

Kombinatorik für Geometer

II

Wolfgang STRÖHER

KOMBINATORIK FÜR GEOMETER II

Methode der Inklusion und Exklusion. Siebformeln.

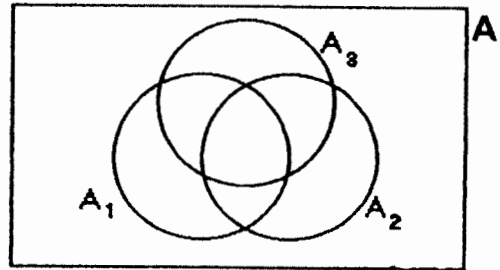
Gegeben sei die endliche Menge A , die *Grundmenge*. Die Teilmengen A_1, A_2, \dots mögen jene Elemente der Grundmenge umfassen, denen die *Eigenschaften* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$ zukommen.

Sätze über Mengen

$$(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$$

allgemein:

$$(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) \cap A_r = (A_1 \cap A_r) \cup (A_2 \cap A_r) \cup \dots$$

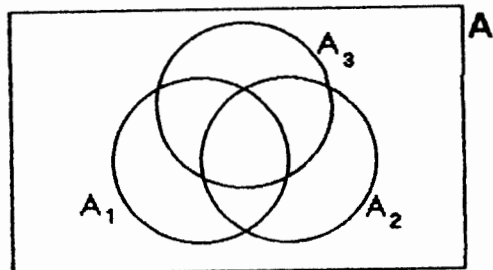


Analog

$$(A_1 \cap A_2) \cup A_3 = (A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_3)$$

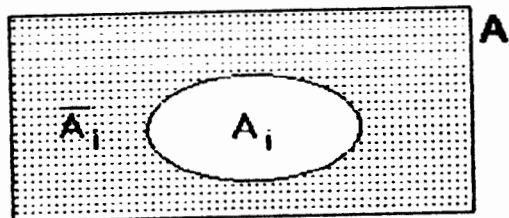
allgemein:

$$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots) \cup A_r = (A_1 \cup A_r) \cap (A_2 \cup A_r) \cap \dots$$



Die *komplementäre Menge* von A_i sei

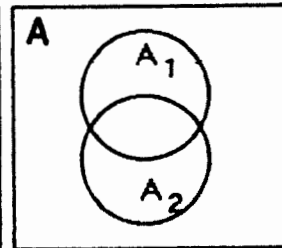
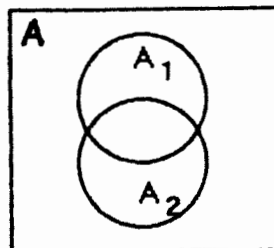
$$A_i = A \setminus A_i$$



Ist A_i die Menge aller Elemente, welche die Eigenschaft \mathcal{E}_i haben, so besteht \bar{A}_i genau aus allen Elementen, denen die Eigenschaft \mathcal{E}_i *nicht* zukommt ($\neg \mathcal{E}_i$).

Sätze von de MORGAN

$$\begin{aligned} A_1 \cap \bar{A}_1 &= \emptyset, & A_1 \cup \bar{A}_1 &= A \\ \overline{A_1 \cap A_2} &= \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \\ \overline{A_1 \cup A_2} &= \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \end{aligned}$$



Augustus de MORGAN (1806-1871)

Sätze über die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge

Bezeichnungsweisen

$|A|$... Anzahl der Elemente der Grundmenge

$|A_i|$... Anzahl der Elemente mit der Eigenschaft \mathcal{E}_i

(1) $|\bar{A}_i| = |A| - |A_i|$ Anzahl der Elemente mit der Eigenschaft $\neg \mathcal{E}_i$

(2) $|\emptyset| = 0$ speziell folgt dann aus (1) und (2)

(3) $|\bar{\emptyset}| = |A| - |\emptyset| \Rightarrow |\bar{\emptyset}| = |A|$

Aus (1) folgt

(4) $|A_i| + |\bar{A}_i| = |A|$

Allgemeiner gilt nach de MORGAN für endlich viele Mengen

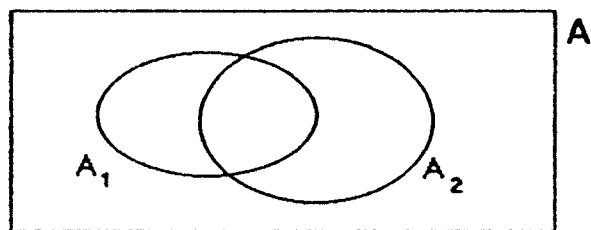
(5) $|\bigcup A_i| + |\overline{\bigcup A_i}| = |\bigcup A_i| + |\bigcap \bar{A}_i| = |A|$

(6) $|\bigcap A_i| + |\overline{\bigcap A_i}| = |\bigcap A_i| + |\bigcup \bar{A}_i| = |A|$

Ferner gilt

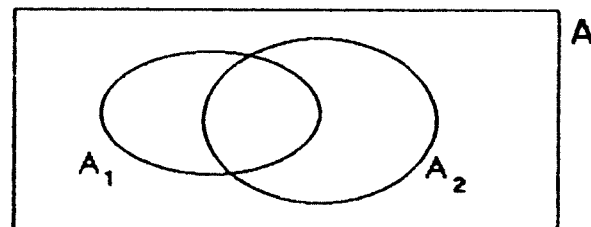
(7) $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

(7') $|A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cup A_2|$



(8) $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |A| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$

(8') $|\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2| = |A| - |A_1 \cap A_2|$



Die Verallgemeinerungen der Formeln (7) und (8) heißen

Siebformeln

Gegeben seien die Teilmengen $A_i \subset A$ mit der Indexmenge

$$I = \{1, 2, \dots, r\}.$$

Sei $J \subset I$ eine Teilmenge der Indexmenge I , so gilt

$$\boxed{|\bigcup_{i \in I} A_i| = \sum_{J \subset I} (-1)^{|J|+1} \cdot |\bigcap_{j \in J} A_j|} \quad \text{Formel 1}$$

Der Beweis von Formel 1 erfolgt durch Induktion über die Anzahl $|I|$ der Elemente der Indexmenge I

Induktionsanfang: Beispiel 1: $I := \{1, 2\}$. Gesucht ist also $|A_1 \cup A_2|$. Es sind alle Teilmengen $J \subset I$ zu bilden:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2| &= (-1)^{0+1} \cdot |\emptyset| + (-1)^{1+1} \cdot |A_1| + (-1)^{1+1} \cdot |A_2| + (-1)^{2+1} \cdot |A_1 \cap A_2| = \\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \dots \text{Für } I = \{1, 2\} \text{ nach (7) richtig} \end{aligned}$$

Beispiel 2: $I := \{1, 2, 3\}$. Die zu bildenden Untermengen $J \subset I$ sind $\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= (-1)^{0+1} \cdot |\emptyset| + (-1)^{1+1} \cdot |A_1| + (-1)^{1+1} \cdot |A_2| + (-1)^{1+1} \cdot |A_3| + \\ &+ (-1)^{2+1} \cdot |A_1 \cap A_2| + (-1)^{2+1} \cdot |A_1 \cap A_3| + (-1)^{2+1} \cdot |A_2 \cap A_3| + \\ &+ (-1)^{3+1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \text{ noch z.z.} \end{aligned}$$

Induktionsannahme: Formel 1 stimme für $|I| = r-1$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{r-1} \cup A_r| &= |((\bigcup_{i < r} A_i) \cup A_r)| \stackrel{(7)}{=} | \bigcup_{i < r} A_i | + |A_r| - |((\bigcup_{i < r} A_i) \cap A_r)| = \\ &\quad \text{Ind. AE} \\ &\quad \text{(siehe Seite 122)} = | \bigcup_{i < r} A_i | + |A_r| - |(\bigcup_{i < r} (A_i \cap A_r))| \stackrel{\downarrow}{=} \\ &= \left(\sum_{i < r} |A_i| - \sum_{i < j < r} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k < r} |A_i \cap A_j \cap A_k| \mp \dots \right) + |A_r| - \\ &\quad - \left(\sum_{i < r} |A_i \cap A_r| - \sum_{i < j < r} |A_i \cap A_j \cap A_r| + \sum_{i < j < k < r} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r| \mp \dots \right) = \\ &= \sum_{i \leq r} |A_i| - \sum_{i < j \leq r} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k \leq r} |A_i \cap A_j \cap A_k| \mp \dots \quad \text{wie behauptet.} \end{aligned}$$

Ein Gegenstück zu diesem Ergebnis ist

$$\boxed{| \bigcap_{i \in I} A_i | = \sum_{J \subset I} (-1)^{|J|+1} \cdot | \bigcup_{j \in J} A_j |} \quad \text{Formel 2}$$

Der Beweis erfolgt wieder durch Induktion über $|I|$

Induktionsanfang: $I := \{1, 2\}$ $J \dots \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} |A_1 \cap A_2| &= (-1)^{0+1} \cdot |\emptyset| + (-1)^{1+1} \cdot |A_1| + (-1)^{1+1} \cdot |A_2| + (-1)^{2+1} \cdot |A_1 \cup A_2| = \\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cup A_2| \dots \text{Für } I = \{1, 2\} \text{ nach (7')} \text{ richtig} \end{aligned}$$

Induktionsannahme: Die Behauptung stimme für $|I| = r-1$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{r-1} \cap A_r| &= |((\bigcap_{i < r} A_i) \cap A_r)| \stackrel{(7')}{=} | \bigcap_{i < r} A_i | + |A_r| - |((\bigcap_{i < r} A_i) \cup A_r)| = \\ &\quad \text{Ind. AE} \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \text{(siehe Seite 122)} = | \bigcap_{i < r} A_i | + |A_r| - |(\bigcap_{i < r} (A_i \cup A_r))| = \\ &= \left(\sum_{i < r} |A_i| - \sum_{i < j < r} |A_i \cup A_j| + \sum_{i < j < k < r} |A_i \cup A_j \cup A_k| \mp \dots \right) + |A_r| - \\ &\quad - \left(\sum_{i < r} |A_i \cup A_r| - \sum_{i < j < r} |A_i \cup A_j \cup A_r| + \sum_{i < j < k < r} |A_i \cup A_j \cup A_k \cup A_r| \mp \dots \right) = \\ &= \sum_{i \leq r} |A_i| - \sum_{i < j \leq r} |A_i \cup A_j| + \sum_{i < j < k \leq r} |A_i \cup A_j \cup A_k| \mp \dots \quad \text{wie behauptet.} \end{aligned}$$

Eine weitere wichtige Formel stammt von von James Joseph SYLVESTER (1814-1897), welche über die Anzahl der Elemente eine Aussage macht, die keiner der Mengen A_i angehören (welche keine der Eigenschaften \mathcal{C}_i aufweisen):

$$|\bigcap_{i \in I} \bar{A}_i| = |A| - \sum_{J \subset I} (-1)^{|J|+1} \cdot |\bigcap_{j \in J} A_j|$$

Formel von SYLVESTER

Beweis:

$$|\bigcap_{i \in I} \bar{A}_i| \stackrel{\text{de MORGAN}}{\downarrow} = |\bigcup_{i \in I} A_i| \stackrel{(5)}{=} |A| - |\bigcup_{i \in I} A_i| \stackrel{\text{Formel 1}}{\downarrow} = |A| - \sum_{J \subset I} (-1)^{|J|+1} \cdot |\bigcap_{j \in J} A_j|$$

Beispiele: $I := \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| &= |A| - [(-1)^{0+1} \cdot |\emptyset| + (-1)^{1+1} \cdot |A_1| + (-1)^{1+1} \cdot |A_2| + (-1)^{2+1} \cdot |A_1 \cup A_2|] = \\ &= |A| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cup A_2| \end{aligned}$$

$I := \{1, 2, 3\}$

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = |A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \text{ usw.}$$

SIEBFORMEL

Sei $A_i \subset A$, $i \in I = \{1, \dots, r\}$ und $J \subset I$, $J = \{i_1, \dots, i_p\}$.
 Ferner sei $L \subset I$ eine Obermenge von J , also eine Indexmenge, welche alle Elemente von J und mindestens einen Index der Menge $K = I \setminus J$ enthält (Es gilt also $J \subset L \subset I$). Die Anzahl der Elemente von A , welche den Mengen A_j , $j \in J$, aber nicht den Mengen A_k , $k \in K = I \setminus J$ angehören, ist

$$|\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \cap \left(\bigcap_{k \in K} \bar{A}_k\right)| = \sum_{L \supset J} (-1)^{|L| - |J|} \cdot \left|\bigcap_{l \in L} A_l\right|$$

Für $J = \emptyset$ ergibt sich die Formel von SYLVESTER

Beweis: Wir wählen

$$B := \bigcap_{j \in J} A_j$$

als *Grundmenge*. Von dieser neu gebildeten Grundmenge B betrachten wir die Teilmengen

$$B_k := B \cap A_k \subset B \quad k \in K = I \setminus J \quad |K| = r - p$$

In dieser neuen Grundmenge B gilt dann

$$\bar{B}_k = B \setminus B_k$$

Auf die Grundmenge B wenden wir nun den Satz von SYLVESTER an:

$$\left|\bigcap_{k \in K} \bar{B}_k\right| = |B| - \sum_{l \in K} |B_l| + \sum_{l < m \in K} |B_l \cap B_m| \mp \dots$$

Wir gehen nun zu den ursprünglichen Mengen A_i zurück. Dann gilt

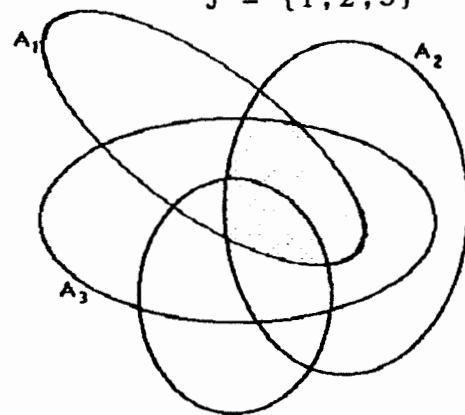
$$B_k = B \cap A_k = \left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \cap A_k, \quad \bar{B}_k = B \setminus B_k = \left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \cap \bar{A}_k$$

Daher

$$\begin{aligned} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right| \cap \left(\bigcap_{k \in K} \bar{A}_k\right) &= \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right| - \sum_{L \supset J} \left|\bigcap_{l \in L} A_l\right| + \sum_{M \supset J} \left|\bigcap_{m \in M} A_m\right| \mp \dots = \\ &= \sum_{L \supset J} (-1)^{|L| - |J|} \cdot \left|\bigcap_{l \in L} A_l\right| \end{aligned}$$

Beispiel: Es soll die Anzahl jener Elemente bestimmt werden, welche den Mengen A_1, A_2, A_3 , aber nicht den Mengen A_4, A_5, A_6, A_7 angehören. Es ist also

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad J = \{1, 2, 3\}, \quad K = \{4, 5, 6, 7\}, \quad |J| = p = 3$$



$$\begin{aligned}
|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6 \cap \bar{A}_7| &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \\
&- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| - \dots - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_7| + \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6| + \dots + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_6 \cap A_7| - \\
&- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| - \dots - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| + \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7|
\end{aligned}$$

Im folgenden verwenden wir die abkürzende Schreibweise

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6 \cap \bar{A}_7| =: \overline{1234567}$$

Wir suchen nun die Anzahl jener Elemente aus den obigen Mengen, die jeweils genau dreien der Mengen A_1, \dots, A_7 angehören (genau drei Eigenschaften haben), den restlichen vier Mengen jedoch nicht angehören. Gesucht ist also die Summe

$$\overline{1234567} + \overline{1243567} + \overline{1253467} + \dots + \overline{5671234}$$

Nach der Siebformel gilt

$$\left. \begin{aligned}
\overline{1234567} &= 123 - 1234 - 1235 - \dots + 12345 + \dots - 123456 - \dots + 1234567 \\
\overline{1243567} &= 124 - 1243 - 1245 - \dots + 12435 + \dots - 124356 - \dots + 1243567 \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
\end{aligned} \right\} +$$

Man erkennt, daß einige Summanden mehrfach auftreten, denn es gilt $1234 = 1243$ usw. Die Anzahl $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1234$ tritt so oft auf, als man aus den vier Mengen A_1, A_2, A_3, A_4 drei auswählen und an die ersten drei Stellen setzen kann. Dies geht in unserem Beispiel $\binom{4}{3} = 4$ mal. Beim Durchschitt von fünf Mengen 12345 tritt $\binom{5}{3} = 10$ mal derselbe Summand auf. Allgemein sei $|A_1 \cap \dots \cap A_p \cap \bar{A}_{p+1} \cap \dots \cap \bar{A}_r|$. Der Summand $12 \dots p \ p+1 \dots l$ tritt dann so oft auf, als man aus den beteiligten l Mengen p auswählen kann, also $\binom{l}{p}$ mal. Daher folgt durch Aufsummieren aus der Siebformel

$$\begin{aligned}
\sum_{|J|=p} |(\bigcap_{j \in J} A_j) \cap (\bigcap_{k \in K} \bar{A}_k)| &= \sum_{|J|=p} \sum_{L \supset J} (-1)^{|L|-|J|} \cdot |\bigcap_{i \in L} A_i| = \\
&= \sum_{\substack{L \subset I \\ |L| \geq p}} \sum_{\substack{L \supset J \\ |J|=p}} (-1)^{|L|-|J|} \cdot |\bigcap_{i \in L} A_i| = \sum_{|L| \geq p} (-1)^{|L|-p} \sum_{\substack{L \supset J \\ |L|}} |\bigcap_{i \in L} A_i| \cdot \binom{|L|}{p}
\end{aligned}$$

Die Anzahl der Elemente der Mengen $A_1, \dots, A_r \subset A$, die jeweils *genau* je p dieser Mengen angehören, ist

$$\sum_{\substack{J \\ |J|=p}} |(\bigcap_{j \in J} A_j) \cap (\bigcap_{k \in \bar{K}} \bar{A}_k)| = \sum_{|L| \geq p} (-1)^{|L|-p} \sum_{\substack{L \supset J \\ |L|=p}} |\bigcap_{i \in L} A_i| \cdot \binom{|L|}{p}$$

Dies ist die Anzahl der Elemente, die *genau* je p der r Eigenschaften $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_r$ aufweisen

Formale Behandlung der Siebformeln

Die Formeln von de MORGAN gestatten es, von Vereinigungsmengen zu Schnittmengen überzugehen. Sei $A_i \subset A$. Dann gilt (Seite 122):

$$\begin{aligned} A_i \cap \bar{A}_i &= \emptyset, & A_i \cup \bar{A}_i &= A \\ \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 &= \overline{A_1 \cup A_2} & \text{allgemein: } \overline{\bigcup \bar{A}_i} &= \bigcap A_i \\ \overline{A_1 \cup A_2} &= \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 & \text{allgemein: } \overline{\bigcup A_i} &= \bigcap \bar{A}_i \end{aligned}$$

Für den Übergang von Vereinigungsmengen zu Mengenschnitten gilt dann

$$A_1 \cup A_2 = \overline{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2}, \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \overline{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3}, \quad \text{usw}$$

Es sei A die Grundmenge. Dann definieren wir *formal*:

$$\begin{aligned} 1 &:= A, & |1| &:= |A| & |A_1 A_2| &= |A_2 A_1| := |A_1 \cap A_2| \\ A_1 A_2 &= A_2 A_1 := A_1 \cap A_2 & |A_i \dots A_i| &= |A_i^n| := |A_i| \\ A_i \dots A_i &= A_i^n := A_i & |-A_i| &:= -|A_i| \\ |A_1 + A_2| &:= |A_1| + |A_2| & \bar{A}_i &:= 1 - A_i \end{aligned}$$

Mit dieser Symbolik können wir alle Mengenausdrücke auf Ausdrücke zurückführen, in denen nur Mengenschnitte vorkommen.

$$\underline{|A_1 \cap \bar{A}_2|} = |(1 - A_1)(1 - A_2)| = |1 - A_1 - A_2 + A_1 A_2| = \underline{|A| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|}$$

$$\underline{|A_1 \cap \bar{A}_2|} = |A_1(1 - A_2)| = |A_1 - A_1 A_2| = \underline{|A_1| - |A_1 \cap A_2|}$$

$$\begin{aligned} \underline{|A_1 \cup A_2|} &= |\overline{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2}| = |1 - \bar{A}_1 \bar{A}_2| = |1 - (1 - A_1)(1 - A_2)| = |A_1 + A_2 - A_1 A_2| = \\ &= \underline{|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|} \end{aligned}$$

Beispiel 1: Sei $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ eine Menge von Primzahlen und N eine natürliche Zahl. Gesucht ist die Menge aller natürlichen Zahlen $\leq N$, die durch keine der Primzahlen p_i teilbar sind.

Sei $A := \{1, 2, \dots, N\}$, $|A| = N$, $I := \{1, \dots, r\}$, $|I| = r$

A_1 ...Menge der durch p_1 teilbaren Zahlen $\leq N$

A_2 ...Menge der durch p_2 teilbaren Zahlen $\leq N$

.....
 A_r ...Menge der durch p_r teilbaren Zahlen $\leq N$

Für die Menge aller Zahlen, die durch kein p_i teilbar sind, gilt nach SYLVESTER

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_r| = |A| - \sum_{J \subset I} (-1)^{|J|+1} \cdot |\bigcap_{j \in J} A_j|$$

Nun gilt

$$|A| = N$$

$$|A_i| = \left[\frac{N}{p_i} \right] \quad [] \dots \text{größte ganze Zahl}$$

$$|A_i \cap A_j| = \left[\frac{N}{p_i p_j} \right] \quad i \neq j$$

..... usw.

Daher

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_r| = N - \sum \left[\frac{N}{p_i} \right] + \sum \left[\frac{N}{p_i p_j} \right] - \sum \left[\frac{N}{p_i p_j p_k} \right] \pm \dots + (-1)^r \left[\frac{N}{p_1 \dots p_r} \right]$$

Zahlenbeispiel: $N = 1000$, $p_1 = 11$, $p_2 = 17$, $p_3 = 19$

$$\left[\frac{1000}{11} \right] = 90, \quad \left[\frac{1000}{17} \right] = 58, \quad \left[\frac{1000}{19} \right] = 52, \quad \left[\frac{1000}{11 \cdot 17} \right] = 5,$$

$$\left[\frac{1000}{11 \cdot 19} \right] = 4, \quad \left[\frac{1000}{17 \cdot 19} \right] = 3, \quad \left[\frac{1000}{11 \cdot 17 \cdot 19} \right] = 0,$$

Daher

$$\underline{\underline{|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = 1000 - 90 - 58 - 52 + 5 + 4 + 3 - 0 = 812}}$$

Beispiel 2: Die natürliche Zahl N habe die Primteiler

p_1, \dots, p_r . Gesucht ist die Menge aller Zahlen $\leq N$, die mit N *teilerfremd* sind, d.h. keine der gesuchten Zahlen wird auch nur durch eine der Primzahlen p_i geteilt.

$A = \{1, \dots, N\}$, $|A| = N$, $I = \{1, \dots, r\}$, $|I| = r$

A_i ...Menge der durch p_i teilbaren Zahlen $\leq N$

Da N durch jedes p_i teilbar ist, gilt für alle i, j

$$\left[\frac{N}{p_i \cdots p_j} \right] = \frac{N}{p_i \cdots p_j}$$

Daher gilt nach Beispiel 1:

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_r| &= N - \sum \frac{N}{p_i} + \sum \frac{N}{p_i p_j} - \sum \frac{N}{p_i p_j p_k} \pm \dots + (-1)^r \frac{N}{p_i \cdots p_r} \\ &= N \cdot \left[1 - \sum \frac{1}{p_i} + \sum \frac{1}{p_i p_j} - \sum \frac{1}{p_i p_j p_k} \pm \dots + (-1)^r \frac{1}{p_i \cdots p_r} \right] \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die zahlentheoretische φ -Funktion von EULER:

Funktion von EULER

$$\varphi(N) = N \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \left(1 - \frac{1}{p_3} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r} \right)$$

$$\varphi(1) := 1$$

Die EULERSche Funktion gibt die Menge aller Zahlen $< N$ an, die zu N teilerfremd sind

Beispiel 3: Wieviele Primzahlen gibt es zwischen \sqrt{N} und N ($\sqrt{N} \leq p \leq N$)?

Es seien p_1, p_2, \dots, p_r die Primzahlen $\leq \sqrt{N}$. Nach Beispiel 1 ist dann

$$P := N - \sum \left[\frac{N}{p_i} \right] + \sum \left[\frac{N}{p_i p_j} \right] - \sum \left[\frac{N}{p_i p_j p_k} \right] \pm \dots$$

die Menge aller Zahlen $\leq N$, die durch keine der Primzahlen p_i teilbar sind. Dazu gehört aber auch 1, welches keine Primzahl ist und daher nicht mitgerechnet werden darf. Als nicht durch p_1, \dots, p_r teilbare Zahlen bleiben daher die Primzahlen zwischen \sqrt{N} und N , deren Anzahl demnach $P - 1$ ist.

"Problème de dérangement", "Problème des rencontres"

Unter einem *dérangement* versteht man eine bijektive Abbildung f einer *geordneten Menge* $\{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$ in eine *geordnete Menge* $\{b_1 < b_2 < \dots < b_n\}$, wobei für alle i gilt

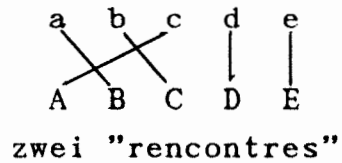
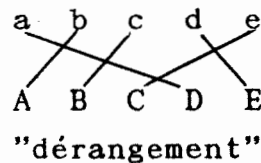
$$f(a_i) \neq b_i \quad i = 1, \dots, n$$

Gilt jedoch

$$f(a_i) = b_i$$

So spricht man von einem "Treffen" ("rencontre") der beiden Elemente a_i und b_i .

Sind die beiden Mengen identisch, dann spricht man von einer Umordnung (Permutation) der Elemente $\{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$ und statt von einem "rencontre" spricht man von "Inzidenz".



Wir denken uns ab jetzt die beiden Mengen stets als identisch und betrachten deren Umordnungen (Permutationen, Neu-Anordnungen).

Es sei P die Menge der Anordnungen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$, und es sei $P_i \subset P$ die Menge der Umordnungen, welche das Element i festlassen. Dann läßt $P_i \cap P_j$ die Elemente i und j fest usw.

Ein Dérangement liegt vor, wenn keines des Elemente $1, 2, \dots, n$ fest bleibt. Die Anzahl der Dérangements ist also

$$|\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 \cap \dots \cap \bar{P}_n|$$

Nun gilt $|P_i| = (n-1)!$, $|P_i \cap P_j| = (n-2)!$ usw. Daher ist nach

SYLVESTER mit $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $|I| = n$

$$\begin{aligned} |\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 \cap \dots \cap \bar{P}_n| &= |P| - \sum_{J \subset I} (-1)^{|J|+1} \cdot | \bigcap_{j \in J} P_j | = \\ &= |P| - |P_1| - |P_2| - \dots - |P_{n-1}| + |P_1 \cap P_2| + \dots + |P_{n-1} \cap P_n| \pm \dots \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\binom{n}{1} \text{ Summanden}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\binom{n}{2} \text{ Summanden}} \quad \text{usw.}$

Daher

$$\begin{aligned} |\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 \cap \dots \cap \bar{P}_n| &= n! - \binom{n}{1} (n-1)! + \binom{n}{2} (n-2)! \mp \dots (-1)^n \binom{n}{n} 0! = \\ &= n! - \frac{n!}{1!(n-1)!} (n-1)! + \frac{n!}{2!(n-2)!} (n-2)! \mp \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \cdot 0! = \\ &= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right] \end{aligned}$$

Die Anzahl der Anordnungen von n Elementen ohne Inzidenzen (ohne Fixelemente) \equiv Dérangements beträgt

$$D_n := n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right] = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$$

Definitionen:

$D_{n,k}$... Anzahl der Anordnungen mit genau k Inzidenzen (Fixelementen)

$$D_{n,0} = D_n, \quad D_0 := 1$$

Es sei $D_{n-k,0} = D_{n-k}$ die Anzahl der d erangements von $n-k$ Elementen.

Fügt man noch k Fixelemente hinzu, so kann man diese auf $\binom{n}{k}$ Arten auf n Plätze verteilen und es gilt

$$D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0} = \binom{n}{k} D_{n-k}$$

Daher

$$D_{n,k} = \binom{n}{k} (n-k)! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \dots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} \right]$$

$$D_{n,k} = \frac{n!}{k!} \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \dots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} \right] = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$
$$D_{n,n} = 1, \quad D_{n,n-1} = 0, \quad \sum_{k=0}^n D_{n,k} = n!$$

Die ersten beiden Ausdrücke der letzten Zeile sind trivial. Da die Summe aller Anordnungen mit genau je $0, 1, \dots, n$ Koinzidenzen die Menge aller möglichen Anordnungen ergibt, folgt der letzte Ausdruck.

Rekursionsformeln: Es gilt für $(n-1)$ Elemente

$$D_{n-1} = (n-1)! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right]$$

daher

$$nD_{n-1} = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right]$$

Fügt man $(-1)^n$ hinzu, so folgt

$$nD_{n-1} + (-1)^n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{1}{n!} \right] = D_n$$

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \quad D_0 := 1 \quad (*)$$

Rekursionen für $D_{n,k}$: Es gilt

$$D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k} \quad (**)$$
$$D_{n,k+1} = \binom{n}{k+1} D_{n-(k+1)}$$

Daher wegen (*)

$$D_{n-k} = (n-k)D_{n-(k+1)} + (-1)^{n-k}$$

und wegen (**)

$$\begin{aligned} D_{n,k} &= \binom{n}{k} \left[(n-k)D_{n-(k+1)} + (-1)^{n-k} \right] = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)D_{n-(k+1)} + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = \\ &= \frac{n!}{k!((n-(k+1))!)} D_{n-(k+1)} + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = \\ &= (k+1) \binom{n}{k+1} D_{n-(k+1)} + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = \\ &= (\text{wegen (**)}) (k+1)D_{n,k+1} + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{n,k} &= (k+1)D_{n,k+1} + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \\ D_{n,n} &= 1 \quad n = 1, 2, \dots; \quad k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

Aus (*) folgt

$$\left. \begin{aligned} D_n &= nD_{n-1} + (-1)^n \\ D_{n-1} &= (n-1)D_{n-2} + (-1)^{n-1} \end{aligned} \right\} +$$

$$D_n + D_{n-1} = nD_{n-1} + (n-1)D_{n-2} + \underbrace{(-1)^n + (-1)^{n-1}}_0$$

$$D_n = (n-1)D_{n-1} + (n-1)D_{n-2}$$

$$\begin{aligned} D_n &= (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}] \\ D_1 &= 0, \quad D_0 := 1 \end{aligned}$$

"Problème des ménages (Problem der Ehepaare)"

(E. LUCAS 1891, Théorie des nombres)

Das Problem besteht darin, n Ehepaare an einem runden Tisch so zu placieren, daß jeweils ein Mann und eine Frau abwechselnd sitzen, aber nie ein Mann neben seiner eigenen Frau.

Denken wir uns die Frauen irgendwie um den Tisch placiert, dann besteht das Problem nur mehr in der Placierung der Männer: für jeden Mann sind zwei Plätze verboten, nämlich links und rechts von seiner eigenen Frau.

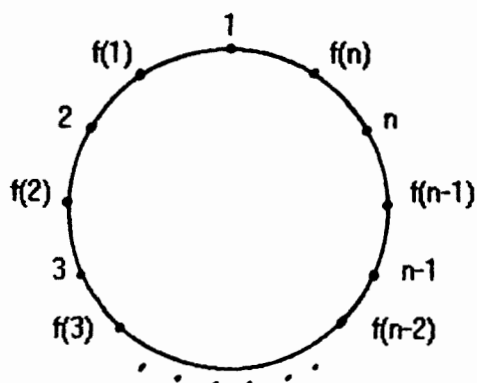
Die Mengen der Frauen und Männer sei gegeben durch

$$F := \{1, 2, \dots, n\}, M := \{1', 2', \dots, n'\}$$

worin i und i' jeweils Ehepartner bezeichnen.

Wir definieren nun eine bijektive Abbildung f der Menge der Frauen auf die Menge der Männer:

Wir teilen der Frau 1 einen Platz zu und setzen rechts von ihr den Mann $f(1)$, rechts davon die Frau 2, dann den Mann $f(2)$ usw...



Wir betrachten nun die Mengen von Abbildungen mit folgenden Eigenschaften

$$A_{2i-1} := \{f: F \rightarrow M \mid f(i) = i'\}$$

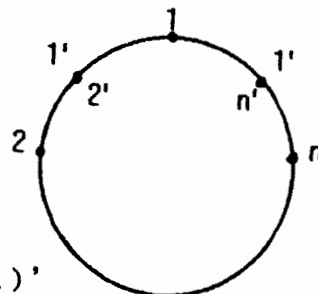
für $i = 1, \dots, n$
und

$$A_{2i} := \{f: F \rightarrow M \mid f(i) = (i+1)', f(n) = 1'\}$$

für $i = 1, \dots, n-1$

Ausführlich beschrieben bedeutet das:

- A_1 Menge aller Abbildungen mit $f(1) = 1'$
- A_2 Menge aller Abbildungen mit $f(1) = 2'$
- A_3 Menge aller Abbildungen mit $f(2) = 2'$
- A_4 Menge aller Abbildungen mit $f(2) = 3'$
-
- A_{2n-3} ... Menge aller Abbildungen mit $f(n-1) = (n-1)'$
- A_{2n-2} ... Menge aller Abbildungen mit $f(n-1) = n'$
- A_{2n-1} ... Menge aller Abbildungen mit $f(n) = n'$
- A_{2n} Menge aller Abbildungen mit $f(n) = 1'$



Genau diese bijektiven Abbildungen sind verboten. Die Menge der zulässigen Sitzordnungen wird also nach SYLVESTER gegeben durch die Menge der bijektiven Abbildungen

$$|\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{2n}| = |A| - \sum_{J \subset I} (-1)^{|J|+1} \cdot |\bigcap_{j \in J} A_j| \quad I = \{1, \dots, 2n\}$$

Nun gilt für die Anzahl der Möglichkeiten, die Männer $1', \dots, n'$ auf n Plätze zu verteilen

$$|A| = n!$$

während für alle $i \in I$ gilt

$$|A_i| = (n-1)!$$

Für $|J| = k$ gilt

$$|\bigcap_{j \in J} A_j| = (n-k)! \text{ wenn } J \text{ keine aufeinander folgenden Indizes } 1, 2, \dots, 2n, 1 \text{ aufweist}$$

$$|\bigcap_{j \in J} A_j| = 0 \text{ wenn aufeinander folgende Indizes auftreten. Wäre nämlich etwa } f \in A_1 \cap A_2 \Rightarrow f(1) = 1' = 2' \text{ so hätte ein Element unter derselben Abbildung zwei Bilder!}$$

Bei der Behandlung der korrigierten FIBONACCI - Zahlen wurde gezeigt (2.Lemma von KAPLANI, Seite 32): Die Anzahl der k -Auswahlen aus einer $2n$ -elementigen zyklischen Menge, in der keine konsekutiven Elemente auftreten, beträgt

$$f^*(2n, k) = \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k}$$

Daraus folgt die

Anzahl der Lösungen des "Problème des ménages"

(J. TOUCHARD 1934)

$$|\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{2n}| = n! - \frac{2n}{2n-1} \binom{2n-1}{1} (n-1)! + \frac{2n}{2n-2} \binom{2n-2}{2} (n-2)! \pm \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{2n}{n} \binom{n}{n} 0! = n! + \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{2n}{2n-i} \binom{2n-i}{i} (n-i)!$$

Endliche Gruppen

Es sei

$$G := \{a, b, c, \dots, n\}, \quad |G| = n$$

eine n -elementige Menge. Führt man in G eine Verknüpfung $*$ ein, so heißt das Paar $(G, *)$ *n-gliedrige Gruppe* oder *Gruppe der Ordnung n* , wenn die Verknüpfung $*$ folgenden Bedingungen genügt:

- $(G, *)$ Gruppe:
1. $a*b = c \in G$
 2. $(a*b)*c = a*(b*c) = a*b*c$
 3. $\bigvee_e \bigwedge_a a*e = e*a = a$
 4. $\bigwedge_a \bigvee_{a^{-1}} a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$

e ist das *Einselement* der Gruppe, a^{-1} das zu a *inverse Element*. Es gibt nur *ein einziges Einselement* einer Gruppe. Ebenso ist das inverse Element eines gegebenen Elementes *eindeutig* bestimmt.

Im allgemeinen gilt

$$a*b \neq b*a$$

Wenn $a*b = b*a$ für zwei beliebige Elemente von G zutrifft, heißt die Gruppe *kommutativ (Modul, ABELsche Gruppe)*.

Eine bequeme Darstellung endlicher Gruppen erfolgt durch die
Gruppentafel

$*$	e	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	
e	e	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	
a ₁	a ₁	a ₂	e	a ₄	a ₅	a ₃	$a_2*a_3 = a_5 \neq a_3*a_2 = a_4$
a ₂	a ₂	e	a ₁	a ₅	a ₃	a ₄	$(a_2*a_3)*a_4 = a_5*a_4 = a_1$
a ₃	a ₃	a ₅	a ₄	e	a ₂	a ₁	$a_2*(a_3*a_4) = a_2*a_2 = a_1$
a ₄	a ₄	a ₃	a ₅	a ₁	e	a ₂	$(a_1*a_2)^{-1} = a_2^{-1}*a_1^{-1}$
a ₅	a ₅	a ₄	a ₃	a ₂	a ₁	e	

Eine Teilmenge $U \subset G$ heißt *Untergruppe* $(U, *)$ von $(G, *)$, wenn die Elemente von U selbst wieder Gruppenelemente der Gruppe $(U, *)$ sind. Man schreibt dann

$$U \subset G$$

Es gilt das *Untergruppenkriterium für endliche Gruppen*

$$U \triangleleft G \iff \bigwedge_{a,b \in U} a*b \in U$$

Beweis: \Rightarrow trivial

\Leftarrow es ist zu zeigen, daß sowohl das Einselement e von G , als auch das inverse Element a^{-1} von a in U enthalten sind. Zum Nachweis definieren wir eine Selbstabbildung von G

$$f: G \longrightarrow G$$

$$a \longmapsto u*a \text{ mit } u, a \in U \text{ und konstantem } u$$

Nach Voraussetzung gilt dann $f(a) \in U$

Behauptung: f ist *injektiv*.

Beweis: sei $a, b \in U$ und $f(a) = f(b) \Rightarrow$ nach Definition von f :
 $u*a = u*b \Rightarrow a = (u^{-1}*u)*b \Rightarrow a = b$ (die ganze Rechnung wurde in G durchgeführt!)

Aus der Injektivität von f folgt die gleiche Mächtigkeit der Mengen

$$|f(U)| = |U|$$

Da U endlich ist, folgt die *Gleichheit der Mengen*

$$f(U) = \{u*a \mid a \in U\} = U$$

da laut Voraussetzung $u*a \in U$ ist. Daher ist f auch *surjektiv* und daher *bijektiv*. Daraus folgt

$$\bigvee_{x \in U} u*x = u \Rightarrow x = e \in U$$

$$\bigvee_{y \in U} u*y = e \Rightarrow y = u^{-1} \in U$$

Zwei Elemente $a, b \in G$ heißen *konjugiert*, wenn gilt

$$\bigvee_{g \in G} b = g*a*g^{-1}$$

Alle Elemente, die zueinander konjugiert sind, bilden eine Äquivalenzklasse.

Definition: $x \cong y \iff \bigvee_{g \in G} y = g*x*g^{-1}$

1. $x \cong x$, denn $x = e*x*e^{-1}$
2. $y \cong x \Rightarrow x \cong y$, denn $y = g*x*g^{-1} \Rightarrow x = g^{-1}*y*g$

3. $(x \cong y \wedge y \cong z) \Rightarrow x \cong z$, denn

$$\begin{aligned} x = g*y*g^{-1} \wedge y = h*z*h^{-1} &\Rightarrow x = g*(h*z*h^{-1})*g^{-1} = \\ &= (g*h)*z*(g*h)^{-1} \end{aligned}$$

Zwei Untergruppen U, V , heißen *konjugiert*, wenn es ein $g \in G$ gibt, sodaß gilt

$$V = g*U*g^{-1} \iff \bigwedge_{u \in U} g*u*g^{-1} = v \in V$$

Andere Schreibweise für konjugierte Untergruppen

$$V*g = g*U$$

Es ist noch nachzuweisen, daß, wenn U eine Untergruppe ist, auch $V := g*U*g^{-1}$ eine Untergruppe ist:

Sei $u_1, u_2 \in U$ und $v_1 := g*u_1*g^{-1}, v_2 := g*u_2*g^{-1} \in V$.

Dann gilt

$$v_1*v_2 = (g*u_1*g^{-1})*(g*u_2*g^{-1}) = g*\underbrace{(u_1*u_2)}_{\in U}*g^{-1} \Rightarrow V \text{ ist Untergruppe}$$

Zueinander konjugierte Untergruppen bilden eine Äquivalenzklasse

Beweis: 1. $U \cong U$, denn $U \cong e*U*e^{-1}$

2. $V \cong U \Rightarrow U \cong V$, denn $V = g*U*g^{-1} \Rightarrow U = g^{-1}*V*g$

3. $(U \cong V \wedge V \cong W) \Rightarrow U \cong W$, denn $U = g*V*g^{-1} \wedge V = h*W*h^{-1} \Rightarrow U = (g*h)*W*(g*h)^{-1}$

d.h. konjugierte Gruppen unterscheiden sich eigentlich nur in der Bezeichnungsweise.

Eine Untergruppe $N \subset G$ heißt *invariante Untergruppe* oder *Normalteiler*, wenn gilt

$$\bigwedge_{g \in G} N = g*N*g^{-1}$$

Die Normalteiler sind also die *selbstadjungierten Untergruppen*.

Andere Schreibweise:

$$N*g = g*N$$

Ist U eine Untergruppe und ist $e \neq g \in G$, so ist $g*U$ i.a. *keine Untergruppe*, da i.a. das Einselement e nicht in der Menge $g*U$

enthalten ist.

Man nennt die Menge $g*U$ eine (*linksseitige*) Nebenklasse zu U

Die folgenden Sätze gelten natürlich auch für rechtsseitige Nebenklassen $U*g$.

Die Elemente derselben (linksseitigen) Nebenklasse sind untereinander äquivalent

1. $x \cong x$, denn es ist $x \in x*U$ wegen $x = x*e$ und $e \in U$
2. $x \cong y \Rightarrow y \cong x$, denn $x \in y*U \Rightarrow \bigvee_{u \in U} x = y*u \Rightarrow y = x*u^{-1} \Rightarrow y \in x*U$
3. $(x \cong y \wedge y \cong z) \Rightarrow x \cong z$, denn $x = y*u_1 \wedge y = z*u_2 \Rightarrow x = z*(u_2*u_1)$

Die Menge aller (linksseitigen) Nebenklassen einer Untergruppe U bildet eine Partition von G

1. $x \cong y \Rightarrow x*U = y*U$ VS
Beweis: $\bigwedge_z [z \in x*U \Leftrightarrow z \cong x \cong y \Leftrightarrow z \cong y \Leftrightarrow z \in y*U] \Leftrightarrow x*U = y*U$
d.h.: haben zwei Nebenklassen ein Element gemeinsam, so stimmen sie in allen Elementen überein.
2. $x \not\cong y \Rightarrow x*U \cap y*U = \emptyset$
Beweis indirekt: $z \in x*U \cap y*U \Rightarrow z = x*u_1 = y*u_2 \Rightarrow y = x*(u_1*u_2^{-1})$
 $\Rightarrow y \in x*U \Rightarrow y \cong x$ Widerspruch zur Voraussetzung!
d.h.: zwei verschiedene Nebenklassen haben einen leeren Durchschnitt.
3. Keine Nebenklasse ist leer. Denn jeder Unterraum U enthält mindestens das Einselement e .
4. Zu jedem $y \in G$ gibt es genau eine Nebenklasse mit $y \in x*U$
Beweis: Wegen 1. und 2. kann es höchstens eine Nebenklasse geben, in der y liegt. Es ist z.z., daß jedes y in einer Nebenklasse liegt.

Wir wählen u beliebig aus U

$$x := y*u^{-1} \Rightarrow y = x*u \Rightarrow y \in x*U$$

Die Menge der Nebenklassen bezüglich einer Untergruppe U bilden daher eine Partition von G .

Die Nebenklasse $g*U$ enthält genau $|U|$ Elemente

Es gibt $|U|$ Verknüpfungen von g mit Elementen aus U . Es könnte ein

Elementenverlust eintreten, wenn einige dieser Verknüpfungen gleich sind.

$$g*u_1 = g*u_2 \Rightarrow u_1 = g^{-1}*g*u_2 = u_2$$

d.h. sind u_1 und u_2 verschieden, so sind es auch ihre Verknüpfungen mit g .

Die Menge aller Nebenklassen zu einer Untergruppe U bezeichnet man mit

$$G/U \dots \text{Quotient (von } G) \text{ über } U \quad (*)$$

Es gilt

$$|G/U| \cdot |U| = |G|$$

Jede Nebenklasse enthält genau $|U|$ Elemente. Alle Nebenklassen zusammen enthalten alle $|G|$ Elemente der Gruppe G .

Es sei N Normalteile von G , d.h. es gelte

$$\bigwedge_{g \in G} g*N = N*g$$

Dann bildet die Menge G/N der Restklassen zusammen mit der Verknüpfung $*$ eine Gruppe

Es sei $a*N, b*N \in G/N$. dann gilt

$$(a*N)*(b*N) = (a*N)*(N*b) = a*(N*N)*b = a*N*b = (a*b)*N \in G/N$$

Die Abbildung
 $f: G \longrightarrow G/N$
 $a \longmapsto a*N$
 ist ein Homomorphismus

Sei $f(a) = a*N$

$$f(b) = b*N$$

dann ist

$$f(a)*f(b) = (a*N)*(b*N) = (a*b)*N = f(a*b)$$

Aus (*) folgt der

Satz von Joseph Louis LAGRANGE (1736-1813)

Ist U eine Untergruppe von G , so ist $|U|$ ein Teiler von $|G|$

Setzt man $a*a := a^2, a*a*a := a^3, \dots$, so kann man definieren:

Eine endliche Gruppe, die durch fortgesetzte Potenzierung eines ihrer Elemente entsteht, heißt *zyklische Gruppe*

$$G := \{a, a^2, a^3, \dots\}$$

Beispiel: Wir bestimmen die zyklischen Untergruppen der sechsgliedrigen Gruppe von Seite 136 bei Beachtung von

$$a_1^2 = a_2, \quad a_1^3 = a_1 * a_2 = e \text{ usw.}$$

$$U_1 = \{a_1, a_1^2 = a_2, a_1^3 = e\}, \quad U_2 = \{a_3, e\}, \quad U_3 = \{a_4, e\}, \quad U_4 = \{a_5, e\}$$

Die Elemente a_1 usw. nennt man *Erzeugende* der zyklischen Untergruppen. Man erkennt sofort, daß *zyklische Gruppen stets kommutativ sind*.

Man kann auch mehrere Elemente heranziehen, um (i.a. nichtzyklische) Untergruppen zu erzeugen. Der Versuch a_1 und a_3 als Erzeugende einer Untergruppe heranzuziehen ergibt

$$\{a_1, a_3, a_1 * a_3 = a_4, a_1 * a_4 = a_5, a_1^2 = a_2, a_1^3 = e\}$$

Es entsteht als keine echte Untergruppe, sondern die Gruppe G selbst. Die Elemente a_1 und a_3 sind also *Erzeugende* von G . Die Gruppe G wird durch die Elemente a_1 und a_3 erzeugt.

Permutationsgruppen

Eine *Permutation* ist eine bijektive Abbildung der Menge

$$X = \{1, 2, \dots, n\}$$

auf sich selbst. Man schreibt

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & \dots & k_n \end{pmatrix} \equiv k_1 k_2 k_3 \dots k_n$$

Beispiel:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

|
|
|
|
|
|

zweite Abbildung
erste Abbildung

Zu jeder Permutation gibt es die inverse Permutation

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & \dots & k_n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\pi_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Identische Permutation $\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$

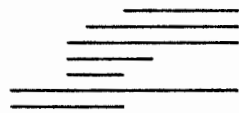
Die Menge aller Permutationen von $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ bildet mit der Verknüpfung \circ eine Gruppe, die *symmetrische Gruppe* S_n .

Wenn in der Permutation $\pi = k_1 k_2 k_3 k_4 \dots k_n$ für zwei Indizes i, j gilt: $i < j$, für die zwei entsprechenden Elemente k_i, k_j hingegen gilt: $k_i > k_j$, so spricht man von einem *Fehlstand*. Ist $\alpha(\pi)$ die Menge aller Fehlstände, so heißt

$$\text{sgn } \pi := (-1)^{\alpha(\pi)}$$

die *Signatur der Permutation* π .

Beispiel: $\pi_1 = 3 \ 5 \ 2 \ 4 \ \underline{6} \ \underline{1}$ $\alpha = 8, \quad \text{sgn } \pi_1 = 1$



Je nachdem $\text{sgn } \pi = +1$ oder $\text{sgn } \pi = -1$ ist, spricht man von einer *geraden* oder einer *ungeraden* Permutation.

Spezielle Permutationen

Transpositionen π_{ij} Die Transposition π_{ij} vertauscht die Elemente an den Stellen i und j und läßt alle anderen Elemente unverändert.

Kanonische Transpositionen $\pi_{i, i+1}$ Die Transposition vertauscht benachbarte Elemente. Die kanonischen Transpositionen werden oft mit τ bezeichnet.

Die Transpositionen sind *involutorische Abbildungen*, dh. es gilt

$$\pi_{ij} \circ \pi_{ij} = \epsilon \Rightarrow \pi_{ij}^{-1} = \pi_{ij}$$

Um die Permutation $\pi = k_1 k_2 \dots k_n$ durch kanonische Transpositionen auf die Gestalt $123\dots n$ zu bringen, sind mindestens $\alpha(\pi)$ kanonische Transpositionen erforderlich.

Wurde die Permutation $\pi = k_1 k_2 \dots k_n$ durch r kanonische Transpositionen auf die Gestalt $12\dots n$ gebracht, so sind r und $\alpha(\pi)$ beide gleichzeitig gerade oder ungerade. Man sagt, sie haben dieselbe *Parität* (zwei ganze Zahlen a, b haben dieselbe Parität, wenn gilt $(-1)^a = (-1)^b$).

Beweis: 1. Gegeben sei $\pi = k_1 k_2 \dots k_n$. Man kann zunächst das Element 1 durch ebensoviele kanonische Transpositionen an die erste Stelle bringen, als Fehlstände durch 1 hervorgerufen wurden, dasselbe mit dem Element 2 usw., das ergibt insgesamt $\alpha(\pi)$ Vertauschungen.

2. Durch die Transposition $\pi_{i, i+1}$ wird

$$\pi = k_1 \dots k_{i-1} k_i k_{i+1} k_{i+2} \dots k_n$$

in die Permutation

$$\pi' = k_1 \dots k_{i-1} k_{i+1} k_i k_{i+2} \dots k_n$$

verwandelt. Dabei gilt

$$\alpha(\pi') = \begin{cases} \alpha(\pi)+1 & \text{wenn } k_i < k_{i+1} \text{ war} \\ \alpha(\pi)-1 & \text{wenn } k_i > k_{i+1} \text{ war} \end{cases} \quad (*)$$

Da bei einer Vertauschung sich $\alpha(\pi)$ höchstens um 1 vermindert, sind mindestens $\alpha(\pi)$ Vertauschungen erforderlich, um $\alpha(\epsilon) = 0$ zu erreichen. Daher ist wegen 1. $\alpha(\pi)$ die Mindestzahl der nötigen Vertauschungen.

Erreicht man nun durch r kanonische Transpositionen, von π ausgehend, die Gestalt ϵ , so folgt, daß r und $\alpha(\pi)$ dieselbe Parität aufweisen müssen, denn wegen (*) erfolgt bei jedem Schritt eine Vorzeichenänderung von $\alpha(\pi)$. Da nun $\alpha(\pi)$ auf 0 reduziert werden soll, muß bei r bzw. $\alpha(\pi)$ die Anzahl der Vorzeichenänderungen beidemale gerade oder ungerade sein.

Die symmetrische Gruppe S_n wird durch die $n-1$ kanonischen Transpositionen $\pi_{12}, \pi_{23}, \pi_{34}, \dots, \pi_{n-1,n}$ erzeugt.

Wenn eine Permutation π durch r dieser Transpositionen erzeugt werden kann, haben r und $\alpha(\pi)$ dieselbe Parität.

Beweis: Wenn $\pi = k_1 \dots k_n$ durch die r kanonischen Transpositionen τ_1, \dots, τ_r nach ε transformiert werden kann, so gilt

$$\begin{aligned} \tau_r \circ \tau_{r-1} \circ \dots \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \pi &= \varepsilon \Rightarrow \pi = (\tau_r \circ \tau_{r-1} \circ \dots \circ \tau_2 \circ \tau_1)^{-1} = \\ &= \tau_1^{-1} \circ \dots \circ \tau_r^{-1} = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r \quad (\text{wegen } \tau = \tau^{-1}) \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Seite 143 haben r und $\alpha(\pi)$ dieselbe Parität.

$$\text{sgn}(\pi_2 \circ \pi_1) = \text{sgn } \pi_2 \cdot \text{sgn } \pi_1, \quad \text{sgn } \pi = \text{sgn } \pi^{-1}, \quad \text{sgn } \pi_{ij} = -1$$

Beweis: Wir stellen π_1 und π_2 als Produkt von kanonischen Transpositionen dar:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \tau_t \circ \tau_{t-1} \circ \dots \circ \tau_1 \\ \pi_2 &= \sigma_s \circ \sigma_{s-1} \circ \dots \circ \sigma_1 \end{aligned}$$

$$\pi_2 \circ \pi_1 = (\sigma_s \circ \sigma_{s-1} \circ \dots \circ \sigma_1) \circ (\tau_t \circ \tau_{t-1} \circ \dots \circ \tau_1)$$

Da die Paritäten auf beiden Seiten der Beziehung gleich sein müssen, folgt

$$(-1)^{\alpha(\pi_2 \circ \pi_1)} = (-1)^{s+t} = (-1)^s (-1)^t = (-1)^{\alpha(\pi_2)} (-1)^{\alpha(\pi_1)}$$

daher $\text{sgn}(\pi_2 \circ \pi_1) = \text{sgn } \pi_2 \cdot \text{sgn } \pi_1$.

Wegen $\pi \circ \pi^{-1} = \varepsilon \Rightarrow \text{sgn}(\pi \circ \pi^{-1}) = \underline{\text{sgn } \pi \cdot \text{sgn } \pi^{-1}} = \text{sgn } \varepsilon = \underline{+1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{sgn } \pi = \text{sgn } \pi^{-1}$.

Ist τ eine kanonische Transposition, dann gilt

$\tau \circ \pi = \pi' \Rightarrow \text{sgn } \pi' = \text{sgn } \tau \cdot \text{sgn } \pi$. Wegen $\alpha(\pi') = \alpha(\pi) \pm 1$ folgt

$$\text{sgn } \pi' = (-1)^{\alpha(\pi) \pm 1} = \text{sgn } \tau \cdot (-1)^{\alpha(\pi)} \Rightarrow \underline{\text{sgn } \tau} = (-1)^{\pm 1} = \underline{-1}$$

Durch die Transposition π_{ij} erhält man aus der Grundanordnung die Permutation

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \\ & & & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & & \\ & & & & & i\text{-te Stelle} & & & & j\text{-te Stelle} & & & & \end{array}$$

Durch die Abfolgen der $j-i$ kanonischen Transpositionen

$$\pi_{j-1,j}, \pi_{j-2,j-1}, \pi_{j-3,j-2}, \dots, \pi_{i,i+1}$$

wird i an seine richtige Stelle gebracht. Dann steht allerdings j noch immer an der Stelle $i+1$ und muß durch $j-(i+1)$ kanonische Transpositionen an die Stelle j gebracht werden. Insegsamt benötigt man also $(j-i) + (j-i-1) = 2(j-i) - 1$ kanonische Transpositionen, um die Transposition π_{ij} rückgängig zu machen. Da deren Paritäten gleich sein müssen, gilt

$$(-1)^{2(j-i)-1} = (-1)^{-1} = -1 = (-1)^{\alpha(\pi_{ij})} \Rightarrow \operatorname{sgn} \pi_{ij} = -1$$

Läßt sich π durch das Produkt von r (nicht notwendig kanonischen) Transpositionen darstellen, so haben r und $\alpha(\pi)$ dieselbe Parität.

Sei nämlich π das Produkt von r beliebigen Transpositionen π_i , so gilt $\pi = \pi_r \circ \dots \circ \pi_1 \Rightarrow \operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn} \pi_r \dots \operatorname{sgn} \pi_1 = (-1)^r$

Die Menge A_n aller geraden Permutationen der symmetrischen Gruppe S_n bildet eine Untergruppe, die *alternierende Gruppe* A_n von S_n . A_n ist Normalteiler von S_n . Es gilt $|A_n| = \frac{1}{2} \cdot n!$

Sei A_n die Menge der geraden Permutationen, H_n die Menge der ungeraden Permutationen von S_n . Ferner sei π_{ij} eine beliebige (nicht notwendig kanonische) Transposition. Dann gilt für eine beliebige Permutation $\pi \in A$

$$\begin{aligned} \pi_{ij}: A_n &\longrightarrow H_n \\ \pi &\longmapsto \pi_{ij} \circ \pi = \pi' \end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{sgn} \pi = +1$ gilt tatsächlich $\operatorname{sgn} (\pi_{ij} \circ \pi) = \operatorname{sgn} \pi_{ij} \cdot \operatorname{sgn} \pi = (-1)(+1) = -1 \Rightarrow \pi_{ij} \circ \pi = \pi' \in H_n$.

Diese Abbildung ist bijektiv, da sie umkehrbar ist: $\pi = \pi_{ij} \circ \pi'$

Demnach ist $|A_n| = |H_n|$, $|A_n \cup H_n| = |S_n| = n! \Rightarrow |A_n| = \frac{1}{2} n!$

Daß A_n Untergruppe ist folgt aus

$$\begin{aligned} [\pi_1, \pi_2 \in A_n \Leftrightarrow \operatorname{sgn} \pi_1 = \operatorname{sgn} \pi_2 = +1] &\Rightarrow \operatorname{sgn}(\pi_1 \circ \pi_2) = \operatorname{sgn} \pi_1 \cdot \operatorname{sgn} \pi_2 = +1 \\ &\Rightarrow \underline{\pi_2 \circ \pi_1 \in A_n} \end{aligned}$$

An ist Normalteiler: Sei $\sigma \in S_n$. Dann gilt für alle $\pi \in A_n$:

$$\text{sgn}(\sigma^{-1} \circ \pi \circ \sigma) = \text{sgn} \sigma^{-1} \cdot \text{sgn} \pi \cdot \text{sgn} \sigma = \text{sgn} \sigma \cdot (+1) \cdot \text{sgn} \sigma = (\text{sgn} \sigma)^2 = +1$$

daher

$$\bigwedge_{\pi \in A_n} \bigwedge_{\sigma \in S_n} \sigma^{-1} \circ \pi \circ \sigma \in A_n$$

Ist $G \mid S_n$ eine beliebige Untergruppe von S_n , so sind alle Permutationen von G entweder gerade oder die Anzahl der in G enthaltenen ungeraden Permutationen ist gleich der Anzahl der in G enthaltenen geraden Permutationen.

Sei $\sigma \in G$ eine ungerade Permutation von G , d.h. $\text{sgn} \sigma = -1$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ \pi & \longmapsto & \sigma \circ \pi \end{array}$$

eine Bijektion. Daher ist

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in G} \text{sgn} \pi &= \sum_{\pi \in G} \text{sgn}(\sigma \circ \pi) = \sum_{\pi \in G} (\text{sgn} \sigma) \cdot (\text{sgn} \pi) = - \sum_{\pi \in G} \text{sgn} \pi \Rightarrow 2 \sum_{\pi \in G} \text{sgn} \pi = 0 \\ &\Rightarrow \underline{\underline{\sum_{\pi \in G} \text{sgn} \pi = 0}} \end{aligned}$$

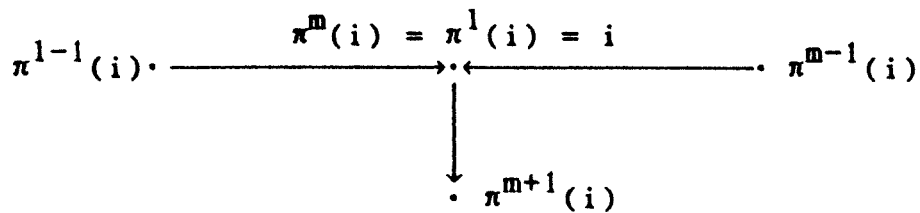
d.h. die Anzahl der geraden und der ungeraden Permutationen von G ist gleich.

Zyklen einer Permutation

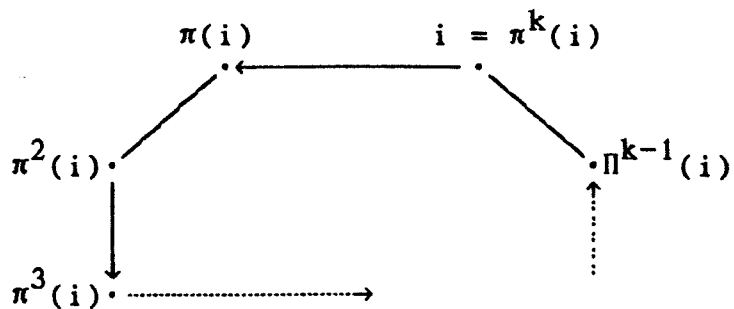
Da die Permutation π eine bijektive Selbstabbildung der Menge $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ist, entspricht jedem $i \in X$ ein einziges Bild $\pi(i)$ sowie ein einziges Urbild $\pi^{-1}(i)$:

$$\begin{array}{ccccc} & \longleftarrow & & \longleftarrow & \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \pi(i) & & i & & \pi^{-1}(i) \end{array}$$

Wir betrachten nun die Folge $i, \pi(i), \pi^2(i), \pi^3(i), \dots$. Da X endlich ist, muß irgendeinmal ein Element wieder auftreten, d.h. es muß sein $\pi^k(i) = \pi^m(i) \Rightarrow i = \pi^{m-k}(i)$. Es muß also einen Exponenten $k = m-1$ geben, für den gilt $\pi^k(i) = i$



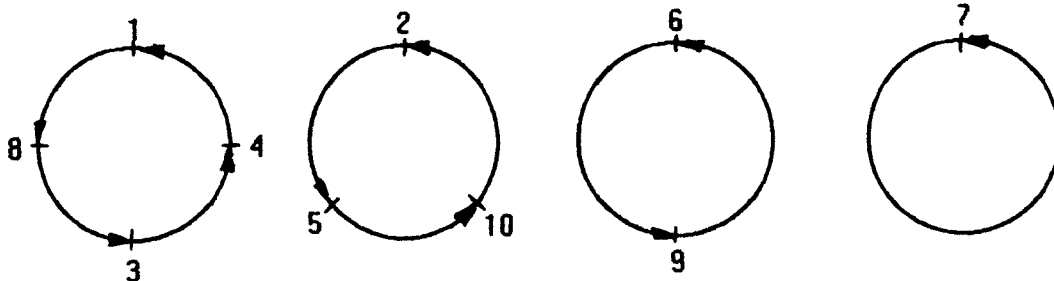
Die obige Figur widerspricht aber der Injektivität der Abbildung π , so daß die Verhältnisse nur so abgebildet werden können:



Jeden dieser zusammenhängenden Wege nennt man einen *Zyklus von π* .
Beispiel:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 5 & 4 & 1 & 10 & 9 & 7 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Es treten folgende Zyklen auf



Schreibweise für die Zyklendarstellung:

$$\pi = (1 \ 8 \ 3 \ 4)(2 \ 5 \ 10)(6 \ 9)(7)$$

↑
kann weggelassen werden

Sei

$$\begin{aligned}
 \rho &= (2 \ 8 \ 3)(7 \ 10 \ 4) \equiv (1)(2 \ 8 \ 3)(4 \ 7 \ 10)(5)(6)(9) \equiv \\
 &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 2 & 7 & 5 & 6 & 10 & 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Dann gilt für die Zusammensetzung

$$\begin{aligned}
 \rho \circ \pi &= (1)(2 \ 8 \ 3)(4 \ 7 \ 10)(5)(6)(9) \circ (1 \ 8 \ 3 \ 4)(2 \ 5 \ 10)(6 \ 9)(7) = \\
 &= (1 \ 3 \ 7 \ 10 \ 8 \ 2 \ 5 \ 4)(6 \ 9) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 4 & 9 & 10 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Klarerweise gilt

Zwei Zyklen derselben Permutation sind stets elementfremd

Die symmetrische Gruppe S_4

Die Elemente von S_4 sind die Permutationen der Menge $\{1,2,3,4\}$.

π_1 = 1 2 3 4	π_7 = 2 1 3 4	π_{13} = 3 1 2 4	π_{19} = 4 1 2 3
π_2 = 1 2 4 3	π_8 = 2 1 4 3	π_{14} = 3 1 4 2	π_{20} = 4 1 3 2
π_3 = 1 3 2 4	π_9 = 2 3 1 4	π_{15} = 3 2 1 4	π_{21} = 4 2 1 3
π_4 = 1 3 4 2	π_{10} = 2 3 4 1	π_{16} = 3 2 4 1	π_{22} = 4 2 3 1
π_5 = 1 4 2 3	π_{11} = 2 4 1 3	π_{17} = 3 4 1 2	π_{23} = 4 3 1 2
π_6 = 1 4 3 2	π_{12} = 2 4 3 1	π_{18} = 3 4 2 1	π_{24} = 4 3 2 1

Darstellung durch Zyklen:

π_1 = (1)(2)(3)(4)	π_7 = (12)(3)(4)	π_{13} = (132)(4)	π_{19} = (1432)
π_2 = (1)(2)(34)	π_8 = (12)(34)	π_{14} = (1342)	π_{20} = (142)(3)
π_3 = (1)(23)(4)	π_9 = (123)(4)	π_{15} = (13)(2)(4)	π_{21} = (143)(2)
π_4 = (1)(234)	π_{10} = (1234)	π_{16} = (134)(2)	π_{22} = (14)(2)(3)
π_5 = (1)(243)	π_{11} = (1243)	π_{17} = (13)(24)	π_{23} = (1423)
π_6 = (1)(24)(3)	π_{12} = (124)(3)	π_{18} = (1324)	π_{24} = (14)(23)

Gruppentafel

Erste Abbildung

		π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_{13}	π_{14}	π_{15}	π_{16}	π_{17}	π_{18}	π_{19}	π_{20}	π_{21}	π_{22}	π_{23}	π_{24}
Zweite Abbildung	π_1	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_{13}	π_{14}	π_{15}	π_{16}	π_{17}	π_{18}	π_{19}	π_{20}	π_{21}	π_{22}	π_{23}	π_{24}
	π_2	π_2	π_1	π_5	π_6	π_3	π_4	π_8	π_7	π_{11}	π_{12}	π_9	π_{10}	π_{19}	π_{20}	π_{21}	π_{22}	π_{23}	π_{24}	π_{13}	π_{14}	π_{15}	π_{16}	π_{17}	π_{18}
	π_3	π_3	π_4	π_1	π_2	π_6	π_3	π_{13}	π_{14}	π_{15}	π_{16}	π_{17}	π_{18}	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_{20}	π_{19}	π_{23}	π_{24}	π_{21}	π_{22}
	π_4	π_4	π_3	π_6	π_5	π_1	π_2	π_{14}	π_{13}	π_{17}	π_{18}	π_{15}	π_{16}	π_{20}	π_{19}	π_{23}	π_{24}	π_{21}	π_{22}	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}
	π_5	π_5	π_6	π_2	π_1	π_4	π_3	π_{19}	π_{20}	π_{21}	π_{22}	π_{23}	π_{24}	π_8	π_7	π_{11}	π_{12}	π_9	π_{10}	π_{14}	π_{13}	π_{17}	π_{18}	π_{15}	π_{16}
	π_6	π_6	π_5	π_4	π_3	π_2	π_1	π_{20}	π_{19}	π_{23}	π_{24}	π_{21}	π_{22}	π_{14}	π_{13}	π_{17}	π_{18}	π_{15}	π_{16}	π_8	π_7	π_{11}	π_{12}	π_9	π_{10}
	π_7	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_{15}	π_{16}	π_{13}	π_{14}	π_{18}	π_{17}	π_{21}	π_{22}	π_{19}	π_{20}	π_{24}	π_{23}
	π_8	π_8	π_7	π_{11}	π_{12}	π_9	π_{10}	π_2	π_1	π_5	π_6	π_3	π_4	π_{21}	π_{22}	π_{19}	π_{20}	π_{24}	π_{23}	π_{15}	π_{16}	π_{13}	π_{14}	π_{18}	π_{17}
	π_9	π_9	π_{10}	π_7	π_8	π_{12}	π_{11}	π_{15}	π_{16}	π_{13}	π_{14}	π_{18}	π_{17}	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_{22}	π_{21}	π_{24}	π_{23}	π_{19}	π_{20}
	π_{10}	π_{10}	π_9	π_{12}	π_{11}	π_7	π_8	π_{16}	π_{15}	π_{18}	π_{17}	π_{13}	π_{14}	π_{22}	π_{21}	π_{24}	π_{23}	π_{19}	π_{20}	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
	π_{11}	π_{11}	π_{12}	π_8	π_7	π_{10}	π_9	π_{21}	π_{24}	π_{19}	π_{20}	π_{24}	π_{22}	π_2	π_1	π_{12}	π_6	π_3	π_4	π_{16}	π_{15}	π_{18}	π_{17}	π_{13}	π_{14}
	π_{12}	π_{12}	π_{11}	π_{10}	π_9	π_8	π_7	π_{22}	π_{21}	π_{24}	π_{23}	π_{19}	π_{20}	π_{16}	π_{15}	π_{18}	π_{17}	π_{13}	π_{14}	π_2	π_1	π_5	π_6	π_3	π_4
	π_{13}	π_{13}	π_{14}	π_{15}	π_{15}	π_{17}	π_{18}	π_3	π_4	π_1	π_2	π_5	π_6	π_9	π_{10}	π_7	π_8	π_{12}	π_{11}	π_{23}	π_{24}	π_{20}	π_{19}	π_{22}	π_{21}
	π_{14}	π_{14}	π_{13}	π_{17}	π_{18}	π_{15}	π_{16}	π_4	π_3	π_6	π_5	π_1	π_2	π_{23}	π_{24}	π_{20}	π_{19}	π_{22}	π_{21}	π_9	π_{10}	π_7	π_8	π_{12}	π_{11}
	π_{15}	π_{15}	π_{16}	π_{13}	π_{14}	π_{18}	π_{17}	π_9	π_{10}	π_7	π_8	π_{12}	π_{11}	π_3	π_4	π_1	π_2	π_6	π_5	π_{24}	π_{23}	π_{22}	π_{21}	π_{20}	π_{19}
	π_{16}	π_{16}	π_{15}	π_{18}	π_{17}	π_{13}	π_{14}	π_{10}	π_9	π_{12}	π_{11}	π_7	π_8	π_{24}	π_{23}	π_{22}	π_{21}	π_{20}	π_{19}	π_3	π_4	π_1	π_2	π_6	π_5
	π_{17}	π_{17}	π_{18}	π_{14}	π_{13}	π_{16}	π_{15}	π_{23}	π_{24}	π_{20}	π_{19}	π_{22}	π_{21}	π_4	π_3	π_6	π_5	π_1	π_2	π_{10}	π_9	π_{12}	π_{11}	π_7	π_8
	π_{18}	π_{18}	π_{17}	π_{16}	π_{15}	π_{14}	π_{13}	π_{24}	π_{23}	π_{22}	π_{21}	π_{20}	π_{19}	π_{10}	π_9	π_{12}	π_{11}	π_7	π_8	π_4	π_3	π_6	π_5	π_1	π_2
	π_{19}	π_{19}	π_{20}	π_{21}	π_{22}	π_{23}	π_{24}	π_5	π_6	π_2	π_1	π_4	π_3	π_{11}	π_{12}	π_8	π_7	π_{10}	π_9	π_{17}	π_{18}	π_{14}	π_{13}	π_{16}	π_{15}
	π_{20}	π_{20}	π_{19}	π_{23}	π_{24}	π_{21}	π_{22}	π_6	π_5	π_4	π_3	π_2	π_1	π_{17}	π_{18}	π_{14}	π_{13}	π_{16}	π_{15}	π_{11}	π_{12}	π_8	π_7	π_{10}	π_9
	π_{21}	π_{21}	π_{22}	π_{19}	π_{20}	π_{24}	π_{23}	π_{11}	π_{12}	π_8	π_7	π_{10}	π_9	π_5	π_6	π_2	π_1	π_4	π_3	π_{18}	π_{17}	π_{16}	π_{15}	π_{14}	π_{13}
	π_{22}	π_{22}	π_{21}	π_{24}	π_{23}	π_{19}	π_{20}	π_{12}	π_{11}	π_{10}	π_9	π_8	π_7	π_{18}	π_{17}	π_{16}	π_{15}	π_{14}	π_{13}	π_5	π_6	π_2	π_1	π_4	π_3
	π_{23}	π_{23}	π_{24}	π_{20}	π_{19}	π_{22}	π_{21}	π_{17}	π_{18}	π_{14}	π_{13}	π_{16}	π_{15}	π_6	π_5	π_4	π_3	π_2	π_1	π_{12}	π_{11}	π_{10}	π_9	π_8	π_7
	π_{24}	π_{24}	π_{23}	π_{22}	π_{21}	π_{20}	π_{19}	π_{18}	π_{17}	π_{16}	π_{15}	π_{14}	π_{13}	π_{12}	π_{11}	π_{10}	π_9	π_8	π_7	π_6	π_5	π_4	π_3	π_2	π_1

Untergruppen von S_4

Die in eckige Klammern [...] eingeschlossenen Untergruppen sind jeweils paarweise konjugiert.

9 zweigliedrige Untergruppen, alle zyklisch

$$[\{\pi_1, \pi_2\}, \{\pi_1, \pi_3\}, \{\pi_1, \pi_6\}, \{\pi_1, \pi_7\}, \{\pi_1, \pi_{15}\}, \{\pi_1, \pi_{22}\}]$$

$$[\pi_1, \pi_8\}, \{\pi_1, \pi_{17}\}, \{\pi_1, \pi_{24}\}]$$

4 dreigliedrige Untergruppen, alle zyklisch

$$[\{\pi_1, \pi_4, \pi_5\}, \{\pi_1, \pi_9, \pi_{13}\}, \{\pi_1, \pi_{12}, \pi_{20}\}, \{\pi_1, \pi_{16}, \pi_{21}\}]$$

7 viergliedrige Untergruppen

$$[\{\pi_1, \pi_{10}, \pi_{17}, \pi_{19}\}, \{\pi_1, \pi_{11}, \pi_{24}, \pi_{14}\}, \{\pi_1, \pi_8, \pi_{18}, \pi_{23}\}] \text{ zyklisch}$$

$$[\{\pi_1, \pi_2, \pi_7, \pi_8\}, \{\pi_1, \pi_3, \pi_{22}, \pi_{24}\}, \{\pi_1, \pi_6, \pi_{15}, \pi_{17}\}] \left. \vphantom{[\{\pi_1, \pi_2, \pi_7, \pi_8\}, \{\pi_1, \pi_3, \pi_{22}, \pi_{24}\}, \{\pi_1, \pi_6, \pi_{15}, \pi_{17}\}]} \right\} \text{ KLEINsche}$$

$$\{\pi_1, \pi_8, \pi_{17}, \pi_{24}\} \dots (\text{Normalteiler}) \left. \vphantom{\{\pi_1, \pi_8, \pi_{17}, \pi_{24}\}} \right\} \text{ Vierergruppen}$$

benannt nach Felix KLEIN (1849–1925)

4 sechsgliedrige Untergruppen

$$[\{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6\}, \{\pi_1, \pi_2, \pi_{15}, \pi_{16}, \pi_{21}, \pi_{22}\},$$

$$\{\pi_1, \pi_3, \pi_7, \pi_9, \pi_{13}, \pi_{15}\}, \{\pi_1, \pi_6, \pi_7, \pi_{12}, \pi_{20}, \pi_{22}\}] \left. \vphantom{[\{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6\}, \{\pi_1, \pi_2, \pi_{15}, \pi_{16}, \pi_{21}, \pi_{22}\}, \{\pi_1, \pi_3, \pi_7, \pi_9, \pi_{13}, \pi_{15}\}, \{\pi_1, \pi_6, \pi_7, \pi_{12}, \pi_{20}, \pi_{22}\}]} \right\} \begin{array}{l} \text{je ein} \\ \text{Fixelement} \end{array}$$

3 achtgliedrige Gruppen

$$[\{\pi_1, \pi_2, \pi_7, \pi_8, \pi_{17}, \pi_{18}, \pi_{23}, \pi_{24}\}, \{\pi_1, \pi_3, \pi_8, \pi_{11}, \pi_{14}, \pi_{17}, \pi_{22}, \pi_{24}\},$$

$$\{\pi_1, \pi_6, \pi_8, \pi_{10}, \pi_{15}, \pi_{17}, \pi_{19}, \pi_{24}\}]$$

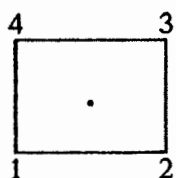
1 zwölfgliedrige Gruppe, Alternierende Gruppe A_4

$$\{\pi_1, \pi_4, \pi_5, \pi_8, \pi_9, \pi_{12}, \pi_{13}, \pi_{16}, \pi_{17}, \pi_{20}, \pi_{21}, \pi_{24}\} \dots \text{Normalteiler}$$

Geometrische Interpretationen

Gruppe des Quadrats

Drehungen:



Identität

$$\pi_1: \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 4 \end{array}$$

Halbdrehung

$$\pi_{17}: \begin{array}{l} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 2 \end{array}$$

Vierteldrehungen

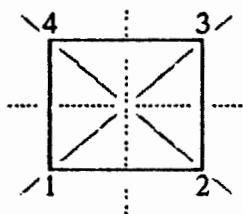
$$\pi_{10}: \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 1 \end{array}$$

$$\pi_{19}: \begin{array}{l} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 3 \end{array}$$

Drehungsgruppe: $\{\pi_1, \pi_{10}, \pi_{17}, \pi_{19}\}$

Untergruppen der Drehungsgruppe: $\{\pi_1\}, \{\pi_1, \pi_{17}\},$

Spiegelungen:



Spiegelungen an den Diagonalen
 π_6 : 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 2
 π_{15} : 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 4

Spiegelungen an den Mittellinien
 π_8 : 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3
 π_{24} : 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 1

Spiegelungsgruppen: $\{\pi_1, \pi_6\}, \{\pi_1, \pi_8\}, \{\pi_1, \pi_{15}\}, \{\pi_1, \pi_{24}\}$

Diödergruppe des Quadrats: $\{\pi_1, \pi_6, \pi_8, \pi_{10}, \pi_{15}, \pi_{17}, \pi_{19}, \pi_{24}\}$

Untergruppen der Diödergruppe:

$\{[\pi_1, \pi_6], [\pi_1, \pi_{15}]\}, \{[\pi_1, \pi_8], [\pi_1, \pi_{24}]\}$
 $\{\pi_1, \pi_{17}\}$... Normalteiler

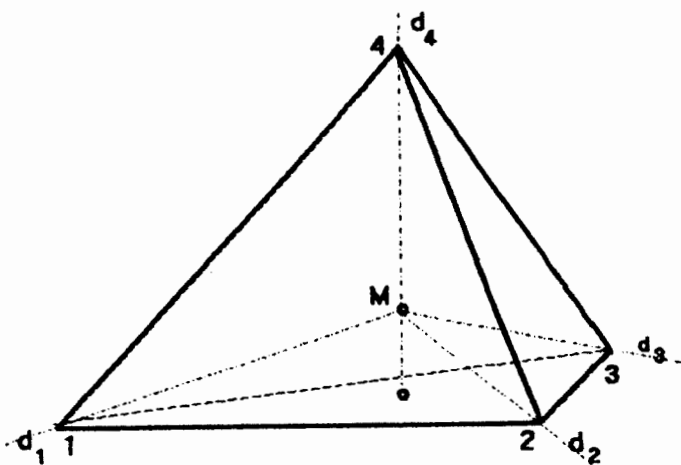
$\{\pi_1, \pi_{10}, \pi_{17}, \pi_{19}\}$... Drehungsgruppe

$\{\pi_1, \pi_6, \pi_{15}, \pi_{17}\}$... Normalteiler

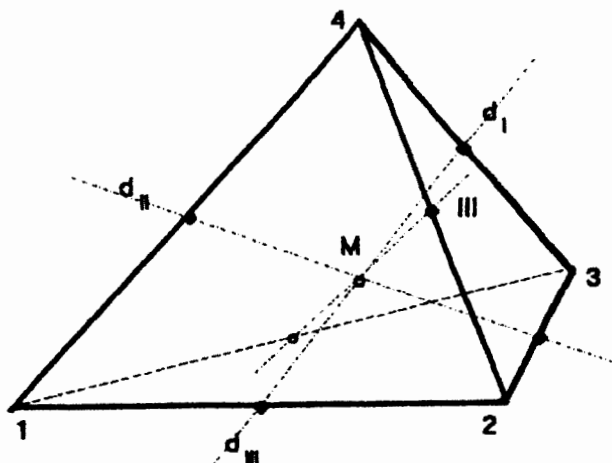
$\{\pi_1, \pi_8, \pi_{17}, \pi_{24}\}$... Normalteiler

Gruppe des Tetraeders

Drehungen:



Achse	Permutation
J	$\pi_1 = (1)(2)(3)(4)$
d_1	$\pi_4 = (1)(234)$
d_1^2	$\pi_5 = (1)(243)$
d_2	$\pi_{16} = (134)(2)$
d_2^2	$\pi_{21} = (143)(2)$
d_3	$\pi_{12} = (124)(3)$
d_3^2	$\pi_{20} = (142)(3)$
d_4	$\pi_9 = (123)(4)$
d_4^2	$\pi_{13} = (132)(4)$



Achse	Permutation
J	$\pi_1 = (1)(2)(3)(4)$
d_I	$\pi_8 = (12)(34)$
d_{II}	$\pi_{24} = (14)(23)$
d_{III}	$\pi_{17} = (13)(24)$

Drehungsgruppe des Tetraeders:

$$\{\pi_1, \pi_4, \pi_5, \pi_8, \pi_9, \pi_{12}, \pi_{13}, \pi_{16}, \pi_{17}, \pi_{20}, \pi_{21}, \pi_{24}\}$$

Untergruppen der Drehungsgruppe:

$$\begin{aligned} & [\{\pi_1, \pi_8\}, \{\pi_1, \pi_{17}\}, \{\pi_1, \pi_{24}\}] \\ & [\{\pi_1, \pi_4, \pi_5\}, \{\pi_1, \pi_9, \pi_{13}\}, \{\pi_1, \pi_{12}, \pi_{20}\}, \{\pi_1, \pi_{16}, \pi_{21}\}] \\ & \{\pi_1, \pi_8, \pi_{17}, \pi_{24}\} \dots \text{Normalteiler} \end{aligned}$$

in geometrischer Schreibweise

Drehungsgruppe des Tetraeders

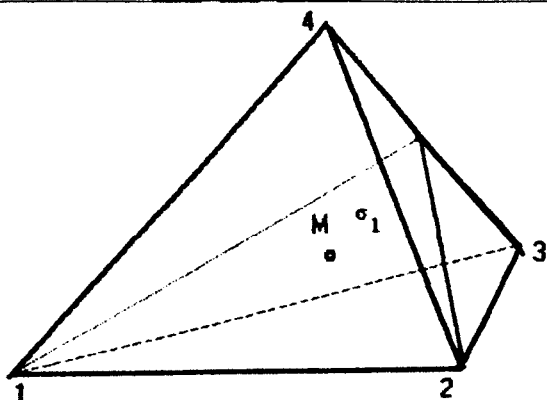
$$\{I, d_1, d_1^2, d_2, d_2^2, d_3, d_3^2, d_4, d_4^2, d_I, d_{II}, d_{III}\}$$

Untergruppen: $[\{J, d_I\}, \{J, d_{II}\}, \{J, d_{III}\}]$

$$[\{J, d_1, d_1^2\}, \{J, d_2, d_2^2\}, \{J, d_3, d_3^2\}, \{J, d_4, d_4^2\}]$$

$$\{J, d_I, d_{II}, d_{III}\} \dots \text{Normalteiler}$$

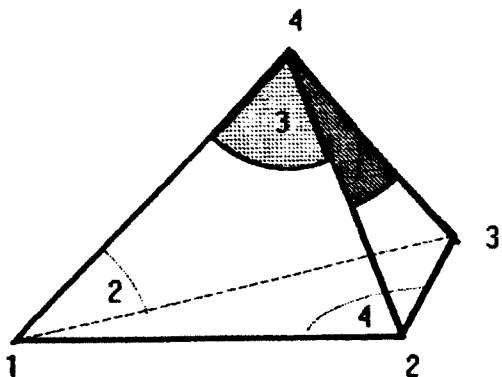
Spiegelungen an Symmetrieebenen:



Spiegelebene	Permutation
σ_1	$\pi_2 = (1)(2)(34)$
σ_2	$\pi_{22} = (14)(2)(3)$
σ_3	$\pi_6 = (1)(24)(3)$
σ_4	$\pi_3 = (1)(23)(4)$
σ_5	$\pi_{15} = (13)(2)(4)$
σ_6	$\pi_7 = (12)(3)(4)$

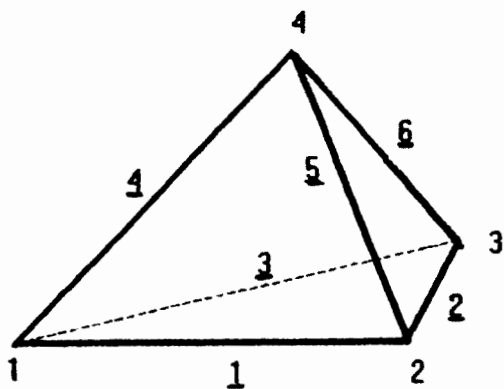
Die Menge der Spiegelungen an Symmetrieebenen bildet keine Gruppe! Wohl bildet aber jede Spiegelung für sich mit der Identität eine zweigliedrige Gruppe $\{J, \sigma_i\}$. Die Verknüpfungen der Drehungen zusammen mit den Spiegelungen bilden die volle Tetraedergruppe, die mit der symmetrischen Gruppe S_4 isomorph ist.

Transformation der Seitenflächen durch die Tetraedergruppe



Numeriert man die Seitenflächen wie die gegenüberliegenden Tetraeder-ecken, So ergeben sich dieselben Permutationen wie bei der Tetraeder-Eckengruppe.

Kantengruppe des Tetraeders:



Spiegelebene	Permutation
σ_1	$(\underline{1})(\underline{25})(\underline{34})(\underline{6})$
σ_2	$(\underline{15})(\underline{2})(\underline{36})(\underline{4})$
σ_3	$(\underline{14})(\underline{26})(\underline{3})(\underline{5})$
σ_4	$(\underline{13})(\underline{2})(\underline{4})(\underline{56})$
σ_5	$(\underline{12})(\underline{3})(\underline{46})(\underline{5})$
σ_6	$(\underline{1})(\underline{23})(\underline{45})(\underline{6})$

Achse	Permutation
J	$(\underline{1})(\underline{2})\underline{3456}$
d_1	$(\underline{134})(\underline{265})$
d_1^2	$(\underline{143})(\underline{256})$
d_2	$(\underline{125})(\underline{364})$
d_2^2	$(\underline{152})(\underline{346})$
d_3	$(\underline{145})(\underline{236})$
d_3^2	$(\underline{154})(\underline{263})$
d_4	$(\underline{123})(\underline{456})$
d_4^2	$(\underline{132})(\underline{465})$
d_I	$(\underline{1})(\underline{24})(\underline{35})(\underline{6})$
d_{II}	$(\underline{16})(\underline{2})(\underline{35})(\underline{4})$
d_{III}	$(\underline{16})(\underline{24})(\underline{3})(\underline{5})$

Zwei Permutationen sind genau dann konjugiert, wenn sie dieselbe Anzahl von Zyklen gleicher Länge haben

1. Sei

$$\pi_1 = (a_{11} a_{12} \dots a_{1i}) (a_{21} a_{22} \dots a_{2j}) \dots (a_{r1} a_{r2} \dots a_{rk})$$

Sei ferner

$$\pi_2 := \sigma \circ \pi_1 \circ \sigma^{-1} \quad (\sigma \in S_n)$$

eine zu π_1 konjugierte Permutation, wobei gelte

$$\sigma(a_{pq}) = b_{pq} \Leftrightarrow a_{pq} = \sigma^{-1}(b_{pq})$$

Dann gilt

$$\pi_2(b_{11}) = \sigma \circ \pi_1 \circ \sigma^{-1}(b_{11}) = \sigma \circ \pi_1(a_{11}) = \sigma(a_{12}) = b_{12} \quad \text{usw.}$$

Daher

$$\pi_2 = (b_{11} b_{12} \dots b_{1i}) (b_{21} \dots) (b_{r1} \dots b_{rk})$$

π_2 besteht also aus gleichvielen Zyklen gleicher Länge

2. Haben π_1 und π_2 Zyklen in derselben Anzahl und derselben Länge, so kann man σ wie oben definieren und es gilt

$$\pi_2 = \sigma \circ \pi_1 \circ \sigma^{-1}$$

Hat eine Permutation π λ_1 Zyklen der Länge 1, λ_2 Zyklen der Länge 2, ..., λ_r Zyklen der Länge r, wobei

$$1 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + \dots + r \cdot \lambda_r = n$$

sein muß, so sagt man, π sei von

$$\text{Typus } 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots r^{\lambda_r}$$

Es wurde gezeigt, daß Permutationen derselben Konjugationsklasse dieselbe Anzahl von Zyklen gleicher Länge haben. Frage: Aus wieviele Permutationen desselben Typus besteht eine Konjugationsklasse?

Satz von Augustin Louis CAUCHY (1789-1857)

Die Anzahl der Permutationen vom Typus $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots r^{\lambda_r}$ beträgt

$$h(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) = \frac{n!}{(1^{\lambda_1} \cdot \lambda_1!)(2^{\lambda_2} \cdot \lambda_2!)\dots(r^{\lambda_r} \cdot \lambda_r!)}$$

$$\sum_{i=1}^r i \cdot \lambda_i = n$$

Beweis: Die Permutation hat nach Voraussetzung die Bauart

$$\pi = \underbrace{(*)\dots(*)}_{\lambda_1} \underbrace{(**)\dots(**)}_{\lambda_2} \underbrace{(***)\dots(***)}_{\lambda_3} \dots \underbrace{\overbrace{(**\dots*)}^r}_{\lambda_r}$$

Die Sternchen können durch die Zahlen $1, \dots, n$ besetzt werden, was auf $n!$ Arten möglich ist. Da es auf die Reihenfolge der Zyklen der Länge i , deren Anordnung auf $\lambda_i!$ Arten möglich ist, nicht ankommt, reduziert sich die Anzahl der Möglichkeiten auf die oben angegebene Weise. Ebenso ist die Angabe eines Zyklus der Länge i auf i äquivalente Arten möglich. Da es jeweils λ_i Zyklen dieser Länge gibt, tritt eine weitere Reduktion der Möglichkeiten ein.

Ist π eine Permutation vom Typus $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots r^{\lambda_r}$, so ist die Parität von $\alpha(\pi)$ gleich der Parität von $\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \dots$. D.h. die Parität der Fehlstände einer Permutation ist gleich der Parität der Anzahl der Zyklen mit einer geraden Anzahl von Elementen.

Beweis: 1. Wir zeigen zunächst, daß ein Zyklus der Länge l stets als Produkt von $(l-1)$ kanonischen Transpositionen dargestellt werden kann. Es gilt nämlich

$$(k_1 k_2 k_3 \dots k_l) = \pi_{1-1,1} \circ \dots \circ \pi_{23} \circ \pi_{12}$$

2. Ist π vom Typus $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots r^{\lambda_r}$, so kann wegen 1. jeder Zyklus der Länge l als Produkt von $l-1$ kanonischen Zyklen dargestellt werden, d.h. durch insgesamt

$$0 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_3 + \dots + (l-1) \cdot \lambda_l + \dots$$

kanonische Transpositionen. Daher ist

$$\text{sgn } \pi = (-1)^{\lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 + 4\lambda_5 + \dots}$$

Da die geradzahigen Summanden im Exponenten weggelassen werden können, verbleibt

$$\text{sgn } \pi = (-1)^{\lambda_2 + 3\lambda_4 + 5\lambda_6 + \dots}$$

Nun ist

$$\lambda_2 + 3\lambda_4 + 5\lambda_6 + \dots = \sum (2i-1)\lambda_{2i} = 2 \sum \lambda_{2i} - \sum \lambda_{2i}$$

Da auch hier der geradzahige Anteil wegbleiben kann, folgt

$$\text{sgn } \pi = (-1)^{-\lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_6 - \dots} = (-1)^{\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \dots}$$

Beispiel: Anzahl der Permutationen des Typus

$$1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} 3^{\lambda_3} 4^{\lambda_4} \quad (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 = 4)$$

der symmetrischen Gruppe S_4

$$h(4,0,0,0) = \frac{4!}{(1^4 \cdot 4!)(2^0 \cdot 0!)(3^0 \cdot 0!)(4^0 \cdot 0!)} = \frac{4!}{4!} = 1 \quad (1)(2)(3)(4)$$

$$h(1,0,1,0) = \frac{4!}{(1^1 \cdot 1!)(2^0 \cdot 0!)(3^1 \cdot 1!)(4^0 \cdot 0!)} = \frac{4!}{3} = 8 \quad \begin{array}{l} (1)(234) \\ (1)(243) \\ \dots \end{array}$$

$$h(0,2,0,0) = \frac{4!}{(1^0 \cdot 0!)(2^2 \cdot 2!)(3^0 \cdot 0!)(4^0 \cdot 0!)} = \frac{4!}{2^2 2!} = 3 \quad \begin{array}{l} (12)(34) \\ (13)(24) \\ \dots \end{array}$$

$$h(0,0,0,1) = \frac{4!}{(1^0 \cdot 0!)(2^0 \cdot 0!)(3^0 \cdot 0!)(4^1 \cdot 1!)} = \frac{4!}{4} = 6 \quad \begin{array}{l} (1234) \\ (1243) \\ \dots \end{array}$$

$$h(2,1,0,0) = \frac{4!}{(1^2 \cdot 2!)(2^2 \cdot 1!)(3^0 \cdot 0!)(4^0 \cdot 0!)} = \frac{4!}{2! 2} = 6 \quad \begin{array}{l} (1)(2)(34) \\ (1)(3)(24) \\ \dots \end{array}$$

$$|S_4| = 24$$

Die Anzahl der Möglichkeiten, die Ausdrücke $h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ zu

bilden, ergibt sich aus dem erzeugenden Polynom

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^2+x^4)(1+x^3)(1+x^4) = 1+x+2x^2+3x^3+\underline{5x^4}+5x^5+\dots$$

Es gibt also 5 Möglichkeiten für h .

Für das erzeugende Polynom von $h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$. gilt definitionsgemäß

$$F(S_n; x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_n \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n}} h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n) x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$$

Daraus folgt nach CAUCHY

$$F(S_n; x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_n \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n}} \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} \left(\frac{x_1}{1}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{x_2}{2}\right)^{\lambda_2} \dots \left(\frac{x_n}{n}\right)^{\lambda_n}$$

Da jede der $n!$ Permutationen von S_n in genau einem Summanden enthalten ist, ergibt sich

$$F(S_n; 1, 1, \dots, 1) = \sum \frac{n!}{(1^{\lambda_1} \cdot \lambda_1!)(2^{\lambda_2} \cdot \lambda_2!)\dots(r^{\lambda_r} \cdot \lambda_r!)} = n!$$

Daher gilt nach CAUCHY

$$\sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_n \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n}} \frac{1}{(1^{\lambda_1} \cdot \lambda_1!)(2^{\lambda_2} \cdot \lambda_2!)\dots(r^{\lambda_r} \cdot \lambda_r!)} = 1$$

Äquivalenzklassen einer Gruppe, Orbits

Sei $G \triangleleft S_n$ eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n . Man nennt zwei Elemente $i, j \in X = \{1, 2, \dots, n\}$ äquivalent bezüglich G , wenn gilt

$$i \stackrel{G}{\sim} j \Leftrightarrow \bigvee_{\pi \in G} j = \pi(i)$$

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, denn es gilt

$$i \stackrel{G}{\sim} i \text{ denn } i = \varepsilon(i)$$

$$j \stackrel{G}{\sim} i \Rightarrow i \stackrel{G}{\sim} j \text{ denn } j = \pi(i) \Rightarrow i = \pi^{-1}(j)$$

$$i \stackrel{G}{\sim} j \wedge j \stackrel{G}{\sim} k \Rightarrow i \stackrel{G}{\sim} k \text{ denn } i = \pi_1(j) \wedge j = \pi_2(k) \Rightarrow i = (\pi_1 \circ \pi_2)(k)$$

Die Äquivalenzklassen bezüglich der Gruppe $G \triangleleft S_n$ heißen *Orbits*. Die Elemente eines Orbit sind die Bilder eines festen Elementes $i \in X$ unter allen Permutationen von G .

Beispiel: $G \triangleleft S_{12}$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12) \\ \pi_1 &= (1)(2\ 12)(3\ 5)(4\ 9)(6\ 11)(7)(8\ 10) \\ \pi_2 &= (1\ 7)(2\ 11)(3)(4\ 10)(5)(6\ 12)(8\ 9) \\ \pi_3 &= (1\ 7)(2\ 6)(3\ 5)(4\ 8)(9\ 10)(11\ 12) \end{aligned}$$

Orbits: $\{1, 7\}$, $\{2, 6, 11, 12\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 8, 9, 10\}$

Ist G eine zyklische Gruppe $\{\varepsilon, \pi, \pi^2, \pi^3, \dots\}$ in S_n , dann sind die Orbits mit den Zyklen von G identisch. Die Orbits sind also Verallgemeinerungen der Zyklen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \pi^{12} & \pi^6 &= (13)(24)(5)(6)(7) \\ \pi &= (1234)(567) & \pi^7 &= (1432)(567) \\ \pi^2 &= (13)(24)(576) & \pi^8 &= (1)(2)(3)(4)(567) \\ \pi^3 &= (1432)(5)(6)(7) & \pi^9 &= (1234)(5)(6)(7) \\ \pi^4 &= (1)(2)(3)(4)(567) & \pi^{10} &= (13)(24)(567) \\ \pi^5 &= (1234)(567) & \pi^{11} &= (1432)(576) \end{aligned}$$

Orbits: $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{5, 6, 7\}$

Es soll nun die Anzahl der Orbits einer Gruppe $G \triangleleft S_n$ bestimmt werden.

Wir betrachten zunächst die Menge G_i jener Permutationen von G , in denen das Element i fest bleibt

$$G_i := \{\pi \mid \pi \in G, \pi(i) = i\}$$

Zu jedem i gibt es mindestens ein π mit dieser Eigenschaft, nämlich die Identität ϵ . Selbstverständlich ist G_i eine Untergruppe von G , denn es gilt

$$\pi_1(i) = i, \pi_2(i) = i \Rightarrow \pi_2 \circ \pi_1(i) = \pi_2(i) = i \Rightarrow \pi_2 \circ \pi_1 \in G_i$$

Beispiel (obige Gruppe): $i := 1 \Rightarrow G_1 = \{\epsilon, \pi^4, \pi^8\}$

Es sei O_i jener Orbit von G , welcher das Element i enthält. Wie oben festgestellt, gibt es mindestens eine Permutation π mit $\pi(i) = i$. Da i dem Orbit O_i angehört, kann es ein $j \in O_i$ geben, sodaß für ein entsprechendes $\pi \in G$ gilt: $i = \pi(j)$.

Wir nehmen an, es gäbe zwei Permutationen π_1, π_2 mit

$$\begin{aligned} \pi_1(j) = \pi_2(j) = i \Rightarrow j = \pi_1^{-1}(i) = \pi_2^{-1}(i) \Leftrightarrow i = (\pi_1 \circ \pi_2^{-1})(i) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \pi_1 \circ \pi_2^{-1} \in G_i \Leftrightarrow \pi_1 \in G_i \circ \pi_2 \Leftrightarrow \underline{G_i \circ \pi_1 = G_i \circ \pi_2} \end{aligned}$$

d.h. alle Permutationen π_1, π_2 mit $\pi_1(j) = \pi_2(j) = i$ gehören derselben Nebenklasse von G_i an.

Beispiel: Wegen $\pi^2(3) = 1$ gilt $G_1 \circ \pi^2 = \{\pi^2, \pi^6, \pi^{10}\}$, das ist die Menge aller Permutationen, welche 3 nach 1 überführen.

Umgekehrt ist jenes Element j eindeutig bestimmt, welches von allen Permutationen derselben Nebenklasse von G_i nach i abgebildet wird. Sei nämlich für jede Permutation aus der Nebenklasse, angewendet auf das Element $k: \pi(k) = i$.

Wie oben gezeigt, gilt für jede Permutation $\pi \in G_i \circ \pi_1: \pi(j) = i$. Gilt nun für ein Element k auch $\pi(k) = i$ für alle π , so folgt wegen der Injektivität von $\pi: k = j$.

Wir ordnen nun jedem $j \in O_i$ jene Permutation $\pi \in G$ zu, für welche $\pi(j) = i$ ist. Per definitionem sind aber die Elemente eines Orbits jene Elemente, die aus einem festen Element $1 \in X$ durch Anwendung aller Permutationen $\pi \in G$ hervorgehen. Jedes Element eines Orbits hat also die Gestalt

$$\pi(1) = i, \pi'(1) = j \in O_i \Leftrightarrow 1 = \pi'^{-1}(j) \Rightarrow \pi \circ \pi'^{-1}(j) = i$$

Es muß also mindestens eine solche Abbildungen geben. Gibt es mehrere solche Abbildungen $i = \pi_1(j) = \pi_2(j) = \pi_3(j) = \dots$, so gehören alle derselben Nebenklasse

$$G_i \circ \pi_1 = G_i \circ \pi_2 = G_i \circ \pi_3 \dots \in G/G_i$$

an, d.h. jedem $j \in O_i$ wird eindeutig eine Nebenklasse des Quotienten

G/G_i zugeordnet. Es gibt daher eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: O_i &\longrightarrow G/G_i \\ j &\longmapsto G_i \circ \pi = \Phi(j) \quad \pi(j) = i \end{aligned}$$

Φ ist injektiv, da es bei vorgegebener Nebenklasse $G_i \circ \pi$ nur ein einziges j gibt, welches von allen Permutationen aus $G_i \circ \pi$ nach i abgebildet wird.

Φ ist surjektiv: $G_i \circ \pi \in G/G_i$ werde beliebig vorgegeben. Nun ist wegen $i \in O_i$ auch $\pi^{-1}(i) = j \in O_i$ entsprechend der Definition von O_i . Daher $\Phi(j) = G_i \circ \pi$ wegen $\pi(j) = i$. Aus der Bijektivität von Φ folgt daher

$$|O_i| = |G/G_i|$$

Nach Seite 140 (*) gilt

$$|G/G_i| \cdot |G_i| = |G|$$

daraus

$$|O_i| \cdot |G_i| = |G|$$

Ist O_i jener Orbit von $G \triangleleft S_n$, welcher das Element i enthält, dann gilt

$$|O_i| = |G|/|G_i|$$

G_i ist die Untergruppe von G , welche das Element $i \in X$ fest läßt.

Beispiel: Gruppe von Seite 156

$\epsilon = \pi^{12}$	$\pi^6 = (13)(24)(5)(6)(7)$
$\pi = (1234)(567)$	$\pi^7 = (1432)(567)$
$\pi^2 = (13)(24)(576)$	$\pi^8 = (1)(2)(3)(4)(567)$
$\pi^3 = (1432)(5)(6)(7)$	$\pi^9 = (1234)(5)(6)(7)$
$\pi^4 = (1)(2)(3)(4)(567)$	$\pi^{10} = (13)(24)(567)$
$\pi^5 = (1234)(567)$	$\pi^{11} = (1432)(576)$

Sei $i = 1 \dots O_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $G_1 = \{\epsilon, \pi^4, \pi^8\}$

Wir untersuchen folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: O_1 &\longrightarrow G/G_1 \\ j &\longmapsto G_1 \circ \pi \quad \pi(j) = 1 \end{aligned}$$

$j=1$	$\epsilon(1) = \pi^4(1) = \pi^8(1) = 1$	$\Phi(1) = \{G_1 \circ \epsilon, G_1 \circ \pi^4, G_1 \circ \pi^8\} = \{G_1\}$
$j=2$	$\pi^3(2) = \pi^7(2) = \pi^{11}(2) = 1$	$\Phi(2) = \{G_1 \circ \pi^3, G_1 \circ \pi^7, G_1 \circ \pi^{11}\} = \{\pi^3, \pi^7, \pi^{11}\}$
$j=3$	$\pi^2(3) = \pi^6(3) = \pi^{10}(3) = 1$	$\Phi(3) = \{G_1 \circ \pi^2, G_1 \circ \pi^6, G_1 \circ \pi^{10}\} = \{\pi^2, \pi^6, \pi^{10}\}$
$j=4$	$\pi(4) = \pi^5(4) = \pi^9(4) = 1$	$\Phi(4) = \{G_1 \circ \pi, G_1 \circ \pi^5, G_1 \circ \pi^9\} = \{\pi, \pi^5, \pi^9\}$

Ferner gilt

$$|O_1| = 4, |G_1| = 3, |G| = 12$$

$$|O_1| \cdot |G_1| = |G|$$

Satz von William BURNSIDE (1852-1927) 1897

Ist $\lambda_1(\pi)$ die Anzahl der Elemente von $X = \{1, 2, \dots, n\}$, die unter der Permutation $\pi \in G \subset S_n$ fest bleiben (λ_1 ist also die Anzahl der Zyklen von π mit der Länge 1), so ist die Anzahl der Orbits der Gruppe G gleich

$$|O_G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \lambda_1(\pi), \quad O_G = \{O \mid O \text{ ist Orbit von } G\}$$

Wir berechnen die Summe $\sum_{\pi \in G} \lambda_1(\pi)$ auf zwei Arten und illustrieren dies an obiger Gruppe

ϵ hält	1	2	3	4	5	6	7	fest	$\lambda_1(\epsilon) = 7$
π^3 hält					5	6	7	fest	$\lambda_1(\pi^3) = 3$
π^4 hält	1	2	3	4				fest	$\lambda_1(\pi^4) = 4$
π^6 hält					5	6	7	fest	$\lambda_1(\pi^6) = 3$
π^8 hält	1	2	3	4				fest	$\lambda_1(\pi^8) = 4$
π^9 hält					5	6	7	fest	$\lambda_1(\pi^9) = 3$

$ G_1 $	$ G_2 $	$ G_3 $	$ G_4 $	$ G_5 $	$ G_6 $	$ G_7 $	$\sum_{\pi \in G} \lambda_1(\pi) = \sum_{i \in X} G_i = 24$
3	3	3	3	4	4	4	

Allgemein gilt daher

$$\sum_{\pi \in G} \lambda_1(\pi) = \sum_{i \in X} |G_i|$$

Die rechte Summe wollen wir weiter aufspalten. Da die Orbits Äquivalenzklassen sind und daher keine gemeinsamen Elemente enthalten, gilt

$$X = \bigcup_{O \in O_G} O$$

In obigem Beispiel wäre $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{5, 6, 7\}$.
Daher kann man setzen

$$\sum_{i \in X} |G_i| = \sum_{O \in O_G} \sum_{i \in O} |G_i|$$

Gehören i und j demselben Orbit an, so gilt

$$O_i = O_j \Rightarrow |O_i| = |O_j| \Rightarrow \sum_{i \in O} |G_i| = |O_i| \cdot |G_i|$$

Wegen $|O_i| \cdot |G_i| = |G|$ folgt weiter

$$\sum_{i \in O} |G_i| = |G|$$

somit

$$\sum_{i \in X} |G_i| = \sum_{O \in O_G} \sum_{i \in O} |G_i| = \sum_{O \in O_G} |G| = |O_G| \cdot |G| = \sum_{\pi \in G} \lambda_1(\pi) \text{ wie behauptet.}$$

In obigem Beispiel gilt

$$\sum_{\pi \in G} \lambda_1(\pi) = 24, |G| = 12, O_G = \{\{1,2,3,4\}, \{5,6,7\}\}, |O_G| = 2$$

Zyklische Gruppen

Hilfssatz: Sei $G = \{\varepsilon, \pi, \pi^2, \dots, \pi^{m-1}\}$, ($\pi^m = \varepsilon$) eine zyklische Gruppe der Ordnung m . Ferner sei $d = \text{ggT}(k, m)$ der größte gemeinsame Teiler der positiven ganzen Zahlen $k \leq m$ und m . Dann erzeugen π^k und π^d dieselbe zyklische Untergruppe $U \subset G$; die Ordnung von U ist $\frac{m}{d}$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\text{ggT}(k, m) = d \Rightarrow k = k_1 d \wedge m = m_1 d$ mit

$1 = \text{ggT}(k_1, m_1)$. Es gilt also

$$d = \text{ggT}(k, m) \Rightarrow 1 = \text{ggT}\left(\frac{k}{d}, \frac{m}{d}\right) = \text{ggT}(k_1, m_1)$$

Daher gibt es ganze Zahlen α, β mit

$$\alpha k_1 + \beta m_1 = 1$$

Daher $\alpha k_1 d + \beta m_1 d = d \Rightarrow \underline{\alpha k + \beta m = d}$

Demnach gilt

$$\pi^d = \pi^{\alpha k + \beta m} = \pi^{\alpha k} \cdot \pi^{\beta m} = \pi^{\alpha k} \cdot (\pi^m)^\beta = \pi^{\alpha k} \cdot \varepsilon^\beta = \pi^{\alpha k}$$

Es gilt also

$$\pi^d = (\pi^k)^\alpha$$

d.h. π^d ist Element der von π^k erzeugten zyklischen Untergruppe von G
 \Rightarrow die von π^d erzeugte zyklische Untergruppe von G ist Untergruppe der von π^k erzeugten zyklischen Untergruppe U .

Andererseits gilt: $\pi^k = \pi^{k1d} = (\pi^d)^{k1}$, d.h. die von π^k erzeugte Untergruppe ist in der von π^d erzeugten Untergruppe enthalten, daher sind die beiden Untergruppen identisch.

Dabei gilt $(\pi^d)^{\frac{m}{d}} = \pi^m = \epsilon$, d.h. die Ordnung von U ist $\leq \frac{m}{d}$.

Sei nun $(\pi^d)^s = \epsilon$ mit $s < \frac{m}{d} \Rightarrow sd < m$ und es wäre $\pi^{sd} = \epsilon$ im Widerspruch zur Voraussetzung, daß die Ordnung von π gleich m ist.

π_1 und π_2 seien Elemente einer Permutationsgruppe, welche dieselbe zyklische Untergruppe erzeugen. Dann halten π_1 und π_2 dieselben Elemente fest und es gilt

$$\lambda_1(\pi_1) = \lambda_1(\pi_2)$$

Beweis: Da π_1 und π_2 dieselbe zyklische Untergruppe erzeugen, existieren ganze Zahlen α, β mit der Eigenschaft

$$\pi_1^\alpha = \pi_2 \text{ und } \pi_2^\beta = \pi_1$$

Sei nun i ein Fixelement unter π_1 :

$$\pi_1(i) = i \Rightarrow \pi_2(i) = \pi_1^\alpha(i) = \pi_1^{\alpha-1}(\pi_1(i)) = \pi_1^{\alpha-1}(i) = \dots = i$$

d.h. alle unter π_1 festen Elemente sind auch unter π_2 fest. Analog zeigt man die Umkehrung. Daher gilt $\lambda_1(\pi_1) = \lambda_1(\pi_2)$.

Sei G eine von π erzeugte zyklische Permutationsgruppe der Ordnung m . Dann ist die Anzahl der Orbits von G gleich

$$|O_G| = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \lambda_1(\pi^d) \cdot \varphi\left(\frac{m}{d}\right)$$

Hier ist φ die EULERSche Funktion und die Summation erfolgt über alle Teiler von m

Beweis: Wie oben gezeigt, erzeugen π^k ($0 < k \leq m$) und π^d mit $d = \text{ggT}(k, m)$ dieselbe zyklische Untergruppe U von G .

Auf wieviele Arten kann dieselbe zyklische Untergruppe $U \triangleleft G$ erzeugt werden?

Offenbar so oft, als man bei vorgegebenem d das k so wählen kann, daß gilt: $d = \text{ggT}(k, m)$, das ist aber dieselbe, für die gilt

$$1 = \text{ggT}\left(\frac{k}{d}, \frac{m}{d}\right) = \text{ggT}(k_1, \frac{m}{d})$$

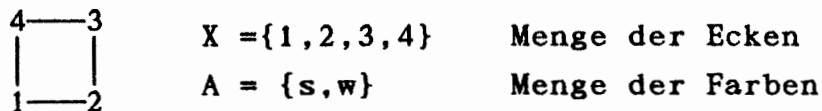
Das ist aber die Anzahl der k_1 , die zu $\frac{m}{d}$ teilerfremd sind. Diese

Anzahl wird nach Seite 130 durch die EULERSche Funktion $\varphi\left(\frac{m}{d}\right)$ festgelegt. Die Anzahl k_1 tritt also $\varphi\left(\frac{m}{d}\right)$ -mal auf. Daher nimmt die Formel von BURNSIDE die angegebene Gestalt an.

Der Satz von PóLYA

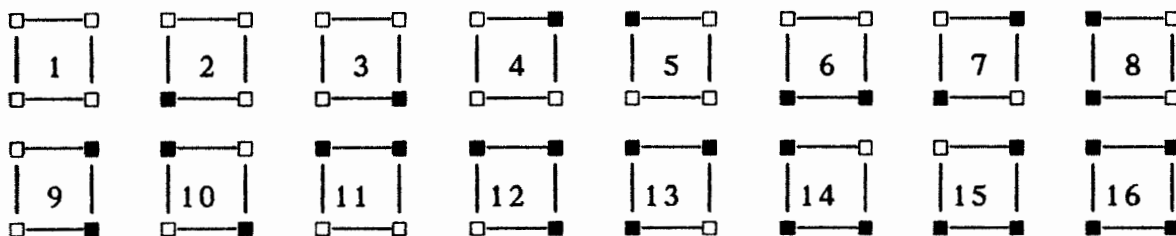
Georg PóLYA (1887-1985) 1937

Vorbereitendes Beispiel: Auf wieviele Arten kann man die vier Ecken eines Quadrats mit den Farben schwarz und weiß einfärben?



Da jede Ecke des Quadrats auf 2 Arten eingefärbt werden kann, gibt es insgesamt

$$2^4 = 16 \text{ Färbungen}$$



Wir betrachten nun jene Färbungen, die durch Drehungen des Quadrates ineinander übergeführt werden können als äquivalent. Sie bilden dasselbe *Muster (Schema)*.

In unserem Beispiel treten folgende äquivalente Muster auf:

$$1, 2 \cong 3 \cong 4 \cong 5, \quad 6 \cong 8 \cong 9 \cong 11, \quad 7 \cong 10, \quad 12 \cong 13 \cong 14 \cong 15, \quad 16$$

Daher gibt es folgende 6 Muster (Schemata)

$$M = \left\{ \begin{array}{c} \square \text{---} \square \\ | \quad | \\ \square \text{---} \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \text{---} \square \\ | \quad | \\ \blacksquare \text{---} \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \text{---} \square \\ | \quad | \\ \square \text{---} \blacksquare \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \text{---} \blacksquare \\ | \quad | \\ \square \text{---} \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \blacksquare \text{---} \blacksquare \\ | \quad | \\ \blacksquare \text{---} \blacksquare \end{array} \quad \begin{array}{c} \blacksquare \text{---} \blacksquare \\ | \quad | \\ \square \text{---} \blacksquare \end{array} \right\}$$

Wir können aber auch nach der Anzahl der *Kontrastmuster* fragen.

Dabei kommt es nur auf die Verteilung der Farben an den Ecken (ob eingefärbt oder nicht), nicht aber auf die Farben selbst an. In unserem Beispiel sind folgende Fälle bezüglich des Kontrastes äquivalent:

$$1 \cong 16, \quad 2 \cong 3 \cong 4 \cong 5 \cong 12 \cong 13 \cong 14 \cong 15, \quad 7 \cong 10, \quad 6 \cong 8 \cong 9 \cong 11$$

Es treten also folgende 4 Kontrastmuster auf

$$K = \left\{ \begin{array}{c} \square \text{---} \square \\ | \quad | \\ \square \text{---} \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \text{---} \square \\ | \quad | \\ \blacksquare \text{---} \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \text{---} \blacksquare \\ | \quad | \\ \blacksquare \text{---} \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \text{---} \square \\ | \quad | \\ \blacksquare \text{---} \blacksquare \end{array} \right\}$$

Wir betrachten nun eine Permutationsgruppe $G \subset S_n$ der Menge

$$X = \{1, 2, \dots, n\}$$

und eine Abbildung

$$\varphi: X \longrightarrow A$$

der Menge X in die Menge $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$. Die Elemente $a_i \in A$ nennen wir *Farben* und die Abbildung φ eine *Färbung*, d.h. jedes Element $i \in X$ wird mit der Farbe $\varphi(i)$ eingefärbt.

Ist $\pi \in G$, so stellt $\varphi \circ \pi$ gleichfalls eine Färbung dar. Zwei Färbungen φ_1 und φ_2 gehören demselben Muster an, wenn es eine Permutation $\pi \in G$ gibt, sodaß $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \pi$ ist. Wir schreiben dann $\varphi_2 \cong \varphi_1$. Die Relation \cong ist eine Äquivalenzrelation:

$$\varphi \cong \varphi, \text{ denn } \varphi = \varphi \circ \varepsilon$$

$$\varphi_2 \cong \varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 \cong \varphi_2 \text{ denn } \varphi_2 = \varphi_1 \circ \pi \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \circ \pi^{-1}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 \cong \varphi_2 \wedge \varphi_2 \cong \varphi_3 \Rightarrow \varphi_1 \cong \varphi_3 \text{ denn } \varphi_1 = \varphi_2 \circ \pi_1 \wedge \varphi_2 = \varphi_3 \circ \pi_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_3 \circ (\pi_2 \circ \pi_1) \Rightarrow \varphi_1 \cong \varphi_3 \end{aligned}$$

Diese Äquivalenzklassen heißen *Muster* oder *Schemata* (vgl. obiges Beispiel). Zwei Färbungen desselben Schemas werden als äquivalent (nicht unterscheidbar) betrachtet.

1. Beispiel: Färbung der Quadratecken. $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{w, s\}$

Drehungsgruppe des Quadrats $G = \{\varepsilon, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$

$$\varepsilon = (1)(2)(3)(4), \delta_1 = (1234), \delta_2 = (13)(24), \delta_3 = (1432)$$

$$\varphi \in \Phi = \text{Abb}(X, A)$$

φ_1	1 2 3 4	φ_5	1 2 3 4	φ_9	1 2 3 4	φ_{13}	1 2 3 4
	w w w w		w w w s		w s s w		s w s s
φ_2	s w w w	φ_6	s s w w	φ_{10}	w s w s	φ_{14}	s s w s
φ_3	w s w w	φ_7	s w s w	φ_{11}	w w s s	φ_{15}	s s s w
φ_4	w w s w	φ_8	s w w s	φ_{12}	w s s s	φ_{16}	s s s s

Bestimmung der Äquivalenzklassen (Muster)

$$\begin{array}{llllll} \varphi_1 \circ \varepsilon = \varphi_1 & \varphi_1 \circ \delta_1 = \varphi_1 & \varphi_1 \circ \delta_2 = \varphi_1 & \varphi_1 \circ \delta_3 = \varphi_1 & \{\varphi_1\} \\ \varphi_2 \circ \varepsilon = \varphi_2 & \varphi_2 \circ \delta_1 = \varphi_5 & \varphi_2 \circ \delta_2 = \varphi_4 & \varphi_2 \circ \delta_3 = \varphi_3 & \{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\} \\ \varphi_6 \circ \varepsilon = \varphi_6 & \varphi_6 \circ \delta_1 = \varphi_8 & \varphi_6 \circ \delta_2 = \varphi_{11} & \varphi_6 \circ \delta_3 = \varphi_9 & \{\varphi_6, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_{11}\} \\ \varphi_7 \circ \varepsilon = \varphi_7 & \varphi_7 \circ \delta_1 = \varphi_{10} & \varphi_7 \circ \delta_2 = \varphi_7 & \varphi_7 \circ \delta_3 = \varphi_{10} & \{\varphi_7, \varphi_{10}\} \\ \varphi_{12} \circ \varepsilon = \varphi_{12} & \varphi_{12} \circ \delta_1 = \varphi_{15} & \varphi_{12} \circ \delta_2 = \varphi_{14} & \varphi_{12} \circ \delta_3 = \varphi_{13} & \{\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{14}, \varphi_{15}\} \\ \varphi_{16} \circ \varepsilon = \varphi_{16} & \varphi_{16} \circ \delta_1 = \varphi_{16} & \varphi_{16} \circ \delta_2 = \varphi_{16} & \varphi_{16} \circ \delta_3 = \varphi_{16} & \{\varphi_{16}\} \end{array}$$

6 Muster

Eine ausführlichere Darstellung würde folgendermaßen aussehen:

Durch die Färbung φ werden den vier Ecken 1,2,3,4 die 4 Farben a,b,c,d zugeordnet.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{array}{c} \overline{4} \quad \overline{3} \\ \left| \begin{array}{cc} d & c \\ a & b \end{array} \right| \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array}$$

$$\varphi \circ \delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \begin{array}{c} \overline{3} \quad \overline{2} \\ \left| \begin{array}{cc} d & c \\ a & b \end{array} \right| \\ \underline{4} \quad \underline{1} \end{array}$$

$$\varphi \circ \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & d & a & b \end{pmatrix} \begin{array}{c} \overline{2} \quad \overline{1} \\ \left| \begin{array}{cc} d & c \\ a & b \end{array} \right| \\ \underline{3} \quad \underline{4} \end{array}$$

$$\varphi \circ \delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & a & b & c \end{pmatrix} \begin{array}{c} \overline{1} \quad \overline{4} \\ \left| \begin{array}{cc} d & c \\ a & b \end{array} \right| \\ \underline{2} \quad \underline{3} \end{array}$$

	1	2	3	4
φ	a	b	c	d
$\varphi \circ \delta_1$	b	c	d	a
$\varphi \circ \delta_2$	c	d	a	b
$\varphi \circ \delta_3$	d	a	b	c

2. Beispiel: Eine rote und zwei schwarze Kugeln sollen in drei unterscheidbare Schachteln a,b,c verteilt werden. Auf wieviele Arten ist dies möglich?

Wir ordnen den drei Kugeln s,r,r die drei Zahlen 1,2,3 zu und bilden die Menge $X = \{1,2,3\}$ und $A = \{a,b,c\}$. Da die Kugeln 2 und 3 als schwarze Kugeln nicht unterscheidbar sind, definieren wir auf X die Gruppe

$$G = \{\epsilon, \pi\}, \quad \epsilon = (1)(2)(3), \quad \pi = (1)(23)$$

Anzahl der Abbildungen $\varphi \in \Phi = \text{Abb}(X,A) \quad |\Phi| = 3^3 = 27$

φ_1	a a a	φ_6	a b c	φ_{11}	b a b	φ_{16}	b c a	φ_{21}	c a c	φ_{26}	c c b
φ_2	a a b	φ_7	a c a	φ_{12}	b a c	φ_{17}	b c b	φ_{22}	c b a	φ_{27}	c c c
φ_3	a a c	φ_8	a c b	φ_{13}	b b a	φ_{18}	b c c	φ_{23}	c b b		
φ_4	a b a	φ_9	a c c	φ_{14}	b b b	φ_{19}	c a a	φ_{24}	c b c		
φ_5	a b b	φ_{10}	b a a	φ_{15}	b b c	φ_{20}	c a b	φ_{25}	c c a		

Somit ergeben sich folgende 18 Muster als Möglichkeiten der Verteilung

$\varphi_1 \circ \varepsilon = \varphi_1$	$\varphi_1 \circ \pi = \varphi_1$	$\{\varphi_1\}$	$\varphi_{14} \circ \varepsilon = \varphi_{14}$	$\varphi_{14} \circ \pi = \varphi_{14}$	$\{\varphi_{14}\}$
$\varphi_2 \circ \varepsilon = \varphi_2$	$\varphi_2 \circ \pi = \varphi_4$	$\{\varphi_2, \varphi_4\}$	$\varphi_{15} \circ \varepsilon = \varphi_{15}$	$\varphi_{15} \circ \pi = \varphi_{17}$	$\{\varphi_{15}, \varphi_{17}\}$
$\varphi_3 \circ \varepsilon = \varphi_3$	$\varphi_3 \circ \pi = \varphi_7$	$\{\varphi_3, \varphi_7\}$	$\varphi_{18} \circ \varepsilon = \varphi_{18}$	$\varphi_{18} \circ \pi = \varphi_{18}$	$\{\varphi_{18}\}$
$\varphi_5 \circ \varepsilon = \varphi_5$	$\varphi_5 \circ \pi = \varphi_5$	$\{\varphi_5\}$	$\varphi_{19} \circ \varepsilon = \varphi_{19}$	$\varphi_{19} \circ \pi = \varphi_{19}$	$\{\varphi_{19}\}$
$\varphi_6 \circ \varepsilon = \varphi_6$	$\varphi_6 \circ \pi = \varphi_8$	$\{\varphi_6, \varphi_8\}$	$\varphi_{20} \circ \varepsilon = \varphi_{20}$	$\varphi_{20} \circ \pi = \varphi_{22}$	$\{\varphi_{20}, \varphi_{22}\}$
$\varphi_9 \circ \varepsilon = \varphi_9$	$\varphi_9 \circ \pi = \varphi_9$	$\{\varphi_9\}$	$\varphi_{21} \circ \varepsilon = \varphi_{21}$	$\varphi_{21} \circ \pi = \varphi_{25}$	$\{\varphi_{21}, \varphi_{25}\}$
$\varphi_{10} \circ \varepsilon = \varphi_{10}$	$\varphi_{10} \circ \pi = \varphi_{10}$	$\{\varphi_{10}\}$	$\varphi_{23} \circ \varepsilon = \varphi_{23}$	$\varphi_{23} \circ \pi = \varphi_{23}$	$\{\varphi_{23}\}$
$\varphi_{11} \circ \varepsilon = \varphi_{11}$	$\varphi_{11} \circ \pi = \varphi_{13}$	$\{\varphi_{11}, \varphi_{13}\}$	$\varphi_{24} \circ \varepsilon = \varphi_{24}$	$\varphi_{24} \circ \pi = \varphi_{26}$	$\{\varphi_{24}, \varphi_{26}\}$
$\varphi_{12} \circ \varepsilon = \varphi_{12}$	$\varphi_{12} \circ \pi = \varphi_{16}$	$\{\varphi_{12}, \varphi_{16}\}$	$\varphi_{27} \circ \varepsilon = \varphi_{27}$	$\varphi_{27} \circ \pi = \varphi_{27}$	$\{\varphi_{27}\}$

Sei $\pi \in G \subset S_n$ und sei $\lambda_i(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π mit der Länge i . Dann heißt das Polynom

$$P(G; x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} x_1^{\lambda_1(\pi)} x_2^{\lambda_2(\pi)} \dots x_n^{\lambda_n(\pi)}$$

der Zyklus-Index von G

Beispiel 1: $P(G; x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4} [x_1^4 + x_2^2 + 2x_4]$

Beispiel 2: $P(G; x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} [x_1^3 + x_1 x_2]$

Lemma von PóLYA

Gegeben sei die Menge $X = \{1, 2, \dots, n\}$ sowie die Menge der "Farben" $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$. Ferner sei $G \subset S_n$ eine Permutationsgruppe auf X . Ist M die Menge der Muster, dann ist die Anzahl $|M|$ der Muster bezüglich der Gruppe G gleich dem Wert des Zyklusindex $P(G, x_1, \dots, x_n)$ an der Stelle $x_1 = \dots = x_n = |A|$

$$|M| = P(G; \overbrace{r, r, \dots, r}^n)$$

Beispiel 1: $P(G; 2, 2, 2, 2) = \frac{1}{4} [2^4 + 2^2 + 2 \cdot 2] = 6$

Beispiel 2: $P(G; 3, 3, 3) = \frac{1}{2} [3^3 + 3 \cdot 3] = 18$

Beweis: Sei $\Phi = \text{Abb}(X, A)$ die Menge der Färbungen und $\varphi \in \Phi$ eine spezielle Färbung. Ferner sei π eine beliebige Permutation aus S_n . Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\pi}: \Phi &\longrightarrow \Phi \\ \varphi &\longmapsto \hat{\pi}(\varphi) := \varphi \circ \pi \end{aligned}$$

eine (wegen der Umkehrbarkeit von π) bijektive Selbstabbildung von Φ , daher eine Permutation der Elemente von Φ . Die Menge der Permutationen von Φ heie \hat{S} , also $\hat{\pi} \in \hat{S}$. Bei vorgegebenem π ist die Abbildung $\hat{\pi}$ eindeutig bestimmt. Daher existiert die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi: G &\longrightarrow \hat{S} \\ \pi &\longmapsto \psi(\pi) = \hat{\pi} \end{aligned}$$

ψ ist injektiv. Sei nämlich

$$\begin{aligned} \psi(\pi_1) = \psi(\pi_2) &\Rightarrow \hat{\pi}_1 = \hat{\pi}_2 \Rightarrow \bigwedge_{\varphi} \hat{\pi}_1(\varphi) = \hat{\pi}_2(\varphi) \Rightarrow \bigwedge_{\varphi} \varphi \circ \pi_1 = \varphi \circ \pi_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bigwedge_{\varphi} \bigwedge_i \varphi(\pi_1(i)) = \varphi(\pi_2(i)) \end{aligned}$$

Wir treffen die Annahme $\pi_1 \neq \pi_2$. Dann gilt $\bigvee_i \pi_1(i) = j \neq k = \pi_2(i)$.

Wäre dies möglich, müßte für alle φ gelten: $\varphi(j) = \varphi(k)$, obwohl $j \neq k$ ist. Dies bedeutet einen Widerspruch, da sich leicht eine Abbildung $\varphi(j) \neq \varphi(k)$ mit $j \neq k$ konstruieren läßt. Daher muß $\pi_1 = \pi_2$ sein.

Setzen wir

$$\psi(G) = \hat{G}$$

so gilt wegen der Injektivität

$$|\hat{G}| = |G|$$

Ferner ist \hat{G} eine Untergruppe von \hat{S} :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2 \in \hat{G} &\Rightarrow \hat{\pi}_2 \circ \hat{\pi}_1(\varphi) = \hat{\pi}_2(\hat{\pi}_1(\varphi)) = \hat{\pi}_2(\varphi \circ \pi_1) = \varphi \circ (\pi_1 \circ \pi_2) = \widehat{(\pi_1 \circ \pi_2)}(\varphi) \Rightarrow \\ &\hat{\pi}_2 \circ \hat{\pi}_1 \in \hat{G} \end{aligned}$$

Zwei Färbungen φ und φ' sind quivalent (gehören zu demselben

Muster), wenn gilt $\varphi' = \varphi \circ \pi$ ($\pi \in G$), wenn also $\varphi' = \hat{\pi}(\varphi)$, d.h. wenn φ und φ' demselben Orbit von \hat{G} angehören.

Für die Menge \hat{O}_G der Orbits von \hat{G} gilt nach BURNSIDE

$$|\hat{O}_G| = \frac{1}{|\hat{G}|} \sum_{\hat{\pi} \in \hat{G}} \lambda_1(\hat{\pi})$$

$\lambda_1(\hat{\pi})$ ist wieder die Anzahl der Zyklen der Länge 1 von $\hat{\pi}$. Nun stellt $\hat{\pi}$ eine Permutation von Φ dar

$$\hat{\pi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \dots & \varphi_i & \dots \\ \varphi_1 \circ \pi & \varphi_2 \circ \pi & \varphi_3 \circ \pi & \dots & \varphi_i \circ \pi & \dots \end{pmatrix}$$

Ein Zyklus von $\hat{\pi}$ der Länge 1 hat dann die Eigenschaft $\varphi_i = \varphi_i \circ \pi$. Es sei nun die Permutation π gegeben. Wie muß φ gebaut sein, damit

$$\varphi = \varphi \circ \pi$$

gilt?. Wir wollen das an einem Beispiel untersuchen.

Beispiel: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$.

$$\begin{aligned} \varphi: X &\longrightarrow A \\ i &\longmapsto b_i \in A \end{aligned}$$

Unter Einwirkung der Abbildung φ können natürlich einige oder alle der Zielelemente gleich sein. Es sei

$$\pi := (1573)(286)(4)$$

$$\varphi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi \circ \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 1 & 4 & 7 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ b_5 & b_8 & b_1 & b_4 & b_7 & b_2 & b_3 & b_6 \end{pmatrix} = \varphi \end{aligned}$$

Damit $\varphi \circ \pi = \varphi$ sei, muß gelten

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= b_5 = b_7 = b_3 =: a \\ b_2 &= b_8 = b_6 =: b \\ b_4 &= b_4 =: c \end{aligned} \right\} \in A$$

Man findet also

$$\varphi \circ \pi = \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ a & b & a & c & a & b & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 8 & 6 & 4 \\ a & a & a & a & b & b & b & c \end{pmatrix}$$

Soll also die Bedingung $\varphi \circ \pi = \varphi$ bei gegebenem π gelten, so müssen alle Elemente, die demselben Zyklus von π angehören, gleich eingefärbt werden. Da in obigem Beispiel drei Zyklen auftreten, für die gilt

$$\lambda_1(\pi) + \lambda_3(\pi) + \lambda_4(\pi) = 1 + 1 + 1$$

können die r Elemente aus A (mit Wiederholungen) auf die drei Zyklen verteilt werden. Das ergibt

$$r^3 = r^{\lambda_1(\pi) + \lambda_2(\pi) + \lambda_3(\pi)} = r^{\lambda_1(\pi) + \lambda_2(\pi) + \dots + \lambda_8(\pi)}$$

Möglichkeiten. Allgemeiner gilt:

Die Anzahl $\hat{\lambda}_1(\hat{\pi})$ der Zyklen der Länge 1 von $\hat{\pi}$ ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, bei gegebenem π die Färbungen φ so zu wählen, daß $\varphi \circ \pi = \varphi$ ist. Diese Anzahl ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, die r Farben $\in A$ auf die Zyklen von π aufzuteilen:

$$r^{\lambda_1(\pi) + \lambda_2(\pi) + \dots + \lambda_n(\pi)} = r^{\lambda_1(\pi)} \cdot r^{\lambda_2(\pi)} \cdot \dots \cdot r^{\lambda_n(\pi)}$$

Daher ist wegen $|G| = |G|$

$$\begin{aligned} |O_G^\wedge| &= \frac{1}{|G|} \sum_{\hat{\pi} \in \hat{G}} \lambda_1(\hat{\pi}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} r^{\lambda_1(\pi)} \cdot r^{\lambda_2(\pi)} \cdot \dots \cdot r^{\lambda_n(\pi)} \\ &= P(G; x_1, \dots, x_n) \Big|_{x_i=r} \end{aligned}$$

Die Anzahl der Muster von (X, A) bezüglich der Gruppe G ist

$$|M| = \frac{1}{|G|} \sum_{\hat{\pi} \in \hat{G}} \lambda_1(\hat{\pi})$$

Dabei ist $\lambda_1(\hat{\pi})$ die Anzahl der unter π invarianten Färbungen.

1. Beispiel: Auf wieviele Arten kann man (bis auf Drehungen) von den 4 Eckpunkten eines Quadrats zwei schwarz und zwei weiß einfärben?

Da die gewünschte Färbung φ drehungsinvariant sein soll, muß $\varphi \circ \pi = \varphi$ sein. In der Drehungsgruppe des Quadrats gibt es nur zwei mit dieser Forderung verträgliche Permutationen, nämlich ϵ und δ^2 .

Typus	Verträgliche Permutationen	Anzahl der Farbverteilungen
1^4	$\epsilon = (1)(2)(3)(4)$	$\left\{ \begin{array}{l} (w)(w)(s)(s) \\ (w)(s)(w)(s) \\ (w)(s)(s)(w) \\ (s)(w)(w)(s) \\ (s)(w)(s)(w) \\ (s)(s)(w)(w) \end{array} \right. \quad \frac{4!}{2!2!} = 6$

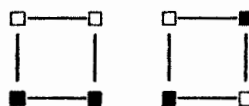
Zu ϵ gibt es also $\frac{4!}{2!2!} = 6$ Möglichkeiten auf invariante Weise zwei Eckpunkte weiß und zwei schwarz zu färben. Zu

$$2^2 \quad \delta^2 = (13)(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} (ww)(ss) \\ (ss)(ww) \end{array} \right. \quad 2! = 2$$

gibt es nur zwei drehungsinvariante Möglichkeiten. Wegen

$$|M| = \frac{1}{|G|} \sum_{\hat{\pi} \in \hat{G}} \lambda_1(\hat{\pi}) = \frac{1}{4} (6+2) = 2$$

gibt es 2 Möglichkeiten der gewünschten Färbung:



2.Beispiel: Auf wieviele Arten kann man eine Ecke eines Quadrats weiß und drei Ecken schwarz färben?

In der Drehungsgruppe des Quadrats gibt es nur eine verträgliche Permutation, nämlich ϵ :

Typus	Verträgliche Permutationen	Anzahl der Farbverteilungen
1^4	$\epsilon = (1)(2)(3)(4)$	$\frac{4!}{3!} = 4$

- $$\left\{ \begin{array}{l} (w)(s)(s)(s) \\ (s)(w)(s)(s) \\ (s)(s)(w)(s) \\ (s)(s)(s)(w) \end{array} \right.$$

Hiezu gibt es $\frac{4!}{3!} = 4$ Färbungen. Daher $\frac{1}{4} [4] = 1$ drehungsinvariante Möglichkeiten der Färbung:



3.Beispiel: Auf wieviele Arten kann man (bis auf Drehungen) von einem regelmäßigen Sechseck drei Ecken schwarz und drei Ecken weiß einfärben?

Die Drehungsgruppe des Sechsecks lautet:

$$\begin{array}{ll} \epsilon = (1)(2)(3)(4)(5)(6) & \delta^3 = (14)(25)(36) \\ \delta = (123456) & \delta^4 = (153)(264) \\ \delta^2 = (135)(246) & \delta^5 = (165432) \end{array}$$

Typus	Verträgliche Permutationen	Anzahl der Farbverteilungen
1^6	$\epsilon = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$	$\frac{6!}{3!3!} = 20$
3^2	$\delta^2 = (135)(246)$	$2! = 2$
3^2	$\delta^4 = (153)(264)$	$2! = 2$

Daher $\frac{1}{6} [20+2 \cdot 2] = 4$ Möglichkeiten der Färbung



4.Beispiel: Auf wieviele Arten kann man bei einem regelmäßigen Sechseck bis auf Drehungen eine Ecke weiß, zwei rot und drei schwarz färben?

Typus	Verträgliche Permutationen	Anzahl der Farbverteilungen
1^6	$\epsilon = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$	$\frac{6!}{2!3!} = 60$

Daher $\frac{1}{6} [60] = 10$ Möglichkeiten der Färbung



5. Beispiel: Auf wieviele Arten kann man von den vier Eckpunkten eines Tetraeders drehungsinvariant zwei schwarz und zwei weiß färben?

Typus	Verträgliche Permutationen	Anzahl der Farbverteilungen
1^4	$\epsilon = (1)(2)(3)(4)$	$\frac{4!}{2!2!} = 6$ Mögl.
2^2	$d_I = (12)(34)$	je 2 Möglichkeiten
2^2	$d_{II} = (14)(23)$	
2^2	$d_{III} = (13)(24)$	

insgesamt daher $\frac{1}{12} [6+3 \cdot 2] = 1$ Färbemöglichkeiten.

6. Beispiel: Auf wieviele Arten kann man von den sechs Kanten eines Tetraeders drei schwarz und drei weiß drehungsinvariant färben?

Typus	Verträgliche Permutationen	Anzahl der Farbverteilungen
1^6	$\epsilon = (\underline{1})(\underline{2})(\underline{3})(\underline{4})(\underline{5})(\underline{6})$	$\frac{6!}{3!3!} = 20$
3^2	$d_1 = (\underline{134})(\underline{265})$	Acht mal je 2! Möglichkeiten
...	
3^2	$d_4^2 = (\underline{132})(\underline{456})$	

insgesamt daher $\frac{1}{12} [20+8 \cdot 2!] = 3$ Färbemöglichkeiten.

7. Beispiel: Auf wieviele Arten kann man von den sechs Kanten eines Tetraeders eine weiß, eine rot, zwei schwarz und zwei blau färben?

Typus	Verträgliche Permutationen	Anzahl der Farbverteilungen
1^6	$\epsilon = (\underline{1})(\underline{2})(\underline{3})(\underline{4})(\underline{5})(\underline{6})$	$\frac{6!}{2!2!} = 180$
$1^2 2^2$	$d_I = (\underline{1})(\underline{24})(\underline{35})(\underline{6})$	je 2!2! Möglichkeiten
$1^2 2^2$	$d_{II} = (\underline{16})(\underline{2})(\underline{35})(\underline{4})$	
$1^2 2^2$	$d_{III} = (\underline{16})(\underline{24})(\underline{3})(\underline{5})$	

Insgesamt daher $\frac{1}{12} [180 + 3 \cdot 2!2!] = 16$ Färbemöglichkeiten

Auf Grund dieser Beispiele ergibt sich der Satz

Satz von PóLYA

Gegeben seien die Elemente $X = \{1, 2, \dots, n\}$ sowie die Farben $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$. Es sollen genau α_i Elemente von X die Farben a_i erhalten ($\sum \alpha_i = n$). Die Anzahl $|M|$ der Muster bezüglich der Gruppe $G \subset S_n$ ist dann

$$|M| = \frac{1}{|G|} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} v(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot f_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Hier ist $v(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ die Anzahl jener Permutationen $\in G$, deren Typus $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$ mit der geforderten Färbung verträglich ist und $f_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist die Anzahl der Färbungen, die auf den zulässigen Permutationen konstant sind.

Beispiel: Auf wieviele Arten kann man 6 Ecken des regelmäßigen Zwölfecks drehungsinvariant schwarz einfärben (für die restlichen 6 Ecken kann man sich die Farbe weiß denken)?

Die Drehungsgruppe des Zwölfecks lautet:

$$\epsilon = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)$$

$$\delta = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$$

$$\delta^2 = (1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11)(2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12)$$

$$\delta^3 = (1\ 4\ 7\ 10)(2\ 5\ 8\ 11)(3\ 6\ 9\ 12)$$

$$\delta^4 = (1\ 5\ 9)(2\ 6\ 10)(3\ 7\ 11)(4\ 8\ 12)$$

$$\delta^5 = (1\ 6\ 11\ 4\ 9\ 2\ 7\ 12\ 5\ 10\ 3\ 8)$$

$$\delta^6 = (1\ 7)(2\ 8)(3\ 9)(4\ 10)(5\ 11)(6\ 12)$$

$$\delta^7 = (1\ 8\ 3\ 10\ 5\ 12\ 7\ 2\ 9\ 4\ 11\ 6)$$

$$\delta^8 = (1\ 9\ 5)(2\ 10\ 6)(3\ 11\ 7)(4\ 12\ 8)$$

$$\delta^9 = (1\ 10\ 7\ 4)(2\ 11\ 8\ 5)(3\ 12\ 9\ 6)$$

$$\delta^{10} = (1\ 11\ 9\ 7\ 5\ 3)(2\ 12\ 10\ 8\ 6\ 4)$$

$$\delta^{11} = (1\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$$

Typus	V. Perm.	v	Verträgliche Belegungen	$f_{6,6}$
1^{12}	ϵ	1	(s)(s)(s)(s)(s)(s)(w)(w)(w)(w)(w)(w)	$\frac{12!}{6!6!}$
2^6	δ^6	1	(ss)(ss)(ss)(ww)(ww)(ww)	$\binom{6}{3}$
3^4	δ^4, δ^8	2	(sss)(sss)(www)(www)	$\binom{4}{2}$
6^2	δ^2, δ^{10}	2	(ssssss)(wwwwww)	2!

Daher existieren

$$\frac{1}{12} \cdot [1 \cdot \frac{12!}{6!6!} + 1 \cdot \binom{6}{3} + 2 \cdot \binom{4}{2} + 2 \cdot 2!] = \underline{80}$$

Färbungsmöglichkeiten.

Kontrastmuster

Gegeben sei die Menge $X = \{1, 2, \dots, n\}$ sowie die auf X wirkende Permutationsgruppe $G \subset S_n$. Ferner sei $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ die Menge der Farben, auf der gleichfalls eine Permutationsgruppe $H \subset S_A$ definiert ist (das Einselement von S_A heiÙe e). Es sei wieder $\Phi = \text{Abb}(X, A)$. Dann ist mit $\varphi \in \Phi$ auch

$$h \circ \varphi \circ \pi \quad (h \in H, \pi \in G)$$

eine Färbung $h \circ \varphi \circ \pi \in \Phi$.

Beispiel: $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{a, b, c, d\}$

$$h \circ \varphi \circ \pi = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ b & c & c & d & a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ c & d & c & b & a \end{pmatrix} \in \Phi$$

Wir suchen nun die *Kontrastmuster* bezüglich G und H , das sind jene Muster, die unter G und H invariant sind. Dazu betrachten wir die Menge $X \cup A$ ($X \cap A = \emptyset$) und auf dem kartesischen Produkt $G \times H$ die Permutationsgruppe

$$\bar{G} := G \times H$$

welche die Mengen X und A einzeln festläÙt:

$$(\pi, h) \in \bar{G} \wedge i \in X \Rightarrow (\pi, h)(i) := \pi(i) \in X$$

$$(\pi, h) \in \bar{G} \wedge a \in A \Rightarrow (\pi, h)(a) := h(a) \in A$$

Es sei nun $\Phi = \text{Abb}(X, A)$ die Menge aller Färbungen, und $\Phi_1 \subset \Phi$ die

Menge jener Färbungen, die bezüglich \bar{G} *abgeschlossen* und *treu* ist, d.h. es soll gelten

$$1. [(\pi, h) \in \bar{G} \wedge \varphi \in \Phi_1] \Rightarrow h \circ \varphi \circ \pi \in \Phi_1$$

$$2. [(\pi, h), (\pi', h') \in \bar{G} \wedge \bigwedge_{\varphi \in \Phi_1} h \circ \varphi \circ \pi = h' \circ \varphi \circ \pi'] \Rightarrow (\pi, h) = (\pi', h')$$

Zwei Färbungen $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ heißen *äquivalent bezüglich \bar{G}* wenn gilt

$$\varphi_1 \stackrel{\bar{G}}{\cong} \varphi_2 \Leftrightarrow \exists (\pi, h) \in \bar{G} \quad \varphi_2 = h \circ \varphi_1 \circ \pi$$

Tatsächlich handelt es sich um eine Äquivalenzrelation:

1. $\varphi \stackrel{\bar{G}}{\cong} \varphi$ denn $\varepsilon \circ \varphi \circ \varepsilon = \varphi$
2. $\varphi_1 \stackrel{\bar{G}}{\cong} \varphi_2 \Rightarrow \varphi_2 \stackrel{\bar{G}}{\cong} \varphi_1$ denn $\varphi_2 = h \circ \varphi_1 \circ \pi \Rightarrow \varphi_1 = h^{-1} \circ \varphi_2 \circ \pi^{-1}$
3. $\varphi_1 \stackrel{\bar{G}}{\cong} \varphi_2 \wedge \varphi_2 \stackrel{\bar{G}}{\cong} \varphi_3 \Rightarrow \varphi_1 \stackrel{\bar{G}}{\cong} \varphi_3$ denn $\varphi_2 = h_1 \circ \varphi_1 \circ \pi_1, \varphi_3 = h_2 \circ \varphi_2 \circ \pi_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \varphi_3 = (h_2 \circ h_1) \circ \varphi_1 \circ (\pi_1 \circ \pi_2)$

Die Äquivalenzklassen sind die *Muster (Schemata)* bezüglich \bar{G} . Von besonderer Bedeutung sind jene Färbungen, für die gilt

$$h \circ \varphi \circ \pi = \varphi$$

die also unter \bar{G} invariant sind.

Die Färbung $\varphi: X \rightarrow A$ ist genau dann unter $(\pi, h) \in \bar{G}$ invariant, wenn φ diejenigen Elemente von X , die demselben Zyklus von π mit der Länge ℓ angehören, in Elemente von A abbildet, die einem Zyklus von h angehören, dessen Länge k ein Teiler von ℓ ist.

Beweis: 1. Es gelte $h \circ \varphi \circ \pi = \varphi$, ferner gehöre $i \in X$ einem Zyklus von π der Länge ℓ an und es sei

$$\varphi(i) = a \in A \text{ und } \pi^\ell(i) = i$$

Dann gilt

$$h \circ \varphi \circ \pi(i) = \varphi(i) = a$$

$$h^2 \circ \varphi \circ \pi^2(i) = h \circ (h \circ \varphi \circ \pi) \circ \pi(i) = h \circ \varphi \circ \pi(i) = a$$

$$h^3 \circ \varphi \circ \pi^3(i) = h^2 \circ (h \circ \varphi \circ \pi) \circ \pi^2(i) = h^2 \circ \varphi \circ \pi^2(i) = a$$

.....

$$h^\ell \circ \varphi \circ \pi^\ell(i) = \underline{a} = h^\ell \circ \varphi(i) = \underline{h^\ell(a)}$$

Gehört demnach i einem Zyklus von π von der Länge ℓ an, dann gilt für die Farbe $\varphi(i) = a$:

$$h^\ell(a) = a$$

d.h. der Zyklus von h , dem a angehört, hat eine Länge, die ein Teiler von ℓ sein muß.

Beispiel: $\pi = \dots(i_1 i_2 i_3 i_4) \dots$, also $\ell = 4$ und es sei $\varphi(i_1) = a$. D.h. a muß demnach einem Zyklus von h angehören, dessen Länge k ein Teiler von $\ell = 4$ sein muß. Dann gibt es folgende Möglichkeiten:

$$k = 1 \quad \underbrace{\dots(a)\dots}_h \circ \underbrace{\left[\dots \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \dots \right]}_\varphi \circ \underbrace{\dots(i_1 i_2 i_3 i_4)\dots}_\pi =$$

$$= \dots \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \dots = \varphi$$

$$k = 2 \quad \dots(ba)\dots \circ \left[\dots \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ a & b & a & b \end{pmatrix} \dots \right] \circ \dots(i_1 i_2 i_3 i_4)\dots =$$

$$= \dots \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ a & b & a & b \end{pmatrix} \dots = \varphi$$

$$k = 4 \quad \dots(dcba)\dots \circ \left[\dots \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \dots \right] \circ \dots(i_1 i_2 i_3 i_4)\dots =$$

$$= \dots \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \dots = \varphi$$

Die ℓ Elemente des Zyklus von π werden in zyklischer Folge auf die k Elemente des Zyklus von h abgebildet

2. Die Umkehrung folgt sofort aus obigen Beispielen.

Sei $\Phi_1 \subset \text{Abb}(X, A)$ eine Menge von Abbildungen, für welche bezüglich der Gruppe $\bar{G} = G \times H$ gilt

$$[(\pi, h) \in \bar{G} \wedge \varphi \in \Phi_1] \Rightarrow h \circ \varphi \circ \pi \in \Phi_1$$

$$[(\pi, h), (\pi', h') \in \bar{G} \wedge \bigwedge_{\varphi \in \Phi_1} h \circ \varphi \circ \pi = h' \circ \varphi \circ \pi'] \Rightarrow (\pi, h) = (\pi', h')$$

Dann ist die Anzahl der Muster von Φ_1 bezüglich \bar{G} gleich

$$\frac{1}{|\bar{G}|} \cdot \sum_{(\pi, h) \in \bar{G}} \nu(\pi, h) \quad |\bar{G}| = |G| \cdot |H|$$

$\nu(\pi, h)$ ist die Anzahl der Färbungen $\varphi \in \Phi_1$, für welche gilt $h \circ \varphi \circ \pi = \varphi$.

Beweis: Sei $(\pi, h) \in \bar{G}$. Wir definieren eine Selbstabbildung von Φ_1 :

$$\begin{aligned} \psi(\pi, h): \Phi_1 &\longrightarrow \Phi_1 \\ \varphi &\longmapsto [\psi(\pi, h)](\varphi) := h \circ \varphi \circ \pi \end{aligned}$$

$\psi(\pi, h)$ ist injektiv.

$$[\psi(\pi, h)](\varphi_1) = [\psi(\pi, h)](\varphi_2) \Rightarrow [\psi(\pi, h)](\varphi_1)(i) = [\psi(\pi, h)](\varphi_2)(i) \Rightarrow \\ \Rightarrow h \circ \varphi_1 \circ \pi(i) = h \circ \varphi_2 \circ \pi(i)$$

Ist $\pi(i) = j$, so gilt $i = \pi^{-1}(j)$, daher

$$h \circ \varphi_1 \circ \pi(\pi^{-1}(j)) = h \circ \varphi_2 \circ \pi(\pi^{-1}(j)) \Rightarrow h \circ \varphi_1(j) = h \circ \varphi_2(j)$$

Daher gilt für alle j : $\varphi_1(j) = \varphi_2(j) \Rightarrow \underline{\varphi_1 = \varphi_2}$

Da Φ_1 eine endliche Menge ist, ist $\psi(\pi, h)$ auch surjektiv, daher auch bijektiv. Demnach sind die Abbildungen $\psi(\pi, h)$ Permutationen der Menge Φ_1 .

Die Anzahl der Muster von Φ_1 ist daher die Anzahl der Orbits von $\psi(\pi, h)$ bezüglich \bar{G} . Sie beträgt nach BURNSIDE

$$\frac{1}{|\bar{G}|} \cdot \sum_{(\pi, h) \in \bar{G}} \lambda_1(\psi(\pi, h))$$

worin $\lambda_1(\psi(\pi, h))$ die Anzahl aller $\varphi \in \Phi_1$ bedeutet, die unter $\psi(\pi, h)$ konstant sind, für welche also gilt $h \circ \varphi \circ \pi = \varphi$. Ist nun l die Länge eines Zyklus von π , so gilt für einen zugeordneten Zyklus von h nach dem vorhergehenden: $h^l(a) = a$ mit $\varphi(i) = a$, wobei i dem betrachteten l -Zyklus von π angehört. Daher ist wegen $\varphi(i) = h^l(\varphi(i))$:

$$\lambda_1(\psi(\pi, h)) =: \nu(\pi, h) \dots \text{Anzahl der Färbungen mit } h \circ \varphi \circ \pi = \varphi.$$

Sonderfall: Satz von PóLYA. Wir setzen $H = \{e\}$. Dann wird $G = G \times \{e\}$.

Es gilt für alle $h \circ \varphi \circ \pi = e \circ \varphi \circ \pi = \underline{\varphi \circ \pi = \varphi}$. Es ist dann $|\bar{G}| = |G|$ und Φ_1 ist die Menge aller Abbildungen $\varphi: X \rightarrow A$.

Beispiel: Anzahl der Kontrastmuster bei Färbung des Quadrats mit zwei Farben. Hier kommt es also auf die konkrete Färbung nicht an. Vertauschung der Farben gibt äquivalente Kontrastmuster. Die Vertauschung der Farben erfolgt durch die Gruppe

$$H = \{e, h\}, \quad e = (w)(s), \quad h = w, s,$$

Drehungsgruppe des Quadrats: $G = \{\epsilon, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$

$$\epsilon = (1)(2)(3)(4), \quad \delta = (1234), \quad \delta^2 = (13)(24), \quad \delta^3 = (1432)$$

$$\bar{G} = G \times H, \quad |\bar{G}| = |G| \cdot |H| = 4 \cdot 2 = 8$$

Wir haben nunmehr die Anzahl jener Färbungen zu bestimmen, für welche $h \circ \varphi \circ \pi = \varphi$ ist. Dabei müssen die Längen der Zyklen von h Teiler der Längen der Zyklen von π sein.

$\nu(\varepsilon, e) = 2^4$ ist die Anzahl der möglichen Färbungen, die unter (ε, e) invariant bleiben. Da man jede Quadratedecke mit 2 Farben belegen kann und sowohl jede Ecke unter ε , als auch jede Farbe unter e invariant bleibt, gibt es 2^4 Möglichkeiten.

$\nu(\varepsilon, h) = 0$, denn die Zykellänge von ε ist 1, die von h aber 2. 2 ist aber kein Teiler von 1.

$$\nu(\delta, e) \quad (1234) \quad \begin{array}{l} \text{---} \end{array} \begin{array}{l} (w) \\ (s) \end{array} \quad 2 \text{ Mögl. daher } \nu(\delta, e) = 2$$

$$\nu(\delta, h) \quad (1234) \quad \begin{array}{l} \text{---} \end{array} \begin{array}{l} (ws) \\ (sw) \end{array} \quad 2 \text{ Mögl. daher } \nu(\delta, h) = 2$$

$$\nu(\delta^2, e) \quad (13)(24) \quad \left[\begin{array}{l} (13) \text{---} \begin{array}{l} (w) \\ (s) \end{array} \quad 2 \text{ Mögl.} \\ (24) \text{---} \begin{array}{l} (w) \\ (s) \end{array} \quad 2 \text{ Mögl.} \end{array} \right] \varphi(\delta^2, e) = 2 \cdot 2 = 4 \text{ Mögl.}$$

$$\nu(\delta^2, h) \quad (13)(24) \quad \left[\begin{array}{l} (13) \text{---} \begin{array}{l} (ws) \\ (sw) \end{array} \quad 2 \text{ Mögl.} \\ (24) \text{---} \begin{array}{l} (ws) \\ (sw) \end{array} \quad 2 \text{ Mögl.} \end{array} \right] \varphi(\delta^2, h) = 2 \cdot 2 = 4 \text{ Mögl.}$$

$$\nu(\delta^3, e) \quad (1432) \quad \begin{array}{l} \text{---} \end{array} \begin{array}{l} (w) \\ (s) \end{array} \quad 2 \text{ Mögl. daher } \nu(\delta, e) = 2$$

$$\nu(\delta^3, h) \quad (1432) \quad \begin{array}{l} \text{---} \end{array} \begin{array}{l} (ws) \\ (sw) \end{array} \quad 2 \text{ Mögl. daher } \nu(\delta, h) = 2$$

Daher ist $\sum \nu(\pi, h) = 2^4 + 0 + 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 + 2 = 32$ Daher gibt es

$$\frac{1}{8} \sum \nu(\pi, h) = \frac{32}{8} = \underline{\underline{4 \text{ Kontrastmuster}}}$$

Man erkennt, daß die in obigem Beispiel eingeschlagene Methode bei einigermaßen umfangreichen Beispielen nicht anwendbar ist. Um die Größen $\nu(\pi, h)$ auf zweckmäßigere Weise zu bestimmen, gehen wir zunächst wie in obigem Beispiel vor. Nach dem Satz auf Seite 173 müssen die Elemente eines Zyklus der Länge 1 von π den Elementen eines Zyklus von h zugeordnet werden, dessen Länge k ein Teiler von 1 ist.

Es sei λ_1 die Anzahl der Zyklen der Länge 1 von π und μ_k die Anzahl der Zyklen der Länge k ($k|1$) von h . Dann gilt folgender Sachverhalt:

1. Jeder Zyklus der Länge 1 kann einem beliebigen Zyklus der Länge k von h zugeordnet werden ($k|1$).
2. Jeder Zyklus der Länge 1 kann einem speziellen Zyklus der Länge k auf k Arten zugeordnet werden:

$$(i_1 i_2 \dots i_1) \left\{ \begin{array}{l} (j_1 j_2 j_3 \dots j_k) \\ (j_2 j_3 j_4 \dots j_1) \\ \dots \dots \dots \\ (j_k j_1 j_2 \dots j_{k-1}) \end{array} \right\} \quad k \text{ M\"oglichkeiten}$$

Beispiel: $\pi = (1)(2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10\ 11\ 12)(13\ 14\ 15\ 16)$
 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_4 = 2$

$h = (a)(b)(c)(de)(fg)(hi)(jklm)$
 $\mu_1 = 3, \mu_2 = 3, \mu_4 = 1$

Zur Bestimmung der Anzahlen der $\nu(\pi, h)$ sind folgende Zuordnungen m\"oglich

$$1 = 1 \quad \left. \begin{array}{l} (1) \left[\begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \right] \mu_1 \text{ M\"ogl.} \\ (2) \left[\begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \right] \mu_1 \text{ M\"ogl.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Wegen der beliebigen} \\ \text{Zuordenbarkeit, insgesamt} \\ \mu_1^{\lambda_1} \text{ M\"oglichkeiten} \end{array}$$

$$1 = 2 \quad \left. \begin{array}{l} (34) \left[\begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \right] 1 \cdot \mu_1 \text{ M\"ogl.} \\ (34) \left[\begin{array}{l} (de) \\ (ed) \\ (fg) \\ (gf) \\ (hi) \\ (ih) \end{array} \right] 2 \cdot \mu_2 \text{ M\"ogl.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{F\"ur den Zweier-Zyklus} \\ \text{(34) gibt es insgesamt} \\ 1 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 \text{ M\"ogl.} \\ \text{Dasselbe gilt f\"ur die Zy-} \\ \text{klen (56) und (78). Daher} \\ \text{gibt es f\"ur } \lambda_2 \text{ Zweier-} \\ \text{Zyklen insgesamt} \\ (1 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2)^{\lambda_2} \text{ M\"ogl.} \end{array}$$

$$1 = 4 \quad \begin{array}{l} (9\ 10\ 11\ 12) \left[\begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \right] 1 \cdot \mu_1 \text{ M\"ogl.} \\ (9\ 10\ 11\ 12) \left[\begin{array}{l} (de) \\ (ed) \\ (fg) \\ (gf) \\ (hi) \\ (ih) \end{array} \right] 2 \cdot \mu_2 \text{ M\"ogl.} \\ (9\ 10\ 11\ 12) \left[\begin{array}{l} (jklm) \\ (klmj) \\ (lmjk) \\ (mjkl) \end{array} \right] 4 \cdot \mu_4 \text{ M\"ogl.} \end{array}$$

Daher gibt es f\"ur den Vierer-Zyklus (9 10 11 12) insgesamt $(1 \cdot \mu_1 + 2 \mu_2 + 4 \mu_4)$ M\"ogl. Dasselbe gilt f\"ur den Zyklus (13 14 15 16), daher treten zusammen

$$(1 \cdot \mu_1 + 2 \mu_2 + 4 \mu_4)^{\lambda_4} \text{ M\"oglichkeiten auf}$$

Da alle diese M\"oglichkeiten miteinander verkn\"upfbar sind, gibt es bei obigem Beispiel

$$\nu(\pi, h) = \mu_1^{\lambda_1} (1 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2)^{\lambda_2} (1 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_4)^{\lambda_4} \text{ M\"oglichkeiten.}$$

Man erkennt daß allgemein gilt:

Für eine Permutation $\pi \in G$ von Typ $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} 3^{\lambda_3} \dots r^{\lambda_r}$ und eine Permutation $h \in H$ von Typ $1^{\mu_1} 2^{\mu_2} 3^{\mu_3} \dots s^{\mu_s}$ ergibt sich

$$\nu(\pi, h) = \prod_1 \left(\sum_{k|l} k \cdot \mu_k \right)^{\lambda_l} =$$

$$= \mu_1^{\lambda_1} (1 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2)^{\lambda_2} (1 \cdot \mu_1 + 3 \cdot \mu_3)^{\lambda_3} (1 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_4)^{\lambda_4} \dots$$

In obiger Formel ist eventuell $0^0 := 1$ zu setzen.

Zur einfachen Berechnung dieses Ausdrucks erinnern wir an die Ableitung der Exponentialfunktion e^{cz} :

$$e^{cz}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) e^{cz} = c e^{cz}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 e^{cz} = c^2 e^{cz}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^3 e^{cz} = c^3 e^{cz} \dots$$

Allgemein

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^i e^{cz} = c^i e^{cz} \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^i e^{cz} \Big|_{z=0} = c^i$$

Dann gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{\lambda_1} e^{\mu_1 z_1} \Big|_{z_1=0} = \mu_1^{\lambda_1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^{\lambda_2} e^{\mu_1 z_2} \cdot e^{2\mu_2 z_2} \Big|_{z_2=0} = \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^{\lambda_2} e^{(\mu_1 + 2\mu_2) z_2} \Big|_{z_2=0} = (\mu_1 + 2\mu_2)^{\lambda_2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_3} \right)^{\lambda_3} e^{\mu_1 z_3} \cdot e^{3\mu_3 z_3} \Big|_{z_3=0} = \left(\frac{\partial}{\partial z_3} \right)^{\lambda_3} e^{(\mu_1 + 3\mu_3) z_3} \Big|_{z_3=0} = (\mu_1 + 3\mu_3)^{\lambda_3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_4} \right)^{\lambda_4} e^{\mu_1 z_4} \cdot e^{2\mu_2 z_4} \cdot e^{4\mu_4 z_4} \Big|_{z_4=0} = \left(\frac{\partial}{\partial z_4} \right)^{\lambda_4} e^{(\mu_1 + 2\mu_2 + 4\mu_4) z_4} \Big|_{z_4=0} =$$

$$= (\mu_1 + 2\mu_2 + 4\mu_4)^{\lambda_4}$$

..... usw.

Daher

$$\nu(\pi, h) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{\lambda_1} \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^{\lambda_2} \left(\frac{\partial}{\partial z_3} \right)^{\lambda_3} \left(\frac{\partial}{\partial z_4} \right)^{\lambda_4} \dots \right] \cdot$$

$$\left[e^{\mu_1(z_1 + z_2 + z_3 + \dots)} \cdot e^{2\mu_2(z_2 + z_4 + z_6 + \dots)} \cdot e^{3\mu_3(z_3 + z_6 + z_9 + \dots)} \dots \right.$$

$$\left. \dots e^{\mu_r(z_r + z_{2r} + z_{3r} + \dots)} \dots \right] \Big|_{z_1 = z_2 = z_3 = \dots = 0}$$

Nun haben wir zu bilden

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|G| \cdot |H|} \cdot \sum_{(\pi, h) \in \bar{G}} \nu(\pi, h) = \\ & = \frac{1}{|G| \cdot |H|} \cdot \sum_{(\pi, h)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{\lambda_1} \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^{\lambda_2} \dots \right] \cdot \left[e^{\mu_1(z_1+z_2+\dots)} e^{2\mu_2(z_2+z_4+\dots)} \dots \right] \Big|_{z_i=0} = \\ & = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{\lambda_1} \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^{\lambda_2} \dots \right] \cdot \frac{1}{|H|} \cdot \sum_h \left[e^{\mu_1(z_1+\dots)} e^{2\mu_2(z_2+\dots)} \dots \right] \Big|_{z_i=0} \end{aligned}$$

Da der Zyklusindex für π bzw. h in folgender Weise definiert war (Seite 165):

$$P(G; x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi} x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} \quad \text{bzw.} \quad P(H; x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{|H|} \sum_h x_1^{\mu_1} \dots x_m^{\mu_m}$$

kann man sagen

Die Anzahl der Äquivalenzklassen von $\bar{G} = G \times H$ ergibt die Auswertung des Ausdrucks

$$P(G; \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}) \cdot P(H; e^{(z_1+z_2+\dots)}, e^{2(z_2+z_4+\dots)}, \dots, e^{m(z_m+z_{2m}+\dots)})$$

an der Stelle $z_1 = z_2 = \dots = 0$

1. Beispiel: Kontrastmuster des Quadrats bei Einfärbung der Ecken mit zwei Farben

Gruppe der Färbungen: $H = \{e, h\}$, $e = (w)(s)$, $h = (w, s)$

$$P(H; x_1, x_2) = \frac{1}{2} [x_1^2 + x_2]$$

Drehungsgruppe des Quadrats: $G = \{\epsilon, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$

$$\epsilon = (1)(2)(3)(4), \quad \delta = (1234), \quad \delta^2 = (13)(24), \quad \delta^3 = (1432)$$

$$P(G; x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4} [x_1^4 + x_2^2 + 2x_4]$$

$$\bar{G} = G \times H, \quad |\bar{G}| = |G| \cdot |H| = 4 \cdot 2 = 8$$

Daraus

$$P(G; \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_4}) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^4 + \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z_4} \right) \right]$$

$$P(H; e^{(z_1+z_2+z_3+z_4)}, e^{2(z_2+z_4)}) = \frac{1}{2} \left[e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + e^{2(z_2+z_4)} \right]$$

daher

$$\frac{1}{8} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^4 + \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z_4} \right) \right] \cdot \underbrace{\left[e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + e^{2(z_2+z_4)} \right]}_Z =$$

$$= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^4 Z + \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 Z + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z_4} \right) Z \right]$$

Nun ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^4 Z = 2^4 e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + 0 \quad z_i = 0 \Rightarrow 2^4$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 Z = 2^2 e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + 2^2 e^{2(z_2+z_4)} \quad z_i = 0 \Rightarrow 2^2 + 2^2$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_4} \right) Z = 2 e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + 2 e^{2(z_2+z_4)} \quad z_i = 0 \Rightarrow 2[2 + 2]$$

Daher ist die Anzahl der Kontrastmuster

$$\frac{1}{8} [2^4 + 2^3 + 2^2 + 2(2 + 2)] = \underline{4}$$

2. Beispiel: Auf wieviele Arten kann man vier gleichartige Objekte in drei geichartige Schachteln verteilen?

$$\begin{array}{cccc|c|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & | & | \\ & \cdot & \cdot & \cdot & | & | \\ & & \cdot & \cdot & | & | \\ & & & \cdot & | & | \\ & & & & | & | \end{array}$$

Wir denken uns die vier Objekte zunächst als verschieden in eine Reihe ausgelegt. Jene, die in dieselbe Schachtel kommen, werden mit derselben Farbe eingefärbt. Da die Objekte gleich sind, spielt eine Permutation der Objekte keine Rolle:

$G = S_4$, $P(S_4) = \frac{1}{24} [x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4]$
 Ebenso werden die drei Farben nicht unterschieden. Wegen
 $H = \{(1)(2)(3), (123), (132), (1)(23), (2)(13), 3(12)\}$

gilt

$$P(H) = \frac{1}{6} [x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3]$$

Daher ist die Anzahl der Verteilungen

$$\frac{1}{24 \cdot 6} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^4 + 6 \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right) + 8 \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z_3} \right) + 3 \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 + 6 \left(\frac{\partial}{\partial z_4} \right) \right].$$

$$\cdot \left[e^{3(z_1+z_2+z_3+z_4)} + 3e^{(z_1+z_2+z_3+z_4)} \cdot e^{2(z_2+z_4)} + 2e^{z_3} \right] \Big|_{z_i=0}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^4 Z \Big|_{z_i=0} = 84, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right) Z \Big|_{z_i=0} = 36, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z_3} \right) Z \Big|_{z_i=0} = 12,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 Z \Big|_{z_i=0} = 36, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z_4} \right) Z \Big|_{z_i=0} = 12$$

Daher gibt es

$$\frac{1}{24 \cdot 6} [84 + 6 \cdot 36 + 8 \cdot 12 + 3 \cdot 36 + 6 \cdot 12] = \frac{576}{144} = 4 \text{ Möglichkeiten}$$

Hätten wir 4 gleiche Objekte auf 3 verschiedene Schachteln aufteilen wollen, so wäre eine bekannte Lösungsmöglichkeit

1	2	3	Schachteln
..	.	.	Objekte

$$\frac{6!}{2!3!} = \binom{6}{2} = 15 \text{ Möglichkeiten}$$

Nach PóLYA hätten wir zu setzen $H = \{e\} \Rightarrow P(H) = x_1^3$. Dann gilt für die Anzahl der Möglichkeiten:

$$\frac{1}{24} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^4 + 6 \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right) + 8 \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z_3} \right) + 3 \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 + 6 \left(\frac{\partial}{\partial z_4} \right) \right].$$

$$\cdot \left[e^{3(z_1+z_2+z_3+z_4)} \right] \Big|_{z_i=0} =$$

$$= \frac{1}{24} [81 + 6 \cdot 27 + 8 \cdot 9 + 3 \cdot 9 + 6 \cdot 3] = \frac{360}{24} = 15 \text{ Möglichkeiten}$$

3. Beispiel: Färbung der Ecken eines Quadrates mit drei Farben r, s, w.

Da der Zyklusindex des Quadrates (siehe oben)

$$\frac{1}{4} [x_1^4 + x_2^2 + 2x_4]$$

lautet, ist die Anzahl der drehungsinvarianten Färbungen nach dem Lemma von PóLYA

$$\frac{1}{4} [3^4 + 3^2 + 2 \cdot 3] = 24$$

Wir fragen nach der Anzahl der Kontrastmuster. Die Permutationsgruppe für die drei Farben r, s, w lautet

$$(r)(s)(w), (rsw), (rws), (r)(sw), (s)(rw), (w)(rs).$$

Daher ihr Zyklusindex

$$\frac{1}{6} [x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3]$$

Nach Seite 179 ergibt sich daher für die Anzahl der Kontrastmuster

$$\frac{1}{4} \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^4 + \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z_4} \right) \right] \cdot \frac{1}{6} \left[e^{3(z_1+z_2+z_3+z_4)} + 3e^{(z_1+z_2+z_3+z_4)} e^{2(z_2+z_4)} + 2e^{3z_3} \right] \Big|_{z_i=0} = 6$$

Wir legen uns nun die Frage vor, was es bedeutet, wenn wir an Stelle der vollen Permutationsgruppe der Farben nur die Untergruppe $(r)(s)(w), (rsw), (rws)$ angewendet hätten. Der Zyklusindex ist dann

$$\frac{1}{3} (x_1^3 + 2x_3)$$

Die Anzahl der nunmehr sich ergebenden "Kontraste" ist

$$\frac{1}{4} \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^4 + \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z_4} \right) \right] \cdot \frac{1}{3} \left[e^{3(z_1+z_2+z_3+z_4)} + 2e^{3z_3} \right] \Big|_{z_i=0} = 8$$

Hier werden nicht mehr die Kontrastwerte aller Farben miteinander verglichen (gleich oder verschieden), sondern nur mehr jene Kontraste, die sich bei zyklischer Vertauschung der Farben r, s, w ergeben.

Eine andere Interpretation ergibt sich, wenn man die Bezeichnungen r, s, w nicht mehr als Farben interpretiert, sondern als Benennungen der Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks. Dann stellt obige Rechnung die Lösung des Problems dar:

Auf wieviele Arten kann man die Ecken eines Quadrats auf die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks abbilden, wobei Drehungen beider Polygone keine Rolle spielen?

Gewichtung von Elementen, Funktionen und Mustern

Bisher konnten wir die *Anzahlen* der Muster unter verschiedenen Bedingungen ermitteln. Bei der bloßen *Abzählung* der Muster ergibt sich keine Aussage über die Art der Muster. Diese wird erst durch deren *Aufzählung* angegeben.

Zu diesem Zweck führen wir den Begriff des *Gewichts* des Elementes einer Menge ein. Gegeben sei etwa die Menge

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$$

der Farben. Dann können wir jeder Farbe ein *Gewicht*

$$W(a_i)$$

zuordnen. Das Gewicht eines Elementes kann eine Zahl oder eine Variable (Buchstabe) sein. Es ist zweckmäßig, die *Gewichtung* suggestiv zu wählen, etwa

$$\begin{array}{lll} A = \{a_1, a_2, a_3\} & W(a_1) = w & \text{"weiß"} \\ & W(a_2) = s & \text{"schwarz"} \\ & W(a_3) = r & \text{"rot"} \end{array}$$

Schreibt man von vornherein $A = \{w, s, r\}$, so kann man auch setzen

$$W(w) = w, W(s) = s, W(r) = r.$$

Definition: Die Summe der Gewichte der Elemente einer Menge heißt das *Inventar* (*inventory, store enumerator*) der Menge. Man schreibt

$$\text{inv } M := \sum_{a \in A} W(a)$$

Beispiel: $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $W(a_1) = w$, $W(a_2) = s$, $W(a_3) = r$

$$\text{inv } A = w+s+r$$

Aus dem Inventar erkennt man, daß man aus der Menge A ein weißes *oder* ein schwarzes *oder* ein rotes Element auswählen kann. Setzt man $W(a_i) = 1$, so erkennt man aus $\text{inv } A = 3$, daß drei Farben zur Verfügung stehen.

Setzt man $W(a_1) = w$, $W(a_2) = s$, $W(a_3) = w$, so ergibt sich

$$\text{inv } A = 2w+s$$

d.h. A beinhaltet zwei Elemente von Typus w und ein Element von Typus s .

Die Tatsache, daß man aus der Menge $\{a_1, a_2, a_3\}$ eines von drei Objek-

ten auswählen kann, wurde durch die erzeugende Funktion

$$a_1x + a_2x + a_3x = (a_1 + a_2 + a_3)x$$

ausgedrückt. Da im Folgenden ausschließlich der Fall eintritt, daß jedes Objekt genau einmal ausgewählt wird, kann man das x weglassen und mit $W(a_i) = a_i$ einfach schreiben $a_1+a_2+a_3$.

Es sei $X = \{1, 2, \dots, n\}$ und $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$. Wir betrachten die Färbung

$$\begin{aligned} \varphi: X &\longrightarrow A \\ i &\longmapsto \varphi(i) \in A \end{aligned}$$

Definition: Als *Gewicht* der Abbildung $\varphi: X \rightarrow A$ bezeichnet man das Produkt

$$W(\varphi) = \prod_{i \in X} W(\varphi(i))$$

der Gewichte der einzelnen Bilder unter φ .

Beispiel: Färbungen der Quadratecken mit zwei Farben (siehe Seite 163)

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{w, s\}, W(w) = w, W(s) = s, \Phi = \text{Abb}(X, A)$$

Wir ordnen die Färbungen nach ihrem Gewicht:

$$W(\varphi_1) = w^4$$

$$W(\varphi_2) = W(\varphi_3) = W(\varphi_4) = W(\varphi_5) = w^3s$$

$$W(\varphi_6) = W(\varphi_8) = W(\varphi_9) = W(\varphi_{11}) = w^2s^2$$

$$W(\varphi_7) = W(\varphi_{10}) = w^2s^2$$

$$W(\varphi_{12}) = W(\varphi_{13}) = W(\varphi_{14}) = W(\varphi_{15}) = ws^3$$

$$W(\varphi_{16}) = s^4$$

Die Menge $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{16}\}$ hat daher das Inventar

$$\text{inv } \Phi = \sum_{i=1}^{16} W(\varphi_i) = w^4 + 4w^3s + 6w^2s^2 + 4ws^3 + s^4 = (w+s)^4$$

$\text{inv } \Phi = (w+s)^4$ bedeutet, daß jede der vier Quadratecken weiß oder schwarz gefärbt wird. Aus obigen Beispiel erkennt man, daß alle Muster desselben Typs gleiches Gewicht haben, daß aber umgekehrt zwei Äquivalenzklassen desselben Typs nicht notwendig gleiche Muster entsprechen müssen. In obigem Beispiel gibt es etwa zwei verschiedene Muster mit demselben Gewicht w^2s^2 .

Es gilt allgemein

Die bezüglich einer Gruppe G äquivalenten Färbungen haben dasselbe Gewicht

Beweis: Sei $\Phi = \text{Abb}(X, A)$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, mit $\varphi_1 \stackrel{G}{\sim} \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_2 = \varphi_1 \circ \pi$
 Dann gilt

$$W(\varphi_2) = \prod_{i \in X} W(\varphi_2(i)) = \prod_{i \in X} W(\varphi_1 \circ \pi(i)) = \prod_{i \in X} W(\varphi_1(\pi(i))) = \prod_{i \in X} W(\varphi_1(i)) = W(\varphi_1)$$

Da nämlich $\pi(i)$ alle Elemente von X durchläuft, stellt das letzte Produkt nur eine Änderung der Reihenfolge der Faktoren des vorletzten Produktes dar.

Definition: Das *Gewicht eines Musters* $m = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$ ist gleich dem Gewicht der Färbung eines Elementes der das Muster bildenden Äquivalenzklasse:

$$W(m) = W(\varphi_1) = W(\varphi_2) = \dots = W(\varphi_s)$$

 Daher

$$W(m) = \frac{1}{|m|} \cdot \sum_{\varphi \in m} W(\varphi) = \frac{1}{|m|} \cdot \text{inv } m$$

1. Beispiel: 3 verschiedene Kugeln sollen in den Farben weiß und schwarz eingefärbt werden, wobei zwei Sorten von schwarzer Farbe zur Verfügung stehen, nämlich eine billige Farbe (Gewicht s_1) und eine teure Farbe (Gewicht s_2). Das Farbeninventar ist daher

$$w + s_1 + s_2$$

Das Inventar der möglichen Färbungen ist

$$(w + s_1 + s_2)^3 = w^3 + s_1^3 + s_2^3 + 3w^2s_1 + 3w^2s_2 + 3ws_1^2 + 3ws_2^2 + 3s_1^2s_2 + 3s_1s_2^2 + 6ws_1s_2 \quad (*)$$

Daraus entnimmt man, daß etwa wegen $3s_1^2s_2$ die drei verschiedenen Kugeln auf 3 Arten so gefärbt werden können, daß zwei Kugel auf billige und eine auf teure Art schwarz bemalt werden können. Interessiert von allen in (*) aufgezählten Möglichkeiten nur diese einzige, so hätte man in

$$(w + s_1 + s_2)^3 = \sum_{\substack{i, j, k=1 \\ i+j+k=3}}^3 \frac{3!}{i!j!k!} w^i s_1^j s_2^k$$

nur den Koeffizienten von $s_1^2 s_2$ mit $i = 0, j = 2, k = 1$, somit

$$\frac{3!}{0!2!1!} = 3$$

aufsuchen müssen.

Gäbe es nur eine schwarze Farbe, dann wäre das Inventar des Musters

$$(w+s)^3 = w^3 + 3w^2s + 3ws^2 + s^3 \quad (\#)$$

Gewichten wir hingegen beide schwarze Farben gleich $s_1 = s_2 = s$, so wäre das Inventar

$$(w+2s)^3 = w^3 + 6w^2s + 12ws^2 + 8s^3$$

Dies bedeutet etwas völlig anderes als (#): Die Einfärbung mit derselben schwarzen Farbe ist auf zwei Arten möglich, etwa durch Beauftragung zweier verschiedener Firmen.

2.Beispiel: Acht Personen ($X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$) planen Ferienreisen, wobei drei Ziele $A = \{a,b,c\}$ in Frage kommen. Nun gehören die Personen 1,2,3 bzw.4,5 derselben Familie an, die jeweils dasselbe Reiseziel wählen wollen. Die "Singles" 6,7,8 können jeweils unabhängig voneinander ihr Reiseziel wählen. Ordnen wir den Reisezielen die Gewichte

$$W(a) = \alpha, W(b) = \beta, W(c) = \gamma$$

zu und bedeutet

$$\varphi: X \longrightarrow A$$

die Auswahl der Reiseziele, welche die Personenmenge X trifft, so kommt z.B für die Personengruppe 1,2,3 nur eine der folgenden Auswahlen ("Färbungen") in Frage

$$\varphi_1: \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}} \right\} a \quad \text{oder} \quad \varphi_2: \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}} \right\} b \quad \text{oder} \quad \varphi_3: \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}} \right\} c$$

Das Gewicht obiger Abbildungen, eingeschränkt auf die Elemente 1,2,3, ist definitionsgemäß

$$W(\varphi_1) = \prod_1^3 W(\varphi(i)) = \alpha^3, \text{ analog } W(\varphi_2) = \beta^3, W(\varphi_3) = \gamma^3$$

Das Inventar der Reiseziele für die erste Familie $\{1,2,3\}$ ist daher

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

Analog für die Familie $\{4,5\}$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

Jede der Einzelpersonen 6,7,8 hat dann die Wahl, nach
a oder b oder c

zu reisen. Das Inventar für jeden Single ist damit

$$\alpha + \beta + \gamma$$

Daher ist das Inventar aller Reisemöglichkeiten $\Phi = \text{Abb}(X, A)$

$$\text{inv } \Phi = (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha + \beta + \gamma)^3 \quad (\ddagger)$$

da die Reisewünsche der verschiedenen Personengruppen unabhängig voneinander verknüpft werden können.

Wir stellen nun die Frage: auf wieviele Arten kann unter den beschriebenen Voraussetzungen eine Person nach a, 4 Personen nach b und drei Personen nach c fahren?

In der Entwicklung des Inventars (\ddagger) entspricht dieser Annahme der Summand

$$\alpha\beta^4\gamma^3$$

Wir haben also den Koeffizienten dieses Summanden zu bestimmen. Von der Entwicklung der ersten beiden Faktoren ist nur

$$\beta^3\gamma^2 + \beta^2\gamma^3$$

zu berücksichtigen. Der gewünschte Koeffizient ergibt sich daher aus

$$\begin{aligned} (\beta^3\gamma^2 + \beta^2\gamma^3)(\alpha + \beta + \gamma)^3 &= (\beta^3\gamma^2 + \beta^2\gamma^3) \cdot \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i+j+k=3}}^3 \frac{3!}{i!j!k!} \alpha^i \beta^j \gamma^k = \\ &= \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i+j+k=3}}^3 \frac{3!}{i!j!k!} \alpha^i \beta^{j+3} \gamma^{k+2} + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i+j+k=3}}^3 \frac{3!}{i!j!k!} \alpha^i \beta^{j+2} \gamma^{k+3} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{i=1, j=1, k=1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{i=1, j=2, k=0} \end{aligned}$$

Daher lautet der gesuchte Koeffizient

$$\frac{3!}{1!1!1!} + \frac{3!}{1!2!0!} = 6 + 3 = \underline{9}$$

Die gewünschten Reisen sind also auf folgende Arten möglich

$$\begin{array}{l}
\varphi: 1 \mapsto \beta \\
2 \mapsto \beta \\
3 \mapsto \beta \\
4 \mapsto \gamma \\
5 \mapsto \gamma \\
6 \mapsto \alpha \\
7 \mapsto \beta \\
8 \mapsto \gamma
\end{array}
\left. \vphantom{\begin{array}{l} \varphi: 1 \mapsto \beta \\ \dots \\ 8 \mapsto \gamma \end{array}} \right\} 3! = 6 \text{ Mögl.}$$

$$\begin{array}{l}
\varphi: 1 \mapsto \gamma \\
2 \mapsto \gamma \\
3 \mapsto \gamma \\
4 \mapsto \beta \\
5 \mapsto \beta \\
6 \mapsto \alpha \\
7 \mapsto \beta \\
8 \mapsto \beta
\end{array}
\left. \vphantom{\begin{array}{l} \varphi: 1 \mapsto \gamma \\ \dots \\ 8 \mapsto \beta \end{array}} \right\} 3 \text{ Mögl.}$$

Obige Beispiele illustrieren allgemeine Sätze, die nun hergeleitet werden sollen.

Sei $\Phi = \text{Abb}(X, A)$. Dann gilt

$$\text{inv } \Phi = (\text{inv } A)^{|X|}$$

Beispiel: Auf Seite 184 war $\text{inv } \Phi = (w+s)^4 = (\text{inv } A)^{|X|}$

Beweis: Es sei $X = \{1, \dots, n\}$, $|X| = n$, $A = \{a_1, \dots, a_r\}$, $|A| = r$

$$W(a_i) = a_i, \quad \Phi = \text{Abb}(X, A), \quad |\Phi| = r^n$$

Definitionsgemäß ist dann

$$\begin{aligned}
\text{inv } \Phi &= \sum_{\varphi \in \Phi} W(\varphi) = \sum_{\varphi \in \Phi} \left(\prod_{i \in X} W(\varphi(i)) \right) = \sum_{j=1}^{|\Phi|} \left(\prod_{i=1}^n W(\varphi_j(i)) \right) = \\
&= \sum_{j=1}^{|\Phi|} W(\varphi_j(1)) W(\varphi_j(2)) W(\varphi_j(3)) \dots W(\varphi_j(n))
\end{aligned}$$

Nun untersuchen wir den Ausdruck

$$(\text{inv } A)^{|X|} = \left(\sum_{a \in A} W(a) \right)^n = \underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_r)(a_1 + a_2 + \dots + a_r) \dots (a_1 + a_2 + \dots + a_r)}_{n \text{ Faktoren}} \quad (*)$$

Das Produkt der n Faktoren kommt so zustande, daß aus jedem Faktor der rechten Seite von $(*)$ ein Element ausgewählt wird (bei jedem Faktor auf r Arten möglich). Wird z.B. aus dem i -ten Faktor das Element a_{j_i} ausgewählt, so ist das Produkt $a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_n}$ ein Summand der Entwicklung. Insgesamt besteht daher die Entwicklung der rechten Seite von $(*)$ aus r^n Summanden. Das ist aber genau die Anzahl $|\Phi|$ der Abbildungen φ .

Umgekehrt können wir jedem Summanden der Entwicklung von $(*)$ eine Abbildung $\varphi: X \rightarrow A$ zuordnen:

Wählen wir aus dem i -ten Faktor den Summanden a_j und definieren

$$\varphi(i) := a_j$$

so wird dadurch in eindeutiger Weise jedem i ein a_j zugeordnet

und dadurch eine Abbildung φ festgelegt. Das Gewicht der Abbildung φ ist dann definitionsgemäß

$$W(\varphi) = \prod_{i=1}^n W(\varphi(i))$$

Aufsummierung ergibt

$$\sum_{\varphi \in \Phi} W(\varphi) = \text{inv } \Phi$$

Damit ist $\text{inv } \Phi = (\text{inv } A)^{|X|}$ nachgewiesen.

Die Menge X werde in k untereinander fremde Teilmengen zerlegt

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k \quad X_i \cap X_j = \emptyset$$

Φ_1 sei jene Teilmenge aller Abbildungen $\Phi = \text{Abb}(X, A)$, welche auf jeder Teilmenge X_i konstant sind. Dann gilt

$$\text{inv } \Phi_1 = \prod_{i=1}^k \left(\sum_{a \in A} W(a)^{|X_i|} \right)$$

Beispiel: (Seite 186) $X = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\} \cup \{6\} \cup \{7\} \cup \{8\}$, $A = \{a, b, c\}$

$$W(a) = \alpha, W(b) = \beta, W(c) = \gamma$$

$$\varphi_1(X_1) = \{a\}, W(a) = \alpha, W(a)^{|X_1|} = W(a)^3 = \alpha^3$$

$$\varphi_2(X_1) = \{b\}, W(b) = \beta, W(b)^{|X_1|} = W(b)^3 = \beta^3$$

$$\varphi_3(X_1) = \{c\}, W(c) = \gamma, W(c)^{|X_1|} = W(c)^3 = \gamma^3$$

Hier ist $r = 3$, daher

$$\sum_{j=1}^3 W(a_{j1})^{|X_1|} = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

Analoges gilt für die anderen Teilmengen. Daher

$$\text{inv } \Phi_1 = (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)$$

Beweis: Es sei $X = \{1, 2, \dots, n\} = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ $X_i \cap X_j = \emptyset$

$$|X| = n, X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}\}, |X_i| = n_i, n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

$$\varphi \in \Phi_1 \quad \varphi: X \rightarrow A, \varphi(X_i) = \{a_i\} \quad a_i \in A$$

$$\varphi(x_i) = a_i$$

Da das Bild a_i nur von der Teilmenge X_i abhängt, können wir die durch die Indizes i der Teilmengen X_i definierte Abbildung ψ einführen:

$$\begin{aligned} \psi: \{1, 2, \dots, k\} &\longrightarrow A \\ \psi(i) &\longmapsto a_i \quad i = 1, \dots, k \text{ (Indizes der } X_i) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Ausdruck

$$\prod_{i=1}^k \left(\sum_{a \in A} W(a)^{|X_i|} \right) = \left[W(a_1)^{n_1} + W(a_2)^{n_1} + \dots + W(a_r)^{n_1} \right] \quad (\#)$$

$$\cdot \left[W(a_1)^{n_2} + W(a_2)^{n_2} + \dots + W(a_r)^{n_2} \right] \cdots \left[W(a_1)^{n_k} + W(a_2)^{n_k} + \dots + W(a_r)^{n_k} \right]$$

Eine Abbildung ψ können wir dadurch festlegen, daß wir aus dem i -ten Faktor obigen Produktes je ein Element a_{j_i} auswählen. Dann ist ψ durch

$$\begin{aligned} \psi(1) &= a_{j_1} \\ \psi(2) &= a_{j_2} \\ &\dots\dots\dots \\ \psi(k) &= a_{j_k} \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt. Entwickeln wir das Produkt $(\#)$, so hat jeder der entstehenden Summanden die Gestalt

$$W(\psi(1))^{n_1} W(\psi(2))^{n_2} \dots W(\psi(k))^{n_k} = \prod_{i=1}^k W(\psi(i))^{n_i}$$

Entwicklung eines Einzelfaktors ergibt

$$W(\psi(i))^{n_i} = \underbrace{W(\psi(i)) \cdot W(\psi(i)) \dots W(\psi(i))}_{n_i \text{ Faktoren}}$$

Da definitionsgemäß alle n_i Elemente $x_{ij} \in X_i$ unter φ dasselbe Bild

$$\psi(i) = a_{j_i} = \varphi(x_{i1}) = \varphi(x_{i2}) = \dots = \varphi(x_{in_i})$$

haben, ist

$$W(\psi(i))^{n_i} = W(\varphi(x_{i1})) W(\varphi(x_{i2})) \dots W(\varphi(x_{in_i})) = \prod_{l=1}^{n_i} W(\varphi(x_{il}))$$

Daraus folgt definitionsgemäß für das Gewicht der Abbildung ψ

$$\prod_{i=1}^k W(\psi(i))^{n_i} = \prod_{i=1}^k \prod_{l=1}^{n_i} W(\varphi(x_{il})) = \underline{W(\varphi)}$$

Das doppelte Produkt in der Mitte des obigen Ausdrucks stellt das Produkt über die Gewichte aller Bilder von X unter der Färbung φ dar. Damit ist es definitionsgemäß das Gewicht $W(\varphi)$ der Abbildung φ . $W(\varphi)$ ist ein Summand der Entwicklung $(\#)$. Aufsummieren über alle Summanden $\varphi \in \Phi$ ergibt dann definitionsgemäß

das Inventar von Φ :

$$\prod_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{r_i} W(a_{j_i})^{|X_i|} \right) = \sum_{\varphi \in \Phi} W(\varphi) = \text{inv } \Phi_1$$

Der Hauptsatz von PóLYA

Das Inventar der Menge M der Muster von $\Phi = \text{Abb}(X, A)$ bezüglich der Gruppe G ist

$$\text{inv } M = \sum_{M \subset \Phi} W(M) = P(G; \sum_{a \in A} W(a), \sum_{a \in A} W(a)^2, \sum_{a \in A} W(a)^3, \dots, \sum_{a \in A} W(a)^n)$$

$P(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ist der Zyklusindex der Gruppe G

Beweis:

Zwei Abbildungen (Färbungen) $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi = \text{Abb}(X, A)$ sind äquivalent bezüglich G (gehören demselben Muster m an), wenn gilt

$$\varphi_2 = \varphi_1 \circ \pi, \quad \pi \in G$$

Dann ist auch $W(\varphi_2) = W(\varphi_1)$. Umgekehrt folgt aber *nicht*, daß gleichgewichtige Färbungen auch dasselbe Muster darstellen.

Es sei $\Phi_\gamma \subset \Phi$ die Menge aller Färbungen mit demselben Gewicht γ

$$\varphi \in \Phi_\gamma \Leftrightarrow W(\varphi) = \gamma$$

Wir zerlegen Φ_γ in Äquivalenzklassen (Muster), die alle dasselbe Gewicht γ haben:

$$\Phi_\gamma = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_s, \quad W(M_i) = \gamma, \quad M_i \neq M_j$$

Daher gilt

$$\varphi \in M_i \Rightarrow \varphi \circ \pi \in M_i, \quad \pi \in G, \quad i = 1, \dots, s$$

Alle Färbungen $\varphi \in M_i$ gehören daher demselben Orbit an (d.h. sie lassen sich durch Permutationen aus G ineinander überführen).

Nach BURNSIDE gilt daher für die Anzahl der in Φ_γ enthaltenen Orbits

$$s = |\mathcal{O}_{\Phi_\gamma}| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \lambda_\gamma(\pi)$$

Hier stellt λ_γ die Anzahl der Färbungen φ mit demselben Gewicht $W(\varphi) = \gamma$ dar, die unter π konstant bleiben, für die also gilt $\varphi \circ \pi = \varphi$. Da jedes Muster von Φ_γ dasselbe Gewicht hat, ist das Gesamtgewicht aller Muster mit dem Einzelgewicht γ :

$$s\gamma = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \lambda_\gamma(\pi) \cdot \gamma$$

Summiert man über alle möglichen Gewichte γ , so erhält man das Muster-Inventar der in Φ enthaltenen Muster

$$\begin{aligned} \text{inv } M &= \sum_{M \in \Phi} W(M) = \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma} \sum_{\pi \in G} \lambda_\gamma(\pi) \cdot \gamma = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \sum_{\gamma} (\lambda_\gamma(\pi) \cdot \gamma) \\ &= \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \sum_{\varphi \circ \pi = \varphi} W(\varphi) \quad (**) \end{aligned}$$

Durch jedes π wird X in Zyklen zerlegt

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k \quad X_i \cap X_j = \emptyset$$

Ist $\varphi = \varphi \circ \pi$, so gilt diese Invarianz auch über jedem Zyklus von π . Gehört nämlich x_i dem Zyklus X_i an, so gilt für diesen Zyklus

$$X_i = \{x_i, \pi(x_i), \pi^2(x_i), \dots\}$$

Ist nun gemäß der Voraussetzung

$$\varphi \circ \pi = \varphi \Rightarrow \underline{\varphi(\pi(x_i))} = \varphi \circ \pi(x_i) = \underline{\varphi(x_i)}$$

$$\underline{\varphi(\pi^2(x_i))} = \varphi \circ \pi^2(x_i) = \underbrace{(\varphi \circ \pi)}_{\varphi} \circ \pi(x_i) = \varphi \circ \pi(x_i) = \underline{\varphi(x_i)} \text{ usw.}$$

.....usw.

Daher kann man die in (**) auftretende Summe

$$\sum_{\varphi \circ \pi = \varphi} W(\varphi)$$

für ein bestimmtes π auch aufteilen auf die Zyklen von π . Für das Inventar der Menge Φ_1 aller Abbildungen, die über den zueinander fremden Teilmengen X_i konstant sind, folgt nach Seite 189

$$\text{inv } \Phi_1 = \prod_{i=1}^k \left(\sum_{a \in A} W(a)^{|X_i|} \right) = \sum_{\varphi \circ \pi = \varphi} W(\varphi) \quad (*)$$

Diesen Ausdruck wollen wir auswerten. Es sei π eine Permutation vom Typus $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$,

d.h. es gibt

λ_1 Zyklen der Länge 1

λ_2 Zyklen der Länge 2

.....

λ_n Zyklen der Länge n

Der Exponent $|X_i|$ von (*) gehört zu einer Teilmenge von X , das ist aber ein Zyklus der Länge $|X_i| =: l_i$. Dann ergibt sich für die Summe

$$\sum_{a \in A} W(a)^{|X_i|} = \sum_{a \in A} W(a)^{l_i}$$

Da die Zykluslänge l_i aber λ_{l_i} -mal vorkommt, tritt diese Summe in (*) λ_{l_i} -mal als Produkt auf. Daher nimmt (*) die Gestalt an

$$\begin{aligned} \text{inv } \Phi_1 &= \prod_{i=1}^k \left(\sum_{a \in A} W(a)^{|X_i|} \right) = \\ &= \left(\sum_{a \in A} W(a)^1 \right)^{\lambda_1} \left(\sum_{a \in A} W(a)^2 \right)^{\lambda_2} \dots \left(\sum_{a \in A} W(a)^n \right)^{\lambda_n} \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$x_i = \sum_{a \in A} W(a)^i$$

so erhält obiges Produkt die Gestalt

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$$

Summation über alle $\pi \in G$ ergibt

$$\sum_{\pi \in G} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} = |G| \cdot P(G; x_1, \dots, x_n)$$

den mit $|G|$ multiplizierten Zyklusindex von G . Daher ist wegen (**)

$$\text{inv } M = P(G; \sum_{a \in A} W(a), \sum_{a \in A} W(a)^2, \sum_{a \in A} W(a)^3, \dots, \sum_{a \in A} W(a)^n)$$

Beispiel: Inventar der Quadratfärbungen.

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{s, w\}, W(w) = w, W(s) = s$$

$$P(G; x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4} [x_1^4 + x_2^2 + 2x_4]$$

Nach PóLYA haben wir zu setzen:

$$x_1 = w+s, x_2 = w^2+s^2, x_3 = w^3+s^3, x_4 = w^4+s^4$$

$$\text{inv } M = \frac{1}{4} [(w+s)^4 + (w^2+s^2)^2 + 2(w^4+s^4)] = \underline{w^4 + w^3s + 2w^2s^2 + ws^3 + s^4}$$

Das Lemma von PóLYA ergibt sich, wenn man alle Gewichte

$$W(a_i) = 1$$

setzt. Dann ergibt sich wegen $\sum_{a \in A} W(a) = r$ für die Anzahl der Muster

$$|M| = P(G; r, r, \dots, r)$$

Der Satz von N.G.de BRUIJN (1958)

Es sei $G \subset S_n$ eine Permutationsgruppe der Menge $X = \{1, 2, \dots, n\}$ und $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ die Menge der Farben, $\Phi = \text{Abb}(X, A)$ die Menge der Färbungen. Zwei Färbungen φ_1, φ_2 gelten äquivalent, wenn es ein $\pi \in G$ gibt mit

$$\varphi_2 = \varphi_1 \circ \pi$$

Dem Muster m mit dem Repräsentanten $\varphi \in \Phi$ entspricht die Äquivalenzklasse

$$m = \varphi \circ G$$

Ferner sei h eine fest gewählte Permutation der Farben. Dann kann das Muster $\varphi \circ G$ unter h invariant sein, d.h. es gilt

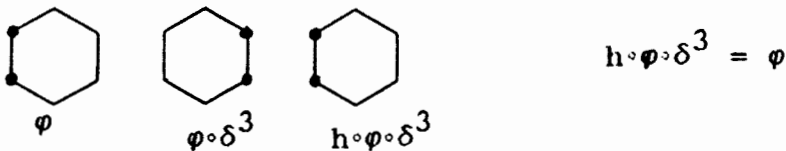
$$h \circ \varphi \circ G = \varphi \circ G \Leftrightarrow h \circ m = m$$

$\varphi \in m$ ist also eine Färbung, die sowohl unter h als auch π wieder eine Färbung desselben Musters m ist, also

$$\varphi \in m \Leftrightarrow \bigvee_{\pi \in G} h \circ \varphi \circ \pi = \varphi$$

Beispiel: G sei Drehungsgruppe des Sechsecks (s. Seite 169),

$A = \{w, s, r\}$, $h = (w)(sr)$. Ein Beispiel für diese Färbung ist



Ordnet man jeder Farbe a ein Gewicht $W(a)$ zu, so ist das Gewicht der Färbung φ definitionsgemäß

$$w(\varphi) = \prod_{i \in X} W(\varphi(i))$$

Das Gewicht eines Musters ist gleich dem Gewicht der Färbungen φ_j dieses Musters

$$W(m) = W(\varphi_1) = W(\varphi_2) = \dots$$

Es sei Φ_h die Menge aller Färbungen, die sowohl G - als h -invariant sind

$$\Phi_h = \left\{ \varphi \mid \bigvee_{\pi \in G} h \circ \varphi \circ \pi = \varphi \right\}$$

Ferner sei M die Menge aller Muster unter G , die auch unter h invariant sind

$$M = \left\{ m \mid m \subset \Phi_h, \varphi \in m, \bigvee_{\pi \in G} h \circ \varphi \circ \pi = \varphi \right\}$$

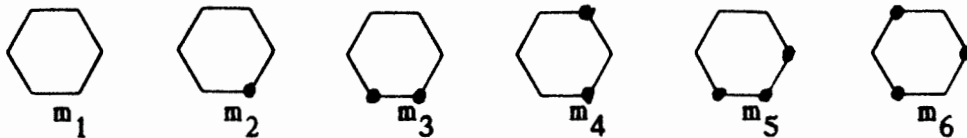
Das Inventar dieser Muster ist dann

$$\text{inv } M = \sum_{m \in M} W(m)$$

die Summe der Einzelgewichte der Muster, die unter h invariant sind

Beispiel: G sei die Drehungsgruppe des Sechsecks, $A = \{w, s, r\}$,

$h = (w)(sr)$, $W(w) = w$, $W(s) = s$, $W(r) = r$. Man findet folgende Muster



$$W(m_1) = w^6, W(m_2) = w^4 sr, W(m_3) = w^2 s^2 r^2, W(m_4) = w^2 s^2 r^2,$$

$$W(m_5) = s^3 r^3, W(m_6) = s^3 r^3$$

$$m_i = \{\varphi_i \circ G\}, i = 1, \dots, 6, h \circ m_i = m_i, M = \{m_1, \dots, m_6\},$$

$$\text{inv } M = \sum_{i=1}^6 W(m_i) = w^6 + w^4 sr + 2w^2 s^2 r^2 + 2s^3 r^3$$

Aus obigem Inventar von M entnimmt man beispielsweise, daß es zwei h -invariante Färbungen mit je zwei weißen, zwei schwarzen und zwei roten Elementen gibt.

Es sei φ eine Färbung und m_φ das Muster, dem diese Färbung angehört. Dann gilt für die Anzahl der Elemente m_φ nach BURNSIDE (Seite 158):

$$|m_\varphi| = \frac{|G|}{|G_\varphi|} \quad (*)$$

Hier ist $G_\varphi = \{\pi | \pi \in G \wedge \varphi \circ \pi = \varphi\}$ die Menge der Permutationen, welche φ fest lassen. Wir berechnen nun

$$\text{inv } \Phi_h = \sum_{\varphi \in \Phi_h} W(\varphi) = \sum_{\varphi \in m_1} W(\varphi) + \sum_{\varphi \in m_2} W(\varphi) + \dots$$

Wir zerlegen also die Gesamtsumme in Summanden über die Äquivalenzklassen. Da die Abbildungen desselben Musters (Äquivalenzklasse) dasselbe Gewicht haben, folgt weiter

$$\text{inv } \Phi_h = W(m_1) \cdot |m_1| + W(m_2) \cdot |m_2| + \dots = \sum_{m \in M} W(m) \cdot |m|$$

Wegen (*) ergibt sich das Inventar von M mit

$$\text{inv } M = \sum_{m \in M} W(m) = \sum_{\varphi \in \Phi_h} \frac{W(\varphi)}{|m_\varphi|} = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\varphi \in \Phi_h} W(\varphi) \cdot |G_\varphi|$$

Wir wählen nun eine zunächst feste Färbung φ und wählen eine geeignete Permutation π_φ , sodaß gilt

$$h \circ \varphi \circ \pi_\varphi = \varphi$$

Ferner betrachten wir die Menge G_φ und es sei

$$x \in G_\varphi \Leftrightarrow \varphi \circ x = \varphi$$

Dann gilt

$$x \in G_\varphi \Rightarrow h \circ \varphi \circ (x \circ \pi_\varphi) = h \circ (\varphi \circ x) \circ \pi_\varphi = h \circ \varphi \circ \pi_\varphi = \varphi \Rightarrow x \circ \pi_\varphi \in \{\pi \mid h \circ \varphi \circ \pi = \varphi\}$$

daher

$$G_\varphi \circ \pi_\varphi \subset \{\pi \mid h \circ \varphi \circ \pi = \varphi\}$$

Sei umgekehrt

$$\sigma \in \{\pi \mid h \circ \varphi \circ \pi = \varphi\} \Rightarrow h \circ \varphi \circ \sigma = \varphi = h \circ \varphi \circ \pi_\varphi \Rightarrow \varphi \circ \sigma = \varphi \circ \pi_\varphi \Rightarrow \varphi \circ \sigma \circ \pi_\varphi^{-1} = \varphi \Rightarrow \sigma \circ \pi_\varphi^{-1} \in G_\varphi \Rightarrow \sigma \in G_\varphi \circ \pi_\varphi, \text{ daher}$$

$$\{\pi \mid h \circ \varphi \circ \pi = \varphi\} \subset G_\varphi \circ \pi_\varphi$$

Demnach ist

$$\underline{\{\pi \mid h \circ \varphi \circ \pi = \varphi\} = G_\varphi \circ \pi_\varphi}$$

Nun ist aber $|G_\varphi \circ \pi_\varphi| = |G_\varphi|$, daher

$$\underline{|\{\pi \mid h \circ \varphi \circ \pi = \varphi\}| = |G_\varphi|}$$

Daher kann man setzen

$$\text{inv } M = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\varphi \in \Phi_h} W(\varphi) \cdot |G_\varphi| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \sum_{h \circ \varphi \circ \pi = \varphi} W(\varphi)$$

d.h. statt mit $|G_\varphi|$ zu multiplizieren, setzen wir $W(\varphi)$ sooft als Summand, als es Permutationen π mit $h \circ \varphi \circ \pi = \varphi$ gibt. Es gilt daher

$$\text{inv } M = \sum_{m \in M} W(m) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \sum_{h \circ \varphi \circ \pi = \varphi} W(\varphi)$$

Es handelt sich also darum, die π und φ so zu bestimmen, daß gilt

$$h \circ \varphi \circ \pi = \varphi \Rightarrow h \circ \varphi = \varphi \circ \pi^{-1} \quad (+)$$

Wir betrachten nun eine Färbung mit dieser Eigenschaft und zerlegen X in die durch π hervorgerufenen Zyklen

$$x = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_i \cup \dots \cup X_k$$

und wählen

$$x_i \in X_i$$

Die Länge des Zyklus X_i sei l_i $i = 1, \dots, k$. π^{-1} erzeugt natürlich Zyklen derselben Länge wie π , die auch aus denselben Elementen, nur in umgekehrter Reihenfolge bestehen. Das Element x_i färben wir beliebig mit der Farbe a :

$$\varphi(x_i) = a \in A$$

und wenden h wiederholt auf $\varphi(x_i)$ an. Dann ergibt sich wegen (*):

$$h \circ \varphi(x_i) = \varphi \circ \pi^{-1}(x_i) = h(\varphi(x_i)) = h(a) \Rightarrow \underline{\varphi \circ \pi^{-1}(x_i) = h(a)}$$

$$\begin{aligned} h^2 \circ \varphi(x_i) &= h \circ (h \circ \varphi)(x_i) = h \circ (\varphi \circ \pi^{-1})(x_i) = (h \circ \varphi) \circ \pi^{-1}(x_i) = \\ &= (\varphi \circ \pi^{-1}) \circ \pi^{-1}(x_i) \Rightarrow \underline{h^2(a) = \varphi \circ \pi^{-2}(x_i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^3 \circ \varphi(x_i) &= h \circ (h^2 \circ \varphi(x_i)) = h \circ (\varphi \circ \pi^{-2}(x_i)) = (h \circ \varphi) \circ \pi^{-2}(x_i) = \\ &= (\varphi \circ \pi^{-1}) \circ \pi^{-2}(x_i) \Rightarrow \underline{h^3(a) = \varphi \circ \pi^{-3}(x_i)} \end{aligned}$$

.....

$$h^{l_i} \circ \varphi(x_i) = \varphi \circ \pi^{-l_i}(x_i) = \varphi \circ \varepsilon(x_i) = \varphi(x_i) = a \Rightarrow \underline{h^{l_i}(a) = a}$$

Sei also $x_i \in X_i$ und sei l_i die Länge des Zyklus X_i , $\varphi(x_i) = a$, dann gilt

$$\begin{aligned} W(\varphi(x_i)) \cdot W(\varphi \circ \pi^{-1}(x_i)) \cdot \dots \cdot W(\varphi \circ \pi^{-(l_i-1)}(x_i)) &= \\ W(a) \cdot W(h(a)) \cdot \dots \cdot W(h^{l_i-1}(a)) &=: q_{l_i}(a) \end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$q_{l_i}(a) := W(a) \cdot W(h(a)) \cdot \dots \cdot W(h^{l_i-1}(a))$$

stellt demnach das Produkt der Gewichte eines Zyklus der Permutation dar, ist aber nur von dessen Länge l_i und der Farbe a abhängig.

Um das Gewicht der Abbildung φ mit der Eigenschaft $h \circ \varphi \circ \pi = \varphi$ zu bestimmen, haben wir das Produkt der Gewichte der Bilder von φ zu bilden:

$$W(\varphi) = \prod_{x \in X} W(\varphi(x)) = \prod_{\substack{i=1 \\ x_i \in X_i}}^k q_{l_i}(\varphi(x_i))$$

Dieses Produkt wurde aufgelöst in die Produkte der Gewichte der einzelnen Zyklen von π . Dabei kommen als Farben nur jene in Frage, für die gilt

$$h^{l_i}(a) = a$$

Ist $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ die Menge aller Farben, dann sei

$$A_1 := \{a \mid a \in A, h^1(a) = a\} = \{a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_1^{(s_1)}\}$$

d.h. es gebe s_1 Farben mit der Eigenschaft $h^1(a) = a$. Es sei nun

$$x_i \in X_i \text{ mit } \varphi(x_i) = a_{1i}^{(j_i)} \in A_{1i} \text{ d.h. es ist } h^{1i}(a_{1i}^{(j_i)}) = a_{1i}^{(j_i)}$$

Das Element i , das dem Zyklus X_i angehört, wird mit einer der möglichen Farben eingefärbt, die der Zykluslänge l_i von X_i entspricht.

Die Abbildung φ ist eindeutig durch das k -tupel (j_1, \dots, j_k) bestimmt. Denn zunächst wird aus jedem Zyklus X_i der Länge l_i ein Element x_i herausgegriffen und mit einer zulässigen Farbe $a_{1i}^{(j_i)}$ versehen. Durch sukzessive Anwendung von π^{-1} auf x_i durchlaufen die Bilder den gesamten Zyklus X_i , wobei stets gilt $h^k(a_{1i}^{(j_i)}) = \varphi \circ \pi^{-k}(x_i)$.

Die verschiedenen Möglichkeiten für die Färbungen erhält man, wenn man die Farbe alle durch A_1 gebotenen Möglichkeiten durchlaufen läßt, also $1 \leq j_i \leq s_1$ beliebig wählt. Dann ergibt sich das Gewicht von φ bei gegebenem π als

$$W(\varphi) = \prod_{i=1}^k q_{1i}(\varphi(x_i)) = \prod_{i=1}^k q_{1i}(a_{1i}^{(j_i)})$$

Daraus folgt für festgehaltenes π , aber alle möglichen φ :

$$\begin{aligned} \sum_{\varphi=h \circ \varphi \circ \pi} W(\varphi) &= \sum_{(j_1, \dots, j_k)} \left(\prod_{i=1}^k q_{1i}(a_{1i}^{(j_i)}) \right) = \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_k)} \left(q_{11}(a_{11}^{(j_1)}) \cdot q_{12}(a_{12}^{(j_2)}) \cdot q_{13}(a_{13}^{(j_3)}) \cdot \dots \cdot q_{1k}(a_{1k}^{(j_k)}) \right) = \\ &= \sum_{(j_2, \dots, j_k)} \left\{ \left[q_{11}(a_{11}^{(1)}) + q_{11}(a_{11}^{(2)}) + \dots + q_{11}(a_{11}^{(r_{11})}) \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[q_{12}(a_{12}^{(j_2)}) \cdot q_{13}(a_{13}^{(j_3)}) \cdot \dots \cdot q_{1k}(a_{1k}^{(j_k)}) \right] \right\} = \\ &\dots \dots \dots \\ &= \prod_{i=1}^k \left[q_{1i}(a_{1i}^{(1)}) + q_{1i}(a_{1i}^{(2)}) + \dots + q_{1i}(a_{1i}^{(r_{1i})}) \right] = \end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{r_{1j}} q_{1i}(a_{1i}^{(j)}) \right) = \prod_{i=1}^k \sum_{a \in A_{1i}} \left(W(a) \cdot W(h(a)) \dots W(h^{1^i-1}(a)) \right)$$

Definiert man

$$p_{1i} := \sum_{a=h^1(a)} W(a) \cdot W(h(a)) \dots W(h^{1^i-1}(a))$$

dann gilt für $h \circ \varphi \circ \pi = \varphi$ mit einem bestimmten π

$$\sum_{\varphi=h \circ \varphi \circ \pi} W(\varphi) = \prod_{i=1}^k p_{1i}$$

Ist nun π von Typus $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots 1^{\lambda_1} \dots n^{\lambda_n}$ so tritt der zur Zykluslänge l gehörige Zyklus λ_1 -mal auf und es gilt

$$\sum_{\varphi=h \circ \varphi \circ \pi} W(\varphi) = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \dots p_n^{\lambda_n}$$

Das Inventar aller Muster M für alle π ergab sich auf Seite 196

$$\text{inv } M = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \sum_{\varphi \circ \pi = \varphi} W(\varphi) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \dots p_n^{\lambda_n}$$

Setzt man $x_i = p_i$, so stellt

$$\frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} = P(G; x_1, \dots, x_n)$$

den Zyklusindex der Permutationsgruppe G dar.

Daher gilt der

Satz von DE BRUIJN

Das Inventar der Muster der Färbungen $\varphi: X \rightarrow A$, die bezüglich der Permutationsgruppe G auf X und der festen Permutation h der Farben invariant sind, lautet

$$\text{inv } M = \sum_{m \in M} W(m) = P(G; p_1, p_2, \dots, p_n)$$

Hierin ist $P(G; x_1, x_2, \dots, x_n)$ der Zyklusindex der Gruppe G und

$$p_{1i} := \sum_{a=h^1(a)} W(a) \cdot W(h(a)) \cdot W(h^2(a)) \dots W(h^{i-1}(a))$$

Beispiel: Wieviele Färbungen des regelmäßigen Sechseckes mit drei Farben $A = \{w, r, s\}$ sind drehungsinvariant und invariant gegenüber der Farbvertauschung $h = (w)(rs)$?

Es sei $W(w) = w$, $W(s) = s$, $W(r) = r$. Dann gilt

$$h(w) = h^2(w) = h^3(w) = h^4(w) = h^5(w) = h^6(w) = w$$

$$h^2(s) = h^4(s) = h^6(s) = s$$

$$h^2(r) = h^4(r) = h^6(r) = r$$

Demnach

$$p_1 = \sum_{h(a)=a} W(a) = w$$

$$p_2 = \sum_{a=h^2(a)} W(a) \cdot W(h(a)) = ww + sr + rs = w^2 + 2rs$$

$$p_3 = \sum_{a=h^3(a)} W(a) \cdot W(h(a)) \cdot W(h^2(a)) = w^3$$

$$p_4 = \sum_{a=h^4(a)} W(a) \cdot W(h(a)) \cdot W(h^2(a)) \cdot W(h^3(a)) = w^4 + 2s^2w^2$$

$$p_5 = \sum_{a=h^5(a)} W(a) \cdot W(h(a)) \cdot W(h^2(a)) \cdot W(h^3(a)) \cdot W(h^4(a)) = w^5$$

$$p_6 = \sum_{a=h^6(a)} W(a) \cdot W(h(a)) \cdot W(h^2(a)) \cdot W(h^3(a)) \cdot W(h^4(a)) \cdot W(h^5(a)) = w^6 + 2s^3w^3$$

Daher gilt mit dem Zyklusindex der Sechsecks-Drehungsgruppe

$$P(G; x_1, \dots, x_6) = \frac{1}{6} \cdot [x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6]$$

$$P(G; p_1, \dots, p_6) = \frac{1}{6} \cdot [w^6 + (w^2 + 2sr)^3 + 2w^6 + 2w^6 + 4s^3r^3] = \dots =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot [6w^6 + 6w^4sr + 12w^2s^2r^2 + 12s^3r^3]$$

Daher (vgl. Seite 195)

$$\underline{\text{inv } M = w^6 + w^4sr + 2w^2s^2r^2 + 2s^3r^3}$$

Der Hauptsatz von PóLYA ergibt sich aus dem Satz von de BRUIJN, wenn man $h = \text{id}$ setzt.

Dann gilt nämlich $\bigwedge_i \bigwedge_a h^i(a) = a$, daher $p_i = \sum_{\substack{L_i \text{ Faktoren} \\ W(a)}} W(a) \dots W(a) = \sum W(a)^i$

Daher

$$\text{inv } M = P(G; \sum W(a), \sum W(a)^2, \dots, \sum W(a)^n)$$

Zyklusindex spezieller Gruppen

Der Zyklusindex der symmetrischen Gruppe S_n lautet

$$P(S_n) = \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_n \\ 1 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + \dots + n \cdot \lambda_n = n}} \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} \cdot \left(\frac{x_1}{1}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{x_2}{2}\right)^{\lambda_2} \dots \left(\frac{x_n}{n}\right)^{\lambda_n}$$

Beweis: Jeder Permutation π vom Typus $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$ entspricht im Zyklusindex

$$P(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} x_1^{\lambda_1(\pi)} \cdot x_2^{\lambda_2(\pi)} \dots x_n^{\lambda_n(\pi)}$$

der Term $x_1^{\lambda_1(\pi)} \cdot x_2^{\lambda_2(\pi)} \dots x_n^{\lambda_n(\pi)}$. Wir haben also bloß die Permutationen desselben Typs zusammenzufassen. Nach CAUCHY (Seite 153) gibt es

$$\frac{n!}{(1^{\lambda_1} \cdot 1!) (2^{\lambda_2} \cdot 2!) \dots (n^{\lambda_n} \cdot n!)} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^n i \cdot \lambda_i = n \quad (*)$$

Wegen $|G| = n!$ hat $P(S_n)$ die angegebene Form.

Der Zyklusindex der alternierenden Gruppe $A_n \subset S_n$ lautet

$$P(A_n) = \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_n \\ 1 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + \dots + n \cdot \lambda_n = n}} \frac{1 + (-1)^{\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \dots}}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} \cdot \left(\frac{x_1}{1}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{x_2}{2}\right)^{\lambda_2} \dots \left(\frac{x_n}{n}\right)^{\lambda_n}$$

Beweis: Wir haben nur jene Permutationen des Typs $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$ zu betrachten, welche *gerade* sind. Es gilt der

Hilfssatz: Ist $\pi \in S_n$ eine Permutation des Typs $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$, so ist die Parität von π dieselbe wie die Parität von $\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \dots$, d.h. die Parität eine Permutation π ist dieselbe wie die Parität der Anzahl ihrer geradzahligten Zyklen.

Beweis des Hilfssatzes:

1. Jeder Zyklus der Länge l kann als Abfolge von $l-1$ Transpositionen erzeugt werden:

$$(i_1 i_2 i_3 \dots i_{l-1} i_l) = \pi_{1-1,1} \circ \dots \circ \pi_{23}^{\pi_{12}}$$

2. Daher kann eine Permutation π vom Typ $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$ auf

$$(1-1)\lambda_1 + (2-1)\lambda_2 + (3-1)\lambda_3 + \dots + (n-1)\lambda_n = \lambda_2 + 2\lambda_3 + \dots + (n-1)\lambda_n$$

Arten durch Transpositionen erzeugt werden. Demnach ist die Parität von $\lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 + 4\lambda_5 + \dots$ dieselbe wie $\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \dots$, da die Summanden mit geradzahligem Koeffizienten bei der Frage nach "gerade" oder "ungerade" außer acht gelassen werden können und die Parität etwa von $3\lambda_4$ nur von λ_4 abhängt.

Versehen wir nun jeden Summanden $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$ im Zyklusindex von S_n mit dem Faktor

$$1 + (-1)^{\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \dots}$$

so hat dieser Faktor bei ungerader Parität des Exponenten den Wert 0 und bei gerader Parität des Exponenten den Wert 2. Daher ist wegen (*)

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in A_n} x_1^{\lambda_1(\alpha)} \dots x_n^{\lambda_n(\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{\pi \in S_n} (1 + (-1)^{\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \dots}) x_1^{\lambda_1(\pi)} \dots x_n^{\lambda_n(\pi)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_n \\ 1 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + \dots + n \cdot \lambda_n = n}} \frac{n! [1 + (-1)^{\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \dots}]}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} \cdot \left(\frac{x_1}{1}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{x_2}{2}\right)^{\lambda_2} \dots \left(\frac{x_n}{n}\right)^{\lambda_n} \end{aligned}$$

Wegen $|A_n| = \frac{1}{2} |S_n| = \frac{1}{2} n!$ (Seite 154) folgt die Behauptung.

Der Zyklusindex der Drehungsgruppe Z_n des regelmäßigen n -Ecks lautet

$$P(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{t|n} \varphi(t) \cdot x_t^{(n/t)}$$

φ ist die Funktion von EULER (Seite 130)

Beweis: Z_n wird durch $\delta = (1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n)$ erzeugt:

$$Z_n = \{\epsilon, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-1}\} \quad \delta^n = \epsilon$$

Wir wählen $\delta^k \in Z$ beliebig. Ist $d = \text{ggT}(k, n)$, so erzeugen nach Seite 160 δ^k und δ^d dieselbe Ungergruppe von Z_n . Zusätzlich sind aber die Drehungen δ^k und δ^d vom selben Typus.

Sei nämlich $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, so gilt

$$i \mapsto \delta^d(i) \mapsto (\delta^d)^2(i) \mapsto \dots \mapsto (\delta^d)^{(n/d)}(i) = \delta^n(i) = \epsilon(i) = i$$

d.h. i gehört einem Zyklus von δ^d der Länge $\frac{n}{d}$ an. Da dies für

jedes Element i gilt, muß δ^d aus $n / (\frac{n}{d}) = d$ Zyklen bestehen.

der Typus von δ^d ist eine Abfolge von d Zyklen der Länge $\frac{n}{d}$. Da $d = \text{ggT}(k, n)$, gilt $k = k_1 d$, $n = n_1 d$. Daraus ergibt sich weiter

$$\delta^{k(i)} = (\delta^d)^{k_1(i)}$$

d.h. die einem von δ^k erzeugten Zyklus angehörenden Elemente i gehören auch einem von δ^d erzeugten Zyklus an. Da nach Seite 160 auch ein Exponent α existiert, für den gilt: $\delta^d = (\delta^k)^\alpha$, folgt, daß die dem von δ^d erzeugten Zyklus angehörenden Elemente auch umgekehrt dem von δ^k erzeugten Zyklus angehören. D.h. δ^k und δ^d sind Permutationen desselben Typus.

Wird d vorgegeben, so legt die Anzahl der k , welche der Beziehung $d = \text{ggT}(k, n)$ genügen die Anzahl der Permutationen des gleichen Typs fest. Da diese Anzahl der k sich auch aus $1 = \text{ggT}(\frac{k}{d}, \frac{n}{d})$ ergibt, treten jeweils $\varphi(\frac{n}{d})$ (siehe Seite 160f) Permutationen desselben Typs auf. Wegen $|Z_n| = n$ gilt daher

$$P(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d}) x_{(n/d)}^d$$

Mit $t = \frac{n}{d} \Rightarrow d = \frac{n}{t}$ d.h. $d|n \Leftrightarrow t|n$ folgt daraus die Behauptung.

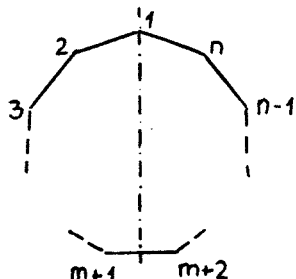
Der Zyklusindex der Diödergruppe des regelmäßigen n Ecks lautet

$$n = 2m+1 \quad P(D_n) = \frac{1}{2} \left[P(Z_n) + x_1 x_2^m \right]$$

$$n = 2m \quad P(D_n) = \frac{1}{2} P(Z_n) + \frac{1}{4} \cdot \left[x_2^m + x_1^2 x_2^{m-1} \right]$$

Beweis: Zu den Summanden des Zyklusindex der Drehungsgruppe $P(Z_n)$ treten noch die von den Spiegelungen herrührenden Summanden.

1. $n = 2m+1$. Es kommen n Spiegelungen dazu.



Für die durch den Punkt 1 gehende Achse hat die Spiegelung den Typus $(1)(2 \ n)(3 \ (n-1)) \dots ((m+1) \ (m+2))$

Daher lautet der entsprechende Summand des Zyklusindex

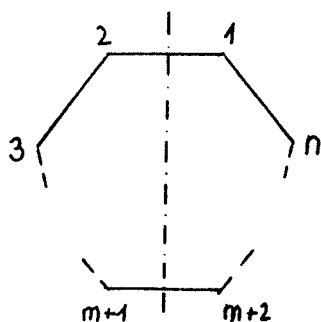
$$x_1 x_2^m$$

Da es n derartige Spiegelungen gibt und D_n insgesamt $2n$ Elemente umfaßt, gilt daher

$$P(D_n) = \frac{1}{2} P(Z_n) + \frac{1}{2n} \cdot n \cdot x_1 x_2^m = \frac{1}{2} [P(Z_n) + x_1 x_2^m]$$

2. $n = 2m$.

a) Die Spiegelungen an Seitensymmetralen sind vom Typ



$$(1 \ 2)(3 \ n)(4 \ n-1) \dots (m+1 \ m+2)$$

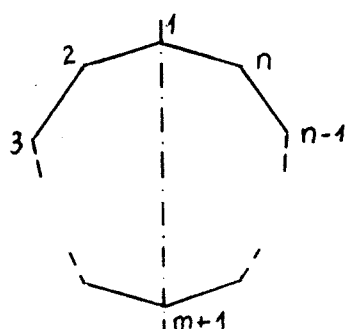
Der entsprechende Summand des Zyklusindex lautet

$$x_2^m$$

Da es m derartige Spiegelungen gibt, treten folgende Summanden hinzu

$$m \cdot x_2^m$$

b) Die Spiegelungen an den Diagonalen sind vom Typ



$$(1)(m+1)(2 \ n)(3 \ n-1) \dots (m \ (m-1))$$

Der zugehörige Summand des Zyklusindex lautet

$$x_1^2 x_2^{m-1}$$

Da es m derartige Spiegelungen gibt, treten folgende Summanden hinzu

$$m \cdot x_1^2 x_2^{m-1}$$

Da die Diedergruppe $4m$ Elemente umfaßt, lautet daher der Zyklusindex

$$\frac{1}{2} P(Z_{2m}) + \frac{1}{4m} [m \cdot x_2^m + m \cdot x_1^2 x_2^{m-1}] = \frac{1}{2} P(Z_{2m}) + \frac{1}{4} [x_2^m + x_1^2 x_2^{m-1}]$$

Literatur

- ANDREWS George E.: The Theory of Partitions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Volume 2, Section: Number Theory Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass. 1976
- BECKENBACH Edwin F. (Hg): Applied combinatorial Mathematics, Wiley New York 1964
- BERGE C.: Principles of Combinatorics, Academic Press, New York, 1971
- EISEN Martin: Elementary combinatorial Analysis, Gordon & Breach, New York 1969
- KAUFMANN A.: Introduction a la combinatorique en vue des applications, Dunod, Paris 1968
- LIU C. L.: Introduction to combinatorial Mathematics, McGraw - Hill, New York
- NETTO Eugen: Lehrbuch der Combinatorik, Teubner, Leipzig, 1927
- RIORDAN John: An introduction to combinatorial Analysis, Wiley, New York, Chapman & Hall, London 1958
- TUCKER Alan: Applied Combinatorics, Wiley, New York, 1980

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen	1
Endliche Mengen	3
Zählprinzipien	4
Elementare Zählfunktionen	
r-Anordnungen o. \mathbb{W} , $[n]_r$, Symbol von KRAMP	5
Injektive Abbildungen	6
STERLINGsche Zahlen 1. Art, r-Anordnungen m. \mathbb{W}	7
Auswahlen o. \mathbb{W}	8
Symbol von EULER, $[n]^I$	9
strikt steigende Auswahlen	10
r-Auswahlen m. \mathbb{W} aus verschiedenen Elementen	11
gleichartige Objekte in verschiedene Schachteln	11
Formeln für das Symbol von EULER	14
Formel von VANDERMONDE	16
Binomialkoeffizienten	16
Multinomialzahlen	18
Blockwanderungen	22
Anwendungen der Blockwanderungen	23
Teilmengen einer endlichen Menge, Zahlen von FIBONACCI	29
1. Lemma von KAPLANSKI	30
2. Lemma von KAPLANSKI	32
Korrigierte FIBONACCI-Zahlen	33
Auswahlen aus allgemeineren Vorräten	34
Partitionen, Klasseneinteilungen	35
STERLINGsche Zahlen 2. Art, verschiedene Objekte in gleiche Schachteln	38
verschiedene Objekte in gleiche Schachteln, surjektive, injektive, bijektive Abbildungen	39
Berechnung der STERLINGschen Zahlen 2. Art	39
Erzeugende Funktionen	
Erzeugende Funktionen für Auswahlen	44
Erzeugende Funktionen für Auswahlen m. \mathbb{W}	45

Einige wichtige erzeugende Funktionen	49
Erzeugende Funktionen für Auswahlen m und o . \mathbb{W}	50
Simultane Bedingungen bei Auswahlen m . \mathbb{W}	52
Erzeugende Funktionen für Anordnungen	62
r -Anordnungen m . \mathbb{W}	62
Erzeugende Funktionen und Rekursionen	72
Distributionen	79
gleiche Objekte in verschiedenen Schachteln	79
verschiedene Objekte in verschiedenen Schachteln	82
verschiedene Objekte in gleiche Schachteln	84
surjektive Abbildungen	86
Möglichkeiten verschiedener Distributionen	86
Zerlegung natürlicher Zahlen in Summanden	90
Erzeugendes Polynom für P_n	91
Graph von FERRERS	95
Schemata	98
Ergänzungen	103
n in genau r versch. Summanden	105
GAUSS'sche Polynome	107
Erzeugendes Polynom für $P(\leq M, \leq r; n) = G(M, r; x)$	109
Erzeugendes Polynom für $P(\leq M, r; n)$	110
Erzeugendes Polynom für $P(M, r; n)$	111
$g(m, r; x)$	116
Erzeugendes Polynom für $P(\geq m, r; n)$	116
Erzeugendes Polynom für $P(m, r; n)$	117
Erzeugendes Polynom für $P(m \leq; n)$	117
Erzeugendes Polynom für $P(m; n)$	118
Literatur	119
Inhaltsverzeichnis	120

Inhaltsverzeichnis II

Methode der Inklusion und Exklusion. Siebformeln	122
Sätze über Mengen	122
Sätze von de MORGAN	122
Sätze über die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge	123
Formel 1	123
Formel 2	124
Formel von SYLVESTER	125
Siebformel	126
Inklusions - Exklusionsformel	128
Formale Behandlung der Siebformeln	128
Problème de dérangement, Problème des rencontres	130
Problème des ménages	133
Endliche Gruppen	136
Untergruppen, konjugierte Untergruppen	137
Normalteiler	138
Nebenklassen	139
Satz von LAGRANGE	140
Permutationsgruppen	141
Die symmetrische Gruppe S_n	142
Zyklen einer Permutation	146
Die symmetrische Gruppe S_4	148
Die Tetraedergruppe	150
Typen von Permutationsklassen, Satz von CAUCHY	153
Äquivalenzklassen einer Gruppe, Orbits, transitive Mengen	156
Nebenklasse	157
Satz von BURNSIDE	159
Zyklische Gruppen	160
Zyklusindex	165
Lemma von PÓLYA	165
Anzahl der Muster	168
Satz von PÓLYA	171
Kontrastmuster	173
Anzahl der Muster	174

Anzahl der Äquivalenzklassen.....	179
Gewichtung von Elementen, Funktionen und Mustern.....	183
Inventar einer Menge.....	183
Gewicht einer Abbildung.....	184
Gewicht eines Musters.....	185
Der Hauptsatz von PÓLYA.....	191
Der Satz von de Bruijn.....	194
Satz von de BRUIJN.....	199
Zyklusindex spezieller Gruppen.....	201
Literatur.....	205
Inhaltsverzeichnis.....	206