Die analytische Geometrie der Kegelschnitte

Wolfgang STRÖHER

ANALYTISCHE GEOMETRIE DER KEGELSCHNITTE

ALLGEMEINE VORBEMERKUNGEN

Die euklidische Ebene

Die Grundelemente der euklidischen Ebene sind Punkt und Gerade. Die affinen Grundbeziehungen dieser Elemente sind:

Verbindung zweier Punkte: Verbindungsgerade

Schnitt zweier oder mehrerer Geraden in einem Schnittpunkt

Parallele Gerade besitzen in der euklidischen Ebene keinen Schnittpunkt (Durch Einführung des Begriffes "Fernpunkt" würde man die euklidische Ebene in die projektive Ebene einbetten).

Metrische Grundbeziehungen:

Abstand zweier Punkte. Der Abstand zweier Punkte ist stets eine *positive reelle Zahl.*

Der Winkel zweier Halbgeraden ist eine reelle Zahl φ mit $0 \leq \varphi \leq \pi$ (bzw. $0° \leq \varphi° \leq 180°$).

Zwei Geraden schließen zwei Winkel ein, die einander auf π ergänzen.

Anwendung der Vektorrechnung zur Behandlung der euklidischen Geometrie

Bezeichnungsweisen: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \ldots, \mathfrak{n}, \ldots, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$

Vektoraddition: $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$

$\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$.....Nullvektor

$\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} - \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$.....entgegengesetzter Vektor

Verknüpfung mit reellen Zahlen: $\lambda\mathfrak{a}$ ist ein Vektor

$\lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \lambda\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b}$

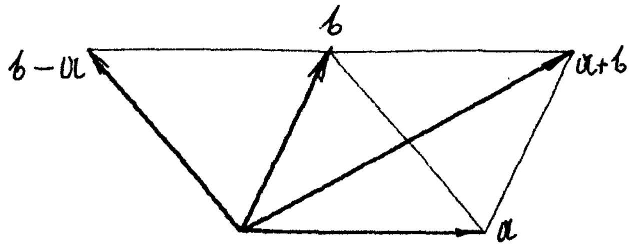
$(\lambda + \mu)\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a}$

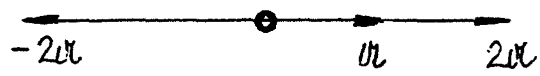
$\mu(\lambda\mathfrak{a}) = (\mu\lambda)\mathfrak{a}$

$1\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$

Die Menge der Vektoren mit den angegebenen Verknüpfungen bildet einen *Vektorraum.*

Darstellung der Vektorsumme und der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar in der euklidischen Ebene





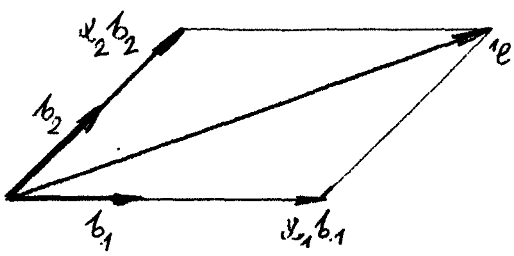
Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

$\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ heißen linear unabhängig $:\Longleftrightarrow (\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b} = \mathfrak{o} \Rightarrow \lambda = 0 \wedge \mu = 0)$

Der Ausdruck $\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}$ heißt *Linearkombination* der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

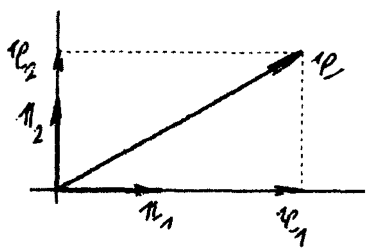
Seien $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ linear unabhängig. Dann kann jeder Vektor $\mathfrak{x}$ als Linarkombination von $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ dargestellt werden:

$$\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{b}_1 + x_2\mathfrak{b}_2$$



Die Faktoren x_1 und x_2.sind die *Koordinaten* des Vektors $\mathfrak{x}$ bezüglich der <u>Basis</u> $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$. Die Koordinaten sind *positive oder negative reelle Zahlen* (keine Strecken!)

In der euklidischen Ebene betrachtet man stets *orthonormierte Basen*, d.h. die Basisvektoren sind zueinander orthogonale Einheitsvektoren.



$\mathfrak{e}_1,\mathfrak{e}_2$...normierte Einheitsvektoren

$|\mathfrak{e}_1| = |\mathfrak{e}_2| = 1,\ \mathfrak{e}_1 \perp \mathfrak{e}_2$

$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ sind die *Komponenten* des Vektors $\mathfrak{x}$

Die *Länge (Betrag)* $|\mathfrak{a}|$ eines Vektors $\mathfrak{a}$ ist stets eine *relle positive* Zahl ≥ 0

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{x}_1 = x_1 e_1 \\ \mathfrak{x}_2 = x_2 e_2\end{array}\right\} \quad \mathfrak{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

x_1 x_2...Koordinaten bezüglich der ON - Basis e_1, e_2

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$|\mathfrak{x}_1| = |x_1 e_1| = |x_1|.|e_1| = |x_1| \geq 0$

$|\mathfrak{x}_2| = |x_2 e_2| = |x_2|.|e_2| = |x_2| \geq 0$

$|\mathfrak{x}| = \overset{+}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \geq 0$ Länge des Vektors $\mathfrak{x}$

$|\mathfrak{x}| = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$

Festlegung der Vektoren durch ihre Koordinaten

$a(a_1, a_2)$, $b(b_1, b_2)$, $(a+b)(a_1+b_1, a_2+b_2)$, $(\lambda a)(\lambda a_1, \lambda a_2)$

Skalarprodukt zweier Vektoren

$ab := |a|.|b|.\cos\varphi \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi$

φ spitz $\Leftrightarrow ab > 0$

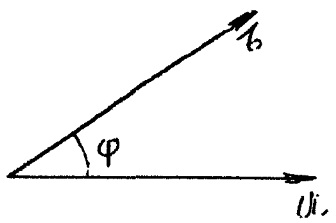
$\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ab = 0$

φ stumpf $\Leftrightarrow ab < 0$

$ab = ba$

$(\lambda a)b = \lambda(ab)$

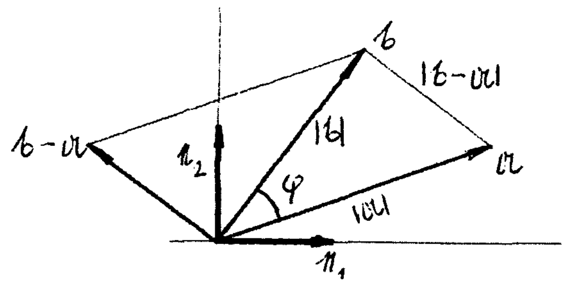
$(a+b)c = ac + bc$



Es sei

$a(a_1, a_2)$, $b(b_1, b_2)$, $(b-a)(b_1-a_1, b_2-a_2)$

Die Anwendung des Kosinussatzes ergibt



$|b-a|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a|.|b|.\cos\varphi = (a_1^2+a_2^2) + (b_1^2+b_2^2) - 2ab(*)$

Ferner gilt für die Länge des Vektors $b-a$

$|b-a|^2 = (b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 = (a_1^2+a_2^2) + (b_1^2+b_2^2) - 2(a_1b_1+a_2b_2)$

Vergleich mit (*) ergibt

$$\boxed{ab = a_1b_1 + a_2b_2 = |a|.|b|.\cos\varphi}$$

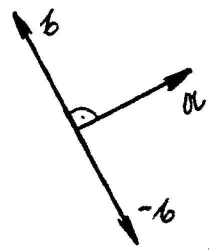
Daraus

$$\cos\varphi = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}|.|\mathfrak{b}|}$$

Für $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ folgt

$|\mathfrak{a}|^2 = \mathfrak{a}\mathfrak{a} = a_1^2 + a_2^2$, $\qquad |\mathfrak{a}| = +\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{a}} = +\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

<u>Orthogonale</u> <u>Vektoren.</u>



$\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b} \Longleftrightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0$

Sei $\mathfrak{a}(a_1,a_2)$, $\mathfrak{b}(b_1,b_2)$, dann ist

$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0 = a_1b_1 + a_2b_2 \Longrightarrow b_1 = \rho a_2,\ b_2 = -\rho a_1$

$(\rho \neq 0)$. Daher

$$\boxed{\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b} \Longleftrightarrow \mathfrak{a}(a_1,a_2),\ \mathfrak{b}(\rho a_2, -\rho a_1) \text{ oder } \mathfrak{b}(-\rho a_2, \rho a_1)}$$

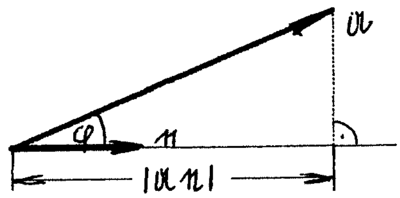
<u>Normierung</u> <u>eines</u> <u>Vektors</u>

$$\mathfrak{a}^\bullet := \frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|},\quad |\mathfrak{a}^\bullet| = 1$$

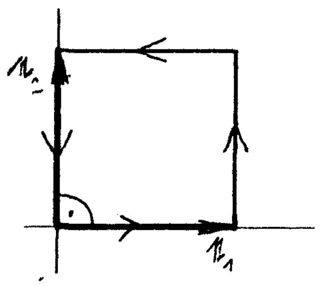
Die Buchstaben $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ werden im folgenden für die Bezeichung von <u>Einheitsvektoren</u> reserviert.

<u>Der</u> <u>Projektionssatz</u>

$\mathfrak{a}\mathfrak{e} = |\mathfrak{a}|\cos\varphi$



Rechtssysteme, positiver Drehsinn

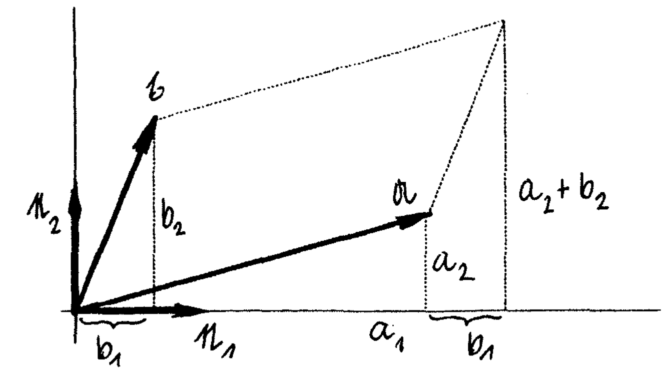


Das geordnete Paar (e_1,e_2) hat einen *positiven Drehsinn*, wenn, beginnend mit e_1, das von (e_1, e_2) gebildete Quadrat so umlaufen wird, daß sein Inneres stets zur Linken liegt. Dem Quadrat wird dann der *positive Flächeninhalt* +1 zugeordnet.

<u>Positiver</u> <u>Drehsinn</u> <u>des</u> <u>Vektorpaares $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.</u> $\mathfrak{a}(a_1,a_2)$, $\mathfrak{b}(b_1,b_2)$. Das geordnete Paar $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ hat einen positiven Drehsinn, wenn das von ihm aufgespannte Parallelogramm positiv umlaufen wird (Figur umseitig). Dem Parallelogramm wird dann ein positiver Flächeninhalt zugeordnet.

$$F = \frac{1}{2}b_1b_2 + \frac{1}{2}[b_2+(a_2+b_2)]a_1 - \frac{1}{2}a_1a_2 - \frac{1}{2}[a_2+(a_2+b_2)]b_1 \Rightarrow$$

$$F = (a_1b_2 - a_2b_1)$$



Der Drehsinn des geordneten Vektorpaares $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ mit den Koordinaten $\mathfrak{a}(a_1,a_2)$, $\mathfrak{b}(b_1,b_2)$ ist genau dann positiv, wenn gilt

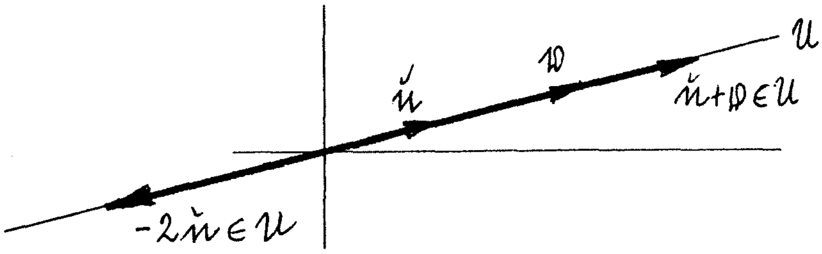
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 > 0$$

Unterräume und Nebenräume eines Vektorraumes

Definition: Eine Teilmenge eines Vektorraumes heißt *Unterraum* $\mathfrak{U}$, wenn jede beliebige Linearkombination zweier Vektoren aus $\mathfrak{U}$ wieder in $\mathfrak{U}$ enthalten ist:

$$\mathfrak{x},\mathfrak{y} \in \mathfrak{U} \wedge \lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y} \in \mathfrak{U} \Longleftrightarrow : \mathfrak{U} \text{ Unterraum}$$

Triviale Unterräume: Der Vektorraum selbst und der *Nullraum* $\{\mathfrak{o}\}$.
Nichttriviale Unterräume: Gerade durch den Ursprung
(Achtung: die leere Menge ist kein Unterraum)

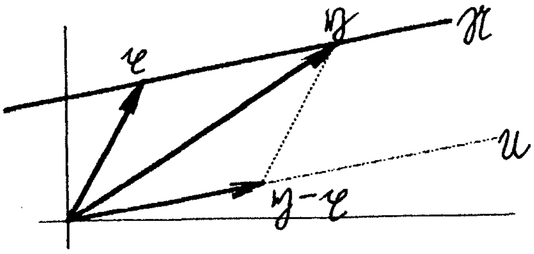


Definition: Eine Teilmenge $\mathfrak{N}$ eines Vektorraumes heißt *Nebenraum zum Unterraum* $\mathfrak{U}$, wenn der Differenzenvektor zweier beliebigen Vektoren von $\mathfrak{N}$ im Unterraum $\mathfrak{U}$ liegt.
$\mathfrak{U}$ nennt man die *Richtung* von $\mathfrak{N}$.

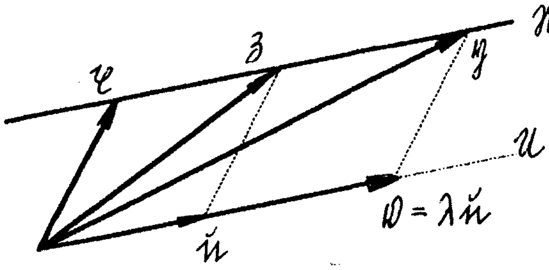
Die Menge der Vektoren einer Geraden bilden einen Nebenraum. Der zugehörige Unterraum ist die parallele Gerade $\mathfrak{U}$ durch den Ursprung. $\mathfrak{U}$ heißt *Richtung* von $\mathfrak{N}$. Die in $\mathfrak{U}$ enthaltenen Vektoren heißen *Richtungsvektoren* des Nebenraumes.

Sonderfall: Die Menge $\{\mathfrak{x}\}$ stellt einen Nebenraum dar, denn es gilt $\mathfrak{x} - \mathfrak{x} = \mathfrak{o} \in \{\mathfrak{o}\}$ Nullraum.

Definition: Die leere Menge ist Nebenraum.



Man erhält die Vektoren eines Nebenraumes $\mathfrak{N}$ des Unterraumes $\mathfrak{U}$, wenn man zu einem beliebigen Vektor $\mathfrak{x}$ des Nebenraumes (dem *Repräsentanten des Nebenraumes*), sämtliche Vektoren von $\mathfrak{U}$ addiert.



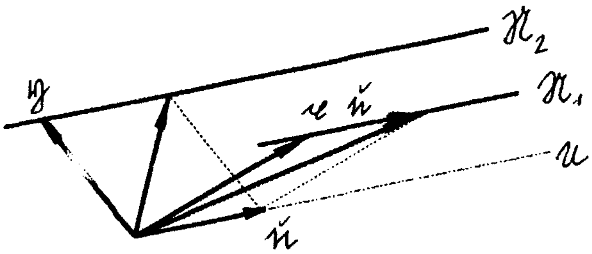
$\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \mathfrak{u}$

$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \mathfrak{v} = \mathfrak{x} + \lambda\mathfrak{u}$

$\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}$ "Ortsvektoren"

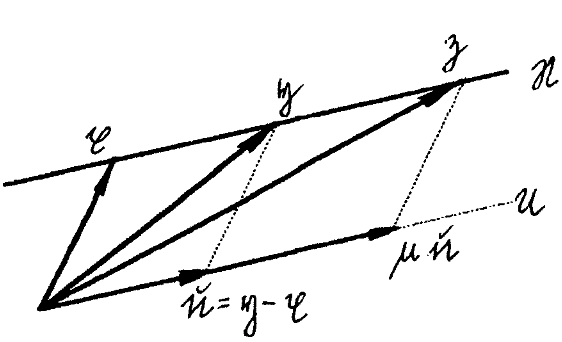
$\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v} = \lambda\mathfrak{u}$

"Richtungsvektoren"

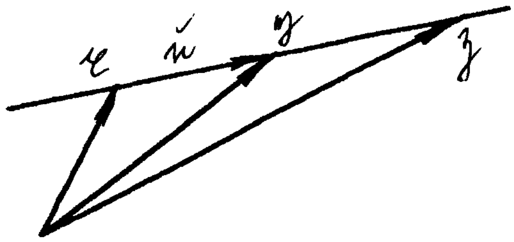


Ein Ortsvektor kann nur einem einzigen Nebenraum angehören, während ein Richtungsvektor verschiedenen Nebenräumen zugeordnet werden kann.

Wir vereinbaren daher, daß Ortsvektoren nur vom Ursprung aus aufgetragen werden. Richtungsvektoren dürfen auch im Endpunkt eines Ortsvektors angetragen werden.



$\mathfrak{y} - \mathfrak{x} = \mathfrak{u}$. Die Differenz zweier Ortsvektoren ist stets ein Richtungsvektor. Die Summe eines Ortsvektors und eines Richtungsvektors ist ein Ortsvektor.



Vereinfachte Darstellung obiger Figur

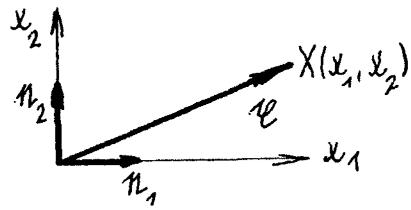
$$\mathfrak{y} - \mathfrak{x} = \mathfrak{u} \Rightarrow \mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \mu\mathfrak{u} = \mathfrak{x} + \mu(\mathfrak{y}-\mathfrak{x}) = (1-\mu)\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathfrak{z} = \lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y}, \qquad \lambda + \mu = 1 \\ \text{"affine Linearkombination"}\end{array}}$$

In der affinen Linearkombination zweier Vektoren treten ausschließlich Ortsvektoren auf.

Anwendung der Vektorrechnung auf die ebene euklidische Geometrie

Der Punkt: Der Punkt wird aufgefaßt als Nebenraum zum Nullraum $\{\mathfrak{o}\}$. Jeder Punkt wird durch seinen Ortsvektor dargestellt.
Geleichberechtigte Darstellungen:
$X(\mathfrak{x}) \equiv X(x_1, x_2) \equiv \mathfrak{x}(x_1, x_2)$

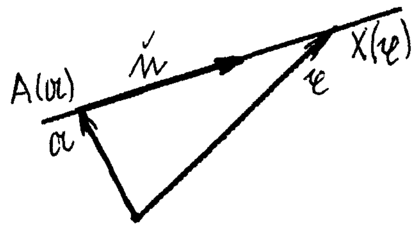


Die Gerade

1. Festlegung als Nebenraum durch Repräsentanten (Aufpunkt) und Richtung (Unterraum)

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{u} \\ x_1 &= a_1 + \lambda u_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda u_2 \end{aligned}}$$

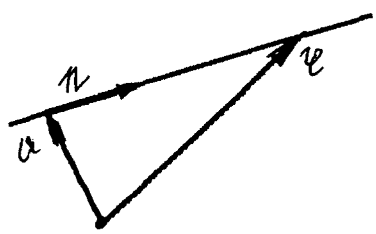
Parameterdarstellung der Geraden mit Hilfe des Parameters λ



Elimination des Parameters λ ergibt
$u_2 x_1 - u_1 x_2 = a_1 u_2 - a_2 u_1$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{a} + s\mathfrak{e} & |\mathfrak{e}| &= 1 \\ x_1 &= a_1 + s e_1 & e_1^2 + e_2^2 &= 1 \\ x_2 &= a_2 + s e_2 \end{aligned}}$$

$|s| \ldots$ Abstand von A und X

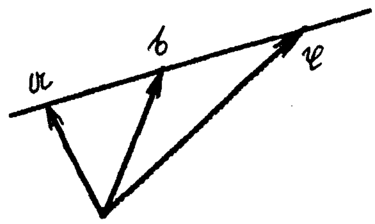


Elimination des Parameters s ergibt
$e_2 x_1 - e_1 x_2 = a_1 e_2 - a_2 e_1$

2. Festlegung durch zwei Punkte

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b} & \lambda + \mu = 1 \\ x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 & \\ x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 & \end{array}}$$

Es treten nur Ortsvektoren auf



3. Gerade normal zu einer Richtung c

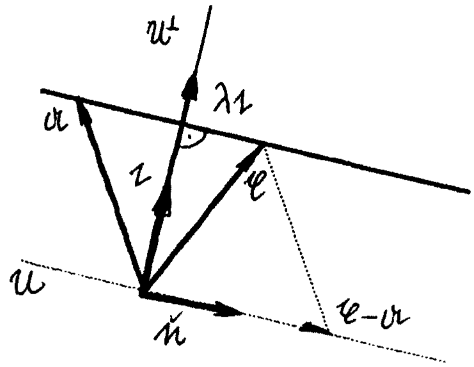
$\mathfrak{x} - \mathfrak{a} \in \mathfrak{U} \Rightarrow (\mathfrak{x} - \mathfrak{a}) \perp \mathfrak{c} \Rightarrow$

$(\mathfrak{x}-\mathfrak{a})\mathfrak{c} = 0$

wir bezeichnen

$$\boxed{\mathfrak{x}\mathfrak{c} - \mathfrak{a}\mathfrak{c} = 0}$$

als *Gleichung der Geraden*



Mit $\mathfrak{x}(x_1,x_2)$, $\mathfrak{c}(c_1,c_2)$ und $-\mathfrak{a}\mathfrak{c} =: c_0$ gilt

$$\boxed{\begin{array}{ll} c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0 & \text{Gleichung der Geraden} \\ \mathfrak{c}(c_1,c_2) & \text{Normalenvektor der Geraden} \\ (-c_2,c_1) \text{ oder } (c_2,-c_1) & \text{Richtungsvektor der Geraden} \end{array}}$$

Die Geradengleichung ist ein in den "laufenden Koordinaten" x_1 x_2 *inhomogener linearer Ausdruck.*
Die Gerade ist durch ihre Gleichung eindeutig bestimmt. Umgekehrt bestimmt eine Gerade ihre Gleichung nicht eindeutig, da man den Normalenvektor $\mathfrak{c}$ durch $\lambda\mathfrak{c}$ $(\lambda \neq 0)$ ersetzen kann. Dann gilt
$(\mathfrak{x}-\mathfrak{a})(\lambda\mathfrak{c}) = \lambda[(\mathfrak{x}-\mathfrak{a})\mathfrak{c}] = \lambda[c_0+c_1x_1+c_2x_2] = (\lambda c_0)+(\lambda c_1)x_1+(\lambda c_2)x_2 = 0$.

Durch die Gleichung. $c_0+c_1x_1+c_2x_2 = 0$ ist zunächst der Normalenvektor $\mathfrak{c}(c_1,c_2)$ bis auf seine Länge bestimmt. Um einen Repräsentanten $\mathfrak{a}(a_1,a_2)$ zu bestimmen, wählen wir etwa a_1 beliebig. Dann gilt

$$a_2 = -\frac{c_1a_1+c_0}{c_2}$$

Wäre $c_2 = 0$, so würden wir a_2 beliebig wählen und erhielten

$$a_1 = -\frac{c_2a_2+c_0}{c_1}$$

Das Resultat ist unabhängig von einem gemeinsamen Faktor der Größen

c_1, c_2, c_0. Ein Widerspruch tritt nur dann ein, wenn gleichzeitig

$$c_0 \neq 0,\quad c_1 = c_2 = 0$$

ist. Dann ergäbe sich der Widerspruch $c_0 = 0$. Der Fall $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ ist als Trivialität $0 = 0$ uninteressant.

> $c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ stellt genau dann eine eindeutig bestimmte Gerade dar, wenn $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ ist, d.h. wenn der Normalenvektor $\mathfrak{c} \neq \mathfrak{o}$ ist

Sonderfall: $\mathfrak{c} = \mathfrak{e}$

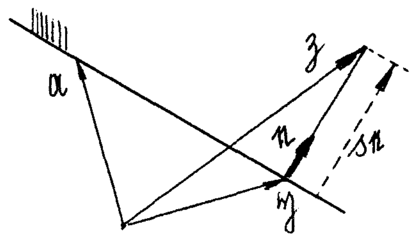
$$\boxed{\begin{aligned} &\mathfrak{e}\mathfrak{x} - \mathfrak{e}\mathfrak{a} = 0 \\ &e_0 + e_1x_1 + e_2x_2 = 0 \\ &e_1^2 + e_2^2 = 1 \end{aligned}}$$

HESSEsche Normalform der Geradengleichung (Otto Hesse 1811 - 1874)

Anwendungen der HESSEschen Normalform einer Geradengleichung

Abstand des Punktes $\mathfrak{z}$ von der Geraden $\mathfrak{e}\mathfrak{x} - \mathfrak{e}\mathfrak{a} = 0$

Für den Fußpunkt $\mathfrak{y}$ des Lotes aus $\mathfrak{z}$ auf die Gerade gilt



$\mathfrak{e}\mathfrak{y} - \mathfrak{e}\mathfrak{a} = 0 \quad (*)$

$\mathfrak{z} = \mathfrak{y} + s\mathfrak{e} \qquad |s|$..Abstand

$\mathfrak{z} - s\mathfrak{e} = \mathfrak{y}$ skalare Multiplikation mit $\mathfrak{e}$

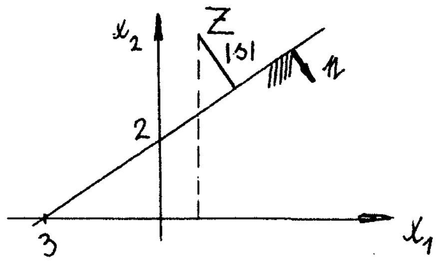
$\mathfrak{e}(\mathfrak{z} - s\mathfrak{e}) - \mathfrak{e}\mathfrak{y} = 0$ daher wegen (*)

$\mathfrak{e}\mathfrak{z} - s\mathfrak{e}\mathfrak{e} - \mathfrak{e}\mathfrak{a} = 0$ daraus wegen $\mathfrak{e}\mathfrak{e} = 1$

$$\boxed{s = \mathfrak{e}\mathfrak{z} - \mathfrak{e}\mathfrak{a} = \mathfrak{e}(\mathfrak{z} - \mathfrak{a}) \qquad |s| = |\mathfrak{e}(\mathfrak{z} - \mathfrak{a})|}$$

> Gleichung der Geraden ... $c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0$
>
> $$\frac{c_0 + c_1x_1 + c_2x_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = 0 \quad \ldots \text{ HESSEsche Normalform}$$
>
> Einheitsvektor in Normalenrichtung:
>
> $$\mathfrak{e}\left(e_1 = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}},\ e_2 = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\right)$$
>
> Abstand des Punktes $\mathfrak{z}(z_1, z_2)$ von der Geraden
>
> $$s = \frac{c_0 + c_1z_1 + c_2z_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \qquad |s| = \left|\frac{c_0 + c_1z_1 + c_2z_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\right|$$

> Der Faktor s des Einheitsvektors $\mathfrak{e}$ in Normalenrichtung der Geraden ist positiv, wenn sich $\mathfrak{z}$ in jener durch die Gerade bestimmten Halbebene befindet, in welche $\mathfrak{e}$ hineinweist



Beispiel: Abstand des Punktes Z(1,5) von der Geraden $2x_1 - 3x_2 + 6 = 0$

$c(2,-3)$, $|c|^2 = 4 + 9 = 13$, $|c| = \sqrt{13}$

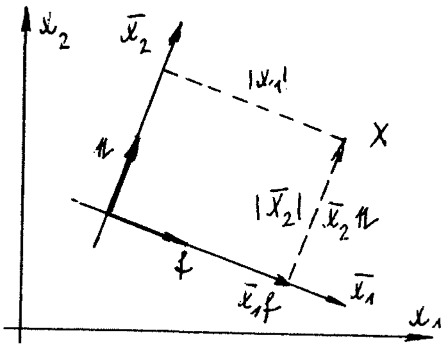
$$e = \frac{c}{|c|} \Rightarrow e\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$$

HESSEsche Normalform: $$\frac{2x_1 - 3x_2 + 6}{\sqrt{13}} = 0$$

$$s = \frac{2.1 - 5.3 + 6}{\sqrt{13}} = -\frac{7}{\sqrt{13}} \qquad \underline{|s| = \frac{7}{\sqrt{13}}}$$

Übergang zu einem neuen kartesischen Bezugssystem

Hessesche Normalformen der neuen Achsen:



$e_0 + e_1x_1 + e_2x_2 = 0 \quad \mathfrak{e}(e_1, e_2)$ Neue $\bar{x}_1$-Achse

$f_0 + f_1x_1 + f_2x_2 = 0 \quad \mathfrak{f}(f_1, f_2)$ Neue $\bar{x}_2$-Achse

$e_1^2 + e_2^2 = 1, \qquad f_1^2 + f_2^2 = 1$

Aus der Orthogonalität von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ folgt

$\mathfrak{f}\mathfrak{e} = e_1f_1 + e_2f_2 = 0$

$|\bar{x}_1|$ ist der Abstand des Punktes $X(x_1, x_2)$ von der $\bar{x}_2$-Achse, $|\bar{x}_2|$ ist der Abstand des Punktes $X(x_1, x_2)$ von der $\bar{x}_1$-Achse. Für ein *Rechtssystem* muß zusätzlich gelten

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ e_1 & e_2 \end{vmatrix} = f_1e_2 - f_2e_1 > 0 \Rightarrow e_1f_2 - e_2f_1 < 0$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} e_0 + e_1x_1 + e_2x_2 = \bar{x}_2 & e_1^2 + e_2^2 = 1 & e_1f_1 + e_2f_2 = 0 \\ f_0 + f_1x_1 + f_2x_2 = \bar{x}_1 & f_1^2 + f_2^2 = 1 & e_1f_2 - e_2f_1 < 0 \end{array}}$$

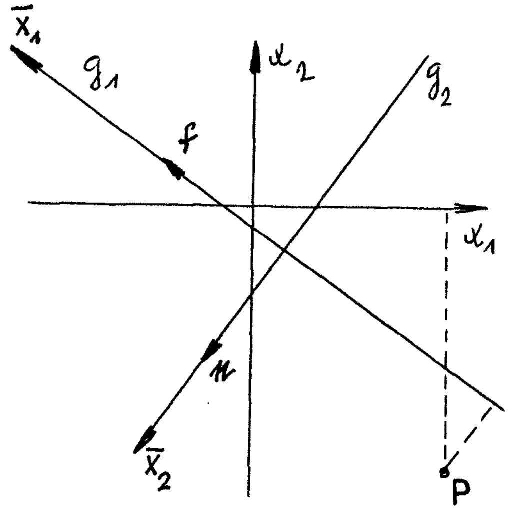
Beispiel: $\left.\begin{array}{ll} g_1 \ldots 2 + 3x_1 + 4x_2 = 0 & \text{neue } \bar{x}_1\text{-Achse} \\ g_2 \ldots 7 - 4x_1 + 3x_2 = 0 & \text{neue } \bar{x}_2\text{-Achse} \end{array}\right\}$ laut Angabe orthogonal

Die neue $\bar{x}_2$-Koordinate des Punktes P(5,-7) soll positiv sein.

HESSEsche Normalformen:

$$\frac{2 + 3x_1 + 4x_2}{5} = 0 \quad \ldots \quad \bar{x}_1\text{-Achse}$$

$$\frac{7 - 4x_1 + 3x_2}{5} = 0 \quad \ldots \quad \bar{x}_2\text{-Achse}$$



Für die Koordinate $\bar{x}_2$ des Punktes (5,-7) gilt dann

$$\frac{2 + 3.5 + 4.(-7)}{5} = -\frac{11}{5}$$

Da dieser Faktor positiv sein soll, muß die Gleichung g_1 mit -1 multipliziert werden. Daher gilt:

$$\bar{x}_2 = -\frac{2}{5} - \frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_2 \qquad \mathfrak{e}(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$$

$$\pm\bar{x}_1 = \frac{7}{5} - \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 \qquad \pm\mathfrak{f}(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$$

Für ein Rechtssystem muß gelten $e_1f_2 - e_2f_1 < 0$, also

$$\pm\left[(-\frac{3}{5})(\frac{3}{5}) - (-\frac{4}{5})(-\frac{4}{5})\right] = \pm(-1).\text{Daher gilt}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{7}{5} - \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 \\ \bar{x}_2 &= -\frac{2}{5} - \frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_2 \end{aligned}}$$

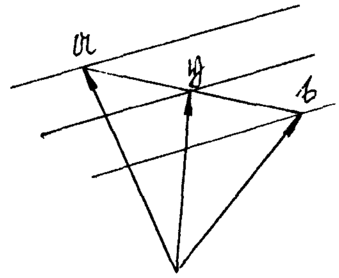
Für die neuen Koordinaten des Punktes findet man

$$\bar{x}_1 = \frac{7}{5} - \frac{4}{5}.5 + \frac{3}{5}(-7) = -\frac{34}{5}, \quad \bar{x}_2 = -\frac{2}{5} - \frac{3}{5}.5 - \frac{4}{5}(-7) = \frac{11}{5}$$

Mittellinie paralleler Geraden

$$c_0 + \rho c_1 x_1 + \rho c_2 x_2 = 0$$

$$d_0 + \sigma c_1 x_1 + \sigma c_2 x_2 = 0$$



Wir wählen auf jeder Geraden einen Punkt, z.B.

$$x_2 = 0, \; x_1 = -\frac{c_0}{\rho c_1} \qquad \mathfrak{a}(-\frac{c_0}{\rho c_1}, 0)$$

$$x_2 = 0, \; x_1 = -\frac{d_0}{\sigma c_1} \qquad \mathfrak{b}(-\frac{d_0}{\sigma c_1}, 0)$$

Für den Miitelpunkt $\mathfrak{y}$ der Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gilt daher

$$\mathfrak{y} = \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}{2} = \left(- \frac{\sigma c_0 + \rho d_0}{2\rho\sigma c_1}, 0\right) = (y_1, 0)$$

Für eine Parallele zu den gegebenen Geraden gilt allgemein

$$h_0 + \tau c_1 x_1 + \tau c_2 x_2 = 0$$

Für eine Parallele durch $\mathfrak{y}$ gilt dann

$$h_0 + \tau c_1 y_1 = h_0 - \tau c_1 \cdot \frac{\sigma c_0 + \rho d_0}{2\rho\sigma c_1} = 0 \Rightarrow h_0 = \tau \cdot \frac{\sigma c_0 + \rho d_0}{2\rho\sigma}$$

Die Gleichung der Mittellinie lautet daher

$$\tau \frac{\sigma c_0 + \rho d_0}{2\rho\sigma} + \tau c_1 x_1 + \tau c_2 x_2 = 0$$

Kürzung durch τ und Erweiterunmg mit $2\rho\sigma$ ergibt schließlich

$$\boxed{(\sigma c_0 + \rho d_0) + 2\rho\sigma c_1 x_1 + 2\rho\sigma c_2 x_2 = 0}$$

Man beachte, daß die Gleichung der Mittellinie eine spezielle einfache Linear -kombination der beiden gegebenen Gleichungen ist

$$\begin{array}{l|l} c_0 + \rho c_1 x_1 + \rho c_2 x_2 = 0 & \sigma \\ & \quad + \\ d_o + \sigma c_1 x \ \ + \sigma c_2 x_2 = 0 & \rho \end{array}$$

QUADRATISCHE AUSDRÜCKE

Zusammenstellung wichtiger Bezeichungsweisen

$$K(\mathfrak{x}) := a_{00} + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$(a_{ij} = a_{ji},\ a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0)$$

$K(\mathfrak{x})$ ist ein *inhomogener quadratischer Ausdruck.*

$$L(\mathfrak{x}) := a_{00} + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2$$

ist ein *inhomogener linearer Ausdruck*

$$Q(\mathfrak{x}) := a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

ist ein *homogener quadratischer Ausdruck*

Daher gilt:

$$\boxed{K(\mathfrak{x}) = L(\mathfrak{x}) + Q(\mathfrak{x})}$$

Bezeichnungsweisen:

Matrix von $K(\mathfrak{x})$:

$$\begin{Vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{Vmatrix} = \|a_{ij}\|$$

Adjungierte Matrix von $K(\mathfrak{x})$:

$$\begin{Vmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{01} & A_{11} & A_{12} \\ A_{02} & A_{12} & A_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}a_{22}-a_{12}^2 & a_{02}a_{12}-a_{01}a_{22} & a_{01}a_{12}-a_{02}a_{11} \\ a_{01}a_{12}-a_{01}a_{22} & a_{00}a_{22}-a_{02}^2 & a_{01}a_{02}-a_{00}a_{12} \\ a_{01}a_{12}-a_{02}a_{11} & a_{01}a_{02}-a_{00}a_{12} & a_{00}a_{11}-a_{01}^2 \end{Vmatrix} = \|A_{ij}\|$$

Determinante von $K(\mathfrak{x})$:

$$\begin{aligned} A := {} & a_{00}A_{00} + a_{01}A_{01} + a_{02}A_{02} = \\ = {} & a_{01}A_{01} + a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = \\ = {} & a_{02}A_{02} + a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} = \\ = {} & a_{00}a_{11}a_{22} + 2a_{01}a_{02}a_{12} - a_{02}^2a_{11} - a_{00}a_{12}^2 - a_{01}^2a_{22} \end{aligned}$$

Ferner gilt folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} 0 &= a_{00}A_{01} + a_{01}A_{11} + a_{02}A_{12} = a_{00}A_{02} + a_{01}A_{12} + a_{02}A_{22} = \\ &= a_{01}A_{00} + a_{11}A_{01} + a_{12}A_{02} = a_{01}A_{02} + a_{11}A_{12} + a_{12}A_{22} = \\ &= a_{02}A_{00} + a_{12}A_{01} + a_{22}A_{02} = a_{02}A_{01} + a_{12}A_{11} + a_{22}A_{12} \end{aligned}$$

Folgende Abkürzungen werden verwendet:

$$s_{00} := a_{11} + a_{22}, \qquad S_{00} := A_{11} + A_{22}$$

Bilineare Ausdrücke (Bilinearformen)

Sei

$$\mathfrak{z} = \lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y} \qquad \lambda,\mu \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

eine beliebige Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$. Dann gilt

$K(\mathfrak{z}) = K(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}) = L(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}) + Q(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y})$

$L(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}) = a_{00}+2a_{01}(\lambda x_1+\mu y_1)+2a_{02}(\lambda x_2+\mu y_2)+(\lambda a_{00}+\mu a_{00})-(\lambda a_{00}+\mu a_{00})$

$\underline{L(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}) = [1-(\lambda+\mu)]a_{00} + \lambda L(\mathfrak{x}) + \mu L(\mathfrak{y})}$

$$\begin{aligned} Q(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}) &= a_{11}(\lambda x_1+\mu y_1)^2+2a_{12}(\lambda x_1+\mu y_1)(\lambda x_2+\mu y_2)+a_{22}(\lambda x_2+\mu y_2)^2 = \\ &= a_{11}[\lambda^2x_1^2+2\lambda\mu x_1y_1+\mu^2y_1^2]+2a_{12}[\lambda^2x_1x_2+\lambda\mu(x_1y_2+x_2y_1)+\mu^2y_1y_2]+ \\ &\quad +a_{22}[\lambda^2x_2^2+2\lambda\mu x_2y_2+\mu^2y_2^2] \end{aligned}$$

$Q(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}) = \lambda^2Q(\mathfrak{x}) + \mu^2Q(\mathfrak{y}) + 2\lambda\mu[a_{11}x_1y_1+a_{12}(x_1y_2+x_2y_1) + a_{22}x_2y_2]$

Setzt man

$$B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) := a_{11}x_1y_1 + a_{12}(x_1y_2+x_2y_1) + a_{22}x_2y_2$$

so gilt

$\underline{Q(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}) = \lambda^2Q(\mathfrak{x}) + \mu^2Q(\mathfrak{y}) + 2\lambda\mu B(\mathfrak{x},\mathfrak{y})}$

Hierin ist $B(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ ein *homogener bilinearer Ausdruck (Bilinearform)* mit folgenden Eigenschaften

$$\boxed{\begin{aligned} &B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) := a_{11}x_1y_1 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{22}x_2y_2 \\ &B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = B(\mathfrak{y},\mathfrak{x}) \\ &B(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) = Q(\mathfrak{x}) \\ &B(\rho_1\mathfrak{x}_1+\rho_2\mathfrak{x}_2,\mathfrak{y}) = \rho_1B(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{y}) + \rho_2B(\mathfrak{x}_2,\mathfrak{y}) \\ &B(\mathfrak{x},\sigma_1\mathfrak{y}_1+\sigma_2\mathfrak{y}_2) = \sigma_1B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}_1) + \sigma_2B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}_2) \end{aligned}}$$

Zusammenfassend gilt

$$\boxed{\begin{aligned} &K(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}) = L(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}) + Q(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}) \\ &L(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}) = [1-(\lambda+\mu)]a_{00} + \lambda L(\mathfrak{x}) + \mu L(\mathfrak{y}) \\ &Q(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}) = \lambda^2Q(\mathfrak{x}) + \mu^2Q(\mathfrak{y}) + 2\lambda\mu B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \end{aligned}}$$

Daher ist

$$\boxed{K(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}) = [1-(\lambda+\mu)]a_{00} + \lambda L(\mathfrak{x}) + \mu L(\mathfrak{y}) + \lambda^2 Q(\mathfrak{x}) + \mu^2 Q(\mathfrak{y}) + 2\lambda\mu B(\mathfrak{x},\mathfrak{y})}$$

Ein Vektor $\mathfrak{x}$ heißt *Nullstelle* von $K(\mathfrak{x})$, wenn gilt

$$K(\mathfrak{x}) = 0$$

Ist $\mathfrak{x}$ der Ortsvektor eines Punktes, und ist die Menge der Nullstellen *nicht leer*, so heißt die Menge der Nullstellen *Kegelschnitt*. Ein Kegelschnitt enthält also mindestens einen Punkt. $K(\mathfrak{x}) = 0$ heißt die *Gleichung des Kegelschnittes*.

Ist die Menge der Nullstellen *leer*, so spricht man von einem *leeren* oder *nullteiligen Kegelschnitt*. Dieser hat zwar eine reelle Gleichung, enthält aber keine (reellen) Punkte.

<u>Beispiele:</u> $K(\mathfrak{x}) = -1 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ Kreis

$K(\mathfrak{x}) = x_1^2 + x_2^2 = 0$ Nur der Punkt (0,0)

$K(\mathfrak{x}) = 1 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ leerer (nullteiliger) Kreis

Untersuchung von $Q(\mathfrak{x})$

Welche Werte kann $Q(\mathfrak{x})$ annehmen (Voraussetzung $a_{11}^2 + a_{22}^2 \neq 0$)?

$$Q(\mathfrak{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 =$$

$$= a_{11}[x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}x_2^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}x_2^2 + \frac{a_{22}}{a_{11}}x_2^2] =$$

$$= a_{11}[(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2)^2 + \frac{1}{a_{11}^2}\underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}_{A_{00}}x_2^2] =$$

$$= a_{11}[(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2)^2 + \frac{1}{a_{11}^2}A_{00}\,x_2^2] = Q(\mathfrak{x})$$

Dann gilt für *alle* Vektoren $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$:

$Q(\mathfrak{x}) > 0 \iff a_{11} > 0,\ A_{00} > 0\ (\Rightarrow a_{22} > 0)$ ... $Q(\mathfrak{x})$ <u>positiv definit</u>

$Q(\mathfrak{x}) \geq 0 \iff a_{11} > 0,\ A_{00} = 0$ ... $Q(\mathfrak{x})$ <u>positiv semidefinit</u>

$Q(\mathfrak{x}) < 0 \iff a_{11} < 0,\ A_{00} > 0\ (\Rightarrow a_{22} < 0)$ ... $Q(\mathfrak{x})$ <u>negativ definit</u>

$Q(\mathfrak{x}) \leq 0 \iff a_{11} < 0,\ A_{00} = 0$ ... $Q(\mathfrak{x})$ <u>negativ semidefinit</u>

Existiert ein Vektor $\mathfrak{y} \neq \mathfrak{o}$ mit $Q(\mathfrak{y}) > 0$ und ein Vektor $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{o}$ mit $Q(\mathfrak{z}) < 0$, so existiert auch ein Vektor $\mathfrak{x}$, für den gilt $Q(\mathfrak{x}) = 0$.

Es sei nämlich $\mathfrak{x} := \rho\mathfrak{y} + \sigma\mathfrak{z}$. Dann gilt

$Q(\mathfrak{x}) = Q(\rho\mathfrak{y} + \sigma\mathfrak{z}) = \rho^2 Q(\mathfrak{y}) + \sigma^2 Q(\mathfrak{z}) + 2\rho\sigma B(\mathfrak{y},\mathfrak{z}) := 0$

Daraus

$$\frac{\rho}{\sigma} = \frac{1}{Q(\mathfrak{y})}\left[- B(\mathfrak{y},\mathfrak{z}) \pm \sqrt{B^2(\mathfrak{y},\mathfrak{z}) - \underbrace{Q(\mathfrak{y})Q(\mathfrak{z})}_{<0}}\right]$$

$\frac{\rho}{\sigma}$ ist also stets berechenbar, sodaß $Q(\mathfrak{x}) = 0$ wird. In diesem Fall und in allen anderen, oben nicht explizit aufgeführten Fällen, heißt $Q(\mathfrak{x})$ *indefinit*.

Zerfallen von $Q(\mathfrak{x})$ in homogene Linearfaktoren

Wann zerfällt $Q(\mathfrak{x})$ in zwei homogene Linearfaktoren? In diesem Falle müßte gelten

$$Q(\mathfrak{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)$$

Die Koeffizienten der Faktoren sind nur bis auf ihr Verhältnis $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ bzw. $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ bestimmt.

Es sei $Q(\mathfrak{x})$ zerfallend:

$$Q(\mathfrak{x}) = (\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)(\beta_1x_1+\beta_2x_2) = \underbrace{\alpha_1\beta_1}_{a_{11}}x_1^2+\underbrace{(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)}_{2a_{12}}x_1x_2+\underbrace{\alpha_2\beta_2}_{a_{22}}x_2^2$$

Dann wird

$$A_{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1 & \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1) \\ \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1) & \alpha_2\beta_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 - \frac{1}{4}(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)^2 = \frac{1}{4}[4\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2-\alpha_1^2\beta_2^2-2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2-\alpha_2^2\beta_2^2]$$

Daher

$$\underline{A_{00} = -\frac{1}{4}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 \le 0}$$

Damit umgekehrt $Q(\mathfrak{x})$ zerfalle, müßte gelten

$$\begin{array}{rcl|l} a_{11} &=& \alpha_1\beta_1 & \alpha_2^2 \\ 2a_{12} &=& \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 & -\alpha_1\alpha_2 \quad + \\ a_{22} &=& \alpha_2\beta_2 & \alpha_1^2 \\ \hline \end{array}$$

$$a_{11}\alpha_2^2 - 2a_{12}\alpha_2\alpha_1 + a_{22}\alpha_1^2 = 0$$

Quadratische Gleichung für $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ bzw. $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, $\frac{\beta_1}{\beta_2}$. Es gilt

$$a_{11}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2-2a_{12}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)+a_{22} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{1}{a_{11}}\left(a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_{11}}\left(a_{12} \pm \sqrt{-(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}\right) = \frac{1}{a_{11}}\left(a_{12} \pm \sqrt{-A_{00}}\right)$$

Setzt man

$$\boxed{w := \pm\sqrt{-(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)} = \pm\sqrt{-A_{00}}}$$

so existiert eine Lösung, wenn $-A_{00} \geq 0$ ist, dh. wenn gilt

$$\underline{A_{00} \leq 0}$$

Dann ist

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{a_{12} + w}{a_{11}}, \qquad \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{a_{12} - w}{a_{11}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \alpha_1 = \rho a_{11} & \beta_1 = \sigma a_{11} \\ \alpha_2 = \rho(a_{12} + w) & \beta_2 = \sigma(a_{12} - w) \end{array}}$$

Es gilt

$$(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)(\beta_1 x_1+\beta_2 x_2) = \rho\sigma[a_{11}x_1 + (a_{12}+w)x_2][a_{11}x_1 + (a_{12}-w)x_2] =$$

$$= \rho\sigma[a_{11}^2 x_1^2 + (a_{11}a_{12}+a_{11}w+a_{11}a_{12}-a_{11}w)x_1x_2 + (\underbrace{a_{12}^2 - w^2}_{a_{11}a_{22}-a_{12}^2})x_2^2] =$$

$$= (\rho\sigma a_{11})[a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2] \Rightarrow \boxed{\rho\sigma a_{11} = 1}$$

<u>Wann sind die beiden Faktoren gleich?</u>

$$Q(\mathfrak{x}) = (\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \beta_1 \wedge \alpha_2 = \beta_2$$

Dann gilt

$$\underline{A_{00}} = -\frac{1}{4}(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1)^2 = \underline{0}$$

Umgekehrt hat die quadratische Gleichung

$$a_{11}\alpha_2^2 - 2a_{12}\alpha_2\alpha_1 + a_{22}\alpha_1^2 = 0$$

genau dann eine einzige Nullstelle, wenn $w = 0$ ist, d.h. wenn

$$A_{00} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

ist. Dann gilt

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \alpha_1 = \rho a_{11} & \\ & \rho^2 a_{11} = 1 \\ \alpha_2 = \rho a_{12} & \end{array}}$$

<u>Darstellung der Bilinearformen $B(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ bei zerfallendem $Q(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$</u>

Sei

$$Q(\mathfrak{x}) = (\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)(\beta_1 x_1+\beta_2 x_2) = \alpha_1\beta_1 x_1^2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)x_1x_2+\alpha_2\beta_2 x_2^2 \Rightarrow$$

$$B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \underbrace{\alpha_1\beta_1x_1y_1}_{\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1x_1y_1+\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1x_1y_1} + \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)(x_1y_2+x_2y_1) + \underbrace{\alpha_2\beta_2x_2y_2}_{\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2x_2y_2+\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2x_2y_2}$$

Daher

$$Q(\mathfrak{x}) = (\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)(\beta_1x_1+\beta_2x_2) \Rightarrow$$

$$B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \frac{1}{2}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)(\beta_1y_1+\beta_2y_2) + \frac{1}{2}(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)(\beta_1x_1+\beta_2x_2)$$

Analog

$$Q(\mathfrak{x}) = (\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)^2 \Rightarrow B(\mathfrak{x},\mathfrak{y},) = (\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)$$

Zusammenfassung

Notwendige und hinreichende Bedingung für das Zerfallen von $Q(\mathfrak{x})$ in zwei homogene Linearfaktoren ist

$$A_{00} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad w := \pm\sqrt{-A_{00}} \in \mathbb{R}$$

<u>$A_{00} < 0$ zwei verschiedene Faktoren:</u>

$Q(\mathfrak{x}) = (\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)(\beta_1x_1+\beta_2x_2)$

$\alpha_1 = \rho a_{11}$ $\quad \beta_1 = \sigma a_{11}$ $\quad \rho\sigma a_{11} = 1$

$\alpha_2 = \rho(a_{12}+w)$ $\quad \beta_2 = \sigma(a_{12}-w)$

oder (Vertauschung der Indizes 1 und 2)

$\alpha_2 = \rho a_{22}$ $\quad \beta_2 = \sigma a_{22}$ $\quad \rho\sigma a_{22} = 1$

$\alpha_1 = \rho(a_{12}+w)$ $\quad \beta_1 = \sigma(a_{12}-w)$

$B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \frac{1}{2}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)(\beta_1y_1+\beta_2y_2)+\frac{1}{2}(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)(\beta_1x_1+\beta_2x_2$

<u>$A_{00} = 0$ zwei gleiche Faktoren:</u>

$Q(\mathfrak{x}) = (\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)^2$

$\alpha_1 = \rho a_{11},\quad \alpha_2 = \rho a_{12},\quad \rho^2a_{11} = 1$

oder

$\alpha_2 = \rho a_{22},\quad \alpha_1 = \rho a_{12},\quad \rho^2a_{22} = 1$

$B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = (\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)$

Das Zerfallen von $K(\mathfrak{x})$ in zwei inhomogene lineare Ausdrücke

Es sei (wobei $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0$ gelte):

$$K(\mathfrak{x}) = [\alpha_0+(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)].[\beta_0+(\beta_1x_1+\beta_2x_2)] = \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0)x_1 +$$

$$+ (\alpha_0\beta_2+\alpha_2\beta_0)x_2 + [\alpha_1\beta_1x_1^2 + (\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)x_1x_2 + \alpha_2\beta_2x_2^2]$$

Wenn $K(\mathfrak{x})$ zerfällt, muß auch $Q(\mathfrak{x})$ zerfallen (Achtung! Umkehrung gilt nicht!). Daher muß jedenfalls $A_{00} \leq 0$ gelten.
Den beiden Faktoren entsprechen geometrisch zwei Gerade. Man spricht daher von *zerfallenden, ausgearteten* oder *singulären Kegelschnitten*.
Dann lautet die Matrix von $K(\mathfrak{x})$

$$\begin{Vmatrix} \alpha_0\beta_0 & \frac{1}{2}(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0) & \frac{1}{2}(\alpha_0\beta_2+\alpha_2\beta_0) \\ \frac{1}{2}(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0) & \alpha_1\beta_1 & \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1) \\ \frac{1}{2}(\alpha_0\beta_2+\alpha_2\beta_0) & \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1) & \alpha_2\beta_2 \end{Vmatrix}$$

Die adjungierte Matrix von $K(\mathfrak{x})$ lautet

$$\begin{Vmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{01} & A_{11} & A_{12} \\ A_{02} & A_{12} & A_{22} \end{Vmatrix} =$$

$$\begin{Vmatrix} -\frac{(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2}{4} & \frac{(\alpha_0\beta_2-\alpha_2\beta_0)(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)}{4} & \frac{(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1)}{4} \\ \frac{(\alpha_0\beta_2-\alpha_2\beta_0)(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)}{4} & -\frac{(\alpha_0\beta_2-\alpha_2\beta_0)^2}{4} & \frac{(\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0)(\alpha_0\beta_2-\alpha_2\beta_0)}{4} \\ \frac{(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1)}{4} & \frac{(\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0)(\alpha_0\beta_2-\alpha_2\beta_0)}{4} & -\frac{(\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0)^2}{4} \end{Vmatrix}$$

Zunächst erkennt man unmittelbar, daß gilt

$$\underline{A_{00} \leq 0, \quad A_{11} \leq 0, \quad A_{22} \leq 0}$$

Berechnet man die Determinante von $K(\mathfrak{x})$ etwa vermöge

$$A = a_{00}A_{00} + a_{01}A_{01} + a_{02}A_{02}$$

so ergibt sich

$$\underline{A = 0}$$

als *notwendige Bedingung* für das Zerfallen von $K(\mathfrak{x})$. Wir zeigen, daß das Verschwinden der Determinante auch *hinreichend* ist. Dazu zeigen wir zunächst: Wenn $A = 0$ ist, so haben A_{00}, A_{11}, A_{22} gleiche Vorzeichen (man beachte, daß ± 0 zwei Vorzeichen hat).

1. Es gilt

$$\begin{array}{rcl|c} A = a_{00}A_{00} + a_{01}A_{01} + a_{02}A_{02} & = & 0 & a_{22} \\ a_{02}A_{00} + a_{12}A_{01} + a_{22}A_{02} & = & 0 & -a_{02} \\ \hline \underbrace{(a_{00}a_{22} - a_{02}^2)}_{A_{11}}A_{00} + \underbrace{(a_{01}a_{22} - a_{02}a_{12})}_{-A_{01}}A_{01} & = & 0 & \end{array}$$

Daher

$$\underline{A_{00}A_{11} = A_{01}^2 \quad \Rightarrow A_{00} \text{ und } A_{11} \text{ haben gleiches Vorzeichen}}$$

2. $$\begin{array}{rcl|l} A = a_{02}A_{02} + a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} & = & 0 & a_{11} \\ a_{01}A_{02} + a_{11}A_{12} + a_{12}A_{22} & = & 0 & -a_{12} \end{array}$$

$$\underbrace{(a_{02}a_{11}-a_{01}a_{12})}_{-A_{02}}A_{02} + \underbrace{(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}_{A_{00}}A_{22} = 0$$

$$\underline{A_{00}A_{22} = A_{02}^2 \quad \Rightarrow A_{00} \text{ und } A_{22} \text{ haben gleiches Vorzeichen}}$$

Diskussion:

$\boxed{A_{00} < 0}$ Q($\mathfrak{x}$) zerfällt in zwei verschiedene Faktoren. A_{11} und A_{22} müssen dasselbe Vorzeichen wie A_{00} haben, sie müssen also negativ oder Null sein. Wir behaupten, daß nicht beide verschwinden können. Sei nämlich (VS $\alpha_0 \neq 0$)

$$\left.\begin{array}{l} A_{11} = -\frac{1}{4}(\alpha_0\beta_2-\alpha_2\beta_0)^2 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_0} = \frac{\beta_2}{\beta_0} \\ A_{22} = -\frac{1}{4}(\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0)^2 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{\beta_1}{\beta_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0 \Rightarrow A_{00} = -(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 = 0 \qquad \text{WS!}$$

Wir können daher die Tatsache, daß A_{11} und A_{22} nicht gleichzeitig verschwinden können, ausdrücken durch

$$A_{00} < 0 \Rightarrow S_{00} := A_{11} + A_{22} < 0$$

Zerfällt also K($\mathfrak{x}$) in zwei verschiedene Faktoren, so gilt

$$\underline{A = 0 \wedge A_{00} < 0}$$

$\boxed{A_{00} = 0}$ Q($\mathfrak{x}$) zerfällt in zwei gleiche Faktoren. Dann gilt für K($\mathfrak{x}$) der etwas verallgemeinerte Ansatz

$$\underline{K(\mathfrak{x}) = [\alpha_0+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2].[\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2] \wedge \beta_1 = \tau\alpha_1 \wedge \beta_2 = \tau\alpha_2}$$

1.Fall: $\underline{\beta_o \neq \tau\alpha_o}$ d.h. K($\mathfrak{x}$) = 0 zerfällt in zwei parallele Gerade.

Dann gilt

$$\|a_{ij}\| = \left\| \begin{array}{ccc} \alpha_0\beta_0 & \frac{\alpha_1}{2}(\tau\alpha_0+\beta_0) & \frac{\alpha_2}{2}(\tau\alpha_0+\beta_0) \\ \frac{\alpha_1}{2}(\tau\alpha_0+\beta_0) & \tau\alpha_1^2 & \tau\alpha_1\alpha_2 \\ \frac{\alpha_2}{2}(\tau\alpha_0+\beta_0) & \tau\alpha_1\alpha_2 & \tau\alpha_2^2 \end{array} \right\|$$

$$\|A_{ij}\| = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\alpha_2^2(\tau\alpha_0-\beta_0)^2 & \frac{1}{4}\alpha_1\alpha_2(\tau\alpha_0-\beta_0)^2 \\ 0 & \frac{1}{4}\alpha_1\alpha_2(\tau\alpha_0-\beta_0)^2 & -\frac{1}{4}\alpha_1^2(\tau\alpha_0-\beta_0)^2 \end{matrix}\right\|$$

d.h. es ist $A = A_{00} = A_{10} = A_{20} = 0$, $A_{11} \le 0$, $A_{22} \le 0$
A_{11} und A_{22} können gleichzeitig nur verschwinden, wenn $\beta_0 = \tau\alpha_0$ ist, was aber der Voraussetzung widerspricht. Daher kann höchstens eine Größe den Wert 0 annehmen, d.h. es muß gelten

$$\underline{S_{00} = A_{11} + A_{22} < 0}$$

<u>Behauptung:</u> $A = 0 \wedge A_{00} = 0 \Rightarrow A_{01} = A_{02} = 0$ (*)

<u>Beweis:</u> Es gilt $A_{00}A_{11} = A_{01}^2 \wedge A_{00}A_{22} = A_{02}^2 \Rightarrow$ Behauptung

<u>2.Fall:</u> $\underline{\beta_0 = \tau\alpha_0}$ d.h. $K(\mathfrak{x}) = 0$ stellt eine <u>doppelt zählende Gerade</u> dar. Dann gilt:

$$\|a_{ij}\| = \left\|\begin{matrix} \tau\alpha_0^2 & \tau\alpha_0\alpha_1 & \tau\alpha_0\alpha_2 \\ \tau\alpha_0\alpha_1 & \tau\alpha_1^2 & \tau\alpha_1\alpha_2 \\ \tau\alpha_0\alpha_2 & \tau\alpha_1\alpha_2 & \tau\alpha_2^2 \end{matrix}\right\| \qquad \|A_{ij}\| = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|$$

es gilt also $\underline{A = A_{00} = A_{11} = A_{22} = A_{01} = A_{02} = A_{12} = 0}$

<u>Behauptung:</u> $A = A_{00} = A_{11} = 0 \Rightarrow A_{12} = A_{22} = 0$

<u>Beweis:</u> $A = \underbrace{a_{01}A_{01} + a_{11}A_{11}}_{0 \text{ wegen } (*)} + a_{12}A_{12} = 0 \Rightarrow \underline{A_{12} = 0}$

Wäre etwa $a_{12} = \tau\alpha_1\alpha_2 = 0$, so wäre $\alpha_1 = 0 \vee \alpha_2 = 0$. Daher würde per definitionem A_{12} erst recht verschwinden.

$$\underbrace{a_{01}A_{02} + a_{11}A_{12}}_{0 \text{ wegen } (*)} + a_{12}A_{22} = 0 \Rightarrow \underline{A_{22} = 0}$$

Die Aussage $A_{11} = A_{22} = 0$ ist gleichwertig mit

$$S_{00} = A_{11} + A_{22} = 0$$

Damit umgekehrt $K(\mathfrak{x})$ in das Produkt zweier inhomogener Ausdrücke

$$K(\mathfrak{x}) = [\alpha_0+(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)]\cdot[\beta_0+(\beta_1x_1+\beta_2x_2)] = a_{00}+2a_{01}x_1+2a_{02}x_2+Q(\mathfrak{x}) =$$
$$= \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0)x_1 + (\alpha_0\beta_2+\alpha_2\beta_0)x_2 + Q(\mathfrak{x})$$

zerfalle, muß notwendigerweise $Q(\mathfrak{x})$ zerfallen:

$$Q(\mathfrak{x}) \text{ zerfallend } \Leftrightarrow A_{00} \le 0$$

Aus diesen Bedingungen lassen sich die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ berechnen (Seite 18). Ferner muß gelten

$$\begin{aligned} \alpha_0\beta_0 &= a_{00} \\ \beta_1\alpha_0 + \alpha_1\beta_0 &= 2a_{01} \\ \beta_2\alpha_0 + \alpha_2\beta_0 &= 2a_{02} \end{aligned} \qquad \text{mit} \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_1 = \rho a_{11} & \beta_1 = \sigma a_{11} & w = \sqrt{-A_{00}} \\ \alpha_2 = \rho(a_{12}+w) & \beta_2 = \sigma(a_{12}-w) & \rho\sigma a_{11} = 1 \end{array} \right.$$

$\boxed{A_{00} < 0 \Leftrightarrow w \neq 0}$ $Q(\mathfrak{x})$ zerfällt in zwei verschiedene Faktoren

$$\begin{array}{rcl|c|c} \beta_1\alpha_0 + \alpha_1\beta_0 &=& 2a_{01} & \alpha_2 & -\beta_2 \\ \beta_2\alpha_0 + \alpha_2\beta_0 &=& 2a_{02} & -\alpha_1 & \beta_1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\alpha_0 &= 2(a_{01}\alpha_2 - a_{02}\alpha_1) \qquad (*) \\ (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\beta_0 &= 2(a_{02}\beta_1 - a_{01}b_2) \end{aligned}$$

$$(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) = \rho\sigma[(a_{12}+w)a_{11} - a_{11}(a_{12}-w)] = 2\underbrace{(\rho\sigma a_{11})}_{1}w = 2w$$

$$\begin{aligned} (a_{01}\alpha_2 - a_{02}\alpha_1) &= \rho[a_{01}(a_{12}+w) - a_{02}a_{11}] = \\ &= \rho[(a_{01}a_{12}-a_{02}a_{11}) + a_{01}w] = \rho[A_{02} + a_{01}w] \end{aligned}$$

$$(a_{02}\beta_1 - a_{01}\beta_2) = \sigma[a_{02}a_{11} - a_{01}(a_{12}-w)] = \sigma[-A_{02} + a_{01}w]$$

Daher wegen $(*)$

$$\boxed{\begin{aligned} w\alpha_0 &= \rho[A_{02} + a_{01}w] \\ w\beta_0 &= \sigma[-A_{02} + a_{01}w] \end{aligned}} \qquad (\#)$$

Zusätzlich muß gelten

$$\alpha_0\beta_0 = a_{00} \qquad \text{daher wegen} \quad (\#)$$

$$w^2\alpha_0\beta_0 = \rho\sigma[a_{01}^2 w^2 - A_{02}^2] \Rightarrow -A_{00}a_{00} = \rho\sigma[-a_{01}^2A_{00} - A_{02}^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{00}A_{00} = \rho\sigma[a_{01}^2A_{00}+A_{02}^2] = \rho\sigma[a_{01}^2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2) + (a_{01}a_{12}-a_{02}a_{11})^2]$$

$$\Rightarrow a_{00}A_{00} = \rho\sigma[a_{01}^2a_{11}a_{22}-a_{01}^2a_{12}^2 + a_{01}^2a_{12}^2+a_{02}^2a_{11}^2 - 2a_{01}a_{02}a_{11}a_{12}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{00}A_{00} = \underbrace{(\rho\sigma a_{11})}_{1}[a_{01}\underbrace{(a_{01}a_{22}-a_{02}a_{12})}_{-A_{01}} + a_{02}\underbrace{(a_{02}a_{11}-a_{01}a_{12})}_{-A_{02}}]$$

daraus

$$a_{00}A_{00} + a_{01}A_{01} + a_{02}A_{02} = \underline{A = 0}$$

> $K(\mathfrak{x})$ zerfällt genau dann in zwei verschiedene Gerade, wenn $A = 0$ und $A_{00} < 0$ ist

$\boxed{A_{00} = 0 \Leftrightarrow w = 0}$ $Q(\mathfrak{x})$ ist vollständiges Quadrat

$$\begin{aligned} \alpha_0\beta_0 &= a_{00} \\ \beta_1\alpha_0 + \alpha_1\beta_0 &= 2a_{01} \\ \beta_2\alpha_0 + \alpha_2\beta_0 &= 2a_{02} \end{aligned} \quad \text{mit} \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_1 = \rho a_{11} & \beta_1 = \sigma a_{11} & A_{00} = 0 \\ \alpha_2 = \rho a_{12} & \beta_2 = \sigma a_{12} & \rho\sigma a_{11} = 1 \end{array} \right.$$

$$Q(\mathfrak{x}) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) = \rho\sigma(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2$$

Für α_0 und β_0 gilt dann

$$(\sigma a_{11})\alpha_0 + (\rho a_{11})\beta_0 = 2a_{01}$$
$$(\sigma a_{12})\alpha_0 + (\rho a_{12})\beta_0 = 2a_{02}$$

$$\begin{array}{l|l} (\sigma\alpha_0 + \rho\beta_0)a_{11} = 2a_{01} & a_{12} \\ (\sigma\alpha_0 + \rho\beta_0)a_{12} = 2a_{02} & -a_{11} \end{array}$$

$$0 = 2(a_{01}a_{12} - a_{02}a_{11}) = 2\,A_{02}$$

Zur Vermeidung von Widersprüchen muß $\underline{A_{20} = 0}$ sein. Ferner gilt

$$\alpha_0\beta_0 = a_{00} \Rightarrow 1.(\alpha_0\beta_0) = (\rho\sigma a_{11})(\alpha_0\beta_0) = a_{00}$$

Es gilt demnach

$$\begin{aligned} (\sigma\alpha_0 + \rho\beta_0)a_{11} &= 2a_{01} \\ (\sigma\alpha_0).(\rho\beta_0)a_{11} &= a_{00} \end{aligned}$$

Nach dem Wurzelsatz von VIETA sind $\sigma\alpha_0$ und $\rho\beta_0$ daher Nullstellen der quadratischen Gleichung

$$\underline{a_{11}x^2 - 2a_{01}x + a_{00} = 0}$$

Um reelle Lösungen zu erhalten, muß gelten

$a_{01}^2 - a_{11}a_{00} \geq 0 \Rightarrow -A_{22} \geq 0 \Rightarrow \underline{A_{22} \leq 0}$

<u>1.Fall:</u> $A_{22} < 0$. Es treten zwei verschiedene Lösungen $\sigma\alpha_0 \neq \rho\beta_0$ auf. Dann ist $K(\mathfrak{x}) = [\alpha_0+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2].[\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2]$. Wegen

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\rho}{\sigma}, \text{ aber } \frac{\alpha_0}{\beta_0} \neq \frac{\rho}{\sigma}$$

ergibt sich

> Wenn $A = A_{00} = 0$ und $A_{22} < 0$ ist (diese Aussage ist äquivalent zu $S_{00} < 0$), zerfällt $K(\mathfrak{x}) = 0$ in zwei parallele Gerade

2.Fall: $A_{22} = 0$. Dann ist $\sigma\alpha_0 = \rho\beta_0$. Setzen wir unter Ausnützung der Homogenität $\sigma = \rho$, dann wird $\underline{\rho^2 a_{11} = 1}$ und es gilt $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$. Wegen $(\sigma\alpha_0 + \rho\beta_0)a_{11} = 2\,a_{01}$ folgt daraus $2\rho\alpha_0 a_{11} = 2a_{01} \Rightarrow \underline{\rho\alpha_0 a_{11} = a_{01}}$ woraus sich α_0 berechnet.

Wenn $A = A_{00} = 0$ und $A_{22} = 0$ (gleichwertig mit $S_{00} = 0$) ist, zerfällt $K(\mathfrak{x}) = 0$ in eine doppelt zählende Gerade

Wir betrachten nun den Fall verschiedener Geraden ($A = 0$, $A_{00} < 0$) und berechnen deren Schnittpunkt $\mathfrak{m}(m_1, m_2)$

$$\begin{array}{l|c|c}
\alpha_0 + \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 = 0 & \beta_2 & -\beta_1 \\
\beta_0 + \beta_1 m_1 + \beta_2 m_2 = 0 & -\alpha_2 & \alpha_1 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
(\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0) + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)m_1 = 0 & \frac{1}{4}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \\
(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1) + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)m_2 = 0 & \frac{1}{4}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \\
\hline
\end{array}$$

$$\frac{1}{4}(\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) + \frac{1}{4}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 m_1 = 0$$

$$\frac{1}{4}(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) + \frac{1}{4}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 m_2 = 0$$

Nach Seite 19 folgt daraus

$$A_{10} - A_{00}m_1 = 0$$
$$A_{02} - A_{00}m_2 = 0$$

Also

$$\boxed{m_1 = \frac{A_{01}}{A_{00}}, \qquad m_2 = \frac{A_{02}}{A_{00}}}$$

Anmerkung: Ist $A_{00} = 0$, so existiert bei $S_{00} < 0$ der Punkt $\mathfrak{m}$ überhaupt nicht (parallele Gerade). Bei $S_{00} = 0$ (Doppelgerade, $A_{01} = A_{02} = 0$) ist er auf der Geraden $\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ unbestimmt.

Zur Existenz von $\mathfrak{m}(m_1, m_2)$ ist nur $A_{00} \neq 0$ erforderlich, nicht jedoch $A_{00} < 0$. $\mathfrak{m}$ existiert daher stets, auch wenn die Geraden nicht existieren.

Im Falle $A = 0$ und $A_{00} > 0$ besteht $K(\mathfrak{x})$ nur aus dem Punkt $\mathfrak{m}$.

Ist $A \neq 0$, so kann $K(\mathfrak{x})$ nicht zerfallen. Der Kegelschnitt $K(\mathfrak{x}) = 0$ heißt dann *regulär*.

Die singulären Kegelschnitte ($A = 0$)

A_{00}	S_{00}	$K(\mathfrak{x}) = 0$
< 0	(< 0)	Paar schneidender Geraden $K(\mathfrak{x}) = [\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2][\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2]$ $\alpha_1 = \rho a_{11} \quad \beta_1 = \sigma a_{11} \quad w\alpha_0 = \rho(a_{01}w + A_{02})$ $\alpha_2 = \rho(a_{12} + w) \quad \beta_2 = \sigma(a_{12} - w) \quad w\beta_0 = \sigma(a_{01}w - A_{02})$ $\rho\sigma a_{11} = 1 \quad w = \pm\sqrt{-A_{00}}$ oder $\alpha_2 = \rho a_{22} \quad \beta_2 = \sigma a_{22} \quad w\alpha_0 = \rho(a_{02}w + A_{01})$ $\alpha_1 = \rho(a_{12} + w) \quad \beta_1 = \sigma(a_{12} - w) \quad w\beta_0 = \sigma(a_{02}w - A_{01})$ $\rho\sigma a_{22} = 1 \quad w = \pm\sqrt{-A_{00}}$ Schnittpunkt $\mathfrak{m}(m_1, m_2)$ des Geradenpaares $m_1 = \dfrac{A_{01}}{A_{00}}, \quad m_2 = \dfrac{A_{02}}{A_{00}}$
0	< 0	Parallelenpaar $K(\mathfrak{x}) = (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)$ $\alpha_1 = \rho a_{11} \quad \beta_1 = \sigma a_{11}$ $\quad \sigma\alpha_0$ und $\rho\beta_0$ sind Nullstellen $\alpha_2 = \rho a_{12} \quad \beta_2 = \sigma a_{12}$ $\quad$ von $a_{11}x^2 - 2a_{01}x + a_{00} = 0$ $\rho\sigma a_{11} = 1$ oder $\alpha_2 = \rho a_{22} \quad \beta_2 = \sigma a_{22}$ $\quad \sigma\alpha_0$ und $\rho\beta_0$ sind Nullstellen $\alpha_1 = \rho a_{12} \quad \beta_1 = \sigma a_{12}$ $\quad$ von $a_{22}x^2 - 2a_{02}x + a_{00} = 0$ $\rho\sigma a_{22} = 1$
0	0	Doppelgerade $K(\mathfrak{x}) = (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2$ $\alpha_1 = \rho a_{11}, \quad \alpha_2 = \rho a_{12}, \quad \rho a_{11}\alpha_0 = a_{01}, \quad \rho^2 a_{11} = 1$ oder $\alpha_2 = \rho a_{22}, \quad \alpha_1 = \rho a_{12}, \quad \rho a_{22}\alpha_0 = a_{02}, \quad \rho^2 a_{22} = 1$
> 0	(> 0)	Einzelner Punkt $\mathfrak{m}(m_1, m_2)$ $m_1 = \dfrac{A_{01}}{A_{00}}, \quad m_2 = \dfrac{A_{02}}{A_{00}}$
0	> 0	Leeres Parallelenpaar

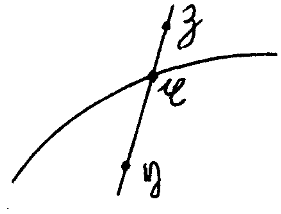
NICHT AUSGEARTETE KEGELSCHNITTE

$K(\mathfrak{x}) = 0, \; A \neq 0$

Wir suchen den Schnittpunkt von $K(\mathfrak{x}) = 0$ mit der von den Punkten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ aufgespannten Geraden

$$\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{z}, \quad \lambda + \mu = 1$$

Es gilt



$$K(\mathfrak{x}) = K(\lambda\mathfrak{y}+\mu\mathfrak{z}) = [1-(\lambda+\mu)]a_{00} + \lambda L(\mathfrak{y}) + \mu L(\mathfrak{z}) +$$
$$+ \lambda^2 Q(\mathfrak{y}) + \mu^2 Q(\mathfrak{z}) + 2\lambda\mu B(\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = 0$$

Es ist

$$K(\mathfrak{y}) = L(\mathfrak{y}) + Q(\mathfrak{y}) \Rightarrow Q(\mathfrak{y}) = K(\mathfrak{y}) - L(\mathfrak{y})$$
$$K(\mathfrak{z}) = L(\mathfrak{z}) + Q(\mathfrak{z}) \Rightarrow Q(\mathfrak{z}) = K(\mathfrak{z}) - L(\mathfrak{z})$$

Daher

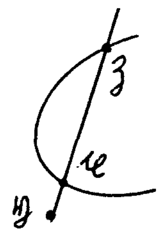
$$K(\mathfrak{x}) = \lambda L(\mathfrak{y}) + \mu L(\mathfrak{z}) + \lambda^2 K(\mathfrak{y}) - \lambda^2 L(\mathfrak{y}) + \mu^2 K(\mathfrak{z}) - \mu^2 L(\mathfrak{z}) + 2\lambda\mu B(\mathfrak{y},\mathfrak{z})$$
$$= \lambda\underbrace{(1-\lambda)}_{\mu}L(\mathfrak{y}) + \mu\underbrace{(1-\mu)}_{\lambda}L(\mathfrak{z}) + \lambda^2 K(\mathfrak{y}) + \mu^2 K(\mathfrak{z}) + 2\lambda\mu B(\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = 0$$

> $K(\mathfrak{x}) = \lambda\mu[L(\mathfrak{y}) + L(\mathfrak{z}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z})] + \lambda^2 K(\mathfrak{y}) + \mu^2 K(\mathfrak{z}) = 0$
>
> $\lambda + \mu = 1$
>
> Eine Gerade schneidet $K(\mathfrak{x}) = 0$ in höchstens zwei Punkten

Wir wählen nunmehr $\mathfrak{z}$ auf dem Kegelschnitt, d.h. es sei

$$K(\mathfrak{z}) = 0, \; \mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{z}, \; \lambda + \mu = 1$$

Dann gilt



$$K(\mathfrak{x}) = \lambda\mu[L(\mathfrak{y}) + L(\mathfrak{z}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z})] + \lambda^2 K(\mathfrak{y})) = 0 \quad (*)$$

Von den beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung ist eine trivial:

$\lambda = 0 \Rightarrow \mu = 1$, d.h. $\mathfrak{x} = \mathfrak{z}$, ein bereits bekannter Punkt.

Für die zweite Lösung gilt

> $\mu[L(\mathfrak{y}) + L(\mathfrak{z}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z})] + \lambda K(\mathfrak{y}) = 0, \; \lambda + \mu = 1$
>
> Eine Gerade durch einen Punkt $\mathfrak{z}$ von $K(\mathfrak{x}) = 0$ schneidet den Kegelschnitt noch in höchstens einem Punkt

Damit der Punkt $\mathfrak{z}$ eine zweifach zählende Lösung der quadratischen Gleichung (*) sei, muß $\lambda = 0$ eine doppelte Nullstelle von (*) sein. Eine Gerade, deren Schnittpunkt mit einem Kegelschnitt sich als doppelt zählende Nullstelle einer quadratischen Gleichung ergibt, heißt *Tangente* an den Kegelschnitt im Punkte $\mathfrak{z}$.[1]

$L(\mathfrak{y}) + L(\mathfrak{z}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = 0, \ K(\mathfrak{z}) = 0$
Gleichung der Tangente im Punkte $\mathfrak{z}$ in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{y}$.

Schreibweise der Tangente in Koordinaten:

$$L(\mathfrak{y}) + L(\mathfrak{z}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z}] = [a_{00}+2a_{01}z_1+2a_{02}z_2] + [a_{00}+2a_{01}y_1+2a_{02}y_2] +$$

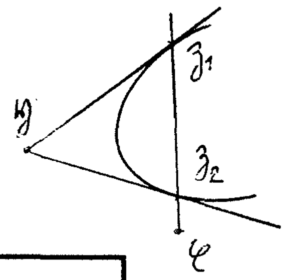
$$+ 2[a_{11}y_1z_1+ a_{12}(y_1z_2+y_2z_1) + a_{22}y_2z_2] = 0$$

Nach Kürzung durch 2 ergibt sich

$a_{00}+a_{01}(y_1+z_1)+a_{02}(y_2+z_2)+a_{11}y_1z_1+a_{12}(y_1z_2+y_2z_1)+a_{22}y_2z_2 = 0$
oder nach y_1, y_2 geordnet
$(a_{00}+a_{01}z_1+a_{02}z_2)+(a_{01}+a_{11}z_1+a_{12}z_2)y_1+(a_{02}+a_{12}z_1+a_{22}z_2)y_2 = 0$
Gleichung der Tangente im Punkt (z_1,z_2) in den laufenden Koordinaten y_1, y_2

Sei $\mathfrak{y}$ der Schnittpunkt der Tangenten in den Punkten $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$. Dann gilt

$$\left.\begin{aligned} L(\mathfrak{z}_1) + L(\mathfrak{y}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z}_1) &= 0 \\ L(\mathfrak{z}_2) + L(\mathfrak{y}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z}_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$



Wir halten $\mathfrak{y}$ fest und definieren die Gerade

$L(\mathfrak{x}) + L(\mathfrak{y}) + 2B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0$
Polare von $\mathfrak{y}$ *bezüglich des Kegelschnittes* in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$.

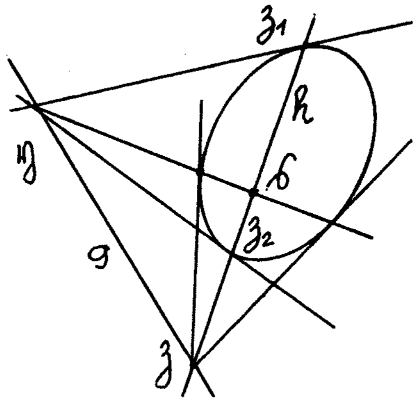
(**)

Wegen (*) liegen sowohl $\mathfrak{z}_1$ als $\mathfrak{z}_2$ auf dieser Geraden. Sie heißt *Polare des Punktes* $\mathfrak{y}$ *bezüglich des Kegelschnittes* $K(\mathfrak{x}) = 0$.
Umgekehrt heißt $\mathfrak{y}$ der *Pol der Geraden* (**).

$(a_{00}+a_{01}y_1+a_{02}y_2)+(a_{01}+a_{11}y_1+a_{12}y_2)x_1+(a_{02}+a_{12}y_1+a_{22}y_2)x_2 = 0$
Gleichung der Polare von $\mathfrak{y}$ in den laufenden Koordinaten x_1, x_2

1 Anmerkung: Die Definition der Tangente als eine Gerade, welche mit einem Kegelschnitt nur einen Punkt gemeinsam hat, ist unzutreffend. Man denke an eine Achsenparallele einer Parabel oder an eine Parallele zu einer Asymptote einer Hyperbel.

Schneidet die Polare von $\mathfrak{y}$ den Kegelschnitt in den beiden Punkten $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$, so ist $\mathfrak{y}$ der Schnittpunkt der Tangenten in $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$.



Sei $\mathfrak{z}$ ein Punkt der Polaren von $\mathfrak{y}$. . Dann gilt wegen (**)

$$L(\mathfrak{z}) + L(\mathfrak{y}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = 0 \qquad (***)$$

Der Punkt $\mathfrak{z}$ heißt zum Punkt $\mathfrak{y}$ *konjugiert*. Die Gerade $L(\mathfrak{x}) + L(\mathfrak{z}) + 2B(\mathfrak{x},\mathfrak{z}) = 0$ ist die *Polare* von $\mathfrak{z}$. Wegen (***) liegt auf ihr der Punkt $\mathfrak{y}$. Daher ist $\mathfrak{y}$ zu $\mathfrak{z}$ konjugiert.

Ist $\mathfrak{z}$ zu $\mathfrak{y}$ konjugiert, so ist auch $\mathfrak{y}$ zu $\mathfrak{z}$ konjugiert bzw. liegt $\mathfrak{z}$ auf der Polaren von $\mathfrak{y}$, so liegt auch $\mathfrak{y}$ auf der Polaren von $\mathfrak{z}$.

Sei $\mathfrak{s}$ der Schnittpunkt der Polaren von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$. Dann gilt

$$L(\mathfrak{s}) + L(\mathfrak{y}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{s}) = 0$$
$$L(\mathfrak{s}) + L(\mathfrak{z}) + 2B(\mathfrak{z},\mathfrak{s}) = 0$$

d.h. $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ liegen auf der Polaren von $\mathfrak{s}$, deren Gleichung lautet

$$L(\mathfrak{x}) + L(\mathfrak{s}) + 2B(\mathfrak{x},\mathfrak{s}) = 0$$

Ist $\mathfrak{s}$ der Schnittpunkt der Polaren von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$, so ist die Verbindungsgerade von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die Polare von $\mathfrak{s}$.

Durchläuft ein Punkt $\mathfrak{y}$ eine Gerade g, so dreht sich die Polare von $\mathfrak{y}$ um dem Pol $\mathfrak{s}$ der Geraden.

Dreht sich eine Gerade h um den Punkt $\mathfrak{s}$, so durchläuft der Pol $\mathfrak{y}$ der Geraden die Polare g von von $\mathfrak{s}$.

Es sei $\mathfrak{y}$ ein Punkt des Kegelschnittes, d.h. es gilt $K(\mathfrak{y}) = 0$. Seine Polare lautet:

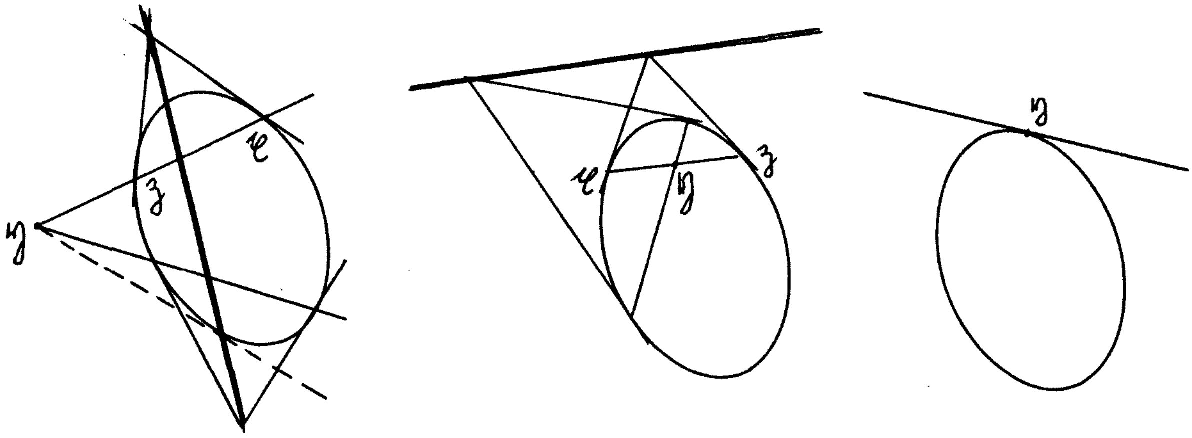
$$L(\mathfrak{x}) + L(\mathfrak{y}) + 2B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0,\ K(\mathfrak{y}) = 0$$

Dies ist aber die Gleichung der Tangente in $\mathfrak{y}$ an den Kegelschnitt, d.h. $\mathfrak{y}$ liegt auf seiner eigenen Polaren.

Die Punkte des Kegelschnittes sind *selbstkonjugiert*.

Konstruktion der Polaren eines Punktes $\mathfrak{y}$

Man verbinde $\mathfrak{y}$ mit einem Punkt $\mathfrak{z}$ des Kegelschnittes und bestimme den 2.Schnittpunkt $\mathfrak{x}$. Der Schnittpunkt der Tangenten in $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}$ ist der Pol der Geraden $(\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ und daher zu $\mathfrak{y}$ konjugiert. Die gesuchte Polare von $\mathfrak{y}$ muß daher durch diesen Tangentenschnittpunkt gehen. Dieselbe Konstruktion wiederhole man noch ein zweites Mal. Die Verbindungslinien von $\mathfrak{y}$ mit den Schnittpunkten der Polaren mit dem Kegelschnitt sind die Tangente aus $\mathfrak{y}$ an den Kegelschnitt.



Zur Konstruktion des Poles einer Geraden schneide man die Polaren zweier Punkte der Geraden (Umkehrung obiger Konstruktion).

Polaritäten der euklidischen Ebene

Gegeben sei ein inhomogener, symmetrischer, bilinearer Ausdruck in den Koordinaten zweier Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$

$$\boxed{\begin{array}{c} P(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) := \frac{1}{2}\,[L(\mathfrak{x}) + L(\mathfrak{y})] + B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = P(\mathfrak{y},\mathfrak{x}),\ A \neq 0 \\ P(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = a_{00}+a_{01}(x_1+y_1)+a_{02}(x_2+y_2)+a_{11}x_1y_1+a_{12}(x_1y_2+x_2y_1)+a_{22}x_2y_2 \end{array}}$$

Jedem Punkt $\mathfrak{y}$ entspricht vermöge

$$P(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \frac{1}{2}\,[L(\mathfrak{x}) + L(\mathfrak{y})] + B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0$$

<u>im allgemeinen</u> eine Gerade, die *Polare* von $\mathfrak{y}$. in Koordinaten:

$$P(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = a_{00}+a_{01}(x_1+y_1)+a_{02}(x_2+y_2)+a_{11}x_1y_1+a_{12}(x_1y_2+x_2y_1)+a_{22}x_2y_2 = 0$$

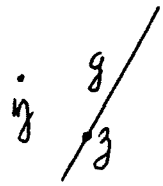
Anderseits entspricht einer gegebenen Geraden g

$$c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0$$

<u>im allgemeinen</u> ein Punkt $\mathfrak{y}$, der *Pol* von g, dessen Koordinaten (y_1, y_2) sich aus

$$\left.\begin{array}{l} a_{00} + a_{01}y_1 + a_{02}y_2 = \rho c_0 \\ a_{01} + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = \rho c_1 \\ a_{02} + a_{12}y_1 + a_{22}y_2 = \rho c_2 \end{array}\right\} \text{ Drei Gleichungen für } y_1, y_2, \rho$$

berechnen lassen. Die durch $P(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0$ vermittelte Beziehung zwischen den Punkten und den Geraden der Ebene heißt *Polarität*. Jeder Punkt $\mathfrak{z}$ auf der Polaren von $\mathfrak{y}$ heißt zu $\mathfrak{y}$ *konjugiert*.



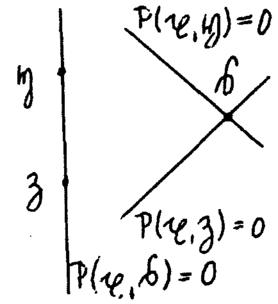
<u>Eine Polarität der euklidischen Ebene hat folgende Eigenschaften</u>

1. Eine Polarität wird durch einen inhomogenen, symmetrischen, bilinearen Ausdruck festgelegt
$$P(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = P(\mathfrak{y},\mathfrak{x})$$

2. Jedem Punkt $\mathfrak{y}$ entspricht i.a. eine Gerade mit der Gleichung
$$P(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0$$
als Polare. Jeder Geraden
$$c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0$$
entspricht i.a. ein Punkt $\mathfrak{y}$ als Pol. Die Gerade ist umgekehrt die Polare von $\mathfrak{y}$.

3. Jeder Punkt $\mathfrak{z}$ der Polaren $P(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0$ von $\mathfrak{y}$ heißt zu $\mathfrak{y}$ konjugiert. Für konjugierte Punkte gilt $P(\mathfrak{z},\mathfrak{y}) = 0$. Das Konjugiertsein zweier Punkte $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ist wegen $P(\mathfrak{z},\mathfrak{y}) = P(\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ eine symmetrische Relation d.h. liegt $\mathfrak{z}$ auf der Polaren von $\mathfrak{y}$, so liegt $\mathfrak{y}$ auf der Polaren von $\mathfrak{z}$.

4. Seien $P(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0$ und $P(\mathfrak{x},\mathfrak{z}) = 0$ die Polaren der Punkte $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$, so ist deren Schnittpunkt $\mathfrak{s}$ der Pol der Verbindungsgeraden von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$. Es gilt nämlich für $\mathfrak{s}$
$$P(\mathfrak{s},\mathfrak{y}) = 0 \wedge P(\mathfrak{s},\mathfrak{z}) = 0 \qquad (*)$$
Daher liegen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ auf der Polaren $P(\mathfrak{x},\mathfrak{s}) = 0$ von $\mathfrak{s}$. Ist umgekehrt $P(\mathfrak{x},\mathfrak{s}) = 0$ die Verbindungsgerade von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$, so ist wegen (*) $\mathfrak{s}$ der Pol dieser Verbindungsgeraden. Daher gilt



5. Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so dreht sich dessen Polare um deren Pol.
Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so durchläuft deren Pol die Polare des Punktes.

Ausnahmestellen einer Polarität der euklidischen Ebene

Die Polarität sei gegeben durch

$$P(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \frac{1}{2}[L(\mathfrak{x}) + L(\mathfrak{y})] + B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0$$

Gibt es zu jedem Punkt $\mathfrak{y}$ eine Polare? Deren Gleichung würde lauten

$$(a_{00}+a_{01}y_1+a_{02}y_2)+(a_{01}+a_{11}y_1+a_{12}y_2)x_1+(a_{01}+a_{12}y_1+a_{22}y_2)x_2 = 0$$

Dieser Ausdruck stellt keine Gerade dar, wenn das konstante Glied $\neq 0$ ist, die Koeffizienten von x_1 und x_2 aber verschwinden:

$$\begin{array}{l|c|c} a_{01}+a_{11}y_1+a_{12}y_2 = 0 & a_{22} & -a_{12} \\ a_{02}+a_{12}y_1+a_{22}y_2 = 0 & -a_{12} & a_{11} \\ \hline \end{array}$$

$$(a_{01}a_{22}-a_{02}a_{12}) + (a_{11}a_{22}-a_{12}^2)y_1 = 0 \Rightarrow -A_{01} + A_{00}y_1 = 0$$

$$(a_{02}a_{11}-a_{01}a_{12}) + (a_{11}a_{22}-a_{12}^2)y_2 = 0 \Rightarrow -A_{02} + A_{00}y_2 = 0$$

Daher

$$\boxed{y_1 = \frac{A_{01}}{A_{00}}, \quad y_2 = \frac{A_{02}}{A_{00}}}$$

Dieser Punkt existiert, sobald $A_{00} \neq 0$ ist. Für das konstante Glied der Geradengleichung ergibt sich

$$a_{00}+a_{01}y_1+a_{02}y_2 = \frac{1}{A_{00}}(a_{00}A_{00}+a_{01}A_{01}+a_{02}A_{02}) = \frac{A}{A_{00}} \neq 0$$

Diese Bedingung ist nach Voraussetzung erfüllt.

Ist $A \neq 0$ und $A_{00} \neq 0$, so gibt es zum Punkt $\mathfrak{m}(m_1,m_2)$ mit

$$m_1 = \frac{A_{01}}{A_{00}}, \quad m_2 = \frac{A_{02}}{A_{00}}$$

keine Polare. Ist $A \neq 0$ un $A_{00} = 0$, so entspricht *jedem Punkt eine Polare*.

Hat jede Gerade einen Pol?

$$\begin{array}{ccccccc} c_0 & + & c_1x_1 & + & c_2x_2 & = & 0 \\ (a_{00}+a_{01}y_1+a_{02}y_2) & + & (a_{01}+a_{11}y_1+a_{12}y_2)x_1 & + & (a_{01}+a_{12}y_1+a_{22}y_2)x_2 & = & 0 \end{array}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$
\begin{array}{rcrcrcl|c|c}
a_{00} & + & a_{01}y_1 & + & a_{02}y_2 & = & \rho c_0 & & A_{00} \\
a_{01} & + & a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 & = & \rho c_1 & a_{22} & -a_{12} \\
a_{02} & + & a_{12}y_1 & + & a_{22}y_2 & = & \rho c_2 & -a_{12} & a_{11} \\
\hline
-A_{01} & + & A_{00}y_1 & & & = & \rho(a_{22}c_1-a_{12}c_2) & & \\
-A_{02} & & & + & A_{00}y_2 & = & \rho(a_{11}c_2-a_{12}c_1) & & \\
\hline
 & & A_{00}y_1 & & & = & \rho(a_{22}c_1-a_{12}c_2) + A_{01} & & \\
 & & A_{00}y_2 & & & = & \rho(a_{11}c_2-a_{12}c_1) + A_{02} & &
\end{array}
$$

y_1 und y_2 existieren, sobald $A_{00} \neq 0$ ist. Setzt man deren Werte in die mit A_{00} multiplizierte erste Gleichung ein, so folgt

$$a_{00}A_{00}+a_{01}[\rho(a_{22}c_1-a_{12}c_2)+A_{01}]+a_{02}[\rho(a_{11}c_2-a_{12}c_1)+A_{02}] = \rho c_0 A_{00}$$

$$\underbrace{a_{00}A_{00}+a_{01}A_{01}+a_{02}A_{02}}_{A} = \rho[c_1\underbrace{(a_{02}a_{12}-a_{01}a_{22})}_{A_{01}}+c_2\underbrace{(a_{01}a_{12}-a_{02}a_{11})}_{A_{02}}+c_0A_{00}]$$

Daher

$$\rho = \frac{A}{c_0A_{00} + c_1A_{01} + c_2A_{02}}$$

Die Berechnung des Pols ist also möglich, wenn

$$A_{00} \neq 0 \text{ und } c_0A_{00}+c_1A_{01}+c_2A_{02} \neq 0$$

ist. Gilt hingegen $A_{00} \neq 0$, jedoch $c_0A_{00}+c_1A_{01}+c_2A_{02} = 0$, so folgt

$$c_0 + c_1\frac{A_{01}}{A_{00}} + c_2\frac{A_{02}}{A_{00}} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 + c_1m_1 + c_2m_2 = 0$$

> Ist $A \neq 0$ und $A_{00} \neq 0$, so gibt es zu keiner durch $m(m_1,m_2)$ gehenden Geraden einen Pol. Ist wohl $A \neq 0$, hingegen $A_{00} = 0$, so besitzt jede Gerade einen Pol.

Selbstkonjugierte Punkte

Sei $\mathfrak{y}$ ein Punkt und $P(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0$ seine Polare. Kann es vorkommen, daß $\mathfrak{y}$ auf seiner eigenen Polaren liegt? Dann gilt

$$P(\mathfrak{y},\mathfrak{y}) = \frac{1}{2}[L(\mathfrak{y}) + L(\mathfrak{y})] + B(\mathfrak{y},\mathfrak{y}) = L(\mathfrak{y}) + Q(\mathfrak{y}) = K(\mathfrak{y}) = 0$$

Ein Punkt mit dieser Eigenschaft heißt *selbstkonjugiert*. Ist die Menge der selbstkonjugierten Punkte einer Polarität $P(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0$ nicht leer, so stellt sie (Seite 15) den durch $P(\mathfrak{y},\mathfrak{y}) = K(\mathfrak{y}) = 0$ bestimmten Kegelschnitt dar. Ist die Menge selbstkonjugierter Punkte leer, so liegt ein leerer (nullteiliger) Kegelschnitt vor.

__Beispiel:__ $P(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) := 1 + x_1y_1 + x_2y_2 \Rightarrow P(\mathfrak{y},\mathfrak{y}) = K(\mathfrak{y}) = 1 + y_1^2 + y_2^2 = 0$

Es liegt also ein leerer Kreis vor.

Im folgenden nehmen wir stets an, daß die Menge der selbstkonjugierten Punkte __nicht leer__ ist

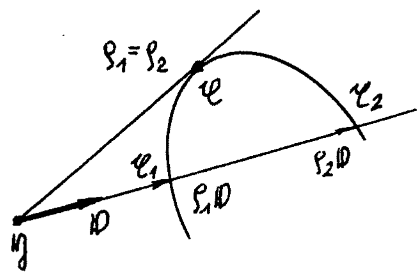
Sei $\mathfrak{y}$ ein Punkt des Kegelschnittes $K(\mathfrak{y}) = 0$, so stellt dessen Polare

$$P(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \frac{1}{2}[L(\mathfrak{x}) + L(\mathfrak{y})] + B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0, \quad K(\mathfrak{y}) = 0$$

dessen Tangente in $\mathfrak{y}$ dar (Seite 27).

__Läßt sich aus jedem Punkt der Ebene eine Tangente an einen Kegelschnitt legen?__

Wir legen durch $\mathfrak{y}$ $(K(\mathfrak{y}) \neq 0)$ eine Gerade mit dem Richtungsvektor $\mathfrak{d}$



$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \rho\mathfrak{d}$$

Wir wählen - wenn möglich - den Richtungsvektor $\mathfrak{d}$ so, daß die Schnittpunkte mit $K(\mathfrak{x}) = 0$ zusammenfallen. Es muß also gelten

$$K(\mathfrak{x}) = K(\mathfrak{y}+\rho\mathfrak{d}) = [1-(1+\rho)]a_{00} + L(\mathfrak{y}) + \rho L(\mathfrak{d}) + Q(\mathfrak{y}) + \rho^2Q(\mathfrak{d}) + 2\rho B(\mathfrak{y},\mathfrak{d}) = 0$$

also

$$\rho^2Q(\mathfrak{d}) + \rho[-a_{00} + L(\mathfrak{d}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{d}))] + \underbrace{(L(\mathfrak{y}) + Q(\mathfrak{y}))}_{K(\mathfrak{y})\neq 0} = 0$$

Das ist eine quadratische Gleichung für ρ:

$$\rho^2Q(\mathfrak{d}) + \rho[-a_{00} + L(\mathfrak{d}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{d}))] + K(\mathfrak{y}) = 0, \quad K(\mathfrak{y}) \neq 0 \tag{1}$$

Der Richtungsvektor $\mathfrak{d}$ ist hier so zu wählen, daß ρ in (1) eine doppelt zählende Nullstelle ist. Es muß also gelten

$$\underline{[-a_{00} + L(\mathfrak{d}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{d}))]^2 = 4Q(\mathfrak{d}).K(\mathfrak{y})} \tag{2}$$

Setzen wir $\mathfrak{d}(v_1,v_2)$, so gilt

$$[-a_{00} + L(\mathfrak{d}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{d}))] = -a_{00} + (a_{00}+2a_{01}v_1+2a_{02}v_2) + 2[a_{11}y_1v_1 + a_{12}(y_1v_2+y_2v_1)+a_{22}y_2v_2] = 2[v_1\underbrace{(a_{01}+a_{11}y_1+a_{12}y_2)}_{=:Y_1} + v_2\underbrace{(a_{02}+a_{12}y_1+a_{22}y_2)}_{=:Y_2}]$$

daher

$$[-a_{00} + L(\mathfrak{d}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{d}))] = 2[v_1Y_1 + v_2Y_2] \tag{3}$$

Aus (2) ergibt sich, nach Kürzung durch 4

$$[v_1Y_1 + v_2Y_2]^2 = Q(\mathfrak{d}).K(\mathfrak{y}) = (a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2)K(\mathfrak{y}) =$$

$= v_1^2Y_1^2 + 2v_1v_2\,Y_1Y_2 + v_2^2Y_2^2$, geordnet ergibt das

$$v_1^2[Y_1^2-a_{11}K(\mathfrak{y})] + 2v_1v_2[Y_1Y_2-a_{12}K(\mathfrak{y})] + v_2^2[Y_2^2-a_{22}K(\mathfrak{y})] = 0 \tag{4}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $\frac{v_1}{v_2}$ bzw $\frac{v_2}{v_1}$. Demnach gibt es aus einem Punkt $\mathfrak{y}$ maximal zwei Tangenten. Wenn Tangenten existieren, muß (4) reelle Nullstellen besitzen. Dies ist der Fall, wenn gilt

$$[Y_1Y_2-a_{12}K(\mathfrak{y})]^2 \geq [Y_1^2-a_{11}K(\mathfrak{y})].[Y_2^2-a_{22}K(\mathfrak{y})]$$

$$Y_1{}^2Y_2^2-2a_{12}Y_1Y_2K(\mathfrak{y})+a_{12}^2K(\mathfrak{y})^2 \geq Y_1^2Y_2^2-a_{11}Y_2^2K(\mathfrak{y})-a_{22}Y_1^2K(\mathfrak{y})+a_{11}a_{22}K(\mathfrak{y})^2$$

also

$$0 \geq (a_{11}a_{22}-a_{12}^2)K(\mathfrak{y})^2 - [a_{11}Y_2^2-2a_{12}Y_1Y_2+a_{22}Y_1{}^2]K(\mathfrak{y}) \qquad (5)$$

Man beachte, daß die Kürzung dieser Ungleichung durch $K(\mathfrak{y})$ unzulässig ist, da das Vorzeichen von $K(\mathfrak{y}) \neq 0$ nicht bekannt ist.
Setzt man die Ausdrücke für Y_1 und Y_2 in (5) ein, so ergibt sich

$$a_{11}Y_2^2-2a_{12}Y_1Y_2+a_{22}Y_1{}^2 = y_1^2a_{11}(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)+2a_{12}y_1y_2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2) +$$

$$+ y_2^2a_{22}(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)+2a_{01}y_1(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)+2a_{02}y_2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2) +$$

$$+ a_{01}^2a_{22}-2a_{01}a_{02}a_{12}+a_{02}^2a_{11} +(a_{00} - a_{00})(a_{11}a_{22}-a_{12}^2) =$$

$$= A_{00}(a_{11}y_1^2+2a_{12}y_1y_2+a_{22}y_2^2+2a_{01}y_1+2a_{02}y_2+a_{00}) +$$

$$a_{01}\underbrace{\{a_{01}a_{22}-a_{02}a_{12}\}}_{-A_{01}} + a_{02}\underbrace{\{a_{02}a_{11}-a_{01}a_{12}\}}_{-A_{02}} - a_{00}A_{00}$$

Es ist also

$$a_{11}Y_2^2-2a_{12}Y_1Y_2+a_{22}Y_1^2 = A_{00}K(\mathfrak{y}) - (a_{01}A_{01}+a_{02}A_{02}) - a_{00}A_{00}$$

Beachtet man

$$A = a_{00}A_{00}+a_{01}A_{01}+a_{02}A_{02} \Rightarrow (a_{01}A_{01}+a_{02}A_{02}) = A - a_{00}A_{00}$$

so erhalten wir

$$\underline{a_{11}Y_2^2-2a_{12}Y_1Y_2+a_{22}Y_1^2} = A_{00}K(\mathfrak{y}) -(A-a_{00}A_{00}) - a_{00}A_{00} = \underline{A_{00}K(\mathfrak{y}) -A}$$

Aus (5) ergibt sich dann

$$0 \geq A_{00}K(\mathfrak{y})^2 - [A_{00}K(\mathfrak{y}) - A]K(\mathfrak{y}) = AK(\mathfrak{y})$$

Also

$$\underline{A.K(\mathfrak{y}) \leq 0, \quad A \neq 0}$$

Aus dem Punkt $\mathfrak{y}$ lassen sich genau dann Tangenten an den Kegelschnitt $K(\mathfrak{x}) = 0$ legen, wenn

$$A.K(\mathfrak{y}) \leq 0, \; A \neq 0$$

ist. Im Falle

$$A.K(\mathfrak{y}) < 0$$

gibt es <u>genau</u> <u>zwei</u> <u>Tangenten</u> an den Kegelschnitt. Ist

$$A.K(\mathfrak{y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad K(\mathfrak{y}) = 0$$

so gibt es genau eine Tangente, $\mathfrak{y}$ liegt dann auf dem Kegelschnitt und es ergibt sich die Tangente im Punkte $\mathfrak{y}$.

Die Punkte mit
$A.K(\mathfrak{y}) < 0$ bilden das *Außengebiet (das Äußere)*
$A.K(\mathfrak{y}) > 0$ bilden das *Innengebiet (das Innere)*
des Kegelschnittes. Die Punkte mit
$A.K(\mathfrak{y}) = 0$ sind die Punkte auf dem Kegelschnitt

Liegt der Ausnahmepunkt $\mathfrak{m}(m_1, m_2)$ im Innern oder im Äußeren des Kegelschnittes? Dies hängt vom Vorzeichen der Größe $A.K(\mathfrak{m})$ ab

$$K(\mathfrak{m}) = L(\mathfrak{m}) + Q(\mathfrak{m}) \text{ mit } \begin{cases} a_{01}+a_{11}m_1+a_{12}m_2 = 0 \\ a_{02}+a_{12}m_1+a_{22}m_2 = 0 \end{cases} \quad m_1 = \frac{A_{01}}{A_{00}}, m_2 = \frac{A_{02}}{A_{00}}$$

$$L(\mathfrak{m}) = a_{00}+2a_{01}m_1+2a_{02}m_2 = a_{00} + \frac{2}{A_{00}} \underbrace{[a_{01}A_{01}+a_{02}A_{02}]}_{A-a_{00}A_{00}} =$$

$$= a_{00} + \frac{2}{A_{00}}[A-a_{00}A_{00}] = \underline{\frac{2A}{A_{00}} - a_{00} = L(\mathfrak{m})}$$

$$Q(\mathfrak{m}) = a_{11}m_1^2+2a_{12}m_1m_2+a_{22}m_2^2 = \underbrace{(a_{11}m_1+a_{12}m_2)}_{-a_{01}}m_1 + \underbrace{(a_{12}m_1+a_{22}m_2)}_{-a_{02}}m_2 =$$

$$= -a_{01}m_1-a_{02}m_2 = -\frac{a_{01}A_{01}+a_{02}A_{02}}{A_{00}} = -\frac{A-a_{00}A_{00}}{A_{00}} \Rightarrow \underline{Q(\mathfrak{m}) = a_{00} - \frac{A}{A_{00}}}$$

Daher

$$\boxed{K(\mathfrak{m}) = L(\mathfrak{m}) + Q(\mathfrak{m}) = \frac{A}{A_{00}} \Rightarrow A.K(\mathfrak{m}) = \frac{A^2}{A_{00}}} \tag{6}$$

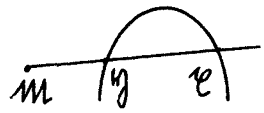
das heißt

$A_{00} < 0 \Rightarrow \mathfrak{m}$ im Außengebiet
$A_{00} > 0 \Rightarrow \mathfrak{m}$ im Innengenbiet

Wegen $A \neq 0$ und $A_{00} \neq 0$ kann $\mathfrak{m}$ <u>nie auf dem Kegelschnitt liegen</u>. Wir verbinden $\mathfrak{m}$ $(K(\mathfrak{m}) \neq 0)$ mit einem beliebigen Punkt $\mathfrak{y}$ auf dem Kegelschnitt und suchen den zweiten Schnittpunkt $\mathfrak{x}$.

$$\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{m} + \mu\mathfrak{y}, \qquad \lambda + \mu = 1$$

Nach Seite 26 gilt dann



$$\mu[L(\mathfrak{m}) + L(\mathfrak{y}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{m})] + \lambda K(\mathfrak{m}) = 0 \qquad (7)$$

Dann ist (siehe oben)

$$L(\mathfrak{m}) + L(\mathfrak{y}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{m}) = \left(\frac{2A}{A_{00}} - a_{00}\right) + (a_{00} + 2a_{01}y_1 + 2a_{02}y_2) +$$
$$+ 2[a_{11}y_1m_1 + a_{12}(y_1m_2 + y_2m_1) + a_{22}y_2m_2] =$$
$$= \frac{2A}{A_{00}} + 2[\underbrace{(a_{01} + a_{11}m_1 + a_{12}m_2)}_{0}y_1 + \underbrace{(a_{02} + a_{12}m_1 + a_{22}m_2)}_{0}y_2] =$$
$$= \frac{2A}{A_{00}} \overset{(6)}{=} 2K(\mathfrak{m}) \Rightarrow \underline{L(\mathfrak{m}) + L(\mathfrak{y}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{m}) = 2K(\mathfrak{m}), \quad K(\mathfrak{m}) \neq 0}$$

Also wegen (7)

$$2\mu K(\mathfrak{m}) + \lambda K(\mathfrak{m}) = (2\mu + \lambda)K(\mathfrak{m}) = 0 \Rightarrow \underline{2\mu + \lambda = 0}$$

Zusammen mit $\lambda + \mu = 1$ ergibt sich $\mu = -1$, $\lambda = 2 \Rightarrow \underline{\mathfrak{x} = 2\mathfrak{m} - \mathfrak{y}}$

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2}(\mathfrak{x} + \mathfrak{y})$$

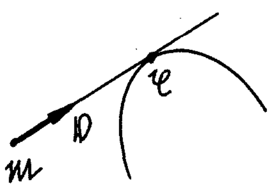
Jede durch $\mathfrak{m}$ gehende Kegelschnittsehne wird durch $\mathfrak{m}$ halbiert. $\mathfrak{m}$ heißt daher *Mittelpunkt* des Kegelschnittes. Der Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ existiert, wenn $A \neq 0$ und $A_{00} \neq 0$ ist. Kegelschnitte mit dieser Eigenschaft heißen daher *Mittelpunktskegelschnitte*.

Ist $A_{00} < 0$, so liegt der Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ im Äußeren des Kegelschnittes und es muß daher eine Tangente aus $\mathfrak{m}$ an den Kegelschnitt geben. Wir berechnen den Richtungsvektor $\mathfrak{v}(v_1,v_2)$ für den Fall $\mathfrak{y} = \mathfrak{m}$ (Formel (4) auf Seite 33)

$$v_1^2[Y_1^2 - a_{11}K(\mathfrak{m})] + 2v_1v_2[Y_1Y_2 - a_{12}K(\mathfrak{m})] + v_2^2[Y_2^2 - a_{22}K(\mathfrak{m})] = 0 \qquad (8)$$

Im vorliegenden Falle gilt

$$Y_1 = a_{01} + a_{11}m_1 + a_{12}m_2 = 0$$
$$Y_2 = a_{02} + a_{12}m_1 + a_{22}m_2 = 0 \qquad (9)$$



Daher

$$-\underbrace{[v_1^2a_{11} + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2]}_{Q(\mathfrak{v})}.K(\mathfrak{m}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{Q(\mathfrak{v}).K(\mathfrak{m}) = 0}$$

Wegen $K(\mathfrak{m}) \neq 0$ folgt

$$Q(\mathfrak{v}) = 0 \tag{10}$$

und wegen $A_{00} < 0$ zerfällt $Q(\mathfrak{v})$ in zwei verschiedene Faktoren

$$Q(\mathfrak{v}) = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = 0 \Rightarrow \underline{\frac{v_1}{v_2} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \text{ bzw. } \frac{v_1}{v_2} = -\frac{\beta_1}{\beta_2}}$$

Für den Berührungspunkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{m} + \rho\mathfrak{v}$ gilt nach Formel (1) von Seite 33

$$\rho^2 Q(\mathfrak{v}) + \rho[-a_{00} + L(\mathfrak{v}) + 2B(\mathfrak{m},\mathfrak{v}))] + K(\mathfrak{m}) = 0, \quad K(\mathfrak{m}) \neq 0 \tag{11}$$

und wegen Formel (3) auf Seite 33 ergibt sich aus $Y_1 = Y_2 = 0$

$$[-a_{00} + L(\mathfrak{v}) + 2B(\mathfrak{m},\mathfrak{v}))] = 2[v_1 Y_1 + v_2 Y_2] = 0 \tag{12}$$

Zusammen mit (10) folgt daher aus (11)

$\underline{K(\mathfrak{m}) = 0}$, <u>was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt.</u>

Die "Tangenten" aus dem Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ mit dem Richtungsvektor $\mathfrak{v}$ haben daher <u>keinen Berührungspunkt</u> mit dem Kegelschnitt. Sie heißen *Asymptoten des Kegelschnittes.*

Gleichungen der Asymptoten

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{m} + \rho\mathfrak{v} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = m_1 + \rho v_1 = m_1 + \rho\alpha_1 \\ x_2 = m_2 + \rho v_2 = m_2 + \rho\alpha_2 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2$$

1. Asymptote	$\alpha_1(x_1 - m_1) + \alpha_2(x_2 - m_2) = 0$
2. Asymptote	$\beta_1(x_1 - m_1) + \beta_2(x_2 - m_2) = 0$

Die Kegelschnitte mit $A \neq 0$, $A_{00} \neq 0$ heißen *Mittelpunktskegelschnitte.* Der Punkt $\mathfrak{m}(m_1, m_2)$

$$m_1 = \frac{A_{01}}{A_{00}}, \quad m_2 = \frac{A_{02}}{A_{00}}$$

heißt *Mittelpunkt des Kegelschnittes.* Die Geraden durch $\mathfrak{m}$ heißen *Durchmesser.*

Ist $A_{00} > 0$, heißt der Mittelpunktskegelschnitt *Ellipse.* $\mathfrak{m}$ liegt im Innern der Ellipse.

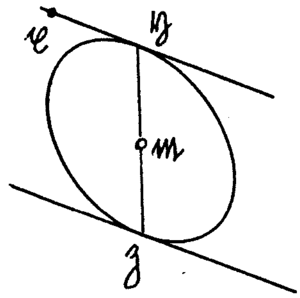
Ist $A_{00} < 0$, heißt der Kegelschnitt *Hyperbel.* $\mathfrak{m}$ liegt im Äußern der Hyperbel. Die Geraden

$\alpha_1(x_1 - m_1) + \alpha_2(x_2 - m_2) = 0$ und $\beta_1(x_1 - m_1) + \beta_2(x_2 - m_2) = 0$

sind die *Asymptoten der Hyperbel.*

Konjugierte Durchmesser und Achsen eines Mittelpunktskegelschnittes

Sei $\mathfrak{y}$ ein Punkt des Kegelschnittes. Dann lautet die Gleichung seiner Tangente



$$(a_{00}+a_{01}y_1+a_{02}y_2) + (a_{01}+a_{11}y_1+a_{12}y_2)x_1 +$$
$$+ (a_{02}+a_{12}y_1+a_{22}y_2)x_2 = 0$$

oder

$$c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0$$

mit

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_{01}+a_{11}y_1+a_{12}y_2}{a_{02}+a_{12}y_1+a_{22}y_2}$$

Die Gleichung des Durchmessers durch $\mathfrak{y}$ laute

$$\bar{c}_1(x_1 - m_1) + \bar{c}_2(x_2 - m_2) = 0$$

Da $\mathfrak{y}$ auf dem Durchmesser liegt, gilt

$$\bar{c}_1(y_1 - m_1) + \bar{c}_2(y_2 - m_2) = 0 \Rightarrow \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} = -\frac{y_2-m_2}{y_1-m_1}$$

Nun ist

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{(a_{01}+a_{11}y_1+a_{12}y_2) - \overbrace{(a_{01}+a_{11}m_1+a_{12}m_2)}^{0!}}{(a_{02}+a_{12}y_1+a_{22}y_2) - \underbrace{(a_{02}+a_{12}m_1+a_{22}m_2)}_{0!}} =$$

$$= \frac{a_{11}(y_1 - m_1) + a_{12}(y_2 - m_2)}{a_{12}(y_1 - m_1) + a_{22}(y_2 - m_2)} = \frac{a_{11} + a_{12}\dfrac{y_2-m_2}{y_1-m_1}}{a_{12} + a_{22}\dfrac{y_2-m_2}{y_1-m_1}} =$$

$$= \frac{a_{11} - a_{12}\dfrac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2}}{a_{12} - a_{22}\dfrac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2}} = \frac{a_{11}\bar{c}_2 - a_{12}\bar{c}_1}{a_{12}\bar{c}_2 - a_{22}\bar{c}_1}$$

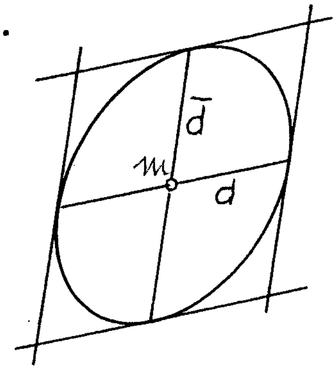
$$\boxed{\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_{11}\bar{c}_2 - a_{12}\bar{c}_1}{a_{12}\bar{c}_2 - a_{22}\bar{c}_1}}$$

Umgekehrt gilt:

$$a_{12}c_1\bar{c}_2-a_{22}c_1\bar{c}_1 = a_{11}c_2\bar{c}_2-a_{12}c_2\bar{c}_1 \Rightarrow (a_{12}c_2-a_{22}c_1)\bar{c}_1 = (a_{11}c_2-a_{12}c_1)\bar{c}_2$$

$$\boxed{\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} = \frac{a_{11}c_2 - a_{12}c_1}{a_{12}c_2 - a_{22}c_1}}$$

In obigen Ausdrücken kommen die Koordinaten des Punktes $\mathfrak{y}$ nicht vor. Daher stellen die obigen Formeln eine Beziehung zwischen dem Durchmesser eines Mittelpunktkegelschnittes und der Tangente in dessen Endpunkt dar, die für alle Kegelschnittspunkte gilt.



Da $\bar{c}(\bar{c}_1,\bar{c}_2)$ der Normalenvektor des Durchmessers und $c(c_1,c_2)$ der Normalenvektor der Tangente ist, folgt aus obigen Beziehungen:

<u>Die Tangenten in den Endpunkten desselben Durchmessers sind parallel.</u>

Wegen der vollen Symmetrie in den Beziehungen zwischen den Vektoren c und $\bar{c}$ gilt:

<u>Ist der Durchmesser d parallel zu den Tangenten im Endpunkt des Durchmessers $\bar{d}$, so sind die Tangenten in den Endpunkten von d (soferne sie existieren) parallel zu $\bar{d}$.</u>

Zwei Durchmesser, deren Normalenvektoren c, $\bar{c}$ in obiger Beziehung stehen, heißen *konjugierte Durchmesser*.

Es gilt also

$$\begin{array}{rcl|c|c} c_1 &=& \rho(a_{11}\bar{c}_2 - a_{12}\bar{c}_1) & -a_{12} & -a_{22} \\ c_2 &=& \rho(a_{12}\bar{c}_2 - a_{22}\bar{c}_1) & a_{11} & a_{12} \\ \hline \end{array}$$

$$a_{11}c_2 - a_{12}c_1 = -\rho A_{00}\bar{c}_1$$

$$a_{12}c_2 - a_{22}c_1 = -\rho A_{00}\bar{c}_2$$

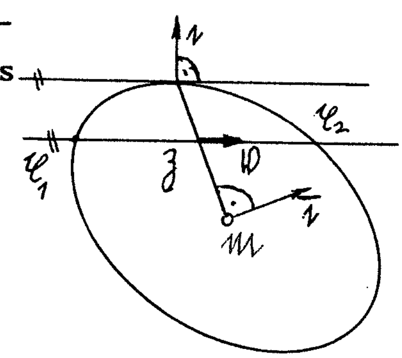
Definiert man

$$\sigma := -\frac{1}{\rho A_{00}}$$

so ergibt sich

$$\boxed{\begin{array}{ll} c_1 = \rho(a_{11}\bar{c}_2 - a_{12}\bar{c}_1), \quad \bar{c}_1 = \sigma(a_{11}c_2 - a_{12}c_1) & \\ c_2 = \rho(a_{12}\bar{c}_2 - a_{22}\bar{c}_1), \quad \bar{c}_2 = \sigma(a_{12}c_2 - a_{22}c_1) & \rho\sigma A_{00} = -1 \end{array}}$$

Sei $\mathfrak{z}$ ein Punkt auf dem Durchmesser mit dem Normalenvektor $\bar{c}$. Die Gleichung dieses Durchmessers lautet $\bar{c}\mathfrak{x} = \bar{c}\mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{z}$ auf diesem Durchmesser liegt, gilt $\bar{c}\mathfrak{z} = \bar{c}\mathfrak{m}$. Sei ferner eine Gerade gegeben, die zur Tangente im Endpunkt dieses Durchmessers parallel ist. Ihr Normalenvektor ist c. Da ihr Richtungsvektor $\mathfrak{v}(v_1,v_2)$ auf c normal ist, gilt



$$\mathfrak{v}(v_1,v_2) \perp \mathfrak{c}(c_1,c_2) \Rightarrow v_1 = c_2,\ v_2 = -c_1 \qquad (*)$$

Legen wir die Parallele zur Tangente durch den Punkt $\mathfrak{z}$, so lautet einer ihrer Punkte

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{z} + \lambda\mathfrak{v}$$

Die Parallele schneide den Kegelschnitt in den beiden Punkten

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{z} + \lambda_1\mathfrak{v}, \qquad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{z} + \lambda_2\mathfrak{v}$$

Wir behaupten: $\mathfrak{z}$ ist der Mittelpunkt von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, d.h. es muß gelten

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2}{2} = \mathfrak{z} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\mathfrak{v}$$

Es ist also zu zeigen: $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Nun ist

$$K(\mathfrak{x}) = K(\mathfrak{z}+\lambda\mathfrak{v}) = [1-(1+\lambda)]a_{00}+\underbrace{L(\mathfrak{z})+\lambda L(\mathfrak{v})+Q(\mathfrak{z})}_{K(\mathfrak{z})}+\lambda^2 Q(\mathfrak{v})+2\lambda B(\mathfrak{z}.\mathfrak{v}) = 0$$

Für λ ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 Q(\mathfrak{v}) + \lambda[-a_{00} + L(\mathfrak{v}) + 2B(\mathfrak{z},\mathfrak{v})] + K(\mathfrak{z}) = 0$$

Da uns nur die Summe $\lambda_1+\lambda_2$ der Nullstellen interessiert, haben wir nach VIETA nur den Ausdruck

$$-[-a_{00} + L(\mathfrak{v}) + 2B(\mathfrak{z},\mathfrak{v})] = (\lambda_1 + \lambda_2)Q(\mathfrak{v})$$

zu betrachten. Es gilt

$$[-a_{00} + L(\mathfrak{v}) + 2B(\mathfrak{z},\mathfrak{v})] = -a_{oo} + (a_{00}+2a_{01}v_1+2a_{02}v_2) +$$

$$+ \quad 2(a_{11}z_1v_1+a_{12}(z_1v_2+z_2v_1)+a_{22}z_2v_2) =$$

$$= 2[a_{01}v_1+a_{01}v_2+z_1(a_{11}v_1+a_{12}v_2)+z_2(a_{12}v_1+a_{22}v_2)] \text{ daraus wegen } (*)$$

$$= 2[a_{01}c_2-a_{02}c_1+z_1\underbrace{(a_{11}c_2-a_{12}c_1)}_{\frac{1}{\sigma}\bar{c}_1}+z_2\underbrace{(a_{12}c_2-a_{22}c_1)}_{\frac{1}{\sigma}\bar{c}_2}]$$

Drückt man alle c_i durch die $\bar{c}_j$ aus, so ergibt sich

$$= 2[\rho(a_{01}(a_{12}\bar{c}_2-a_{22}\bar{c}_1)-a_{02}(a_{11}\bar{c}_2-a_{12}\bar{c}_1))+ \frac{1}{\sigma}\underbrace{(z_1\bar{c}_1+z_2\bar{c}_2)}_{\bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{z} \,=\, \bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{m}}] =$$

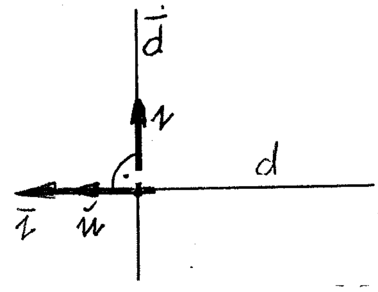
$$= 2\left[-\frac{1}{\sigma A_{00}}(A_{01}\bar{c}_1+A_{02}\bar{c}_2) + \frac{1}{\sigma}\bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{m}\right] = \frac{2}{\sigma}\left[-\underbrace{(m_1\bar{c}_1+m_2\bar{c}_2)}_{\bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{m}}+\bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{m}\right] = \underline{0}$$

Daher ist $\lambda_1+\lambda_2 = 0$, <u>$\mathfrak{z}$ ist Mittelpunkt von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$.</u>

<u>Die Mittelpunkte einer Schar paralleler Sehnen eines Mittelpunktskegelschnittes liegen auf dem zur Sehnenrichtung konjugierten Durchmesser.</u>

Gibt es orthogonale Paare konjugierter Durchmesser?

Dann muß der auf $c(c_1,c_2)$ normale Vektor $u(c_2,-c_1)$ und der Vektor $\bar{c}(a_{11}c_2-a_{12}c_1, a_{12}c_2-a_{22}c_1)$ linear abhängig sein: $\bar{c} = \lambda u$. Daher



$$\left.\begin{aligned} a_{11}c_2-a_{12}c_1 &= \lambda c_2 \\ a_{12}c_2-a_{22}c_1 &= -\lambda c_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rcl|c|cl} (a_{11}-\lambda)c_2 - a_{12}c_1 &=& 0 & (a_{22}-\lambda) & a_{12} & (1) \\ a_{12}c_2 - (a_{22}-\lambda)c_1 &=& 0 & -a_{12} & -(a_{11}-\lambda) & (2) \end{array}$$

Daraus

$$[(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}^2]c_2 = 0$$
$$[(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}^2]c_1 = 0$$

Wäre in obigem System der Ausdruck $[(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}^2] \neq 0$, so würde $c_1 = c_2 = 0$ folgen, c wäre der Nullvektor. Da dies der Voraussetzung widerspräche, muß gelten

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2) = 0$$

> Das Polynom
>
> $$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} =$$
> $$= \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2) = \lambda^2 - s_{00}\lambda + A_{00}$$
>
> heißt *charakteristisches Polynom von* A_{00}. Seine Nullstellen sind die *Eigenwerte von* A_{00}.

Die Berechnung der Eigenwerte ergibt

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4A_{00}}\right]$$

$$(a_{11}+a_{22})^2-4A_{00} = a_{11}^2+2a_{11}a_{22}+a_{22}^2-4a_{11}a_{22}+4a_{12}^2 = (a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2$$

also

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{2}\left[(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right]}$$

Es existieren also stets reelle Eigenwerte mit der Eigenschaft

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = s_{00}, \quad \lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = A_{00} \\ \text{daraus} \\ a_{11} - \lambda_1 = -(a_{22} - \lambda_2) \text{ bzw. } a_{11} - \lambda_2 = -(a_{22} - \lambda_1) \end{array}} \qquad (3)$$

Für den Eigenwert λ_1 gilt wegen (1)

$$a_{12}c_1 - (a_{11}-\lambda_1)c_2 = 0 \Rightarrow \underline{c_2 = \rho a_{12},\ c_1 = \rho(a_{11}-\lambda_1) \overset{(3)}{=} -\rho(a_{22}-\lambda_2)}$$

Analog folgt aus (2)

$$a_{12}c_2 - (a_{22}-\lambda_1)c_1 = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} a_{12}c_2 + (a_{11}-\lambda_2)c_1 \Rightarrow$$

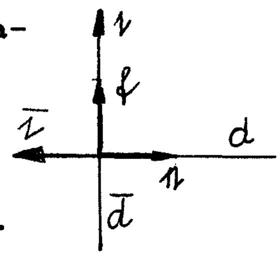
$$\underline{c_1 = -\sigma a_{12},\ c_2 = \sigma(a_{11}-\lambda_2) \overset{(3)}{=} -\sigma(a_{22}-\lambda_1)}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} c_1 = \rho(a_{11}-\lambda_1) = -\rho(a_{22}-\lambda_2) & \text{oder} & c_1 = -\sigma a_{12} \\ c_2 = \rho a_{12} & & c_2 = \sigma(a_{11}-\lambda_2) = -\sigma(a_{22}-\lambda_1) \end{array}}$$

Analog gilt für $\bar{c}$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \bar{c}_1 = \bar{\rho}(a_{11}-\lambda_2) = -\bar{\rho}(a_{22}-\lambda_1) & \text{oder} & \bar{c}_1 = \bar{\sigma}a_{12} \\ \bar{c}_2 = \bar{\rho}a_{12} & & \bar{c}_2 = \bar{\sigma}(a_{11}-\lambda_2) = -\bar{\sigma}(a_{22}-\lambda_1) \end{array}}$$

$c(c_1,c_2)$ und $\bar{c}(\bar{c}_1,\bar{c}_2)$ sind <u>Normalenvektoren</u> orthogonaler konjugierter Durchmesser d und $\bar{d}$.
Wir bestimmen nun die <u>Richtungsvektoren</u> $e(e_1,e_2)$ und $f(f_1,f_2)$ der orthogonalen konjugierten Durchmesser d und $\bar{d}$, die wir mit <u>positivem</u> <u>Drehsinn</u> <u>orthonormieren</u>.

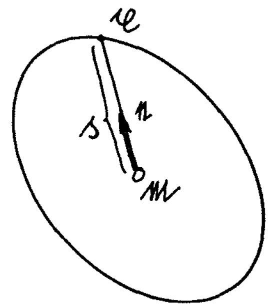


$$e := -\frac{\bar{c}}{|\bar{c}|}, \quad f := \frac{c}{|c|}, \quad e \perp c, \quad f \perp \bar{c}, \quad e \perp f \quad \textit{Achsenrichtungen}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Richtungsvektoren der Achsen} \\ \left\{\begin{array}{l} e_1 = \rho a_{12} \\ e_2 = -\rho(a_{11}-\lambda_1) = \rho(a_{22}-\lambda_2) \\ f_1 = \rho(a_{11}-\lambda_1) = -\rho(a_{22}-\lambda_2) \\ f_2 = \rho a_{12} \end{array}\right. \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} e_1 = -\sigma(a_{11}-\lambda_2) = +\sigma(a_{22}-\lambda_1) \\ e_2 = \sigma a_{12} \\ f_1 = -\sigma a_{12} \\ f_2 = -\sigma(a_{11}-\lambda_2) = +\sigma(a_{22}-\lambda_1) \end{array}\right. \\ \rho^2[a_{12}^2+(a_{11}-\lambda_1)^2] = \rho^2[a_{12}^2+(a_{22}-\lambda_2)^2] = 1 \\ \sigma^2[a_{12}^2+(a_{11}-\lambda_2)^2] = \sigma^2[a_{12}^2+(a_{22}-\lambda_1)^2] = 1 \\ \text{Wegen } ef = 0 \text{ und } e_1f_2 - e_2f_1 = 1 > 0 \text{ sind } e \text{ und } f \text{ positiv} \\ \text{orthonormiert} \end{array}}$$

Berechnung der Längen der Halbmesser eines Mittelpunktskegelschnittes

Gegeben sei ein Einheitsvektor e durch den Mittelpunkt m des Kegelschnittes. Die Länge $|s|$ des entsprechenden Halbmessers ist gesucht. Dann gilt



$\mathfrak{x} = m + se$ $\qquad |s|$ = Länge des Halbmessers

$x_1 = m_1 + se_1$
$x_2 = m_2 + se_2$ $\qquad e_1^2 + e_2^2 = 1$

$$K(\mathfrak{x}) = K(m+se) = [1-(1+s)]a_{00} + L(m) + sL(e) + Q(m) +$$

$$s^2Q(e)+2sB(m,e) = K(m)+s[-a_{00}+L(e)+2B(m,e)]+s^2Q(e)$$

Nun ist

$$[-a_{00}+L(e)+2B(m,e)] = -a_{00}+(a_{00}+2a_{01}e_1+2a_{02}e_2) +$$

$$2[a_{11}m_1e_1+a_{12}(m_1e_2+m_2e_1)+a_{22}m_2e_2] =$$

$$= 2[e_1\underbrace{(a_{01}+a_{11}m_1+a_{12}m_2)}_{0} + e_2\underbrace{(a_{02}+a_{12}m_1+a_{22}m_2)}_{0}] = 0$$

Die Länge des Halbmessers ergibt sich daher aus

$$\underline{K(m) + s^2Q(e) = 0}$$

Nunmehr wollen wir e so bestimmen, daß die Halbmesserlänge ein Extremwert wird. Wegen

$$s^2 = -\frac{K(m)}{Q(e)}$$

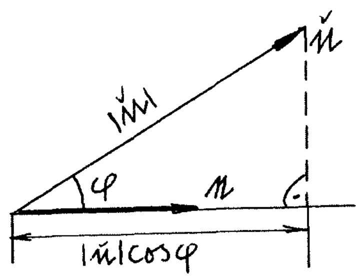
hängt der Wert von s^2 nur von $Q(e)$ ab und es gilt

$$Q(e) \text{ min!} \Rightarrow s^2 \text{ max!}$$
$$Q(e) \text{ max!} \Rightarrow s^2 \text{ min!}$$

Wir stellen $Q(e) = a_{11}e_1^2 + 2a_{12}e_1e_2 + a_{22}e_2^2$ als das Skalarprodukt der beiden Vektoren

$u(a_{11}e_1+a_{12}e_2,\ a_{12}e_1+a_{22}e_2)$ und $e(e_1,e_2)$ dar.

Tatsächlich gilt



$$ue = (a_{11}e_1^2+a_{12}e_1e_2) + (a_{12}e_1e_2+a_{22}e_2^2) = Q(e)$$

Es ist also

$$Q(e) = ue = |u|.|e|.\cos\varphi = |u|\cos\varphi$$

Der Wert des Skalarproduktes hängt also von Winkel φ ab. Extrema treten daher auf für

$$\underline{\varphi = 0 \text{ und } \varphi = \pi \ \ldots \text{ Extrema}}$$

In beiden Fällen sind u und e linear abhängig, d.h. es gilt

$u = \lambda e$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}e_1 + a_{12}e_2 &= \lambda e_1 \\ a_{12}e_1 + a_{22}e_2 &= \lambda e_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l|l|l} (a_{11}-\lambda)e_1 + a_{12}e_2 = 0 & a_{22}-\lambda & -a_{12} \\ a_{12}e_1 + (a_{22}-\lambda)e_2 = 0 & -a_{12} & a_{11}-\lambda \\ \hline \end{array} \qquad (¶)$$

$$[(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)] - a_{12}^2]e_1 = 0$$

$$[(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)] - a_{12}^2]e_2 = 0$$

Wäre $e_1 = e_2 = 0$, so entstünde ein Widerspruch zu $e_1^2 + e_2^2 = 1$. Es muß daher gelten

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}^2 = 0$$

λ ist also Nullstelle des charakteristischen Polynoms (Seite 41)

$$\lambda^2 - s_{00}\lambda + A_{00} = 0, \ \lambda = \frac{1}{2}[s_{00} \pm W]$$

dabei gilt

$$W := \sqrt[+]{s_{00}^2 - 4A_{00}} \quad \text{mit} \quad s_{00}^2 - 4A_{00} \geq 0$$

Aus (¶) folgt

$$(a_{11} - \lambda)e_1 + a_{12}e_2 = 0 \Rightarrow e_1 = -\rho a_{12}, \ e_2 = \rho(a_{11} - \lambda)$$

Wir erhalten also wieder die Richtungsvektoren der Achsen.

Länge der Hauptachsen

Es galt $s^2 = -\frac{K(m)}{Q(e)}$ mit $K(m) = \frac{A}{A_{00}}$ (Formel (6) auf S.35). Daher

$$s^2 = -\frac{A}{A_{00}Q(e)}$$

Wegen $Q(e) = ue$ und $u = \lambda e$ folgt

$$\underline{Q(e) = (\lambda e)e = \lambda|e|^2 = \lambda}$$

Daher

$$\boxed{s^2 = -\frac{A}{\lambda A_{00}}}$$

1. Fall $A_{00} > 0$ *elliptischer Fall*	Die Kegelschnitte heißen *Ellipsen*

1. Sei $s_{00} > 0$, dann ist $W = \sqrt[+]{s_{00}^2 - 4A_{00}} < s_{00}$ und es gilt

$$\lambda = \frac{1}{2}[s_{00} \pm W] > 0 \Rightarrow \lambda_1.\lambda_2 > 0$$

   Damit s existiert, muß $\underline{A < 0}$ sein.

2. Sei $s_{00} < 0$. Dann ist wie oben $W < |s_{00}|$ und es gilt

$$\lambda = \frac{1}{2}[-|s_{00}| \pm W] < 0 \Rightarrow \lambda_1.\lambda_2 > 0$$

In diesem Falle ist $\underline{A > 0}$ für die Existenz von s erforderlich. In beiden genannten Fällen muß daher gelten

$$\boxed{s_{00}A < 0 \Leftrightarrow \lambda_i A < 0 \quad i = 1,2}$$

I.a. wird $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sein. Wann ist $\lambda_1 = \lambda_2$?. Es gilt

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right]$$

$$\underline{\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0 \Leftrightarrow a_{11} = a_{22} \wedge a_{12} = 0}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}) = \frac{1}{2}(a_{11}+a_{11}) = a_{11} = a_{22} \Rightarrow \underline{\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11} = a_{22}}$$

Nach (¶) von Seite 44 folgt weiter

$$(a_{11}-\lambda)e_1 + a_{12}e_2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

<u>Im Falle gleicher Eigenwerte von A_{00} sind die Richtungsvektoren der Achsen unbestimmt.</u> Die Ellipsen mit $a_{11} = a_{22} \wedge a_{12} = 0$ heißen *Kreise.*

Gilt $s_{00}A > 0 \Leftrightarrow \lambda_i A > 0$, so liegt eine *leere Ellipse* vor, im Falle $a_{11} = a_{22} \wedge a_{12} = 0$ eim *leerer Kreis.*

2.Fall $A_{00} < 0$ *hyperbolischer Fall* Die Kegelschnitte heißen *Hyperbeln*

1. Sei $s_{00} > 0 \Rightarrow W = +\sqrt{s_{00}^2 - 4A_{00}} > s_{00}$, dann gilt

$$\lambda = \frac{1}{2}[s_{00} \pm W] \begin{cases} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{cases} \quad |\lambda_1| > |\lambda_2|$$

2. Sei $s_{00} < 0 \Rightarrow W > |s_{00}|$ daher

$$\lambda = \frac{1}{2}[-|s_{00}| \pm W] \begin{cases} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{cases} \quad |\lambda_1| < |\lambda_2|$$

Im hyperbolischen Fall existiert stets ein reeller Wert von s.

<u>$A_{00} > 0$ elliptischer Fall</u>

$s_{00}A < 0 \Leftrightarrow \lambda_i A < 0$ ... Ellipse

Beide Eigenwerte besitzen dasselbe Vorzeichen ($\lambda_1\lambda_2 > 0$).

$a_{11} = a_{22} \wedge a_{12} = 0$ $(\lambda_1 = \lambda_2)$ ... Kreis

$s_{00}A > 0 \Leftrightarrow \lambda_i A > 0$ ... leere Ellipse

$a_{11} = a_{22} \wedge a_{12} = 0$ ... leerer Kreis

<u>$A_{00} < 0$ hyperbolischer Fall</u> $\lambda_1\lambda_2 < 0$

Es gibt keine leeren Hyperbeln

Die Achsengleichungen der Mittelpunktskegelschnitte

Für die Vektoren

$$u(a_{11}e_1 + a_{12}e_2,\ a_{12}e_1 + a_{22}e_1) \text{ und } e(e_1, e_2)$$

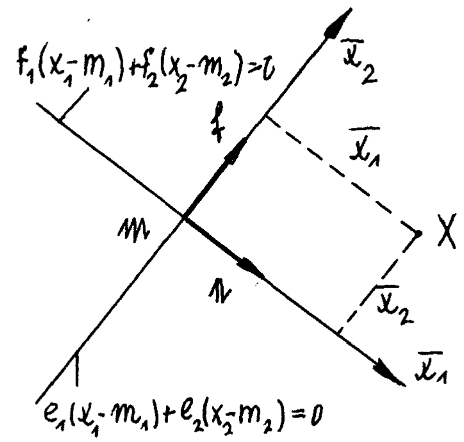
galt

$$Q(e) = ue \text{ mit } u = \lambda e \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \lambda e_1 \\ u_2 = \lambda e_2 \end{cases}$$

$$\lambda_1 \ \dots \ e(e_1, e_2) = e(f_2, -f_1) \qquad Q(e) = \lambda_1$$
$$\lambda_2 \ \dots \ \mathfrak{f}(f_1, f_2) = \mathfrak{f}(-e_2, e_1) \qquad Q(\mathfrak{f}) = \lambda_2$$

$$e_1 f_2 - e_2 f_1 = e_1^2 + e_2^2 = 1, \text{ d.h. } e, \mathfrak{f} \text{ bilden eine Rechtssystem}$$

Wir wählen e und $\mathfrak{f}$ als als Normalenvektoren der Achsen eines kartesischen Rechtskoordinatensystems mit dem Ursprung $\mathfrak{m}$. Dann gilt nach HESSE



$$\begin{array}{l|c|c} e_1(x_1-m_1) + e_2(x_2-m_2) = \bar{x}_1 & f_2 & -f_1 \\ f_1(x_1-m_1) + f_2(x_2-m_2) = \bar{x}_2 & -e_2 & e_1 \end{array}$$

$$\underbrace{(e_1 f_2 - e_2 f_1)}_{1}(x_1 - m_1) = f_2\bar{x}_1 - e_2\bar{x}_2$$
$$(e_1 f_2 - e_2 f_1)(x_2 - m_2) = -f_1\bar{x}_1 + e_1\bar{x}_2$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - m_1 = f_2\bar{x}_1 - e_2\bar{x}_2 \\ x_2 - m_2 = -f_1\bar{x}_1 + e_1\bar{x}_2 \end{array}\right\}$$

setzt man wie oben $f_2 = e_1$ und $f_1 = -e_2$ so erhält man

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x_1 - m_1 = e_1\bar{x}_1 - e_2\bar{x}_2 \\ x_2 - m_2 = e_2\bar{x}_1 + e_1\bar{x}_2 \end{array}\right\} \mathfrak{x} - \mathfrak{m}}$$

Nunmehr ist die Gleichung des Kegelschnittes von den alten Koordinaten (x_1, x_2) auf die neuen Koordinaten $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ umzurechnen.

$$K(\mathfrak{x}-\mathfrak{m}) = [1-(1-1)]a_{00} + L(\mathfrak{x}) - L(\mathfrak{m}) + Q(\mathfrak{x}) + Q(\mathfrak{m}) - 2B(\mathfrak{x},\mathfrak{m}) = a_{00} + K(\mathfrak{x}) - L(\mathfrak{m}) +$$
$$+ (-Q(\mathfrak{m}) + 2Q(\mathfrak{m})) - 2B(\mathfrak{x},\mathfrak{m}) = a_{00} + K(\mathfrak{x}) - K(\mathfrak{m}) + 2Q(\mathfrak{m}) - 2B(\mathfrak{x},\mathfrak{m})$$

Wegen $Q(\mathfrak{m}) = B(\mathfrak{m},\mathfrak{m})$ folgt $B(\mathfrak{m},\mathfrak{m}) - B(\mathfrak{x},\mathfrak{m}) = -B(\mathfrak{x}-\mathfrak{m},\mathfrak{m})$, also

$$K(\mathfrak{x}-\mathfrak{m}) = a_{00} + K(\mathfrak{x}) - K(\mathfrak{m}) - 2B(\mathfrak{x}-\mathfrak{m},\mathfrak{m})$$

und daraus

$$\underline{K(\mathfrak{x}) = -a_{00} + K(\mathfrak{m}) + K(\mathfrak{x}-\mathfrak{m}) + 2B(\mathfrak{x}-\mathfrak{m},\mathfrak{m}) = 0}$$

Wir betrachten den Teilausdruck

$$2B(\mathfrak{x}-\mathfrak{m},\mathfrak{m}) = 2[a_{11}(x_1-m_1)m_1 + a_{12}((x_1-m_1)m_2 + (x_2-m_2)m_1) + a_{22}(x_2-m_2)m_2] =$$

$$= 2[(x_1-m_1)\underbrace{(a_{11}m_1+a_{12}m_2)}_{-a_{01}}+(x_2-m_2)\underbrace{(a_{12}m_1+a_{22}m_2)}_{-a_{02}}]$$

also

$$2B(\mathfrak{x}-m,m) = (a_{00} - \underbrace{a_{00}) -2a_{01}(x_1-m_1) - 2a_{02}(x_2-m_2)}$$

somit

$$\underline{2B(\mathfrak{x}-m,m) = a_{00} - L(\mathfrak{x}-m)}$$

Die Kegelschnittsgleichung erhält daher die Gestalt

$$K(\mathfrak{x}) = -a_{00} + K(m) + \underbrace{K(\mathfrak{x}-m)}_{L(\mathfrak{x}-m)+Q(\mathfrak{x}-m)} + a_{00} - L(\mathfrak{x}-m) = \underline{K(m) + Q(\mathfrak{x}-m) = 0}$$

Es erübrigt sich noch die Berechnung von

$$Q(\mathfrak{x}-m) = a_{11}(x_1-m_1)^2 + 2a_{12}(x_1-m_1)(x_2-m_2) + a_{22}(x_2-m_2)^2 = \dots =$$

$$= \bar{x}_1^2\underbrace{[a_{11}e_1^2+2a_{12}e_1e_2+a_{22}e_2^2]}_{Q(e)} + 2\bar{x}_1\bar{x}_2[-a_{11}e_1e_2+a_{12}e_1^2-a_{12}e_2^2+a_{22}e_1e_2] +$$

$$+ \bar{x}_2^2[a_{11}e_2^2-2a_{12}e_1e_2+a_{22}e_1^2] =$$

$$= \bar{x}_1^2Q(e) + 2\bar{x}_1\bar{x}_2[\underbrace{e_1}_{f_2}\underbrace{(a_{12}e_1+a_{22}e_2)}_{u_2=\lambda_1e_2}\underbrace{-e_2}_{+f_1}\underbrace{(a_{11}e_1+a_{12}e_2)}_{u_1=\lambda_1e_1}] +$$

$$+ \bar{x}_2^2\underbrace{[a_{11}f_1^2+2a_{12}f_1f_2+a_{22}f_2^2]}_{Q(f)}$$

Daher

$$Q(\mathfrak{x}-m) = \bar{x}_1^2\underbrace{Q(e)}_{\lambda_1} + 2\bar{x}_1\bar{x}_2\lambda_1\underbrace{[e_1f_1+e_2f_2]}_{ef=0} + \bar{x}_2^2\underbrace{Q(f)}_{\lambda_2} = \underline{\lambda_1\bar{x}_1^2 + \lambda_2\bar{x}_2^{\,2}}$$

Wegen $K(m) = \frac{A}{A_{00}}$ ergibt sich

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{A}{A_{00}} + \lambda_1\bar{x}_1^2 + \lambda_2\bar{x}_2^2 = 0\\ \text{oder}\\ \frac{\bar{x}_1^2}{-\frac{A}{\lambda_1A_{00}}} + \frac{\bar{x}_2^2}{-\frac{A}{\lambda_2A_{00}}} = +1\\ \text{Achsengleichung der Mittelpunktskegelschnitte}\end{gathered}}$$

$\boxed{A_{00} > 0 \text{ elliptischer Fall}}$ Wir setzen o.B.d.A. $|\lambda_1| \le |\lambda_2|$

$$a^2 := s_1^2 = -\frac{A}{\lambda_1A_{00}}, \quad b^2 := s_2^2 = -\frac{A}{\lambda_2A_{00}}$$

<u>1.Fall:</u> $s_{00}A < 0 \Leftrightarrow \lambda_iA < 0$, $i = 1,2$ (daher $\operatorname{sign}\lambda_1 = \operatorname{sign}\lambda_2$)

$a^2 > 0,\ b^2 > 0,\ a^2 > b^2 \Leftrightarrow |\lambda_1| < |\lambda_2|$

$$\frac{\bar{x}_1^2}{a^2} + \frac{\bar{x}_2^2}{b^2} = 1 \quad \dots \text{ Ellipse}$$

Gilt $a^2 = b^2 =: r^2 \Leftrightarrow |\lambda_1| = |\lambda_2|$, so folgt

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 = r^2 \quad \dots \text{ Kreis}$$

<u>2.Fall:</u> $s_{00}A > 0 \Leftrightarrow \lambda_i A > 0, i = 1,2$ (daher $\operatorname{sgn} \lambda_1 = \operatorname{sgn} \lambda_2$)

$$a^2 < 0,\ b^2 < 0,\ a^2 < b^2$$

$$\frac{\bar{x}_1^2}{|a^2|} + \frac{\bar{x}_2^2}{|b^2|} = -1 \quad \dots \text{ leere Ellipse}$$

$$a^2 = b^2 =: r^2 < 0$$

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 = -|r^2| \quad \dots \text{ leerer Kreis}$$

$\boxed{A_{00} < 0 \text{ hyperbolischer Fall}}$ Da λ_1 und λ_2 verschiedene Vorzeichen haben, setzen wir o.B.d.A. $\operatorname{sgn} \lambda_1 = \operatorname{sgn} A \Leftrightarrow \lambda_1 A > 0$ ($\lambda_2 A < 0$).

$$a^2 := s_1^2 = -\frac{A}{\lambda_1 A_{00}} > 0,\ -b^2 := s_2^2 = -\frac{A}{\lambda_2 A_{00}} < 0$$

$$\frac{\bar{x}_1^2}{a^2} - \frac{\bar{x}_2^2}{b^2} = 1 \quad \dots \text{ Hyperbel}$$

Da $Q(\bar{\mathfrak{r}}) = \dfrac{\bar{x}_1^2}{a^2} - \dfrac{\bar{x}_2^2}{b^2} = \left(\dfrac{\bar{x}_1}{a} + \dfrac{\bar{x}_2}{b}\right)\left(\dfrac{\bar{x}_1}{a} - \dfrac{\bar{x}_2}{b}\right) = (\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2)(\beta_1\bar{x}_1 + \beta_2\bar{x}_2)$

zerfällt und die Mittelpunktskoordinaten $\bar{m}_1 = \bar{m}_2 = 0$ verschwinden, gilt für die Asymptoten (Seite 37)

$$\alpha_1(\bar{x}_1 - \bar{\ }\ ) + \alpha_2(\bar{x}_2 - \bar{m}_2) = \alpha_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 = 0 \Rightarrow \frac{\bar{x}_1}{a} + \frac{\bar{x}_2}{b} = 0$$

$$\beta_1(\bar{x}_1 - \bar{\ }\ ) + \beta_2(\bar{x}_2 - \bar{m}_2) = \beta_1\bar{x}_1 + \beta_2\bar{x}_2 = 0 \Rightarrow \frac{\bar{x}_1}{a} - \frac{\bar{x}_2}{b} = 0$$

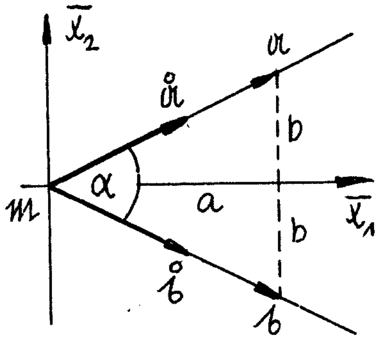
Für die Richtungsvektoren der Asymptoten und der entsprechenden Einheitsvektoren gilt

$$\mathfrak{a}(a,b) \qquad \mathring{\mathfrak{a}} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\mathfrak{b}(a,-b) \qquad \mathring{\mathfrak{b}} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Für den Winkel der <u>Asymptotenhalbgeraden</u> gilt

$$\cos\alpha = \mathring{a}.\mathring{b} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$



α spitz $\Leftrightarrow$ $\cos\alpha > 0$ $\Leftrightarrow$ $a^2 > b^2$

α orthogonal $\Leftrightarrow$ $\cos\alpha = 0$ $\Leftrightarrow$ $a^2 = b^2$

α stumpf $\Leftrightarrow$ $\cos\alpha < 0$ $\Leftrightarrow$ $a^2 < b^2$

Wegen $A_{00} < 0,\ \lambda_1 A > 0,\ \lambda_2 A < 0$ gilt

$$a^2 = -\frac{A}{\lambda_1 A_{00}} = \frac{|A|}{|\lambda_1||A_{00}|}$$

$$b^2 = \frac{A}{\lambda_2 A_{00}} = \frac{|A|}{|\lambda_2||A_{00}|}$$

Daher

$$\underline{a^2 \gtreqless b^2} \Leftrightarrow \frac{|A|}{|\lambda_1||A_{00}|} \gtreqless \frac{|A|}{|\lambda_2||A_{00}|} \Leftrightarrow \frac{1}{|\lambda_1|} \gtreqless \frac{1}{|\lambda_2|} \Leftrightarrow \underline{|\lambda_1| \lesseqgtr |\lambda_2|}$$

Für die Nullstelle μ der charakteristischen Gleichung galt unter der Voraussetzung $A_{00} < 0$.

$$\mu = \frac{1}{2}[s_{00} \pm W] \text{ mit } W = +\sqrt{s_{00}^2 - 4A_{00}} > |s_{00}|$$

$$s_{00} > 0 \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \frac{1}{2}[|s_{00}| + W] > 0 \\ \mu_2 = \frac{1}{2}[|s_{00}| - W] < 0 \\ |\mu_1| > |\mu_2| \end{array} \right\} \begin{array}{l} A > 0 \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1,\ \lambda_2 = \mu_2, |\lambda_1| > |\lambda_2| \\ A < 0 \Rightarrow \lambda_1 = \mu_2,\ \lambda_2 = \mu_1, |\lambda_1| < |\lambda_2| \end{array}$$

$$s_{00} < 0 \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \frac{1}{2}[-|s_{00}| + W] > 0 \\ \mu_2 = \frac{1}{2}[-|s_{00}| - W] < 0 \\ |\mu_1| > |\mu_2| \end{array} \right\} \begin{array}{l} A > 0 \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1,\ \lambda_2 = \mu_2, |\lambda_1| < |\lambda_2| \\ A < 0 \Rightarrow \lambda_1 = \mu_2,\ \lambda_2 = \mu_1, |\lambda_1| > |\lambda_2| \end{array}$$

$$s_{00} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \frac{1}{2}W > 0 \\ \mu_2 = -\frac{1}{2}W < 0 \\ |\mu_1| > |\mu_2| \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} A > 0 \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1,\ \lambda_2 = \mu_2 \\ A < 0 \Rightarrow \lambda_1 = \mu_2,\ \lambda_2 = \mu_1 \end{array} \right\} |\lambda_1| = |\lambda_2|$$

Hyperbel spitz $\Leftrightarrow$ $s_{00}A < 0$
Hyperbel orthogonal (gleichseitig) $\Leftrightarrow$ $s_{00} = 0$
Hyperbel stumpf $\Leftrightarrow$ $s_{00}A > 0$

Kegelschnitte ohne Mittelpunkt (Parabeln)

$$A \neq 0, \; A_{00} = 0$$

Verschwindet A_{00}, so zerfällt $Q(\mathfrak{x})$. Daher

$$K(\mathfrak{x}) = a_{00} + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 =$$

$$= a_{00} + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + \alpha_1^2 x_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 x_1 x_2 + \alpha_2^2 x_2^2 = 0 \text{ [1]}$$

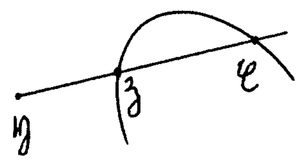
$$\|a_{ij}\| = \begin{Vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 \\ a_{02} & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \end{Vmatrix}$$

$$\|A_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha_2(\alpha_1 a_{02}-\alpha_2 a_{01}) & -\alpha_1(\alpha_1 a_{02}-\alpha_2 a_{01}) \\ \alpha_2(\alpha_1 a_{02}-\alpha_2 a_{01}) & \alpha_2^2 a_{00}-a_{02}^2 & a_{01}a_{02}-\alpha_1\alpha_2 a_{00} \\ -\alpha_1(\alpha_1 a_{02}-\alpha_2 a_{01}) & a_{01}a_{02}-\alpha_1\alpha_2 a_{00} & \alpha_1^2 a_{00}-a_{01}^2 \end{Vmatrix}$$

$$\underline{A = -(\alpha_1 a_{02}-\alpha_2 a_{01})^2, \quad s_{00} = \alpha_1^2+\alpha_2^2}$$

Analog zu den Verhältnissen bei den Asymptoten der Hyperbel, ist es naheliegend, Gerade zu betrachten, die zu $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2 = 0$ parallel sind.

Wir legen die Parallele durch den Kegelschnittspunkt $\mathfrak{z}$ ($K(\mathfrak{z}) = 0$). $\mathfrak{y}$ sei der laufende Punkt. Die Gleichung der Parallelen durch $\mathfrak{z}(z_1, z_2)$ lautet dann



$\alpha_1(y_1-z_1) + \alpha_2(y_2-z_2) = 0 \Rightarrow \underline{\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2 = \alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2}$

Daher gilt

$$\underline{Q(\mathfrak{y})} = (\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)^2 = (\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2)^2 = \underline{Q(\mathfrak{z})}$$

$$B(\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = (\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)(\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2) = (\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)^2 = (\alpha_1 z_1+\alpha\; z_2)^2 \Rightarrow$$

$$\underline{B(\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = Q(\mathfrak{y}) = Q(\mathfrak{z})}$$

Für den Schnittpunkt der Geraden

$$\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{z}, \qquad \lambda + \mu = 1$$

mit $K(\mathfrak{x}) = 0$ gilt nach Seite 26

$$\mu[L(\mathfrak{y}) + L(\mathfrak{z}) + \underbrace{2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z})}_{Q(\mathfrak{y})+Q(\mathfrak{z})}] + \lambda K(\mathfrak{y}) = 0, \; \lambda + \mu = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu[K(\mathfrak{y})\underbrace{+K(\mathfrak{z})}_{0}]+\lambda K(\mathfrak{y}) = 0 \Rightarrow \underbrace{(\lambda+\mu)}_{1}K(\mathfrak{y}) = 0 \Rightarrow \bigwedge_{\mathfrak{y}} \underline{K(\mathfrak{y}) = 0 \text{ Widerspruch!}}$$

---

1 Hat das vollständige Quadrat $Q(\mathfrak{x})$ ein negatives Vorzeichen, so ist es zweckmäßig, $K(\mathfrak{x})$ mit -1 zu multiplizieren.

Da nicht alle $\mathfrak{y}$ auf dem nicht zerfallenden Kegelschnitt liegen können, ergibt sich ein Widerspruch: <u>Der Schnittpunkt $\mathfrak{x}$ existiert nicht.</u>

<u>Umgekehrt gilt:</u> Hat eine - von der Tangente verschiedene - Gerade durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{z}$ eines Kegelschnittes ohne Mittelpunkt außer $\mathfrak{z}$ keinen weiteren Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt gemeinsam, so ist sie zur Geraden $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ parallel.

Sei $\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{y}+\mu\mathfrak{z}$, $\lambda+\mu=1$, $K(\mathfrak{z}) = 0$. Dann gilt wieder

$$\begin{array}{rcl|c|c}
\mu[L(\mathfrak{y})+L(\mathfrak{z})+2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z})]+\lambda K(\mathfrak{y}) & = & 0 & 1 & -1 \\
\mu \qquad\qquad + \lambda & = & 1 & -K(\mathfrak{y}) & [L(\mathfrak{y})+L(\mathfrak{z})+2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z})] \\
\hline
\end{array}$$

$$\mu[L(\mathfrak{y})-K(\mathfrak{y})+L(\mathfrak{z})+2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z})] = -K(\mathfrak{y})$$

$$\lambda[L(\mathfrak{y})-K(\mathfrak{y})+L(\mathfrak{z})+2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z})] = [L(\mathfrak{y})+L(\mathfrak{z})+2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z})]$$

λ und μ lassen sich aus diesem System genau dann nicht berechnen, wenn

$$[L(\mathfrak{y})-K(\mathfrak{y})+L(\mathfrak{z})+2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z})] = [-Q(\mathfrak{y})+L(\mathfrak{z})+2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z})] = 0$$

ist, d.h. wenn gilt

$$\underline{Q(\mathfrak{y}) = L(\mathfrak{z}) + 2B(\mathfrak{y},\mathfrak{z})}$$

In Koordinatenschreibweise

$$(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)^2 = L(\mathfrak{z}) +2(\alpha_1 y_1+a_2 y_2)(\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2)$$

Aus der quadratischen Gleichung

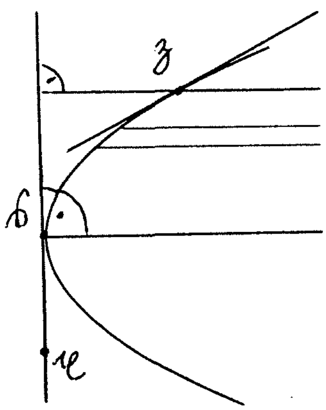
$$(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)^2 - 2(\alpha_1 y_1+a_2 y_2)(\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2) - L(\mathfrak{z}) = 0$$

folgt

$$(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2) = (\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2)\pm\sqrt{\underbrace{(\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2)^2+L(\mathfrak{z})}_{Q(\mathfrak{z})}} = (\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2)\pm\sqrt{\underbrace{K(\mathfrak{z})}_{0}}$$

also

$$(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2) = (\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2) \Rightarrow \underline{\alpha_1(y_1-z_1) + \alpha_2(y_2-z_2) = 0}$$



Eine Gerade dieser Art nennt man *Durchmesser der Parabel*.

Wir suchen jenen Punkt $\mathfrak{s}$, den *Scheitel der Parabel*, dessen Tangente auf den Durchmesser normal steht. Diese Tangente heißt *Scheiteltangente*. Die Tangente in $\mathfrak{s}(s_1,s_2)$ hat mit $\mathfrak{x}(x_1,x_2)$ als laufendem Punkt die Gleichung

$$L(\mathfrak{s}) + L(\mathfrak{x}) + 2B(\mathfrak{s},\mathfrak{x}) = 0$$

bzw. gekürzt durch 2

$$(a_{00}+a_{01}s_1+a_{02}s_2)+[a_{01}+\alpha_1(\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2)]x_1+[a_{02}+\alpha_2(\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2)]x_2 = 0$$

Diese Gerade soll auf die Gerade $\alpha_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ normal sein, d.h. es muß gelten

$$\alpha_1[a_{01}+\alpha_1(\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2)] + \alpha_2[a_{02}+\alpha_2(\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2)] = 0 \Rightarrow$$

$$(\alpha_1 a_{01}+\alpha_2 a_{02})+(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2) = 0 \qquad (*)$$

Außerdem gilt

$$K(s) = 0 = a_{00} + 2a_{01}s_1 + 2a_{02}s_2 + (\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2)^2 \qquad (**)$$

Berechnet man $(\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2)$ aus (*) und setzt in (**) ein, und beachtet, daß $\alpha_1^2+\alpha_2^2 = s_{00}$ ist, so folgt

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2 &= -\frac{\alpha_1 a_{01}+\alpha_2 a_{02}}{s_{00}} =: C_1 \\ 2a_{01}s_1 + 2a_{02}s_2 &= -a_{00} - \frac{(\alpha_1 a_{01}+\alpha_2 a_{02})^2}{s_{00}^2} =: C_2 \end{aligned}} \qquad (***)$$

Aus (***) lassen sich die Koordinaten s_1, s_2 des Parabelscheitels s berechnen. Das System ist nur lösbar, wenn $\alpha_1 a_{02} - \alpha_2 a_{01} \neq 0$ ist. Diese Bedingung ist aber äquivalent zu $A \neq 0$ (Seite 50).

Die erste der obigen Beziehungen liefert auch die Gleichung der

Achse der Parabel

$$\boxed{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2 + \frac{\alpha_1 a_{01}+\alpha_2 a_{02}}{s_{00}} = 0}$$

Da die Scheiteltangente zur Achsenrichtung normal ist, muß sie die Gestalt

$$-\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2 = C$$

haben. Da auf der Scheiteltangente auch der Punkt s liegt, muß ihre Gleichung eine Linearkombination der Gleichungen (***) sein:

$$\begin{array}{rcl|l} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 &=& C_1 & \lambda \\ 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 &=& C_2 & \mu \\ \hline (\lambda\alpha_1+2a_{01}\mu)x_1 + (\lambda\alpha_2+2a_{02}\mu)x_2 &=& \lambda C_1 + \mu C_2 & \end{array}$$

Die Faktoren λ und μ sind so zu wählen, daß gilt

$$\begin{array}{rcl|c|c} \lambda\alpha_1 + 2a_{01}\mu &=& -\alpha_2 & a_{02} & -\alpha_2 \\ \lambda\alpha_2 + 2a_{02}\mu &=& \alpha_1 & -a_{01} & \alpha_1 \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda(\alpha_1 a_{02} - \alpha_2 a_{01}) &= -(\alpha_1 a_{01} + \alpha_2 a_{02})\\ 2\mu(\alpha_1 a_{02} - \alpha_2 a_{01}) &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = s_{00}\end{aligned}\right\}\ \text{lösbar, wenn } A = -(\alpha_1 a_{02} - \alpha_2 a_{01})^2 \neq 0$$

$$\lambda = -\frac{\alpha_1 a_{01} + \alpha_2 a_{02}}{\alpha_1 a_{02} - \alpha_2 a_{01}}, \qquad \mu = \frac{s_{00}}{2(\alpha_1 a_{02} - \alpha_2 a_{01})}$$

Daher

$$\lambda C_1 + \mu C_2 = \frac{\alpha_1 a_{01}+\alpha_2 a_{02}}{\alpha_1 a_{02}-\alpha_2 a_{01}} \cdot \frac{\alpha_1 a_{02}-\alpha_2 a_{01}}{s_{00}} - a_{00} \cdot \frac{s_{00}}{2(\alpha_1 a_{02} - \alpha_2 a_{01})} -$$

$$- \frac{s_{00}}{2(\alpha_1 a_{02}-\alpha_2 a_{01})} \cdot \frac{(\alpha_1 a_{01}+\alpha_2 a_{02})^2}{s_{00}^2} = \underline{\frac{(\alpha_1 a_{01} + \alpha_2 a_{02})^2 - a_{00} s_{00}^2}{2 s_{00}(\alpha_1 a_{02} - \alpha_2 a_{01})} = C}$$

Gleichung der Scheiteltangente

$$\boxed{-\alpha_2 x_1 + \alpha_2 x_2 = \frac{(\alpha_1 a_{01} + \alpha_2 a_{02})^2 - a_{00} s_{00}^2}{2 s_{00}(\alpha_1 a_{02} - \alpha_2 a_{01})}}$$

An Stelle der erst zu berechnendn Größen α_1 und α_2 sollen die ursprünglichen Koeffizienten der Kegelschnittsgleichung eingeführt werden. Es ist $\alpha_1 = \rho a_{11}$, $\alpha_2 = \rho a_{12}$, $\rho^2 a_{11} = 1$, bzw. symmetrisch $\alpha_2 = \rho a_{22}$, $\alpha_1 = \rho a_{12}$, $\rho^2 a_{22} = 1$. Dann ergibt sich aus (***):

$$a_{11}s_1 + a_{12}s_2 = -\frac{a_{01}a_{11}+a_{02}a_{12}}{s_{00}}$$

$$2a_{01}s_1 + 2a_{02}s_2 = -a_{00} - \frac{(a_{01}a_{11}+a_{02}a_{12})^2}{a_{11}s_{00}^2}$$

oder

$$a_{22}s_2 + a_{12}s_1 = -\frac{a_{02}a_{22}+a_{01}a_{12}}{s_{00}}$$

$$2a_{02}s_2 + 2a_{01}s_1 = -a_{00} - \frac{(a_{02}a_{22}+a_{01}a_{12})^2}{a_{22}s_{00}^2}$$

Bestimmungsgleichungen für die Koordinaten des Scheitels

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \frac{a_{01}a_{11}+a_{02}a_{12}}{s_{00}} = 0$$

oder

$$a_{22}x_2 + a_{12}x_1 + \frac{a_{02}a_{22}+a_{01}a_{12}}{s_{00}} = 0$$

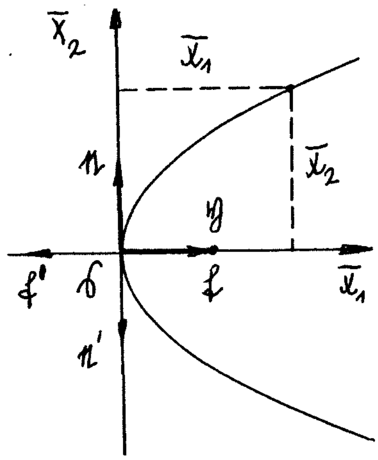
Achsengleichung

$$\boxed{\begin{array}{ll} -a_{12}x_1+a_{11}x_2 + \dfrac{(a_{01}a_{11}+a_{02}a_{12})^2 - a_{00}a_{11}s_{00}^2}{2A_{02}s_{00}} = 0 & \\ \text{oder} & \text{Gleichung der Scheiteltangente} \\ -a_{12}x_1+a_{22}x_1 + \dfrac{(a_{02}a_{22}+a_{01}a_{12})^2 - a_{00}a_{22}s_{00}^2}{2A_{01}s_{00}} = 0 & \end{array}}$$

Es ist naheliegend, die Parabelachse und die Scheiteltangente als neue $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ - Koordinatenachsen zu wählen. Es sei

$e_1(x_1-s_1)+e_2(x_2-s_2) = 0$ Parabelachse
(neue $\bar{x}_1$ - Achse)

$f_1(x_1-s_1)+f_2(x_2-s_2) = 0$ Scheiteltangente
(neue $\bar{x}_2$ - Achse)



Wir haben also die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ so zu orientieren, daß sie ein Linkssystem bilden und $\mathfrak{f}$ in das Inner der Parabel weist.

1. Die Normalenvektoren
   $(\sigma\alpha_1, \sigma\alpha_2)$, $(-\sigma\alpha_2, \sigma\alpha_1)$. $\sigma^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2) = \sigma^2 s_{00} = 1$, $\sigma > 0$
   bilden ein orthonormiertes Paar von Einheitsvektoren. Zum Zwecke der Orientierung multiplizieren wir diese Vektoren mit $\gamma = \pm 1$, $\delta = \pm 1$:
   $$\mathfrak{e} = (e_1, e_2) = (\gamma\sigma\alpha_1, \gamma\sigma\alpha_2),\quad \mathfrak{f} = (f_1, f_2) = (-\delta\sigma\alpha_2, \delta\sigma\alpha_1)$$
2. Damit diese Vektoren ein Linkssystem bilden, muß gelten
   $$e_1f_2 - e_2f_1 = (\sigma\gamma\alpha_1)(\sigma\delta\alpha_1) - (\sigma\gamma\alpha_2)(-\sigma\delta\alpha_2) = \sigma^2\gamma\delta(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) < 0$$
   Da σ^2 und $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$ beide positiv sind, muß gelten
   $$\gamma\delta < 0 \Rightarrow \underline{\gamma\delta} = -1$$
3. Soll $\mathfrak{f}$ ins Innere der Parabel weisen, so muß der Punkt $\mathfrak{y} = \mathfrak{s} + \mathfrak{f}$ im Inneren der Parabel liegen. Daher muß gelten $A.K(\mathfrak{y}) > 0$.

$$K(\mathfrak{y}) = K(\mathfrak{s}+\mathfrak{f}) = [1-(1+1)]a_{00} + L(\mathfrak{s}) + L(\mathfrak{f}) + Q(\mathfrak{s}) + Q(\mathfrak{f}) + 2B(\mathfrak{s},\mathfrak{f}) =$$
$$= - a_{00} + L(\mathfrak{f}) + \underbrace{K(\mathfrak{s})}_{0} + 2B(\mathfrak{s},\mathfrak{f}) + Q(\mathfrak{f}) =$$
$$= -a_{00}+(a_{00}+2a_{01}f_1+2a_{02}f_2)+2(\alpha_1s_1+\alpha_2s_2)\underbrace{(\alpha_1f_1+\alpha_2f_2)+(\alpha_1f_1+\alpha_2f_2)^2}_{\text{Skalarprod.orth.Vektoren} = 0} =$$
$$= 2(a_{01}f_1 + a_{02}f_2) = 2(a_{01}(-\delta\sigma\alpha_2) + a_{02}(\delta\sigma\alpha_1)) = 2\delta\sigma(\alpha_1a_{02}-\alpha_2a_{01})$$

Wegen $A = -(\alpha_1 a_{02} - \alpha_2 a_{01})^2$ folgt

$$A.K(\mathfrak{y}) = -2\delta\sigma(\alpha_1 a_{02} - \alpha_2 a_{01})^3 > 0$$

Da $\sigma > 0$ ist, ergibt sich die Bedingung

$$\underline{\delta(\alpha_1 a_{02} - \alpha_2 a_{01}) < 0} \qquad (\&)$$

Nach HESSE ergibt sich daher für die neuen Koordinaten $\bar{x}_1, \bar{x}_2$

$$\begin{array}{l|c|c}
\bar{x}_1 = f_1(x_1-s_1)+f_2(x_2-s_2) = \sigma\delta[-\alpha_2(x_1-s_1)+\alpha_1(x_2-s_2)] & -\alpha_2\sigma\gamma & \alpha_1\sigma\gamma \\
\bar{x}_2 = e_1(x_1-s_2)+e_2(x_2-s_2) = \sigma\gamma[\ \alpha_1(x_1-s_1)+\alpha_2(x_2-s_2)] & \alpha_1\sigma\delta & \alpha_2\sigma\delta \\
\hline
\end{array} \quad (\#)$$

$$-\sigma[\gamma\alpha_2\bar{x}_1 - \delta\alpha_1\bar{x}_2] = \gamma\delta.\sigma^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(x_1-s_1)$$

$$\sigma[\gamma\alpha_1\bar{x}_1 + \delta\alpha_2\bar{x}_2] = \underbrace{\gamma\delta}_{-1}.\underbrace{\sigma^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}_{1}(x_2-s_2)$$

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x_1 - s_1 &= \sigma[\gamma\alpha_2\bar{x}_1 - \delta\alpha_1\bar{x}_2] \\ x_2 - s_2 &= -\sigma[\gamma\alpha_1\bar{x}_1 + \delta\alpha_2\bar{x}_2] \end{aligned}\right\}\ \mathfrak{x} - \mathfrak{s}} \qquad (\dagger)$$

$$K(\mathfrak{x}-\mathfrak{s}) = [1-(1-1)]a_{00} + L(\mathfrak{x}) - L(\mathfrak{s}) + Q(\mathfrak{x}) + Q(\mathfrak{s}) - 2B(\mathfrak{x},\mathfrak{s}) =$$

$$= a_{00} + K(\mathfrak{x}) - L(\mathfrak{s}) + (-Q(\mathfrak{s}) + \underbrace{2Q(\mathfrak{s})}_{2B(\mathfrak{s},\mathfrak{s})}) - 2B(\mathfrak{x},\mathfrak{s}) =$$

$$= a_{00}+K(\mathfrak{x})\underbrace{-K(\mathfrak{s})}_{0}+2B(\mathfrak{s},\mathfrak{s})-2B(\mathfrak{x},\mathfrak{s}) = a_{00}+K(\mathfrak{x})-2B(\mathfrak{x}-\mathfrak{s},\mathfrak{s}) = K(\mathfrak{x}-\mathfrak{s})$$

Daraus

$$\underline{K(\mathfrak{x}) = -a_{00} + K(\mathfrak{x}-\mathfrak{s}) + 2B(\mathfrak{x}-\mathfrak{s},\mathfrak{s}) = 0}$$

Für die rechte Seite ergibt sich unter mehrfacher Verwendung von $(\dagger)$ und $(\#)$, sowie von (***) auf Seite 52

$$-a_{00}+K(\mathfrak{x}-\mathfrak{s})+2B(\mathfrak{x}-\mathfrak{s},\mathfrak{s}) = -a_{00} + L(\mathfrak{x}-\mathfrak{s}) + Q(\mathfrak{x}-\mathfrak{s}) + 2B(\mathfrak{x}-\mathfrak{s},\mathfrak{s}) =$$

$$= -a_{00} + (a_{00}+2a_{01}(x_1-s_1)+2a_{02}(x_2-s_2)) + [\alpha_1(x_1-s_1)+\alpha_2(x_2-s_2)]^2 +$$

$$+ 2[\alpha_1(x_1-s_1)+\alpha_2(x_2-s_2)](\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2) = 2a_{01}\sigma[\gamma\alpha_2\bar{x}_1-\delta\alpha_1\bar{x}_2] -$$

$$- 2a_{02}\sigma[\gamma\alpha_1\bar{x}_1+\delta\alpha_2\bar{x}_2]+\left[\frac{\bar{x}_2}{\sigma\gamma}\right]^2+2\frac{\bar{x}_2}{\sigma\gamma}\left(-\frac{\alpha_1 a_{01}+\alpha_2 a_{02}}{s_{00}}\right) =$$

$$=2\sigma\gamma\bar{x}_1(a_{01}\alpha_2-a_{02}\alpha_1)+2\sigma\bar{x}_2\underbrace{\left[-\delta a_{01}\alpha_1-\delta a_{02}\alpha_2-\underbrace{\frac{1}{\gamma}}_{-\delta}\underbrace{\frac{1}{\sigma^2}\frac{\alpha_1 a_{01}+\alpha_2 a_{02}}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}}_{1}\right]}_{0!}+\frac{\bar{x}_2^2}{\sigma^2\underbrace{\gamma^2}_{1}}$$

Es verbleibt also (man beachte $\gamma\delta = -1$ und $(\&)$)

$$K(\mathfrak{x}) = -2\sigma\bar{x}_1 \underbrace{\gamma(\alpha_1 a_{02} - \alpha_2 a_{01})}_{>0} + \frac{\bar{x}_2^{\,2}}{\sigma^2}$$

Daher

$$\bar{x}_2^2 = 2\sigma^3\gamma(\alpha_1 a_{02} - \alpha_2 a_{01})\bar{x}_1$$

Beachtet man noch die Beziehungen $\sigma^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2) = \sigma^2 s_{00} = 1 \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{s_{00}}}$

ferner $A = -(\alpha_1 a_{02}-\alpha_2 a_{01})^2 \Rightarrow {}^{+}\sqrt{-A} = \gamma(\alpha_1 a_{02}-\alpha_2 a_{01}) > 0$

somit

$$\bar{x}_2^2 = 2\sigma^3\gamma(\alpha_1 a_{02} - \alpha_2 a_{01})\bar{x}_1 = 2 . \frac{1}{\sqrt{s_{00}^3}} . {}^{+}\sqrt{-A} . \bar{x}_1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Normalform der Parabelgleichung} \\ \bar{x}_2^2 = 2\left(\sqrt{\dfrac{-A}{s_{00}^3}}\right) . \bar{x}_1 = 2p . \bar{x}_1 \\ p := \sqrt{\dfrac{-A}{s_{00}^3}} > 0 \quad \text{Parameter der Parabel} \end{array}}$$

Normalformen der Gleichungen zerfallender Kegelschnitte

$A = 0$

<u>Mittelpunktskegelschnitte</u> $A_{00} \neq 0$. Bei $A \neq 0$ galt (Seite 47)

$$\frac{A}{A_{00}} + \lambda_1\bar{x}_1^2 + \lambda_2\bar{x}_2^2 = 0$$

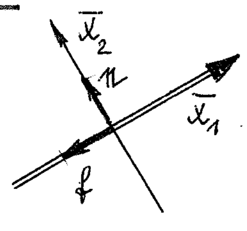
Für $A = 0$ gilt dann

<u>$A_{00} > 0$</u> elliptischer Fall. Wegen $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2$ ergibt sich

$$\underline{|\lambda_1|\bar{x}_1^2 + |\lambda_2|\bar{x}_2^2 = 0 \; \ldots \text{ Punkt}}$$

<u>$A_{00} < 0$</u> hyperbolischer Fall. Da λ_1 und λ_2 verschiedenes Vorzeichen haben, ergibt sich

$$\underline{|\lambda_1|\bar{x}_1^2 - |\lambda_2|\bar{x}_2^2 = 0 \; \ldots \text{ schneidende Gerade}}$$



<u>Kegelschnitte</u> <u>ohne</u> <u>Mittelpunkt</u> $A_{00} = 0$

<u>$S_{00} = 0$</u> Doppelgerade $[\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2]^2 = 0$

Naheliegenderweise wählen wir

$e(e_1,e_2) := e\left(\dfrac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}, \dfrac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}} \right)$, ferner sei $\alpha := \dfrac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}$

Dann kann man setzen

$\alpha + e_1x_1 + e_2x_2 = \bar{x}_2$

$\beta - e_2x_2 + e_1x_2 = \bar{x}_1$ $\quad\beta$ beliebig

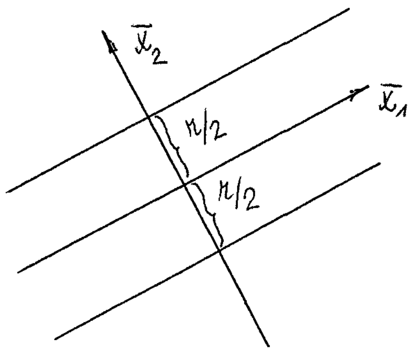
daher

$$\underline{\bar{x}_2^2 = 0 \text{ ... Doppelgerade}}$$

$\underline{S_{00} < 0}$ $\quad$ Parallelenpaar $\quad [\alpha_0+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2][\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2] = 0$

$\alpha_1 = \rho a_{11}, \ \beta_1 = \sigma a_{11}$

$\alpha_2 = \rho a_{12}, \ \beta_2 = \sigma a_{12}$ $\qquad \rho\sigma = 1$



$\sigma a_0, \ \rho\beta_0$ sind Nullstellen der Gleichung

$a_{11}x^2 - 2a_{01}x + a_{00} = 0$

Es ist naheliegend, die $\bar{x}_1$- Achse in die Mittellinie der parallelen Geraden zu legen (Seite 11).

$$\begin{array}{l|l} \alpha_0 + \rho a_{11}x_1 + \rho a_{12}x_2 = 0 & \sigma \text{ ... 1.Gerade} \\ \beta_0 + \sigma a_{11}x_1 + \sigma a_{12}x_2 = 0 & \rho \text{ ... 2.Gerade} \end{array} \qquad (\$)$$

$$\underbrace{(\sigma\alpha_0 + \rho\beta_0)}_{\frac{2a_{01}}{a_{11}}} + 2\rho\sigma a_{11}x_1 + 2\rho\sigma a_{12} = 0 \text{ ... Mittellinie}$$

daher, gekürzt durch 2 und erweitert mit a_{11} und wegen $\rho\sigma a_{11} = 1$

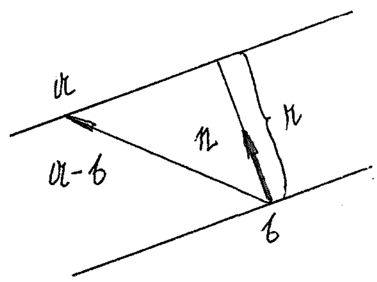
$$\left.\begin{array}{l} a_{01} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ \text{oder aus Symmetriegründen} \\ a_{02} + a_{22}x_2 + a_{12}x_1 = 0 \end{array}\right\} \text{ Mittellinie}$$

Setzen wir $e(e_1,e_2) = e\left(\dfrac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}}, \dfrac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}} \right)$, $a := \dfrac{a_{01}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}}$

(oder symmetrisch in den Indizes 1,2), so kann man setzen

$a + e_1x_1 + e_2x_2 = \bar{x}_2$

$b - e_2x_1 + e_1x_2 = \bar{x}_1$ $\qquad$ b beliebig



Dann gilt $\bar{x}_2^2 = \dfrac{r^2}{4}$. Wir haben also noch den Abstand der beiden Parallelen zu bestimmen. Wählen wir auf jeder Geraden einen beliebigen

Punkt α bzw. b, so gilt

$$r = |(\alpha-b)e|$$

Wählen wir z.B. entsprechend ($) die Punkte

$\alpha\left(-\frac{\alpha_0}{\rho a_{11}},0\right)$, $b\left(-\frac{\beta_0}{\sigma a_{11}},0\right)$ und $e\left(\frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}}, \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}}\right)$, so folgt

$$r = |(\alpha-b)e| = \left| \frac{(\rho\beta_0-\sigma\alpha_0)}{\underbrace{\rho\sigma\alpha_{11}}_{1}} \cdot \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}} \right| \Rightarrow \underline{r^2 = \frac{a_{11}^2(\rho\beta_0-\sigma\alpha_0)^2}{a_{11}^2+a_{12}^2}}$$

Es gilt

$$A_{00} = a_{11}a_{22}-a_{12}^2 = 0 \Rightarrow a_{12}^2 = a_{11}a_{22} \Rightarrow \underline{a_{11}^2+a_{12}^2} = a_{11}(a_{22}+a_{11}) = \underline{a_{11}s_{00}}$$

Demnach

$$r^2 = \frac{a_{11}(\rho\beta_0-\sigma\alpha_0)^2}{s_{00}}$$

Nun gilt nach VIETA

$$\rho\beta_0 + \sigma\alpha_0 = \frac{2a_{01}}{a_{11}}$$

$$\rho\sigma\alpha_0\beta_o = \frac{a_{00}}{a_{11}}$$

$$(\rho\beta_0+\sigma\alpha_0)^2 - 4(\rho\sigma\alpha_0\beta_0) = (\rho\beta_0-\sigma\alpha_0)^2 = 4\left[\frac{a_{01}^2 - a_{00}a_{11}}{a_{11}^2}\right] = -\frac{4A_{22}}{a_{11}^2}$$

$$r^2 = -\frac{4A_{22}}{a_{11}^2}\cdot\frac{a_{11}}{s_{00}} = -\frac{4A_{22}}{a_{11}s_{00}} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{11}s_{00}r^2 = -4A_{22} \text{ bzw.symm.} \\ \underline{a_{22}s_{00}r^2 = -4A_{11}} \end{array}\right\} +$$

$$(a_{11}+a_{22})s_{00}r^2 = s_{00}^2r^2 = -4(A_{11}+A_{22}) = -4S_{00}$$

Daraus ergibt sich die symmetrische Darstellung

$$r^2 = -\frac{4S_{00}}{s_{00}^2}$$

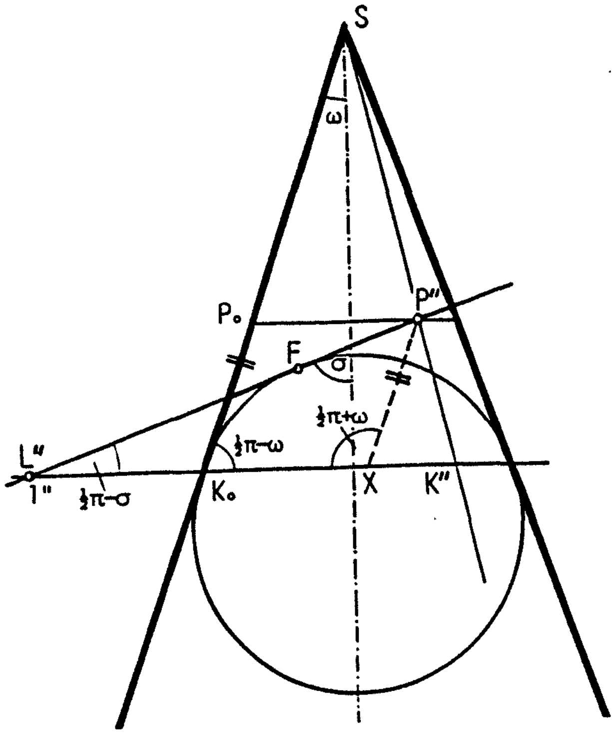
woraus die Normalform der Gleichung folgt

$$\bar{x}_2^2 = -\frac{S_{00}}{s_{00}^2} = \frac{|S_{00}|}{s_{00}^2} \quad \text{Parallelenpaar}$$

$S_{00} > 0$ leeres Parallelenpaar

$$\bar{x}_2^{\,2} = -\frac{|S_{00}|}{s_{00}^2}$$

Ebene Schnitte von Drehkegeln



Die Ellipse $\sigma > \omega$, $(\sigma \neq \frac{\pi}{2})$

$PF = PK = P_0K_0 = P''X$

$Pl = PL = P''L''$

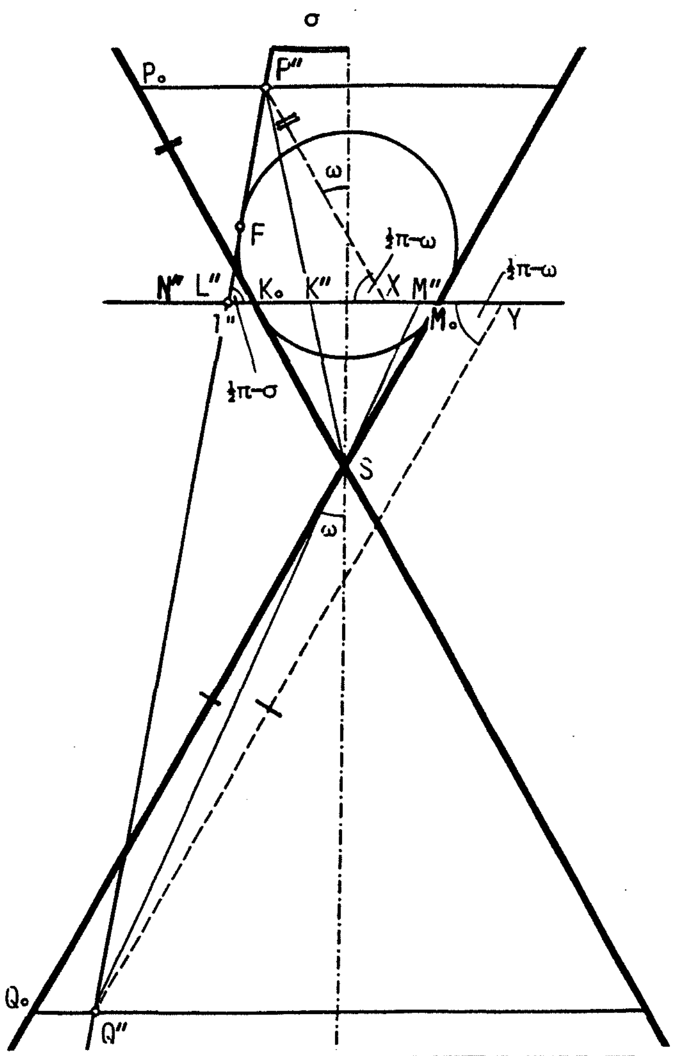
$\Delta\ L''XP''$ ... Sinussatz $\Rightarrow$

$$\frac{P''X}{P''L''} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\sigma)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\omega)} = \frac{\cos\sigma}{\cos\omega} =: \varepsilon$$

$\sigma > \omega \Rightarrow \cos\sigma < \cos\omega \Rightarrow \varepsilon < 1$

$$\boxed{\frac{PF}{Pl} = \frac{\cos\sigma}{\cos\omega} = \varepsilon < 1} \quad 0 < \epsilon$$

l...Leitlinie, F Brennpunkt, ε numerische Exzentrizität



Die Hyperbel $\sigma < \omega$

$PF = PK = P_0K_0 = P''X$

$Pl = PL = P''L''$

$\Delta\ L''XP''$ ... Sinussatz $\Rightarrow$

$$\frac{P''X}{P''L''} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\sigma)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\omega)} = \frac{\cos\sigma}{\cos\omega} = \varepsilon$$

$QF = QM = Q_0M_0 = Q''Y$

$Ql = QN = Q''N''$

$\Delta\ N''YQ''$ ... Sinussatz $\Rightarrow$

$$\frac{Q''Y}{Q''N''} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\sigma)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\omega)} = \frac{\cos\sigma}{\cos\omega} = \varepsilon$$

$\sigma < \omega \Rightarrow \cos\sigma > \omega \Rightarrow \varepsilon > 1$

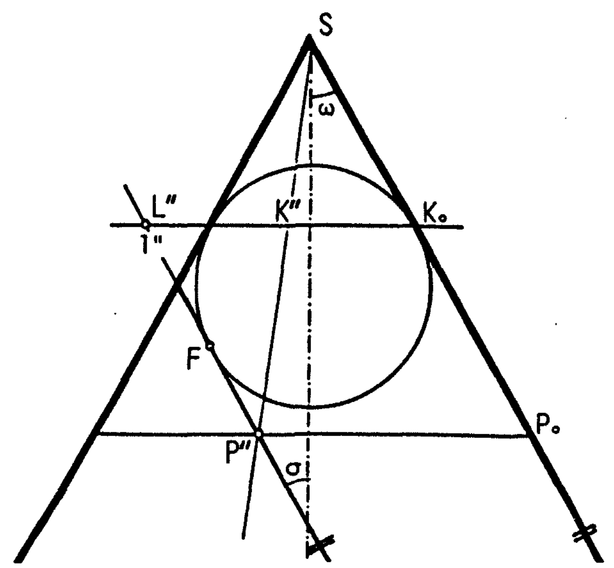
$$\boxed{\frac{PF}{Pl} = \frac{\cos\sigma}{\cos\omega} = \varepsilon > 1}$$

Die Parabel $\sigma = \omega$

$PF = PK = P_0K_0$

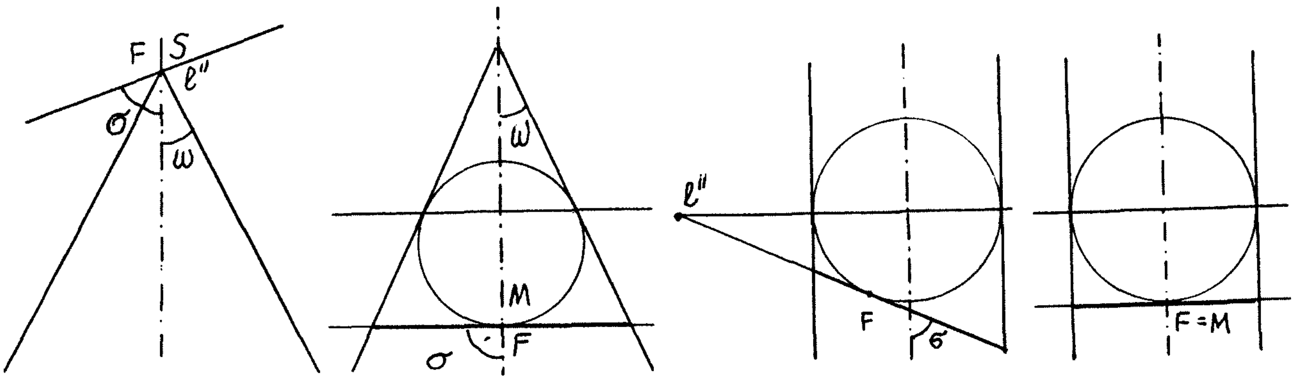
$Pl = PL = P''L'' = P_0K_0$

$$\boxed{\frac{PF}{PL} = \frac{P_0K_0}{P_0K_0} = 1 = \varepsilon}$$



Sonderfälle

$\sigma > \omega \Leftrightarrow \dfrac{\cos\sigma}{\cos\omega} = \varepsilon < 1$ elliptischer Fall



F auf l, $\varepsilon<1$ Kegelschnitt ist ein Punkt

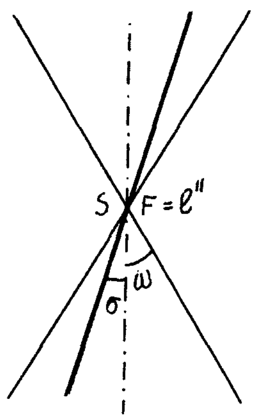
$\sigma = \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon=0$, F=M l existiert nicht Kegelschnitt ist ein Kreis

$\omega = 0$, $\varepsilon < 1$ Kegelschnitt ist eine Ellipse

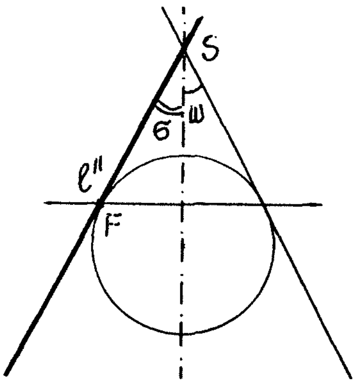
$\omega=0$, $\sigma = \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon=0$ l existiert nicht F=M, Kegelschnitt ist ein Kreis

$\sigma < \omega \Leftrightarrow \dfrac{\cos\sigma}{\cos\omega} = \varepsilon > 1$ hyperbolischer Fall

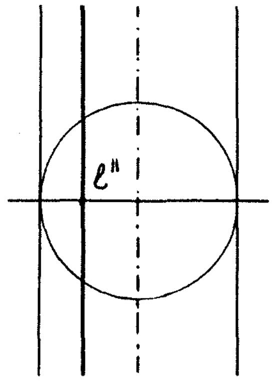
F auf l. Der Kegelschnitt zerfällt in ein Paar schneidender Geraden



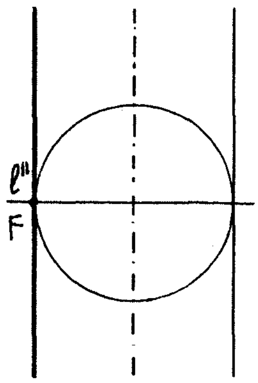
$\sigma = \omega,\ \varepsilon = 1$ parabolischer Fall



f auf l, $\varepsilon = 1$
Doppelgerade



$\sigma = \omega = 0,\ \varepsilon = 1$
F existiert nicht
Parallelenpaar



$\sigma = \omega = 0,\ \varepsilon = 1$
F auf l
Doppelgerade

Man nennt Schnitte von Drehkegeln *fokal erzeugbar*, wenn F und l existieren. Andernfalls heißen sie *fokal nicht erzeugbar*.

Fokal erzeugbare Kegelschnitte:

Ellipse. Hyperbel, Parabel

Punkt, schneidendes Geradenpaar, Doppelgerade

Fokal nicht erzeugbare Kegelschnitte:

Kreis; Parallelenpaar

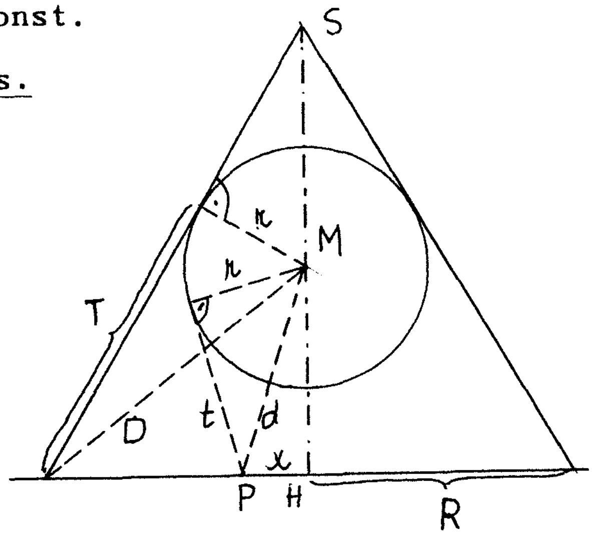
Bei fokal erzeugbaren Kegelschnitten heißen die Geraden PF *Fokalstrahlen*, die Geraden durch P $\perp$ l *Leitliniennormalen*.

Wir zeigen nun die Umkehrung:

Die Menge der Punkte einer Ebene, für welche gilt

$$\frac{PF}{Pl} = \varepsilon = \text{const.}$$

ist der ebene Schnitt eines Drehkegels.



Planimetrische Vorbemerkung:

Bewegt sich der Punkt P von H weg, so vergrößert sich sein Abstand d vom Kreismittelpunkt M (PYTHAGORAS). Speziell gilt:

$$x < R \Rightarrow d < D$$
$$x > R \Rightarrow d > D$$

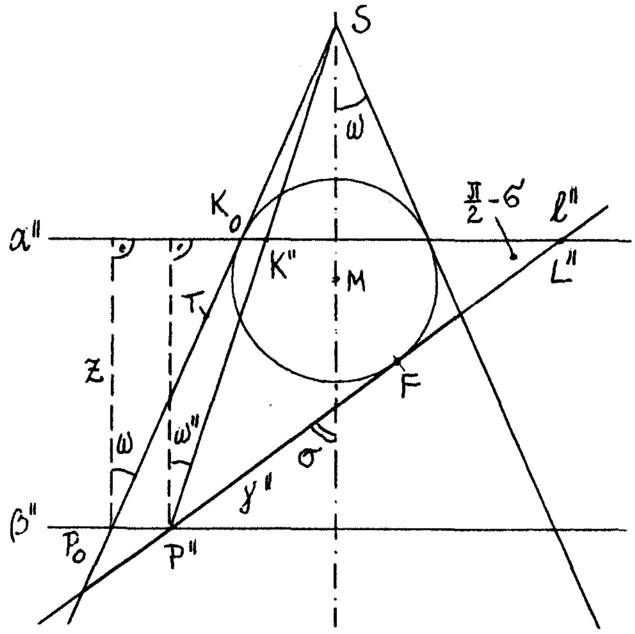
Nun gilt

$d<D \Rightarrow d^2<D^2 \Rightarrow t^2+r^2 < T^2+r^2 \Rightarrow t^2 < T^2$

Die Potenz der Punktes P bezüglich des Kreises wächst mit dem Abstand des Punktes P von H.

$$\boxed{x \lesseqgtr R \Rightarrow t \lesseqgtr T}$$

Wir lassen die planimetrische Figur rotieren und betrachten den Kegel mit der eingeschriebenen Kugel. Für alle Punkte der Ebene β ist der Abstand zur Ebene α gleich z. Ist P auf dem Kegel und ist T = PK die Tangentenstrecke an die Kugel, so gilt



$$\frac{T}{z} = \frac{1}{\cos\omega}$$

Daher gilt für die Punkte der Ebene β für die Tangentenstrecke t an die Kugel

$$\left.\begin{array}{ll} \text{P im Innern des Kegels} & t < T \\ \text{P auf dem Kegel} & t = T \\ \text{P im Äußern des Kegels} & t > T \end{array}\right\} \quad \frac{t}{z} \left\{\begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array}\right\} \frac{1}{\cos\omega}$$

Ist P ein Punkt der Ebene γ, so gilt stets

$$\frac{z}{Pl} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\sigma\right) = \cos\sigma \Rightarrow z = \underline{Pl.\cos\sigma}$$

daher

$$\frac{t}{z} = \frac{t}{Pl.\cos\sigma} \lesseqgtr \frac{1}{\cos\omega}$$

Daraus folgt

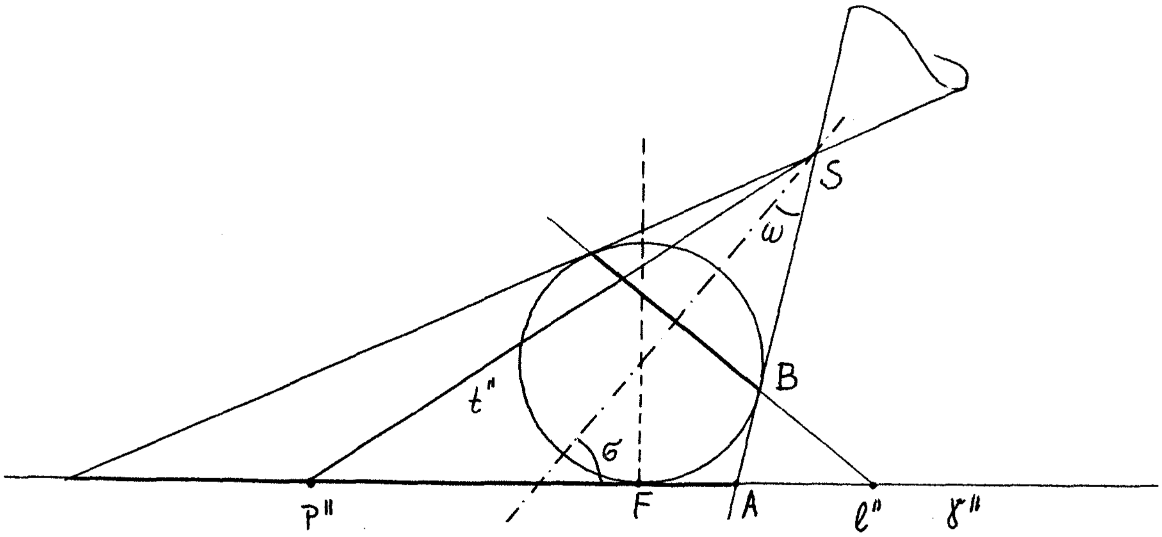
$$\boxed{\frac{t}{Pl} \lesseqgtr \frac{\cos\sigma}{\cos\omega} \text{ je nachdem P } \left\{\begin{array}{l} \text{im Innern des Kegelschnittes} \\ \text{auf dem Kegelschnitt} \\ \text{im Äußern des Kegelschnittes} \end{array}\right\} \text{ liegt}}$$

In der Ebene γ sei eine Kurve C durch die Eigenschaft $\frac{PF}{Pl} = \varepsilon$ gegeben. Ist diese Kurve ein Kegelschnitt?

Wir wählen eine beliebige, γ in F berührende Kugel. Sei A ein Punkt auf der Normalen aus F auf l, für den gilt

$$\frac{AF}{Al} = \varepsilon$$

Aus A legen wir parallel zur Geraden l die Tangentialebene an die



Kugel. Den Berührungspunkt B verbinden wir durch eine Ebene mit der Geraden l. Der Schnittkreis dieser Ebene mit der Kugel ist der Berührkreis des gesuchten Kegels. Diesen Kegel schneiden wir mit der Ebene γ. Dann gilt für jeden Punkt P des entstehenden Kegelschnittes k die Beziehung

$$\frac{t}{Pl} = \frac{PF}{Pl} = \frac{\cos\sigma}{\cos\omega}$$

Da laut Konstruktion der Punkt A auf dem Kegelschnitt k liegt, gilt auch

$$\frac{t}{Pl} = \frac{PF}{Pl} = \frac{AF}{Al} = \frac{\cos\sigma}{\cos\omega} = \varepsilon$$

Diese Beziehung gilt für alle Punkte des Kegelschnittes k, aber definitionsgemäß auch für alle Punkte der ursprünglich definierten Kurve C. Daher ist C identisch mit dem Kegelschnitt k.

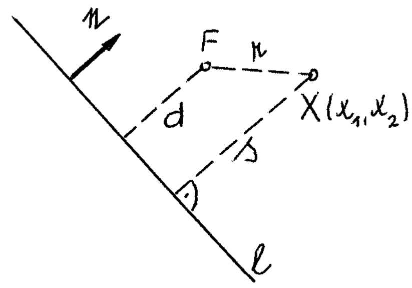
Gleichungen der fokal erzeugbaren Kegelschnitte

Sei $F(F_1,F_2)$ der Brennpunkt und

$1 \ldots \quad e_1x_1 + e_2x_2 + c = 0 \qquad e_1^2 + e_2^2 = 1$

die HESSEsche Normalform der Leitgeraden, wobei wir die Normierung so wählen, daß gilt

$e_1F_1 + e_2F_2 + c = d > 0$



dann folgt

$$\frac{XF}{Xl} = \frac{r}{s} = \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{r^2}{s^2} = \frac{(x_1-F_1)^2+(x_2-F_2)^2}{[e_1x_1+e_2x_2+c]^2}, \text{ daraus}$$

$$\boxed{\begin{gathered}(\varepsilon^2c^2-F_1^2-F_2^2) + 2(\varepsilon^2e_1c+F_1)x_1 + 2(\varepsilon^2e_2c+F_2)x_2 + (\varepsilon^2e_1^2-1)x_1^2 + \\ + 2\varepsilon^2e_1e_2x_1x_2 + (\varepsilon^2e_2^2-1)x_2^2 = 0 \\ \text{Normierte Gleichung}\end{gathered}}$$

Durch Multiplikation mit einer Konstanten $k \neq 0$ geht die Normierung verloren und man erhält die *allgemeine Gleichung*. Ihr entspricht die *allgemeine Matrix*

$$\boxed{\left\| \begin{matrix} \varepsilon^2c^2-F_1^2-F_2^2 & \varepsilon^2e_1c+F_1 & \varepsilon^2e_2c+F_2 \\ \varepsilon^2e_1c+F_1 & \varepsilon^2e_1^2-1 & \varepsilon^2e_1e_2 \\ \varepsilon^2e_2c+F_2 & \varepsilon^2e_1e_2 & \varepsilon^2e_2^2-1 \end{matrix} \right\| \cdot k \ \ldots \ \text{Allgemeine Matrix}}$$

Ferner gilt

$$\frac{1}{k^2}A_{00} = 1-\varepsilon^2$$

$$\frac{1}{k^2}A_{01} = \varepsilon^2e_1e_2F_2 - (\varepsilon^2e_2^2-1)F_1 + \varepsilon^2e_1c$$

$$\frac{1}{k^2}A_{02} = \varepsilon^2e_1e_2F_1 - (\varepsilon^2e_1^2-1)F_2 + \varepsilon^2e_2c$$

$$\frac{1}{k^2}A_{11} = -\varepsilon^2(F_2e_2+c)^2 - F_1^2(\varepsilon^2e_2^2-1)$$

$$\frac{1}{k^2}A_{12} = \varepsilon^2c(F_2e_1+F_1e_2) + \varepsilon^2e_1e_2(F_1^2+F_2^2) + F_1F_2$$

$$\frac{1}{k^2}A_{22} = -\varepsilon^2(F_1e_1+c)^2 - F_2^2(\varepsilon^2e_1^2-1)$$

Es ist zweckmäßig, in den A_{ij} die Größe c durch die geometrisch relevante Größe d vermöge

$$c + e_1F_1 + e_2F_2 = d > 0$$

zu ersetzen. Dann gilt

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{1}{k^2} A_{00} &= 1 - \varepsilon^2 \\
\frac{1}{k^2} A_{01} &= F_1(1-\varepsilon^2) + \varepsilon^2 e_1 d \\
\frac{1}{k^2} A_{02} &= F_2(1-\varepsilon^2) + \varepsilon^2 e_2 d \\
\frac{1}{k^2} A_{11} &= F_1^2(1-\varepsilon^2) - \varepsilon^2 d(d-2e_1F_1) \\
\frac{1}{k^2} A_{12} &= \varepsilon^2 d(F_2e_1+F_1e_2) + F_1F_2(1-\varepsilon^2) \\
\frac{1}{k^2} A_{22} &= F_2^2(1-\varepsilon^2) - \varepsilon^2 d(d-2e_2F_2)
\end{aligned}}$$

Ferner ist $A = a_{00}A_{00} + a_{01}A_{01} + a_{02}A_{02}$

Man findet

$$\frac{1}{k^3} A = \varepsilon^2 d^2 = p^2 \quad \text{mit } p := \varepsilon d > 0$$

p heißt *Parameter des Kegelschnittes*

Klassifikation der nichtausgearteten Kegelschnitte

$$A \neq 0 \Leftrightarrow \varepsilon \neq 0 \wedge d \neq 0 \Leftrightarrow p \neq 0$$

<u>Ellipse:</u> $\frac{1}{k^2} A_{00} > 0 \Leftrightarrow A_{00} > 0 \Leftrightarrow 1 - \varepsilon^2 > 0 \Leftrightarrow \varepsilon^2 < 1 \Leftrightarrow \varepsilon < 1$

<u>Hyperbel:</u> $\frac{1}{k^2} A_{00} < 0 \Leftrightarrow A_{00} < 0 \Leftrightarrow 1 - \varepsilon^2 < 0 \Leftrightarrow \varepsilon^2 > 1 \Leftrightarrow \varepsilon > 1$

<u>Parabel:</u> $\frac{1}{k^2} A_{00} = 0 \Leftrightarrow A_{00} = 0 \Leftrightarrow 1 - \varepsilon^2 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^2 = 1 \Leftrightarrow \varepsilon = 1$

Für die <u>Eigenwerte</u> von A_{00} ergibt sich (wegen $e_1^2+e_2^2 = 1$)

$$\begin{vmatrix} k(\varepsilon^2 e_1^2-1) - \lambda & k\varepsilon^2 e_1 e_2 \\ k\varepsilon^2 e_1 e_2 & k(\varepsilon^2 e_2^2 - 1) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - k(\varepsilon^2-2)\lambda + k^2(1-\varepsilon^2) = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2}[k(\varepsilon^2-2) \pm \sqrt{k^2(\varepsilon^2-2)^2-4k^2(1-\varepsilon^2)} = \frac{k}{2}[(\varepsilon^2-2) \pm \varepsilon^2]$$

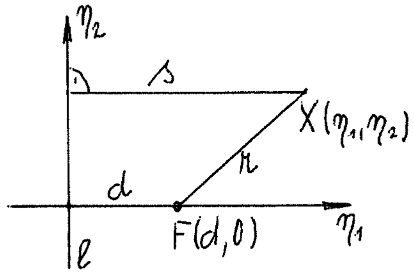
$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_1 &= k(\varepsilon^2-1)\\ \lambda_2 &= -k\end{aligned}}$$

Spezielle Gleichungsformen

Die normierte Gleichung lautete, bei allgemeiner Lage der Leitlinie $c+e_1x_1+e_2x_2 = 0$ und des Brennpunktes $F(F_1,F_2)$:

$$(\varepsilon^2c^2-F_1^2-F_2^2) + 2(\varepsilon^2e_1c+F_1)x_1 + 2(\varepsilon^2e_2c+F_2)x_2 + (\varepsilon^2e_1^2-1)x_1^2 +$$
$$+ \quad 2\varepsilon^2e_1e_2x_1x_2 + (\varepsilon^2e_2^2-1)x_2^2 = 0$$

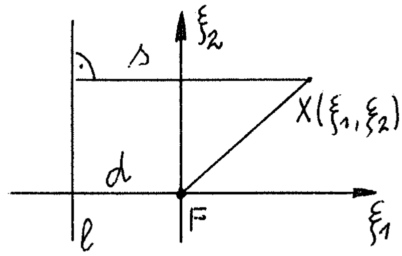
Durch spezielle Wahl dieser Angabestücke ergeben sich Sonderformen der Kegelschnittgelcihungen.



1. Leitliniengleichung. Leitlinie ist Ordinatenachse, Brennpunkt liegt auf der Abszissenachse. in diesem Falle gilt für die Leitlinie:

   $\eta_1 = 0 \Rightarrow c = 0,\ e_1 = 1,\ e_2 = 0,$
   $F_1 = d,\ F_2 = 0$

$$\boxed{d^2 - 2\eta_1 d + (1-\varepsilon^2)\eta_1^2 + \eta_2^2 = 0 \quad \text{Leitliniengleichung}}$$



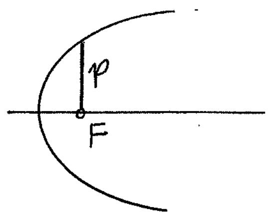
2. Fokalgleichung. Brennpunkt ist Koordinatenursprung. Es gilt

   Leitlinie: $d+\xi_1 = 0,\ c = d,\ e_1 = 1,\ e_2 = 0$
   Brennpunkt $F(0,0)$, $F_1 = 0,\ F_2 = 0$
   Es folgt

$$-\varepsilon^2d^2 - 2d\varepsilon^2\xi_1 + (1-\varepsilon^2)\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$$

   und wegen $p = \varepsilon d$ ergibt sich

$$\boxed{\begin{gathered}-p^2 - 2\varepsilon p\xi_1 + (1-\varepsilon^2)\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0\\ \text{Fokalgleichung}\end{gathered}}$$



Aus der Fokalgleichung ergibt sich die Bedeutung des Parameters p:

$$\xi_1 = 0 \Rightarrow \xi_2 = \pm\, p$$

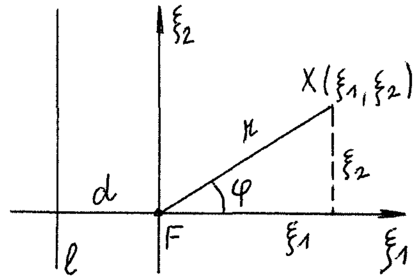
Der Parameter ist die Ordinate im Brennpunkt F.

Umformung der Fokalgleichung

$$(-p^2-2\varepsilon p\xi_1-\varepsilon^2\xi_1^2) + (\xi_1^2+\xi_2^2) = 0$$

$$-(p+\varepsilon\xi_1)^2 + r^2 = 0 \Rightarrow (p+\varepsilon\xi_1)^2 - r^2 = 0 \Rightarrow$$

$$[(p+\varepsilon\xi_1) + r][(p+\varepsilon\xi_1) - r] = 0$$



Wegen $\xi_1 = r.\cos\varphi$ folgt

$$p + \varepsilon r.\cos\varphi + r = 0 \Rightarrow p + r(1+\varepsilon.\cos\varphi] = 0$$

$$p + \varepsilon r.\cos\varphi - r = 0 \Rightarrow p - r(1-\varepsilon.\cos\varphi] = 0$$

daher

$$\boxed{\begin{array}{lll} r = \dfrac{p}{1-\varepsilon.\cos\varphi} & (1) & \\ & & r,p,\varepsilon > 0 \\ r = \dfrac{-p}{1+\varepsilon.\cos\varphi} & (2) & \end{array}}$$

Die obigen Beziehungen sind <u>einzeln</u> <u>keine</u> <u>Kegelschnittsgleichungen</u>, da sie ja nur <u>Teilbeziehungen</u> der Fokalgleichung darstellen. Daher gilt bei der <u>Hyperbel</u> (1) nur für den rechten, (2) nur für den linken Ast.

Bei <u>Ellipse</u> <u>und</u> <u>Parabel</u> liefert nur (1) Kurvenpunkte, da wegen $\varepsilon \le 1$ und $p > 0$ die Gleichung (2) nur negative Werte für r ergibt.

Wir suchen den Schnitt des Kegelschnittes mit seiner Leitlinie

$$l \ldots \xi_1 = -d = -\frac{p}{\varepsilon} \Rightarrow -p^2+2\varepsilon p\frac{p}{\varepsilon}+(1-\varepsilon^2)\frac{p^2}{\varepsilon^2} + \xi_2^2 = 0 \Rightarrow$$

$\xi_2^2 = -\dfrac{p^2}{\varepsilon^2}$ ... <u>Die Leitlinie schneidet den Kegelschnitt nicht</u>

<u>Darstellung der Polaren des Punktes $\mathfrak{y}(y_1,y_2)$ im Fokalsystem</u>.

Aus der Gleichung $-p^2 - 2\varepsilon p\xi_1 + (1-\varepsilon^2)\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ ergibt sich die Polare nach Seite 27

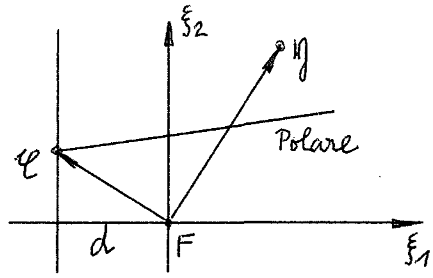
$$-p^2 - \varepsilon p(\xi_1+y_1) + (1-\varepsilon^2)\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 = 0$$

$$\Rightarrow -(p^2+\varepsilon p y_1) + [-\varepsilon p+(1-\varepsilon^2)y_1]\xi_1 + y_2\xi_2 = 0$$

Für den Schnitt der Polaren von $\mathfrak{y}$ mit der Leitlinie $\xi_1 = -\frac{p}{\varepsilon}$ ergibt sich

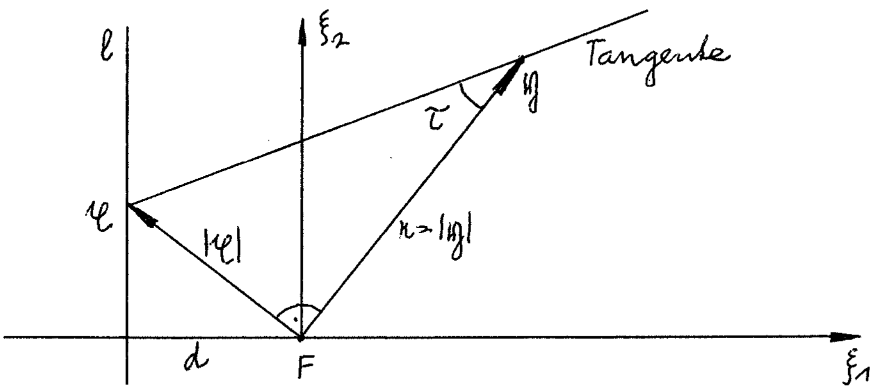
$$-(p^2+\varepsilon p y_1) + [-\varepsilon p+(1-\varepsilon^2)y_1](-\frac{p}{\varepsilon}) + y_2\xi_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\xi_2 = \frac{p}{\varepsilon}\cdot\frac{y_1}{y_2}$$



Der Schnittpunkt $\mathfrak{x}(-\frac{p}{\varepsilon}, \frac{p}{\varepsilon}\,\frac{y_1}{y_2})$ existiert, sobald $y_2 \neq 0$ ist. Wegen $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = -\frac{p}{\varepsilon}\,y_1 + \frac{p}{\varepsilon}\,y_1 = 0$ folgt $\mathfrak{x} \perp \mathfrak{y}$.

Dies gilt speziell, wenn $\mathfrak{y}$ auf dem Kegelschnitt liegt.



Wir berechnen den Winkel τ zwischen Tangente und Brennstrahl aus dem rechtwinkeligen Dreieck $\Delta\ \mathfrak{x}F\mathfrak{y}$.

$|\mathfrak{x}|^2 = \frac{p^2}{\varepsilon^2} + \frac{p^2}{\varepsilon^2}\,\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{p^2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{y_1^2+y_2^2}{y_2^2}$. Wegen $r^2 = |\mathfrak{y}|^2 = y_1^2 + y_2^2$

folgt $|\mathfrak{x}|^2 = \frac{p^2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{r^2}{y_2^2} \Rightarrow |\mathfrak{x}| = \frac{p}{\varepsilon}\cdot\frac{r}{|y_2|} = \frac{p}{\varepsilon}\cdot\frac{|\mathfrak{y}|}{|y_2|}$, daher

$$\underline{\tan\tau} = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{y}|} = \frac{p}{\varepsilon}\cdot\frac{|\mathfrak{y}|}{|y_2|}\cdot\frac{1}{|\mathfrak{y}|} = \frac{p}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{|y_2|} = \underline{\underline{\frac{d}{|y_2|}}}$$

<u>Der Winkel τ ist also nur von y_2 abhängig!</u>

Für Punkte $\mathfrak{y}(y_1,0)$ auf der ξ_1-Achse ergibt sich als Polare $-(p^2+\varepsilon p y_1) + [-\varepsilon p+(1-\varepsilon^2)y_1]\xi_1 = 0$, also eine Parallele zur ξ_2-Achse. Speziell ergibt sich für den Brennpunkt $F = \mathfrak{y}(0,0)$: $-p^2 - \varepsilon p \xi_1 = 0 \Rightarrow$

$\xi_1 = -\frac{p}{\varepsilon} = -d$ ... <u>Die Leitlinie ist die Polare des Brennpunktes.</u>

Die ξ_2-Achse schneidet den Kegelschnitt in einem Punkt mit der Ordinate $\xi_2 = \pm p$ (Seite 66). Nunmehr bestimmen wir die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der ξ_1-Achse:

$$\xi_2 = 0 \Rightarrow -p^2 - 2\varepsilon p \xi_1 + (1-\varepsilon^2)\xi_1^2 = = 0$$

<u>1. Fall:</u> $\varepsilon = 1$ ... Parabel. Es gibt nur einen Schnittpunkt

$$-p^2 - 2\varepsilon p\xi_1 = 0 \Rightarrow \xi_1 = -\frac{p}{2} \qquad \underline{S(-\tfrac{p}{2},0) \text{ Scheitel der Parabel}}$$

<u>2. Fall:</u> $\varepsilon \neq 1$ ... Ellipse und Hyperbel. Es treten zwei Schnittpunkte auf

$$(1-\varepsilon^2)\xi_1^2 - 2\varepsilon p\xi_1 - p^2 = 0$$

$$\xi_1 = \frac{1}{1-\varepsilon^2}\,[\varepsilon p \pm \sqrt{\varepsilon^2p^2+p^2(1-\varepsilon^2)}\,] = \frac{1}{1-\varepsilon^2}\,[\varepsilon p \pm p] = -\,p\,\frac{\varepsilon \pm 1}{\varepsilon^2-1}$$

Es existieren daher die beiden Schnittpunkte

$A_1(-\frac{p}{\varepsilon+1},0)$, $A_2(-\frac{p}{\varepsilon-1},0)$ <u>Fokalkoordinaten der *Hauptscheitel*</u>

Der Mittelpunkt $M(m_1,0)$ der Strecke A_1A_2 hat die Koordinaten

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{p}{\varepsilon+1} - \frac{p}{\varepsilon-1}\right) = \frac{-p\varepsilon}{\varepsilon^2-1}$$

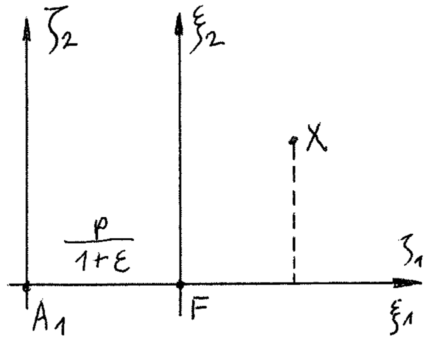
$M\left(\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2},0\right)$ ... <u>Fokalkoordinaten des Mittelpunkts</u>

Der Scheitel A_1 existiert in jedem Falle. Es ist daher naheliegend, ein neues Bezugssystem einzuführen, in welchem A der neue Ursprung wird, die Ordinaten aber unverändert bleiben.

<u>3. Die Scheitelgleichung.</u> Ein Scheitel des Kegelschnittes ist Koordinatenursprung. Die neuen Abszissen gehen aus den Fokalabszissen durch die Transformation

$$\xi_1 = \zeta_1 - \frac{p}{\varepsilon+1}, \quad \xi_2 = \zeta_2$$

hervor. Setzt man in die Fokalgleichung $-p^2 - 2\varepsilon p\xi_1 + (1-\varepsilon^2)\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ ein, so findet man



$$-p^2-2p[\zeta_1-\frac{p}{\varepsilon+1}]\varepsilon+ (1-\varepsilon^2)[\zeta_1^2 - \frac{2p}{\varepsilon+1}\zeta_1+ \frac{p^2}{(\varepsilon_1+1)^2}] + \zeta_2^2 = \ldots =$$

$$\underline{-2p\zeta_1 + (1-\varepsilon^2)\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = 0}$$

Rechnet man die übrigen Bestimmungsstücke von Fokalkoordinaten auf Scheitelkoordinaten, um so findet man

Darstellung in Scheitelkoordinaten

$$-2p\zeta_1 + (1-\varepsilon^2)\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = 0$$

$$\zeta_1 + \frac{p}{\varepsilon(\varepsilon+1)} = 0 \text{ ... Leitlinie}$$

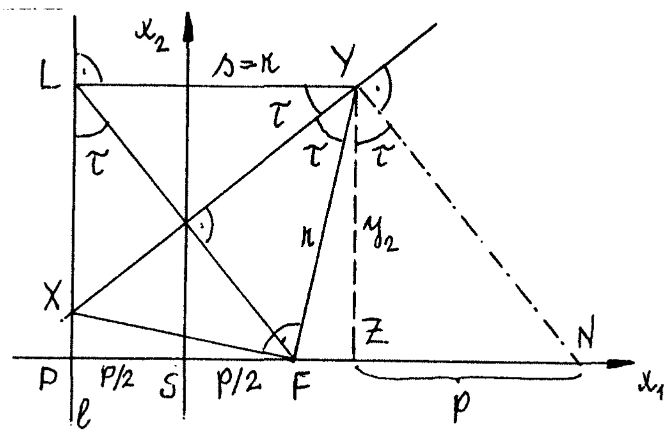
$$A_1(0,0),\ A_2\left(\frac{2p}{1-\varepsilon^2},0\right),\ M\left(\frac{p}{1-\varepsilon^2},0\right),\ F\left(\frac{p}{\varepsilon+1},0\right)$$

Der zweite Scheitel A_2 und der Mittelpunkt M existieren nur, wenn $\varepsilon \neq 1$ ist

Die Parabel. ($\varepsilon = 1$) Die Scheitelgleichung lautet $-2p\zeta_1 + \zeta_2^2 = 0$. Setzen wir $\zeta_1 = x_1$, $\zeta_2 = x_2$, so folgt

$$x_2^2 = 2px_1 \text{ ... Normalform der Parabelgleichung}$$

$$x_1 + \frac{p}{2} = 0 \text{ ...Leitlinie, } F(\frac{p}{2},0)$$



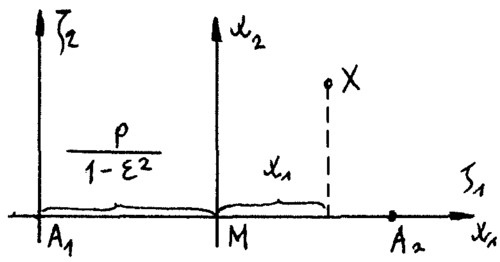
Den Parabelpunkt $Y(y_1,y_2)$ konstruieren wir definitiondgemäß vermöge YF = YL. Die Parabeltangente ist durch den Punkt X festgelegt (Seite 68). Da die beiden rechtwinkeligen Dreiecke Δ XFY und Δ XLY in den Seiten YF = YL sowie in der Hypotenuse XY übereinstimmen, sind sie kongruent und es gilt $\angle$ FYX = $\angle$ LYX = τ. Da die genannten Dreiecke bezüglich XY symmetrisch liegen, ist LF $\perp$ XY und die Strecke LF wird durch die Scheiteltangente halbiert. Nach Seite 68 ist

$$\tan \tau = \frac{d}{|y_2|} = \frac{p}{|y_2|} \Rightarrow \angle \text{ PLF} = \tau$$

Errichtet man im Punkt y auf die Tangente die Parabelnomale und schneidet sie mit der Parabelachse im Punkte N, so ist $\angle$ ZYN = τ und aus der Kongruenz der rechtwinkeligen Dreiecke Δ FPL und Δ NZY folgt PF = NZ = p. Die Subnormale einer Parabel hat in jedem Parabelpunkt die konstante Länge p.

4. Die Mittelpunktsgleichungen von Ellipse und Hyperbel ($\varepsilon \neq 1$)

Wir führen ein (x_1,x_2)- Koordinatensystem mit M als Ursprung ein. Dann gilt



$$\zeta_1 = x_1 + \frac{p}{1-\varepsilon^2}, \quad \zeta_2 = x_2$$

Die Scheitelgleichung nimmt daher die Gestalt an

$$-2p\zeta_1+(1-\varepsilon^2)\zeta_1^2+\zeta_2^2 = 0 \Rightarrow -2p\left[x_1+\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right]+(1-\varepsilon^2)\left[x_1+\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right]^2+x_2^2 =$$

$$= \ldots = -\frac{p^2}{1-\varepsilon^2} + (1-\varepsilon^2)x_1^2 + x_2^2 = 0 \qquad (*)$$

Für Brennpunkt F, Hauptachsenendpunkte A_1 und A_2 sowie für die Gleichung der Leitlinie findet man

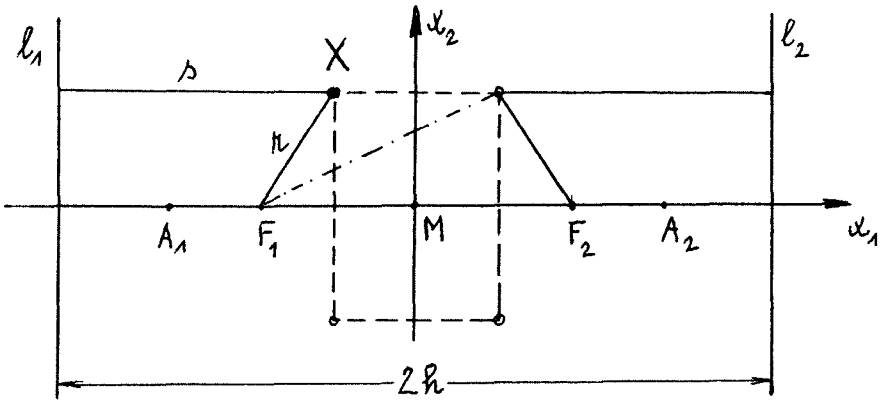
$$F\left(-\frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2},0\right), \quad A_1\left(-\frac{p}{1-\varepsilon^2},0\right), \quad A_2\left(\frac{p}{1-\varepsilon^2},0\right)$$

$$x_1 + \frac{p}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)} = 0 \ \ldots \text{ Leitlinie}$$

Für den Abstand des Mittelpunktes von der Leitlinie ergibt sich

$$Ml = h := \left|\frac{p}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}\right|$$

Da die Gleichung (*) bei Ersetzung von x_i durch $-x_i$ in sich übergeht, muß es aus Symmetriegründen noch einen weiteren Brennpunkt $F_2\left(\frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2},0\right)$ und eine zweite Leitlinie l_2: $x_1-\frac{p}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)} = 0$ geben.



$$-\frac{p^2}{1-\varepsilon^2}+(1-\varepsilon^2)x_1^2+x_2^2 = 0 \Rightarrow \frac{x_1^2}{\frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}} + \frac{x_2^2}{\frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)}} = 1$$

$$F_1\left(-\frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2},0\right),\ F_2\left(\frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2},0\right),\ A_1\left(-\frac{p}{1-\varepsilon^2},0\right),\ A_2\left(\frac{p}{1-\varepsilon^2},0\right)$$

$$l_1 \ \dots\ x_1+\frac{p}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)} = 0,\quad l_2\ \dots\ x_1-\frac{p}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)} = 0$$

$$Ml_1 = Ml_2 = h = \left|\frac{p}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}\right|$$

Mittelpunktsgleichungen ($\varepsilon \neq 1$)

Ellipse $\varepsilon < 1$. Wir setzen

$$a^2 := \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2},\quad b^2 := \frac{p^2}{1-\varepsilon^2},\quad e := \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}\ \dots \textit{lineare Exzentrizität}$$

Mit diesen Bezeichnungen folgt

$$\underline{h} = \frac{p}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)} = \frac{p}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}\cdot\frac{p}{(1-\varepsilon^2)}\cdot\frac{(1-\varepsilon^2)}{p} = \frac{p^2}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^2}\cdot\frac{(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon p} = \underline{\frac{a^2}{e}}$$

$$\underline{a^2-b^2} = \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}-\frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)} = p^2\,\frac{1-(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^2} = \frac{p^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} = \underline{e^2}$$

Mit $\underline{a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}}$ folgt sofort $\underline{\varepsilon = \frac{e}{a},\ p = \frac{b^2}{a},\ d = \frac{p}{\varepsilon} = \frac{b^2}{e}}$

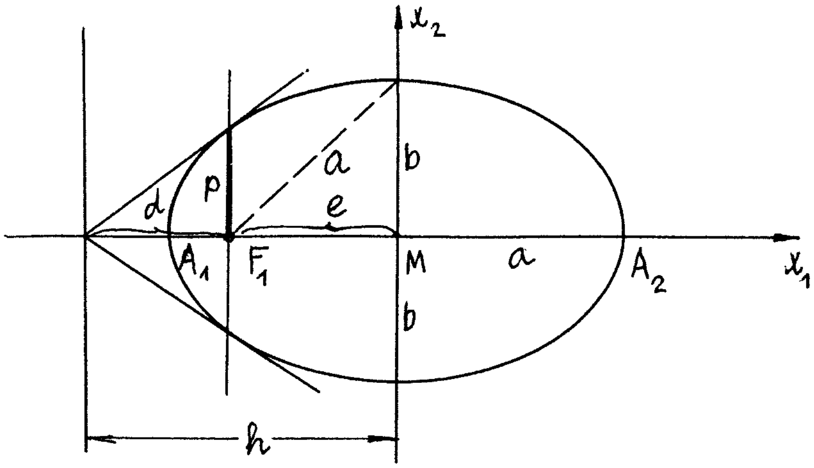
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

$$e^2 = a^2-b^2,\ a = \frac{p}{1-\varepsilon^2},\ \varepsilon = \frac{e}{a},\ p = \frac{b^2}{a},\ d = \frac{p}{\varepsilon} = \frac{b^2}{e}$$

$$h = \frac{a^2}{e}$$

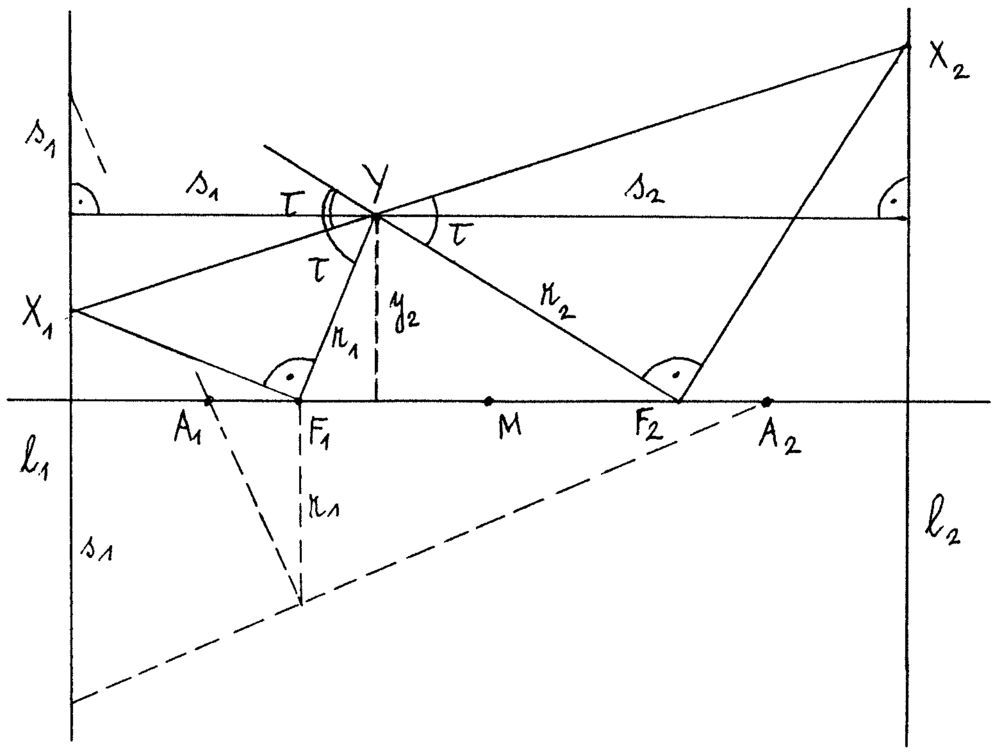
Ellipse in Mittelpunktskoordinaten

Die angegebenen Größen gestatten folgende zeichnerische Darstellung



<u>Beziehungen zwischen den Brennpunkten einer Ellipse</u>

gegeben: F_1, l_1, Y, gesucht: F_2, l_2



Wir bestimmen zunächst die Hauptscheitel A_1 und A_2 vermöge

$$\frac{A_1F_1}{A_1l_1} = \frac{A_2F_1}{A_2l_1} = \varepsilon = \frac{YF_1}{Yl_1} = \frac{r_1}{s_1}$$

Damit ist M als Mittelpunkt von A_1A_2 bestimmt. F_2 und l_2 sind zu F_1 und l_1 bezüglich M symmetrisch. Dann gilt

$$\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2} = \varepsilon \text{ und } s_1+s_2 = 2h = \frac{2p}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}, \text{ daher}$$

$$\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2}+1 = \frac{s_1}{s_2}+1 \Rightarrow \frac{r_1+r_2}{r_2} = \frac{s_1+s_2}{s_2} = \frac{2h}{s_2}$$

$$r_1+r_2 = \frac{r_2}{s_2}.2h = \varepsilon.\frac{2p}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)} = \frac{2p}{(1-\varepsilon^2)} = 2a \text{ daher}$$

$$\boxed{r_1+r_2 = 2a}$$

Für den Winkel τ gilt $\tan\tau = \frac{p}{\varepsilon y_2}$, d.h. τ tritt an r_1 und r_2 auf: Die Tangente in einem Ellipsenpunkt halbiert den Nebenwinkel der Fokalstrahlen.

Seien λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A_{00} und sei $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Nach Seite 66 galt $(\varepsilon < 1)$

$\lambda_1 = k(\varepsilon^2-1)$, $\lambda_2 = -k$. Also $|\lambda_1| = |k(\varepsilon^2-1)| < |\lambda_2| = |-k| = |k|$

$$A = k^3p^2,\ A_{00} = k^2(1-\varepsilon^2) > 0$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= -\frac{A}{A_{00}\lambda_1} = -\frac{k^3p^2}{k^2(1-\varepsilon^2)k(\varepsilon^2-1)} = \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \\ b^2 &= -\frac{A}{A_{00}\lambda_2} = -\frac{k^3p^2}{k^2(1-\varepsilon^2)(-k)} = \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)} \end{aligned}\right\} \quad \frac{b^2}{a^2} = 1-\varepsilon^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$\text{Daraus } \varepsilon^2 = 1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = +\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2}} \quad |\lambda_1| < |\lambda_2|}$$

Aus $A = k^3p^2$ und $k = -\lambda_2$ folgt $A = -\lambda_2^3p^2$, daher

$$\boxed{p = +\sqrt{-\frac{A}{\lambda_2^3}}}$$

Ist e der Richtungsvektor der x_1-Achse, so erhält man die Brennpunkte $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ durch $\mathfrak{f}_{1,2} = \mathfrak{m}\pm e\mathfrak{e}$ ($\mathfrak{m}$...Mittelpunkt) und die Scheitel durch $\mathfrak{a}_{1,2} = \mathfrak{m}\pm a\mathfrak{e}$ usw., da sich alle Größen aus p und ε berechnen lassen. Die Leitlinien berechnet man als Polaren der Brennpunkte.

Hyperbel. $\varepsilon > 1$ Wir setzen

$$\boxed{a^2 := \frac{p^2}{(\varepsilon^2-1)^2}, \quad b^2 := \frac{p^2}{(\varepsilon^2-1)}, \quad e := \frac{\varepsilon p}{(\varepsilon^2-1)} \quad \ldots \textit{ lineare Exzentrizität}}$$

Wie bei der Ellipse folgt: $\underline{h} = \dfrac{p}{\varepsilon(\varepsilon^2-1)} = \underline{\dfrac{a^2}{e}}$, $\underline{a^2+b^2} = \dfrac{\varepsilon^2 p^2}{(\varepsilon^2-1)^2} = \underline{e^2}$

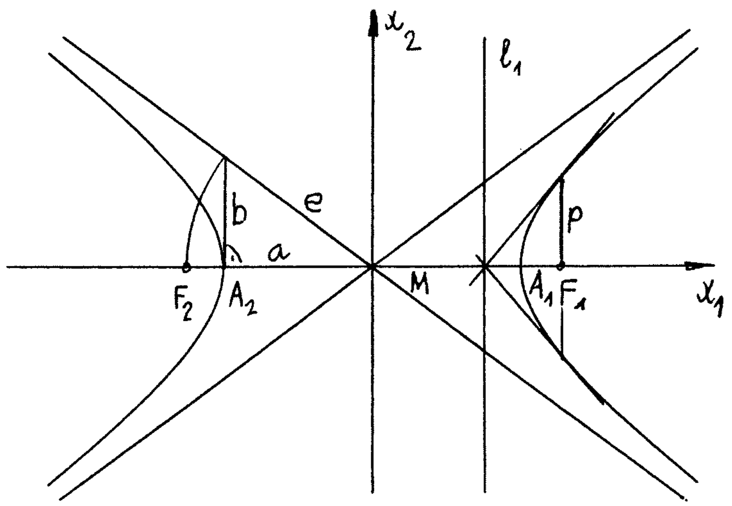
$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

$$x_2 = \pm \frac{b}{a} x_1 \quad \ldots \text{ Asymptoten}$$

$$e^2 = a^2+b^2, \quad a = \frac{p}{\varepsilon^2-1}, \quad \varepsilon = \frac{e}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad d = \frac{p}{\varepsilon} = \frac{b^2}{e}$$

$$h = \frac{a^2}{e}$$

Hyperbel in Mittelpunktskoordinaten

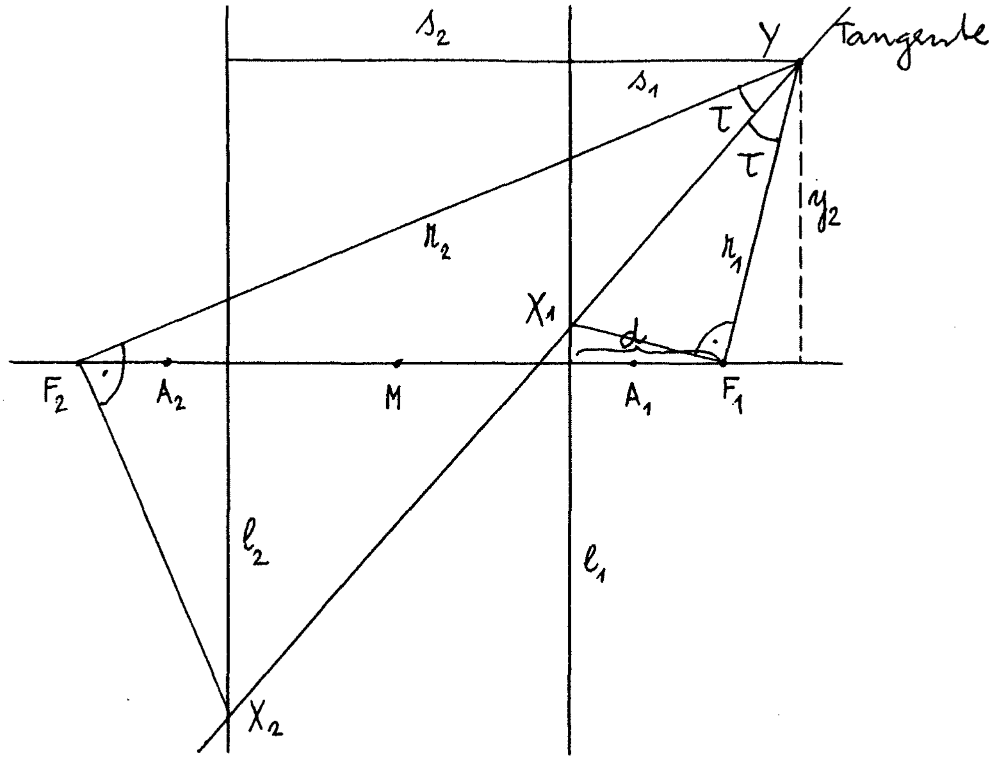


Beziehungen zwischen den Hyperbelbrennpunkten

geg.: F_1, l_1, Y, ges.: F_2, l_2. Wir bestimmen wieder die Hauptscheitel A_1, A_2 vermöge

$$\frac{A_1F_1}{A_1l_1} = \frac{A_2F_1}{A_2l_1} = \varepsilon = \frac{YF_1}{Yl_1} = \frac{r_1}{s_1}$$

Damit ist M als Mittelpunkt der Strecke A_1A_2 festgelegt. F_2 und l_2 sind zu F_1 und l_1 bezüglich M symmetrisch. Es gilt



$$\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2} = \varepsilon \text{ und } s_2-s_1 = 2h = \frac{2p}{\varepsilon(\varepsilon^2-1)} \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{s_2}{s_1} \Rightarrow$$

$$\frac{r_2}{r_1}-1 = \frac{s_2}{s_1}-1 \Rightarrow \frac{r_2-r_1}{r_1} = \frac{s_2-s_1}{s_1} \Rightarrow r_2-r_1 = \frac{r_1}{s_1}.2h$$

$$= \varepsilon\frac{2p}{\varepsilon(\varepsilon^2-1)} = \frac{2p}{\varepsilon^2-1} = 2a, \text{ daher}$$

$r_2-r_1 = 2a$. Analog für den zweiten Hyperbelast: $r_1-r_2 = 2a$, daher

$$\boxed{|r_2-r_1| = 2a}$$

Für den Winkel τ gilt: $\tan\tau = \frac{p}{\varepsilon|y_2|}$, d.h. τ tritt an r_1 und r_2 auf: <u>Die Tangente in einem Hyperbelpunkt halbiert den Winkel der Fokalstrahlen.</u>

Es seien λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von A_{00} und es sei $\lambda_1 A > 0$. Wegen $A = k^3p^2$ hat A stets dasselbe Vorzeichen wie k und wegen $\varepsilon^2-1 > 0$ hat $\lambda_1 := k(\varepsilon^2-1)$ dasselbe Vorzeichen wie A. Wir setzen daher (vgl. Seite 66)

$$\lambda_1 = k(\varepsilon^2-1),\ \lambda_2 = -k,\ A_{00} = -k^2(\varepsilon^2-1) < 0$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= -\frac{A}{A_{00}\lambda_1} = \frac{k^3p^2}{k^2(\varepsilon^2-1)k(\varepsilon^2-1)} = \frac{p^2}{(\varepsilon^2-1)^2} \\ b^2 &= \frac{A}{A_{00}\lambda_2} = \frac{k^3p^2}{k^2(\varepsilon^2-1)k} = \frac{p^2}{\varepsilon^2-1} \end{aligned}\right\} \quad \frac{b^2}{a^2} = \varepsilon^2-1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Daher $\varepsilon^2-1 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow \varepsilon^2 = \dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = +\sqrt{\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2}} \quad \lambda_1 A > 0}$

Aus $A = k^3p^2$ und $\lambda_2 = -k$ folgt $A = -\lambda_2^3p^2 \Rightarrow \boxed{p = \sqrt{-\dfrac{A}{\lambda_2^3}}}$

Wie bei der Ellipse gilt (mit e als Rcihtungsvektor der Hauptachse)

Brennpunkte	$\mathfrak{f}_{1,2} = \mathfrak{m} \pm \mathfrak{e} e$
Scheitel	$\alpha_{1,2} = \mathfrak{m} \pm a e$
Leitlinien	Polaren der Brennpunkte

Leitlinie und Brennpunkt der Parabel

Bei der Parabel gilt

$$\varepsilon = 1,\ p = d,\ l \ \ldots\ c+e_1F_1+e_2F_2 = d = p > 0$$

$$\|a_{ij}\| = \begin{Vmatrix} c^2-F_1^2-F_2^2 & e_1c+F_1 & e_2c+F_2 \\ e_1c+F_1 & -e_2^2 & e_1e_2 \\ e_2c+F_2 & e_1e_2 & -e_1^2 \end{Vmatrix} .k \qquad A = k^3p^2$$

$$\frac{1}{k^2}A_{00} = 0$$
$$\frac{1}{k^2}A_{01} = e_1p$$
$$\frac{1}{k^2}A_{02} = e_2p$$
$$\frac{1}{k^2}A_{11} = -p(p-2e_1F_1)$$
$$\frac{1}{k^2}A_{12} = p(e_1F_2+e_2F_1)$$
$$\frac{1}{k^2}A_{22} = -p(p-2e_2F_2)$$

Aus diesen Beziehungen findet man

$$e_1 = \frac{A_{01}}{k^2 p}, \quad e_2 = \frac{A_{02}}{k^2 p} \qquad (*)$$

$$(A_{11}+A_{22})\frac{1}{k^2} = -2p\underbrace{(p-e_1F_1-e_2F_2)}_{c} \Rightarrow c = -\frac{A_{11}+A_{22}}{2pk^2} = -\frac{S_{00}}{2pk^2}$$

Daher gilt für die Leitlinie $e_1x_1+e_2x_2+c$:

$$\boxed{2A_{01}x_1+2A_{02}x_2-S_{00} = 0}$$

Gleichung der Leitlinie der Parabel im allgemeinen Bezugessystem

Ferner folgt aus (*)

$$\frac{1}{k^2}A_{12} = p\left[\frac{A_{01}}{k^2p}F_2+\frac{A_{02}}{k^2p}F_1\right] \Rightarrow A_{02}F_1+A_{01}F_2 = A_{12}$$

$$\frac{1}{k^2}(A_{11}-A_{22}) = p\left[p-2\frac{A_{02}}{k^2p}F_2-p+2\frac{A_{01}}{k^2p}F_1\right] \Rightarrow 2A_{01}F_1-2A_{02}F_2 = A_{11}-A_{22}$$

$$A_{02}F_1+A_{01}F_2 = A_{12}$$

$$2A_{01}F_1-2A_{02}F_2 = A_{11}-A_{22}$$

Gleichungssystem zur Berechnung des Brennpunktes der Parabel in einem allgemeine n Bezugssystem

Die Kegelschnitte als Menge ihrer Tangenten

($A \neq 0$)

Welche Beziehung muß zwischen den Koeffizenten der Geraden

$$c_0+c_1x_1+c_2x_2 = 0$$

stehen, daß diese Gerade Tangente an den Kegelschnitt $K(\mathfrak{x}) = 0$ ist?

Im Punkte $\mathfrak{y}$ lautet die Gleichung der Tangente

$$(a_{00}+a_{01}y_1+a_{02}y_2) + (a_{01}+a_{11}y_1+a_{12}y_2)x_2 + (a_{02}+a_{12}y_1+a_{22}y_2)x_2 = 0$$

Vergleich der beiden Geradengleichungen ergibt

$\rho c_0 = a_{00}+a_{01}y_1+a_{02}y_2$	A_{00}	A_{01}	A_{02}
$\rho c_1 = a_{01}+a_{11}y_1+a_{12}y_2$	A_{01}	A_{11}	A_{12}
$\rho c_2 = a_{02}+a_{12}y_1+a_{22}y_2$	A_{02}	A_{12}	A_{22}

$$\rho(A_{00}c_0+A_{01}c_1+A_{02}c_2) = \underbrace{(a_{00}A_{00}+a_{01}A_{01}+a_{02}A_{02})}_{A} +$$
$$+ \underbrace{(a_{01}A_{00}+a_{11}A_{01}+a_{12}A_{02})}_{0}y_1 +$$
$$+ \underbrace{(a_{02}A_{00}+a_{12}A_{01}+a_{22}A_{02})}_{0}y_2$$

Also

$$\begin{array}{l|l}
\rho(A_{00}c_0+A_{01}c_1+A_{02}c_2) = A & c_0 \\
\rho(A_{01}c_0+A_{11}c_1+A_{12}c_2) = Ay_1 & c_1 \\
\rho(A_{02}c_0+A_{12}c_1+A_{22}c_2) = Ay_2 & c_2 \\
\hline
\end{array}$$

$$\rho[(A_{00}c_0+A_{01}c_1+A_{02}c_2)c_0 + (A_{01}c_0+A_{11}c_1+A_{12}c_2)c_1 +$$
$$+ (A_{02}c_0+A_{12}c_1+A_{22}c_2)c\ ] = A\underbrace{(c_0+c_1y_1+c_2y_2)}_{0} = 0$$

Ordnet man nach den c_i, so ergibt sich

> Die Gerade
> $$c_0+c_1x_1+c_2x_2 = 0$$
> ist genau dann Kegelschnittstangente, wenn gilt
> $$A_{00}c_0^2 + 2A_{01}c_0c_1 + 2A_{02}c_0c_2 + A_{11}c_1^2 + 2A_{12}c_1c_2 + A_{22}c_2^2 = 0$$
> "Berührungsbedingung"

Sonderfälle der Berührungsbedingung

1. Scheitelgleichung. $-2\zeta_1 p + (1-\varepsilon^2)\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = 0$

$$\|a_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & -p & 0 \\ -p & 1-\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \|A_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1-\varepsilon^2 & p & 0 \\ p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p^2 \end{Vmatrix}$$

> Die Berührungfsbedingung der Geraden
> $$c_0+c_1\zeta_1+c_2\zeta_2 = 0$$
> lautet
> $$(1-\varepsilon^2)c_0^2 + 2pc_0c_1 - p^2c_2^2 = 0$$

2. Mittelpunktsgleichung von Ellipse und Hyperbel:

$$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x_1^2 \pm a^2x_2^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\|a_{ij}\| = \begin{Vmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm a^2 \end{Vmatrix} \qquad \|A_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \pm a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mp a^4b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^4 \end{Vmatrix}$$

> Die Berührungsbedingung der Geraden
>
> $$c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0$$
>
> lautet
>
> $$\pm c_0^2 \mp a^2c_1^2 - b^2c_2^2 = 0 \begin{cases} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{cases}$$

3. Scheitelgleichung der Parabel: $x_2^2 = 2px_1$

$$\|a_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & -p & 0 \\ -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \|A_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p^2 \end{Vmatrix}$$

> Die Berührungsbedingung der Geraden
>
> $$c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0$$
>
> lautet
>
> $$2c_0c_1 - pc_2^2 = 0$$

Inhalt

Klassifikation der Kurven 2.Ordnung $K(\mathfrak{x}) = L(\mathfrak{x}) + Q(\mathfrak{x})$

$$L(\mathfrak{x}) = a_{00} + 2a_{01}x_1 + 2a_{01}x_2, \quad Q(\mathfrak{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Singuläre Kurven 2.Ordnung (A = 0)

A_{00}	$S_{00} = A_{00}+A_{11}$	
<0	(<0)	Paar schneidender Geraden $K(\mathfrak{x}) = [\alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2][\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2]$ $\alpha_1 = \rho a_{11}\ \beta_1 = \sigma a_{11}\ w\alpha_0 = \rho(a_{01}w + A_{02)})$ $\alpha_2 = \rho(a_{12} + w)\beta_2 = \sigma(a_{12} - w)w\beta_0 = \sigma(a_{01}w - A_{02)})$ $\rho\sigma a_{11} = 1 w = \pm\sqrt{-A_{00}}$ oder $\alpha_2 = \rho a_{22}\ \beta_2 = \sigma a_{22}\ w\alpha_0 = \rho(a_{02}w + A_{01})$ $\alpha_1 = \rho(a_{12} + w)\beta_1 = \sigma(a_{12} - w)w\beta_0 = \sigma(a_{02}w - A_{01})A$ $\rho\sigma a_{22} = 1 w = \pm\sqrt{-A_{00}}$ Schnittpunkt $M(m_1, m_2)$ des Geradenpaares $m_1 = \frac{A_{01}}{A_{00}}, m_2 = \frac{A_{02}}{A_{00}}$
0	<0	Parallelenpaar $K(\mathfrak{x}) = [\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2][\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2]$ $\alpha_1 = \rho a_{11}\ \beta_1 = \sigma a_{11}$ $\sigma\alpha_0$ und $\rho\beta_0$ sind Nullstellen $\alpha_2 = \rho a_{12}\ \beta_2 = \sigma a_{12}$ von $a_{11}x^2 - 2a_{01}x + a_{00} = 0$ $\rho\sigma a_{11} = 1$ oder $\alpha_2 = \rho a_{22}\ \beta_2 = \sigma a_{22}$ $\sigma\alpha_0$ und $\rho\beta_0$ sind Nullstellen $\alpha_1 = \rho a_{12}\ \beta_1 = \sigma a_{12}$ von $a_{22}x^2 - 2a_{02}x + a_{00} = 0$ $\rho\sigma a_{22} = 1$
0	0	Doppelgerade $K(\mathfrak{x}) = [\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2]^2$ $\alpha_1 = \rho a_{11}\ \alpha_2 = \rho a_{12}\ \rho a_{11}\alpha_0 = a_{01}\ \rho^2 a_{11} = 1$ oder $\alpha_2 = \rho a_{22}\ \alpha_1 = \rho a_{12}\ \rho a_{22}\alpha_0 = a_{02}\ \rho^2 a_{22} = 1$
>0	(>0)	Einzelner Punkt $M(m_1,m_2)$ $m_1 = \frac{A_{01}}{A_{00}}, \quad m_2 = \frac{A_{02}}{A_{00}}$
0	>0	Leeres Parallelenpaar

Reguläre Kurven 2.Ordnung ($A \neq 0$)

$A_{00} \neq 0$ — Mittelpunktskegelschnitte

Mittelpunkt $M(m_1 m_2)\; m_1 = \frac{A_{01}}{A_{00}}, m_2 = \frac{A_{02}}{A_{00}}$

Charakteristisches Polynom $s_{00} = a_{11} + a_{22}$ $\lambda^2 - s_{00}\lambda + A_{00} = 0$ Eigenwerte λ_1, λ_2

Richtungsvektoren der Achsen $\mathfrak{e}(e_1, e_2)$, $\mathfrak{f}(f_1, f_2)$

$$\begin{cases} e_1 = \rho a_{12} \\ e_2 = -\rho(a_{11} - \lambda_1) = \rho(a_{22} - \lambda_2) \\ f_1 = \rho(a_{11} - \lambda_1) = -\rho(a_{22} - \lambda_2) \\ f_2 = \rho a_{11} \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} e_1 &= \sigma(a_{11} - \lambda_2) = -\sigma(a_{22} - \lambda_1) \\ e_2 &= \sigma a_{12} \\ f_1 &= -\sigma a_{12} \\ f_2 &= \sigma(a_{11} - \lambda_2) = -\sigma(a_{22} - \lambda_1) \end{aligned}$$

$$\rho^2\left[a_{12}^2 + (a_{11} - \lambda_1)^2\right] = \rho^2\left[a_{12}^2 + (a_{22} - \lambda_2)^2\right] = 1$$

$$\rho\sigma\left[a_{12}^2 + (a_{11} - \lambda_2)^2\right] = \sigma^2\left[a_{12}^2 + (a_{22} - \lambda_1)^2\right] = 1$$

$e_2(x_1 - m_1) - e_1(x_2 - m_2) = 0$ Hauptachse

$e_1(x_1 - m_1) + e_2(x_2 - m_2) = 0$ Nebenachse

$A_{00} > 0$ — Ellipsen

$s_{00}A < 0 \Leftrightarrow \lambda_i A < 0$ ($\lambda_1\lambda_2 > 0$ $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$) reelle Ellipse

$a_{11} = a_{22} \wedge a_{12} = 0$ ($\lambda_1 = \lambda_2$) reeller Kreis

Länge der Hauptachsen $a^2 = -\frac{A}{\lambda_1 A_{00}}$, $b^2 = -\frac{A}{\lambda_2 A_{00}}$

$s_{00}A > 0$ leere Ellipse

$a_{11} = a_{22} \wedge a_{12} = 0$ leerer Kreis

$A_{00} < 0$ — Hyperbeln $Q(\mathfrak{x}) = [\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2][\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2]$

$\operatorname{sgn} \lambda_1 = \operatorname{sgn} A \Leftrightarrow \lambda_1 A > 0$ ($\lambda_2 A > 0$) $\lambda_1\lambda_2 < 0$

		Asymptoten
$s_{00}A < 0$	spitze Hyperbel	
$s_{00}A = 0$	gleichseitige Hyperbel	$\alpha_1(x_1 - m_1) + \alpha_2(x_2 - m_2) = 0$
$s_{00}A > 0$	stumpfe Hyperbel	$\beta_1(x_1 - m_1) + \beta_2(x_2 - m_2) = 0$

Winkel der Asymptoten

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Länge der Achsen $a^2 = -\frac{A}{\lambda_1 A_{00}}$, $b^2 = \frac{A}{\lambda_2 A_{00}}$

$A_{00} = 0$	**Parabeln** $K(\mathfrak{x}) = a_{00} + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 = 0$

Achse der Parabel

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \frac{a_{01}a_{11} + a_{02}a_{12}}{s_{00}} = 0 \quad \text{oder} \quad a_{22}x_2 + a_{12}x_1 + \frac{a_{02}a_{22} + a_{01}a_{12}}{s_{00}} = 0$$

Scheiteltangente

$$-a_{12}x_1 + a_{11}x_2 + \frac{(a_{01}a_{11} + a_{02}a_{12})^2 + a_{00}a_{11}s_{00}^2}{2A_{02}s_{00}} = 0$$

oder

$$-a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + \frac{(a_{02}a_{22} + a_{01}a_{12})^2 + a_{00}a_{22}s_{00}^2}{2A_{01}s_{00}} = 0$$

Bestimmungsgleichungen für die Koordinaten des Scheitels $S(s_1, s_2)$

$$a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \frac{a_{01}a_{11} + a_{02}a_{12}}{s_{00}} = 0$$

$$2a_{01}s_1 + 2a_{02}s_2 + \frac{(a_{01}a_{11} + a_{02}a_{12})^2 + a_{00}a_{11}s_{00}^2}{2A_{02}s_{00}} = 0$$

oder

$$a_{22}s_2 + a_{12}s_1 + \frac{a_{02}a_{22} + a_{01}a_{12}}{s_{00}} = 0$$

$$2a_{02}s_2 + 2a_{01}s_1 + \frac{(a_{02}a_{22} + a_{01}a_{12})^2 + a_{00}a_{22}s_{00}^2}{2A_{01}s_{00}} = 0$$

Parameter der Parabel

$$p = \pm\sqrt{\frac{-A}{s_{00}^3}}$$