Kombinatorik für Geometer

I

Wolfgang STRÖHER

KOBINATORIK FÜR GEOMETER

Die Kombinatorik ist ein Teilgebiet der diskreten Mathematik. Die diskrete Mathematik befaßt sich mit der Theorie endlicher Gesamtheiten. Dabei verstehen wir unter einer endlichen Gesamtheit einen *Vorrat von endlich vielen Objekten.*

Die Objekte des Vorrates können *verschieden (unterscheidbar)* oder *gleichartig (identisch, ununterscheidbar)* sein.

Besteht der Vorrat aus lauter unterscheidbaren Objekten, so spricht man von einer *Menge* von Objekten. Die Objekte heißen dann *Elemente der Menge.*

Die Elemente einer Menge können *geordnet* sein. Ist

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

eine geordnete Menge, so schreibt man

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$$

Beispiele für geordnete Mengen: $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\{a, b, c, \ldots, z\}$

Die *Kombinatorik* geht von endlichen Vorräten aus und leitet daraus neue endliche Vorräte ab. Von den neu gewonnenen Vorräten wird gefordert

1. die Aufzählung
2. die Abzählung

Eine häufige Aufgabenstellung besteht in

3. Bestimmung der Anzahl der Möglichkeiten, einen Vorrat in vorgegebener Weise in Teilvorräte aufzuteilen (Aufteilung der vorhandenen Objekte in Schachteln)

Beispiele:

1. Wieviele "Wörter" zu je drei Buchstaben kann man aus dem Buchstabenvorrat aabc bilden? (Hier geht die alphabetische Ordnung ein.)

Aufzählung		Abzählung
aab	baa	12 Wörter
aac	bac	
aba	bca	
abc	caa	
aca	cab	
acb	cba	

2. Auf wieviele Arten kann man drei *verschiedene* Objekte auf zwei *verschiedene* Schachteln aufteilen?

Aufzählung

Schachtel

1	2
abc	–
ab	c
ac	b
bc	a
a	bc
b	ac
c	ab
–	abc

Abzählung

8 Möglichkeiten

3. Auf wieviele Arten kann man drei *verschiedene* Objekte auf zwei *verschiedene geordnete* Schachteln aufteilen?

Aufzählung

Schachtel		Schachtel		Schachtel		Schachtel	
1	2	1	2	1	2	1	2
abc	–	ab	c	a	bc	–	abc
acb	–	ba	c	a	cb	–	acb
bac	–	ac	b	b	ac	–	bac
bca	–	ca	b	b	ca	–	bca
cab	–	bc	a	c	ab	–	cab
cba	–	cb	a	c	ba	–	cba

Abzählung

24 Möglichkeiten

4. Auf wieviele Arten kann man drei *gleichartige* Ojekte in zwei *verschiedene* Schachteln aufteilen?

Aufzählung

Schachteln

1	2
aaa	–
aa	a
a	aa
–	aaa

Abzählung

4 Möglichkeiten

5. Auf wieviele Arten kann man drei *verschiedene* Objekte in zwei *gleichartige* Schachteln aufteilen?

Aufzählung		Abzählung
Schachteln		
		4 Möglichkeiten
abc	–	
ab	c	
ac	b	
bc	a	

6. Auf wieviele Arten kann man drei *gleiche* Objekte in zwei *gleiche* Schachteln aufteilen?

Aufzählung		Abzählung
Schachteln		
		2 Möglichkeiten
aaa	–	
aa	a	

Endliche Mengen

Aufzählung: $N = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ Abzählung: $|N| = n$

Aus einer gegebenen Menge N können weitere Mengen (bzw. Vorräte) abgeleitet werden, z.B. *Untermengen.*

Eine wichtige Möglichkeit, aus einer gegebenen Menge neue Objektvorräte herzuleiten, besteht in der Bildung des *r-fachen Kartesischen Produktes:*

$$\underbrace{N \times N \times \ldots \times N}_{r \text{ Faktoren}}$$

Die Elemente des Kartesischen Produktes sind die *r-tupel*

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ir}) \qquad a_{ik} \in N$$

In einem r-tupel kommt es bekanntlich auf die *Reihenfolge* der Elemente an, jedoch kann dasselbe Element mehrfach auftreten.

In der Kombinatorik spricht man nicht von r-tupeln, sondern man spricht von einer

$$\boxed{\text{r-Anordnung der Elemente von N (r-Permutation)}}$$

und unterscheidet

1. r-Anordnungen von n Elementen ohne Wiederholung (r-Permutationen von n Elementen o.W., Varationen o.W. von n Elementen zur r-ten Klasse)
2. r-Anordnungen von n Elementen mit Wiederholungen (r-Permutationen von n Elementen m.W., Variationen von n Elementen m.W. zur r-ten Klasse)

Legt man auf die Reihenfolge der Elemente keinen Wert, so spricht man von

r-Auswahlen der Elemente von N

und unterscheidet

3. r-Auswahlen aus n Elementen ohne Wiederholungen (Kombinationen von n Elementen zur r-ten Klasse o.W.)
   Die r-Auswahlen o.W. bilden die aus r Elementen bestehenden *Untermengen* von N
4. r-Auswahlen aus n Elementen mit Wiederholungen (Kombinationen von n Elementen zur r-ten Klasse m.W.)

Zählprinzipien

Verteilungsprinzip (Schubladenprinzip, Schachtelprinzip, Taubenschlagprinzip) von Lejeune DIRICHLET (1805-1859)

Gibt es mehr Objekte als Schubladen, so muß mindestens eine Schublade mehr als ein Objekt enthalten.
Allgemeiner:
Gibt es mehr als k-mal so viele Objekte als Schubladen, dann muß eine Schublade mindestens k+1 Objekte enthalten.

Multiplikationsprinzip

Wenn ein Vorgang in k hintereinader folgende Schritte zerlegt werden kann, sodaß für die Ausführung des 1.Schrittes r_1, für die Ausführung des 2.Schrittes $r_2, \ldots$, für die Ausführung des k-ten Schrittes r_k Möglichkeiten zur Auswahl stehen, so gibt es insgesamt $r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_k$ Möglichkeiten, die k Schritte auszuführen.

Additionsprinzip

Gibt es r_1 Möglichkeiten, ein Element aus der Menge A_1 zu wählen, r_2 Möglichkeiten, ein Element aus der Menge A_2 zu wählen, ..., r_k Möglichkeiten ein Element aus der Menge A_k zu wählen, *und sind die Mengen* A_1, A_2, ..., A_k *elementfremd*, so gibt es $r_1 + r_2 + \ldots + r_k$ Möglichkeiten, ein Element aus A_1 *oder* A_2 *oder* A_3 ... *oder* A_k (d.h. aus einer der Mengen A_i) zu wählen.

Elementare Zählfunktionen

Anordnungen

Anzahl der r-Anordnungen von n Elementen ohne Wiederholung ($r \le n$)

Es sind die n verschiedenen Elemente der Menge N auf r *numerierten* Plätzen anzuordnen:

Wahl des Elementes für den 1. Platz ...... n Möglichkeiten

Wahl des Elementes für den 2. Platz ...... n-1 Möglichkeiten

....

Wahl des Elementes für den r. Platz ......n-(r-1) Möglichkeiten

Daher nach dem Multiplikationsprinzip

$[n]_r := n(n-1)(n-2) \ldots (n-(r-1)) \quad (r \le n)$
Anzahl der r-Anordnungen von n Elementen o.W.

Diesen Sachverhalt kann man auch so interpretieren:

Die Anzahl der Verteilungsmöglichkeiten von n *verschiedenen* Objekten in r *verschiedene* Schachteln ($r \le n$), wobei in jeder Schachtel genau ein Objekt ist, beträgt $[n]_r$

Sonderfall: n = r

Die Anzahl der Anordnungen von n verschiedenen Elementen beträgt

$$[n]_n = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$

$[n]_n = n(n-1)\ldots 2.1 =: n!$
Definition: $0! := 1$

Symbol von Christian KRAMP (1760 -1826)

Mit Hilfe dieses Symbols können wir schreiben:

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{[n]_r} &:= n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-(r-1)) = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-(r-1)).[(n-r)\ldots 2.1]}{[(n-r)\ldots 2.1]} = \underline{\frac{n!}{(n-r)!}}\end{aligned}}$$

In der Literatur sind auch folgende Bezeichnungsweisen gebräuchlich:

$$[n]_r = \frac{n!}{(n-r)!} = P(n,r) = {}_nP_r = A_n^r = (n)_r = V(n,r) = V_n^r$$

Nunmehr seien n *verschiedene* Objekte und r *verschiedene* Schachteln gegeben, wobei aber jetzt $r \geq n$ sei (mehr Schachteln als Objekte). <u>Auf wieviele Arten kann man die n Objekte auf die r Schachteln verteilen, wobei in jeder Schachtel *maximal ein Objekt* ist?</u>

Das 1.Objekt kann auf r Arten in eine Schachtel gelegt werden

Das 2.Objekt kann auf r-1 Arten in eine Schachtel gelegt werden

....

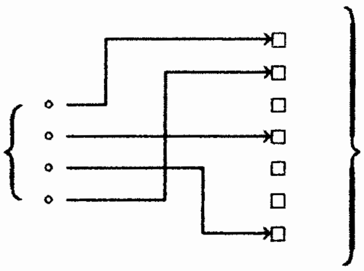
Das n-te Objekt kann auf r-(n-1) Arten in eine Schachtel gelegt werden

Daher ist die Anzahl der Verpackungsmöglichkeiten nach dem Multiplikationsprinzip

$$r(r-1)\ \ldots\ (r-(n-1)) = [r]_n = \frac{r!}{(r-n)!}$$

Man kann die Zuordnung der Elemente der Menge N in die Menge R der Schachteln als *Abbildung* auffassen:

n Objekte



r Schachteln

Da bei jeder Schachtel nur ein *Pfeil* endet, ist diese Abbildung *injektiv*

Die Anzahl der *injektiven Abbildungen* der n-elementigen Menge N in die r-elementige Menge R ($r \geq n$) ist $[r]_n$

Wir definieren das Polynom

$$[x]_r := x(x-1)(x-2)\ldots((x-(r-1)) = s_r^0 + s_r^1 x + s_r^2 x^2 + \ldots + s_r^r x^r$$

s_r^i STERLINGsche Zahlen der 1.Art

James STERLING (1692 - 1770)

Definitionsgemäß gilt

$$[x]_{r+1} := x(x-1)(x-2)\ldots((x-(r-1))(x-r) = [x]_r(x-r)$$

daher

$$s_{r+1}^0 + s_{r+1}^1 x + \ldots + s_{r+1}^k x^k + \ldots + s_{r+1}^{r+1} x^{r+1} =$$

$$= [s_r^0 + s_r^1 x + s_r^2 x^2 + \ldots + s_r^{k-1} x^{k-1} + s_r^k x^k + \ldots + s_r^r x^r](x-r)$$

Vergleich der Koeffizienten von x^k ergibt die

> Rekursionsformel für die STERLINGschen Zahlen der 1.Art
>
> $$s_{r+1}^k = s_r^{k-1} - r.s_r^k$$
>
> $$s_r^0 = 0, \quad s_r^r = 1$$

Man erkennt unmittelbar

> Befinden sich unter n Objekten m gleichartige, so ist die Anzahl der Anordnungen gleich
>
> $$\frac{n!}{m!}$$
>
> Allgemeiner:
>
> Befinden sich unter n Objekten k Gruppen von je $m_1, m_2, \ldots, m_k$ gleichartigen Objekten, so ist die Anzahl der möglichen Anordnungen gleich
>
> $$\frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$$

Anzahl der r-Anordnungen von n verschiedenen Objekten m.W.

Besetzung der 1.Stelle auf n Arten möglich

Besetzung der 2.Stelle auf n Arten möglich

....

Besetzung der r.Stelle auf n Arten möglich

Aus dem Multiplikatiolnsprinzip folgt daher

Die Anzahl der r-Anordnungen mit Wiederholungen von n verschiedenen Objekten ist auf

$$n^r \text{ Arten}$$

möglich

Als Gegenstück betrachten wir folgende Aufgabe:

Verpackung von n *verschiedenen* Objekten in n *verschiedene Schachteln*, wobei in einer Schachtel auch mehrere Objekte verpackt werden können.

Das 1. Objekt kann man auf r Arten Verpacken

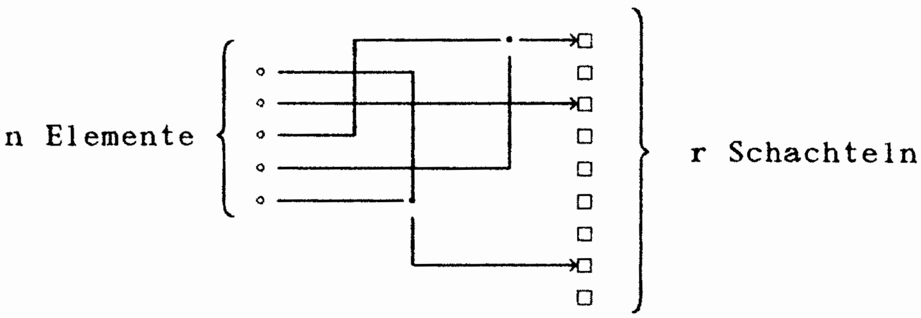
Das 2. Objekt kann man auf r Arten Verpacken

....

Das n. Objekt kann man auf r Arten Verpacken

Nach dem Multiplikationsprinzip gibt es daher

$$r^n \text{ Möglichkeiten}$$



n *verschiedene* Objekte kann man auf

$$r^n$$

Arten in r *verschiedene* Schachteln verteilen.

Von der Menge N ($|N| = n$) gibt es

$$r^n$$

Abbildungen in die Menge R ($|R| = r$)

Auswahlen

r-Auswahlen o.W.aus n verschiedenen Objekten.

Wir bestimmen zunächst die r-Anordnungen von n verschiedenen Objekten o.W. Es gibt insgesamt

$$[n]_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Da jeweils r! Anordnungen als identisch anzusehen sind, gibt es insgesamt

$$\binom{n}{r} := \frac{n!}{(n-r)!.r!}$$

Möglichkeiten.

Das Symbol $\binom{n}{r}$ stammt von Leonhard EULER 1781 (1707-1783).

Aus der Definition ergibt sich:

$$\underline{\binom{n}{r}} = \frac{n!}{(n-r)!.r!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(r-1))}{(n-r)!} = \frac{[n]_r}{r!}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-r-1))}{r!} = \frac{[n]_{n-r}}{(n-r)!} = \underline{\binom{n}{n-r}}$$

Es gilt also die Beziehung

$$\boxed{\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}}$$

Diese Beziehung leuchtet auch begrifflich ein, denn jeder r-Auswahl aus n Elementen entspricht bijektiv eine (n-r)-Auswahl aus n Elementen.

Folgende Schreibweisen treten in der Literatur auf:

$$\frac{n!}{(n-r)!.r!} = \binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{[n]_r}{r!} = C_n^r$$

Folgende Definitionen sind nützlich:

$$\binom{n}{0} := 1, \quad \binom{0}{0} := 1, \quad \binom{n}{n} := 1, \quad \binom{n}{r} := 0 \text{ für } r>n>0$$

$$\binom{-n}{r} := \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-(r-1))}{r!} = (-1)^r \frac{n(n+1)\ldots(n+(r-1))}{r!} =$$

$$= (-1)^r \frac{(n+(r-1))!}{r!(n-1)!} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{n-1}$$

Setzen wir noch

$$\boxed{[n]^r := n(n+1)(n+2)\ldots((n+(r-1))}$$

so ergeben sich folgende Formeln für das EULERsche Symbol

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{[n]_r}{r!} \qquad n\geq r\geq 0$$

$$\binom{n}{0} := 1, \quad \binom{0}{0} := 1, \quad \binom{n}{n} := 1, \quad \binom{n}{r} := 0 \text{ für } r>n>0$$

$$\binom{-n}{r} := (-1)^r\binom{n+r-1}{r} = (-1)^r\binom{n+r-1}{n-1} \text{ für } r>0,\ n>0$$

Wir betrachten nun das Polynom

$$[y]^r := y(y+1)(y+2)\dots(y+(r-1))$$

Auf Seite 7 hatten wir

$$[x]_r := x(x-1)(x-2)\dots(x-(r-1)) = \sum_{k=0}^{r} s_r^k x^k$$

Die Koeffizienten sind die STERLINGschen Zahlen 1.Art.
Setzen wir nun $x:= -y$, so folgt

$$[x]_r := x(x-1)(x-2)\dots(x-(r-1)) = \sum_{k=0}^{r} s_r^k x^k = \sum_{k=0}^{r} s_r^k (-y)^k =$$

$$= (-y)(-y-1)(-y-2)\dots(-y-(r-1)) = (-1)^r y(y+1)(y+2)\dots(y+(r-1)) =$$

$$= (-1)^r [y]^r = \sum_{k=0}^{r} s_r^k (-y)^k$$

Daher gilt

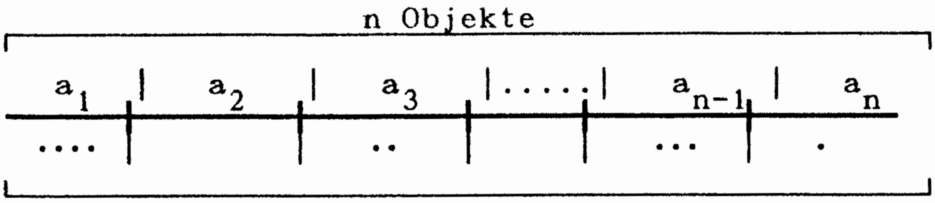
$$\boxed{[y]^r = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r+k} . s_r^k y^k}$$

Es sei nun $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ eine *geordnete Menge* $(a_1<a_2<\dots<a_n)$. Da es bei einer r-Auswahl auf die Reihenfolge der Objekte nicht ankommt, kann man die ausgewählten Objekte $a_{i1}<a_{i2}<\dots<a_{ir}$ der Größe nach ordnen. Daher gilt

> Die Anzahl der strikt steigenden r-Auswahlen aus einer geordneten Menge von n Elementen ist
>
> $$\binom{n}{r}$$

r-Auswahlen m.W.aus n verschiedenen Objekten.

Die gegebenen Objekte seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Wir ordnen die Objekte in einer Reihe an und machen unter jedes Objekt so viele Punkte, als das Objekt in der Auswahl auftritt.



System von r Punkten und n-1 Strichen

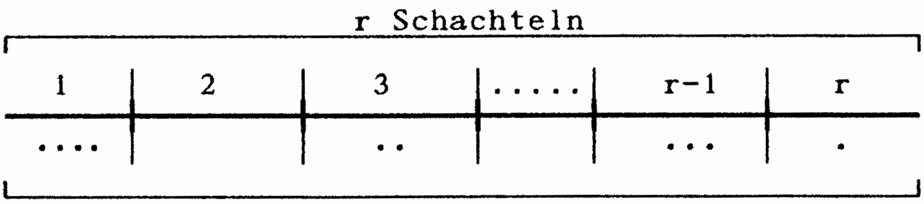
Der getroffenen Auswahl entspricht in der untern Hälfte des obigen Schemas ein System von r Punkten und n-1 Strichen, also von insgesamt (n+r-1) Zeichen, die sich auf (n+r-1)! Arten anordnen lassen. Von diesen Zeichen sind je r bzw. n-1 gleich, so daß die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten beträgt

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!(r!)} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

> Es gibt
>
> $$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$
>
> Möglichkeiten, aus n verschiedenen Objekten r-Auswahlen mit Wiederholungen zu treffen

Das analoge Verteilungsproblem lautet:

Verteilung von n *gleichartigen* Objekten in r *verschiedene Schachteln*



System von n Punkten und r-1 Strichen

Es treten n Punkte und r-1 Striche, also n+r-1 Zeichen, von denen je n bzw. r-1 gleich sind. Daher Anzahl der Verteilungsmöglichkeiten

$$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} = \binom{n+r-1}{n} = \binom{n+r-1}{r-1}$$

n *gleichartige* Objekte können auf

$$\binom{n+r-1}{n} = \binom{n+r-1}{r-1}$$

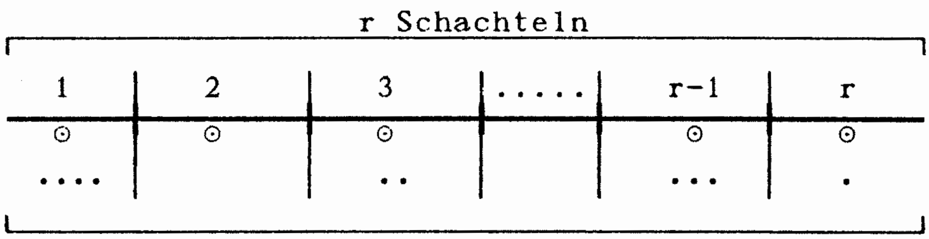
Arten in r *verschiedene* Schachteln verteilt werden

Ist die Menge $\{a_1,\ldots,a_n\}$ *geordnet* $(a_1<\ldots<a_n)$, so kann man r-Auswahlen m.W. treffen, wobei die ausgewählten Elemente *nicht fallend* angeordnet werden können $(a_{i_1}\le a_{i_2}\le\ldots\le a_{i_r})$.

Die Anzahl der nicht fallenden Auswahlen m.W. aus einer geordneten Menge ist

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

Verteilung von n *gleichartigen* Objekten in r *verschiedene* Schachteln (n≥r), wobei in jeder Schachtel mindestens ein Objekt liegt.



System von n-r Punkten und r-1 Strichen

In jede der Schachteln legen wir zunächst ein "Pflichtstück", die restlichen n-r Objekte verteilen wir beliebig auf die r Schachteln. Es treten daher insgesamt noch (r-1)+(n-r) Zeichen auf, von denen je r-1, bzw. n-r gleichartig sind. Anzahl der Möglichkeiten daher:

$$\frac{((r-1)+(n-r))!}{(r-1)!(n-r)!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = \binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{n-r}$$

Man kann auf

$$\binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{n-r}$$

Arten n gleichartige Objekte in r verschiedene Schachteln ($n \geq r$) verteilen, wobei in jeder Schachtel mindesten ein Objekt liegt.

Anzahl der r-Auswahlen aus n verschiedenen Objekten, die mindestens eines von p gegebenen Objekten enthalten.

Wir müssen von der Anzahl $\binom{n}{r}$ aller r-Auswahlen jene Auswahlen abziehen, die überhaupt keines der p Objekte enthalten. Deren Anzahl ist $\binom{n-p}{r}$.

Die Anzahl der r-Auswahlen aus n verschiedenen Objekten, die mindestens eines von p vorgegebenen Objekten enthalten, ist

$$\binom{n}{r} - \binom{n-p}{r}$$

Beispiel: Eine Urne enthalte n durch Numerierung *unterscheidbare* Kugeln, von denen s schwarz und w weiß sind ($s+w = n$). Wieviele Möglichkeiten gibt es, daß unter r gezogenen Kugeln genau k schwarze sind ($k \leq s$)?

$\binom{s}{k}$...Anzahl der Möglichkeiten, aus den s schwarzen Kugeln k auszuwählen.

$\binom{w}{r-k}$.Anzahl der Möglichkeiten, aus den w weißen Kugeln noch r-k Kugeln zu ziehen. Daher gibt es nach dem Multiplikationsprinzip

$$\binom{s}{k} \cdot \binom{w}{r-k} \text{ Möglichkeiten.}$$

Wären die Kugeln *nicht unterscheidbar*, gäbe es nur die eine Möglichkeit

k schwarze, r-k weiße Kugeln

Formeln für das Symbol von EULER

Es sollen die wichtigsten Formeln für das EULER-Symbol hergeleitet werden, wobei jede Formel als Ergebnis einer Auswahl-Aufgabe erscheint.

Aufgabe: Gegeben sei ein Vorrat von n *verschiedenen* Objekten $a_1, \ldots, a_n$. Daraus lassen sich $\binom{n}{r}$ r-Auswahlen bilden. Wir zeichnen zunächst ein Objekt aus, das wir aus unserem Vorrat entfernen. Aus den verbleibenden n-1 Elementen lassen sich $\binom{n-1}{r}$ r-Auswahlen bilden. Nunmehr bilden wir jene r-Auswahlen, welche sämtlich das bisher entfernte Objekt enthalten, d.h. wir haben aus den n-1 verbleibenden Objekten noch eine (r-1)-Auswahl zu treffen, zu deren jeder das zunächst entfernte Objekt hinzugefügt wird. Es gibt daher genau $\binom{n-1}{r-1}$ r-Auswahlen, die das besagte Element enhalten. Insgesamt gilt daher

$$\boxed{\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}}$$

Diese Formel wurde 1544 von Michel STIFEL (1487?-1567) und 1654 von Blaise PASCAL (1623-1662) angegeben. Sie tritt aber bereits im 12.Jhdt. bei den Arabern und im 14.Jhdt. bei den Chinesen auf.

Verallgemeinerung: Wir betrachten die Menge *unterschiedlicher* Elemente

$$\{a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q\} \qquad p+q = n$$

Die Menge aller möglichen r-Auswahlen ist $\binom{p+q}{r}$.

1.Fall $r \geq q$. Unter allen r-Auswahlen bilden wir zunächst jene, die sämliche q Elemente $b_1, \ldots, b_q$ enthalten. Es sind dies $\binom{p}{r-q}$, da wir die q Elemente b_i durch r-q Elemente aus $a_1, \ldots, a_p$ zu einem r-tupel ergänzen müssen.

Dann bilden wir jene r-Auswahlen, die nur q-1 der b_i enthalten. Da wir auf $\binom{q}{q-1}$ Arten diese Elemente auswählen können und dann jede dieser Auswahlen auf $\binom{p}{r-(q-1)}$ Arten durch Hinzunahme von $r-(q-1)$ Elementen a_i zu einem r-tupel ergänzen können, gibt es nach dem Multiplikationsprinzip insgesamt $\binom{q}{q-1}\cdot\binom{p}{r-(q-1)}$ r-Auswahlen, welche $q-1$ Elemente b_i enthalten.

Allgemeiner: Es gibt $\binom{q}{q-i}\cdot\binom{p}{r-(q-i)}$ r-Auswahlen mit $q-i$ Elementen b_i.. Daher gilt

$$\binom{p+q}{r} = \binom{q}{q}\cdot\binom{p}{r-q}+\binom{q}{q-1}\cdot\binom{p}{r-(q-1)}+\ \ldots+\binom{q}{q-i}\cdot\binom{p}{r-(q-i)}+\ldots+\binom{q}{0}\cdot\binom{p}{r}$$

Daher

$$\binom{p+q}{r} = \sum_{i=0}^{q}\binom{q}{q-i}\cdot\binom{p}{r-(q-i)}$$

Setzen wir

$q-i =: j$, so folgt für die Grenzen obiger Summe $\begin{cases} i = 0 \Rightarrow j = q \\ i = q \Rightarrow j = 0 \end{cases}$

Man kann also setzen

$$\binom{p+q}{r} = \sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}\cdot\binom{p}{r-j}$$

Hinzunahme der Voraussetzung ergibt also $0 \leq j \leq q \leq r$. Da nach Seite 10 in obiger Summe der Faktor $\binom{q}{j}$ verschwindet, sobald $j>q$ wird, kann man ohne Schaden die obere Grenze q durch r ersetzen, sodaß gilt

$$\binom{p+q}{r} = \sum_{j=0}^{r}\binom{q}{j}\cdot\binom{p}{r-j}$$

2.Fall $q\geq r$. Wir bilden in Analogie zum 1.Fall alle r-Auswahlen, die nur aus b_i bestehn, dann jene, welche ein Element a_j enthalten usw. Dann gilt

$$\binom{p+r}{r} = \binom{q}{r}\cdot\binom{p}{0}+\binom{q}{r-1}\cdot\binom{p}{1}+\ldots+\binom{q}{r-i}\cdot\binom{p}{i}+\ldots+\binom{q}{0}\cdot\binom{p}{r}$$

Daher gilt in beiden Fällen

$$\binom{p+q}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{q}{i} \cdot \binom{p}{r-i}$$

Formel von Alexandre Théophil VANDERMONDE (1735 - 1796)

Aufgabe: Aus einem Vorrat von n *verschiedenen* Objekten werden m Objekte ausgewählt, aus denen wieder r Objekte ($m \geq r$) ausgewählt werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl der r Objekte?

1.Methode:

Auswahl von m aus n Objekten ..... $\binom{n}{m}$ Mögl.

Auswahl von r aus m Objekten ..... $\binom{m}{r}$ Mögl.

Insgesamt $\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{r}$ Mögl.

2.Methode: Zunächst wählen wir aus den gegebenen n Objekten r auf $\binom{n}{r}$ Arten aus. Jede dieser Auswahlen ergänzen wir aus den verbliebenen n−r Objekten auf m Objekte. Die ergänzenden m−r Objekte lassen sich auf $\binom{n-r}{m-r}$ Arten auswählen, sodaß sich insgesamt $\binom{n}{r} \cdot \binom{n-r}{m-r}$ Möglichkeiten ergeben. Vergleich der 1. und 2. Methode liefert die Formel

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \cdot \binom{n-r}{m-r}$$

Sonderfall: $m = r+1$. Dann gilt

$$\binom{n}{r+1} \cdot \binom{r+1}{r} = \binom{n}{r} \cdot \binom{n-r}{(r+1)-r} = \binom{n}{r+1} \cdot (r+1) = \binom{n}{r} \cdot (n-r) \text{ daher}$$

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1} \binom{n}{r}$$

Binomialkoeffizienten

Bilden wir unter Beachtung der Reihenfolge der Faktoren die Produkte

$(a+x)(a+x) = aa + xa + ax + xx$

$(a+x)(a+x)(a+x) = aaa + xaa + axa + xxa + aax + xax + axx + xxx$

In der zweiten Zeile besteht jeder Summand aus drei Faktoren, die teils a, teils x sind. Es kann also jede der drei Stellen mit a oder x besetzt werden, daher treten $2^3 = 8$ Summanden auf.

<u>Allgemein:</u> $\underbrace{(a+x)\ldots(a+x)}_{n \text{ Faktoren}}$ ...Insgesamt 2^n Summanden

Jeder Summand hat (nach Zusammenfassung seiner Faktoren) die Bauart

$$a^{n-k}x^k$$

Wieviele Summanden für ein festes k gibt es? Ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, von den n Faktoren eines Summanden k auszuwählen und sie mit x zu besetzen. Davon gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Daher gilt

$$(a+x)^n = \binom{n}{0}a^n x^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \ldots = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}a^{n-i}x^i$$

Aus diesem Grunde bezeichnet man die EULERschen Symbole auch als *Binomialkoeffizienten.*

Es gelten folgende Beziehungen:

$$a = x = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = (1+1)^n = 2^n, \text{ also } \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots \binom{n}{n-1}+\binom{n}{n} = 2^n$$

$$a = 1,\ x = -1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0, \text{ also } \binom{n}{0}-\binom{n}{1}\pm\ldots+(-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

Aus der letzten Formel folgt

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots = \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots$$

Daher unter Berücksichtigung der ersten Formel

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n} = 2\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots\right] = 2\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots\right] = 2^n$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2i} = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2i+1} = 2^{(n-1)}}$$

Multinomialzahlen

Auf wieviele Arten lassen sich n *verschiedene* Objekte in k *verschiedene* Schachteln aufteilen, wenn in den Schachteln der Reihe nach $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Objekte liegen sollen ($n_1+n_2+\ldots+n_k = n$)?

Die n_1 Objekte der 1.Schachtel kann man auf $\binom{n}{n_1}$ Arten auswählen, die der 2.Schachtel auf $\binom{n-n_1}{n_2}$ Arten usw. Daher gibt es insgesasmt nach dem Multiplikationsprinzip folgende Möglichkeiten

$$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \ldots \binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \cdots \frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{n_k! \underbrace{(n-n_1-\ldots-n_{k-1}-n_k)!}_{0!}}$$

$$= \underline{\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}}$$

Anderweitiges Auftreten dieses Ausdrucks

Bei Entwicklung des Ausdrucks $(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n$ entsteht eine Summe, deren einzelne Summanden die Gestalt

$$a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k} \qquad (n_1+n_2+\ldots+n_k = n)$$

aufweisen, d.h.von den n Faktoren jedes Summanden sind n_1 mit a_1, n_2 mit a_2 ... zu besetzen. Dies ist auf

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Arten möglich, da von den n! Möglichkeiten der Besetzung eines Faktors jeweils $n_1!$, $n_2!$,... gleich sind. Daher gilt

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k=0\\(n_1+\ldots+n_k=n)}}^{n} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.a_1^{n_1}.a_2^{n_2}\ldots a_k^{n_k}$$

Man nennt die hier auftretenden Koeffizienten *Multinomialkoeffizienten* und definiert:

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k} := \begin{cases} \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} & \text{wenn } n_1+\ldots+n_k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Weitere Formeln: Es gilt

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k=0\\(n_1+\ldots+n_k=n)}}^{n} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.a_1^{n_1}.a_2^{n_2}\ldots a_k^{n_k} \qquad (*)$$

Sei nun $n = p + q$. Dann gilt

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^{p+q} = (a_1+a_2+\ldots+a_k)^p.(a_1+a_2+\ldots+a_k)^q =$$

$$= \left(\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k=0 \\ (i_1+\ldots+i_k=p)}}^{p} \frac{p!}{i_1!i_2!\ldots i_k!} . a_1^{i_1} . a_2^{i_2} \ldots a_k^{i_k} \right) .$$

$$. \left(\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k=0 \\ (j_1+\ldots+j_k=q)}}^{q} \frac{q!}{j_1!j_2!\ldots j_k!} . a_1^{j_1} . a_2^{j_2} \ldots a_k^{j_k} \right) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k=0 \\ (i_1+\ldots+i_k=p)}}^{p} \quad \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k=0 \\ (j_1+\ldots+j_k=q)}}^{q} \frac{p!q!}{i_1!i_2!\ldots i_k!j_1!j_2!\ldots j_k!} . a_1^{i_1+j_1} \ldots a_k^{i_k+j_k}$$

Setzen wir $n_t = i_t + j_t$ $(t = 1,\ldots,k)$, so können wir den Index j_t durch den Index n_t vermöge $j_t = n_t - i_t$ ersetzen. Da die Werte von i_t und j_t zwischen 0 und p bzw. zwischen 0 und q variieren, schwankt n_t zwischen 0 und $p+q = n$. Bei Ersatz von j_t durch n_t nimmt also obige Doppelsumme folgende Gestalt an

$$\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k=0 \\ (n_1+\ldots+n_k=n)}}^{n} \quad \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k=0 \\ (i_1+\ldots+i_k=p)}}^{p} \frac{p!q!}{i_1!\ldots i_k!(n_1-i_1)!\ldots(n_k-i_k)!} . a_1^{n_1} \ldots a_k^{n_k}$$

Vergleich mit (*) ergibt

$$\boxed{\binom{p+q}{n_1,\ldots,n_k} = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k=0 \\ (i_1+\ldots+i_k=p)}}^{p} \binom{p}{i_1,\ldots,i_p} \cdot \binom{q}{n_1-i_1,\ldots,n_k-i_k}}$$

Setzt man in (*) $a_1 = \ldots = a_k = 1$, so gilt

$$\boxed{k^n = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k=0 \\ (n_1+\ldots+n_k=n)}}^{n} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}}$$

Setzt man in (*) $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 1$
$a_2 = a_4 = a_6 = \ldots = -1$

so gilt

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n = \begin{cases} (1-1+\ldots+1-1)^n = 0, & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ (1-1+\ldots-1+1)^n = 1, & \text{wenn } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

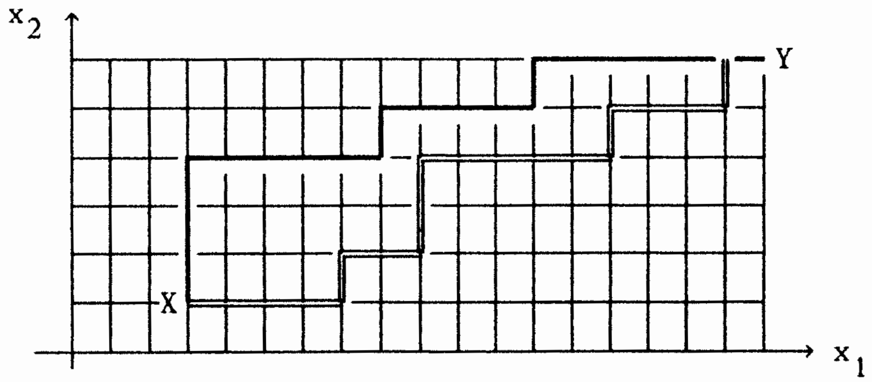
daher

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n = \frac{1}{2}\left[1-(-1)^k\right]$$

daraus

$$\boxed{\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k=0 \\ (n_1+\ldots+n_k=n)}}^{n} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}(-1)^{n_2+n_4+n_6+\ldots} = \frac{1}{2}\left[1-(-1)^k\right]}$$

Blockwanderungen



Der Gitterpunkt $Y(y_1,y_2)$ soll ausgehend von Gitterpunkt $X(x_1,x_2)$ ausschließlich durch Schritte nach rechts (r) oder nach oben (o) erreicht werden. Schritte nach links oder unten sind verboten. Es sei

$$y_1-x_1 = n_1 \qquad y_2-x_2 = n_2$$

Von X nach Y gelangt man daher durch eine Folge von n_1 Rechtsschritten und eine Folge von n_2 Schritten nach oben, also sind insgesamt $n = n_1+n_2$ Schritte zu tun.

Wir haben demnach von n Stellen n_1 Stellen mit r und n_2 Stellen mit o zu besetzen. In obigem Beispiel ist

$$n_1 = 15,\ n_2 = 5,\ n = n_1 + n_2 = 20$$

Für die eingezeichneten Möglichkeiten gilt

———	o o o r r r r r o r r r r o r r r r r r
═══	r r r r o r r r o o r r r r r o r r r r o r

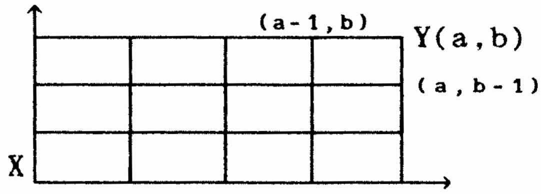
Es sind somit von den n Stellen ("Schritten") n_1 auszuwählen und mit r zu besetzen. Das ist auf

$$\binom{n}{n_1} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} = \frac{n!}{n_1!n_2!} = \frac{n!}{(n-n_2)!n_2!} = \binom{n}{n_2}$$

Arten möglich.

Anzahl der Wege von X nach Y
$\binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}$

Anwendungen des Blockwanderns



Ein Wanderer erreicht den Punkt Y(a,b) vom Punkt (a-1,b) *oder* vom Punkt (a,b-1) aus jeweils in *eindeutiger* Weise.

Anzahl der Wege von X nach (a-1,b) .... $\binom{a+b-1}{b}$

Anzahl der Wege von X nach (a,b-1) .... $\binom{a+b-1}{b-1}$

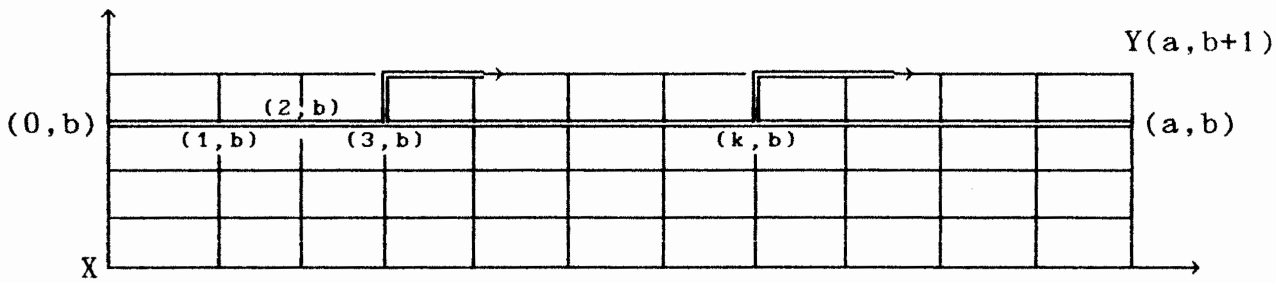
Anzahl der Wege von X nach (a,b) .... $\binom{a+b}{b}$

Da man (a,b) über (a-1,b) *oder* über (a,b-1) erreichen kann, folgt nach dem Additionsprinzip

$$\binom{a+b}{b} = \binom{a+b-1}{b} + \binom{a+b-1}{b-1}$$

Setzt man a+b = n, b = r, so gilt (Siehe Seite 14)

$$\boxed{\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}}$$

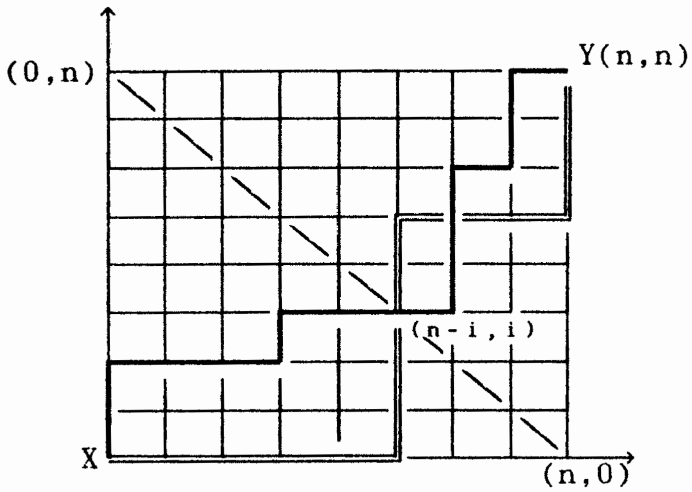


Der Punkt Y(a,b+1) soll so erreicht werden, daß der Wanderer zuerst einen der Punkte (0,b) *oder* (1,b) *oder* (2,b)...erreicht, dann einen Schritt nach oben macht und dann nur mehr nach rechts gehen kann, um Y zu erreichen. Ist z.B. der Punkt (k,b) erreicht, ist der weitere Weg eindeutig vorgezeichnet. Die Anzahl der Möglichkeiten, Y(a,b+1) zu erreichen, ist daher gleich der Summe der Möglichkeiten, einen der Punkte (k,b) zu erreichen:

$$\binom{a+b+1}{b+1} = \binom{b}{b} + \binom{b+1}{b} + \binom{b+2}{b} + \ldots + \binom{b+a}{b}$$

Setzt man $a + b = n$, $b = r$, so folgt

$$\boxed{\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1} = \sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r}}$$



Gegeben sei ein quadratischer Raster von der Seitenlänge n. Die Anzahl der Wege von X nach Y ist dann

$$\binom{2n}{n}$$

Jeder beliebige Weg von X nach Y muß dann die die Punkte (0,n), (n,0) verbindende Diagonale in einem Punkt (n-i,i) treffen. Die Anzahl der Wege von X bis nach (n-i,i) ist dann

$$\binom{(n-i)+i}{i} = \binom{n}{i}$$

Die Anzahl der Wege von (n-i,i) bis (n,n) ist

$$\binom{n-(n-i) + (n-i)}{n-(n-i)} = \binom{n}{i}$$

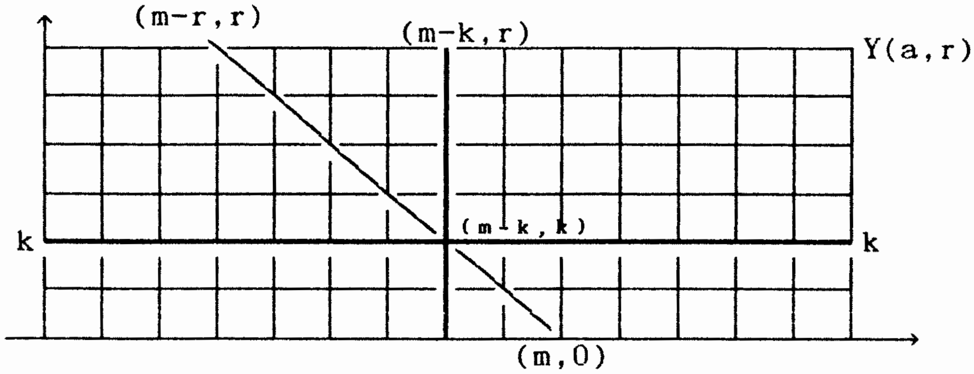
Nach dem Multiplikationsprinzip ist die Anzahl der Wege von X nach Y über den festen Punkt (n-i,i) daher

$$\binom{n}{i}^2$$

Die Menge *aller* Wege ist daher nach dem Additionsprinzip

$$\boxed{\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2}$$

Verallgemeinerung:



Anzahl der Wege von X nach (m-k,k) ist

$$\binom{(m-k)+k}{k} = \binom{m}{k}$$

Anzahl der Wege von (m-k,k) nach (a,r)

$$\binom{a-(m-k)+(r-k)}{r-k} = \binom{a-m+r}{r-k}$$

Daher ist die Anzahl der Wege über den festen Punkt (m-k,k) gleich

$$\binom{m}{k} \cdot \binom{a-m+r}{r-k}$$

Demnach ist die Anzahl *aller* Wege von X nach Y

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \cdot \binom{a-m+r}{r-k} = \binom{a+r}{r}$$

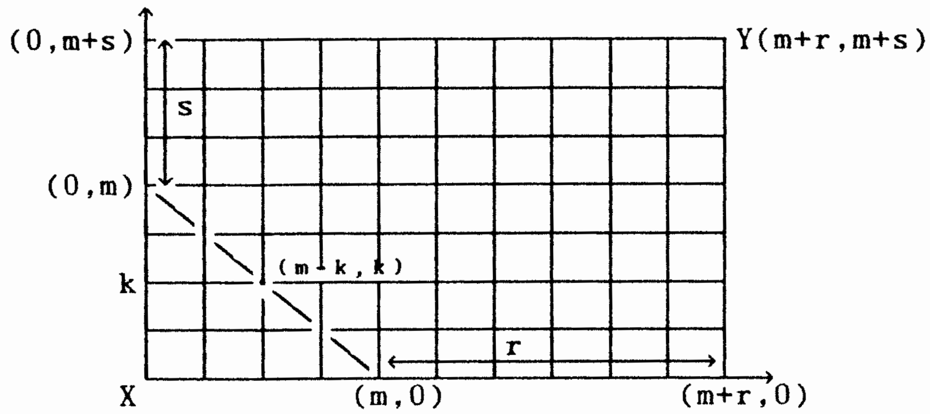
Setzt man $a-m+r = n \Rightarrow a+r = m+n$, so wird

$$\boxed{\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}}$$

Der Sonderfall $m = n$ ergibt

$$\boxed{\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{r-k} = \binom{2n}{r}}$$

Andere Anordnung:



Anzahl der Wege von X nach (m-k,k): $\binom{(m-k)+k}{k} = \binom{m}{k}$

Anzahl der Wege von (m-k,k) nach Y: $\binom{(m+r)-(m-k)+(m+s)-k}{(m+r)-(m-k)} = \binom{m+r+s}{r+k}$

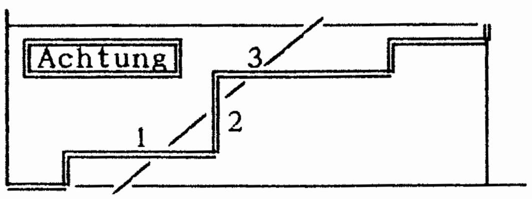
Daher Anzahl der Wege von X über (m-k,k): $\binom{m}{k} \cdot \binom{m+r+s}{r+k}$

Die Anzahl aller Wege von X nach Y zu beträgt daher

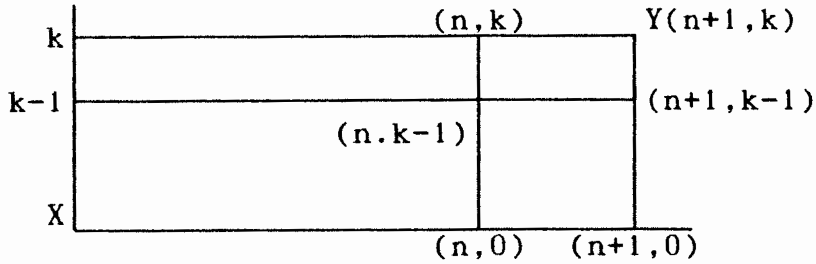
$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot \binom{m+r+s}{r+k} = \binom{2m+r+s}{r+m}$$

Setzt man n:= m+r+s ⇒ r+s = n-m, also 2m+r+s = n+m

$$\boxed{\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{r+k} = \binom{n+m}{r+m}}$$



Eine nach rechts ansteigende Transversale kann nicht verwendet werden. da der eingezeichnete Weg wegen der Kreuzungspunkte 1,2,3 dreifach gezählt würde!



Den Punkt Y(n+1,k) kann man von X aus entweder über (n+1,k-1) *oder* über (n,k) erreichen.

Anzahl der Wege zu (n+1,k-1): $\binom{(n+1)+(k-1)}{k-1} = \binom{n+k}{k-1}$

Anzahl der Wege zu (n,k): $\binom{n+k}{k}$

Daher Anzahl aller Wege zu (n+1,k):

$$\binom{n+k}{k-1} + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

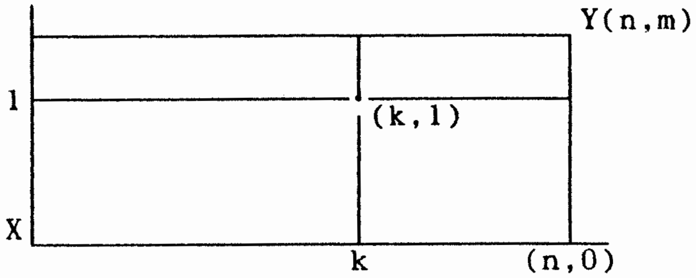
Bilden wir diese Ausdrücke für k = 1,..,r und summieren (bei Beachtung von $\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} = 1$):

$$\left.\begin{array}{ll}
k=1 & \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+2}{1} \\
k=2 & \binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{2} \\
k=3 & \binom{n+3}{2} + \binom{n+3}{3} = \binom{n+4}{3} \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k=r-1 & \binom{n+r-1}{r-2} + \binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r}{r-1} \\
k=r & \binom{n+r}{r-1} + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r} \\ \hline
\end{array}\right\} +$$

Daher

$$\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r} = \sum^{r} \binom{n+k}{k}}$$

Anzahl der Wege über einen festen Punkt



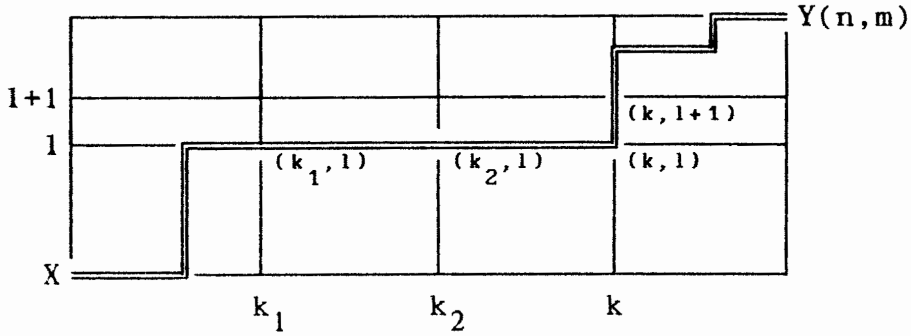
Anzahl der Wege von X nach (k,l): $\binom{k+l}{l}$

Anzahl der Wege von (k,l) nach Y: $\binom{(n-k)+(m-l)}{n-k}$

Daher Gesamtzahl der Wege von x nach Y über den festen Punkt (k,l):

$$\binom{k+l}{l}\cdot\binom{(n-k)+(m-l)}{n-k}$$

Warnung vor einer falschen Überlegung



Man könnte meinen, daß man bei Festhalten der Ordinate l und Veränderung der Abszisse k alle Wege von X nach Y erhält. Man erhält zwar alle Wege, zählt sie aber mehrfach. So würde *derselbe* Weg jeweils beim Passieren der Punkte (k_1,l), (k_2,l), (k,l) neuerlich gezählt werden.

Um Eindeutigkeit zu erreichen, betrachten wir jenen Punkt (k,l), bei dem der Weg, der einen Teil der Geraden l entlang läuft, von der Geraden l abzweigt. Notwendig erreicht er dann den Punkt (k,l+1). Ab hier kann sich der Wege wieder beliebig verzweigen. Die Anzahl der Wege von x nach (k,l) beträgt

$$\binom{k+l}{l}$$

Der Schritt von (k,l) nach $(k,l+1)$ ist *eindeutig* und ab hier gibt es

$$\binom{(n-k)+(m-(l+1))}{m-(l+1)}$$

Wege nach Y. Beibehaltung von l und Veränderung von k liefert jetzt alle Wege von X nach Y, aber *jeden nur einmal*. Daher gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+l}{l} \cdot \binom{n-k+m-l-1}{m-l-1} = \binom{m+n}{m}$$

Setzt man $m-l-1 = r \Rightarrow m = r+l+1$, so gilt

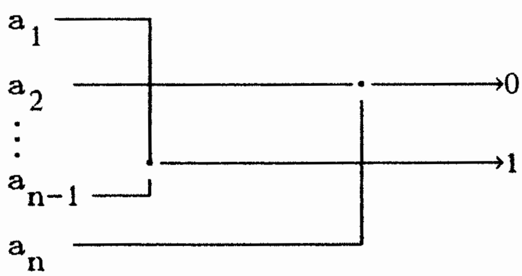
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+l}{l} \binom{n+r-k}{r} = \binom{n+r+l+1}{r+l+1}$$

mit $n+r = s \Rightarrow$ ergibt sich endlich

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{k+l}{l} \cdot \binom{s-k}{r} = \binom{s+l+1}{r+l+1}}$$

Teilmengen einer endlichen Menge. Die Zahlen von FIBONACCI

Gegeben sei die Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Eine ihrer Teilmengen kommt zustande, indem man die Elemente a_i auf die Elemente der Menge $\{0,1\}$ abbildet, je nachdem, ob a_i der Teilmenge angehört oder nicht.



Für jedes der n Elemente $a_1, \ldots a_n$ gibt es also zwei Möglichkeiten (Menge der Abbildungen einer n-elementigen in eine 2-elementige Menge). Daher hat eine n-elementige Menge

$$\boxed{2^n \text{ Teilmengen}}$$

inclusive der leeren Menge und der gegebenen Menge selbst.

Anzahl der Teilmengen mit genau r Elementen ($r \le n$)

r von den n Elemente der Menge sind mit 1 zu belegen $\Leftrightarrow$ *Auswahl* von r aus n Stellen.

$$\boxed{\binom{n}{r} \text{ Teilmengen mit r Elementen}}$$

Gesucht: Anzahl der r-elementigen Untermengen einer *geordneten* Menge, bei denen keine *aufeinanderfolgenden* Elemente a_i, a_{i+1} auftreten.

Wir ordnen die Elemente der Reihenfolge nach an. Bei Bildung der Untermenge haben wir r Stellen mit 1 zu belegen, dürfen aber nie zwei Einser nebeneinander setzen

$$\begin{array}{cccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_i & a_{i+1} & \dots & a_j & \dots & a_n \\ & 1 & 0 & & & 1 & 0 & & 1 & & \end{array}$$

1.Abschn. | 2.Abschn. .... | ....r.Abschn. | (r+1).Abschn.

r Einser, r−1 Nullen

Es entstehen r+1 Abschnitte, die wir mit $n-r-(r-1) = n-2r+1$ Nullen ausfüllen.

Wir haben also die Anordnung von $r+(n-2r+1)$ Zeichen (nämlich der r Trennlinien der Abschnitte und der $n-2r+1$ restlichen Nullen) zu untersuchen, wobei aber die Trennlinien und ebenso die Nullen *ununterscheidbar* sind. Dafür gibt es

$$\frac{[r+(n-2r+1)]!}{r!(n-2r+1)!} = \frac{[n-r+1]!}{r!(n-2r+1)!} = \binom{n-r+1}{r}$$

Möglichkeiten.

> Die Anzahl der r-Untermengen einer n-elementigen geordneten Menge, in denen keine konsekutiven Elemente auftreten, beträgt
>
> $$f(n,r) = \binom{n-r+1}{r}$$

1.Lemma von I.KAPLANSKI

Weiters folgt unmittelbar

> Die Anzahl aller Untermengen einer geordneten Menge, in denen keine konsekutiven Elemente Auftreten, beträgt
>
> $$F_n = \sum_{r=0}^{n} f(n,r) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n-r+1}{r} \qquad \begin{matrix} n \geq 0 \\ r \leq n-r+1 \Rightarrow 2r \leq n+1 \end{matrix}$$

Die Größen F_n heißen Zahlen von FIBONACCI
LEONARDO von PISA, genannt FIBONACCI (~1180 - ~1250)

Beispiel:

$$F_0 = f(0,0) = \binom{0-0+1}{0} = 1$$

$$F_1 = \binom{1-0+1}{0} + \binom{1-1+1}{1} = 1 + 1 = 2$$

$$F_2 = \binom{2-0+1}{0} + \binom{2-1+1}{1} + \binom{2-2+1}{2} = 1 + 2 + 0 = 3$$

....

Beachtet man nun die Ausdrücke

$$\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \binom{n}{r} \text{ (Seite 23)}, \quad \binom{n+1}{0} = \binom{n+2}{0} = 1$$

so gilt weiter

$$\left.\begin{aligned} F_{n-1} &= \phantom{\binom{n+1}{0} +} \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n-i}{i} + \dots \\ F_n &= \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \dots + \binom{n-i}{i+1} + \dots \end{aligned}\right\} +$$

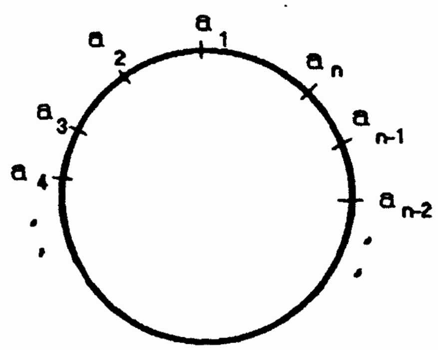
$$F_{n-1} + F_n = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{3} + \dots + \binom{n-i}{i+1} + \dots = F_{n+1}$$

Daraus folgt die Rekursionsformel für FIBONACCI-Zahlen

$$\boxed{\begin{gathered} F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \\ F_0 = 1, \; F_1 = 2 \end{gathered}}$$

FIBONACCI-Zahlen: 1,2,3,5,8,13,21,34,55,....

Häufig stellt sich die oben behandelte Frage auch bei zyklischer Anordnung der Elemente. In diesem Falle ist nicht nur die Abfolge a_i, a_{i+1}, sondern auch die Abfolge a_n, a_1 verboten.



Die Untermengen, welche a_n enthalten, dürfen demnach weder a_1 noch a_{n-1} enthalten. Entfernen wir demnach a_{n-1}, a_n, a_1, so verbleibt eine Menge von n-3 Elementen. Bilden wir aus dieser Menge die (r-1)-elementigen Untermengen, welche keine linear sukzessiven Elemente enthalten. Hier können wir ohne Schaden a_n hinzufügen und erhalten f(n-3,r-1) Untermengen, welche a_n enthalten. Die Anzahl der r-Untermengen, die a_n nicht enthalten, ist f(n-1,r). Daher

$$f^*(n,r) := f(n-3,r-1) + f(n-1,r) = \binom{(n-3)-(r-1)+1}{r-1} + \binom{(n-1)-r+1}{r} =$$

$$= \binom{n-r-1}{r-1} + \binom{n-r}{r} = \frac{(n-r-1)!}{(r-1)!(n-2r)!} + \frac{(n-r)!}{r!(n-2r)!} =$$

$$= \frac{(n-r-1)!}{(r-1)!(n-2r)!}\cdot\left[1 + \frac{n-r}{r}\right] = \frac{(n-r-1)!}{(r-1)!(n-2r)!}\cdot\frac{n}{r} =$$

$$= \frac{(n-r-1)!}{r!(n-2r)!}.n = \frac{(n-r)!}{r!(n-2r)!}\cdot\frac{n}{n-r} = \frac{n}{n-r}\cdot\binom{n-r}{r}$$

Die Anzahl der r-Auswahlen aus einer n-elementigen zyklischen Menge, in denen keine konsekutiven Elemente auftreten ist

$$f^*(n,r) = \frac{n}{n-r}\cdot\binom{n-r}{r} = \frac{n}{r}\cdot\binom{n-r}{r}$$

2.Lemma von I.KAPLANSKI

Die Gesamtzahl aller Auswahlen aus einer zyklischen Menge ohne sukzessive Elemente ist

$$F^*_n = \sum_{r=0}^{n-1} f^*(n,r) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{n}{n-r}\cdot\binom{n-r}{r} \qquad n\geq 1,\ r\leq n-1$$

Es gilt also

$$F_1^* = \frac{1}{1}\binom{1}{0}$$

$$F_2^* = \frac{2}{2}\binom{2}{0} + \frac{2}{1}\binom{1}{1} = 1 + 2 = 3$$

$$F_3^* = \frac{3}{3}\binom{3}{0} + \frac{3}{2}\binom{2}{1} + \frac{3}{1}\binom{1}{2} = 1 + 3 + 0 = 4$$

....

$$\left.\begin{array}{l} F_{n-1}^* = \qquad\qquad \frac{n-1}{n-1}\binom{n-1}{0} + \frac{n-1}{n-2}\binom{n-2}{1} + \ldots + \frac{n-1}{n-r}\binom{n-r}{r-1} \ldots \\ F_n^* = \frac{n}{n}\binom{n}{0} + \frac{n}{n-1}\binom{n-1}{1} + \frac{n}{n-2}\binom{n-2}{2} + \ldots + \frac{n}{n-r}\binom{n-r}{r} \ldots \end{array}\right\} +$$

$$F_{n-1}^* + F_n^* = \frac{n}{n}\binom{n}{0} + \frac{1}{n-1}\cdot\left[(n-1)\binom{n-1}{0} + n\binom{n-1}{1}\right] + \ldots\ldots$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{n-r}\cdot\left[(n-1)\binom{n-r}{r-1} + n\binom{n-r}{r}\right]} + \ldots\ldots$$

Wir betrachten speziell den allgemeinen Summanden

$$\frac{1}{n-r}\cdot\left[(n-1)\frac{(n-r)!}{(r-1)!(n-2r+1)!} + n\frac{(n-r)!}{r!(n-2r)!}\right] =$$

$$= \frac{1}{(n-r)}\cdot\frac{(n-r)!}{(r-1)!(n-2r)!}\cdot\left[\frac{n-1}{n-2r+1} + \frac{n}{r}\right] =$$

$$= \frac{(n-r-1)!}{(r-1)!(n-2r)!}\cdot\frac{nr-r+n^2-2rn+n}{(n-2r+1).r} = \frac{(n-r-1)!}{r!(n-2r+1)!}\cdot\left[\underbrace{n^2-nr+n-r}_{(n+1)(n-r)}\right] =$$

$$= \frac{(n-r)!}{r!(n-2r+1)!}\cdot(n+1) = \frac{n+1}{(n-r+1)}\cdot\frac{(n-r+1)!}{r!(n-2r+1)!} =$$

$$= \frac{n+1}{n-r+1}\cdot\binom{n+1-r}{r} = \underline{f^*(n+1,r)}$$

Aufsummierung ergibt daher

$$F_{n-1}^* + F_n^* = f^*(n+1,0) + f^*(n+1,1) + \ldots = \sum_{r=0}^{n-1} f^*(n+1,r) = F_{n+1}^*$$

Man erhält die Rekursionsformel für <u>korrigierte FIBONACCI-Zahlen</u>

$$\boxed{\begin{array}{ll} F^*_{n+1} = F^*_n + F^*_{n-1} & n\geq 3 \\ F^*_1 = 1,\ F^*_2 = 3 & \end{array}}$$

Korrigierte FIBONACCI-Zahlen: 1,3,4,7,11,18,29,47,...

Auswahlen aus allgemeineren Vorräten

Die Gesamtzahl der möglichen Auswahlen aus einer n-elementigen *Menge* ist gleich der Anzahl ihrer Untermengen. Daher ist die Anzahl der Auswahlen (Seite 29) gleich 2^n. Darunter ist allerdings die *leere Auswahl* enthalten. Daher gilt

> Die Anzahl der nichtleeren Auswahlen aus einer Menge beträgt
> $$2^n - 1$$

Wir betrachten nun Auswahlen aus *Vorräten, die auch gleiche Objekte* enthalten.

Beispiel: Gesucht ist die Anzahl der Auswahlen aus dem Vorrat

a,a,b,c,c

Auswahlen von a	Auswahlen von b	Auswahlen von c	Ergebnis der Auswahlen
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
		c	c
		c,c	c,c
	b	$\emptyset$	b
		c	b,c
		c,c	b,c,c
a	$\emptyset$	$\emptyset$	a
		c	a,c
		c,c	a,c,c
	b	$\emptyset$	a,b
		c	a,b,c
		c,c	a,b,c,c
a,a	$\emptyset$	$\emptyset$	a,a
		c	a,a,c
		,c	a,a,c,c
	b	$\emptyset$	a,a,b
		c	a,a,b,c
		c,c	a,a,b,c,c

Allgemeiner gelte: Ein Vorrat von n Objekten bestehe aus r verschiedenen Teilvorräten von je $n_1, n_2, \ldots, n_r$ *gleichartigen* Objekten, wäh-

rend zwei verschiedene Teilvorräte objektfremd sind ($n_1+n_2+\ldots+n_k = n$).
Aus jedem Teilvorrat kann auf n_i Arten eine nichtleere Auswahl getroffen werden. Rechnet man noch die leere Auswahl hinzu, so bestehen für den i-ten Teilvorrat $(1+n_i)$ Auswahlmöglichkeiten.
Daher gibt es insgesamt $(1+n_1)(1+n_2)\ldots(1+n_r)$ Auswahlmöglichkeiten.
Rechnet man die Möglichkeit ab, daß überhaupt aus keinem der Teilvorräte ein Objekt gewählt wurde, so gilt

> Besteht ein Vorrat aus r Teilvorräten von $n_1,\ldots,n_r$ Objekten, so gibt es insgesamt
> $$(1+n_1)(1+n_2)\ldots(1+n_r)-1$$
> nichtleere Auswahlmöglichkeiten

Beispiel: Wieviele Teiler besitzt die Zahl 2716560?
Es gilt $2716560 = 2^4.3^2.5.7^3.11$. Jeder Teiler besteht aus einer Auswahl von Primfaktoren. Daher hat die gegebene Zahl $(1+4)(1+2)(1+1)(1+3)(1+1) = 5.3.2.4.2 =$ 240 Teiler inclusive der Zahl selbst und dem Teiler 1 (welcher der leeren Auswahl entspricht).

Partitionen

Unter der *Partition (Klasseneinteilung)* einer Menge versteht man eine Zerlegung in Teilmengen mit folgenden Eigenschaften

1. Keine Klasse (Teilmenge) ist leer
2. Je zwei Klassen (Teilmengen) sind elementfremd
3. Die Vereinigungsmenge aller Klassen der Partition ergibt die ursprüngliche Menge.

Wir betrachten die Zerlegung einer n-elementigen Menge in r Klassen:

λ_1 Klassen mit je 1 Element
λ_2 Klassen mit je 2 Elementen
λ_3 Klassen mit je 3 Elementen
....
λ_k Klassen mit je k Elementen

Es muß gelten

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k = r \quad \text{Anzahl der Klassen}$$
$$1.\lambda_1 + 2.\lambda_2 + \ldots + k.\lambda_k = n \quad \text{Gesamtzahl der Elemente}$$

Man sagt dann, die Partition sei von Typ

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\lambda_1} + \underbrace{2+2+\ldots+2}_{\lambda_2} + \ldots + \underbrace{k+k\ldots+k}_{\lambda_k} \quad \text{(additive Schreibweise)}$$

oder

$$1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots k^{\lambda_k} \quad \text{(multiplikative Schreibweise)}$$

Dabei kommt es auf die Reihenfolge der Elemente innerhalb einer Klasse nicht an und die Klassen mit derselben Elementenzahl werden nicht unterschieden (d.h. sie sind nicht numeriert).

Wir bestimmen nun die Anzahl der Partitionen von gleichen Typ

$$1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots k^{\lambda_k}$$

Die Auswahl der λ_1-elementigen Klassen kann auf

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-(\lambda_1-1))$$

Arten erfolgen (Dabei sind die einzelnen Klassen zunächst *noch numeriert*!).

Die Anzahl der λ_2-elementigen (zunächst noch als numeriert anzusehenden) Klassen ist

$$\binom{n-\lambda_1}{2}.\binom{n-\lambda_1-2}{2}.\;.\;.\;\binom{n-\lambda_1-2(\lambda_2-1)}{2}$$

Die Anzahl der λ_3-elementigen (zunächst noch als numeriert anzusehenden) Klassen ist

$$\binom{n-\lambda_1-2\lambda_2}{3}.\binom{n-\lambda_1-2\lambda_2-3}{3}.\;.\;.\;\binom{n-\lambda_1-2\lambda_2-3(\lambda_3-1)}{3}$$

usw. Daher ist die Anzahl der *numerierten* Klassen (bei aufgelöstem EULER-Symbolen)

$$\frac{n}{1!}\cdot\frac{(n-1)}{1!}\ldots\frac{(n-\lambda_1+1)}{1!}\cdot \qquad \lambda_1 \text{ Faktoren}$$

$$\cdot\frac{[(n-\lambda_1)(n-\lambda_1-1)]}{2!}\ldots\frac{[(n-\lambda_1-2\lambda_2+2)(n-\lambda_1-2\lambda_2+1)]}{2!}\cdot \qquad \lambda_2 \text{ Faktoren}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$= \underline{\frac{n!}{(1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}\ldots(k!)^{\lambda_k}}}$$

Da es auf die Reihenfolge der jeweils gleichmächtigen Klassen nicht ankommt, haben wir noch durch $(\lambda_1!)(\lambda_2!)\ldots(\lambda_k!)$ zu dividieren:

Auf einer n-elementigen Menge gibt es

$$\frac{n!}{(1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}\dots(k!)^{\lambda_k}(\lambda_1!)(\lambda_2!)\dots(\lambda_k!)}$$

Möglichkeiten, Klasseneinteilungen des Typs $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots k^{\lambda_k}$ durchzuführen.

Beispiel: Es sollen die Typen der Partitionen einer 6-elementigen Menge ermittelt werden, geordnet nach der Anzahl der möglichen Klassen

Anzahl der Klassen	Mögliche Typen (in additiver Darstellung)
1	6
2	1+5 2+4 3+3
3	1+1+4 1+2+3 2+2+2
4	1+1+1+3 1+1+2+2
5	1+1+1+1+2
6	1+1+1+1+1+1

Betrachten wir die Zerlegung der 6-elementigen Menge {a,b,c,d,e,f} in drei Klassen. Nach obiger Aufstellung gibt es davon 3 Typen:

$\boxed{1.\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_4 = 1}$

Abzählung: $$\frac{6!}{(1!)^2.(4!)^1.(2!).(1!)} = \frac{6!}{4!.2!} = 15$$

Es gibt also 15 Möglichkeiten (Partitionen), die Elemente der gegebenen Menge in Klassen des gegebenen Typs einzuteilen

Au fzählung:

a	b	cdef		b	f	acde
a	c	bdef		c	d	abef
a	d	bcef		c	e	abdf
a	e	bcdf		c	f	abde
a	f	bcde		d	e	abcf
b	c	adef		d	f	abce
b	d	acef		e	f	abcd
b	e	acdf				

$\boxed{2.\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1}$

Abzählung: $\frac{6!}{(1!)^1.(2!)^1.(3!)^1.(1!).(1!).(1!)} = \frac{6!}{2!.3!} = 60$

Es gibt also 60 Möglichkeiten, die Elemente der gegebenen Menge in Klassen des gegebenen Typs einzuteilen

Aufzählung:

$$\begin{array}{c|c|c} a & bc & def \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$\boxed{3.\ \lambda_2 = 3}$

Aufzählung: $\frac{6!}{(2!)^3.(3!)} = 15$

Es gibt also 15 Möglichkeiten, die Elemente der gegebenen Menge in Klassen des gegebenen Typs einzuteilen

$$\begin{array}{c|c|c} ab & cd & ef \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Somit gibt es insgesamt 15 + 60 + 15 = 90 Möglichkeiten, die 6 Elemente in je drei Klassen (von drei verschiedenen Typen) aufzuteilen.

Mit diesem Beispiel haben wir aber gleichzeitig die Aufgabe gelöst, 6 *verschiedene* Elemente in drei *gleichartige Schachteln* zu verteilen, von denen keine leer ist.

Es sei $r \leq n$. Dann gilt die Definition:

> Die Anzahl S_n^r von Möglichkeiten, eine Menge von n *verschiedenen Objekten* auf r *gleiche Schachteln*, von denen keine leer ist, zu verteilen, heißt STERLINGsche Zahl 2.Art ≡ Anzahl der Partitionen von n Elementen in r Klassen der möglichen Typen.

In unserem Beispiel wäre $S_6^3 = 90$

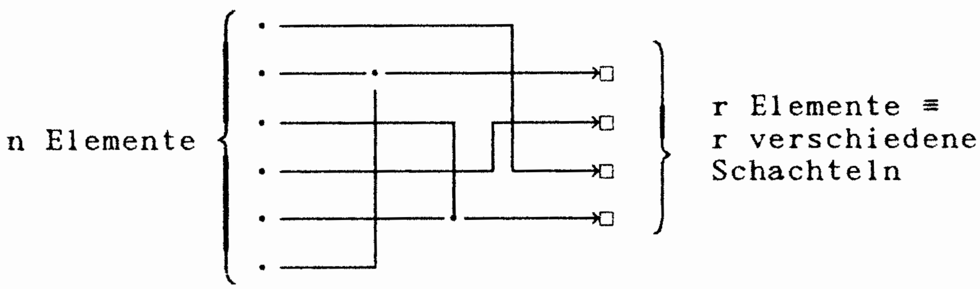
> Die Anzahl der Möglichkeiten, n *verschiedene Objekte* in r *gleiche Schachteln* zu verteilen, wobei auch *einzelne Schachteln leer* bleiben können, ist
>
> $$S_n^1 + S_n^2 + \ldots + S_n^r$$

Es können nämlich die n Objekte alle in eine Schachtel *oder* in zwei Schachteln *oder* ... *oder* in r Schachteln verteil werden.

Die Anzahl der Möglichkeiten, n *verschiedene Objekte* in r *verschiedene Schachteln* ($r \le n$), wobei keine Schachtel leer bleibt, zu verteilen ist $$r!S_n^r$$

Man kann nämlich die zunächst nicht unterscheidbaren Schachteln auf r! Arten numerieren.

Die Anzahl der *surjektiven* Abbildungen einer n-elementigen in eine r-elementige Menge ($r \le n$) ist $$r!S_n^r$$



Berechnung der STERLINGschen Zahlen 2.Art

Wir betrachten die Partitionen von n+1 Elementen in r Klassen:

1. In einigen dieser Partitionen ist das (n+1)-te Element das einzige in einer Klasse. Die restlichen n Elemente können dann nur mehr auf r-1 Klassen aufgeteilt werden und erzeugen S_n^{r-1} Partitionen verschiedener Typen.
2. In allen anderen Partitionen ist das (n+1)-te Element nicht das einzige in einer Klasse. Entfernen wir das (n+1)-te Element und verteilen die restlichen Elementen auf r Klassen. Dieser Einteilung entsprechen S_n^r Partitionen. Fügen wir zu jeder dieser r Klassen das (n+1)-te Element hinzu, so ergeben sich insgesamt rS_n^r Partitionen. Daher ergibt sich die Rekursionsformel für die STERLINGschen Zahlen 2.Art

$$\boxed{\begin{array}{l} S^r_{n+1} = S^{r-1}_n + r.S^r_n \qquad 1<r<n \\ S^1_n = S^n_n = 1 \end{array}}$$

$S^2_3 = S^1_2 + 2S^2_2 = 1 + 2.1 = 3$

$S^2_4 = S^1_3 + 2S^2_3 = 1 + 2.3 = 7$

$S^3_4 = S^2_3 + 3S^3_3 = 3 + 3.1 = 6$

$S^2_5 = S^1_4 + 2S^2_4 = 1 + 2.7 = 15$

$S^3_5 = S^2_4 + 3S^3_4 = 7 + 3.6 = 25$

$S^4_5 = S^3_4 + 4S^4_4 = 6 + 4.1 = 10$

	S^r_n	r = 1	2	3	4	5
n =	1	1	0	0	0	0
	2	1	1	0	0	0
	3	1	3	1	0	0
	4	1	7	6	1	0
	5	1	15	25	10	1

"STERLINGsches Dreieck"

Anzahl der injektiven, bijektiven und surjektiven Abbildungen einer n-elementigen in eine r-elementige Menge

n \ r	1	2	3	4	5
1	**1**	2	3	4	5
2	1	**2**	6	12	20
3	1	6	**6**	24	60
4	1	14	36	**24**	120
5	1	30	150	240	**120**

$n \le r$ Anzahl der inj. Abbildungen: $[n]_r = n! \binom{r}{n}$

$n = r$ Anzahl der bij. Abbildungen: $n!$

$n \ge r$ Anzahl der surj. Abbildungen: $r!S^r_n$

Gesamtzahl aller Abbildungen: r^n

Andere Berechung der S^r_n

Wir betrachten die Menge aller Abbildungen einer n-elementigen in eine r-elementige Menge, wobei $n \ge r$ sei. Die Anzahl aller Abbildungen ist r^n. Unter diesen Abbildungen gibt es nun solche, bei denen bloß ein, zwei, drei, bzw. alle r Elemente der Zielmenge betroffen sind. Wir betrachten nun eine Abbildung, bei der bloß k unter den r

Zielelementen betroffen sind. Dann liegt eine *surjektive* Abbildung von n Elementen auf k Elemente vor. Die Anzahl dieser surjektiven Abbildungen ist $k!S_n^k$. Da man die Zielelemente auf $\binom{r}{k}$ Arten auswählen kann gibt es

$$\binom{r}{k}.(k!S_n^k)$$

derartige Abbildungen. Somit gilt

$$r^n = \binom{r}{1}.(1!S_n^1) + \binom{r}{2}.(2!S_n^2) + \ldots + \binom{r}{r}.(r!S_n^r)$$

Nun gilt aber: $k>r \Rightarrow \binom{r}{k}:=0$, daher kann man obige Summe fortsetzen

$$r^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{r}{k}.(k!S_n^k)$$

Es ist aber

$$\binom{r}{k}k! = \frac{r!}{k!(r-k)!}.k! = \frac{r!}{(r-k)!} = r(r-1)\ldots(r-(k-1)) = [r]_k$$

Demnach gilt

$$r^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{r}{k}.k!S_n^k = \sum_{k=1}^{n} S_n^k.[r]_k$$

Daraus folgt mit $r = x$

$$\boxed{x^n = \sum_{k=1}^{n} S_n^k.[x]_k}$$

Das ergibt eine andere Möglichkeit zur Berechung von S_n^k $(k= 1,\ldots,n)$

<u>Beispiel:</u> $n = 5$

$$x^5 = \sum_{k=1}^{5} S_5^k.[x]_k = S_5^1.x + S_5^2.x(x-1) + S_5^3.x(x-1)(x-2) +$$

$$+ S_5^4.x(x-1)(x-2)(x-3) + S_5^5.x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = \ldots =$$

$$= S_5^5.x^5 + (S_5^4 - 10S_5^5)x^4 + (S_5^3 -6S_5^4 + 3S_5^5)x^3 +$$

$$+ (S_5^2 -3S_5^3 + 11S_5^4 - 50S_5^5)x^2 ++ (S_5^1 - S_5^2 + 2S_5^3 -6S_5^4 + 24S_5^5)x = x^5$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$
\begin{array}{ll}
S_5^5 = 1 & \qquad S_5^5 = 1 \\
S_5^4 - 10S_5^5 = 0 & \qquad S_5^4 = 10 \\
S_5^3 - 6S_5^4 + 35S_5^5 = 0 & \qquad S_5^3 = 25 \\
S_5^2 - 3S_5^3 + 11S_4^4 - 50S_5^5 = 0 & \qquad S_5^2 = 15 \\
S_5^1 - S_5^2 + 2S_5^3 - 6S_5^4 + 24S_5^5 = 0 & \qquad S_5^1 = 1
\end{array}
$$

Wir betrachten nun die Partitionen von n+1 verschiedenen Elementen in r Klassen. Zeichnen wir ein spezielles Element, z.B. das Element 1 aus. Dann wird es Partitionen geben, in denen 1 eine Klasse für sich bildet

$$\boxed{1}\,|2,3,\cdots|\ldots\ldots|n,n+1 \qquad S_n^{r-1} \text{ Partitionen}$$

....

Partitionen, in welchen 1 mit einem beliebigen anderen Element eine Klasse bildet:

$$
\begin{array}{ll}
\boxed{1}\,,2|3,4,\cdots|\ldots\ldots|\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & n.S_{n-1}^{r-1} \quad \text{Partitionen} \\
\boxed{1}\,,n+1|\cdots\cdots|\ldots\ldots|\cdots\cdots &
\end{array}
$$

Partitionen, in welchen 1, mit zwei beliebigen anderen Elementen eine Klasse bildet

$$
\begin{array}{ll}
\boxed{1}\,,2,3|\cdots\cdots|\ldots\ldots|\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \binom{n}{2}.S_{n-2}^{r-1} \quad \text{Partitionen} \\
\boxed{1}\,,n,n+1|\cdots\cdots|\ldots\ldots|\cdots\cdots &
\end{array}
$$

Allgemein: Die Anzahl der Partitionen, bei denen 1 mit k anderen Elementen in derselben Klasse ist, beträgt

$$\binom{n}{k}.S_{n-k}^{r-1} = \binom{n}{n-k}.S_{n-k}^{r-1}$$

mit j:= n-k gilt daher für die Menge aller Partitionen

$$\boxed{S_{n+1}^{r} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}.S_j^{r-1}}$$

Beispiel: Auf wieviele Arten kann man n verschiedene Elemente in r verschiedene Schachteln verteilen, sodaß bei jeder Verteilung k Schachteln nichtleer sind, während (r-k) Schachteln leer bleiben?

Wir greifen k nichtleere Schachteln heraus. Dies ist auf $\binom{r}{k}$ Arten möglich. Die Verteilung der n Elemente in die k verschiedenen Schachteln ist auf $k!.S_n^k$ Arten möglich. Daher gibt es insgesamt

$$\binom{r}{k}.(k!S_n^k) = \frac{r!}{k!(r-k)!}.k!S_n^k = \frac{r!}{(r-k)!}.\ S_n^k = [r]_k.S_n^k$$

Möglichkeiten.

Erzeugende Funktionen
Aufzählende und abzählende Funktionen

Sei φ eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow \varphi(n)$$

Für jede natürliche Zahl 0,1,2,... nimmt dann φ einen bestimmten Wert an. Bilden wir nun das (formale) Polynom

$$F(x) := \varphi(0) + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(n)x^n$$

so heißt F(x) die *(normale) erzeugende Funktion* von $\varphi(n)$. Die Unbestimmten x^n dienen nur dazu, anzugeben, daß der zugehörige Koeffizient eine Funktion der ganzen Zahl n ist. Konvergenzfragen spielen keine Rolle.

Später werden wir es auch mit *exponentiellen erzeugenden Funktionen* zu tun haben:

$$F(x) = \sum \varphi(n) \frac{x^n}{n!}$$

Erzeugende Funktionen für Auswahlen (Kombinationen)

Wir betrachten das Polynom

$$\begin{aligned}
F(x) &= (1+a_1x)(1+a_2x)(1+a_3x)\ldots(1+a_nx) = \\
&= 1 \\
&+ (a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)x \\
&+ (a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_1a_n+a_2a_3+a_2a_4+\ldots+a_{n-1}a_n)x^2 \\
&+ (a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\ldots+a_{n-2}a_{n-1}a_n)x^3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ a_1a_2a_3\ldots.a_nx^n
\end{aligned}$$

> Der Koeffizient von x^r zählt daher alle Möglichkeiten auf, aus der Menge $\{a_1,\ldots,a_n\}$ eine *Auswahl* von r Elementen zu treffen. F(x) stellt daher eine *aufzählende (erzeugende) Funktion* dar *("Aufzähler")*.

Setzen wir $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$, so stellt der Koeffizient von x^r die Anzahl der r-Auswahlen aus n Elementen dar.

$$F(x) = (1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \ldots + \binom{n}{r}x^r + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

F(x) ist daher eine *abzählende (erzeugende) Funktion ("Abzähler")*.
$F(x) = (1+x)^n$ ist somit erzeugende Funktion für die Binomialkoeffizienten.

Erzeugende Funktionen für Auswahlen, bei denen einzelne Elemente mehrfach ausgewählt werden.

Mit den Objekten a_1, a_2, a_3 sollen alle 3-Auswahlen gebildet werden, bei denen a_1 maximal zweimal, a_2 und a_3 aber nur einmal auftreten dürfen.

Experimentelle Aufzählung	Abzählung
$a_1a_1a_2$	
$a_1a_1a_3$	3 Möglichkeiten
$a_1a_2a_3$	

Die entsprechende aufzählende Funktion lautet

$$F(x) = (1+a_1x+a_1^2x^2)(1+a_2x)(1+a_3x)$$

Die drei Faktoren bedeuten

1.Faktor: a_1 braucht überhaupt nicht gewählt zu werden

$1 = a_1^0x^0$

oder: a_1 tritt einmal auf

$a_1^1x^1$

oder: a_1 tritt zweimal auf

$a_1^2x^2$

Daher lautet der a_1 betreffende Faktor

$1+a_1x+a_1^2x^2$

2. und 3. Faktor: a_2 (a_3) tritt nicht *oder* einmal auf

$a_2^0x^0+a_2^1x^1 = 1+a_2x$ (analog $1+a_3x$)

Diese Bedingungen sollen *gleichzeitig* erfüllt werden.

$$F(x) = 1+(a_1+a_2+a_3)x + (a_1^2+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)x^2 + \underline{(a_1^2a_2+a_1^2a_3+a_1a_2a_3)x^3} + (a_1^2a_2a_3)x^4$$

Der Koeffizient von x^r zählt alle Möglichkeiten einer r-Auswahl unter den vorgeschriebenen Bedingungen auf. Dabei bedeutet:

Das Pluszeichen die *Alternative ("oder")*

das Produkt das *gleichzeitige Eintreten ("und")*

$$F(x) = (1+a_1x+a_1^2x^2)(1+a_2x)(1+a_3x) \text{ ist der } \textit{Aufzähler}$$

Den *Abzähler* finden wir, wenn wir $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ setzen:

$$F(x) = (1+x+x^2)(1+x)^2 = 1+3x+4x^2+\underline{3}x^3+x^4$$

Der Koeffizient von x^3 gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, eine 3-Auswahl unter den vorgeschriebenen Bedingungen zu treffen.

Allgemein gilt:

> Die *aufzählende Funktion* der Auswahlen aus $\{a_1,\dots,a_n\}$, bei denen das Element a_i mindestens α_i-mal und höchstens β_i-mal auftritt, lautet
>
> $$F(x) = \prod_{i=1}^{n} (a_i^{\alpha_i}.x^{\alpha_i} + a_i^{\alpha_i+1}.x^{\alpha_i+1} + \dots + a_i^{\beta_i}.x^{\beta_i})$$
>
> Der Koeffizient von x^r zählt die möglichen r-Auswahlen auf.
>
> Die *abzählende Funktion* erhält man, indem man in obigen Ausdrücken $a_1 = \dots = a_n = 1$ setzt.

Beispiel: Die Funktion

$$F(x) = (1+a_1x+a_1^2x^2)(a_2x)(a_3^2x^2+a_3^3x^3)$$

Stellt den Aufzähler der Auswahlen dar, bei denen a_1 maximal zweimal, a_2 genau einmal und a_3 zweimal oder dreimal auftritt.

$$F(x) = a_2a_3^2x^3 + (a_1a_2a_3^2 + a_2a_3^3)x^4 + (a_1a_2a_3^3 + a_1^2a_2a_3^2)x^5 + (a_1^2a_2a_3^3)x^6$$

Der Koeffizient z.B. von x^5 zählt alle Auswahlen von 5 Ojekten auf, die den gegebenen Bedingungen genügen. Der Abzähler lautet

$$F(x) = (1+x+x^2).x.(x^2+x^3) = x^3 + 2x^4 + 2x^5 + x^6$$

Um weitere erzeugende Funktionen zu bestimmen, folgen zunächst

Vorbereitende Bemerkungen

Um den Ausdruck

$$\frac{1}{1-ax}$$

in eine Potenzreihe zu entwickeln, machen wir den formalen Ansatz

$$\frac{1}{1-ax} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

$$1 = (1-ax).\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i - \sum_{i=0}^{\infty} ac_i x^{i+1} = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i - \sum_{i=1}^{\infty} ac_{i-1} x^i =$$

$$= c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (c_i - ac_{i-1}) x^i = 1$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$c_0 = 1$

$c_i = ac_{i-1} \qquad i = 1,2,\ldots\ldots$

daher $c_1 = a$, $c_2 = a^2$, $c_3 = a^3, \ldots\ldots$

$$\boxed{\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a^i x^i}$$

Speziell

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i}$$

Verallgemeinerung:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1 + x^2 + x^3 + \ldots\ldots)^n$$

In der Entwicklung auf der rechten Seite wird die Potenz x^r so oft vorkommen, als sich der Exponent $r = r_1+r_2+\ldots+r_n$ als Summe von n Zahlen $0 \le r_i \le r$ darstellen läßt. Es ist nämlich $x^r = \underbrace{x^{r_1}x^{r_2}\ldots x^{r_n}}_{\text{n Faktoren}}$.

Frage: Auf wieviele Arten läßt sich r als Summ e von n natürlichen Zahlen darstellen (Reihenfolge beachten!)?

Summanden

1	2	3	.....	n−1	n
.....	.			..	...

Jeder Punkt stellt die Zahl 1 dar, insgesamt sind also r Punkte auf die n Summanden zu verteilen. Demnach sind insgesamt r+(n−1) Zeichen (r Punkte, n−1 Trennlinien) anzuordnen, wobei je r bzw. n−1 Zeichen ununterscheidbar sind. Es gibt daher

$$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r} \quad \text{Möglichkeiten}$$

Beispiel: $n = 3,\ r = 4$

Abzählung: $\binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten

Aufzählung:

r_1	r_2	r_3		r_1	r_2	r_3		r_1	r_2	r_3
0 +	0 +	4		1 +	0 +	3		2 +	1 +	1
0 +	1 +	3		1 +	1 +	2		2 +	2 +	0
0 +	2 +	2		1 +	2 +	1		3 +	0 +	1
0 +	3 +	1		1 +	3 +	0		3 +	1 +	0
0 +	4 +	0		2 +	0 +	2		4 +	0 +	0

Daher gilt

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\ldots)^n = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}.x^r = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{n-1}.x^r}$$

Dieses Ergebnis hätten wir auch rein formal mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes und der Formel auf Seite 10 finden können:

$$F(x) = (1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-n}{r}x^r = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(-1)^r\binom{n+r-1}{r}x^r = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^r$$

Ferner werden wir später folgende Identität (Summenformel für die geometrische Reihe) benötigen:

$$\boxed{\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n}$$

Einige wichtige erzeugende Funktionen

$$F(x) = \sum a_r x^r \qquad a_r = \varphi(r)$$

$\varphi(r)$	$F(x)$
$\binom{n}{r}$	$(1+x)^n$
1	$(1-x)^{-1}$
r	$x(1-x)^{-2}$
r^2	$x(1+x)(1-x)^{-3}$
$(-1)^r$	$(1+x)^{-1}$
a^r	$(1-ax)^{-1}$
s_n^r	$[x]_n$

Beweise:

$$\underline{(1+x)^n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^n$$

$$\underline{(1-x)^{-1}} = \sum_{r=0}^{\infty} x^r$$

$$\underline{x(1-x)^{-2}} = x \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2+r-1}{1} x^r = x \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)x^r = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)x^{r+1}$$

$$\underline{x(1+x)(1-x)^{-3}} = x(1+x) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{3+r-1}{2} x^r = x(1+x) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+2}{2} x^r =$$

$$= x(x+1) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+2)(r+1)}{2} . x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+2)(r+1)}{2} . (x^{r+1} + x^{r+2}) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+2)(r+1)}{2} . x^{r+1} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+2)(r+1)}{2} . x^{r+2} =$$

In der ersten der beiden obigen Summen spalten wir den Summanden r=0 ab. In der zweiten Summe setzen wir r = s−1. Dann gilt

$$x + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(r+2)(r+1)}{2} . x^{r+1} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(s+1)s}{2} . x^{s+1}$$

Da es auf den Namen des Summationsindex nicht ankommt, folgt

$$x + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(r+2)(r+1) + (r+1)r}{2} . x^{r+1} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2(r+1)^2}{2} . x^{r+1} + x$$

also $$\underline{x(1+x)(1-x)^{-3}} = \sum_{r=0}^{\infty} r^2 x^r$$

Die beiden letzten Aussagen folgen aus den Definitionen.

Aufzählende Funktion für Auswahlen aus n Elementen $\{a_1, \ldots a_n\}$ mit Wiederholung

$$F(x) = \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i x + a_i^2 x^2 + \ldots) = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_i^r x^r \right) = \prod_{n=1}^{n} \frac{1}{(1-a_i x)}$$

Abzählende Funktion

$$F(x) = (1+x+x^2+\ldots .)^n = \left(\sum_{r=0}^{\infty} x^r \right)^n = \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$$

Abzählende Funktion für Auswahlen aus n Elementen mit Wiederholung, wobei jedes Element mindestens einmal vorkommt

$$F(x) = (x+x^2+\ldots)^n = x^n(1+x+x^2+\ldots)^n = \frac{x^n}{(1-x)^n} = x^n . \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^{n+k}$$, setzt man n+k = r (k=0 ⇒ r = n), so folgt

$$F(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{r-1}{r-n} x^r$$

Abzählende Funktion für Auswahlen aus n Elementen mit Wiederholung, wobei jedes Element mindesten m-mal auftritt

$$F(x) = (x^m+x^{m+1}+\dots)^n = x^{mn}(1+x+x^2+\dots)^n = \frac{x^{mn}}{(1-x)^n} =$$

$$= x^{mn}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^{mn+k}$$

setzt man $r = mn+k$ ($k=0 \Rightarrow r = mn$) so folgt

$$F(x) = \sum_{r=mn}^{\infty}\binom{r-(m-1)n-1}{r-mn}x^r$$

Abzählende Funktion für eine Auswahl aus n Elementen mit Wiederholung, wobei jedes Element eine gerade Anzahl von Malen auftritt

$$F(x) = (1+x^2+x^4+\dots)^n = \frac{1}{(1-x^2)^n} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^{2r}$$

Auswahl aus n Elementen $\{a_1,\dots,a_n\}$, bei der das Element a_i mindestens m_i-mal auftritt

Aufzählende Funktion

$$F(x) = \prod_{i=1}^{n}(a_i^{m_i}x^{m_i}+a_i^{m_i+1}x^{m_i+1}+\dots)$$

Abzählende Funktion

$$F(x) = \prod_{i=1}^{n}(x^{m_i}+x^{m_i+1}+\dots) = x^{m_1+m_2+\dots+m_n}(1+x+x^2+\dots)^n =$$

$$= \frac{x^{m_1+m_2+\dots+m_n}}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^{k+(m_1+m_2+\dots+m_n)}$$

Aufzählende Funktion aus n Elementen $\{a_1,\ldots,a_n\}$ mit Wiederholungen, wobei a_i maximal m_i-mal auftritt

$$F(x) = \prod_{i=1}^{n} (1+a_i x+a_i^2 x^2+ \ldots +a_i^{mi} x^{mi})$$

Aufzählende Funktion aus n Elementen $\{a_1,\ldots a_n\}$ mit Wiederholungen, wobei a_i nur in den Anzahlen $k_{i1}<k_{i2}\ldots<k_{imi}$ auftritt

$$F(x) = \prod_{i=1}^{n} (a_i^{k_{i1}} x^{k_{i1}}+\ldots+a_i^{k_{imi}} x^{k_{imi}})$$

Auswertung mehrerer simultaner Bedingungen bei Auswahlen mit Wiederholung

Aus der Menge $\{a_1,\ldots,a_n\}$ sollen Auswahlen mit Wiederholungen getroffen werden, wobei einzelnen Elementen spezielle Bedingungen auferlegt werden.

1.Beispiel Für das Element a_1 soll gelten

1.Bedingung: a_1 tritt nur in gerader Anzahl auf. Die Koeffizienten des Aufzählers bilden daher die Menge

$$\{1,a_1^2,a_1^4,\ldots\}$$

2.Bedingung: a_1 tritt in jeder Auswahl mindestens dreimal auf:

$$\{a_1^3,a_1^4,a_1^5,\ldots\}$$

3.Bedingung: a_1 tritt in jeder Auswahl höchstens 7-mal auf:

$$\{1,a_1,a_1^2,a_1^3,a_1^4,a_1^5,a_1^6,a_1^7\}$$

Alle drei Bedingungen werden durch den Durchschnitt obiger drei Mengen erfüllt:

$$\{a_1^4,a_1^6\}$$

Der dem Element a_1 zugeordnete Faktor des Aufzählers lautet daher

$$F(x) = (a_1^4x^4+a_1^6x^6)(\cdots)\ldots(\cdots)$$

2.Beispiel Die Elemente a_1 und a_2 treten in keiner Auswahl gleichzeitig auf. Dafür gibt es folgende Möglichkeiten:

a_1 *und* a_2 treten überhaupt nicht auf $\Rightarrow$ $a_1^0 a_2^0 = 1$

oder es tritt nur a_1 *oder* a_2 auf (aber nicht gleichzeitig):

$$a_1 + a_2$$

oder es tritt nur a_1^2 *oder* a_2^2 auf (aber nicht gleichzeitig):

$$a_1^2 + a_2^2$$

oder es tritt nur a_1^3 *oder* a_2^3 auf (aber nicht gleichzeitig)

....

Der entsprechende Faktor des Aufzählers lautet daher

$$f(x) = [1+(a_1+a_2)x+(a_2^2+a_2^2)x^2+(a_1^3+a_2^3)x^3+\ldots](\cdots)\ldots(\cdots)$$

3.Beispiel Man bestimme Aufzähler und Abzähler bei folgenden Teilaufgaben:

a) jedes Element tritt mindesten zweimal auf

b) jedes Element tritt maximal viermal auf

c) jedes Element tritt mindestens einmal und höchstens fünfmal auf

d) Die Anzahl des Auftretens jedes Elementes ist ein Vielfaches von 3

a) *Aufzähler*: $\prod_{i=1}^{n} (a_i^2 x^2 + a_i^3 x^3 + \ldots)$

Abzähler: $F(x) = (x^2+x^3+\ldots)^n = x^{2n}(1+x+\ldots)^n = x^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} x^k =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} x^{k+2n}$$ Sei $r := k+2n$ ($k = 0 \Rightarrow r = 2n$) dann ist

$$F(x) = \sum_{r=2n}^{\infty} \binom{r-n-1}{n-1} x^r = \binom{n-1}{n-1} x^{2n} + \binom{n}{n-1} x^{2n+1} + \binom{n+1}{n-1} x^{2n+2} + \ldots$$

<u>Zahlenbeispiel:</u> $n = 4$, $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $r = 9$

$$F(x) = \binom{3}{3} x^8 + \binom{4}{3} x^9 + \binom{9}{3} x^{10} + \ldots = x^8 + \underline{4x^9} + 10x^{10} + \ldots$$

Es gibt also 4 Möglichkeiten zu einer 9-Auswahl:

$$a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^3, \quad a_1^2 a_2^2 a_3^3 a_4^2, \quad a_1^2 a_2^3 a_3^2 a_4^2, \quad a_1^3 a_2^2 a_3^2 a_4^2$$

b) *Aufzähler:* $\prod_{i=1}^{n} (1+a_i x+a_i^2 x^2+a_i^3 x^3+a_i^4 x^4)$

Abzähler: $(1+x+x^2+x^3+x^4)^n = \left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^n = (1-x^5)^n.(1-x)^{-n} =$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-x^5)^i\right).\left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{n-1} x^j\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n+j-1}{n-1} x^{5i+j}$$

mit $r = 5i+j$ $(i=0,\ j=0 \Rightarrow r=0)$ folgt

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n+r-(5i+1)}{n-1} x^r$$

Zahlenbeispiel: Aus der Menge $\{a_1, a_2, a_3\}$ soll eine 5-Auswahl getroffen werden, bei der jedes Element maximal 4-mal auftritt. Es ist also $r=5$, $n=3$. Aus obiger Doppelsumme haben wir also den Koeffizienten von x^5 zu berechnen.

$$\sum_{i=0}^{3} (-1)^i \binom{3}{i} \binom{3+5-(5i+1)}{3-1} = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \binom{3}{i} \binom{7-5i}{2} =$$

$$= (-1)^0 \binom{3}{0} \binom{7}{2} + (-1)^1 \binom{3}{1} \binom{2}{2} + 0 + 0 = 21-3 = \underline{18 \text{ Möglichkeiten}}$$

Die a_i treten in folgenden Anzahlen auf

a_1	a_2	a_3
4	1	0
4	0	1
3	2	0
3	1	1
3	0	2
2	3	0

a_1	a_2	a_3
2	2	1
2	1	2
2	0	3
1	4	0
1	3	1
1	2	2

a_1	a_2	a_3
1	1	3
1	0	4
0	4	1
0	3	2
0	2	3
0	1	4

c) *Aufzähler:* $F(x) = \prod_{i=1}^{n} (a_i x+a_i^2 x^2+\ldots+a_i^5 x^5)$

Abzähler: $F(x) = (x+x^2+\ldots+x^5)^n = x^n(1+x+x^2+x^3+x^4)^n = x^n\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^n =$

$$= x^n(1-x^5)^n \cdot \frac{1}{(1-x)^n} = x^n\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}x^{5i}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{n-1}x^j\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n+j-1}{n-1}x^{n+5i+j} \quad \text{mit } r=n+5i+j \quad (i=0,j=0 \Rightarrow r=n)$$

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{r=n}^{\infty}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n+r-n-5i-1}{n-1}x^r = \sum_{i=0}^{n}\sum_{r=n}^{\infty}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{r-5i-1}{n-1}x^r$$

<u>Zahlenbeispiel:</u> n=3, r=9 Der Koeffizient von r=9 lautet

$$\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\binom{3}{i}\binom{9-5i-1}{3-1} = \sum_{i=0}^{3}(-1)^i\binom{3}{i}\binom{8-5i}{2} = (-1)^0\binom{3}{0}\binom{8}{2}+(-1)^1\binom{3}{1}\binom{3}{2} =$$

= 28 − 9 = <u>19 Möglicheiten</u> Anzahl des Auftretens der a_i

513	432	342	252
522	441	351	135
531	315	225	144
414	324	234	153
423	333	243	

d) *Aufzähler:* $F(x) = \prod_{i=1}^{n}(a_i^3x^3+a_i^6x^6+\ldots+a_i^{3j}x^j+\ldots)$

Abzähler: $F(x) = (x^3+x^6+x^9+\cdots)^n = x^{3n}(1+x^3+x^6+\cdots)^n = x^{3n}\frac{1}{(1-x^3)^n}$

$$= x^{3n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}x^{3k} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}x^{3(n+k)}$$ mit j = n+k (k=0 ⇒ j=n) folgt

$$F(x) = \sum_{j=n}^{\infty}\binom{r}{n-1}x^{3j}$$

4.Beispiel Gegeben sei die Menge {a,b,c,d,e}. Gesucht sind die Auswahlen bei folgenden Teilbeispielen

a)a ,b,c treten geradzahlig, d,e ungeradzahlig auf (0 gilt als gerade Zahl!)

Aufzähler: $F(x) = (1+a^2x^2+a^4x^4+\dots)(1+b^2x^2+b^4x^4+\dots)\cdot$

$\cdot(1+c^2x^2+c^4x^4+\dots)(dx+d^3x^3+d^5x^5+\dots)(ex+e^3x^3+e^5x^5+\dots)$

Abzähler: $F(x) = (1+x^2+x^4+\dots)^3(x+x^3+x^5\dots)^2 = x^2(1+x^2+x^4+\dots)^5 =$

$$= \frac{x^2}{(1-x^2)^5} = x^2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{5+k-1}{4}x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{4+k}{4}x^{2k+2}$$

Zahlenbeispiel: $r=2k+2=8 \Rightarrow k=3$ Anzahl der Auswahlen $\binom{7}{4} = 35$

a	b	c	d	e
			1	7
			3	5
			5	3
			7	1
		2	1	5
		2	3	3
		2	5	1

a	b	c	d	e
		4	1	3
		4	3	1
		6	1	1
	2	0	1	5
	2	0	3	3
	2	0	5	1
	2	2	1	3

a	b	c	d	e
	2	2	1	3
	2	4	1	1
	4	0	1	3
	4	0	3	1
	4	2	1	1
	6	0	1	1
2	0	0	1	5

a	b	c	d	e
2	0	0	3	3
2	0	0	5	1
2	0	2	1	3
2	0	2	3	1
2	0	4	1	1
2	2	0	1	3
2	2	0	3	1

a	b	c	d	e
2	2	2	1	1
2	4	0	1	1
4	0	0	1	3
4	0	0	3	1
4	0	2	1	1
4	2	0	1	1
6	0	0	1	1

b) Seien $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ die Anzahlen des Auftretens von a,b,c,d,e in den Auswahlen. Ferner seien α,β,γ ungerade und $\delta+\varepsilon\leq 3$.
Für die Anzahlen δ und ε von d und e gibt es folgende Möglichkeiten

δ	ε
0	0
1	0
0	1
2	0
1	1
0	2
3	0
2	1
1	2
0	3

Daher lautet der die Elemente d und e betreffende Faktor des Aufzählers

$1+(d+e)x+(d^2+de+e^2)x^2+(d^3+d^2e+de^2+e^3)x^3$

Für den *Aufzähler* gilt daher

$F(x) = (ax+a^3x^3+a^5x^5+\dots)(bx+b^3x^3+b^5x^5+\dots)(cx+c^3x^3+\dots)\cdot$

$\cdot[1+(d+e)x+(d^2+de+e^2)x^2+(d^3+d^2e+de^2+e^3)x^3]$

Abzähler: $F(x) = (x+x^3+...)^3(1+2x+3x^2+4x^3) =$

$$= x^3(1+x^2+x^4+...)^3(1+2x+3x^2+4x^3) = \frac{x^3(1+2x+3x^2+4x^3)}{(1-x^2)^3} =$$

$$x^3(1+2x+3x^2+4x^3)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{2}x^{2k} = (1+2x+3x^2+4x^3)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2+k}{2}x^{2k+3}$$

<u>Zahlenbeispiel:</u> $r=7$

$$(1+2x+3x^2+4x^3)\left[\binom{2}{2}x^3+\binom{3}{2}x^5+\binom{4}{2}x^7+...\right]$$

Wir berechnen nur den Koeffizienten von x^7:

$\binom{4}{2}+3\binom{3}{2} = 6+9 = 15$ Möglichkeiten

a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
1	1	3	0	2	1	3	1	1	1	3	1	1	1	1
1	1	3	1	1	1	3	1	2	0	3	1	1	2	0
1	1	3	2	0	1	3	3	0	0	3	1	3	0	0
1	1	5	0	0	1	5	1	0	0	3	3	1	0	0
1	3	1	0	2	3	1	1	0	2	5	1	1	0	0

c) Es seien α, β, γ ungerade und $\delta+\varepsilon\leq 3$. Außerdem gelte $\alpha\geq 1$, $\beta\geq 3$, $\gamma\geq 5$. Zu den Bedingungen von b) treten also noch die Ungleichungen für α, β und γ hinzu

Aufzähler:

$$F(x) = (ax+a^3x^3+a^5x^5+...)(b^3x^3+b^5x^5+...)(c^5x^5+c^7x^7+...)\cdot$$
$$\cdot[1+(d+e)x+(d^2+de+e^2)x^2+(d^3+d^2e+de^2+e^3)x^3]$$

Abzähler: $F(x) = (x+x^3+...)(x^3+x^5++...)(x^5+x^7+...)(1+2x+3x^2+4x^3) =$

$$= x^9(1+x^2+x^4+...)^3(1+2x+3x^2+4x^3) = \frac{x^9(1+2x+3x^2+4x^3)}{(1-x^2)^3} =$$

$$x^9(1+2x+3x^2+4x^3)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{2}x^{2k} = (1+2x+3x^2+4x^3)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2+k}{2}x^{2k+9}$$

<u>Zahlenbeispiel:</u> $r = 15$

$$(1+2x+3x^2+4x^3)\left[\binom{2}{2}x^9+\binom{3}{2}x^{11}+\binom{4}{2}x^{13}+\binom{5}{2}x^{15}+\ldots\right]$$

Der Koeffizient von x^{15} lautet

$$\binom{5}{2} + 3\binom{4}{2} = 10 + 18 = 28 \text{ Möglichkeiten}$$

a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
1	3	11	0	0	1	5	7	2	0	3	3	7	0	2	3	7	5	0	0
1	3	9	0	2	1	7	7	0	0	3	3	7	1	1	5	3	7	0	0
1	3	9	1	1	1	7	5	0	2	3	3	7	2	0	5	3	5	0	2
1	3	9	2	0	1	7	5	1	1	3	5	7	0	0	5	3	5	1	1
1	5	9	0	0	1	7	5	2	0	3	5	5	0	2	5	3	5	2	0
1	5	7	0	2	1	9	5	0	0	3	5	5	1	1	5	5	5	0	0
1	5	7	1	1	3	3	9	0	0	3	5	5	2	0	7	3	5	0	0

d) Es seien α, β, γ ungerade, $\alpha \ge 1$, $\beta \ge 3$, $\gamma \ge 5$ und $\delta+\varepsilon \le 3$. Zu diesen Bedingungen von c) komme als neue Bedingung noch $\alpha \ge 2\delta$ hinzu
In Beispiel b) ermittelten wir die mögliche Werte von δ und ε.

Möglicher Wert von δ	Mögliche Werte von α	Mögliche Werte von ε
0	1,3,5,...	0,1,2,3
1	3,5,7,...	0,1,2
2	5,7,9,...	0,1
3	7,9,11,...	0

Daher gibt es für den Aufzähler folgende Möglichkeiten

$$\delta=0 \wedge [\varepsilon=0 \vee \varepsilon=1 \vee \varepsilon=2 \vee \varepsilon=3] \wedge [\alpha=1 \vee \alpha=3 \vee \alpha=5 \vee \ldots]$$

$$d^0x^0.(e^0x^0+e^1x^1+e^2x^2+e^3x^3).(a^1x^1+a^3x^3+a^5x^5+\ldots)$$

oder

$$\delta = 1 \wedge [\varepsilon=0 \vee \varepsilon=1 \vee \varepsilon=2] \wedge [\alpha=3 \vee \alpha=5 \vee \alpha=7 \vee \ldots]$$

$$dx.(1+ex+e^2x^2).(a^3x^3+a^5x^5+a^7x^7+\ldots)$$

oder

....

Daher gilt zusammenfassend für den *Aufzähler*:

$$F(x) = \begin{bmatrix} (1+ex+e^2x^2+e^3x^3).(ax+a^3x^3+a^5x^5+...)+ \\ dx.(1+ex+e^2x^2).(a^3x^3+a^5x^5+a^7x^7+...)+ \\ d^2x^2(1+ex)(a^5x^5+a^7x^7+...)+ \\ d^3x^3(a^7x^7+a^9x^9+...) \end{bmatrix}.$$

$$\cdot\ (b^3x^3+b^5x^5+...).(c^5x^5+c^7x^7+\quad)$$

Für den *Abzähler* gilt daher

$$F(x) = [(1+x+x^2+x^3)(x+x^3+x^5+...)+x(1+x+x^2)(x^3+x^5+x^7+...)+$$

$$+x^2(1+x)(x^5+x^7+x^9+...)+x^3(x^7+x^9+x^{11}...)].(x^3+x^5+...)(x^5+x^7+...) =$$

$$= [(1+x+x^2+x^3)\frac{x}{1-x^2}+x(1+x+x^2)\frac{x^3}{1-x^2}+x^2(1+x)\frac{x^5}{1-x^2}+x^3.\frac{x^7}{1-x^2}]\cdot$$

$$\cdot\frac{x^3}{1-x^2}.\frac{x^5}{1-x^2} = \frac{x^9[(1+x+x^2+x^3)+x^3(1+x+x^2)+x^6(1+x)+x^9]}{(1-x^2)^3} =$$

$$F(x) = [1+x+x^2+2x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^9].\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2+k}{2}x^{2k+9}$$

<u>Zahlenbeispiel:</u> r = 17.

Abzählung: Gesucht ist der Koeffizient von x^{17} :

$$[1+x+x^2+2x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^9](\binom{2}{2}x^9+\binom{3}{2}x^{11}+\binom{4}{2}x^{13}+\binom{5}{2}x^{15}+\binom{6}{2}x^{17}+...)$$

$$[1+x+x^2+2x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^9](x^9+3x^{11}+6x^{13}+10x^{15}+15x^{17}+...)$$

Koeffizient von x^{17}... 15 + 10 + 6 + 3 = <u>34 Möglichkeiten</u>

Aufzählung:

δ	ε	α	β	γ	δ	ε	α	β	γ	δ	ε	α	β	γ	δ	ε	α	β	γ
0	0	1	3	13	0	0	5	3	9	0	2	1	9	5	1	1	3	7	5
0	0	1	5	11	0	0	5	5	7	0	2	3	3	9	1	1	5	3	7
0	0	1	7	9	0	0	5	7	5	0	2	3	5	7	1	1	5	5	5
0	0	1	9	7	0	0	7	3	7	0	2	3	7	5	1	1	7	3	5
0	0	1	11	5	0	0	7	5	5	0	2	5	3	7	2	0	5	3	7

Fortsetzung jeder Kolonne auf der nächsten Seite

δ	ε	α	β	γ	δ	ε	α	β	γ	δ	ε	α	β	γ	δ	ε	α	β	γ
0	0	3	3	11	0	0	9	3	5	0	2	5	5	5	2	0	5	5	5
0	0	3	5	9	0	2	1	3	11	0	2	7	3	5	2	0	7	3	5
0	0	3	7	7	0	2	1	5	9	1	1	3	3	9					
0	0	3	9	5	0	2	1	7	7	1	1	3	5	7					

e) Das Auftreten von a in einer Auswahl schließt das Auftreten von b aus, d schließt e aus, c tritt genau dann auf, wenn auch a und d auftreten.

1. a tritt nicht mit b auf, aber beide beliebig mit e:

$$[1+(a+b)x+(a^2+b^2)x^2+(a^3+b^3)x^3+\ldots].(1+ex+e^2x^2+e^3x^3+\ldots) \qquad (*)$$

oder

2. a und d treten zusammen stets mit c auf (dann ist e ausgeschlossen):

$$[adx^2+(a^2d+ad^2)x^3+(a^3d+a^2d^2+ad^3)x^4+(a^4d+a^3d^2+a^2d^3+ad^4)x^5+\ldots]\cdot$$
$$\cdot(cx+c^2x^2+c^3x^3+\ldots)$$

oder

3. b kann beliebig mit d verknüpft werden:

$(1+bx+b^2x^2+\ldots)(dx+d^2x^2+d^3x^3+\ldots)$ (der Fall, daß d überhaupt nicht vorkommt, ist bereits unter (*) berücksichtigt!)

Daher lautet der *Aufzähler:*

$$F(x) = [1+(a+b)x+(a^2+b^2)x^2+(a^3+b^3)x^3+\ldots].(1+ex+e^2x^2+e^3x^3+\quad) +$$
$$+ [adx^2+(a^2d+ad^2)x^3+(a^3d+a^2d^2+ad^3)x^4+(a^4d+a^3d^2+a^2d^3+ad^4)x^5+\ldots]\cdot$$
$$\cdot(cx+c^2x^2+c^3x^3+\ldots) + (1+bx+b^2x^2+\ldots)(dx+d^2x^2+d^3x^3+\ldots)$$

Abzähler:

$$F(x) = (1+2x+2x^2+2x^3+\quad)(1+x+x^2+\ldots) +$$
$$+ (x^2+2x^3+3x^4+4x^5+\ldots)(x+x^2+x^3+\ldots) + (1+x+x^2+\ldots)(x+x^2+x^3+\ldots) =$$
$$= (2+2x+2x^2+2x^3+\quad -1)\frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x}\,x\underbrace{(x+2x^2+3x^3+\ldots)}_{\text{siehe Seite 49}} + \frac{x}{(1-x)^2} =$$
$$= \left(\frac{2}{1-x}-1\right).\frac{1}{1-x}+\frac{x^2}{1-x}.\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x)^2} =$$
$$= \frac{1}{(1-x)^3}.[2(1-x)-(1-x)^2 + x^3 + x(1-x)]$$

Der *Abzähler* lautet daher:

$$F(x) = \frac{1+x-2x^2+x^3}{(1-x)^3} = (1+x-2x^2+x^3)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k$$

<u>Zahlenbeispiel:</u> $r = 4$ Entwicklung des Abzählers ergibt:

$$(1+x-2x^2+x^3)(1+3x+6x^2+10x^3+15x^4\ldots)$$

Der Koeffizient von x^4 lautet: $15+10-12+3 =$ <u>16 Möglichkeiten</u>

a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
4	0	0	0	0	1	0	0	0	3	0	3	0	1	0	0	1	0	3	0
3	0	0	0	1	1	0	1	2	0	0	3	0	0	1	0	1	0	0	3
2	0	0	0	2	1	0	2	1	0	0	2	0	2	0	0	0	0	4	0
2	0	1	1	0	0	4	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	0	0	4

Erzeugende Funktionen für Anordnungen

Aus n *verschiedenen Objekten* gibt es insgesamt $\binom{n}{r}$ r-Auswahlen ohne Wiederholung. Jede dieser Auswahlen gibt zu

$$r!\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1)) = [n]_r$$

Anordnungen Anlaß. Aus

$$F(x) = 1+1!\binom{n}{1}x+2!\binom{n}{2}x^2+3!\binom{n}{3}x^3+\ldots+n!\binom{n}{n}x^n = \sum_{r=0}^{n} r!\binom{n}{r}x^r = \sum_{r=0}^{n} [n]_r x^r$$

folgt

> Die erzeugende Funktion für *Anordnungen ohne Wiederholung* aus n *verschiedenen Objekten* ist
>
> $$F(x) = \sum_{r=0}^{n} r!\binom{n}{r}x^r = \sum_{r=0}^{n} [n]_r x^r$$

Nun gilt

> $$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}x^r = \sum_{r=0}^{n} \left(r!\binom{n}{r}\right)\frac{x^r}{r!}$$
>
> Man erkennt, daß man die erzeugenden Funktionen für *Anordnungen ohne Wiederholungen* erhält, wenn man die erzeugenden Funktionen für *Auswahlen ohne Wiederholungen* so umformt, daß jeweils an Stelle von x^r die Größe $\frac{x^r}{r!}$ steht

Wir wenden uns nun den *Anordnungen mit Wiederholungen* zu.

Beispiel: Aus dem Vorrat a,b,c sollen zunächst *Auswahlen* getroffen werden, bei denen a höchstens dreimal, b und c höchstens einmal vorkommen. Der Aufzähler ist dann

$$(1+ax+a^2x^2+a^3x^3)(1+bx)(1+cx) =\ldots= 1+(a+b+c)x + (a^2+ab+ac+bc)x^2 +$$
$$+ (a^3+a^2b+a^2c+abc)x^3 + (a^3b+a^3c+a^2bc)x^4 + a^3bcx^5$$

Formt man diesen Ausdruck nach der obigen Regel um, so erhielte man

$$1+1!(a+b+c)\frac{x}{1!} + 2!(a^2+ab+ac+bc)\frac{x^2}{2!} + 3!(a^3+a^2b+a^2c+abc)\frac{x^3}{3!} +$$
$$4!(a^3b+a^3c+a^2bc)\frac{x^4}{4!} + 5!a^3bc\frac{x^5}{5!}$$

Setzt man nun a=b=c=1, so sollte man den Abzähler erhalten:

$$1 + 1!.3\frac{x}{1!} + 2!.4\frac{x^2}{2!} + 3!.4\frac{x^3}{3!} + 4!.3\frac{x^4}{4!} + 5!\frac{x^5}{5!} =$$

$$1 + 3\frac{x}{1!} + 8\frac{x^2}{2!} + 24\frac{x^3}{3!} + 72\frac{x^4}{4!} + 120\frac{x^5}{5!} \qquad (*)$$

Tatsächlich ergibt sich aber

r=2	
aa	1
ab	
ac	
ba	
bc	
ca	
cb	
7	1
8	

r=3	
aaa	5
aab	1
aac	1
aba	1
abc	
aca	1
acb	
baa	1
bac	
bca	
caa	1
cab	
cba	
13	11
24	

r=4	
aaab	5
aaac	5
aaba	5
aabc	1
aaca	5
aacb	1
abaa	5
abac	1
abca	1
acaa	5
acab	1
acba	1
baaa	5
baac	1
baca	1
bcaa	1
caaa	5
caab	1
caba	1
cbaa	1
20	52
72	

r=5	
aaabc	5
aaacb	5
aabac	5
aabca	5
aacab	5
aacba	5
abaac	5
abaca	5
abcaa	5
acaab	5
acaba	5
acbaa	5
baaac	5
baaca	5
bacaa	5
bcaaa	5
caaab	5
caaba	5
cabaa	5
cbaaa	5
20	100
120	

Der Widerspruch rührt davon her, daß beim Ansatz (*) das Auftreten desselben Elementes an mehreren Stellen ebenso oft gezählt wird. In obiger Tabelle ist neben jeder Auswahl die Anzahl der fehlerhaften Mehrzählungen angegeben.

Man hat daher zur Vermeidung von Mehrzählungen im Aufzähler a, a^2, a^3, durch $\frac{a}{1!}, \frac{a^2}{2!}, \frac{a^3}{3!}$ ersetzen. Dann lautet der *Aufzähler für Anordnungen mit Wiederholungen*

$$F(x) = 1!\left(\frac{a}{1!}+\frac{b}{1!}+\frac{c}{1!}\right)\frac{x}{1!} + 2!\left(\frac{a^2}{2!}+\frac{a.b}{1!.1!}+\frac{a.c}{1!.1!}+\frac{b.c}{1!.1!}\right)\frac{x^2}{2!} +$$

$$+ 3!\left(\frac{a^3}{3!}+\frac{a^2.b}{2!.1!}+\frac{a^2.c}{2!.1!}+\frac{a.b.c}{1!.1!.1!}\right)\frac{x^3}{3!} +$$

$$+ 4!\left(\frac{a^3.b}{3!.1!}+\frac{a^3.c}{3!.1!}+\frac{a^2.b.c}{2!.1!.1!}\right)\frac{x^4}{4!} + 5!.\frac{a^3.b.c}{3!.1!.1!}.\frac{x^5}{5!} =$$

$$= 1 + (a+b+c)\frac{x}{1!} + (a^2+2ab+2ac+2bc)\frac{x^2}{2!} + (a^3+3a^2b+3a^2c+6abc)\frac{x^3}{3!} +$$

$$+ (4a^3b+4a^3b+12a^2bc)\frac{x^4}{4!} + 20a^3bc.\frac{x^5}{5!}$$

Der erste Summand $4a^3b$ des Koeffizienten von $\frac{x^4}{4!}$ besagt z.B., daß es vier Anordnungen gibt, in denen a dreimal und b einmal auftritt, nämlich

aaab, aaba, abaa, baaa

analog die anderen Summanden.

Nunmehr lautet der *Abzähler:*

$$F(x) = 1 + 3.\frac{x}{1!} + 7.\frac{x^2}{2!} + 13.\frac{x^3}{3!} + 20.\frac{x^4}{4!} + 20.\frac{x^5}{5!}$$

Die Koeffizienten der $\frac{x^i}{i!}$ geben nun die Anzahlen der Anordnungen wieder, die der empirisch gefundenen Aufstellung entsprechen.

===================

Gegeben sei der Vorrat a,b,c. Zu suchen ist die Anzahl der r-Anordnungen mit Wiederholungen. Der *Aufzähler* lautet

$$F(x) = \left(1 + a\frac{x}{1!} + a^2.\frac{x^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 + b.\frac{x}{1!} + b^2.\frac{x^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 + c.\frac{x}{1!} + c^2.\frac{x^2}{2!} + \ldots\right) =$$

$$= e^{ax}.e^{bx}.e^{cx} = e^{(a+b+c)x} = 1 + (a+b+c).\frac{x}{1!} + (a+b+c)^2.\frac{x^2}{2!} + (a+b+c)^3.\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Der Koeffizient von $\frac{x^r}{r!}$ ist also $(a+b+c)^r$. Nun ist (Seite 19)

$$(a+b+c)^r = \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=r}}^{r} \frac{r!}{\alpha!\beta!\gamma!} . a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

Der Koeffizient von $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ stellt also die Anzahl der r-Anordnungen dar, die bei α-maligem Auftreten von a, β-maligem von b und γ-maligem von c möglich sind.

Der *Abzähler* des Beispiels lautet

$$ê^{3x} = 1 + 3.\frac{x}{1!} + 3^2.\frac{x^2}{2!} + \ldots + 3^r.\frac{x^r}{r!} + \ldots.$$

Es gibt also 3^r r-Anordnungen der Objekte a,b,c.

Beispiel: r = 2. Die Abzählung liefert $3^2 = 9$ Anordnungen. Die Aufzählung ergibt

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

Das bedeutet ausführlich

aa bb cc ab ba bc cb ac ca

Allgemein: Aus den Objekten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sollen alle Anordnungen mit Wiederholungen gebildet werden

$$F(x) = (1+a_1\frac{x}{1!} + a_1^2\frac{x^2}{2!} + \ldots)\ldots(1 + a_n\frac{x}{1!} + a_n^2\frac{x^2}{2!} + \ldots) =$$

$$= ê^{a_1x}\ldots ê^{a_nx} = ê^{(a_1+\ldots+a_n)x}$$

Sei $s := a_1 + \ldots + a_n$, so gilt

$$ê^{sx} = 1 + s\frac{x^1}{1!} + s^2\frac{x^2}{2!} + \ldots$$

Mit $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$, d.h. s = n folgt

$$ê^{nx} = 1 + n\frac{x}{1!} + n^2\frac{x^2}{2!} + \ldots + n^r\frac{x^r}{r!} + \ldots$$

> Die Anzahl der r-Anordnungen von n verschiedenen Objekten mit Wiederholung beträgt
>
> $$n^r$$

Beispiel: Gesucht ist die Anzahl der Anordnungen mit Wiederholung der Objekte $a_1, \ldots, a_n$, bei denen jedes Objekt mindestens einmal auftritt.

$$(a_1 \frac{x}{1!} + a_1^2 \frac{x^2}{2!} + \ldots)\ldots(a_n \frac{x}{1!} + a_n^2 \frac{x^2}{2!} + \ldots) = (\hat{e}^{a_1 x}-1)\ldots(\hat{e}^{a_n x}-1) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (\hat{e}^{a_k x}-1) \quad \ldots \textit{Aufzähler}$$

Abzähler: $a_1 = \ldots = a_n = 1$

$$(\hat{e}^x - 1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \hat{e}^{rx}(-1)^{n-r}$$

<u>Beispiel:</u> Objekte: a,b,c, n =3

Aufzähler: $(\hat{e}^{ax}-1).(\hat{e}^{bx}-1).(\hat{e}^{cx}-1) = \hat{e}^{(a+b+c)x} - \hat{e}^{(a+b)x} - \hat{e}^{(a+c)x} -$

$$- \hat{e}^{(b+c)x} + \hat{e}^{ax} + \hat{e}^{bx} + \hat{e}^{cx} - 1$$

Abzähler: $(\hat{e}^x-1)^3 = \hat{e}^{3x} - 3\hat{e}^{2x} + 3\hat{e}^x - 1 =$

$$= 1 + 3\frac{x}{1!} + 9\frac{x^2}{2!} + 27\frac{x^3}{3!} + 81\frac{x^4}{4!} + 243\frac{x^5}{5!} + \ldots + 3^r \frac{x^r}{r!} + \ldots$$

$$-3 - 6\frac{x}{1!} - 12\frac{x^2}{2!} - 24\frac{x^3}{3!} - 48\frac{x^4}{4!} - 96\frac{x^5}{5!} - \ldots - 3.2^r \frac{x^r}{r!} + \ldots$$

$$+3 + 3\frac{x}{1!} + 3\frac{x^2}{2!} + 3\frac{x^3}{3!} + 3\frac{x^4}{4!} + 3\frac{x^5}{5!} + \ldots + 3.\frac{x^r}{r!} + \ldots$$

$$-1 =$$

$$= 6\frac{x^3}{3!} + 36\frac{x^4}{4!} + 150\frac{x^5}{5!} + \ldots + (3^r - 3.2^r + 3)\frac{x^r}{r!} + \ldots$$

Man entnimmt, daß es für r=4 insgesamt 36 Anordnungen m.W. gibt

aabc	baac	abbc	bbca	abcc	caabc
aacb	baca	abcb	bcab	acbc	cacb
abac	bcaa	acbb	bcba	accb	cbac
abca	caab	babc	cabb	bacc	cbca
acab	caba	bacb	cbab	baca	ccab
acba	cbaa	bbac	cbba	bcaa	ccba

<u>Beispiel:</u> Gesucht sind die Anordnungen der Objekte a,b,c m.W., bei denen jedes Objekt maximal zweimal auftritt

Aufzähler. $(1+ ax + \frac{a^2}{2!} x^2)(1+ bx + \frac{b^2}{2!} x^2)(1+ ax + \frac{c^2}{2!} x^2) = \ldots =$

$$= 1 + (a+b+c)\frac{x}{1!} + (a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)\frac{x^2}{2!} +$$

$$+ (3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc)\frac{x^3}{3!} +$$

$$+ (6a^2b^2+6a^2c^2+6b^2c^2+12a^2bc+12ab^2c+12abc^2)\frac{x^4}{4!}$$

$$+ (30a^2b^2c+30a^2bc^2+30ab^2c^2)\frac{x}{5!} + 90\, a^2b^2c^2\,\frac{x^6}{6!}$$

man erkennt z.B, daß es $12 = \frac{4!}{2!1!1!}$ Anordnungen m.W. vom Typ a^2bc oder $30 = \frac{5!}{2!1!2!}$ Anordnungen vom Typ a^2bc^2 gibt.

Der *Abzähler* lautet

$$1 + 3\frac{x}{1!} + 9\frac{x^2}{2!} + 24\,\frac{x^3}{3!} + 54\,\frac{x^4}{4!} + 90\,\frac{x^5}{5!} + 90\,\frac{x^6}{6!}$$

====================

Gesucht wird die Anzahl der Anordnungen m.W., bei denen die Objekte $a_1,\dots,a_k$ maximal je $r_1,\dots,r_k$-mal vorkommen.

Aufzähler: $$\prod_{i=1}^{k}\left(1+a_i\frac{x}{1!}+a_i^2\frac{x^2}{2!}+\dots+a_i^{ri}\frac{x^{ri}}{ri!}\right)$$

Abzähler: $$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{r1}}{r1!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{r2}}{r2!}\right)\dots\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{ri}}{r2!}\right)$$

Der Koeffizient der höchsten Potenz $x^{r1+r2+\dots+rn} = x^n$ dieses Ausdrucks ist $\frac{1}{r1!r2!\dots rk!}$, der Koeffizient von $\frac{x^n}{n!}$ hat daher den Wert $\frac{n!}{r1!r2!\dots rk!}$. Daher gilt

> $\frac{n!}{r1!r2!\dots rk!}$ ist die Anzahl der Anordnungen von n Objekten, unter denen $r_1,\dots,r_k$ gleiche sind $(r_1+\dots+r_k = n)$

$\boxed{\text{1.Beispiel}}$ Gesucht ist der Abzähler der Anordnungen m.W., bei denen aus einem Vorrat von n verschiedenen Objekten jedes Objekt mindesten zweimal auftritt.

$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^n = (e^x - (1+x))^n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\binom{n}{i} e^{ix}(1+x)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\binom{n}{i}\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ix)^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-i}\binom{n-i}{k}x^k\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-i} (-1)^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k}\frac{i^j}{j!}(j+k)!\,\frac{x^{j+k}}{(j+k)!}$$

Setzen wir $j+k=r \Rightarrow k=r-j$. Bestimmung der Grenzen $\begin{cases} r-j\geq 0 \Rightarrow j\leq r \\ r-j\leq n-i \Rightarrow j\geq r-n+i \end{cases}$

Als Koeffizient von $\frac{x^r}{r!}$ ergibt sich somit die Anzahl der r-Anordnungen, bei denen jedes Objekt mindestens zweimal auftritt:

$$\underline{r!\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=r-n+i}^{r} (-1)^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{r-j}\frac{i^j}{j!}}$$

<u>Zahlenbeispiel:</u> $n = 3$, $r = 8$

<u>1.Lösung:</u> Einsetzen in obige Formel

$$8!\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=5+i}^{8} (-1)^{3-i}\binom{3}{i}\binom{3-i}{8-j}\frac{i^j}{j!} = 8!\left[\sum_{j=5}^{8}(-1)^3\binom{3}{0}\binom{3}{8-j}\frac{0^j}{j!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=6}^{8}(-1)^2\binom{3}{1}\binom{2}{8-j}\frac{1^j}{j!} + \sum_{j=7}^{8}(-1)^1\binom{3}{2}\binom{1}{8-j}\frac{2^j}{j!} + \sum_{j=8}^{8}(-1)^0\binom{3}{0}\binom{0}{8-j}\frac{3^j}{j!}\right] =$$

$$= 8!\left[3\left(\binom{2}{2}\frac{1}{6!}+\binom{2}{1}\frac{1}{7!}+\binom{2}{0}\frac{1}{8!}\right)-3\left(\binom{1}{1}\frac{2^7}{7!}+\binom{1}{0}\frac{2^8}{8!}\right)+\binom{0}{0}\frac{3^8}{8!}\right] =$$

$$= 3.8.7 + 2.3.8 - 3.8.2^7 - 3.2^7 + 3^8 = \underline{2940 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>2.Lösung:</u> Direkter Ansatz $\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)^3 = x^6\left(\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\ldots\right)^3 =$

Da wir nur den Koeffizienten von x^8 benötigen, genügt die Beschränkung auf quadratische Polynome

$$x^6\left(\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\right)^3 = \frac{x^6}{(4!)^3}(12+4x+x^2)^3 = \ldots =$$

$$= \frac{x^6}{(4!)^3}(1728+1728x+1008x^2+\dots) = \frac{1728}{(4!)^3}.6!.\frac{x^6}{6!} + \frac{1728}{(4!)^3}.7!.\frac{x^7}{7!} +$$

$$+ \frac{1008}{(4!)^3}.8!.\frac{x^8}{8!} = 90\,\frac{x^6}{6!} + 630\,\frac{x^7}{7!} + \underline{2940}\,\frac{x^8}{8!}$$

3.Lösung: Wir treffen zunächst aus den 3 Objekten a,b,c alle *Auswahlen* des Umfanges 8, wobei jede Objekt mindestens zweimal vorkommt:

a) Direkte Überlegung

a	b	c	
⊙ ⊙	⊙ ⊙	⊙ ⊙	Je zwei "Pflichtexemplare"
•		•	Verteilung der Restexemplare

Es sind also insgesamt 4 Zeichen, von denen je zwei gleich sind, anzuordnen: $\frac{4!}{2!2!} = \underline{6 \text{ Auswahlen}}$

b) Erzeugende Funktionen

$$(x^2+x^3+\dots)^3 = x^6(1+x+x^2\ +)^3 = x^6(1+3x+6x^2+\dots) = x^6+3x^7\underline{+6}x^8+\dots$$

a	b	c		
2	2	4	$\frac{8!}{2!2!4!}$	= 420 Anordnungen
2	3	3	$\frac{8!}{2!3!3!}$	= 560 Anordnungen
2	4	2		420 Anordnungen
3	2	3		560 Anordnungen
3	3	2		560 Anordnungen
4	2	2		420 Anordnungen
				2940 Anordnungen

$\boxed{\text{2.Beispiel}}$ Gesucht ist der Abzähler der Anordnungen m.W., bei denen aus einem Vorrat von n verschiedenen Objekten jedes Objekt genau zweimal auftritt.

$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2!}\right)^n = \frac{(2n)!}{(2!)^n}\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \frac{(2n)!}{(2!)^n} \text{ Anordnungen}$$

$\boxed{\text{3.Beispiel}}$ Gesucht ist der Abzähler der Anordnungen m.W., bei denen aus einem Vorrat von n verschiedenen Objekten jedes Objekt höchstens zweimal auftritt.

$$F(x) = \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)^n = \left[(1+x)+\frac{x^2}{2!}\right]^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(1+x)^i\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}x^j = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\frac{1}{2^{n-i}}x^{2n+j-2i}$$

Wir setzen $2n+j-2i= r$. Aus der Angabe folgt $0\le r\le 2n$. Für die Grenzen von i folgt aus $0 \le j = r+2i-2n \le i \begin{cases} i\le 2n-r \\ 2i\ge 2n-r \Rightarrow i\ge n-\frac{r}{2} \end{cases}$

$$= \sum_{r=0}^{2n}\sum_{i\ge n-\frac{r}{2}}^{2n-r}\binom{n}{i}\binom{i}{r-2n+2i}\frac{1}{2^{n-i}}x^r = \sum_{r=0}^{n}\sum_{i\ge n-\frac{r}{2}}^{2n-r}\binom{n}{i}\binom{i}{r-2n+2i}\frac{r!}{2^{n-i}}\frac{x^r}{r!}$$

Die gesuchte Anzahl der r-Anordnungen ist daher

$$\underline{r!\sum_{i\ge n-\frac{r}{2}}^{2n-r}\binom{n}{i}\binom{i}{r-2n+2i}\frac{1}{2^{n-i}}}$$

<u>Zahlenbeispiel:</u> $n = 4$, $r = 5$, $i\ge 4-\frac{5}{2} \Rightarrow i\ge 2$, $i\le 8-5=3$

<u>1.Lösung:</u> Einsetzen in obige Formel: $5!\sum_{i=2}^{3}\binom{4}{i}\binom{i}{2i-3}\frac{1}{2^{4-i}} =$

$$5!\left[\binom{4}{2}\binom{2}{1}\frac{1}{2^2}+\binom{4}{3}\binom{3}{3}\frac{1}{2}\right] = 120.[6.2.\frac{1}{4}+4.1.\frac{1}{2}] = \underline{600}$$

<u>2.Lösung:</u> Direkter Ansatz: $\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)^4 = \ldots =$

$$= 1+4x+8x^2+10x^3+\frac{17}{2}x^4+5x^5+2x^6+\frac{1}{2}x^7+\frac{1}{16}x^8 =$$

$$= 1+1!.4\frac{x}{1!}+2!.8\frac{x^2}{2!}+3!.10\frac{x^3}{3!}+4!.\frac{17}{2}\frac{x^4}{4!}+5!.5\frac{x^5}{5!}+$$

$$+6!.2\frac{x^6}{6!}+7!.\frac{1}{2}\frac{x^7}{7!}+8!.\frac{1}{16}\frac{x^8}{8!} =$$

$$= 1+4\frac{x}{1!}+16\frac{x^2}{2!}+60\frac{x^3}{3!}+204\frac{x^4}{4!}+\underline{600}\frac{x^5}{5!}+1440\frac{x^6}{6!}+2520\frac{x^7}{7!}+2520\frac{x^8}{8!}$$

3.Lösung: Elementare Methoden über Auswahlen

Wegen

$$\frac{5!}{2!2!} = 30$$

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

gilt:

a	b	c	d	
0	1	2	2	30
0	2	1	2	30
0	2	2	1	30
1	0	2	2	30
1	1	1	2	60
1	1	2	1	60
1	2	0	2	30
1	2	1	1	60

a	b	c	d	
1	2	2	0	30
2	0	1	2	30
2	0	2	1	30
2	1	0	2	30
2	1	1	1	60
2	1	2	0	30
2	2	0	1	30
2	2	1	0	30
				600

4.Beispiel Gesucht ist der Abzähler der Anordnungen m.W., bei denen aus einem Vorrat von n verschiedenen Objekten jedes Objekt eine gerade Anzahl von Malen auftritt.

$$F(x) = (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots)^n = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^n = (\mathrm{ch}\ x)^n =$$

$$= \frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} e^{ix}.e^{-x(n-i)} = \frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} e^{(2i-n)x} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2i-n)^j}{j!}x^j = \frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{i}(2i-n)^j\cdot\frac{x^j}{j!}$$

Daher ist der Koeffizient von $\frac{x^r}{r!}$:

$$\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(2i-n)^r$$

5.Beispiel Gesucht ist der Abzähler der Anordnungen m.W., bei denen aus einem Vorrat von n verschiedenen Objekten jedes Objekt eine ungerade Anzahl von Malen auftritt.

$$F(x) = (\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = (\mathrm{sh}\ x)^n =$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{i=}^{n}\binom{n}{i} e^{ix}(-1)^{n-i}e^{-x(n-i)} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i} e^{(2i-n)x} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2i-n)^j}{j!}.x^j = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}.\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\frac{(2i-n)^j}{j!}.x^j$$

Der Koeffizient von $\frac{x^r}{r!}$ lautet daher

$$= \frac{1}{2^n} \sum^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} (2i-n)^r$$

Erzeugende Funktionen und Rekursionen

Die Glieder a_n einer Folge mögen sich durch Rekursion erzeugen lassen, d.h. jedes Glied ist bestimmt, wenn die vorhergehenden r Glieder bekannt sind. Dann kann die Rekursionsformel folgende Bauart haben:

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + \dots + C_r a_{n-r} = f(n) \tag{1}$$

Hier sind die C_0, ... ,C_r bekannte Konstanten und f(n) ist eine bekannte Funktion über $\mathbb{N}$. Wir beschränken uns auf diesen Typus mit konstanten Koeffizienten. Der Rekursionsanfang (für n = r) lautet dann:

$$C_0 a_r + C_1 a_{r-1} + C_2 a_{r-2} + \dots + C_r a_0 = f(r)$$

Hat man die Größen a_0, $a_1, \dots, a_{r-1}$ beliebig gewählt, so ist a_r bestimmt. Von Interesse sind also mur die Indizes

$$n \geq r \tag{2}$$

da die entsprechenden Elemente des Folge nicht mehr beliebig gewählt werden können.

Die erzeugende Funktion der Folge lautet daher

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{r-2} x^{r-2} + a_{r-1} x^{r-1} + a_r x^r + \dots \tag{3}$$

Hier sind die Größen $a_0, \dots, a_{r-1}$ beliebig gewählte Parameter. Wir multiplizieren (1) mit x^n und summieren (wegen (2)) über n mit $r \leq n \leq \infty$

$$\sum_{n=r}^{\infty} (C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_{r-2} a_{n-r+2} + C_{r-1} a_{n-r+1} + C_r a_{n-r}) x^n =$$

$$= \sum_{n=r}^{\infty} f(n) x^n \tag{4}$$

Betrachten wir der Reihe nach die einzelnen Teilsummen auf der linken Seite von (4)

$$\sum_{n=r}^{\infty}(C_0 a_n)x^n = C_0\sum_{n=r}^{\infty} a_n x^n = C_0[a_r x^r + a_{r+1}x^{r+1}+\ldots] =$$
$$= C_0[F(x)-a_0-a_1x-\ldots- a_{r-1}x^{r-1}]$$

$$\sum_{n=r}^{\infty}(C_1 a_{n-1})x^n = C_1[a_{r-1}x^r+a_r x^{r+1}+\ldots] = C_1 x[a_{r-1}x^{r-1}+a_r x^r+\ldots] =$$
$$= C_1 x[F(x)-a_0-a_1x-\ldots-a_{r-2}x^{r-2}]$$

....

$$\sum_{n=r}^{\infty}(C_{r-1}a_{n-r+1})x^n = C_{r-1}[a_1x^r+a_2x^{r+1}+\ldots] = C_{r-1}x^{r-1}[a_1x+a_2x^2 +\ldots] =$$
$$= C_{r-1}x^{r-1}[F(x) - a_0]$$

$$\sum_{n=r}^{\infty}(C_r a_{n-r})x^n = C_r[a_0x^r+a_1x^{r+1}+\ldots] = C_r x^r[a_0+a_1x+\ldots] =$$
$$= C_r x^r[F(x)]$$

Daher wird aus (4)

$$C_0[F(x)-a_0-a_1x-a_2x^2-\ldots-a_{r-2}x^{r-2}-a_{r-1}x^{r-1}] +$$
$$C_1x[F(x)-a_0-a_1x-a_2x^2-\ldots-a_{r-2}x^{r-2}] +$$
....
$$C_{r-1}x^{r-1}[F(X)-a_0] +$$
$$C_r x^r[F(x)] = \sum_{n=r}^{\infty} f(n)x^n$$

Also

$$\boxed{\begin{aligned}&[C_0+C_1x+\ldots+C_rx^r].F(x) = \sum_{n=r}^{\infty} f(n)x^n + C_0(a_0+a_1x+\ldots+a_{r-1}x^{r-1}) +\\ &+ C_1x(a_0+a_1x+\ldots+a_{r-2}x^{r-2}) + C_2x^2(a_0+a_1x+\ldots+a_{r-3}x^{r-3}) + \ldots +\\ &+ C_{r-2}x^{r-2}(a_0+a_1x) + C_{r-1}x^{r-1}(a_0)\end{aligned}}$$

Beispiel: FIBONACCI - Zahlen. Die Rekursionsformel lautet

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \Rightarrow a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

Hier ist $r = 2$ und es gilt

$$C_0 = 1, \; C_1 = C_2 = -1, \; f(n) \equiv 0$$

Daher nach obiger Formel:

$$[1-x-x^2].F(x) = 0 + 1.(a_0+a_1x) - x(a_0) = a_0 + (a_1-a_0)x$$

Daraus ergibt sich

$$F(x) = \frac{a_0 + (a_1-a_0)x}{1-x-x^2} = -\frac{a_0 + (a_1-a_0)x}{x^2+x-1}$$

als erzeugende Funkltion der FIBONACCI - Zahlen. Es gilt

$$x^2+x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2+x-1 = \left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= \left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.\frac{1+\sqrt{5}}{2}.\left(1+\frac{2}{1-\sqrt{5}}x\right).\left(1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}x\right) =$$

$$= -\left(1+\frac{2}{1-\sqrt{5}}x\right).\left(1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}x\right)$$

Wegen $\frac{2}{1-\sqrt{5}} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ gilt schließlich

$$x^2 + x - 1 = -\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right).\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)$$

Für $F(x)$ führen wir eine Partialbruchzerlegung durch:

$$F(x) = \frac{a_0 + (a_1-a_0)x}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right).\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)} =$$

$$= \frac{A}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)} = \frac{(A+B) - \left[A.\frac{1-\sqrt{5}}{2} + B.\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]x}{x^2 + x - 1}$$

Daher

$$A + B = a_0$$

$$-\left[A.\frac{1-\sqrt{5}}{2} + B.\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = a_1-a_0 \Rightarrow \overbrace{(A+B)}^{a_0} + \sqrt{5}.(B-A) = 2a_0 - 2a_1$$

Also

$$A + B = a_0$$

$$-A + B = \frac{1}{\sqrt{5}}(a_0 - 2a_1)$$

$$2A = a_0 - \frac{1}{\sqrt{5}}(a_0 - 2a_1)$$
$$2B = a_0 + \frac{1}{\sqrt{5}}(a_0 - 2a_1)$$

Daher liefert die Partialbruchzerlegung

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_0 - \frac{1}{\sqrt{5}}(a_0 - 2a_1)}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_0 + \frac{1}{\sqrt{5}}(a_0 - 2a_1)}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_0 - \frac{1}{\sqrt{5}}(a_0 - 2a_1)\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{1}{\sqrt{5}}(a_0 - 2a_1)\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(a_0 - \frac{1}{\sqrt{5}}(a_0-2a_1)\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(a_0 - \frac{1}{\sqrt{5}}(a_0-2a_1)\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]x^n$$

Erzeugende Funktion der FIBONACCI - Zahlen

Geschlossene Darstellung der n-ten FIBONACCI - Zahl mit den Anfangswerten a_0 und a_1

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\left(a_0 - \frac{1}{\sqrt{5}}(a_0-2a_1)\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(a_0 - \frac{1}{\sqrt{5}}(a_0-2a_1)\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Geschlossene Darstellung der n-ten FIBONACCI - Zahl mit den Anfangswerten $a_0 = a_1 = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Die geschlossene Darstellung der korrigierten FIBONACCI - Zahlen ergibt sich mit den Anfangswerten $a_0 = 2$, $a_1 = 1$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Seite 76 fehlt

Dann lautet das charakteristische Polynom

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \mp \hat{\imath}\sqrt{3}}{2}$$

Daher

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1+\hat{\imath}\sqrt{3}}{2}\right).\left(x - \frac{1-\hat{\imath}\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1+\hat{\imath}\sqrt{3}}{2}.\frac{1-\hat{\imath}\sqrt{3}}{2}.\left(1-\frac{2}{1+\hat{\imath}\sqrt{3}}x\right).\left(1-\frac{2}{1-\hat{\imath}\sqrt{3}}x\right) = \left(1-\frac{1-\hat{\imath}\sqrt{3}}{2}x\right).\left(1-\frac{1+\hat{\imath}\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Demnach gilt

$$F(x)(x^2 - x + 1) = 1.(a_0 + a_1x) + (-1)x(a_0) = a_0 + (a_1 - a_0)x$$

$$F(x) = \frac{a_0 + (a_1 - a_0)x}{x^2 - x + 1} = \frac{A}{1-\frac{1+\hat{\imath}\sqrt{3}}{2}x} + \frac{B}{1-\frac{1-\hat{\imath}\sqrt{3}}{2}x} =$$

$$= \frac{(A + B) - \left[A.\frac{1-\hat{\imath}\sqrt{3}}{2} + B.\frac{1+\hat{\imath}\sqrt{3}}{2}\right]x}{x^2 - x + 1}$$

Daher

$$A + B = a_0$$

$$\hat{\imath}(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}.(2a_1 - a_0)$$

Ferner gilt

$$\frac{1+\hat{\imath}\sqrt{3}}{2} = \rho\hat{e}^{\hat{\imath}\varphi} \text{ mit } \rho^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1, \quad \tan\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

also $\frac{1+\hat{\imath}\sqrt{3}}{2} = 1.\hat{e}^{\hat{\imath}\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + \hat{\imath}.\sin\frac{\pi}{3}$. Daher

$$F(x) = \frac{A}{1-\frac{1+\hat{\imath}\sqrt{3}}{2}x} + \frac{B}{1-\frac{1-\hat{\imath}\sqrt{3}}{2}x} = A.\sum_{=o}^{\infty}\left(\frac{1+\hat{\imath}\sqrt{3}}{2}\right)^n x^n + B.\sum_{=o}^{\infty}\left(\frac{1-\hat{\imath}\sqrt{3}}{2}\right)^n x^n =$$

$$= A.\sum_{n=o}^{\infty}[\cos(n\tfrac{\pi}{3}) + \hat{\imath}.\sin(n\tfrac{\pi}{3})]x^n + B.\sum_{n=o}^{\infty}[\cos(n\tfrac{\pi}{3}) - \hat{\imath}.\sin(n\tfrac{\pi}{3})]x^n =$$

$$= \sum_{n=o}\left[(A + B).\cos(n\tfrac{\pi}{3}) + \hat{\imath}.(A - B).\sin(n\tfrac{\pi}{3})\right]x^n =$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty}\left[a_0.\cos(n\tfrac{\pi}{3}) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}.(2a_1 - a_0).\sin(n\tfrac{\pi}{3})\right]x^n$$

Es gilt also

$$a_n = a_0.\cos(n\tfrac{\pi}{3}) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}.(2a_1 - a_0).\sin(n\tfrac{\pi}{3})$$

Doppelwurzel des charakteristischen Polynoms

Beispiel: $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \Rightarrow a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$

$$C_0 = 1,\ C_1 = -2,\ C_2 = 1,\ f(n) \equiv 0$$

Das charakteristische Polynom lautet daher

$$1 - 2x + x^2 = (x - 1)^2$$

demnach

$$F(x)(x^2 - 2x + 1) = 1.(a_0 + a_1x) - 2x(a_0) = a_0 + (a_1 - 2a_0)x$$

$$F(x) = \frac{a_0 + (a_1 - 2a_0)x}{(x - 1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x - 1} =$$

$$= \frac{A + B(x-1)}{(x - 1)^2} = \frac{(A - B) + Bx}{(x - 1)^2}$$

also

$$\left.\begin{array}{l} A - B = a_0 \\ \quad\ B = a_1 - 2a_0 \end{array}\right] \Rightarrow A = a_1 - a_0$$

daher

$$\underline{F(x)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x - 1} = A.\sum_{n=o}^{\infty}\binom{n+2-1}{n}x^n - B.\sum_{n=o}^{\infty}x^n = \sum_{n=o}^{\infty}\left[A\binom{n+1}{n} - B\right]x^n =$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty}[(n+1)A - B]x^n = \sum_{n=o}^{\infty}[(n+1)(a_1-a_0)-a_1+2a_0]x^n = \underline{\sum_{n=o}^{\infty}[(1-n)a_0+na_1]x^n}$$

Daher lautet das n-te Glied der Folge

$$a_n = (1-n)a_0 + na_1$$

Distributionen (Verteilung von Objekten in Schachteln)

Verteilung von n *gleichen* Objekten in r *verschiedene* Schachteln

1.Methode

1	2	3	...	r−1	r
•••		•		••	•

r Schachteln
n Objekte

System von n Punkten und r−1 Strichen

Es sind also n+(r−1) Zeichen zu verteilen, von denen je r−1 bzw. n gleich sind. Die Anzahl der Möglicxhkeiten beträgt demnach

$$\frac{[n+(r-1)]!}{n!(r-1)!} = \binom{n+r-1}{n} = \binom{n+r-1}{r-1}$$

2.Methode: Erzeugende Funktion: Gegeben seien die Schachteln $a_1,\ldots,a_r$. Wir drücken die Tatsache, daß in der Schachtel a_i j_i Objekte sind, durch $a_i^{j_i}$ aus. Eine der möglichen Verteilungen der n Objekte wird daher durch

$$a_1^{j_1}a_2^{j_2}\ldots a_r^{j_r} \text{ mit } j_1+j_2+\ldots j_r = n \qquad (*)$$

dargestelllt. Den Ausdruck (*) betrachten wir als Koeffizient von x^n. Dann lautet der *Aufzähler*

$$(1+a_1x+a_1^2x^2+\ldots+a_1^nx^n)(1+a_2x+\ldots+a_2^nx^n)\ldots(1+a_rx+\ldots+a_r^nx^n)$$

Daraus ergibt sich der *Abzähler* mit $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 1$:

$$(1+x+\ldots+x^n)^r = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^r = \frac{(1-x^{n+1})^r}{(1-x)^r} =$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}x^{(n+1)i}\right].\left[\sum_{j=0}^{\infty}\binom{r+j-1}{r-1}x^j\right] = \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^i\binom{r}{i}\binom{r+j-1}{r-1}x^{(n+1)i+j}$$

Gesucht ist der Koeffizient von x^n, d.h. es muß gelten

$$(n+1)i+j = n \Rightarrow j = n-(n+1)i$$

Der gesuchte Koeffizient lautet daher

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}\binom{r+n-(n+1)i-1}{r-1}$$

worin natürlich $r-1 \le r+n-(n+1)i-1$ sein muß $\Rightarrow i \le \frac{n}{n+1} < 1$. Es kommt also nur ein Summand mit $i = 0$ in Frage. Daher ist der Koeffizient von x^n wie oben:

$$(-1)^0\binom{r}{0}\binom{r+n-1}{r-1} = \binom{r+n-1}{r-1} = \binom{r+n-1}{n}$$

Wir können den Abzähler auch einfacher mit

$$(1+x+x^2+\ldots)^r = \frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{r+i-1}{r-1}x^i$$

ansetzen, da bei der Berechnung nur x^n interessant ist und höhere Potenzen sich nicht auswirken. Dann ist der Koeffizient von x^n wie oben

$$\binom{r+n-1}{r-1} = \binom{r+n-1}{n}$$

> Die Anzahl der Möglichkeiten, *gleichartige* Objekte in n *verschiedene* Schachteln zu verteilen, beträgt
>
> $$\binom{r+n-1}{r-1} = \binom{r+n-1}{n}$$
>
> Dies ist gleich der Anzahl der n-Auswahlen mit Wiederholung

Verteilung von n *gleichen* Objekten in r *verschiedene* Schachteln, von denen *keine leer* ist.

1.Methode:

1	2	3	...	r−1	r	r Schachteln
⊙	⊙	⊙		⊙	⊙	r Pflichtobjekte
...	..			.	...	n−r Restobjekte

Es bleiben (r−1)+(n−r) Zeichen anzuorden, von denen je (r−1) bzw. (n−r) gleich sind.

$$\frac{[(r-1)+(n-r)]!}{(r-1)!(n-r)!} = \binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{n-r} \text{ Möglichkeiten}$$

2.Methode: Abzähler:

$$(x+x^2+x^3+\ldots)^r = x^r(1+x+x^2+\ \ldots)^r = \frac{x^r}{(1-x)^r} = x^r.\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+r-1}{r-1}x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+r-1}{r-1} x^{i+r}$$

Für den Koeffizienten von x^n gilt daher $i+r = n \Rightarrow i = n-r$, also

$$\binom{(n-r)+r-1}{r-1} = \binom{n-1}{r-1} \quad \text{wie oben}$$

> Die Anzahl der Möglichkeiten, n *gleiche* Objekte in r *verschiedene* Schachteln zu verteilen, von denen *keine leer* bleibt, ist
>
> $$\binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{n-r} \qquad n \geq r$$

<u>Aufgabe:</u> Gesucht ist die Anzahl der nicht negativen ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n > 0$$

Zerlegung der ganzen Zahl n in r Summanden

x_1	x_2	x_3	...	x_{r-1}	x_r	r Summanden
•••		•		••••	••	n Einheiten

Es sind n+(r−1) Zeichen zu verteilen, von denen je (r−1) bzw. n gleich sind:

$$\frac{[n+(r-1)]!}{n!(r-1)!} = \binom{n+r-1}{n} \quad \text{Lösungen} \geq 0$$

Lösung mit erzeugendem Polynom $(1+x+x^2+\ldots)^r$ siehe Seite 80.

===============

Es soll keiner der Summanden verschwinden.

x_1	x_2	x_3	...	x_{r-1}	x_r	r Summanden
⊙	⊙	⊙		⊙	⊙	r Pfichteinheiten
•••		•		••••	••	n−r freie Einheiten

Es sind (n−r)+(r−1) = n−1 Zeichen zu verteilen, von denen je (r−1) bzw. (n−r) gleich sind:

$$\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = \binom{n-1}{r-1} \quad \text{ganzzahlige Lösungen} > 0 \qquad n \geq r$$

Erzeugendes Polynom: $(x+x^2+\ldots)^r$ wie Seite 80.

Aufgabe: Gesucht ist die Anzahl der nichtnegativen ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = n \quad \text{mit } x_1 > c_1,\ x > c_2, \ldots, x_r > c_r,\ c_i \geq 0$$

Wir setzen

$$y_i := x_i - c_i, \qquad y_i > 0$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_r = \underbrace{x_1 + x_2 + \ldots + x_r}_{n} - (c_1 + c_2 + \ldots + c_r) = n - (c_1 + c_2 + \ldots + c_r)$$

y_1	y_2	y_3	...	y_{r-1}	y_r	r Summanden
⊙	⊙	⊙		⊙	⊙	r Pfichteinheiten ($y_i > 0$)
...		.		....	..	$n-r-\sum c_i$ Resteinheiten

Es gibt $(r-1) + (n-r-\sum c_i)$ Zeichen, davon je $r-1$ bzw. $n-r-\sum c_i$ gleiche:

$$\frac{[n-r-\sum c_i + r-1]!}{(r-1)!(n-r-\sum c_i)!} = \binom{n-1-\sum c_i}{r-1} \quad \text{Lösungen}$$

Lösung mittels des erzeugenden Polynoms:

$$(x^{c1+1} + x^{c1+2} + \ldots) \ldots (x^{cr+1} + x^{cr+2} + \ldots) = x^{r+\sum ci} . (1 + x + \ldots)^r =$$

$$= x^{r+\sum ci} . \frac{1}{(1-x)^r} = x^{r+\sum ci} . \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+r-1}{r-1} x^j = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+r-1}{r-1} x^{j+r+\sum ci}$$

Für den Koeffizienten von x^n gilt daher $n = j+r+\sum c_i \Rightarrow j = n-r-\sum c_i$ demnach gilt

$$\binom{n-\sum c_i - 1}{r-1} \quad \text{wie oben}$$

===============

Verteilung von n *verschiedenen* Objekten in r *verschiedene* Schachteln

1.Methode:

Das 1.Obj. kann in r versch. Schachteln gelegt werden ...r Mögl.
Das 2.Obj. kann in r versch. Schachteln gelegt werden ...r Mögl.
....
Das n.Obj. kann in r versch. Schachteln gelegt werden ...r Mögl.

Es gibt daher insgesamt r^n Möglichkeiten.

2.Methode: Erzeugende Funktion: Wir deuten durch a_i^{ji} an, daß die Schachtel a_i j_i (verschiedene) Objekte enthält. Da es auf die Reihenfolge der j_i Objekte in der Schachtel a_i nicht ankommt, schreiben wir

$$\frac{1}{j_i!}\, a_i^{j_i}$$

Eine mögliche Verteilung von n Objekten wäre also

$$\frac{1}{j_1!}\cdot\frac{1}{j_2!}\cdots\frac{1}{j_r!}\, a_1^{j_1} a_2^{j_2}\cdots a_r^{j_r}$$

Daher ist der Aufzähler:

$$(1 + a_1 x + a_1^2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + a_1^n \frac{x^n}{n!})\ldots(1 + a_r x + a_r^2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + a_r^n \frac{x^n}{n!})$$

Setzt man $a_1 = \ldots = a_r = 1$ und läßt höhere Potenzen zu, so erhält man den Abzähler

$$(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots)^r = (e^x)^r = e^{rx} = 1 + r\frac{x}{1!} + r^2\frac{x^2}{2!} + \ldots$$

Der Koeffizient von $\frac{x^n}{n!}$ ist daher r^n wie oben

> Die Anzahl der Möglichkeiten, n *verschiedene* Objekte in r *verschiedene* Schachteln zu verteilen, beträgt
>
> $$r^n$$
>
> Dies ist gleich der Anzahl der Abbildungen einer n-elementigen in eine r-elementige Menge

===============

<u>Verteilung von n *verschiedenen* Objekten in r *verschiedene* Schachteln, wobei in der Schachtel a_i k_i Objekte (ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge sein sollen $(k_1 + \ldots + k_r = n)$.</u>

<u>1.Methode:</u> In der 1.Schachtel kann man auf $\binom{n}{k_1}$ Arten k_1 Objekte unterbringen, in der 2.Schachtel auf $\binom{n-k_1}{k_2}$ Arten k_2 Objekte,... schließlich in der (r−1)-ten Schachtel auf $\binom{n-k_1-k_2-\ldots-k_{r-2}}{k_{r-1}}$ Arten k_{r-1} Objekte, während die restlichen Objekte in die letze Schachtel kommen. Es gibt daher insgesamt

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-k_2-\ldots-k_{r-2}}{k_{r-1}} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdots \frac{(n-k_1-k_2-\ldots-k_{r-2})!}{k_{r-1}!\underbrace{(n-k_1-k_2-\ldots-k_{r-1})!}_{k_r!}} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$$

2.Methode: Erzeugende Funktion: Es bedeute $\frac{1}{k_i!}a_i^{k_i}$ wieder, daß in der Schachtel a_i k_i Objekte enthalten sind, auf deren Reihenfolge innerhalb der Schachtel es nicht ankommt. Es gilt daher

$$(1+a_1\frac{x}{1!}+a_1^2\frac{x^2}{2!}+ \quad)(1+a\frac{x}{1!}+a^2\frac{x^2}{2!}+ \quad)\ldots(1+a\frac{x}{1!}+a^2\frac{x^2}{2!}+ \quad) =$$

$$= e^{a_1x}.e^{a_2x}\ldots e^{a_rx} = e^{(a_1+a_2+\ldots+a_r)x} = \sum_{i=0}^{\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_r)^i\frac{x^i}{i!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{\substack{k_j=0\\k_1+\ldots+k_r=i}}^{i}\frac{i!}{k_1!\ldots k_r!}.a_1^{k_1}\ldots a_r^{k_r}.\frac{x^i}{i!}$$

Der Koeffizient von $\frac{x^n}{n!}$ ist daher $(a_1+a_2+\ldots+a_r)^n$ und der Faktor $\frac{n!}{k_1!\ldots k_r!}$ gibt an, wie oft der Ausdruck $a_1^{k_1}\ldots a_r^{k_r}$ auftritt, also auf wieviele Arten die fragliche Verteilung vorgenommen werden kann.

> Die Anzahl der Möglichkeiten, n *verschiedene* Objekte in r *verschiedene* Schachteln zu verteilen, wobei in der Schachtel a_i genau k_i Objekte (ohne Beachtung ihrer Reihenfolge) zu liegen kommen, ist
>
> $$\frac{n!}{k_1!\ldots k_r!} \qquad k_1+k_2+\ldots+k_r = n$$

===============

Verteilung von n *verschiedenen* Objekten in r *gleiche* Schachteln, wobei in λ_1 Schachteln je 1 Objekt, in λ_2 Schachteln je 2 Objekte, ..., in λ_k Schachteln je k Objekte (ohne Rücksicht auf deren Reihenfolge) zu liegen kommen.

Es gilt

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = r, \qquad 1.\lambda_1 + 2.\lambda_2 + \ldots + k.\lambda_k = n$$

Die Auswahl des 1. Einzelelementes kann auf $\binom{n}{1}$ Arten, des 2. Einzelelementes auf $\binom{n-1}{1}$ Arten,...,des λ_1-ten Einzelelementes auf $\binom{n-\lambda_1+1}{1}$ Arten erfolgen. Da es auf die Reihenfolge der λ_1 gleichartigen Schachteln nicht ankommt, gibt es

$$\frac{1}{\lambda_1!}\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}\cdots\binom{n-\lambda_1+1}{1}$$

Möglichkeiten der Aufteilung von je einem Element in λ_1 gleichartige Schachteln. Aus den verbleibenden $n-\lambda_1$ Objekten kann man 2 auf $\binom{n-\lambda_1}{2}$ Arten in eine von λ_2 gleichartigen Schachteln verteilen, aus den restlichen $n-\lambda_1-2$ Objekten abermals 2 auf $\binom{n-\lambda_1-2}{2}$ Arten auf λ_2-1 Schachteln, die letzte der λ_2 Schachteln läßt sich auf $\binom{n-\lambda_1-2(\lambda_2-1)}{2}$ mit 2 Objekten belegen. Da es auch hier auf die Reihenfolge der Schachteln nicht ankommt, gibt es insgesamt

$$\frac{1}{\lambda_2!}\binom{n-\lambda_1}{2}\binom{n-\lambda_1-2}{2}\cdots\binom{n-\lambda_1-2(\lambda_2-1)}{2}$$

Möglichkeiten λ_2 gleichartige Schachteln mit je 2 Objekten zu belegen. Letztendlich ergibt sich

$$\frac{1}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_k!}\cdot\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}\cdots\binom{n-\lambda_1+1}{1}\binom{n-\lambda_1}{2}\binom{n-\lambda_1-2}{2}\cdots\binom{n-\lambda_1-2(\lambda_2-1)}{2}\cdots\ldots =$$

$$= \frac{n!\ .\ (n-1)!\ \ \ldots(n-\lambda_1+1)!\ .\ (n-\lambda_1)!\ .\ (n-\lambda_1-2)!\ \ldots\ldots}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_k!1!(n-1)!1!(n-2)!\ldots1!(n-\lambda_1)!2!(n-\lambda_1-2)!2!(n-\lambda_1-4)!\ldots\ldots}$$

$$= \frac{n!}{(1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}\ldots(k!)^{\lambda_k}(\lambda_1!)(\lambda_2!)\ldots(\lambda_k!)}$$

Die Anzahl der Verteilungen von n *verschiedenen* Objekten in r *gleiche* Schachteln, wobei in λ_i Schachteln jeweils je i Objekte (ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge) zu liegen kommen, ist

$$\frac{n!}{(1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}\ldots(k!)^{\lambda_k}(\lambda_1!)(\lambda_2!)\ldots(\lambda_k!)}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = r, \quad \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j = n$$

Verteilung von n *verschiedenen* Objekten in r *verschiedene* Schachteln, von denen *keine leer* ist (n≥r) ≡ Anzahl der *surjektiven Abbildungen* einer n-elementigen in eine r-elementige Menge.

Es seien 1,2,3,...,n die Objekte und $a_1,...,a_r$ die Schachteln.
Wir setzen die Objekte in eine Reihe und schreiben unter jedes Objekt die Schachtel, in der es sich befindet:

1	2	3	4	5	6	7	......	n-2	n-1	n
a_6	a_2	a_1	a_1	a_r	a_{r-1}	a_8	.....	a_3	a_3	a_5

Obiges Schema stellt eine n-Anordnungvon r Objekten mit Wiederholungen dar, bei der jedes Objekt mindesten einmal vorkommt. Der Abzähler lautet:

$$\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)^r = (\hat{e}^x-1)^r = \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\hat{e}^{ix}(-1)^{r-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}\sum_{j=0}^{\infty} i^j\frac{x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}i^j\right]\frac{x^j}{j!}$$

Die Anzahl der Möglichkeiten für den Exponenten j = n ist daher

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}i^n \qquad \text{Anzahl der surjektiven Abbildungen}$$

Nun wurde die Anzahl der surjektiven Abbildungen auf Seite 39 mit $r!S_n^r$ bestimmt (S_n^r ... STERLINGsche Zahl 2.Art). Daher gilt

Die Anzahl der Verteilungen von n *verschiedenen* Objekten in r *verschiedene* Schachteln (n≥r), wobei keine Schachtel leer bleibt (Reihenfolge der Objekte in den Schachteln ist belanglos) ≡ Anzahl der *surjektiven* Abbildungen einer n-elementigen Menge in eine r-elementige Menge, beträgt

$$r!S_n^r = \sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}i^n \qquad n\geq r$$

daher

$$\boxed{S_n^r = \frac{1}{r!}\cdot\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}i^n = \sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\frac{i^n}{i!(r-i)!} \qquad n\geq r}$$

Unter Beachtung der Definition von S_n^r von Seite 38 gilt

> Die Anzahl der Möglichkeiten, *verschiedene* Objekte in r *gleichartige* Schachteln zu verteilen, wobei *keine* Schachtel *leer* bleibt ≡ Anzahl der Möglichkeiten, eine Menge von n Elementen in r Klassen der möglichen Typen einzuteilen, beträgt
>
> $$S_n^r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \frac{i^n}{i!(r-i)!} \qquad n \geq r$$

> Die Anzahl der Möglichkeiten, n *verschiedene* Objekte in r *gleichartige* Schachteln zu verteilen, wobei einzelne Schachteln leer bleiben können, ist
>
> $$n \geq r \qquad S_n^1 + S_n^2 + \ldots + S_n^r$$
>
> $$n \leq r \ldots\ldots\ldots S_n^1 + S_n^2 + \ldots + S_n^n$$

<u>Beweis:</u> Anzahl der Verteilungen in 1 Schachtel . . . . S_n^1

Anzahl der Verteilungen in 2 Schachteln, keine leer. . S_n^2

Anzahl der Verteilungen in r Schachteln, keine leer. . S_n^r

Da diese Möglichkeiten einander nicht überschneiden, sind die Anzahlen nach dem Additionsprinzip zu addieren.

> Die Anzahl der Möglichkeiten, n *verschiedene* Objekte in r *gleichartige* Schachteln zu verteilen, sodaß k Schachteln stets belegt, der Rest von (r-k) Schachteln stets leer ist, beträgt
>
> $$\binom{r}{k} \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} i^n = \binom{r}{k} k! S_n^k = \frac{r!}{(r-k)!} S_n^k = [r]_k S_n^k$$

<u>Beweis:</u> Unter den r Schachteln können wir auf jeweils $\binom{r}{k}$ Arten k auswählen, die nicht leer bleiben.

> Die Anzahl der Möglichkeiten, n *verschiedene* Objekte in r *verschiedene geordnete* Schachteln zu verteilen, beträgt
>
> $$\binom{n+r-1}{r-1}n! = \binom{n+r-1}{n}n! = [r]^n$$

Beweis:

1	2	...	r−1	r	r Schachteln
a_{i1} a_{i2}	a_{i3}			a_{in}	$a_1,\dots,a_n$ Objekte

Es sind n+(r−1) Zeichen zu verteilen, von denen (r−1) gleich sind:

$$\frac{[n+(r-1)]!}{(r-1)!} = \frac{[n+(r-1)]!}{n!(r-1)!}n! = \binom{n+r-1}{n}n!$$

> Die Anzahl der Möglichkeiten, n *verschiedene* Objekte in r *verschiedene geordnete* Schachteln zu verteilen, wobei *keine* Schachtel *leer* bleibt, beträgt
>
> $$n!\binom{n-1}{r-1} \qquad n \geq r$$

Beweis:

1	2	...	r−1	r	r Schachteln
⊙	⊙		⊙	⊙	r Pflichtobjekte
a_{i1} a_{i2}	a_{i3}			a_{in-r}	n−r Restobjekte

Es gibt

$$n(n-1)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Möglichkeiten, die r Pflichtobjekte auf die r Schachteln zu verteilen. Die (n−r) Restobjekte können mit den (r−1) Trennstrichen auf insgesamt

$$\frac{[(n-r)+(r-1)]!}{(r-1)!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!} \qquad (*)$$

Arten verteilt werden. Insgesamt gibt es daher

$$\frac{(n-1)!}{(r-1)!}\cdot\frac{n!}{(n-r)!} = \binom{n-1}{r-1}n!$$

Möglichkeiten. Nach Seite 81 bzw. 15 stellt $\binom{n-1}{r-1}$ die Anzahl der Möglichkeiten dar, n gleiche Objekte in r verschiedene Schachteln zu verteilen. Permutiert man nun die n Objekte, so ergibt sich gleichfalls obiger Ausdruck.

Definition: Ein Vorrat von n Objekten hat die *Spezifikatiom* $(n_1,...,n_k)$, wenn $n_1+...+n_k = n$ ist und jeweils n_i Objekte als gleichwertig gelten

Beispiele: Der Vorrat aaabbbbcdd hat die Spezifikation (3,4,1,2).
Ein Vorrat von 10 Kugeln, von denen 7 weiß und 3 rot sind, hat die Spezifikation (7,3)

Die Anzahl der Möglichkeiten, n Objekte der Spezifikation $(n_1,n_2,...n_k)$ in r *verschiedene geordnete* Schachteln zu verteilen, ist

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}\binom{n+r-1}{n}$$

Beweis: Es gibt

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} \quad (*)$$

Möglichkeiten, die n Objekte anzuordnen. Wir greifen eine dieser Anordnungen heraus und verteilen sie in r Schachteln, wobei die Anordnung der Objekte gleich bleibt

Beispiel: n =9, (111,2222,33), r = 4. Eine unter den $\frac{9!}{3!4!2!}$ möglichen Anordnungen sei beispielsweise

1 2 1 1 2 3 3 2 2

Die Verteilung in r = 4 Schachteln deuten wird durch Zwischenstriche an:

$$\underset{\bullet}{1}\ \underset{\bullet}{2}\ \Big|\ \underset{\bullet}{1}\ \Big|\ \underset{\bullet}{1}\ \underset{\bullet}{2}\ \underset{\bullet}{3}\ \underset{\bullet}{3}\ \underset{\bullet}{2}\ \Big|\ \underset{\bullet}{2} \qquad \text{oder} \qquad \underset{\bullet}{1}\ \underset{\bullet}{2}\ \Big|\ \underset{\bullet}{1}\ \underset{\bullet}{1}\ \underset{\bullet}{2}\ \Big|\ \underset{\bullet}{3}\ \underset{\bullet}{3}\ \Big|\ \underset{\bullet}{2}\ \underset{\bullet}{2}$$

Da die Reihenfolge der Objekte bei der vorgegebenen konkreten Anordnung sich nicht ändert, können wir können wir die Objekte durch ununterscheidbare Punkte darstellen. Es liegt demnach ein Vorrat von n+(r-1) Zeichen vor, von denen je n bzw (r-1) gleich sind. Für jede Anordnung der n Objekte gibt es also

$$\frac{[n+(r-1)]!}{n!(r-1)!} = \binom{n+r-1}{n}$$

Möglichkeiten, wegen (*) also insgesamt

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}\binom{n+r-1}{n}$$

Aufteilungsarten.

Verteilung gleicher Objekte in gleiche Schachteln
Zerlegung natürlicher Zahlen in Summanden

Bei der Zerlegung natürlicher Zahlen in ganzzahlige Summanden kommt es auf die Reihenfolge der Summanden nicht an (vgl. aber die Aufgabe auf Seite 81!):

<u>Beispiel:</u> Zerlegung der Zahl 4: 4, 1+3, 2+2, 1+1+2, 1+1+1+1,
insgesamt fünf Möglichkeiten.

Die Zerlegung der ganzen Zahl in n Summanden ist äquivalent der Aufteilung von n gleichartigen Elementen (nämlich von n Einsen) in n gleiche Schachteln (den Summanden), wobei leere Schachteln zulässig sind. In obigem Beispiel:

0+0+0+4
0+0+1+3
0+0+2+2
0+1+1+2
1+1+1+1

Im Ausdruck

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots\ldots = \frac{1}{1-x}$$

Stell der Koeffizient von x^n die Anzahl der Möglichkeiten dar, die Zahl n als Summe von Einsern darzustellen: die einzige Möglichkeit ist natürlich $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}$. Ebenso stellt in

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2k} + \ldots\ldots = \frac{1}{1-x^2}$$

der Koeffizient von 2k die Anzahl der Möglichkeiten dar, 2k als Summe von Zweiern darzustellen, nämlich nur durch $\underbrace{2+2+\ldots+2}_{k}$. usw.

<u>Beispiel:</u>Bei der Zerlegung von 4 können nur die Summanden 1,2,3,4 auftreten und zwar 1 höchstens 4mal, 2 höchstens 2mal und 3 bzw. 4 höchstens je einmal. Daraus folgt der Ansatz

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^2+x^4)(1+x^3)(1+x^4) =$$
$$= 1+x+2x^2+3x^3+\underline{\underline{5x^4}}+5x^5+6x^6+7x^7+7x^8+6x^9+5x^{10}+5x^{11}+3x^{12}+2x^{13}+x^{15}$$

Der Koeffizient von x^4 gibt die Anzahl der möglichen Zerlegungen von 4 in Summanden an = Anzahl der Verteilungen von 4 gleichen Objekten in 4 gleiche Schachteln. Wie experimentell bestätigt, ergibt sich die Zahl von 5 Möglichkeiten.

Wir hätten das Polynom natürlich nur bis zur 4.Potenz ausrechnen müssen. Was bedeuten aber die höheren Potenzen? Der Koeffizient 7 von x^8 bedeutet z.B., daß sich 8 auf 7 Arten mit den Summanden 1,2,3,4 zerlegen läßt, wobei 1 höchstens 4mal, 2 höchstens 2mal, 3 und 4 höchstens je einmal als Summanden auftreten:

$$\left.\begin{array}{r} 1+3+4 \\ 2+2+4 \\ 1+1+2+4 \\ 1+1+1+4 \\ 1+2+2+3 \\ 1+1+1+2+3 \\ 1+1+1+1+2+2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Anzahl der Möglichkeiten,} \\ \text{8 gleiche Objekte in} \\ \text{gleiche Schachtels abzufüllen} \end{array}$$

<u>Definition:</u> P_n ist die Anzahl der Möglichkeiten, die natürliche Zahl n in Summanden zu zerlegen ≡ Anzahl der Möglichkeiten, n *gleiche* Objekte in *gleiche* Schachteln zu verteilen.

Dann gilt

Die erzeugende Funktion für die Anzahl P_n der Zerlegungen der ganzen Zahl n ≡ Anzahl der Möglichkeiten, gleiche Objekte auf gleichartige Schachteln zu verteilen, lautet

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = (1+x+x^2+...)(1+x^2+x^4+...)(1+x^3+x^5+...)....=$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3).....}$$

Für die spezielle Zahl n genügt natürlich die Berechnung von

$$F(X) = \frac{1}{(1-x)...(1-x^n)} = 1 + P_1 x + ... + P_n x^n + * * * *$$

Definition: P_n^r sei dei Anzahl der Zerlegungen der Zahl n in *genau* r Summanden ≡ Anzahl der Möglichkeiten, n *gleiche* Objekte in r *gleiche* Schachteln zu verteilen , wobei *keine Schachtel leer* bleibt ($n \geq r$)

Die Anzahl der Möglichkeiten, n *gleiche* Objekte in r *gleiche* Schachteln zu verteilen (wobei einzelne Schachteln *leer* bleiben können), ist

$$P_n^1 + P_n^2 + \ldots + P_n^r$$

Klarerweise gilt

$$P_n^1 + P_n^2 + \ldots + P_n^n = P_n$$

Es gilt die

Rekursionsformel

$$P_n^1 + P_n^2 + \ldots + P_n^r = P_{n+r}^r$$

$$P_n^1 = P_n^n = 1$$

Vor dem Beweis der Rekursionsformel ein

Beispiel (siehe Seite 93)

Zum allgemeinen Nachweis betrachten wir die Menge R aller Zerlegungen der Zahl n, die aus *maximal* r Summanden bestehen. Jede dieser Zerlegungen betrachten wir als r-tupel. Sei etwa

$$i \leq r \text{ und } n = n_1 + n_2 + \ldots + n_i$$

so schreiben wir

$$\underbrace{(n_1, n_2, \ldots, n_i, 0, \ldots, 0)}_{r} \in R$$

In obigem Beispiel wäre etwa für $r = 3$

$$R = \{(8,0,0),(1,7,0),\ldots,(4,4,0),(1,1,6),\ldots,(2,3,3)\}$$

Wir definieren nun folgende Abbildung der Menge R in eine Menge R'

$$\underbrace{(n_1, n_2, \ldots, n_i, 0, \ldots, 0)}_{r} \longmapsto \underbrace{(n_1+1, n_2+1, \ldots, n_i+1, 1, \ldots, 1)}_{r}$$

In unserem Beispiel für $r = 3$ wären das folgende Zuordnungen:

$(8,0,0) \mapsto (9,1,1)$, $(1,7,0) \mapsto (2,8,1)$, $\ldots$, $(2,3,3) \mapsto (3,4,4)$

Es sei n =8

Zerlegungen	
8	$P_8^1 = 1$
1+7 2+6 3+5 4+4	$P_8^2 = 4$
1+1+6 1+2+5 1+3+4 2+2+4 2+3+3	$P_8^3 = 5$
1+1+1+5 1+1+2+4 1+1+3+3 1+2+2+3 2+2+2+2	$P_8^4 = 5$
1+1+1+1+4 1+1+1+2+3 1+1+2+2+2	$P_8^5 = 3$
1+1+1+1+1+3 1+1+1+1+2+2	$P_8^6 = 2$
1+1+1+1+1+1+2	$P_8^7 = 1$
1+1+1+1+1+1+1+1	$P_8^8 = 1$

$$P_8 = P_8^1 + \dots + P_8^8$$

Man entnimmt dem Schema:

$$P_8^1+P_8^2+P_8^3 = 1+4+5 = 10$$

Ferner bestimmen wir den Wert von $P_{8+3}^3 = P_{11}^3$

1+1+9
1+2+8
1+3+7
1+4+6
1+5+5
2+2+7
2+3+6
2+4+5
3+3+5
3+4+4

$$P_{11}^3 = 10 = P_8^1+P_8^2+P_8^3$$

Die Rekursionsformel ist also für dieses spezielle Beispiel verifiziert

Es handelt sich also um die Abbildungen der Menge R der Zerlegungen der Zahl n in *maximal* r Summanden in die Menge R' der Zerlegungen der Zahl (r+n) in *genau* r Summanden. Man erkennt sofort, daß diese Abbildung *bijektiv* ist, da sie eindeutig umkehrbar ist. Daher gilt

$$|R| = P_n^1 + \ldots + P_n^r = |R'| = P_{r+n}^r$$

Daraus lassen sich die P_n^r rekursiv berechnen.

> Die erzeugende Funktion für die Anzahl der Möglichkeiten der Zerlegung einer natürlichen Zahl in *ungerade Summanden* ist
>
> $$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots(1-x^{2k+1})\ldots}$$
>
> Die erzeugende Funktion für die Anzahl der Möglichkeiten der Zerlegung einer natürlichen Zahl in *gerade Summanden* ist
>
> $$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\ldots(1-x^{2k})\ldots}$$
>
> Die erzeugende Funktion für die Anzahl der Möglichkeiten der Zerlegung einer natürlichen Zahl in *voneinander verschiedene Summanden* ist
>
> $$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^k)\ldots$$

Nun gilt

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^k)\ldots = \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots\frac{1-x^{2k}}{1-x^k}\cdots =$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots(1-x^{2k+1})\ldots}$$

Daher gilt

> Die Anzahl der Zerlegungsmöglichkeiten einer natürlichen Zahl in *verschiedene Summanden* ist gleich der Anzahl der Zerlegungsmöglichkeiten in *ungerade Summanden*.

<u>Beispiel:</u> n = 8

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^4)(1+x^6)(1+x^7)(1+x^8) =$$

$$= 1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7\underline{+6x^8}+7x^9+8x^{10}+9x^{11}+\ldots\ldots$$

versch. Summanden	unger. Summanden
8	1+7
1+7	3+5
2+6	1+1+1+5
3+5	1+1+3+3
1+2+5	1+1+1+1+1+3
1+3+4	1+1+1+1+1+1+1+1

Der Graph von FERRERS

Norman Macleod FERRERS (1829-1903)

Der Graph von FERRERS ist eine geomtrische Darstellung der Zerlegung einer ganzen Zahl in Summanden.

<u>Beispiel:</u> $n = 21 = 7+5+5+2+1+1$

Graph vonFERRERS		Transponierter Graph von FERRERS	
•••••••	Anzahl der Zeilen = Anzahl der Summanden	••••••	Im transponierten Graphen von FERRERS stellt die Zeilenanzahl den größten Summanden dar
•••••		••••	
•••••		•••	
••		•••	
•		•••	
•		•	
		•	

Dem *transponierten* Graph von FERRERS entspricht die *konjugierten* Zerlegung der gegebenen Zahl $n = 6+4+3+3+3+1+1$.

Die Abbildung eines Graphen auf seinen transponierten ist bijektiv, daher auch die Zerlegung einer Zahl auf ihre konjugierten. Daher gilt

> Die Anzahl der Zerlegungen von n in *genau* r Summanden ist gleich der Anzahl der Zerlegungen von n in Summanden, deren größter stets r ist, die also r mindestens einmal enthalten (*)

<u>Definitionen:</u>

P_n^r ist die Anzahl der Zerlegungen von n in *genau* r Summanden

$P_n^{\leq r}$ ist die Anzahl der Zerlegungen von n in *maximal* r Summanden

$P_{n,M}$ ist die Anzahl der Zerlegungen von n in Summanden, von denen der größte stets genau M ist

$P_{n,\leq M}$ ist die Anzahl der Zerlegungen von n in Summanden, deren größter $\leq$ M ist

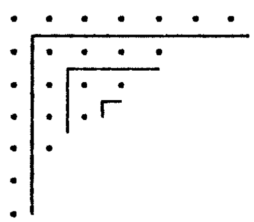
Dann bedeutet (*):

$$\boxed{P_n^r = P_{n,r} \quad \text{bzw.} \quad P_n^{\leq r} = P_{n,\leq r}}$$

Eine Zerlegung, bei welcher der Graph in sich selbst übergeht, heißt *selbstkonjugiert*. es gilt

> Die Anzahl der *selbstkonjugierten* Zerlegungen von n ist gleich der Anzahl der Zerlegungen von n in lauter *verschiedene ungerade* Summanden

<u>Beweis:</u> Anwendung des FERRERS - Schemas



$7+5+4+3+2+1+1 = 23$

$13+7+3 = 23$

Die erzeugende Funktion für die Zerlegung von n in Summanden, deren gröβter gleich r ist lautet

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,\leq r}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\leq r}x^n}$$

Die erzeugende Funktion für die Zerlegung von n in Summanden, deren größter gleich (r-1) ist, lautet analog

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{r-1})}$$

Die erzeugende Funktion für jene Zerlegungen, die den Summanden r *mindestens einmal* enthalten, ist dann

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)} - \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{r-1})} =$$

$$= \frac{1-(1-x^r)}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)} = \frac{x^r}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}$$

Nach (*) ist das die Anzahl der Zerlegungen in *genau* r *Summanden*

Die erzeugende Funktion für die Zerlegung einer Zahl in *genau* r Summanden lautet

$$\frac{x^r}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^r x^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,r} x^n$$

Diese Anzahl entspricht der Anzahl der Verteilungsmöglichkeiten von n *gleichen* Objekten in r *gleiche* Schachteln, von denen *keine leer* ist

<u>Anzahl der Zerlegungen der Zahl n in *genau* r *verschiedene* Summanden</u>

Wir betrachten die Zerlegung der Zahl n zunächst in genau r Summanden

<u>Beispiel:</u> n = 30, r = 7

$$r \left\{ \begin{array}{l} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right. \longmapsto r \left\{ \begin{array}{l} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\circ \\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\circ\circ \\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\circ \\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ \\ \bullet\bullet\circ\circ \\ \bullet\circ \\ \bullet \end{array} \right.$$

Wir bilden ein zweites FERRERS - Schema, indem wir zu 1.Zeile (r-1), zur 2.Zeile (r-2),..., zur (r-1)-ten Zeile einen Punkt hinzufügen. Dadurch wird die r-Summe der Zahl n abgebildet auf die r-Summe der Zahl $n+(r-1)+(r-2)+\dots+1 = n + \frac{r(r-1)}{2}$ mit *lauter verschiedenen Summanden*. Da diese Abbildung bijektiv ist, gilt:

Die Anzahl der Zerlegungen von n in *genau* r *Summanden* ist gleich der Anzahl der Zerlegungen der Zahl $n + \frac{r(r-1)}{2}$ in *genau* r *verschiedene Summanden*

Die Anzahl der r-Zerlegungen von n ist gleich dem Koeffizienten von x^n der erzeugenden Funktion

$$\frac{x^r}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)}$$

Derselbe Koeffizient muß auftreten als Koeffizient von $x^{n+\frac{r(r-1)}{2}}$ der erzeugenden Funktion der r-Zerlegung von $n+\frac{r(r-1)}{2}$ mit genau r verschiedenen Summanden. Bei Vergleich der beiden erzeugenden Funktionen, haben wir also die Exponenten der zweiten erzeugenden Funktion um $\frac{r(r-1)}{2}$ zu erhöhen. Es gilt also

$$\frac{x^{r+\frac{r(r-1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)} = \frac{x^{\frac{r(r+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)}$$

> Die erzeugende Funktion für die Zerlegung von n in *genau* r *verschiedene* Summanden lautet
>
> $$\frac{x^{\frac{r(r+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)}$$
>
> Dies entspricht der Verteilung von n *gleichen Objekten* in r *gleiche Schachteln*, wobei die Anzahl der Objekte in *jeder Schachtel verschieden* ist

Schemata

In der Menge N führen wir (siehe Seite 35) eine Klasseneinteilung vom Typ $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n}$ durch, d.h. es gibt λ_1 Klassen mit je einem Element, λ_2 Klassen mit je 2 Elementen,..., λ_n Klassen mit je n Elementen. Da die Elementen derselben Klasse als ununterscheidbar angesehen werden, könnten wir auch sagen, N stelle einen Vorrat von Objekten der Spezifikation $(\underbrace{1,\dots,1}_{\lambda_1},\underbrace{2,\dots 2}_{\lambda_2},\dots,\underbrace{n,\dots n}_{\lambda_n})$ dar.

Die Menge N werde nun in die Menge M abgebildet, auf der gleichfalls eine Klasseneinteilung des Typs $1^{\mu_1}2^{\mu_2}\dots m^{\mu_m}$ definiert ist, d.h. die Elemente der Menge N werden auf Schachteln aufgeteilt, die selbst teilweise ununterscheidbar sind.

Zwei dieser Abbildungen (Verteilungen, Distributionen)

$$N \longrightarrow M$$

gelten als *äquivalent*, wenn sie *beszüglich der vorliegenden Klasseneinteilungen ununterscheidbar sind*, d.h. wenn die eine aus der anderen hervorgeht, indem man in N bzw. in M Permutationen innerhalb derselben Äquivalenzklasse vornimmt. Dadurch wird innerhalb der Menge der Verteilungen eine Klasseneinteilung hervorgerufen, deren Klassen als *Schemata* bezeichnet werden. Wir bezeichnen mit

$$R_o(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n};1^{\mu_1}2^{\mu_2}\ldots m^{\mu_m})$$

die Anzahl der Schemata bezüglich der Verteilung des Objektvorrates vom Typ $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n}$ in einen Vorrat an Schachteln vom Typ $1^{\mu_1}2^{\mu_2}\ldots m^{\mu_m}$. Dabei können *einzelne Schachteln leer* bleiben. Hingegen sei

$$R(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n};1^{\mu_1}2^{\mu_2}\ldots m^{\mu_m})$$

die Anzahl der Schemata, bei welchen *keine Schachtel leer* bleibt.
Es sei nun $m_1m_2\ldots m_r$[1] eine Partition der vorhandenen Schachteln in r Klassen, die der Reihe nach $m_1,m_2,\ldots,m_r$ gleichartige Schachteln enthalten. Dann gilt

$$R_o(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n};m_1m_2\ldots m_r) = \sum_{\substack{0\le k_1\le m_1\\ 0\le k_2\le m_2\\ \cdots\cdots}} R(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n};k_1k_2\ldots k_r)$$

Beispiele:

$\boxed{R(1^n;m) = S_n^m}$ Anzahl der Verteilungen von n *verschiedenen* Objekten in m *gleichartige* Schachteln, von denen *keine leer* ist (STERLINGsche Zahlen 2.Art, s. Seite 87)

$\boxed{R_o(1^n;m) = \sum_{i=1}^{m} S_n^i}$ Anzahl der Verteilungen von n *verschiedenen* Objekten in m *gleichartige* Schachteln, von denen einzelne auch *leer* sein können (s. Seite 87)

$\boxed{R(1^n;1^m) = m!S_n^m}$ Anzahl der *surjektiven Abbildungen* einer n- auf eine m-elementige Menge(s. Seiten 39 und 86)

$\boxed{R_o(1^n;1^m) = m^n}$ Anzahl der Abbildungen einer n- in eine m-elementige Menge (s. Seite 83)

$\boxed{R(n;m) = P_n^m}$ Anzahl der Verteilungen von n *gleichartigen* Objekten in *genau* m *gleichartige*, *nichtleere* Schachteln ≡ Anzahl der Zer-

---

[1] Es ist üblich, den Typus $m_1^1m_2^1\ldots m_r^1$ der Einfachheit halber kurz mit $m_1m_2\ldots m_r$ zu bezeichnen

legungsmöglichkeiten der ganzen Zahl n in *genau* r Summanden (s. Seite 92)

$$\boxed{R_o(n;m) = \sum_{i=1}^{m} P_n^i}$$ Anzahl der Verteilungen von n *gleichen* Objekten in *maximal* m *gleiche* Schachteln ≡ Anzahl der Zerlegungsmöglichkeiten der ganzen Zahl n in *maximal* m Summanden (s. Seite 92)

$$\boxed{R(n;1^m) = \binom{n-1}{m-1}}$$ Anzahl der Verteilungen von n *gleichen* Objekten in m *verschiedene* Schachteln, von denen *keine leer* ist (s.Seite 81)

$$\boxed{R_o(n;1^m) = \binom{n+m-1}{n}}$$ Anzahl der Verteilungen von n *gleichen* Objekten in m *verschiedene* Schachteln, von denen einzelne *leer* sein können (s. Seite 80)

$$\boxed{R_o(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n};1^m) = \binom{m}{1}^{\lambda_1}\binom{m+1}{2}^{\lambda_2}\ldots\binom{m+n-1}{n}^{\lambda_n}}$$ Verteilung eines Objektvorrates vom Typus $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n}$ auf m *verschiedene* Schachteln, wobei *leere* Schachteln auftreten dürfen

Beweis: Wir betrachten eine von den λ_k aus k gleichartigen Elementen bestehende Klasse. Die k gleichartigen Elemente lassen sich auf $\binom{m+k-1}{k}$ Arten auf die verschiedenen Schachteln aufteilen. Da es λ_k Klassen mit k gleichen Objekten gibt, gibt es

$$\binom{m+k-1}{k}^{\lambda_k}$$

Möglichkeiten der Aufteilung, insgesamt daher

$$\binom{m}{1}^{\lambda_1}\binom{m+1}{2}^{\lambda_2}\ldots\binom{m+n-1}{n}^{\lambda_n}$$

Möglichkeiten.

$$\boxed{R(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n};1^m) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}\cdot\left[\binom{i}{1}^{\lambda_1}\binom{i+1}{2}^{\lambda_2}\ldots\binom{i+n-1}{n}^{\lambda_n}\right]}$$

Anzahl der Verteilungen eines Objektvorrates vom Typus $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n}$ auf m *verschiedene* Schachteln, wobei *keine leer* bleibt.

Beweis: Wir wählen aus den m Schachteln zunächst k aus (möglich auf $\binom{m}{k}$ Arten), auf welche der Objektevorrat vom Typ $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n}$ aufgeteilt wird, sodaß *keine der* k *Schachteln leer* bleibt.

Zu Vereinfachung setzen wir

$R(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n};1^k) = R'_k$

$R_0(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n};1^r) = R''_r$

Dann gilt

$$R''_m = \binom{m}{0}R'_0 + \binom{m}{1}R'_1 + \binom{m}{1}R'_1 + \dots + \binom{m}{m}R'_m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}R'_k$$

Ersetzen wir der Reihe nach m durch m-1, m-2,... so ergibt sich

$$\begin{array}{lll|l}
R''_m & = \sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}R'_k & = \sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}R'_k & +\binom{m}{m} \\
R''_{m-1} & = \sum\limits_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}R'_k & = \sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m-1}{k}R'_k & -\binom{m}{m-1} \\
R''_{m-2} & = \sum\limits_{k=0}^{m-2}\binom{m-2}{k}R'_k & = \sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m-2}{k}R'_k & +\binom{m}{m-2} \\
\dots\dots & & & \dots\dots \\
R''_1 & = \sum\limits_{k=0}^{1}\binom{1}{k}R'_k & = \sum\limits_{k=0}^{m}\binom{1}{k}R'_k & (-1)^{m-1}\binom{m}{1} \\
R''_0 & = \sum\limits_{k=0}^{0}\binom{0}{k}R'_k & = \sum\limits_{k=0}^{m}\binom{0}{k}R'_k & (-1)^{m}\binom{m}{0}
\end{array}$$

Da stets $\binom{m-j}{k} = 0$ ist, wenn $k>(m-i)$ ist, kann man alle oberen Grenzen einheitlich als m ansetzen. Multiplizieren wir die Zeilen der Reihe nach mit den angegebenen Fakoren und summieren, so ergibt sich

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{m-j}R''_{m-j} = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}R''_{m-j} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}\binom{m-j}{k}R'_k$$

Nun gilt

$$\binom{m}{j}\binom{m-j}{k} = \frac{m!}{j!(m-j)!}\cdot\frac{(m-j)!}{k!(m-k-j)!} = \frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\frac{(m-k)!}{j!(m-k-j)!} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{j}$$

Daher

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{m-j}R''_{m-j} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\cdot\Big[\underbrace{\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m-k}{j}}_{(*)}\Big].R'_k$$

Für den Ausdruck (*) gilt

$$k \neq m \Rightarrow \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m-k}{j} = (1-1)^{m-k} = 0$$

k = m ist nur der einzige Summand für j = 0 von Null verschieden, (*) nimmt den Wert 1 an.

Die rechte Seite des obigen Summenausdrucke reduziert sich daher auf dem Wert R'_m und es gilt demnach

$$R'_m = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{m-j}R''_{m-j}$$

Wir substituieren $i := m-j \Rightarrow j = m-i \Rightarrow \left[\begin{array}{l} j = 0 \Rightarrow i = m \\ j = m \Rightarrow i = 0 \end{array}\right.$ also

$$R'_m = \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}R''_i$$

Ausführlich angeschrieben ergibt dies

$$R(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n};1^m) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}.R_o(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n};1^i)$$

Zusammen mit dem Resultat des vorhergehenden Beispiels findet man

$$R(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n};1^m) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}\cdot\left[\binom{i}{1}^{\lambda_1}\binom{i+1}{2}^{\lambda_2}\ldots\binom{i+n-1}{n}^{\lambda_n}\right]$$

Ergänzungen

<u>Eine anderen Methode, die Anzahl der Möglichkeiten zu berechnen, die Zahl n in r Summanden zu zerlegen</u>

Die Zahl n werde auf folgende Weise in eine Summe von Einsern, Zweiern,... zerlegt:

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\lambda_1} + \underbrace{2 + \dots + 2}_{\lambda_2} + \dots + \underbrace{k + \dots + k}_{\lambda_k} = n$$

Dabei gilt

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = r \quad \text{Anzahl der Summanden}$$

$$1.\lambda_1 + 2.\lambda_2 + \dots + k.\lambda_k = n$$

Um anzudeuten, daß der Summand 1 λ_1-mal... auftritt, schreiben wir

$1 \dots \lambda_1$-mal $\dots$ $z^{\lambda_1} x^{\lambda_1}$

$2 \dots \lambda_2$-mal $\dots$ $z^{\lambda_2} x^{2\lambda_2}$

$3 \dots \lambda_3$-mal $\dots$ $z^{\lambda_3} x^{3\lambda_3}$

... usw.

Das erzeugende Polynom lautet dann

$$(1+zx+z^2x^2+z^3x^3+\dots)(1+zx^2+z^2x^4+z^3x^6+\dots)\cdots(1+zx^k+z^2x^{2k}+z^3x^{3k}+\dots)$$

Ein Summand der Entwicklung hat dann die Bauart

$$z^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_k} . x^{1.\lambda_1+2.\lambda_2+\dots+k.\lambda_2} = z^r . x^n$$

Die erzeugende Funktion für die Zerlegung einer natürlichen Zahl n in r Summanden ist

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{(1-zx^i)} = \frac{1}{(1-zx)(1-zx^2)\dots(1-zx^r)}$$

<u>Beispiel:</u> r = 10

$$\frac{1}{(1-zx)(1-zx^2)\dots(1-zx^{10})} =$$

$$= (1+zx+z^2x^2+z^3x^3+z^4x^4+z^5x^5+z^6x^6+z^7x^7+z^8x^8+z^9x^9+z^{10}x^{10}+\dots)\cdot$$

$$\cdot(1+zx^2+z^2x^4+z^3x^6+z^4x^8+z^5x^{10}+\dots)\cdot(1+zx^3+z^2x^6+z^3x^9+\dots)\cdot$$

$\cdot(1+zx^4+z^2x^8+\dots)\cdot(1+zx^5+z^2x^{10}+\dots)\cdot(1+zx^6+\dots)\cdot(1+zx^7+\dots)\cdot(1+zx^8+\dots)$

$\cdot(1+zx^9+\dots)\cdot(1+zx^{10}+\dots) = \dots\dots =$

$=1 + zx + (z+z^2)x^2 + (z+z^2+z^3)x^3 + (z+2z^2+z^3+z^4)x^4 + (z+2z^2+2z^3+z^4+z^5)x^5$

$+ (z+3z^2+3z^3+2z^4+z^5+z^6)x^6 + (z+3z^2+4z^3+3z^4+2z^5+z^6+z^7)x^7 +$

$+ (z+4z^2+5z^3+5z^4+3z^5+2z^6+z^7+z^8)x^8 + (z+4z^2+7z^3+6z^4+5z^5+3z^6+2z^7+z^8+z^9)x^9 +$

$+ (z+5z\ +8z^2+9z^4+7z^5+5z^6+3z^7+2z^8+z^9+z^{10})x^{10} + \dots\dots\dots$

Um zu erkennen, auf wieviele Arten man 10 in 4 Summanden zerlegen kann, betrachten wir im Koeffizienten von x^{10} den Koeffizienten von z^4: Es gibt 9 Möglichkeiten:

1+1+1+7
1+1+2+6
1+1+3+5
1+1+4+4
1+2+2+5
1+2+3+4
1+3+3+3
2+2+2+4
2+2+3+3

Alle Möglichkeiten, 10 in Summanden zu zerlegen, ergeben sich durch Addition aller Koeffizienten der z^i

1+1+5+8+9+7+5+3+2+1+1 = 42 Möglichkeiten
===============

Wir wenden uns der Untersuchung der beiden Polynome

$$F(z) := (1+zx)(1+zx^2)(1+zx^3)(1+zx^4)\dots = \prod_{i=1}^{\infty}(1+zx^i)$$

und

$$G(z) := \frac{1}{(1-zx)(1-zx^2)(1-zx^3)(1-zx^4)\dots} = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1-zx^i)}$$

Diese Polynome sind bereits für $z = 1$ auf den Seiten 91-96 aufgetreten. Man erkennt sofort die Beziehungen

$$F(z) = (1+zx).F(zx) \qquad (1)$$

$$G(zx) = (1-zx)G(z) \qquad (2)$$

Für F(z) treffen wir nun folgenden Ansatz

$F(z) = 1 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + \dots$

Daraus folgt wegen (1)

$$1+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\ \dots\ = (1+zx)(1+a_1zx+a_2z^2x^2+a_3z^3x^3+a_4z^4x^4+\ \dots)$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$a_1 = a_1x + x \Rightarrow a_1 = \frac{x}{1-x}$$

$$a_2 = a_2x^2 + a_1x^2 \Rightarrow a_2 = \frac{x^2}{1-x^2}.a_1$$

$$a_3 = a_3x^3 + a_2x^3 \Rightarrow a_3 = \frac{x^3}{1-x^3}.a_2$$

....

$$a_i = a_ix^i + a_{i-1}x^i \Rightarrow a_i = \frac{x^i}{1-x^i}.a_{i-1}$$

Daher

$$a_i = \frac{x^i}{1-x^i}.\frac{x^{i-1}}{1-x^{i-1}}.\frac{x^{i-2}}{1-x^{i-2}}\ \dots\ \frac{x^2}{1-x^2}.\frac{x}{1-x} =$$

$$a_i = \frac{x^{\frac{i(i+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^i)}$$

$$F(z) = (1+zx)(1+zx^2)(1+zx^3)(1+zx^4)\dots(1+zx^i) =$$

$$= 1 + \frac{x}{(1-x)}.z + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}.z^2 + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}.z^3 +$$

$$+ \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}.z^4 + \dots +$$

$$+ \dots + \frac{x^{\frac{r(r+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)}.z^r + \dots.$$

Die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahl n in *genau* r *verschiedene Summanden* zu zerlegen, ist der Koeffizient von x^n in der erzeugenden Funktion

$$\frac{x^{\frac{r(r+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)}$$

Für $G(z)$ machen wir den Ansatz

$$G(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots$$

Daher wegen (2)

$$1+b_1 zx+b_2 z^2x^2+b_3 z^3x^3 + \ldots = (1-zx)(1+b_1 z+b_2 z^2+b_3 z^3+ \ldots)$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$b_1 x = b_1 - x \Rightarrow b_1 = \frac{x}{1-x}$$

$$b_2 x^2 = b_2 - b_1 x \Rightarrow b_2 = \frac{x}{1-x^2} \cdot b_1$$

$$b_3 x^3 = b_3 - b_2 x \Rightarrow b_3 = \frac{x}{1-x^3} \cdot b_2$$

....

$$b_i x^i = b_i - b_{i-1} x \Rightarrow b_i = \frac{x}{1-x^i} \cdot b_{i-1}$$

Daher

$$b_i = \frac{x}{1-x^i} \cdot \frac{x}{1-x^{i-1}} \cdots \frac{x}{1-x^2} \cdot \frac{x}{1-x} = \frac{x^i}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^i)}$$

$$G(z) = \frac{1}{(1-zx)(1-zx^2)(1-zx^3)\ldots\ldots} =$$

$$= 1 + \frac{x}{(1-x)} \cdot z + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} z^2 + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} \cdot z^3 +$$

$$+ \ldots + \frac{x^r}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)} z^r + \ldots\ldots$$

Die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahl n in *genau* r *Summanden* zu zerlegen, ist der Koeffizient von x^n in der erzeugenden Funktion

$$\frac{x^r}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}$$

<u>Anzahl der Partitionen der natürlichen Zahl n in Summanden, deren Anzahl ≤ r ist und deren größter ≤ M ist</u>

Die Anzahl dieser Partitionen bezeichnen wir mit $P^{\leq r}_{n,\leq M}$

Wir bestimmen die erzeugende Funktion

$$G(M,r;x) := \sum_{n=0}^{\infty} P^{\leq r}_{n,\leq M} \cdot x^n$$

Die Polynome $G(M,r;x)$ heißen GAUSSsche Polynome [Carl Friedrich GAUSS (1777-1855)]

Es gilt

$n \neq 0 \Rightarrow P^{0}_{n,\leq M} = 0$, da man n nicht als leere Summe darstellen kann

$P^{\leq r}_{n,0} = 0$, da man n nicht als Summe von nichtpositiven Zahlen darstellen kann

$n = 0 \Rightarrow P^{0}_{0,\leq M} := 1$, da die leere Partition von 0 die einzige ist. in der kein Summand positiv ist

$P^{\leq r}_{0,0} := 1$, da die leere Partition von 0 die einzige ist, in der die Anzahl der Summanden nicht aus positiven Elementen besteht

Daher gilt

$$G(M,0;x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{0}_{n,\leq M} \cdot x^n = \overbrace{P^{0}_{0,\leq M} \cdot x^0}^{1} + \overbrace{P^{0}_{1,\leq M} \cdot x + \ldots}^{0} = 1$$

$$G(0,r;x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{\leq r}_{n,0} \cdot x^n = \overbrace{P^{\leq r}_{0,0} \cdot x^0}^{1} + \overbrace{P^{\leq r}_{1,\leq M} \cdot x + \ldots}^{0} = 1$$

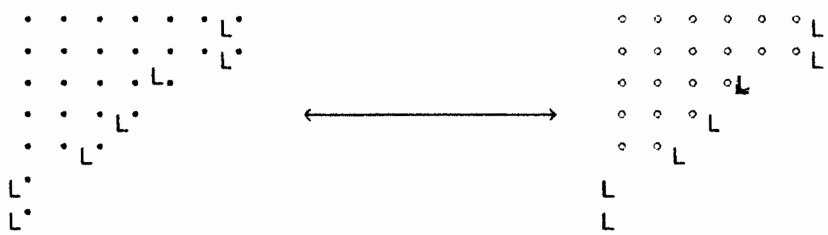
Wir betrachten nun die Anzahl $P^{r}_{n,\leq M}$ der Partitionen von n in *genau* r *Summanden*.

Klarerweise gilt

$$\boxed{P^{r}_{n,\leq M} = P^{\leq r}_{n,\leq M} - P^{\leq r-1}_{n,\leq M}}$$

Wir untersuchen nun an Hand des Schemas von FERRERS die Partitionen von n mit *genau* r *Summanden*. Jedem dieser Schemata ordnen wir ein neues zu, in dem in jeder Zeile genau ein Punkt getilgt wird.

<u>Beispiel:</u> n = 28, r = 7, M = 7



Jeder Zerlegung aus $P^{r}_{n,\le M}$ wird bijektiv eine Zerlegung aus $P^{\le r}_{n-r,\le M-1}$ zugeordnet. Wegen dieser Bijektivität gilt

$$\boxed{P^{r}_{n,\le M} = P^{\le r}_{n,\le M} - P^{\le r-1}_{n,\le M} = P^{\le r}_{n-r,\le M-1}}$$

also

$$\underline{G(M-1,r;x)} = \sum_{n=0}^{\infty} P^{\le r}_{n,\le M-1}\cdot x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (P^{\le r}_{n+r,\le M} - P^{\le r-1}_{n+r,\le M})\cdot x^{n} =$$

$$= x^{-r}\cdot \sum_{n=0}^{\infty} (P^{\le r}_{n+r,\le M} - P^{\le r-1}_{n+r,\le M})\cdot x^{n+r} = \underline{x^{-r}\cdot[G(M,r;x) - G(M,r-1;x)]}$$

Daraus folgt für G(M,r;x) die Rekursionsformel über M und r

$$\boxed{\begin{gathered} G(M,r;x) = G(M,r-1;x) + x^{r}G(M-1,r;x) \\ G(0,r;x) = G(M,0;x) = 1 \end{gathered}}$$

<u>M = 1</u>

$$\left.\begin{aligned}
G(1,r;x) &= G(1,r-1;x) + x^{r}\cdot\overbrace{G(0,r;x)}^{1} \\
G(1,r-1;x) &= G(1,r-2;x) + x^{r-1}\cdot\underbrace{G(0,r-1;x)}_{1} \\
G(1,r-2;x) &= G(1,r-3;x) + x^{r-2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
G(1,2;x) &= G(1,1;x) + x^{2} \\
G(1,1;x) &= \overbrace{G(1,0;x)}^{1} + x
\end{aligned}\right\} +$$

$$G(1,r;x) = 1 + x + x^{2} + \ldots + x^{r} = \underline{\frac{1-x^{r+1}}{1-x} = G(1,r;x)}$$

<u>M = 2</u>

$$\left.\begin{aligned}
G(2,r;x) &= G(2,r-1;x) + x^{r}G(1,r;x) \\
G(2,r-1;x) &= G(2,r-2;x) + x^{r-1}G(1,r-1;x) \\
G(2,r-2;x) &= G(2,r-3;x) + x^{r-2}G(1,r-2;x) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
G(2,2;x) &= G(2,1;x) + x^{2}G(1,2;x) \\
G(2,1;x) &= \overbrace{G(2,0;x)}^{1} + xG(1,1;x)
\end{aligned}\right\} +$$

$$G(2,r;x) = x^{r}\,\frac{1-x^{r+1}}{1-x} + x^{r-1}\,\frac{1-x^{r}}{1-x} + \ldots + x^{2}\,\frac{1-x^{3}}{1-x} + x\,\frac{1-x^{2}}{1-x} + 1\,\frac{1-x}{1-x} =$$

$$= \frac{1}{1-x}[(x^{r}+x^{r-1}+\ldots+x+1) - x(1+x^{2}+\ldots+x^{2r-2}+x^{2r})] =$$

$$= \frac{1}{1-x}\left[\frac{1-x^{r+1}}{1-x} - x\,\frac{1-x^{2r+2}}{1-x^{2}}\right] = \ldots = \underline{\frac{(1-x^{r+1})(1-x^{r+2})}{(1-x)(1-x^{2})} = G(2,r;x)}$$

$$\underline{M = 3} \quad \left.\begin{aligned} G(3,r;x) &= G(3,r-1;x) + x^r G(2,r;x) \\ G(3,r-1;x) &= G(3,r-2;x) + x^{r-1} G(2,r-1;x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G(3,2;x) &= G(3,1;x) + x^2 G(2,2;x) \\ G(3,1;x) &= G(3,0;x) + xG(2,1;x) \end{aligned}\right\} +$$

$$G(3,r;x) = x^r \frac{(1-x^{r+1})(1-x^{r+2})}{(1-x)(1-x^2)} + x^{r-1} \frac{(1-x^r)(1-x^{r+1})}{(1)(1-x^2)} + \ldots +$$

$$+ x^2 \frac{(1-x^3)(1-x^4)}{(1-x)(1-x^2)} + x \frac{(1-x^2)(1-x^3)}{(1-x)(1-x^2)} + 1 \frac{(1-x)(1-x^2)}{(1-x)(1-x^2)} =$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} [x^r(1-x^{r+1})(1-x^{r+2}) + x^{r-1}(1-x^r)(1-x^{r+1}) + x^{r-2}(1-x^{r-1})(1-x^r)$$

$$+ \ldots + x^2(1-x^3)(1-x^4) + x(1-x^2)(1-x^3) + 1(1-x)(1-x^2) =$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} [\; (x^r + x^{r-1} + x^{r-2} + \ldots + x^2 + x + 1) -$$

$$- (x^{2r+2} + x^{2r+1} + x^{2r} + \ldots + x^2 + x + 1) +$$

$$+ (x^{3r+3} + x^{3r} + x^{3r-3} + \ldots + x^6 + x^3 + x^9)] =$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} \left[\frac{1-x^{r+1}}{1-x} - \frac{1-x^{2r+3}}{1-x} + \frac{1-x^{3r+6}}{1-x^3} \right] = \ldots. =$$

$$= \underline{\frac{(1-x^{r+1})(1-x^{r+2})(1-x^{r+3})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = G(3,r;x)}$$

Vollständige Induktion über M ergibt:

Die erzeugende Funktion für die Partition von n in Summanden, deren Anzahl $\le$ r ist und deren größter $\le$ M ist, lautet

$$G(M,r;x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,\le M}^{\le r} \cdot x^n = \frac{(1-x^{r+1})(1-x^{r+2})\cdots(1-x^{r+M})}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^M)}$$

Das ist gleich der Anzahl der Verteilungen von n *gleichen* Objekten in maximal r *gleiche* Schachteln, wobei höchstens M Objekte in jeder Schachtel sind

<u>Beispiel:</u> r $\le$ 5, M $\le$ 6

$$G(6,5;x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,\le 6}^{\le 5} \cdot x^n = \frac{(1-x^6)(1-x^7)\ldots(1-x^{11})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^6)}$$

n	$P^{\le 5}_{i,\le 6}$	n	$P^{\le 5}_{i,\le 6}$	n	$P^{\le 5}_{i,\le 6}$	n	$P^{\le 5}_{i,\le 6}$	n	$P^{\le 5}_{i,\le 6}$
0	1	6	10	12	29	18	29	24	10
1	1	7	12	13	30	19	25	25	7
2	2	8	16	14	32	20	23	26	5
3	3	9	19	15	32	21	19	27	3
4	5	10	23	16	32	22	16	28	2
5	7	11	25	17	30	23	12	29	1
								30	1

Partition von n in *genau* r *Summanden*, von denen jeder $\le$ M ist

Es gilt $P^{r}_{n,\le M} = P^{\le r}_{n,\le M} - P^{\le r-1}_{n,\le M}$ (siehe Seite 107)

$$\sum_{n}^{\infty} P^{r}_{n,\le M}\cdot x^{n} = G(M,r;x) - G(M,r-1;x) = x^{r}G(M-1,r;x) =$$

$$= x^{r}\,\frac{(1-x^{r+1})(1-x^{r+2})\ldots(1-x^{r+M-1})}{(1-x)(1-x^{2})\ldots(1-x^{M-1})}$$

> Die erzeugende Funktion für die Partition von n in *genau* r *Summanden*, deren jeder $\le$ M ist, lautet
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} P^{r}_{n,\le M}\cdot x^{n} = x^{r}\,\frac{(1-x^{r+1})(1-x^{r+2})\ldots(1-x^{r+M-1})}{(1-x)(1-x^{2})\ldots(1-x^{M-1})} = x^{r}G(M-1,r;x)$$
>
> Das ist die Anzahl der Verteilungen von n *gleichen* Objekten in *genau* r *nicht leere Schachteln*, wobei in einer Schachtel höchstens M Objekte sind

Beispiel: r = 5, M $\le$ 7 $\sum_{n=0}^{\infty} P^{5}_{n,\le 7}\cdot x^{n} = x^{5}G(6,5;x)$. Es ergibt sich dasselbe Schema wie auf Seite 110, nur sind alle Exponenten um 5 zu erhöhen.

Partition von n in *genau* r *Summanden*, deren größter stets den Wert M hat. Es gilt

$$\boxed{P^{r}_{n,M} = P^{r}_{n,\le M} - P^{r}_{n,\le M-1}}$$

daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^{r}_{n,M}\cdot x^{n} = x^{r}[G(M-1)r;x) - G(M-2,r;x)] =$$

$$= x^{r}\left[\frac{(1-x^{r+1})\ldots(1-x^{r+M-2})(1-x^{r+m-1})}{(1-x)\ \ldots(1-x^{M-2})(1-x^{M-1})} - \frac{(1-x^{r+1})\ldots(1-x^{r+M-2})}{(1-x)\ldots(1-x^{M-2})}\right] =$$

$$x^{r}.\ \frac{(1-x^{r+1})\ldots(1-x^{r+M-2})}{(1-x)\ldots(1-x^{M-1})}\left[\frac{1-x^{r+M-1} - (1-x^{M-1})}{x^{M-1}(1-x^{r})}\right] =$$

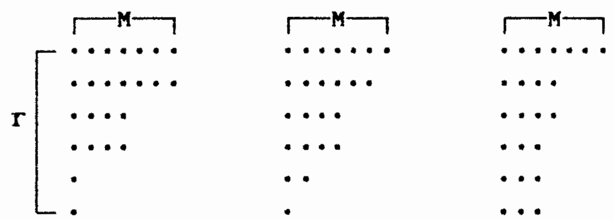
$$= x^{r+M-1} \cdot \frac{(1-x^r)(1-x^{r+1})\dots(1-x^{r+M-2})}{(1-x)\dots(1-x^{M-1})} = x^{r+M-1} G(M-1,r-1;x)$$

> Die erzeugende Funktion für die Anzahl der Partitionen von n in *genau* r *Summanden*, deren größter stets M ist, lautet
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} P^r_{n,M} \cdot x^n = x^{r+M-1} \cdot \frac{(1-x^r)(1-x^{r+1})\dots(1-x^{r+M-2})}{(1-x)\dots(1-x^{M-1})} = x^{r+M-1} G(M-1,r-1;x)$$
>
> Das ist auch die Anzahl der Verteilungen von n *gleichen* Objekten in r *gleiche* Schachteln, von denen *keine leer* bleibt, und mindestens eine höchstens M Objekte enthält

Beispiel: $r = 6$, $M = 7$ $\sum_{i=0}^{\infty} P^r_{i,M} \cdot x^i = x^{12} G(6,5;x)$. Es ergibt sich dasselbe Schema wie auf Seite 110, nur sind alle Exponenten um 12 zu erhöhen.

Anzahl der Zerlegungen von n in *genau* r *Summanden*, von denen der größte jeweils *genau* den Wert M hat, kann man auch auf folgenem Wege durch Rekursion erhalten

Beispiel: $n = 24$, $r = 6$, $M = 7$



Nimmt man jeweils die M Punkte der ersten Zeile des FERRERS - Diagrammes weg, so bleibt eine Punktmenge von n-M Punkten, die jeweils in genau r-1 Summanden unterteilt wird, wobei aber nunmehr der größte Summand den Wert $\leq$ M aufweist. Es gilt daher folgende Rekursionsformel:

$$\boxed{\begin{gathered} P^r_{n,M} = P^{r-1}_{n-M,M} + P^{r-1}_{n-M,M-1} + P^{r-1}_{n-M,M-2} + \dots \\ P^1_{n,M} = 1, \; P^n_{n,1} = 1 \end{gathered}}$$

Speziell gilt für $r = 2$

$$P^2_{n,M} = 1, \text{ wenn } n \le 2M \Leftrightarrow M \ge \frac{n}{2}$$

da bei Vorgabe des Summanden M natürlich der zweite Summand eindeutig bestimmt ist. Da M der größte Summand ist, muß gelten:

$$n-M \le M \Rightarrow n \le 2M$$

Für r = 3 gilt:

$$P^3_{n,M} = P^2_{n-M,M} + P^2_{n-M,M-1} + P^2_{n-M,M-2} \quad + \ldots$$

Da jeder Summand auf der rechten Seite den Wert 1 oder 0 hat, ist $P^3_{n;M}$ gleich der Anzahl der nichtverschwindenden Summanden der rechten Seite.

<u>Beispiel:</u> $P^3_{11,5} = \underbrace{P^3_{6,5}}_{1} + \underbrace{P^3_{6,4}}_{1} + \underbrace{P^3_{6,3}}_{1} + \underbrace{P^3_{6,2}}_{0} + \underbrace{P^3_{5,1}}_{0} = 3$

oder $P^3_{11,7} = \underbrace{P^2_{4,7}}_{0} + \underbrace{P^2_{4,6}}_{0} + \underbrace{P^2_{4,5}}_{0} + \underbrace{P^2_{4,4}}_{0} + \underbrace{P^2_{4,3}}_{1} + \underbrace{P^2_{4,2}}_{1} + \underbrace{P^2_{4,1}}_{0} = 2$

oder $P^3_{11,6} = \underbrace{P^2_{5,6}}_{0} + \underbrace{P^2_{5,5}}_{0} + \underbrace{P^2_{5,4}}_{1} + \underbrace{P^2_{5,3}}_{1} + \underbrace{P^2_{5,2}}_{0} + \underbrace{P^2_{5,1}}_{0} = 2$

Betrachten wir $P^2_{n-M,x}$. Der x auf n-M ergänzende Summand n-M-x darf nicht größer sein als x, d.h. es muß gelten

$$n-M-x \le x \Rightarrow 2x \ge n-M \Rightarrow \underline{x \ge \frac{n-M}{2}}$$

Aus obigen Beispielen erkennen wir weiter, daß man zwei Fälle unterscheiden muß

<u>1.Fall:</u> n-M > M (Beispiel 1). Dann nehmen die 2.Indizes von $P^2_{n,x}$ der Reihe nach die Werte an

$$M, M-1, \ldots, x \lfloor x-1, \ldots$$

In diesem Falle gibt es M-(x-1) <u>Summanden vom Wert 1</u>

<u>2.Fall:</u> n-M ≤ M (Beispiele 2 und 3). Dann ist $P^2_{n-M,y} \ne 0$, sobald gilt y = n-M-1. Dann ist

$$\frac{M}{2} \le x \le y \le n-M-1$$

und y nimmt der Reihe nach die Werte

$$y+1 = n-M \rfloor\ y = n-M-1, \ldots, x \lfloor x-1$$

an. In diesem Falle gibt es <u>y-x+1 Summanden von Wert 1</u>

Bei der Berechnung von $x = \frac{n-M}{2}$ sind folgende Fälle zu unterscheiden:

$\underline{n-M = 2k} \Rightarrow x = k,\ M = n-2k$. Ist nun

$n-M > M \Leftrightarrow n-n+2k > n-2k \Leftrightarrow n < 4k$

dann treten

$M-(x-1) = n-2k-k+1 = \underline{n+1-3k \text{ Summanden}}$ auf. Gilt aber

$n-M \leq M \Leftrightarrow n-n+2k \leq n-2k \Leftrightarrow n \geq 4k$

$y = n-M-1 = n-n+2k-1$, dann treten

$y-x+1 = 2k-1-k+1 = \underline{k \text{ Summanden}}$ auf

$\underline{n-M = 2k+1} \Rightarrow x = k+1,\ M = n-2k-1$. Ist nun

$n-M > M \Leftrightarrow n-n+2k+1 > n-2k-1 \Leftrightarrow n < 4k+2$

dann treten $M-(x-1) = n-2k-1-(k+1-1) = \underline{n-1-3k \text{ Summanden}}$ auf.

Gilt aber

$n-M \leq M \Leftrightarrow n-n+2k+1 \leq n-2k-1 \Leftrightarrow n \geq 4k+2$

$y = n-M-1 = n-n+2k+1 = 2k$, dann treten

$y-x+1 = 2k-k-1+1 = \underline{k \text{ Summanden}}$ auf

$\boxed{n-M = 2k}$	$\boxed{n-M = 2k+1}$
$n \geq 4k \ \ldots \ P^3_{n,M} = k$	$n \geq 4k+2 \ \ldots \ P^3_{n,M} = k$
$n < 4k \ \ldots \ P^3_{n,M} = n+1-3k$	$n < 4k+2 \ \ldots \ P^3_{n,M} = n-1-3k$

<u>Rekursionsformeln:</u> Es galt nach Seite 113

$$P^r_{n,M} = P^{r-1}_{n-M,M} + P^{r-1}_{n-M,M-1} + P^{r-1}_{n-M,M-2} + P^{r-1}_{n-M,M-3} + \ldots$$

Analog

$$P^r_{n-1,M-1} = P^{r-1}_{n-M,M-1} + P^{r-1}_{n-M,M-2} + P^{r-1}_{n-M,M-3} + \ldots$$

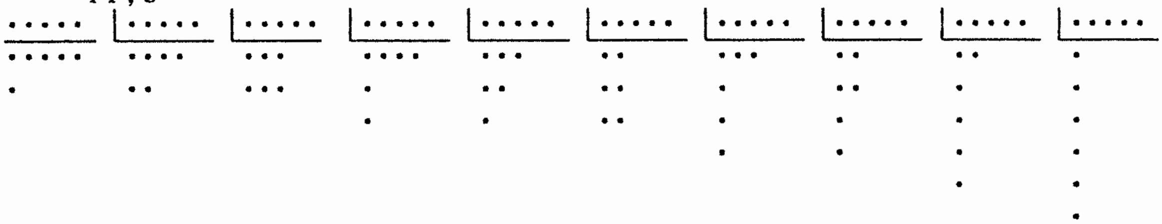
Differenzenbildung ergibt

$$P^r_{n,M} - P^r_{n-1,M-1} = P^{r-1}_{n-1,M}$$

Daher

$$\boxed{P^r_{n,M} = P^r_{n-1,M-1} + P^{r-1}_{n-1,M}}$$

Betrachten wir nun die Anzahl $P_{n,M}$ der Zerlegungen von n in Summanden, deren größter stets M ist, zunächst an dem Beipiel $n = 11$, $M = 5$, $P_{11,5} = 10$



Streicht man nach dem Vorbild von Seite 112 jeweil die erste Zeile weg, so erkennt man

$$P_{n,M} = P_{n-M,M} + P_{n-M,M-1} + P_{n-M,M-2} + \dots$$

analog

$$P_{n-1,M-1} = P_{n-M,M-1} + P_{n-M,M-2} + \dots$$

Differenzenbildung liefert

$$P_{n,M} - P_{n-1,M-1} = P_{n-M,M}$$

Also

$$\boxed{P_{n,M} = P_{n-1,M} + P_{n-M,M}}$$

<u>Anzahl der Zerlegungen von n in Summanden, deren Anzahl ≤ r ist und deren kleinster ≥ m ist</u>

Die Anzahl dieser Partitionen sei

$$P^{\le r}_{n,\ge m}$$

Die erzeugende Funktion sei

$$g(m,r;x) := \sum_{n=0}^{\infty} P^{\le r}_{n,\ge m} \cdot x^n$$

Dabei gilt

$r = 0,\ n \ne 0,\ \dots\ P^{\le 0}_{n,\ge m} = 0$ keine Zerlegungsmöglichkeit

$r = 0,\ n = 0,\ \dots\ P^{\le 0}_{0,\ge m} := 1$ Die leere Partition von 0 ist die einzige, in der kein Summand positiv ist

Daher gilt

$$g(m,0;x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{0}_{n,\ge m} \cdot x^n = \underbrace{P^{0}_{0,\ge m}}_{1} \cdot x^0 + \underbrace{P^{0}_{1,\ge m} \cdot x + \dots}_{0} = 1$$

Ferner betrachten wir die Menge der Zerlegungen von n mit *genau* r Summanden. Deren Anzahl sei

$$P^{r}_{n,\ge m}$$

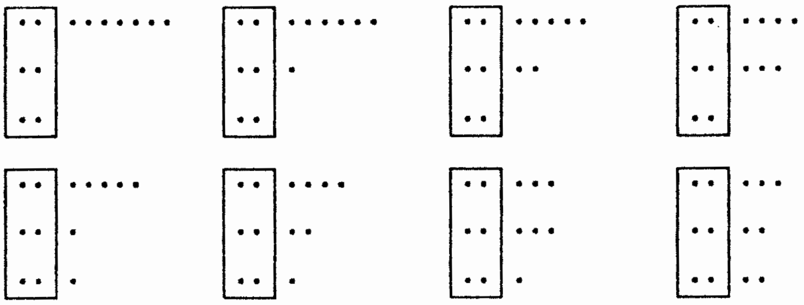
Es gilt

$$\boxed{P^{r}_{n,\ge m} = P^{\le r}_{n,\ge m} - P^{\le r-1}_{n,\ge m}}$$

Wie man an folgendem Beispiel erkennt, gilt

$$\boxed{P^{r}_{n,\ge m} = P^{\le r}_{n-r.m}}$$

Beispiel: $n = 13$, $r = 3$, $m \geq 2$, $P^3_{13,\geq 2} = 8$



$$P^3_{13,\geq 2} = P^{\leq 3}_7$$

Daher gilt weiter

$$P^r_{n,\geq m} = P^{\leq r}_{n,\geq m} - P^{\leq r-1}_{n,\geq m} = P^{\leq r}_{n-r.m}$$

Daraus folgt aus dem mittleren Term obiger Beziehung

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^{\leq r}_{n,\geq m}.x^n - \sum_{n=0}^{\infty} P^{\leq r-1}_{n,\geq m}.x^n = g(m,r;x) - g(m,r-1;x)$$

Für die den rechten Term ergibt sich

$$\sum_{n=rm}^{\infty} P^{\leq r}_{n-rm}.x^{n-rm}$$

Damit der Summationsindex dieser Summe gleichfalls bei $i = 0$ beginnt, multiplizieren wir sie mit x^{rm} und erhalten

$$x^{rm}.\sum_{n=0}^{\infty} P^{\leq r}_{n-rm}.x^n \quad \text{wobei natürlich } P^{\leq r}_j = 0 \text{ für } j < 0 \text{ gilt}$$

Dann ergibt sich

$$g(m,r;x) - g(m,r-1;x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{\leq r}_{n,\geq m}.x^n - \sum_{n=0}^{\infty} P^{\leq r-1}_{n,\geq m}.x^n = x^{rm}.\sum_{n=0}^{\infty} P^{\leq r}_{n-rm}.x^n$$

Nun folgt wegen Seite 96

$$x^{rm}.\sum_{n=0}^{\infty} P^{\leq r}_{n-rm}.x^n = \frac{x^{rm}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}$$

Daher

$$g(m,r;x) = g(m,r-1;x) + \frac{x^{rm}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}$$

Damit ergibt sich die Rekursion

$$\left.\begin{array}{lll}
r = 1 & g(m,1;x) = \underbrace{g(m,0;x)}_{1} + \dfrac{x^m}{(1-x)} \\
r = 2 & g(m,2;x) = g(m,1;x) + \dfrac{x^{2m}}{(1-x)(1-x^2)} \\
r = 3 & g(m,3;x) = g(m,2;x) + \dfrac{x^{3m}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
r = r & g(m,r;x) = g(m,r-1;x) + \dfrac{x^{rm}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}
\end{array}\right\} +$$

$$g(m,r;x) = 1 + \sum_{i=1}^{r} \frac{x^{im}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^i)}$$

> Die erzeugende Funktion für die Partition von n in Summanden, deren Anzahl $\le r$ ist und deren kleinster mindestens m ist, lautet
>
> $$g(m,r;x) = 1 + \sum_{i=1}^{r} \frac{x^{im}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^i)}$$
>
> Dies ist gleich der Anzahl der Verteilungen von n *gleichen* Objekten in maximal r *gleiche* Schachteln, wobei in jeder Schachtel mindestens m Objekte liegen

Partition von n in *genau* r Summanden, von denen jeder $\ge$ m ist

Es gilt $P^{r}_{n,\ge m} = P^{\le r}_{n,\ge m} - P^{\le r-1}_{n,\ge m}$, d.h.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^{r}_{n,\ge m} . x^n = g(m,r;x) - g(m,r-1;x) = \frac{x^{rm}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}$$

> Die erzeugende Funktion für die Partition von n in *genau* r Summanden, von denen jeder $\ge$ m ist, lautet
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} P^{r}_{n,\ge m} . x^n = \frac{x^{rm}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}$$
>
> Das ist gleich der Anzahl der Verteilungen von n *gleichen* Objekten in *genau r gleiche* Schachteln, wobei mindestens m Objekte in jeder Schachtel sind.

Partition von n in *genau* r Summanden, von denen jede Summe m als Summanden enthält

$$P^r_{n,\geq m} - P^r_{n,\geq m+1} = P^r_{n,m} \Rightarrow \frac{x^{rm}}{(1-x)\dots(1-x^r)} - \frac{x^{r(m+1)}}{(1-x)\dots(1-x^r)} =$$

$$= \frac{x^{rm}\ (1-x^r)}{(1-x)\dots(1-x^r)} = \frac{x^{rm}}{(1-x)\dots(1-x^{r-1})}$$

Die erzeugende Funktion für die Partition von n in *genau* r Summanden, von denen der kleinste stets m ist, lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^r_{n,m}.x^n = \frac{x^{rm}}{(1-x)\dots(1-x^{r-1})}$$

Das ist die Anzahl der Verteilungsmöglichkeiten von n *gleichen* Objekten in *genau* r *gleiche* Schachteln, wobei in mindestens einer Schachtel m Objekte sind.

Die erzeugende Funktion der Zerlegungen von n in Summanden, die mindestens den Wert m haben, lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n,\leq m}.x^n = \frac{1}{(1-x^m)(1-x^{m+1})\dots}$$

Anzahl der Aufteilungsmöglichkeiten von n *gleichen* Objekten auf *gleiche* Schachteln, wobei in einer Schachtel mindesten m Objekte liegen.

Für die Anzahl der Möglichkeiten, n in Summanden zu zerlegen, bei denen der kleinste stets *genau* m ist, gilt daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n,m}.x^n = \frac{1}{(1-x^m)(1-x^{m+1})\dots} - \frac{1}{(1-x^{m+1})(1-x^{m+2})\dots} =$$

$$= \frac{1-(1-x^{m+})}{(1-x^m)(1-x^{m+1})\dots} = \frac{x^m}{(1-x^m)(1-x^{m+1})\dots}$$

Die erzeugende Funktion für die Anzahl der Zerlegungen von n, bei denen der kleinste Summand jeweils *genau* gleich m ist, lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n,m} \cdot x^n = \frac{x^m}{(1-x^m)(1-x^{m+1})\ldots}$$

Das ist die Anzahl der Verteilungen von n *gleichen* Objekten in *gleiche* Schachteln, bei denen jeweils in mindestens einer Schachtel genau m Objekte liegen

Literatur

ANDREWS George E.: The Theory of Partitions. Encyclopedia of Mathemathics and its Applications. Volume 2, Section: Number TheoryAddison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass. 1976

BECKENBACH Edwin F. (Hg): Applied combinatorial Mathematics, Wiley New York 1964

BERGE C.: Principles of Combinatorics, Academic Press, New York,1971

EISEN Martin: Elementary combinatorial Analysis, Gordon & Breach, New York 1969

KAUFMANN A.: Introduction a la combinatorique en vue des applications, Dunod, Paris 1968

LIU C. L.: Introduction to combinatorial Mathematics, McGraw - Hill, New York

NETTO Eugen: Lehrbuch der Combinatorik, Teubner, Leipzig, 1927

RIORDAN John: An introduction to combinatorial Analysis, Wiley, New York, Chapman & Hall, London 1958

TUCKER Alan: Applied Combinatorics, Wiley, New York, 1980

Inhaltsverzeichnis