0) \beta}$$

ein eindeutig bestimmtes inneres Produkt in $\mathcal{W}$.

Mit $\nu = \sigma + (\nu - \sigma)x \wedge E = \nu \in \phi_e$ gilt $TV(X, E, 0) = x$ und nach Def. 7.8a ist $|\overline{OX}|^2 = |TV(X, E, 0)|^2 = x^2$. Aus $E \in \phi_e$ folgt $\nu \cdot \nu = 1$; diese Aussage ist nämlich für $E = P_0$ auf Grund der obigen Definition des inneren Produktes richtig und da nach Folg. 1 durch $\nu \cdot \nu = 1$ eine Sphäre um 0 durch P_0 beschrieben wird, die bereits durch 0 und P_0 eindeutig festgelegt ist, ist die Punktmenge mit $\nu \cdot \nu = 1$ die gegebene Eichsphäre ϕ_e .

Für den durch das innere Produkt gemessenen Abstand $|\overline{OX}| = |\nu|$ gilt daher $|\nu|^2 = \nu \cdot \nu = (\sigma + (\nu - \sigma)x) \cdot (\sigma + (\nu - \sigma)x) = (\nu \cdot \nu)x^2 = x^2$.

Da bei beiden Messungen der Abstand nicht negativ ist, erhält man die Gleichheit der beiden Abstände für von 0 ausgehende Strecken. Um die Übereinstimmung für beliebige Abstände zu zeigen genügt es, die Translationstreue der mit dem inneren Produkt gemessenen Abständen zu erweisen. Wendet man auf $\sqrt{\nu \cdot \nu} = |\nu|$ die Translation τ mit $\nu' = \nu + \tau$ an, so gilt $\nu \rightarrow \tau \wedge \nu \rightarrow \nu'$, also $|\nu' - \tau| = |\nu - \nu| = |\nu|$.

Bemerkungen: (a) Das Teilverhältnis gestattet in Übereinstimmung mit der Elementargeometrie die Deutung: $TV(A, B, C) = \frac{AC}{BC} (B+C)$.

Bew.: Wegen der Translationsinvarianz genügt es $C=O$ zu betrachten.
 Für $A=O$ gilt $TV(A,B,O)=O \wedge AO=O$; sei i.f. $A \neq O: |DV(O,U,A,E)| \Rightarrow$
 $|DV(O,U,B,E)| = |DV(O,U,A,E)| \Rightarrow |TV(A,B,O)| = |TV(A,E,O)| \Rightarrow |TV(A,B,O)| \cdot \overline{OB} = \overline{OA}$.

(b) $\text{sign } TV(A,B,C) = -1 \iff C$ zwischen A und B .
 Speziell für den Mittelpunkt M gilt $TV(A,B,M) = -1 \iff AM=BM \wedge M$
 liegt zwischen A und B (damit ist der Name "Mittelpunkt" begründet).

(c) Wegen $DV(A,B,C,D) \stackrel{6.5, \text{Anw.f.}}{=} TV(A,B,C) \cdot TV(A,B,D)^{-1}$
 erhält man für A,B,C,D eigentlich und paarweise verschieden in
 Übereinstimmung mit der Elementargeometrie:

$$DV(A,B,C,D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}.$$

$\text{sign } DV(A,B,C,D) = -1 \iff$ genau einer der Punkte C und D liegt
 zwischen A und B .

(d) In der komplexen Fortsetzung $\tilde{\pi}$ existieren
 isotrope Geraden. Eine Gerade $\tilde{e} + \tilde{\pi} C$ ist genau dann isotrop, wenn
 $\tilde{\pi} \cdot \tilde{\pi} = 0$ gilt. Zwei Punkte $\tilde{\eta}_k = \tilde{e} + \tilde{\pi} \lambda_k (k=1,2)$ einer isotropen Geraden
 haben daher stets den Abstand 0 wegen $|\tilde{\eta}_1 - \tilde{\eta}_2| = \sqrt{\tilde{\pi} \lambda_1 \cdot \tilde{\pi} \lambda_2} = \sqrt{(\lambda_1 \lambda_2) \tilde{\pi} \tilde{\pi}} = 0$.
 Die isotropen Geraden heißen deshalb auch "Minimalgeraden".

3) DEF.7.8b: Eine Ähnlichkeit eines euklidischen Raumes heißt
 eine Kongruenz (Isometrie), wenn zwei verschiedene
 Punkte existieren, deren Abstand ungeändert bleibt. Jede gleich-
 sinnige Kongruenz heißt eine Bewegung. Jede Bewegung mit einem
 Fixpunkt heißt eine Drehung.

Bemerkungen: (a) Jede Translation ist eine Ähnlichkeit und nach
 Def.7.8a abstandstreu, also eine Kongruenz. Aus der Darstellung
 $e' = e + t$ folgt $\Delta = 1 > 0$ und daher ist jede Translation gleichsinnig.
 Eine Translation ist eine fixpunktfreie Bewegung.

(b) Jede zentrische Spiegelung an F ist eine involu-
 torische gegensinnige Kongruenz, denn aus $TV(X, X\sigma_F, F) = -1$ folgt
 $XF = X\sigma_F F$, nach Folg.2, Bem.a und aus der Darstellung $e' = e + 2\tilde{\pi}$
 (vgl.6.4, Folg.4, Bem.d) folgt $\Delta = -1 < 0$.

(c) Jede orthogonale Symmetrie σ an einer Hyperebene $\mathcal{A}$
 ist eine involutorische gegensinnige Kongruenz:
 $X \notin \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}} \sigma \cap \mathcal{P}_{\mathcal{A}} =: F$ ist σ -Fixpunkt mit $TV(X, X\sigma, F) = -1 \Rightarrow$
 $XF = X\sigma F \Rightarrow \sigma$ ist eine Kongruenz. Wählt man ein kartesisches
 Koordinatensystem $\{O, P_1, \dots, P_n\}$ mit $X = P_n = (0, \dots, 0, 1)$ und
 $OVP_1 \dots VP_{n-1} = \mathcal{A}$, so gilt
 $X \sigma P_n = (0, 0, \dots, 0, -1) =: q_n'$ und $q_j' = q_j$ ($j=1, \dots, n-1$). Wegen
 $\det(q_1' - q_1, \dots, q_n' - q_n) = +1$ und $\det(q_1' - q_1, \dots, q_n' - q_n) = -1$ ist σ gegen-
 sinnig.

DEF.: Unter einem "orientierten orthogonalen n-Kant" versteht man n paarweise orthogonale Geraden durch einen Punkt O, wobei auf jeder eine Halbgerade ausgezeichnet ist.

Zu zwei gegebenen orientierten n-Kanten existiert genau eine Kongruenz, welche das eine n-Kant in das zweite n-Kant abbildet.

Bew.: Eine Sphäre um O trifft die j-te Halbgerade des ersten n-Kants in genau einem Punkt P_j , eine zu O kongruente Sphäre um O' trifft die j-te Halbgerade des anderen n-Kants in genau einem Punkt P'_j . Für die gewünschte Kongruenz gilt notwendig $P_j \mapsto P'_j$. Zu den beiden kartesischen Simplizes $\{O, P_j\}$ und $\{O', P'_j\}$ existiert genau eine Ähnlichkeit mit $O \mapsto O'$ und $P_j \mapsto P'_j$, und diese ist wegen $\overline{OP_j} = \overline{O'P'_j}$ eine Kongruenz.

Anwendungen: (a) Jede Ähnlichkeit ist das Produkt einer zentrischen Streckung und einer Kongruenz.

Bew.: Durch eine Ähnlichkeit α wird ein kartesisches Koordinatensystem $\{O, P_j\}$ und die Sphäre ϕ um O durch P_j in ein kartesisches Koordinatensystem $\{O', P'_j\}$ und die Sphäre ϕ' um O' durch P'_j transformiert. Die Ähnlichkeit α ist durch $O \mapsto O', P_j \mapsto P'_j$ eindeutig festgelegt. Die zu ϕ' kongruente Sphäre ψ um O bestimmt ein kartesisches Koordinatensystem $\{O=O, Q_j: \text{Punkt von } \psi \text{ auf der Halbgeraden } OP_j\}$.

Nach Bem.c existiert eine zentrische Streckung σ mit $\phi' \mapsto \psi$, also mit $O \mapsto O, P_j \mapsto Q_j$, und nach Folg.3 existiert eine Kongruenz α mit $O \mapsto O'$ und $Q_j \mapsto P'_j$. Die Zusammensetzung $\sigma \circ \alpha$ der beiden Ähnlichkeiten σ und α ist eine Ähnlichkeit, die $O \mapsto O'$ und $P_j \mapsto P'_j$ leistet $\Rightarrow \alpha = \sigma \circ \alpha$.

(b) Bei einer Ähnlichkeit wird jeder Abstand mit einem festen Faktor (> 0) multipliziert. Bleibt insbesondere ein einziger Abstand ungeändert ($\Rightarrow$ Kongruenz), so ist dieser Faktor notwendig gleich Eins und es gilt: Bei einer Kongruenz bleibt jeder Abstand ungeändert.

Bew.: Nach Definition ist $\overline{OX} = |TV(X, E, O)|$; sei o.B.d.A. $X \neq O$ und O Mittelpunkt der Eichsphäre ϕ_e . Jede Ähnlichkeit α ist teilverhältnistreu, d.h. $TV(X, E, O) = TV(X\alpha, E\alpha, O\alpha)$. In $A(R)$ existiert eine Translation τ mit $O\alpha \mapsto O$, und τ ist ebenfalls teilverhältnistreu: $TV(X, E, O) = TV(X\alpha\tau, E\alpha\tau, O\alpha\tau=O)$. Weiters gilt $DV(O, U, X\alpha\tau, E\alpha\tau) \cdot DV(O, U, E\alpha\tau, E') = DV(O, U, X\alpha\tau, E')$ mit $E' \in \mathcal{R}_{O, X\alpha\tau} \cap \phi_e$. $|TV(X\alpha\tau, E\alpha\tau, O)| \cdot |(TV(E\alpha\tau, E', O))| = |TV(X\alpha\tau, E', O)| \Rightarrow |TV(X, E, O)| \cdot |\lambda| = |TV(X\alpha\tau, E', O)|$. Dabei ist $\lambda := TV(E\alpha\tau, E', O) \neq 0$ wegen $E\alpha\tau \neq O$, und λ bedeutet das von der Auswahl des Punktes X unabhängige charakteristische Teilverhältnis einer zentrischen Streckung mit $E\alpha\tau \mapsto E'$.

Unabhängig von der Lage des Punktes X liegt $E\&\tau$ stets auf einer bestimmten Sphäre Φ' um O und λ hängt nur von ϕ_e und ϕ' ab. Auf Grund der letzten Gleichung gilt $OX|\lambda| = OX\&\tau$, weiters ist $OX\&\tau = O\&\tau X\&\tau = O\&X\&$, da die Translation τ^{-1} abstandstreu ist. Damit ist die Aussage für alle in O beginnenden Strecken richtig. Sei nun (P, Q) eine beliebige Strecke $(P \neq Q)$. Es ist $PQ|\lambda| = P\&Q\&$ zu erweisen. In $T(A(R))$ existiert eine Translation τ_p mit $P \mapsto O$; wir setzen $Q\tau_p = X$. Wegen der Translationsinvarianz des Abstandes gilt $PQ = P\tau_p Q\tau_p = OX$. Nach dem ersten Beweisteil folgt $O\&X\& = OX|\lambda|$. Da $T(A)$ nach 6.2 Normalteiler von $AGL(A)$ ist, stellt $\&^{-1}\tau_p\&$ eine Translation $\tau' \in A(R)$ dar, also gilt $\tau_p\& = \&\tau' \Rightarrow P\&Q\& = P\&\tau' Q\&\tau' = P\tau_p\& Q\tau_p\& = O\&X\& = OX|\lambda| = PQ|\lambda|$.

(c) Aus Anw.b folgt unmittelbar, daß die Menge aller Kongruenzen hinsichtlich der Zusammensetzung eine Gruppe $GO(A(R))$ bildet ("Gruppe der Kongruenzen", "Isometriegruppe"); $GO(A(R))$ ist eine Untergruppe von $AGO(A(R))$. Die Menge aller Bewegungen bildet eine Untergruppe $GO^+(A(R))$ von $GO(A(R))$, dagegen ist die Menge $GO^-(A(R))$ keine Gruppe.

(d) Jede involutorische Ähnlichkeit $\&$ ist eine Kongruenz.

Bew.: Wir benützen zweimal Anw.b und erhalten $\forall P, Q$:
 $PQ|\lambda| = P\&Q\& \wedge PQ = P\&\&Q\&\& = P\&Q\&|\lambda| = PQ|\lambda|^2 \Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \wedge \lambda > 0 \Rightarrow \lambda = 1$.

Zwischenbemerkung:

Sei $\mathcal{H}(R)$ ein euklidischer Vektorraum und $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ eine lineare Bijektion. f heißt "orthogonaler Automorphismus von $\mathcal{H}$ " genau dann, wenn gilt

$$e \cdot \eta = e f \cdot \eta f \quad \forall e, \eta \in \mathcal{H}.$$

Alle orthogonalen Automorphismen bilden die "orthogonale Gruppe" $O(\mathcal{H})$ von $\mathcal{H}$. Ein Automorphismus ist genau dann orthogonal, wenn er in einer orthonormierten Basis durch eine orthogonale Matrix beschrieben wird, d.i. eine Matrix (a^j_k) , für die $a^j_k a^k_l = \delta^j_l$ gilt.

Bemerkungen: (a) Jeder orthogonale Automorphismus ist im Vektorraum längen- und winkeltreu.

(b) Man kann die obige Forderung für einen orthogonalen Automorphismus abschwächen zu $e \cdot e = e f \cdot e f \quad \forall e \in \mathcal{H}$. Mit anderen Worten: Ist ein Automorphismus längentreu, so ist er notwendig winkeltreu.

Zusammenfassend gilt: Die nicht trivialen Bewegungen eines dreidimensionalen euklidischen Raumes sind die Translationen, die axialen Drehungen und die Schraubungen. Daraus folgt: Hat eine Bewegung eines dreidimensionalen euklidischen Raumes einen Fixpunkt, so existiert eine Achse von Fixpunkten (Satz von EULER).

Wir wollen noch alle ebenen gegensinnigen Kongruenzen bestimmen. Wegen $\det(a_j^k) = -1$ kommt nur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ als Matrix der Normalform in Frage. Damit lautet die koordinatenmäßige Darstellung

$$x^1' = x^1 + c^1, \quad x^2' = -x^2 + c^2.$$

Setzt man mit der Translation $\bar{x}^1 = x^1$, $\bar{x}^2 = x^2 - c^2$ zusammen, so erhält man
 $x^1' = \bar{x}^1 + c^1$, $x^2' = -\bar{x}^2$.

Für $c^1 = 0$ entsteht $x^1' = x^1$, $x^2' = -x^2 \Rightarrow$ alle Punkte der x^1 -Achse sind fest, und es liegt eine orthogonale Symmetrie an der x^1 -Achse vor.

Für $c^1 \neq 0$ liegt die Zusammensetzung einer orthogonalen Symmetrie an der x^1 -Achse mit einer Translation in Richtung der x^1 -Achse vor. Man spricht von einer "Gleitspiegelung längs der x^1 -Achse"; diese hat keinen Fixpunkt.

Zusammenfassend gilt: Die ebenen gegensinnigen Kongruenzen sind genau die orthogonalen axialen Symmetrien und die Gleitspiegelungen.

6) Anwendungen im dreidimensionalen euklidischen Raum:

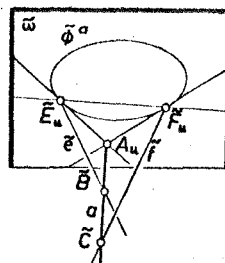
(a) Jede Drehquadrik (vgl. 7.6) verträgt alle Drehungen um ihre Drehachse.

Bew.: Jeder nicht leere ebene Schnitt der Drehquadrik normal zur Drehachse ist nach 7.6 ein Kreis mit dem Mittelpunkt auf der Drehachse, und umgekehrt liegt jeder Punkt der Drehquadrik entweder auf der Drehachse oder auf einem solchen Schnittkreis. Bei jeder Drehung um die Achse gehen diese Kreise als Ganzes in sich über, denn sie sind Abstandskurven, und die Drehung ist abstandstreu.

(b) Auf jedem einschaligen Drehhyperboloid existieren zwei Drehachsen von Erzeugenden.

Bew.: Eine ringartige Drehquadrik ist notwendig ein einschaliges Drehhyperboloid, welches nach 7.6 bei Drehung einer Hyperbel um ihre Nebenachse entsteht. Greift man eine Erzeugende heraus und unterwirft man diese allen Drehungen um die Drehachse, dann durchläuft die Erzeugende einen Regulus auf dem Drehhyperboloid; dazu genügt es zu zeigen, daß zwei durch eine Drehung zusammenhängende Erzeugenden e_1 und e_2 einander nicht treffen. Jeder solche Schnittpunkt wäre nämlich ein Fixpunkt der Drehung und müßte daher auf der Drehachse liegen; bei einem einschaligen Drehhyperboloid liegt jedoch kein Quadrikkpunkt auf der Drehachse.

(c) Ein elliptisches Netz $\mathcal{N}$ in $\mathbb{P}(\mathcal{W}(\mathbb{R}))$ kann nach 4.9, Folg. 7 durch eine gewisse (projektive) Kollineation $\alpha: \mathcal{P}_\alpha \rightarrow \mathcal{P}_\beta$ erzeugt werden. In $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ erzeugt $\tilde{\alpha}: \tilde{\mathcal{P}}_\alpha \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_\beta$ ein hyperbolisches Netz $\tilde{\mathcal{N}}$ mit $\tilde{\mathcal{N}} \supset \mathcal{N}$, und $\tilde{\mathcal{N}}$ hat zwei windschiefe Achsen $\tilde{e}$ und $\tilde{f}$. Da die Projektivität $\tilde{\alpha}|_{\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha\beta}}$ mit $\alpha_{\mathcal{N}}|_{\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha\beta}}$ kommutiert, sind die Fixpunkte $\tilde{E}$ und $\tilde{F}$ von $\tilde{\alpha}|_{\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha\beta}}$ dann $\alpha_{\mathcal{N}}$ -zugeordnet. Da $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ bei der Erzeugung von $\tilde{\mathcal{N}}$ nicht ausgezeichnet sind, gibt es ein weiteres $\alpha_{\mathcal{N}}$ -zugeordnetes Punktepaar $\tilde{E}_1$ und $\tilde{F}_1$ auf $\tilde{e}$ und $\tilde{f} \Rightarrow \tilde{e} \times_{\mathcal{N}} \tilde{f}$. Die komplexe Fortsetzung $\tilde{\mathcal{N}}$ eines elliptischen Netzes $\mathcal{N}$ ist ein hyperbolisches Netz mit einem Paar konjugiert hoch-imaginärer Achsen. Da $\tilde{\mathcal{N}}$ eine $\alpha_{\mathcal{N}}$ -Fixebene ist, liegen die windschiefen Achsen von $\tilde{\mathcal{N}}$ nicht in $\tilde{\mathcal{W}}$. Ihre Fernpunkte sind eindeutig bestimmte $\alpha_{\mathcal{N}}$ -zugeordnete Punkte $\tilde{E}_u, \tilde{F}_u$. Liegt insbesondere $\tilde{E}_u$ auf $\tilde{\Phi}^a$, so liegt auch $\tilde{F}_u$ auf $\tilde{\Phi}^a = \tilde{\Phi}^a \alpha_{\mathcal{N}}$. Die Punkte $\tilde{E}_u, \tilde{F}_u \in \tilde{\Phi}^a$ haben eine $\alpha_{\mathcal{N}}$ -fixe Verbindungsgerade, deren Pol bezüglich λ^a daher ein reeller Punkt A_u ($\lambda|_{\tilde{E}_u, \tilde{F}_u}$) ist. Durch A_u geht genau ein Netzstrahl a des elliptischen Netzes $\mathcal{N}$ und a ist eigentlich, denn $\tilde{E}_u, \tilde{F}_u$ ist die komplexe Fortsetzung der einzigen Netzgeraden von $\mathcal{N}$ in ω . Die Gerade a heißt die "Drehachse" des Netzes $\mathcal{N}$.



DEF.: Ein elliptisches Netz $\mathcal{N}$ in $\mathbb{P}(\mathcal{W}(\mathbb{R}))$ heißt ein "Drehnetz", wenn seine komplexe Fortsetzung $\tilde{\mathcal{N}}$ isotrope Achsen hat. Die Netzgerade durch den absoluten Pol der einzigen Fernnetzgeraden heißt die "Drehachse von $\mathcal{N}$ ".

Jedes Drehnetz gestattet alle Drehungen um die Drehachse a .

Bew.: Zur projektiven Fortsetzung $\alpha: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ einer Drehung $\tilde{\alpha}$ gehört genau eine komplexe Fortsetzung $\tilde{\alpha}$. Es genügt zu zeigen, daß die Achsen $\tilde{e}, \tilde{f}$ von $\tilde{\mathcal{N}}$ bei $\tilde{\alpha}$ als Ganzes festbleiben. $\tilde{\alpha}$ läßt A_u und $\tilde{\Phi}^a$ fest und daher auch die Berührungspunkte $\tilde{E}_u$ und $\tilde{F}_u$ der Tangenten aus A_u an $\tilde{\Phi}^a$. Die Punktreihe $\mathcal{P}_a$ ist Fixpunktreihe bei $\alpha \Rightarrow \mathcal{P}_a$ ist Fixpunktreihe bei $\tilde{\alpha}$; da a die Achse $\tilde{e}$ bzw. $\tilde{f}$ in einem von $\tilde{E}_u$ bzw. $\tilde{F}_u$ verschiedenen Punkt $\tilde{B}$ bzw. $\tilde{C}$ trifft, bleiben je zwei Punkte von $\tilde{e}$ und von $\tilde{f}$ bei $\tilde{\alpha}$ fest.

(f) Jede gegensinnige Kongruenz ist das Produkt einer orthogonalen Spiegelung an einer Hyperebene, einer Drehung um den Ursprung und einer Translation, denn durch die orthogonale Spiegelung wird aus einer gegensinnigen Kongruenz eine Bewegung.

Zwischenbemerkung:

Jeder orthogonale Automorphismus f eines euklidischen Vektorraumes besitzt in einer geeigneten orthonormierten Basis eine Koordinatendarstellung mit Hilfe einer "erweiterten Diagonalmatrix" der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ 0 & & & & \square & \\ & & & & & \square \end{pmatrix} \quad \text{mit } \square = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}$$

und $-\pi < \varphi_i < \pi$ und $\varphi_i \neq 0$.

(Es muß nicht jeder Typus der drei möglichen "Diagonalelemente" auftreten.)

Bemerkungen: (a) f gleichsinnig orthogonal $\Leftrightarrow \det (...) = +1 \Leftrightarrow$ Anzahl der auftretenden (-1) ist gerade.

(b) Wird eine Affinität α koordinatenmäßig durch $x^k = a_j^k x^j + c^k$ erfaßt, so gilt für die Koordinaten f^k eines Fixpunktes $f^k = a_j^k f^j + c^k \Rightarrow f^k (\delta_j^k - a_j^k) = c^k$. Notwendig für die Existenz eines Fixpunktes ist $\|\delta_j^k - a_j^k\| \neq 0$. Diese Bedingung ist nicht hinreichend; nach LA ist vielmehr hinreichend, daß der Rang der Gleichungsmatrix gleich dem Rang der erweiterten Gleichungsmatrix ist.

5) Wir wollen für eine euklidische Ebene alle Typen von Bewegungen angeben. Eine Bewegung wird durch $\mathcal{A} = \mathcal{A}g + \tau$ beschrieben, wobei g eine gleichsinnig orthogonale Bijektion ist; g wird daher bei geeigneter Basis durch eine Matrix mit Normalform dargestellt. Wegen $\|a_j^k\| = +1$ kommen nur die folgenden drei Typen in Frage:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ mit $-\pi < \varphi < \pi$ und $\varphi \neq 0$ (c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Zu (a): $\mathcal{A}' = \mathcal{A} + \tau$ stellt für $\tau = 0$ die Identität, für $\tau \neq 0$ eine Translation dar.

Zu (b): Wegen

$$\| \begin{pmatrix} 1 - \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} \| = 1 - 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 2(1 - \cos \varphi) \neq 0$$

existiert nach Bem.b ein Fixpunkt F und es liegt somit eine Drehung α vor; durch eine Translation kann man $F=0$ erreichen. Damit lautet die koordinatenmäßige Darstellung der Drehung

$$x'' = x' \cos \varphi + x^2 \sin \varphi, \quad x^2' = -x' \sin \varphi + x^2 \cos \varphi.$$

Nun kann auch der Name "Drehung" begründet werden:

$FX = FX^2$, denn $\angle$ ist längentreu; weiters gilt für $\angle(OX, OX^2) =: \varphi$ dann

$$\cos \varphi = \frac{e \cdot e'}{\|e\| \|e'\|} = \frac{(x^2)' \cos \varphi + x^2 \sin \varphi - x' x^2 \sin \varphi + (x^2)' \cos \varphi}{(\sqrt{(x^2)'^2 + (x^2)^2})^2} = \cos \varphi$$

$\Rightarrow \varphi$ ist unabhängig von X . Wegen $\varphi = \varphi(+|0, \pi, -\pi)$ gibt es außer 0 keinen weiteren Fixpunkt.

Zu (c): Man gewinnt diesen Fall aus (b), wenn man dort $\varphi = \pi$ setzt, also liegt eine Drehung durch den Winkel $\varphi = \pi$ vor. Andererseits ist $\varphi = -\varphi + \pi$ die Spiegelung am Fixpunkt $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Jede Spiegelung an einem Punkt läßt sich als Drehung um diesen Punkt durch den Winkel π auffassen.

Zusammenfassend gilt: Die nicht trivialen ebenen Bewegungen sind die Translationen und die Drehungen um einen Fixpunkt.

Für Bewegungen im dreidimensionalen euklidischen Raum kommen folgende Matrizen in Frage:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zu (a): $e' = e + \tau$ ist entweder die Identität oder eine Translation.

Zu (b): Unterdrückt man die 1. Koordinate, so erkennt man, daß die Projektion in Richtung der 1. Achse auf die 23-Ebene eine ebene Drehung um einen Punkt F ist; durch eine Translation erreichen wir, daß die x^1 -Achse durch 0 geht. Da ein Punkt $X = (x^1, 0, 0)$ dann in einen Punkt $(x^1, 0, 0)$ übergehen muß, folgt $\tau = (c^1, 0, 0)$. Damit wird die Bewegung dargestellt durch:

$$\begin{aligned} x^1' &= x^1 + c^1 \\ x^2' &= x^2 \cos \varphi + x^3 \sin \varphi \\ x^3' &= -x^2 \sin \varphi + x^3 \cos \varphi \end{aligned}$$

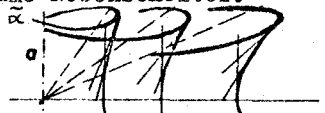
Wir unterscheiden:

$c^1 = 0$: Alle Punkte der x^1 -Achse sind dann einzeln fest, es liegt eine "Drehung um die x^1 -Achse" vor.

$c^1 \neq 0$: Die Bewegung setzt sich dann aus einer Drehung um die x^1 -Achse und einer Translation in Richtung der x^1 -Achse zusammen; man spricht von einer "Schraubung um die x^1 -Achse". Eine Schraubung ist keine Drehung, d.h. sie hat keinen Fixpunkt, denn wegen $c^1 \neq 0$ stimmen niemals die ersten Koordinaten des Ur- und Bildpunktes überein.

Zu (c): Man gewinnt diesen Fall aus (b), wenn man dort $\varphi = \pi$ setzt. Für $c^1 = 0$ liegt eine Drehung durch den Winkel π , für $c^1 \neq 0$ eine Schraubung zum Drehwinkel π vor.

Unterwirft man eine Netzgerade x von $\mathcal{N}$ allen Drehungen um a , so entsteht eine Drehschar auf einem einschaligen Drehhyperboloid ϕ , und jede Gerade der Schar gehört zu $\mathcal{N}$; ein Drehnetz zerfällt somit in Drehscharen auf einschaligen Drehhyperboloiden mit derselben Drehachse. In $\mathbb{P}$ treffen alle Geraden x einer Drehschar die Achsen $\tilde{e}$ und $\tilde{f}$, d.h. $\tilde{e}$ und $\tilde{f}$ sind Erzeugenden von ϕ und daher die Punkte $e.a=:B$ und $f.a=:C$ konjugiert imaginäre Punkte von ϕ . Dann sind B und C Scheitel von ϕ . Alle so entstandenen Drehhyperboloide haben die (nicht reellen) Scheitel auf der Drehachse gemeinsam. Da diese Scheitel auch Punkte der komplexen Erweiterung der Meridianhyperbel von ϕ sind, gilt: Alle Meridianhyperbeln haben in $\mathbb{P}$ gemeinsame Nebenscheitel. Schneidet man $\mathbb{P}$ mit zwei α_a -fixen Ebenen $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$, die einander längs einer Geraden von $\mathcal{N}$ schneiden, so werden die Durchstoßpunkte der Netzgeraden mit $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ in einer (projektiven) Kollineation $\tilde{\alpha}$ gekoppelt. Legt man insbesondere $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ durch die Netzgerade $\tilde{E}_a\tilde{F}_a$ ($\rightarrow \alpha \parallel \beta$), so läßt die Kollineation $\tilde{\alpha}$ die Punkte $\tilde{E}_a$ und $\tilde{F}_a$ einzeln fest. Da $\tilde{E}_a$ und $\tilde{F}_a$ die absoluten Kreispunkte von $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ sind, ist $\tilde{\alpha}$ die komplexe Fortsetzung einer gleichsinnigen Ähnlichkeit $\rho_a \rightarrow \rho_a$. Sind umgekehrt zwei parallele gleichsinnig ähnliche (insbesondere kongruente), nicht perspektive Ebenen gegeben, so sind die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte in einem Drehnetz enthalten, falls eine Verbindungsgerade orthogonal zu α und β steht.



SATZ 7.8: Ein reeller affiner Raum ist genau dann euklidisch, wenn in ihm eine Orthogonalitätsstruktur und eine Eichsphäre ausgezeichnet sind. Jede Kongruenz ist abstandstreu, und bei einer Ähnlichkeit wird jeder Abstand mit einem positiven Faktor multipliziert. Eine Affinität in $A(\mathcal{H})$ ist genau dann eine Kongruenz, wenn sie das Produkt eines orthogonalen Vektorraumautomorphismus und einer Translation ist. Jede Bewegung ist das Produkt einer Drehung und einer Translation.

7.9. Geometrien in Desarguesräumen

Zu jedem Desarguesraum $\mathbb{P}_{De}$ gehört bis auf Isomorphismen ein Algebraisierungskörper K und nach Auszeichnung einer Hyperebene $\mathbb{P}_w$ eine Translationsgruppe $T(\mathbb{P}_w) = \mathcal{H}(K)$. Nach dem 1. Hauptsatz ist $\mathbb{P}_{De} \cong \mathcal{H}(K) = \mathcal{H}(K \oplus \mathcal{H})$, und nach dem 2. Hauptsatz gilt für die Kollineationsgruppe $P \cap L(\mathbb{P}_{De}) \cong P \cap L(\mathcal{H}) / \mathcal{S}(\mathcal{H})$.

Nach J.DIEUDONNE (1955) bezeichnet man als klassische Gruppe die Gruppe $TL(\mathcal{H})$ und jede ihrer Untergruppen. Nach dem Erlanger Programm von F.KLEIN (1872) versteht man unter einer Geometrie

die Menge aller Aussagen, die gegenüber allen Abbildungen einer Gruppe invariant sind. Jede Gruppe von Abbildungen, die auf einer Objektmenge operiert, definiert eine Äquivalenzrelation auf dieser Menge; eine wahre Aussage über eine Teilmenge $\mathcal{Z}$ der Objektmenge heißt geometrisch im Sinne der Gruppe, wenn sie eine wahre Aussage über alle zu $\mathcal{Z}$ im Sinne der Gruppe äquivalenten Teilmengen der Objektmenge ist. So ist die Geometrie der Desarguesräume die Geometrie der klassischen Gruppe $\Gamma L(4) / \mathcal{O}(4)$, und auch jede Untergruppe von $P\Gamma L(\Pi_{De})$ bestimmt die Geometrie einer klassischen Gruppe. Damit entsteht eine Hierarchie von Geometrien:

$P\Gamma L(\Pi_{De}) \cong \Gamma L(4) / \mathcal{O}(4)$: Kollineationsgruppe..... Geometrie der projektiven Desarguesräume

$PGL(\Pi_{De}) \cong GL(4) / \mathcal{O}(4)$ für K kommutativ : Projektive Gruppe..... Projektive Geometrie

$A\Gamma L(A_{De}) \cong \Gamma L(4) \cdot T(4)$: Affinitätsgruppe..... Geometrie der affinen Desarguesräume

$AGL(A_{De}) \cong GL(4) \cdot T(4)$ für K kommutativ : Affine Gruppe..... Affine Geometrie

Speziell für $K \cong \mathbb{R}$:

$AGO(A(\mathbb{R})) \cong \mathcal{O}(4) \cdot O(4) \cdot T(4)$: Ähnlichkeitsgruppe... Ähnlichkeitsgeometrie

$GO(A(\mathbb{R})) \cong O(4) \cdot T(4)$: Kongruenzgruppe..... Kongruenzgeometrie

$GO^+(A(\mathbb{R})) \cong O^+(4) \cdot T(4)$: Bewegungsgruppe..... Bewegungsgeometrie

Das Erlanger Programm ist auch heute noch ein brauchbares Einteilungsprinzip der Geometrien klassischer Gruppen; jede Aussage der projektiven Geometrie ist z.B. eine affine Aussage, jede Aussage der affinen Geometrie eine bewegungsgeometrische Aussage usw. Als Definition der Geometrie ist das Erlanger Programm unbrauchbar. Einerseits ist durch die Gruppe allein noch nicht die Objektmenge erklärt, auf der die Gruppe operiert; wir sind deshalb von axiomatisch erklärten Inzidenzstrukturen ausgegangen und haben erst dann ihre Automorphismengruppen untersucht. Andererseits gibt es geometrische Teilgebiete z.B. in der Differentialgeometrie, die nicht über eine Gruppe von Abbildungen gekennzeichnet werden können.

