Beispielsammlung

zur

Kombinatorik

Wolfgang STRÖHER

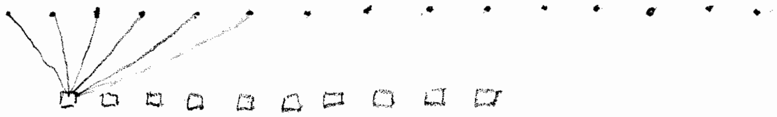
BEISPIELSAMMLUNG ZUR KOMBINATORIK

1. *Eine Zeitung sucht drei Berichterstatter über 20 Kleinstädte. Alle drei Berichterstatter sollen in derselben Kleinstadt wohnen. Die Zeitung annonciert in allen 20 Kleinstädten. Wieviele Antworten muß sie erhalten, um sicher zu sein, daß mindestens drei Bewerber in derselben Kleinstadt wohnen?*

Wenn aus jeder Stadt zwei Zuschriften kommen, so sind es insgesamt 40 Zuschriften. Erst bei mehr als 40 Zuschriften müssen notwendig mehr als drei Zuschriften aus einer Stadt kommen
TUCKER S. 16

2. *Zu 15 PCs gibt es 10 Printer.* Mit wievielen PCs muß jeder Printer verbunden werden *, damit im Bedarfsfalle 10 PCs (oder weniger) drucken können?*

Verbinden wir den 1. Printer mit 5 PCs, so können die restlichen 10 PCs nicht gleichzeitig drucken. Es muß als der 1.Printer mit 6 PCs verbunden werden, sodaß insgesamt 60 Verbindungen nötig sind
TUCKER S. 16



3. *Die Zahlen von 1 – 10 werden beliebig entlang einer Kreisperipherie verteilt. Man zeige, daß die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen mindestens einmal ≥ 17 sein muß*

Die Summe aller Zahlen ist 1+2+3+ ... +10 = 55. Bilden wir alle Tripel aufeinanderfolgender Zahlen, so kommt jede Zahl in genau drei Tripeln vor. Wäre die Summe jedes Tripels höchstens 16, so würde die Summe der möglichen 10 Tripel nur 160 ergeben. Es muß daher mindestens ein Tripel die Summe 17 aufweisen.
TUCKER S. 17

4. *Ein Professor erzählt in jedem Jahr in seiner Vorlesung drei Witze. Wie umfangreich muß sein Witze – Repertoire sein, wenn er in 12 Jahren niemals genau dieselben drei Witze wiederholt?*

Es muß insgesamt mindestens 12 verschiedene Tripel von Witzen geben:

	3 Witze	4 Witze	5 Witze	6 Witze
	(123)	(124)	(125)	(126)
		(134)	(135)	(136)
		(234)	(145)	.
			(235)	.
			(245)	.
			(345)	
Gesamtzahl der Witze	1	4	10	mehr als 12

Es sind also mindesten 6 Witze nötig

Andere Lösung: n ... Anzahl der Witze

$\binom{n}{3} \geq 12$ Ist nun $\binom{n}{3} = 12$, so folgt $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = 12 \Rightarrow$

$$n^3-3n^2+2n-72 = 0 \Rightarrow n = 5,2403 \Rightarrow \underline{n \geq 6}$$

5\. *Wieviele Ergebnisse kann man beim Wurf*

a) zweier verschiedener Würfel (oder beim zweimaligen Wurf eines Würfels , wobei es auf die Reihenfolge der Ergebnisse ankommt)

b) zweier gleicher Würfel erhalten?

a) 6.6 = 36 Möglichkeiten (Anzahl der Abbildungen der Menge {1,2} in die Menge {1,2,3,4,5,6})

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)^6 = 1+\underbrace{2!\,18\,\frac{x^2}{2!}}+3!\,35\,\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

b) Wenn beide Würfel gleich sind, kommt es auf die Reihenfolge der Ergebnisse nicht an, sondern nur auf deren Werte

Experimentell

11	22	33	44	55	66
12	23	34	45	56	
13	24	35	46		
14	25	35			
15	26				
16					

} insgesamt 21 Möglichkeiten

Rechnerisch

$$(1+x+x^2)^6 = 1+6x+21x^2+50x^3+\ldots$$

1	2	3	4	5	6	Augen
	•			•		gleichberechtigte Würfe

Daher

$$\frac{7!}{2!3!} = \binom{7}{2} = \underline{21 \text{ Möglichkeiten}}$$

EISEN S. 37 und 8

6. *Wieviele "Wörter" von zwei Buchstaben kann man aus einem Alphabet von 26 Buchstaben bilden, wenn*

a) beide Buchstaben verschieden sind

b) auch zweimal derselbe Buchstabe auftreten kann?

a) 26.25 = 650 Wörter

b) 26.26 = 676 Wörter

EISEN S. 8

7. *Auf wieviele Arten können vier verschiedene Briefe in vier verschiedene (unterscheidbare) Couverts gesteckt werden?*

$$\underline{4.3.2.1 = 24 \text{ Möglichkeiten}}$$

EISEN S.8

8. *Wieviele verschiedene Ergebnisse sind beim Werfen von 100*

a) verschiedenen

b) gleichen

Würfeln möglich?

a) $\underline{6^{100} = 6{,}533186235.10^{77} \text{ Möglichkeiten}}$

b)

1	2	3	4	5	6	Augen
•••	•		•••••	••	••••	Gleiche Würfel

$$\binom{105}{5} = \frac{105!}{5!100!} = \underline{96\ 560\ 646 \quad \text{Möglichkeiten}}$$

EISEN S. 9

9. *Auf wieviele Arten können zwei Gewinne an 30 Personen verteilt werden, wenn*

a) eine Person nur einen Preis erhalten kann

b) eine Person auch zweimal gewinnen kann?

a) 30.29 = $\underline{870 \text{ Möglichkeiten}}$

b) 30.30 = $\underline{900 \text{ Möglichkeiten}}$

EISEN S. 10

10. *Auf wieviele Arten können ein rechter und ein linker Handschuh, die nicht zusammengehören, aus 10 Paaren verschiedener Handschuhe ausgewählt werden?*

10.9 = Möglichkeiten

11. *Auf wieviele Arten kann je ein Vokal und ein Konsonant aus dem Wort* PRIMZAHL *ausgewählt werden?*

Es gibt 2 Vokale und 6 Konsonanten 2.6 = 12 Möglichkeiten

EISEN S.

12. *Gegeben sind fünf Karten mit der Beschriftung 1,2,3,4,5. Wieviele dreistellige Zahlen kann man durch Nebeneinanderlegen von je drei Karten bilden?*

5.4.3 = 60 Möglichkeiten

$$\left(1+\frac{x}{1!}\right)^5 = 1+1!\cdot\frac{x}{1!}+5.2!\cdot\frac{x^2}{2!}+ \underrightarrow{10.3!}\cdot\frac{x^3}{3!}+5.4!\cdot\frac{x^4}{4!}+5!\cdot\frac{x^5}{5!}$$

13. *Ein Schuhgeschäft hat Schuhe in 24 Faconen. Jede Facon ist in 12 Längen, 4 Breiten und 6 Farben erhältlich. Wieviele verschiedenartige Schuhpaare gibt es?*

24.12.4.6 = 6912 Möglichkeiten

14. *Auf wieviele Arten kann man*

a) die Summe 6 oder 9 beim Werfen von zwei verschiedenen Würfeln erhalten?

b) auf wieviele Arten eine gerade Summe?

a) Experimentell

$$\left.\begin{array}{l}1+5 = 6\\ 2+4 = 6\\ 3+3 = 6\\ 4+2 = 6\\ 5+1 = 6\end{array}\right\}\text{ 5 Möglichkeiten}\qquad \left.\begin{array}{l}3+6 = 9\\ 4+5 = 9\\ 5+4 = 9\\ 6+3 = 9\end{array}\right\}\text{ 4 Möglichkeiten}$$

3
2

Insgesamt also 5+4 = 9 Möglichkeiten

Erzeugende Funktion

Aufzähler:

$$(e_1x+z_1x^2+d_1x^3+v_1x^4+f_1x^5+s_1x^6).(e_2x+z_2x^2+d_2x^3+v_2x^4+f_2x^5+s_2x^6) =$$

$$= e_1e_2x^2+(e_1z_2+z_1e_2)x^3+(e_1d_2+z_1z_2+d_1e_2)x^4+(e_1v_2+z_1d_2+d_1z_2+v_1e_2)x^5+$$

$$+\underbrace{(e_1f_2+z_1v_2+d_1d_2+v_1z_2+f_1e_2)}_{\text{5 Möglichkeiten}}x^6+(e_1s_2+z_1f_2+d_1v_4+v_1d_2+f_1z_2+s_1e_2)x^7+$$

$$+(z_1s_2+d_1f_2+v_1v_2+f_1d_2+s_1z_2)x^8+\underbrace{(d_1s_2+v_1f_2+f_1v_2+s_1d_2)}_{\text{4 Möglichkeiten}}x^9+$$

$$+(v_1s_2+f_1f_2+s_1v_2)x^{10}+(f_1s_2+s_1f_2)x^{11}+s_1s_2x^{12}$$

Insgesamt daher 5+4 = <u>9 Möglichkeiten</u>

<u>Vereinfachter</u> <u>Aufzähler:</u>

$$(ex+zx^2+dx^3+vx^4+fx^5+sx^6)^2 = e^2x^2+2ezx^3+(2ed+z^2)x^4+(2zd+2ev)x^5+$$

$$+\underbrace{(d^2+2ef+2vz)}_{\text{5 Möglichkeiten}}x^6+(2dv+2es-2fz)x^7+(v^2+2df+2sz)x^8+\underbrace{(2ds+2fv)}_{\text{4 Möglichkeiten}}x^9+$$

$$+(f^2+2sv)x^{10}+2fsx^{11}+s^2x^{12}$$

Daher wieder insgesamt 5+4 = <u>9 Möglichkeiten</u>

<u>Abzähler</u>

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^4+x^6)^2 =$$

$$x^2+2x^3+3x^4+4x^5+\underline{5x}^6+6x^7+5x^8+\underline{4x}^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12} \qquad (*)$$

Wieder 5+4 = <u>9 Möglichkeiten</u>

<u>Andere</u> <u>Berechnung:</u>

$$x^2(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2 = x^2\left(\frac{1-x^6}{1\ \ x}\right)^2 = x^2(1-x^6)^2\ \frac{1}{(1-x)^2} =$$

$$x^2(1-2x^6+x^{12})\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+2-1}{1}x^i = (x^2-2x^8+x^{14})\sum_{i=0}^{\infty}\binom{1+i}{1}x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}(1+i)(x^{2+i}-2x^{8+i}+x^{14+i})$$

Für die Exponenten und deren Koeffizienten muß der Reihe nach gelten

$$\begin{array}{ll} 2+i = 6 \Rightarrow i = 4 & \text{Koeffizient ist } 5 \\ 2+i = 9 \Rightarrow i = 7 & \text{Koeffizient ist } 8 \\ 8+i = 9 \Rightarrow i = 1 & \text{Koeffizient ist } -4 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\}.\ 8-4 = 4$$

Summe der Koeffizienten 4+5 = <u>9</u> wie oben

b) <u>Experimentell:</u>

1+1	2+2	3+1	4+2	5+1	6+2
1+3	2+4	3+3	4+4	5+3	6+4
1+5	2+6	3+5	4+6	5+5	6+6

$\}$ 18 Möglichkeiten

Durch Überlegung:

1.Würfel ... 3 Möglichkeiten für ungerade Augenzahlen
2.Würfel ... 3 Möglichkeiten für ungerade Augenzahlen $\}$ 3.3 = 9 Möglichkeiten

1.Würfel ... 3 Möglichkeiten für gerade Augenzahlen
2.Würfel ... 3 Möglichkeiten für gerade Augenzahlen $\}$ 3.3 = 9 Möglichkeiten

Zusammen daher 9+9 = 18 Möglichkeiten

Erzeugendes Polynom:
Summe der Koeffizienten der Potenzen von (*) mit geradzahligem Exponenten ergibt

1+3+5+5+3+1 = 18 Möglichkeiten

15. *Wieviele* Zahlen mit verschiedener Ziffernanzahl *kann man aus den Ziffern 1,2,3,4 bilden,wenn keine Ziffer mehrmals auftritt?*

einziffrig 4 = 4 Möglichkeiten
zweiziffrig 4.3 = 12 "
dreiziffrig 4.3.2 = 24 "
vierziffrig 4.3.2.1 = 24 "
zusammen 64 Möglichkeiten

EISEN S. 10

16. *Es gibt genau vier verschiedene Wege von A nach B und drei von B nach C. Ferner gibt es zwei Wege direkt von A nach C. Auf wieviele Arten kann man Rundreisen von A nach C und wieder zurück machen?*

Von A über B nach C ... 4.3 = 12 Möglichkeiten
Von A direkt nach C ... 2 Möglichkeiten

Für die Hinreise gibt es also 14 Möglichkeiten
Da es ebensoviele Möglichkeiten für die Rückreise gibt, existiern insgesamt

14.14 = 196 Möglichkeiten

EISEN

17. *Auf einem Bücherbrett stehen 6 spanische, 7 französische und 8 englische Bücher. Auf wieviele Arten kann man zwei Bücher in verschiedenen Sprachen herausgreifen?*

spanisch - französisch 6.7 = 42 Möglichkeiten
spanisch - englisch 6.8 = 48 Möglichkeiten
französisch - englisch 7.8 = 56 Möglichkeiten
Insgesamt 146 Möglichkeiten
TUCKER S. 28

18. *Gegeben ist der Buchstabenvorrat a,b,c,d,e,f.*

a) Wieviele Wörter mit drei Buchstaben können gebildet werden, wenn Buchstabenwiederholungen gestattet sind?

b) Wieviele Wörter mit drei Buchstaben ohne Buchstabenwiederholung?

c) Wieviele Wörter mit drei Buchstaben ohne Buchstabenwiederholung, welche den Buchstaben e enthalten?

d) Wieviele Wörter von drei Buchstaben ohne Buchstabenwiederholung enthalten e oder f (oder beides)?

a) Jede der drei Stellen kann durch einen der sechs Buchstaben besetzt werden:

6.6.6 = 216 Möglichkeiten

Erzeugende Funktion: Jedes der 6 Objekte kann mehrfach auftreten, wobei die Reihenfolge eine Rolle spielt

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)^6 = e^{6x} = \sum_{i=0}^{\infty} 6^i \frac{x^i}{i!}$$

Für den Exponenten i = 3 folgen 6^3 = 216 Möglichkeiten

b) An der ersten Stelle gibt es 6, an der zweiten 5 und an der letzten 4 Besetzungsmöglichkeiten:

6.5.4 =120 Möglichkeiten

Erzeugende Funktion: Jeder Buchstabe kann nur einmal auftreten, aber die Reihenfolge ist zu berücksichtigen:

$$\left(1+\frac{x}{1!}\right)^6 = \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} i! \frac{x^i}{i!}$$

Für i = 3 ergeben sich für den Koeffizienten von $\frac{x^i}{i!}$

$$\binom{6}{3}.3! = \underline{120 \text{ Möglichkeiten}}$$

c) Wir entfernen zunächst e und bilden alle zweibuchstabigen Wörter ohne Wiederholung:

$$5.4 = 20 \text{ Möglichkeiten}$$

Da e an einer von drei Stellen stehen kann, gibt es

$$3.20 = \underline{60 \text{ Möglichkeiten}}$$

Erzeugende Funktion:

$$3.(1+ \frac{x}{1!})^5 = 3.\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} i! \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{5} 3.\binom{5}{i} i! \frac{x^i}{i!}$$

Für i = 2 ergeben sich für den Koeffizienten von $\frac{x^i}{i!}$

$$3.\binom{5}{2}.2! = \underline{60 \text{ Möglichkeiten}}$$

Anderer Ansatz der erzeugenden Funktion

$$x.(1+ \frac{x}{1!})^5 = x+5.2!.\frac{x^2}{2!} \underline{+10.3!.}\frac{x^3}{3!} +10.4!.\frac{x^4}{4!} +5.5!.\frac{x^5}{5!} +6!.\frac{x^6}{6!}$$

Wieder ergibt der Koeffizient von $\frac{x^3}{3!}$ den Wert 10.3! = 60

d) Wir bilden alle Wörter ohne e und ohne f. Da nach Entfernung von e und f nur mehr 4 Buchstaben verbleiben, gibt es

$$4.3.2 = 24 \text{ Möglichkeiten ohne e und f}$$

Da es nach b) insgesamt 120 Möglichkeiten überhaupt gibt, verbleiben

$$120 -24 = \underline{96 \text{ Möglichkeiten}}$$

Andere Überlegung:

Wörter ohne e (mit f) ... 3.(4.3) = 36 Möglichkeiten

Wörter ohne f (mit e) ... 3.(4.3) = 36 Möglichkeiten

Bei den Wörter mit e und f setzen wir e zunächst an eine von 3 Stellen. Dann bleiben für f noch 2 Stellen. Für den dritten Buchstaben gibt es dann noch 4 Möglichkeiten

Wörter mit e und f ... 3.2.4 = 24 Möglichkeiten

Insgesamt findet man wieder 36+36+24 = 96 Möglichkeiten

Erzeugende Funktion: Da e oder f oder (e und f) auftreten, lautet der erste Faktor des Aufzählers

$$(e+f)x+efx^2$$

Mit e = f = 1 lautet daher der Abzähler

$$(2x+x^2)(1+x)^4 = 2x+9.2!.\frac{x^2}{2!}+16.3!.\frac{x^3}{3!}+14.4!.\frac{x^4}{4!}+6.5!.\frac{x^5}{5!}+6!.\frac{x^6}{6!}$$

Der Koeffizient von $\frac{x^3}{3!}$ ergibt wieder 16.3!

= <u>96 Möglichkeiten</u>

19. *Auf wieviele Arten kann man mit zwei verschiedenen Würfeln eine durch drei teilbare Augenzahl erwürfeln?*

1. Experimentell:

3 = 1+2 = 2+1	2 Möglichkeiten
6 = 1+5 = 2+4 = 3+3 = 4+2 = 5+1	5 Möglichkeiten
9 = 3+6 = 4+5 = 5+4 = 6+3	4 Möglichkeiten
12 = 6+6	1 Möglichkeit
Zusammen	12 Möglichkeiten

2. Erzeugende Funktion

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2 = x^2\underline{+2x^3}+3x^4\underline{+5x^6}+6x^7 5x^8\underline{+4x^9}+3x^{10}+2x^{11}\underline{+x^{12}}$$

Die Summe der Koeffizienten der Potenzen mit durch drei teilbaren Exponenten ergibt

2+5+4+1 = <u>12 Möglichkeiten</u>

TUCKER S. 30

20. *Wieviele vierziffrige Zahlen*

a) mit Ziffernwiederholung

b) ohne Ziffernwiederholung

die durch 4 teilbar sind, kann man aus den Ziffern 1,2,3,4,5 bilden?

Eine durch vier teilbare Zahl hat die Eigenschaft, daß die aus den beiden letzten Ziffern gebildete Zahl durch vier teilbar ist. Es kommen daher nur folgende Möglichkeiten in Frage

a) ··12 ··32 ··52 ··24 ··44 5 Möglichkeiten

bei jeder dieser Möglichkeiten kann an jede der beiden freien

Stellen eine der gegebenen 5 Ziffern gesetzt werden. Daher

5.(5.5) = 125 Möglichkeiten

b) ··12 ··32 ··52 ··24 4 Möglichkeiten

4.(3.2) = 24 Möglicheiten

TUCKER S.32

21. *a) Wieviele n-stellige binäre Zahlen enthalten eine gerade Anzahl von Nullen (0 gilt als gerade Zahl, führende Nullen zugelassen)?*

b) Bei wievielen n-stelligen quaternären Zahlen ist die Summe der Anzahlen der in ihnen enthaltenen Nullen und Einsen gerade?

c) In wievielen n-stelligen quaternären Zahlen tritt die Null eine gerade Anzahl von Malen auf?

d) In wievielen n-stelligen quaternären Zahlen tritt sowohl die Null als auch die Eins eine gerade Anzahl von Malen auf?

a) Insgesamt gibt es 2^n binäre Zahlen, da jede der n Stellen mit Null oder Eins belegt werden kann.
Wir betrachten nun die 2^{n-1} (n−1)-stelligen Zahlen. Enthält eine (n−1)-stellige Zahl eine ungerade Anzahl von Nullen, so fügen wir als letzte Stelle eine 0 hinzu. Enthält eine (n−1)-stellige Zahl bereits eine gerade Anzahl von Nullen, so fügen wir eine 1 als letzte Stelle hinzu.
Es gibt also soviele binäre n-stellige Zahlen mit gerader Anzahl von Nullen, als es (n−1)-stellige binäre Zahlen gibt.

Es gibt 2^{n-1} n-stellige binäre Zahlen mit gerade Anzahl von Nullen

Andere Methode:

0 kommt nicht vor ... $\binom{n}{0}$ Möglichkeiten

0 kommt 2mal vor ... $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten

0 kommt 4mal vor ... $\binom{n}{4}$ Möglichkeiten

....

$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\ \dots$ Möglichkeiten insgesamt

Nun ist

$$\begin{array}{rl} (1+1)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+ \ldots\ldots & = 2^n \\ (1-1)^n = \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}-\binom{n}{4}+ \ldots\ldots & = 0 \\ \hline 2\binom{n}{0} \quad + 2\binom{n}{2} \quad +2\binom{n}{4}+ \ldots\ldots & = 2^n \end{array}$$

Daher gibt es

$$\underline{\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+ \ldots\ldots = 2^{n-1} \text{ Möglichkeiten}}$$

b) Es gibt 4^n quaternäre Zahlen. Wir betrachten die (n-1)-stelligen. Davon gibt es 4^{n-1}. Dabei existieren folgende Möglichkeiten

1. Die Zahl enthält bereits eine gerade Anzahl von Nullen + Einsen. Wir ergänzen die Zahl durch 2 oder 3.
2. Die Zahl enthält eine ungerade Anzahl von Nullen + Einsen. Dann kann man durch Hinzufügen von 0 oder 1 die Summe begradigen.

Aus jeder der 4^{n-1} (n-1)-stelligen quaternären Zahlen kann man auf 2 Arten eine n-stellige quaternäre Zahl herstellen, bei der die Summe der Nullen und Einsen gerade ist. Davon gibt es also

$$\underline{2.4^{n-1} = \frac{1}{2}4^n \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>Andere Lösungsmöglichkeit</u>

1 und 0 treten nicht auf. Dann können 2 und 3 auf

$$2^n \text{ Arten}$$

auf die vorhandenen n Stellen verteilt werden.

1 und 0 treten an 2 Stellen auf. Für die Auswahl dieser 2 Stellen gibt es $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten. 1 und 0 können auf 2^2 Arten auf diese Stellen verteilt werden, währen 2 und 3 auf 2^{n-2} Arten auf die verleibenden n-2 Stellen verteilt werden können:

$$2^2.2^{n-2}.\binom{n}{2} = 2^n\binom{n}{2} \text{ Möglichkeiten}$$

1 und 0 treten an 4 Stellen auf:

$$2^4.2^{n-4}.\binom{n}{4} = 2^n\binom{n}{4}$$ Möglichkeiten usw.

……………………………………

Daher insgesamt, bei Berücksichtigung des Ergebnisses von a)

$$2^n\binom{n}{0}+2^n\binom{n}{2}+2^n\binom{n}{4}+\ \dots\ = 2^n\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ \dots\right] = 2^n.2^{n-1} =$$

$$2^{2n-1} = \frac{1}{2}.2^{2n} = \underline{\frac{1}{2}.4^n \text{ Möglichkeiten}}$$

c) 1. 0 tritt nicht auf 3^n Möglichkeiten

2. 0 tritt 2mal auf. Da dies an $\binom{n}{2}$ Stellen eintreten kann, gibt es $3^{n-2}\binom{n}{2}$ Möglichkeiten

3. 0 tritt 4mal auf $3^{n-4}\binom{n}{4}$ Möglichkeiten

……………………………………………………………

Insgesamt daher $3^n\binom{n}{0}+3^{n-2}\binom{n}{2}+3^{n-4}\binom{n}{4}+3^{n-6}\binom{n}{6}+\ \dots$ Möglichkeiten

Nun ist

$$(3+1)^n = 3^n\binom{n}{0}+3^{n-1}\binom{n}{1}+3^{n-2}\binom{n}{2}+3^{n-3}\binom{n}{3}+3^{n-4}\binom{n}{4}+\ \dots\ = 4^n$$

$$(3-1)^n = 3^n\binom{n}{0}-3^{n-1}\binom{n}{1}+3^{n-2}\binom{n}{2}-3^{n-3}\binom{n}{3}+3^{n-4}\binom{n}{4}+\ \dots\ = 2^n$$

$$2\left[3^n\binom{n}{0}+3^{n-2}\binom{n}{2}+3^{n-4}\binom{n}{4}+\ \dots\ \right] = 4^n+2^n$$

Daher $\underline{\frac{1}{2}[4^n+2^n] \text{ Möglichkeiten}}$

Andere Überlegung: Wir teilen die Menge der 4^n quaternären Zahlen in zwei Gruppen:

1. Gruppe: 2^n Zahlen, die ausschließlch aus 2 und 3 bestehen (gerade Azahl von Nullen!)

2. Gruppe: Diese Zahlen enthalten neben 2 und 3 auch 1 und 0. Diese Gruppe umfaßt demnach 4^n-2^n Zahlen. Wir betrachten eine dieser Zahlen

$$\underbrace{23\cdots332\cdots22\cdot\cdot32\cdot\cdot}_{n \text{ Stellen}}$$

An Stelle der Punkte haben wir uns irgend eine Verteilung von 0 und 1 zu denken. Jeder festen Verteilung von 2 und 3 (z.B. wie oben) entspricht daher eine Menge von binären Zahlen, von denen nach a) genau die Hälfte eine gerade Anzahl von Nullen aufweist.

Daher gibt es in der 2.Gruppe $\frac{1}{2}[4^n-2^n]$ Zahlen mit gerader Anzahl von Nullen.
In beiden Gruppen zusammen gibt es daher

$$\frac{1}{2}[4^n-2^n]+2^n = \frac{1}{2}4^n+2^n-2^{n-1} = \frac{1}{2}4^n+2^{n-1}(2-1) = \frac{1}{2}4^n+2^{n-1} =$$

$$\underline{\frac{1}{2}[4^n+2^n] \text{ Möglichkeiten}}$$

d) Vorbemerkung: in einer binären n-stelligen Zahl können nur dann 0 und 1 beide geradzahlig auftreten, wenn n gerade ist.
Behauptung: Bei geradzahligem n hat genau die Hälfte der n-stelligen binären Zahlen die Eigenschaft, daß 0 und 1 beide geradzahlig auftreten.

Beweis: Wir stellen eine Bijektion zwischen jenen binären Zahlen her, in denen 0 und 1 je geradzahlig auftreten (paarige Zahle), und jenen binären Zahlen, in denen 0 und 1 je ungeradzahlig auftreten (unpaarige Zahlen).
Es sei die letzte Ziffer der paarigen binären Zahl eine 0 (1). Streichen wir diese weg und ersetzen sie durch eine 1 (0), so entsteht eine unpaarige Zahl.
Ist umgekehrt die letzte Ziffer einer unpaarigen binären Zahl eine 0 (1), so ergibt sich durch Ersatz durch 1 (0) eine paarige Zahl.
Nun wissen wir aus b), daß es $\frac{1}{2}4^n$ quaternäre Zahlen gibt, in denen 0 und 1 zusammen in gerader Zahl auftreten. Wir entfernen daraus die 2^n quaternären Zahlen, die nur 0 und 1 enthalten. In die verbleibenden $\frac{1}{2}4^n-2^n$ quaternären Zahlen vom Typus

23····332···22··32··

sind dann binäre Zahlen mit gerader Stellenzahl eingesprengt.
Die Hälfte dieser binären Zahlen ist paarig, sodaß zusammen mit den 2^n quaternären Zahlen ohne 1 und 0 die gesuchte Anzahl beträgt

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}4^n-2^n\right]+2^n = \frac{1}{4}4^n+\frac{1}{2}2^n = \underline{4^{n-1}+2^{n-1}\text{ Möglichkeiten}}$$

Andere Methode:

1. Wir trennen zunächst wieder die 2^n quaternären Zahlen ab, die nur 2 und 3 enthalten.

2. Wir konstruieren quaternäre Zahlen mit je gerad zahligen Anzahlen von 0 und 1, indem wir von den n Stellen eine gerade Anzahl 2i wegnehmen. Das ist auf $\binom{n}{2i}$ Arten möglich. Von diesen 2i Stellen besetzen wir 2j Stellen mit 0, die restlichen mit 1. Dies ist auf $\binom{2i}{2j}$ Arten möglich, also bei festem i und j auf

$$\binom{n}{2i}\cdot\binom{2i}{2j}$$

Arten. Die restlichen n-2i Stellen besetzen wir auf 2 Arten mit 2 und 3. Insgesamt gibt es demnach

$$\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}\sum_{j=0}^{2i}\binom{n}{2i}\cdot\binom{2i}{2j}.2^{n-2i} =$$

$$= \sum_{=1}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2i}.2^{n-2i}\left[\sum_{j=0}^{2i}\binom{2i}{2j}\right] = \sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2i}.2^{n-2i}\underbrace{\left[\binom{2i}{2j}+\binom{2i}{2j}+\binom{2i}{2j}+\ \dots\right]}_{2^{2i-1}\text{ wegen a)}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2i}.2^{n-2i}.2^{2i-1} = 2^{n-1}.\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2i} =$$

$$= 2^{n-1}\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\ \dots+\binom{n}{0}-\binom{n}{0}\right] = 2^{n-1}[2^{n-1}\ -1] = 2^{2n-2}-2^{n-1}$$

Fügen wir die unter Punkt 1. weggenommenen 2 Möglichkeiten hinzu, so gilt

$$2^{2n-2}-2^{n-1}+2^n = \frac{2^{2n}}{2^2}+2^{n-1}(2-1) = \frac{4^n}{4}+\frac{2^n}{2} =$$

$$= \underline{4^{n-1}+2^{n-1}\text{ Möglichkeiten}}$$

LIU S. 7

22. *Wieviele "Wörter" mit drei Buchstaben kann man ohne Buchstabenwiederholung aus dem Vorrat a,b,c,d,e,f,g,h bilden, wenn der Buchstabe e* X

a) stets

b) nie vorkommt?

a) e kann an 1., 2. oder 3. Stelle stehen

3.7.6 = 126 Möglichkeiten

$x\left(1+\frac{x}{1!}\right)^7 = x\sum_{i=0}^{7}\binom{7}{i}x^i = \frac{x}{1!}+2!\cdot 7\frac{x^2}{2}+\underbrace{3!\cdot 21}_{126}\frac{x^3}{3!}+\cdots$

b) 7.6.5 = 210 Möglichkeiten

$\left(1+\frac{x}{1!}\right)^7 = 1+1!\cdot 7\cdot\frac{x}{1!}+2!\cdot 21\cdot\frac{x^2}{2!}+\underbrace{3!\binom{7}{3}}_{210}\cdot\frac{x^3}{3!}$

23. *Wieviele gerade dreistellige Zahlen mit verschiedenen Ziffern gibt es?*

Die letzte Ziffer muß 0 oder eine gerade Zahl sein.
Wenn die letzte Ziffer 0 ist, kann an den beiden ersten Stellen je eine der Ziffern 1,2,3,...,9 stehen:

9.8 = 72 Möglichkeiten

Steht an der letzten Stelle eine gerade Zahl ≠ 0 (also eine der 4 Zahlen 2,4,6,8), so können an der 1. Stelle 8 Zahlen (ohne 0), an der 2. Stelle wieder 8 Zahlen (diesmal mit 0) stehen:

4.8.8 = 256 Möglichkeiten

Insgesamt also

72+256 = 328 Möglichkeiten

EISEN S. 16

24. *Auf viele Arten können 10 Mann in einer Reihe aufgestellt werden, wenn drei bestimmte Leute stets nebeneinader stehen sollen?*

Die drei bestimmten Leute können auf 3! Arten nebeneinander aufgestellt werden. Faßt man sie dann als ein Element auf, so gibt es noch zusammen 8 Elemente, die in einer Reihe angeordnet werden können

....(ooo)...

3!8! = 241920 Möglichkeiten

EISEN S. 16

25. *Auf wieviele Arten können 7 Perlen mit verschiedenen Farben zu verschiedenen Halsbändern angeordnet werden?* 2

Da man das Halsband verdrehen kann, läßt sich eine bestimmte Farbe stets an eine bestimmte Stelle bringen. Die restlichen 6 Perlen lassen sich dann auf 6! Arten anordnen. Spiegelt man ein Halsband an einer Geraden, so ist die Anordnung zwar verschieden, aber die neue Anordnung wir nicht als verschieden angesehen. Daher

$$\underline{\frac{6!}{2} = 360 \text{ verschiedene Halsbänder}}$$

26. *Auf wieviele Arten können 5 Herren und 4 Damen in einer Reihe gesetzt werden, sodaß stets eine Dame zwischen zwei Herren sitzt?*

HDHDHDHDH

Die Herren können auf 5!, die Damen auf 4! Arten auf ihre Plätze gesetzt werden:

$$\underline{5!4! = 2880 \text{ Möglichkeiten}}$$

EISEN S. 18

27. *An einer Bahnstrecke legen m Stationen. Wieviele Fahrkartentypen müssen gedruckt werden, damit man von jeder Station zu jeder anderen fahren kann?*

$$\underline{m(m-1) \text{ Typen}}$$

EISEN S. 18

28. *Jeder Tag werde als sonnig, verregnet oder bewölkt beschrieben. Nach wievielen Jahren spätestens muß sich die Wetterbeschreibung einer ganzen Woche wiederholen?*

Für jeden Tag gibt es drei Möglichkeiten, innerhalb eine Woche daher 3^7 Möglichkeiten. Da ein Jahr 52 Wochen hat, muß sich die Bescheibung einer Woche innerhalb

$$\frac{3^7}{52} = 42{,}0577 \text{ Jahre} = \underline{42 \text{ Jahre } 3 \text{ Wochen}} \text{ wiederholen}$$

EISEN S. 19

29. *Wieviele Möglichkeiten gibt es, durch sechsmaliges Werfen eines*

Würfels eine Serie zu erhalten, in der einmal "1", dreimal "5" und zweimal "6" aufscheint?

Die sechs Würfe sind mit den Elementen 1,5,5,5,6,6 zu belegen

$$\underline{\frac{6!}{1!3!2!} = 60 \text{ Möglichkeiten}}$$

TUCKER. 48

30. *a) Wieviele Zahlen zwischen 100 000 und 1 000 000 enthalten bloß die Ziffern 3,5 und 7?*
b)Welchen Bruchteil der in a) bestimmten Anzahl bilden die Zahlen, die je zwei "3","5","7" enthalten?

a) Jede der sechs Stellen kann mit 3,5 bzw. 7 besetzt werden

$$\underline{3^6 = 729 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) Die sechs Stellen werden durch je 2 gleiche Ziffern besetzt

$$\frac{6!}{2!2!2!} = 90 \text{ Möglichkeiten}$$

Daher

$$\frac{90}{729} = 0{,}1235 \ldots \underline{12{,}35 \text{ \% aller Zahlen}}$$

TUCKER S. 48

31. *Wieviele Möglicheiten gibt es, jeweils eine von drei Personen an sechs verschiedenen Tagen einzuladen, sodaß keine Person mehr als dreimal geladen ist?*

1.Lösungsweg:

1. Eine Person wird 3mal, eine 2mal, eine 1mal eingeladen

$$\text{AAABBC} \qquad \frac{6!}{3!2!1!}$$

Da diese Aufteilung unter die drei Personen auf 3! Arten möglch ist, gibt es

$$3!.\frac{6!}{3!2!1!} = \underline{360 \text{ Möglichkeiten}}$$

2. Jede Person wird 2mal eingeladen

$$\text{AABBCC} \qquad \frac{6!}{2!2!2!} = \underline{90 \text{ Möglchkeiten}}$$

3. Eine Person wird übergangen

AAABBB $\frac{6!}{3!3!} = 60$ Möglchkeiten

Da jede der drei Personen übergangen werden kann, gibt es

$$3.\frac{6!}{3!3!} = \underline{60 \text{ Möglichkeiten}}$$

Insgesamt gibt es demnach

$$360+90+60 = \underline{510 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>2.</u> <u>Lösungsweg:</u> Erzeugendes Polynom. die Exponenten stellen die Anzahl der Einladungen dar.

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)^3 = 3x+\frac{9}{2}.2!.\frac{x^2}{2!}+\frac{9}{2}.3!.\frac{x^3}{3!}+\frac{13}{4}.4!.\frac{x^4}{4!}+$$

$$+\frac{7}{4}.5!.\frac{x^5}{5!}+\frac{17}{24}.6!.\frac{x^6}{6!}+\frac{5}{24}.7!.\frac{x^7}{7!}+\frac{1}{24}.8!.\frac{x^8}{8!}+\frac{1}{216}.9!.\frac{x^9}{9!}$$

Dem Koeffizienten von $\frac{x^6}{6!}$ entnimmt man

$$\frac{17}{24}.6! = \underline{510 \text{ Möglichkeiten}}$$

32. *Ein Komitee von k Personen soll aus einer Kandidatenmenge von 7 Frauen und 4 Männern gebildet werden, wenn gilt*

a) k = 5, das Komitee soll aus drei Frauen und 2 Männern bestehen.

b) k sei beliebig. Es müssen aber stets gleichviele Frauen und Männer dem Komitee angehören

c) k = 4, mindestens zwei Frauen gehören dem Komtee an

d) k = 4, ein Mitglied muß Herr A sein

e) k = 4, Herr A und Frau B dürfen nicht gleichzeitig dem Komitee angehören

f) k = 4, das Komitee besteht aus 2 Männern und 2 Frauen, aber Herr A und Frau B dürfen nicht gleichzeitig dem Komitee angehören.

a) Wir wählen 3 Frauen aus ... $\binom{7}{3} = 35$ Möglichkeiten

Wir wählen 2 Männer aus ... $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten

Zusammen daher 35.6 = <u>210 Möglichkeiten</u>

b) k kann die Werte 2,4,6,8 annehmen, da maximal 4 Männer dem Komitee angehören können. Daher insgesamt

$$\binom{7}{1}\binom{4}{1}+\binom{7}{2}\binom{4}{2}+\binom{7}{3}\binom{4}{3}+\binom{7}{4}\binom{4}{4} = \underline{329 \text{ Möglichkeiten}}$$

c) Die Zusammensetzung kann sein 2F+2M, 3F+1M,4F. Daher

$$\binom{7}{2}\binom{4}{2}+\binom{7}{3}\binom{4}{1}+\binom{7}{4}\binom{4}{0} = \underline{301 \text{ Möglichkeiten}}$$

d) Da Herr A ein Mitglied sein muß, kann man nur mehr unter den restlichen drei Männern wählen. Wegen k = 4 gibt es daher die Möglichkeiten: 3F, 2F+1M, 1F+2M, 3M

$$\binom{7}{3}\binom{3}{0}+\binom{7}{2}\binom{3}{1}+\binom{7}{1}\binom{3}{2}+\binom{7}{0}\binom{3}{3} = \underline{120 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>oder</u>

aus den verbleibenden 10 Kandidaten sind beliebige 3 zu wählen

$$\binom{10}{3} = \underline{120 \text{ Möglichkeiten}}$$

e) Es gibt folgende Fälle

1. A ja, B nein: 3M, 2M+1F, 1M+2F, 3F

$$\binom{3}{3}\binom{6}{0}+\binom{3}{2}\binom{6}{1}+\binom{3}{1}\binom{6}{2}+\binom{3}{0}\binom{6}{3} = \underline{84 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>oder</u>

Auswahl von 3 beliebigen Kandidaten aus den verbleibenden 9

$$\binom{9}{3} = \underline{84 \text{ Möglichkeiten}}$$

2. A nein, B ja: 3M, 2M+1F, 1M+2F, 3F. Wie unter e):

<u>84 Möglichkeiten</u>

3. A nein, B nein: 4M nicht möglich, 3M+1F, 2M+2F, 1M+3F, 4F

$$\binom{3}{3}\binom{6}{1}+\binom{3}{2}\binom{6}{2}+\binom{3}{1}\binom{6}{3}+\binom{3}{0}\binom{6}{4} = \underline{126 \text{ Möglichkeiten}}$$

daher zusammen 84+84+126 = <u>294 Möglichkeiten</u>

<u>oder</u>

Wir bilden alle $\binom{11}{4}$ = 330 Möglichkeiten für ein 4-Personenkomitee und ziehen die verbotenen $\binom{9}{2}$ Möglichkeiten, daß nämlich A und B gemeinsam dabei sind, ab

$$\binom{11}{4}-\binom{9}{2} = 330 - 36 = \underline{294 \text{ Möglichkeiten}}$$

f) 1. A ja, B nein: 1M+1F

$$\binom{3}{1}\binom{6}{2} = \underline{45 \text{ Möglichkeiten}}$$

2. A nein, B ja: 2M+1F

$$\binom{3}{2}\binom{6}{1} = \underline{18 \text{ Möglichkeiten}}$$

3. A nein, B nein, 2M+2F

$$\binom{3}{2}\binom{6}{2} = \underline{45 \text{ Möglichkeiten}}$$

Insgesamt daher 45+18+45 = <u>108 Möglichkeiten</u>

<u>oder</u>

Von allen Möglichkeiten eines (2M+2F)-Komitees sind jene abzuziehen, in denen A und B gleichzeitig anwesend sind

$$\binom{7}{2}\binom{4}{2}-\binom{6}{1}\binom{3}{1} = \underline{108 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>Lösungen mit erzeugendem Polynom</u>

Jede der 7 Frauen $f_1,\dots,f_7$ und jeder der 4 Männer $m_1,\dots,m_4$ kann gewählt werden oder nicht gewählt werden. Daher lautet der <u>Aufzähler</u>:

$$(1+f_1x)(1+f_2x)\dots(1+f_7x)(1+f_1y)\dots(1+f_4y)$$

Da die beteiligten Personen nicht nur durch ihre individuellen Namen f_i bzw. m_j, sondern auch durch ihr Geschlecht unterschieden werden, ist es erforderlich, auch die Unbestimmten mit x und y zu benennen.

Da bei der voliegenden Fragestellung nicht zwischen den verschiedenen Frauen und Männern unterschieden wird, können wir

$$f_1 = \dots = f_7 = f$$
$$m_1 = \dots = m_4 = m$$

setzen. Der <u>Aufzähler</u> lautet daher

$$(1+fx)^7(1+my)^4$$

Zum <u>Abzähler</u> gelangen wir, wenn wir

$$f = m = 1$$

setzen. Der Abzähler lautet daher

$$(1+x)^7(1+y)^4 = \sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} x^i \cdot \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} y^j = \underline{\sum_{i=0}^{7} \sum_{j=0}^{4} \binom{7}{i}\binom{4}{j} x^i y^j}$$

i ... Anzahl der Frauen, j ... Anzahl der Männer

<u>Achtung:</u> Es wäre falsch für Männer und Frauen dieselbe Unbestimmte x zu verwenden. da dann im Abzähler $(1+x)^{11}$ kein Unterschied zwischen Männern und Frauen gemacht würde.

a) $i = 3$, $j = 2$. Von der Doppelsumme gilt nur der Koeffizient

$$\binom{7}{3}\binom{4}{2} = \underline{210}$$

b) Es muß stets $i = j$ gelten, wobei $1 \leq i = j \leq 4$ ist.

$$\sum_{i=1}^{4} \binom{7}{i}\binom{4}{i} = \binom{7}{1}\binom{4}{1}+\binom{7}{2}\binom{4}{2}+\binom{7}{3}\binom{4}{3}+\binom{7}{4}\binom{4}{4} = \underline{329}$$

c) $i+j = 4$, $i \geq 2 \Rightarrow j = 4-i$

$$\sum_{i=2}^{4} \binom{7}{i}\binom{4}{4-i} = \binom{7}{2}\binom{4}{2}+\binom{7}{3}\binom{4}{1}+\binom{7}{4}\binom{4}{0} = \underline{301}$$

d) $i+j = 3 \Rightarrow j = 3-i$. Es gibt nur mehr 3 Männer zur Auswahl

$$\sum_{i=0}^{3} \binom{7}{i}\binom{3}{3-i} = \binom{7}{0}\binom{3}{3}+\binom{7}{1}\binom{3}{2}+\binom{7}{2}\binom{3}{1}+\binom{7}{3}\binom{3}{0} = \underline{120}$$

e) Die Tatsache, daß A und B nicht gleichzeitig gewählt werden können, drückt sich im Aufzähler durch den Faktor

$$1+Bx+Ay$$

aus. Im Abzähler tritt daher der Faktor

$$1+x+y$$

auf. Von den restlichen 6 Frauen und 3 Männern kann aber eine beliebige Auswahl getroffen werden.

Der Abzähler lautet daher

$$(1+x+y)(1+x)^6(1+y)^3 = (1+x+y) \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} x^i \cdot \sum_{j=0}^{3} \binom{3}{j} y^j =$$

$$=\sum_{i=0}^{6}\sum_{j=0}^{3}\binom{6}{i}\binom{3}{j}x^iy^j+\sum_{i=0}^{6}\sum_{j=0}^{3}\binom{6}{i}\binom{3}{j}x^{i+1}y^j+\sum_{i=0}^{6}\sum_{j=0}^{3}\binom{6}{i}\binom{3}{j}x^iy^{j+1}$$

In jeder dieser Doppelsummen muß die Summe der Exponenten gleich 4 sein

Erste Doppelsumme: $i+j = 4 \Rightarrow j = 4-i \Rightarrow$

$$\sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}\binom{3}{4-i} = \binom{6}{0}\binom{3}{4}+\binom{6}{1}\binom{3}{3}+\binom{6}{2}\binom{3}{2}+\binom{6}{3}\binom{3}{1}+\binom{6}{4}\binom{3}{0} = \underline{126}$$

In der 2. und 3. Doppelsumme gilt beidemale $i+j+1 = 4 \Rightarrow j = 3-i$

$$2.\sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}\binom{3}{3-i} = 2.\left[\binom{6}{0}\binom{3}{3}+\binom{6}{1}\binom{3}{2}+\binom{6}{2}\binom{3}{1}+\binom{6}{3}\binom{3}{0}\right] = \underline{168}$$

Insgesamt daher $126+168 = \underline{294}$

f) Hier liegt derselbe Aufzähler vor wie in e), nur sind jetzt die Exponenten von x und y immer $i = j = 2$. Daher ergeben sich die Summanden

$$\binom{6}{2}\binom{3}{2}+\binom{6}{1}\binom{3}{2}+\binom{6}{2}\binom{3}{1} = \underline{108}$$

33. *Wieviele Zahlen $1 \leq x \leq 1000$ enthalten die Ziffer 1?*

1. Methode

Zahlen mt einer 1: 1 kann an einer von drei Stellen stehen, während an den beiden anderen Stellen je eine der Ziffern 0,2,...,9 stehen kann:

$3.9^2 = \underline{243}$ Möglichkeiten

Zahlen mit zwei 1: Die beiden 1 kann man auf $\binom{3}{2}$ Arten auf zwei der Stellen setzen, während an der dritten Stelle 0,2,...,9 stehen kann:

$\binom{3}{2}.9 = \underline{27}$ Möglichkeiten

Zahlen mit drei 1: Es gibt nur 111:

1 Möglichkeit

Zuletzt kommt noch 1000 dazu, daher insgesamt

$243+27+1+1 = \underline{272}$ Möglichkeiten

2. Methode:

Wir ziehen von den insgesamt 1000 Zahlen $000 \leq x \leq 999$ jene ab, die keine Eins enthalten. Bei diesen Zahlen ist jede Stelle mit 0,2,...,9 besetzt, d.h. es gibt

$$9^3 = 729 \text{ Zahlen ohne Eins}$$

von denen noch 000 abzuziehen ist, sodaß insgesamt 728 Fälle übrig bleiben. Daher

$$1000-728 = \underline{272 \text{ Möglicheiten}}$$

LIU S.6

34. *In wieviel n-stelligen quaternären Zahlen tritt*

a) die Ziffer Null überhaupt nicht auf?

b) die Ziffer Null genau einmal auf?

c) die Ziffer Null genau zweimal auf?

d) die Ziffer Null mindestens einmal auf?

a) Die n Stellen können nur mehr mit 1, 2, 3 besetzt werden

$$\underline{3^n \text{ Möglichkeiten}}$$

b) 0 kann an n Stellen auftreten, die restlichen n-1 Stellen werden mit 1,2,3 besetzt

$$\underline{n.3^{n-1} \text{ Möglichkeiten}}$$

c) Wir wählen zwei Stellen für die Null. Die restlichen n-2 Stellen können mit 1,2,3 besetzt werden

$$\underline{\binom{n}{2}.3^{n-2} \text{ Möglichkeiten}}$$

d) Wie ziehen von den 4^n quaternären Zahlen jene ab, die überhaupt keine Null enthalten. (siehe a))

$$\underline{4^n-3^n \text{ Möglichkeiten}}$$

35. *Gegeben seien n Gerade. Wieviele Dreiecke werden von ihnen gebildet, wenn*

a) keine drei Geraden durch denselben Punkt gehen und keine Parallelen auftreten?

b) m der gegebenen Gerade durch denselben Punkt gehen?

c) m der gegebenen Geraden untereinander parallel sind?

a) je drei der n Geraden bilden ein Dreieck:

$$\underline{\binom{n}{3}\text{ Dreiecke}}$$

b) Je drei der m schneidenden Geraden bilden kein Dreieck

$$\underline{\binom{n}{3}-\binom{m}{3}\text{ Dreiecke}}$$

c) Je zwei der parallelen Geraden bilden mit jeder der restlichen (n-m) Geraden kein Dreieck, ebenso bilden je 3 der untereinander parallelen Geraden kein Dreieck

$$\underline{\binom{n}{3}-\binom{m}{3}-(n-m)\binom{m}{2}\text{ Dreiecke}}$$

TUCKER S. 44

36. *Welches ist die Maximalzahl von Schnittpunkten von*

a) 10 Geraden

b) 6 Kreisen

c) 7 Geraden und 4 Kreisen?

a) $\binom{10}{2} = 45$

b) $2.\binom{6}{2} = 30$

c) $\binom{7}{2}+2.\binom{4}{2}+7.4.2 = 89$

37. *Gegeben sei ein konvexes n-Eck, von dem keine drei Diagonalen durch denselben Punkt gehen,*

a) 1. Wieviele Diagonalen gibt es?

2. Wieviele Diagonalenschnittpunkte?

b) In wieviele Strecken werden die Diagonalen durch ihre wechselweisen Schnittpunkte geteilt?

c) Wieviele im Innern des n-Ecks liegende Dreiecke werden durch die Diagonalen gebildet (keine Dreiecksecke fällt mit einer n-Ecksecke zusammen)?

d) Wieviele Dreiecke bilden alle Diagonalen, wenn auch die Polygonecken Dreiecksecken sein können?

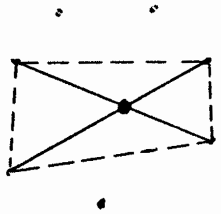
a) 1. Die Verbindung je zweier Ecken ergibt eine Diagonale, wobei allerdings die Polygonseiten abzuziehen sind

$$\binom{n}{2}-n = \frac{n(n-1)}{2}-n = \frac{n(n-3)}{2} \text{ Diagonalen}$$

Andere Überlegung:

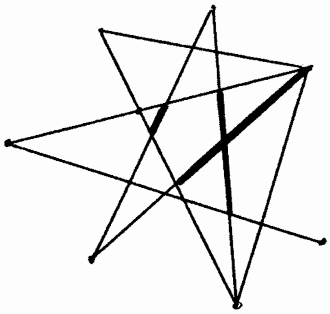
Von jedem Eckpunkt des Polygons gehen n-3 von den Polygonseiten verschiede Diagonalen aus, die allerding doppelt gezählt werden:

$$\frac{n(n-3)}{2} \text{ Diagonalen}$$



2. Jeder Schnittpunkt zweier Diagonalen ist auch Diagonalenschnittpunkt eines dem Polygon eingeschriebenen Verecks. Der zusammenhang zwischen Diagonalenschnittpunkten und Vierecken ist bijektiv. Daher

$$\binom{n}{4} \text{ Diagonalenschnittpunkte}$$



b) Liegen auf einer Diagonalen k Diagonalenschnittpunkte (k ist von Diagonale zu Dagonale verschieden!!), so bilden diese mit den Eckpunkten

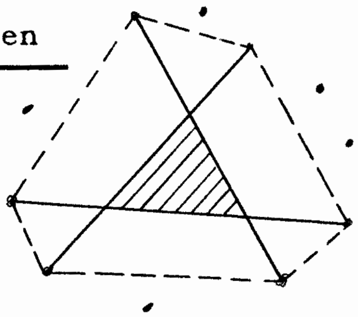
k+1 Strecken

Jeder Punkt im Innern begrenzt 4 Strekken, von denen allerdings jede doppelt gezählt wird. Daher gibt es insgesamt

$$\frac{1}{2}\,4\binom{n}{4}+\underbrace{\frac{n(n-3)}{2}}_{\text{eine Zusatzstrecke pro Diagonale}} \text{ Strecken}$$

$$2\binom{n}{4}+\frac{n(n-3)}{2} = 2.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}+\frac{n(n-3)}{2} =$$

$$= \frac{n(n-3)}{12}\,[n^2-3n+8] \text{ Strecken}$$



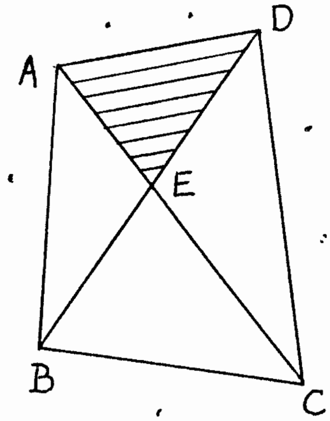
c) Jedem von Diagonalen gebildetem inneren Dreieck entspricht bijektiv ein dem Polygon eingeschriebenes Sechseck. Daher

$$\binom{n}{6} \text{ innere Dreiecke}$$

d) Für Dreiecke, deren Ecken n Polygonecken liegen, gibt es folgende Möglichkeiten

1. Alle Dreiecksecken sind Polygonecken (z.B. ABC)

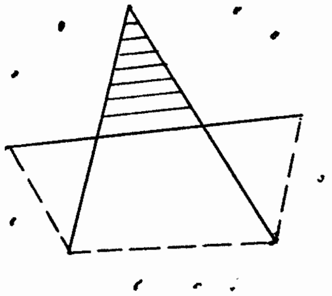
$$\binom{n}{3} \text{ Möglichkeiten}$$



2. Zwei Dreiecksecken sind Polygonecken (z.B. ABE). Zu jedem inneren Punkt gibt es 4 derartige Dreiecke, die von den Diagonalen eines eingeschriebenen Vierecks gebildet werden.

$$4\binom{n}{4} \text{ Möglichkeiten}$$

3. Ein Dreieckseckpunkt ist Polygoneckpunkt. Wählen wir einen Polygoneckpunkt aus, so entspricht jedem Dreieck mit diesem Eckpunkt bijektiv ein Viereck:



$$n\binom{n-1}{4} \text{ Möglichkeiten}$$

Insgesamt gibt es daher

$$\binom{n}{6}+\binom{n}{3}+4\binom{n}{4}+n\binom{n-1}{4} \text{ Möglichkeiten}$$

Nun ist

$$4\binom{n}{4}+n\binom{n-1}{4} = 4\frac{n!}{4!(n-4)!} + \frac{\overbrace{n.(n-1)!}^{n!}}{4!(n-5)!} = \frac{n!}{4!(n-4)!}[4+n-4] = n\binom{n}{4}$$

Daher

$$\underline{\binom{n}{6}+\binom{n}{3}+n\binom{n}{4} \text{ Möglichkeiten}}$$

LIU S. 8

38. *Sieben Wissenschaftler arbeiten an einem Geheimprojekt, dessen Pläne in einem Safe verschlossen sind. Bei Öffnng des Safes müssen mindestens vier Wissenschaftler anwesend sein, drei Wissen-*

schaftler allein können den Tresor nicht öffnen.

a) Welche Mindestzahl von Schlössern muß das Safe aufweisen?

b) Wieviele Schlüssel muß jeder Wissenschaftler mindestens haben, damit er mit beiebigen drei anderen das Safe öffnen kann?

c) Wieviele Schlüssel müssen für jedes Schloß angefertigt werden?

d) Wieviele Schlüssel muß der Projektleiter (der mit keinem der sieben Wissenschaftler identisch ist) besitzen, damit er mit jedem Wissenschaftler zusammen aufsperren kann?

e) Der Wissenschaftler A verschafft sich ein Duplikat eines Schlüssels, den er noch nicht besitzt. Wieviele Tripel von Wissenschaftlern (denen A angehört) können nun aufsperren?

f) Wieviele Schlösser sind erforderlich und wieviele Schlüssel muß jeder besitzen, wenn wie früher nur eine Majorität von 4 Wissenschaftlern oder jedes A enthaltende Tripel von Wissenschaftlern öffnen kann, wenn dies A allein nicht möglich ist?

a) Da drei Wissensch. das Schloß nicht öffnen können, muß es für jedes Tripel von Wissensch. mindestens ein Schloß geben, für das keiner von den dreien einen Schlüssel hat, d.h. zu jedem Tripel von Wissensch. muß es ein für dieses Tripel nicht aufsperrbares Schloß geben. D.h. es gibt mind$\overset{e}{s}$tens

$$\underline{\binom{7}{3} = 35 \text{ Schlösser}}$$

b) Jeder Wissensch. muß so viele Schlüssel besitzen, daß er mit jedem Tripel, gebildet von drei anderen Wissensch., aufsperren kann. Er muß also einen Schlüssel besitzen, welcher das Schloß sperrt, das beliebige Tripel der anderen 6 Wissensch. nicht öffnen können:

$$\underline{\binom{6}{3} = 20 \text{ Schlüssel}}$$

muß jeder Wissensch. mindestens besitzen.

c) Da jeder Wissensch. 20 Schlüssel besitzt, müssen insgesamt

$$\underline{7.20 = 140 \text{ Schlüssel}}$$

angefertigt werden,

$$\underline{\frac{140}{35} = 4 \text{ Schlüssel für jedes Schloß}}$$

Es ist noch zu überprüfen, ob diese Mindestzahlen ausreichen:

Siehe Tabelle auf Seite 29

d) Der Projektleiter muß jene Schlüssel besitzen, die den Schlüsselsatz jedes Wissensch. auf alle 35 Schlösser ergänzt. Da die Lücken der Schlüsselsätze alle 35 Schlösser betreffen, muß der Projektleiter Schlüssel zu allen 35 Schlössern besitzen.

e) Jedem Tripel von Wissensch., denen A angehört, fehlt ein Schlüssel. Nun gibt es genau ein Tripel, dem der gestohlene Schlüssel fehlt. Nur dieses eine Tripel kann mit Hilfe des gestohlenen Schlüssel aufsperren.

f) Wir sehen zunächst von A ab. Dann sollen von den verbleibenden 6 Wissensch. nur je 4 aufsperren können, während zu jedem Tripel von ihnen ein nicht aufsperrbares Schloß gehört, also

$$\binom{6}{3} = 20 \text{ Schlösser}$$

Jeder Wissensch. muß mit jedem Tripel der restlichen 5 Wissensch. aufsperren können. Er muß als jene Schlüssel besitzen, welche die Schlüssel der $\binom{5}{3} = 10$ Tripel ergänzen. Also 10 Schlüssel pro Wissensch. (ohne A). Da jeder Wissensch. 10 Schlüssel besitzt, muß man mindestens 6.10 = 60 Schlüssel herstellen, d.h. 3 Schlüssel pro Schloß. Jedes Quadrupel, gebildet aus den 6 Wissensch., kann also aufsperren.

Nun soll aber, wenn A einem Tripel angehört, bereits dieses Tripel aufsperren können. A muß also jeden Schlüsselsatz eines Paares zu einem kompletten Satz ergänzen. Er muß also alle 20 Schlüssel besitzen. In diesem Falle wäre A im Stande, allein alle Schlösser zu sperren, was auch nicht sein darf. Man muß also ein 21. Schloß anbringen, zu dem A keinen, aber alle anderen einen Schlüssel haben

21 Schlösser
11 Schlüssel für Wissenschaftler 1-6
20 Schlüssel für A

Siehe Tabelle auf Seite 30

Wissenschaftler

Schlösser	1	2	3	4	5	6	7
1	●	●	●	●			
2	●	●	●		●		
3	●	●	●			●	
4	●	●	●				●
5	●	●		●	●		
6	●	●		●		●	
7	●	●		●			●
8	●	●			●	●	
9	●	●			●		●
10	●	●				●	●
11	●		●	●	●		
12	●		●	●		●	
13	●		●	●			●
14	●		●		●	●	
15	●		●		●		●
16	●		●			●	●
17	●			●	●	●	
18	●			●	●		●
19	●			●		●	●
20	●				●	●	●
21		●	●	●	●		
22		●	●	●		●	
23		●	●	●			●
24		●	●		●	●	
25		●	●		●		●
26		●	●			●	●
27		●		●	●	●	
28		●		●	●		●
29		●		●		●	●
30		●			●	●	●
31			●	●	●	●	
32			●	●	●		●
33			●	●		●	●
34			●		●	●	●
35				●	●	●	●

Jedes Wissenschaftlertripel hat zusammen 34 verschiedene Schlüssel, da jedem Tripel genau ein Schlüssel fehlt.
Jedes Paar von Wissenschaftlern läßt sich auf 5 Arten zu einem Tripel ergänzen, d.h. jedem Paar fehlen fünf Schlüssel auf die erforderliche 35.
Jedes Paar hat also Schlüssel für 30 Schlösser, denn jeder zu dem Paar hinzuttretende Wissenschaftler ergänzt den Schlüsselsatz, sodaß 34 Schlösser aufgesperrt werden können. Es fehlt also bei jeder Ergänzung noch ein Schlüssel für das 35.Schloß.
Zu jedem Quartett kann es nur einen einzigen Schlüssel geben, mit dem alle 4 Wissenschaftler dasselbe Schloß sperren können

	Wissenschaftler						
Schlösser	A	1	2	3	4	5	6
1	•	•	•	•			
2	•	•	•		•		
3	•	•	•			•	
4	•	•	•				•
5	•	•		•	•		
6	•	•		•		•	
7	•	•		•			•
8	•	•			•	•	
9	•	•			•		•
10	•	•				•	•
11	•		•	•	•		
12	•		•	•		•	
13	•		•	•			•
14	•		•		•	•	
15	•		•		•		•
16	•		•			•	•
17	•			•	•	•	
18	•			•	•		•
19	•			•		•	•
20	•				•	•	•
21			•	•	•	•	•

EISEN S. 20, LIU S. 8

39. *Auf wieviele Arten kann aus den Zahlen 1,2,...,300 eine durch 3 teilbare Summe von drei* verschiedenen *Summanden gebildet werden?*

Bezüglich der Teilbarkeit durch 3 haben die ganzen Zahlen die Gestalt

3a, 3a+1, 3a+2

Jede dieser Klassen enthält in unserem Fall genau 100 Elemente

3a	{3,6,9,...,300}
3a+1	{1,4,7,...,298}
3a+2	{2,5,8,...,299}

Durch 3 teilbar sind folgende Summen

$3a_1 + 3a_2 + 3a_3$ $\binom{100}{3}$ Möglicheiten

$(3b_1+1)+(3b_2+1)+(3b_3+1)$ $\binom{100}{3}$ Möglichkeiten

$(3c_1+2)+(3c_2+2)+(3c_3+2)$ $\binom{100}{3}$ Möglichkeiten

$3a + (3b+1)+(3c+2)$ 100^3 Möglichkeiten

Daher insgesamt

$$\binom{100}{3}+\binom{100}{3}+\binom{100}{3}+100^3 = \underline{1\ 485\ 100 \text{ Möglichkeiten}}$$

LIU S. 9

40. *Wieviele verschiedene Wörter von 5 Buchstaben kann man aus dem Vorrat aaaaa, bbb, cc, ddd, ee, f, gggg bilden?*

Es gibt folgende Möglichkeiten:

1. lauter gleiche Buchstaben 1 Möglichkeit
2. 4 gleiche, 1 anderer Buchstabe

   Das kann mit den a geschehen, wobei jeweils einer der 6 anderen Buchstaben an 5 Stellen eingeschoben werden kann $6.5 = 30$ Möglichkeiten

   Dasselbe für g 30 Möglichkeiten
3. 3 gleiche mit 2 gleichen Buchstaben

   Das kann mit a, b, d geschehen. wo jedesmal auf 5 Arten zwei Buchstaben eingeschoben werden können $4.5.\frac{5!}{3!2!} = 200$ Möglichkeiten
4. 3 gleiche, 2 verschiedene $4.\binom{6}{2}.\frac{5!}{3!} = 1200$ Möglichkeiten
5. 2mal 2 gleiche, 1 versch. $\binom{6}{2}.5.\frac{5!}{2!2!} = 2250$ Möglichkeiten
6. 2 gleiche, 3 versch. $6.\binom{6}{3}.\frac{5!}{2!} = 7200$ Möglichkeiten
7. 5 verschiedene $\binom{7}{5}.5! = 2520$ Möglichkeiten

Insgesamt daher

1+60+200+1200+2250+7200+2520 = 13431 Möglichkeiten

Erzeugende Funktionen

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right) =$$

$$= 1+7x+24.2!.\frac{x^2}{2!}+\frac{161}{3}.3!.\frac{x^3}{3!}+\frac{527}{6}.4!.\frac{x^4}{4!}+\frac{4477}{40}.5!.\frac{x^5}{4!}+ \ \dots$$

Der Koeffizient $\frac{4477}{40}.5! = 13431$ von $\frac{x^5}{5!}$ ergibt die Anzahl der Möglichkeiten.

EISEN S. 21

41. *Die Resultate von 25 Fußballspielen sollen getipt werden (1,0,×). Wieviele der möglichen Tips enthalten genau 18 richtige Resultate? In wievielen Tips kommen mindestens 18 richtige Resultate vor?*

1. Für jedes Spiel gibt es drei Tipmöglichkeiten. Daher für alle 25 Spiele

$$3^{25} = 847\ 288\ 609\ 443 \text{ Möglichkeiten}$$

2. Die 18 richtigen Resultate können bei $\binom{25}{18}$ Spielen auftreten.

da genau 18 richtige Resultate auftreten sollen, müssen die anderen 7 Tips falsch sein. Da von den 3 Tipmöglichkeiten immer genau 2 falsch sind, gibt es 2^7 Möglichkeiten falsch zu tipen. Daher gibt es

$$\binom{25}{18}.2^7 = 61\ 529\ 600 \text{ Möglichkeiten}$$

genau 18 richtige Resultat zu erraten.

3. Mindestens 18 richtige Resutate treten ein, wenn man 18 oder 19 oder 20 ... oder 25 richtige Resultate errät. Daher

$$S:= \binom{25}{18}.2^7+\binom{25}{19}.2^6+ \ \dots \ +\binom{25}{24}.2 +\binom{25}{25}.2^0$$

Wegen der Eigenschaften der Binonialkoeffizienten kann man auch schreiben

$$S = \binom{25}{7}.2^7+\binom{25}{6}.2^6+\;\dots\;+\binom{25}{1}.2^1+\binom{25}{0}.2^0$$

Nun ist

$$(1+2)^{25} = \underbrace{\binom{25}{0}.2^0+\;\dots\;+\binom{25}{7}.2^7}_{S}+\left[\binom{25}{8}.2^8+\;\dots\;\binom{25}{25}.2^{25}\right] = 3^{25}$$

$$S = 3^{25} - \left[\binom{25}{8}.2^8+\;\dots\;\binom{25}{25}.2^{25}\right] = 3^{25} - \left[\binom{25}{17}.2^8+\;\dots\;\binom{25}{0}.2^{25}\right]$$

d.h.: Die Anzahl der Möglichkeiten, mindestens 18 Tips zu erraten, ist gleich der Anzahl aller möglichen Tips, vermindert um die Anzahl der Möglichkeiten, maximal 17 Tips zu erraten.
EISEN S. 29

42. *Wieviele Zahlen, die größer als 3 000 000 sind, kann man aus dem Ziffernvorrat 1,2,2,4,6,6,6 bilden?*

1. Die erste Ziffer ist 4. Dann gibt es

$$\frac{6!}{2!3!} = 60 \text{ Möglichkeiten}$$

2. Die erste Ziffer ist 6. dann gibt es

$$\frac{6!}{2!2!} = 180 \text{ Möglichkeiten}$$

insgesamt daher

$$60+180 = \underline{240 \text{ Möglichkeiten}}$$

TUCKER S. 49

43. *Wieviele achtstellige Zahlen haben genau sieben verschiedene Ziffern?*

Es müssen stets zwei gleiche Ziffern auftreten.

1. Methode:

a) Die erste Ziffer tritt irgendwo noch ein zweites Mal auf: Wir wählen eine der Ziffern von 1 bis 9 (9 Möglichkeiten). Dann gibt es sieben Möglichkeiten diese Ziffer irgendwo unterzubringen. Für die restlichen sechs Stellen gibt es der Reihe nach 9,8,...,4 Möglichkeiten, sie mit den restlichen Ziffern zu besetzen:

$$(9.7).9.8.7.6.5.4 = 9.7.\frac{9!}{3!} = \underline{3\ 810\ 240 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) Die erste (auf 9 Arten wählbare Ziffer) tritt nicht doppelt auf. Dann kann man eine der restlichen 9 Ziffern auf $\binom{7}{2}$ Arten auf die verbleibenden 7 Stellen 2mal verteilen. Die restlichen 5 Stellen können mit den verbleibenden Ziffern auf 8.7...4 Arten besetzt werden

$$9.(\binom{7}{2}.9).8.7.6.5.4 = 9.\binom{7}{2}.\frac{9!}{3!} = \underline{11\ 430\ 720 \text{ Möglicheiten}}$$

Insgesamt daher

$$9.7.\frac{9!}{3!}+9.\binom{7}{2}.\frac{9!}{3!} = \underline{15\ 240\ 960 \text{ Möglichkeiten}}$$

2. Methode: Wir wählen aus den 8 Stellen auf $\binom{8}{2}$ Arten 2 Stellen aus und besetzen sie auf 10 mögliche Arten mit einer der Ziffern 0,1,...,9. Die restlichen 6 Stellen lassen sich dann noch auf 9.7.8.6.5.4 Arten mit verschiedenen Ziffern besetzen. Insgesamt daher

$$(\binom{8}{2}.10).9.8.7.6.5.4 = \binom{8}{2}.\frac{10!}{3!} = \underline{16\ 934\ 400 \text{ Möglichkeiten}}$$

Von dieser Gesamtzahl müssen wir jedoch folgende Fälle abziehen:

a) 0 tritt zweimal auf, davon einmal an erster Stelle:

$$\underline{0}\rfloor\cdot\cdot\cdot\cdot 0\cdot\cdot$$

Die zweite 0 kann dann noch an 7 Stellen stehen. Die verbleibenden 6 Stellen können auf 9.8.7.6.5.4 Arten mit von 0 verschiedenen Ziffern besetzt werden:

$$(7).9.8.7.6.5.4 = 7.\frac{9!}{3!} = \underline{423\ 360 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) 0 tritt nur einmal, jedoch an erster Stelle auf.

$$\underline{0}\rfloor\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Dann können wir auf $\binom{7}{2}$ Arten 2 Stellen herausgreifen und sie auf 9 Arten mit Ziffern $\neq 0$ besetzen. Die verbleibenden 5 Plätze kann man auf 8.7.6.5.4 Arten mit verschiedenen Ziffern belegen.

$$(\binom{7}{2}.9).8.7.6.5.4 = \binom{7}{2}.\frac{9!}{3!} = \underline{1\ 270\ 080 \text{ Möglichkeiten}}$$

Der gibt es insgesamt

$$\binom{8}{2}.\frac{10!}{3!}-7.\frac{9!}{3!}-\binom{7}{2}.\frac{9!}{3!} = \underline{15\ 240\ 960 \text{ Möglichkeiten}}$$

3. Methode:

a) Wir betrachten jene Zahlen, in denen keine 0 auftritt.

. . . .

a b c d e f g

$\{a,b,c,d,e,f,g\} \subset \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Für die Wahl von a,...,g gibt es $\binom{9}{7}$ Möglichkeiten. Die Zuordnung der Menge der 8 Stellen zu der Menge {a,b,c,d,e,f,g} ist eine surjektive Abbildung. Nach STIRLING gilt daher

$$(7!S_8^7).\binom{9}{7} = 5040.28.36 = \underline{5\ 080\ 320 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) 0 kommt einmal vor. Da von den anderen Elementen stets eines zweimal auftritt, betrachten wir zunächst die surjektiven Abbildungen einer 7-elementigen Menge in eine 6-elementige Menge.

. ↓ . ↓ . ↓ . ↓ . ↓ . ↓ . ↓ .

a b c d e f

Für die Ziffern a,...,f gibt es $\binom{9}{6}$ Auswahlmöglichkeiten. Die einmal auftretende 0 kann man auf 7 Arten zwischen die 7 Stellen einfügen. Es gibt in diesem Falle also

$$(6!S_7^6).\binom{9}{6}.7 = 620.21.84.7 = \underline{8\ 890\ 560 \text{ Möglichkeiten}}$$

c) 0 kommt zweimal vor. Dann haben wir eine bijektive Abbildung einer 6-elementigen in eine 6-elementige Menge, also eine injektive Abbildung. Für die Ziffern a,b,c,d,e,f gibt es wieder $\binom{9}{6}$ Auswahlmöglichkeiten. Die Anzahl der injektiven Abbildungen beträgt 6!.

. | | | | |

a b c d e f

Die Anzahl der Möglichkeiten, die beiden Nullen einzeln an den sechs möglichen Stellen unterzubringen, beträgt $\binom{6}{2}$, Die Anzahl der Möglichkeiten, die beiden Nullen nebeneinander unterzubringen, beträgt 6. Die Gesamtanzahl ist daher

$$6!.\binom{9}{6}.(\binom{6}{2}+6) = 720.84.21 = \underline{1\ 270\ 080\ \text{Möglichkeiten}}$$

Die Fälle a),b),c) umfassen daher

$$5\ 080\ 320 + 8\ 890\ 560 + 1\ 270\ 080 = \underline{15\ 240\ 960\ \text{Möglichkeiten}}$$

TUCKER S. 49

K II **44.** *Man bestimme die Anzahl aller sechsstelligen Zahlen, in denen genau drei verschiedene Ziffern auftreten*

1. Methode: a) Wir betrachten zunächst jenen Fall, in welchem keine 0 auftritt.

Dann gibt es $\binom{9}{3}$ = 84 Zahlentripel, aus denen die sechsstellige Zahl gebildet werden kann. Wir betrachten ein bestimmtes Tripel, z.B. 1,2,3. Es gibt folgende Möglichkeiten:

1 tritt viermal, 2 und 3 je einmal auf: wir wählen von den vorhandenen 6 Stellen vier für die 1 aus und aus den verbleibenden 2 Stellen eine für 2, bzw. ich besetze die vorhandene 6 Stellen mit vier gleichen Ziffern:

$$\binom{6}{4}.\binom{2}{1} = \frac{6!}{4!1!1!} = 30 \text{ Möglichkeiten}$$

Da 2 und 3 dieselbe Rolle wie 1 spielen können, gibt es insgesamt folgende Anzahl von Möglichkeiten für da vierfache Auftreten eines Elements desselben Tripels

$$30.3 = 90 \text{ Möglichkeiten}$$

1 tritt dreimal, 2 zweimal, 3 einmal auf: Da jede der 3 Ziffern dreimal, von den verbleibenden 2 Ziffern jede zweimal auftreten kann, gibt es insgesamt

$$\binom{6}{3}.\binom{3}{2}.3.2 = \frac{6!}{3!2!1!}.3.2 = 360 \text{ Möglichkeiten}$$

1,2,3 treten je zweimal auf:

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2} = \frac{6!}{2!2!2!} = 90 \text{ Möglichkeiten}$$

Für das Tripel 1,2,3 gibt es daher 90+360+90 = 540 Möglichkeiten. für alle $\binom{9}{3}$ = 84 Zahlentripel ohne 0 gibt es im Falle a) daher

$$540.84 = \underline{45\ 360 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) Wir betrachten jene Fälle, in denen 0 auftritt. Dann können wir die Null auf $\binom{9}{2}$ = 36 Arten durch andere Ziffern zu einem Tripel ergänzen. Wir wählen wieder ein bestimmtes Paar aus, z.B. 1,2

0 tritt einmal auf, 1 viermal, 2 einmal. Da 0 nicht an erster Stelle der sechsstelligen Zahl stehen kann. gibt es $\binom{5}{1}$ Möglichkeiten, die Null zu placieren. Dann gibt es noch $\binom{5}{4}$ Möglichkeit etwa 1 zu placieren. Dieselbe Überlegung gilt auch für 2. Daher

$$\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{4}.2 = 5.\frac{5!}{4!1!}.2 = 50 \text{ Möglichkeiten}$$

0 tritt einmal auf, 1 dreimal, 2 zweimal

$$\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{3}.2 = \binom{5}{1}\cdot\frac{5!}{3!2!}.2 = \underline{100 \text{ Möglichkeiten}}$$

0 tritt zweimal auf, 1 dreimal 2 einmal. Für 0 wählen wir zwei von fünf Stellen aus, aus den verbleibenden vier Stellen 3 für die Ziffer 1. Da man die Anzahlen von 1 und 2 vertauschen kann gilt

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{3}.2 = \binom{5}{2}\cdot\frac{4!}{3!1!}.2 = \underline{80 \text{ Möglichkeiten}}$$

0 tritt zweimal auf, 1 zweimal, 2 zweimal

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2} = \binom{5}{2}\cdot\frac{4!}{2!2!} = \underline{60 \text{ Möglichkeiten}}$$

0 tritt dreimal auf, 1 zweimal, 2 einmal

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{3}{2}.2 = \binom{5}{3}\cdot\frac{3!}{2!1!}.2 = \underline{60 \text{ Möglichkeiten}}$$

0 tritt viermal auf, 1 einmal, 2 einmal

$$\binom{5}{4}.2 = \binom{5}{4}\cdot\frac{2!}{1!1!} = \underline{10 \text{ Möglichkeiten}}$$

Für das Tripel 0,1,2 gibt es daher

50+100+80+60+60+10 = 360 Möglichkeiten

Da die von 0 verschiedenen Zahlen auf $\binom{5}{3}$ = 36 Arten gewählt werden können gibt es im falle b)

35.360 = 12 960 Möglichkeiten

In den Fällen a) und b) daher zusammen

45 360 + 12969 = 58 320 Möglichkeiten

2. Methode: a) 0 tritt nicht auf. Wir wählen einspezielles Tripel aus z.B. 1,2,3 und bilden damit alle sechsstelligen Zahlen

• • • • • • Stellen

1 2 3 Ziffern

Jeder Stelle wird eine Ziffer zugeordnet, und da alle Ziffern betroffen sind, ist diese Abbildung surjektiv. Da sich $\binom{9}{3}$ Tripel bilden lassen. ist die Menge der Abbildungen ohne 0:

$$\binom{9}{3}.3!.S_6^3 = 84.6.90 = 45\ 360 \text{ Möglichkeiten}$$

b) 0 tritt einmal auf (5 Möglichkeiten):

•┘ • 0 • • •

1 2

$$5.\binom{9}{2}.2!.S_5^2 = 5.36.2.15 = 5\ 400 \text{ Möglichkeiten}$$

0 tritt zweimal auf ($\binom{5}{2}$ Möglichkeiten)

•┘ • 0 • 0 •

1 2

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{9}{2}.2!.S_4^2 = 10.36.2.7 = 5\ 040 \text{ Möglichkeiten}$$

0 tritt dreimal auf ($\binom{5}{3}$ Möglichkeiten)

·┘ · 0 · 0 0

1 2

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{9}{2}.2!.S_3^2 = 10.36.2.3 = \underline{2\ 160 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>0 tritt viermal auf</u> ($\binom{5}{4}$ Möglichkeiten)

·┘ 0 0 · 0 0

1 2

$$\binom{5}{4}\cdot\binom{9}{2}.2!.S_2^2 = 5.36.2\ 1 = \underline{360 \text{ Möglichkeiten}}$$

Zusammen also 45360+5400+5040+2160+360 = <u>58 320 Möglichkeiten</u>

<u>3. Methode:</u> a) Es treten <u>keine Nullen</u> auf. Seien A_1, A_2, A_3 die Mengen jener sechsstelligen Zahlen, in denen die Ziffern 1,2,3 <u>nicht</u> auftreten. Dann ist $\bar{A}_1\cap\bar{A}\cap_2\bar{A}_3$ die Menge jener Zahlen, in denen 1,2,3 mindestens je einmal auftreten. Es ist

$|A| = 3^6$ die Menge aller sechsstelligen Zahlen ohne Null, die von den Ziffern 1,2,3 gebildet werden

$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^6$

Ferner gilt

$|A_i \cap Ak_j| = 1$, denn es ist

$A_1\cap A_2 = \{3,3,3,3,3,3\}$

$A_1\cap A_3 = \{2,2,2,2,2,2\}$

$A_2\cap A_3 = \{1,1,1,1,1,1\}$

$A_1\cap A_2\cap A_3 = \emptyset \Rightarrow |A_1\cap A_2\cap A_3| = 0$

Demnach

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3| = |A|-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3| =$$

$$= 3^6-3.2^6+3+0 = 540 \text{ Möglichkeiten}$$

Da es $\binom{9}{3}$ = 84 Ziffertripel gibt, existieren

$$8.540 = \underline{45\ 360 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) <u>0 tritt einmal auf,</u> (5 Möglichkeiten), die weiteren Ziffern seien 1,2

•┘ • 0 • • •

$|A| = 2^5$ Möglichkeiten insgesamt

$|A_1| = |A_2| = 1$ Anzahl der Zahlen ohne 1 bzw. 2

$|A_1 \cap A_2| = 0$

Daher wegen der 5-fachen Wahlmöglichkeit der Stelle von 0

$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = 5.(|A|-|A_1|-|A_2|+|A_1 \cap A_2|) = 5(2^5-2.1) = \underline{150 \text{ Mögl.}}$

0 kommt zweimal vor ($\binom{5}{2}$ Möglichkeiten)

•┘ • 0 • • 0

$|A| = 2^4$ Möglichkeiten insgesamt

$|A_1| = |A_2| = 1$ Anzahl der Zahlen ohne 1 bzw. 2

$|A_1 \cap A_2| = 0$

$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = \binom{5}{2}.(|A|-|A_1|-|A_2|+|A_1 \cap A_2|) = 10(2^4-2.1) = \underline{140 \text{ Mögl.}}$

0 kommt dreimal vor ($\binom{5}{3}$ Möglichkeiten)

•┘ • 0 0 • 0

$|A| = 2^3$ Möglichkeiten insgesamt

$|A_1| = |A_2| = 1$ Anzahl der Zahlen ohne 1 bzw. 2

$|A_1 \cap A_2| = 0$

$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = \binom{5}{3}.(|A|-|A_1|-|A_2|+|A_1 \cap A_2|) = 10(2^3-2.1) = \underline{60 \text{ Mögl.}}$

0 kommt viermal vor ($\binom{5}{4}$ Möglichkeiten)

$|A| = 2^2$ Möglichkeiten insgesamt

$|A_1| = |A_2| = 1$ Anzahl der Zahlen ohne 1 bzw. 2

$|A_1 \cap A_2| = 0$

$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = \binom{5}{4}.(|A|-|A_1|-|A_2|+|A_1 \cap A_2|) = 5(2^2-2.1) = \underline{10 \text{ Mögl.}}$

Insgesamt daher

$$\binom{9}{2}.(150+140+60+10) = \underline{12\ 960 \text{ Möglichkeiten}}$$

Alles zusammen wieder

$$45360+12960 = \underline{58\ 320 \text{ Möglichkeiten}}$$

NETTO S. 41 u. 311

45. *Auf wieviele Arten kann man 20 verschiedene Spielsachen unter 5 Kinder verteilen*
a) ohne Einschränkung (d.h. ein Kind kann z.B. alles bekommen)
b) wenn 2 Kinder je 7 und 3 Kinder je 2 Spielsachen bekommen
c) wenn jedes Kind 4 Spielsachen bekommt?

a) Für jedes Spielzeug gibt es 5 Verteilungmöglichkeiten:

$$5^{20} = \underline{95\ 367\ 431\ 640\ 625 \text{ Möglichkeiten}}$$

oder: Jedes Kind kann keine, eine, zwei,... Spielsachen bekommen, wobei die Reihenfolge, in der es verschiedene Spielsachen erhält, gleichgültig ist

$$(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots)^5 = e^{5x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(5x)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} 5^i \frac{x^i}{i!}$$

$$\text{Daher für } i = 20 \ldots \underline{5^{20} \text{ Möglichkeiten}}$$

b) Aus den 5 Kindern kann man auf $\binom{5}{2}$ Arten zwei Kinder auswählen. Für diese $\binom{5}{2}$ Gruppen von je zwei und drei Kindern hat man die 20 Spielsachen auf 20! mögliche Arten zu gruppieren, wobei zweimal 7! und dreimal 2! Gruppen als gleichartig anzusehen sind, da den Kindern die Reihenfolge der Geschenke gleichgültig ist. Daher

$$\binom{5}{2} \frac{20!}{7!7!2!2!2!} = \underline{119\ 721\ 888\ 000 \text{ Möglichkeiten}}$$

oder: In jeder der $\binom{5}{2}$ Gruppen werden der Reihe nach 2mal sieben und 3mal 2 Spielsachen ausgeteilt

$$\binom{5}{2}\binom{20}{7}\binom{13}{7}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \underline{119\ 721\ 888\ 000 \text{ Möglichkeiten}}$$

oder:

$$\left(\frac{x^7}{7!}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{2!}\right)^3 \cdot \binom{5}{2} = \binom{5}{2} \cdot \frac{20!}{7!7!2!2!2!} \cdot \frac{x^{20}}{20!}$$

Koeffizient von $\frac{x^{20}}{20!}$ ist $\underline{\binom{5}{2} \cdot \frac{20!}{7!7!2!2!2!}}$

c) Wir teilen die 20! Möglichkeiten der Verteilung in 5 Gruppen, wobei es auf die Reihenfolge der vier Spielsachen in jeder Gruppe nicht ankommt

$$\frac{20!}{(4!)^5} = \underline{305\ 540\ 235\ 000 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>oder:</u> Wir verteilen die Spielsachen der Reihe nach in Gruppen zu je 4 Stück

$$\binom{20}{4}\binom{16}{4}\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4} = \underline{305\ 540\ 235\ 000 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>oder:</u>

$$\left(\frac{x^4}{4!}\right)^5 = \underline{\frac{20!}{(4!)^5}} \cdot \frac{x^{20}}{20!}$$

<u>Interpretationen:</u>

1. Art:

$$\begin{array}{c|c|c|c|cl} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \quad\text{Kinder} \\ \underbrace{\cdot\cdot\cdot\cdot}_{4!} & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \quad\text{Spielsachen} \quad 20! \end{array}$$

Bei der Verteilun von je 4 Spielsachen ist die Reihenfolge irrelevant.

Man kann die Aufteilung auch wie die Verteilung von Spielkarten interpretieren.

	1	2	3	4	5	Kinder (Spieler)	
Reihenfolge irrelevant bei vier Spielsachen	.	.	.	.	.	20.19.18.17.16	Mögl.d.Verteilung
	.	.	.	.	.	15.14.13.12.11	Mögl.d.Verteilung
	.	.	.	.	.	10. 9. 8. 7. 6	Mögl.d.Verteilung
	.	.	.	.	.	5. 4. 3. 2. 1	Mögl.d.Verteilung
						20!	Mögl.d.Verteilung

2.Art: 1.Kind $\binom{20}{4}$ Spielsachen

2.Kind $\binom{16}{4}$ Spielsachen

3.Kind $\binom{12}{4}$ Spielsachen

4.Kind $\binom{8}{4}$ Spielsachen

5.Kind $\binom{4}{4}$ Spielsachen

Daher Anzahl der Verteilungsmöglichkeiten

$$\binom{20}{4}\binom{16}{4}\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4} = \frac{20!}{4!16!}\cdot\frac{16!}{4!12!}\cdot\frac{12!}{4!8!}\cdot\frac{8\ !}{4!4!}\cdot\frac{4!}{4!0!} = \frac{20!}{4!^5}$$

TUCKER S. 56

46. *Auf wieviele Arten läßt sich mit n verschiedenen Würfeln eine durch t teilbare Zahl erwürfeln?*

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n = x^n(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^n = x^n\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^n =$$

$$= x^n\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-x^6)^i\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{n-1}x^j\right] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n+j-1}{n-1}x^{6i+j+n}$$

Gesucht wird der Koeffizient von x^{kt} (k 0 1,2,...). Es muß also sein

$$6i+j+n = kt \Rightarrow j = kt-n-6i$$

Daher

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n+kt-n-6i-1}{n-1} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{kt-6i-1}{n-1}$$

Da man mit n Würfeln maximal die Augenzahl 6n erwürfeln kann, gilt

$$kt \le 6n \Rightarrow 1 \le k \le \left[\frac{6n}{t}\right]$$

Da ferner kt-6i-1 ≥ n-1 sein muß, folgt

$$6i \le kt-n \Rightarrow 0 \le i \le \frac{kt-n}{6} \le \left[\frac{1}{6}\left(t\left[\frac{6n}{t}\right]-n\right)\right] =: s$$

also gibt es

$$\underline{\sum_{i=0}^{s}\sum_{k=1}^{\left[\frac{6n}{t}\right]}(-1)^{i}\binom{n}{i}\binom{kt-6i-1}{n-1}\ \text{Möglichkeiten}}$$

Beispiel: Auf wieviele Arten kann mit 4 verschiedenen Würfeln eine durch 5 teilbare Zahl erwürfelt werden?

$$n = 4,\ t = 5 \Rightarrow k \leq \left[\frac{24}{5}\right] = 4,$$

$$s = \left[\frac{1}{6}\left(5\left[\frac{24}{5}\right]-4\right)\right] = \left[\frac{1}{6}\left(5.4-4\right)\right] = 2$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{4}(-1)^{i}\binom{4}{i}\binom{5k-6i-1}{3} =$$

$$= \sum_{i=0}^{2}(-1)^{i}\binom{4}{i}\left[\binom{4-6i}{3}+\binom{9-6i}{3}+\binom{14-6i}{3}+\binom{19-6i}{3}\right] =$$

$$= \binom{4}{0}\left[\binom{4}{3}+\binom{9}{3}+\binom{14}{3}+\binom{19}{3}\right]-\binom{4}{1}\left[0+\binom{3}{3}+\binom{8}{3}+\binom{13}{3}\right]+\binom{4}{2}\left[0+0+0+\binom{7}{3}\right] =$$

$$= 1.(4+84+364+969)-4(1+56+286)+6.35 = \underline{259\ \text{Möglichkeiten}}$$

47. *Auf wieviele Arten kann man Wörter von 10 Buchstaben aus dem Vorrat aaaa, bbbb, cccc, dddd bilden, wenn jeder Buchstabe mindestens zweimal vorkommen soll?*

1. Methode:

a) Vierfaches Auftreten eines Buchstabens und je zweifaches Auftreten der anderen Buchstaben.

$\frac{10!}{4!2!2!2!}$ da dies für alle vier Buchstabengruppen gilt, gibt es insgesamt

$$4.\frac{10!}{4!2!2!2!} = \underline{75\ 600\ \text{Möglichkeiten}}$$

b) dreifaches Auftreten von je zwei Buchstaben und doppeltes Auftretender beiden anderen

$\frac{10!}{3!3!2!2!}$ da die beiden dreifach auftretenden Buchstaben auf

$\binom{4}{2}$ Arten gewählt werden können, gibt es insgesamt

$$\binom{4}{2} \cdot \frac{10!}{3!3!2!2!} = \underline{151\ 200 \text{ Möglichkeiten}}$$

Insgesamt daher 75 600 + 151 200 = 226 800 Möglichkeiten

2. Methode: Erzeugendes Polynom

$$\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)^4 = x^8\left(\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!}\right)^4 =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot 8! \cdot \frac{x^8}{8!} + \frac{1}{12} \cdot 9! \cdot \frac{x^9}{9!} + \frac{1}{16} \cdot 10! \cdot \frac{x^{10}}{10!} + \frac{13}{432} \cdot 11! \cdot \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$$

Dem Koeffizienten von $\frac{x^{10}}{10!}$ entnimmt man

$$\frac{10!}{16} = \underline{226\ 800 \text{ Möglichkeiten}}$$

TUCKER S. 47

48. *Ein Eissalon führt sechs Sorten Eis. Eine Portion Eis besteht aus drei Kugeln. Auf wieviele Arten kann man die (nicht notwendig verschiedenen) Kugeln auswählen?*

1. Methode:	3 gleiche Kugeln		6 Möglichkeiten
	2 gleiche, eine versch.	6.5 =	30 Möglichkeiten
	3 verschiedene Kugeln	$\binom{6}{3}$ =	20 Möglichkeiten
	Insgesamt		56 Möglichkeiten

2. Methode

1	2	3	4	5	6	Sorten
	•				••	Kugeln

Unter den 8 Zeichen sind je 3 bzw. 5 gleiche. Daher

$$\frac{8!}{3!5!} = \binom{8}{3} = \underline{56 \text{ Möglichkeiten}}$$

3. Methode: Erzeugendes Polynom

$$(1+x+x^2+x^3)^6 = 1+6x+21x^2+\underline{56x}^3+120x^4+216x^5+\ldots$$

EISEN S. 24

49. *Eine Fabrik erzeugt 10 verschiedene Schokoladensorten. Wieviele verschiedene Sortimente ergeben sich, wenn jede Packung 32 (nicht notwendig verschiedene) Stück enthält?*

1	2	3	......	9	10	Sorten
•••		•		••	•••••	32 Stück pro Packung

9+32 Zeichen, je 9 bzw. 32 gleich

$\left(\sum_{i=0}^{32} x^i\right)^{10}$ $\binom{41}{9}$ = 350 343 565 Möglichkeiten

EISEN S. 25

50. *Auf wieviele Arten können 6 gleiche Kugeln in 10 verschiedene Schachteln gelegt werden (leere Schachteln möglich)?*

$\left(\sum_{i=0}^{6} x^i\right)^{10}$

1	2	3	......	9	10	Schachteln
•	•••			••		Kugeln

$$\frac{15!}{9!6!} = \binom{15}{6} = \underline{5\ 005 \text{ Möglichkeiten}}$$

EISEN S.25

K II

51. *Wieviele verschiedene Dominosteine gibt es, wenn auf jeder Hälfte 1 bis 6 Punkte oder "blank" erscheint?*

1. Methode: Auf jeder Hälfte können 7 Zeichen angebracht werden (1 bis 6 und "blank"). Das ergibt also 7^2 = 49 Möglichkeiten. Davon gibt es aber 7 mit zwei gleichen Zeichen. Es bleiben also 49−7 = 42 Steine mit verschiedenen Zeichen, wovon aber je zwei gleich sind und daher doppelt gezählt wurden. Bleiben also 21 verschiedene Steine mit verschiedenen Zeichen. Daher insgesamt

21+7 = 28 Steine

2. Methode: Die 7 Zeichen sind ohne Rücksicht auf die Reihenfolge auf zwei nicht unterscheidbare Felder zu verteilen:

0	1	2	3	4	5	6	Zeichen
		•			•		Felder

Daher 8 Symbole mit je 2 bzw 6 gleichen

$$\binom{8}{2} = \underline{28 \text{ Möglichkeiten}}$$

3. Methode: Bezeichnet man die Felder des Dominosteines mit 1 bzw. 2, so lautet die Gruppe $G = \{\varepsilon, (12)\}$. Die Flächen 1 und 2 sind mit 7 "Farben" einzufärben. Da der Zyklusindex lautet

$$\frac{1}{2}(x_1^2+x_2)$$

gibt es nach PóLYA für $x = 7$

$$\frac{1}{2}(7^2+7) = \underline{\text{28 Möglichkeiten}}$$

TUCKER S. 47

52. *Auf wieviele Arten kann man einen Karton mit einem Dutzend Krapfen füllen, wenn es 5 Sorten von Krapfen gibt und von jeder Sorte mindestens ein Krapfen beigepackt werden soll?*

1. Methode:

1	2	3	4	5	Sorten
⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	Pflichtkrapfen
•••		•	••	•	Freie Krapfen

4+7 Symbole, davon 4 bzw. 7 gleich, daher

$$\frac{11!}{4!7!} = \binom{11}{4} = \underline{\text{330 Möglichkeiten}}$$

2. Methode: Erzeugendes Polynom

$$(x+x^2+x^3+\ldots)^5 = x^5(1+x+x^2+\ldots) = \frac{x^5}{(1-x)^5} = x^5\sum_{i=0}^{\infty}\binom{5+i-1}{5-1}x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{4+i}{4}x^{i+5}$$

mit $i+5 = 12 \Rightarrow i = 7$ findet man

$$\binom{11}{4} = \underline{\text{330 Möglichkeiten}}$$

TUCKER S. 48

53. *Auf wieviele Arten kann man aus einem (entsprechend großen) Vorrat von roten, blauen und weißen Kugeln eine Kollektion von 10 Kugeln auswählen, wenn*

a) mindestens 5 rote Kugeln enthalten sein müssen

b) wenn maximal 5 Kugeln rot sein dürfen?

1. Methode:

a) Wir nehmen zuerst die 5 roten Kugeln

rot	blau	weiß	
⊙⊙⊙⊙⊙			5 rote Pflichtkugeln
••	•	••	5 freie Restkugeln

7 Zeichen, davon je 2 bzw. 5 gleich

$$\frac{7!}{2!5!} = \binom{7}{2} = \underline{21 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) Es können 0,1,2,3,4,5 rote Kugeln sein. Dann gib es folgende Möglichkeiten:

rot	blau	weiß		
	•••••	•••••	$\binom{11}{1}$	= 11 Möglichkeiten
1	••••	•••••	$\binom{10}{1}$	= 10 Möglichkeiten
2	••••	••••	$\binom{9}{1}$	= 9 Möglichkeiten
3	••	•••••	$\binom{8}{1}$	= 8 Möglichkeiten
4	•••	•••	$\binom{7}{1}$	= 7 Möglichkeiten
5	•••	••	$\binom{6}{1}$	= 6 Möglichkeiten
Zusammen				51 Möglichkeiten

oder: Wir nehmen von der Gesamtzahl der Möglichkeiten jene weg, bei denen mindestens 6 rote Kugeln enthalten sind

rot	blau	weiß		
•••	••••	•••	$\binom{12}{2}$	= 66 Möglichkeiten

• • • • • • • • • •
⊙ • • • • • • • • •
⊙ ⊙ • • • • • • • •
⊙ ⊙ ⊙ • • • • • • •
⊙ ⊙ ⊙ ⊙ • • • • • •
⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ • • • • •

} maximal 5 rot

⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ • • • •
⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ • • •
⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ • •
⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ •
⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙

} mindestens 6 rot

rot	blau	weiß
⊙⊙⊙⊙⊙⊙		
•	••	•

6 rote Pflichtsücke
4 freie Kugeln

$\binom{6}{2}$ Möglichkeiten

$$\binom{12}{2}-\binom{6}{2} = 66-15 = \underline{51 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>2.</u> <u>Methode:</u> Erzeugende Polynome

a) $(x^5+x^6+\ldots)(1+x+x^2+\ldots)^2 = x^5(1+x+x^2+\ldots)^3 = \dfrac{x^5}{(1-x)^3} =$

$$= x^5 \sum_{i=0}^{\infty} \binom{3+i-1}{3-1} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2+i}{2} x^{i+5}$$

für $i+5 = 10 \Rightarrow i = 5$ folgt $\binom{7}{2} = \underline{21 \text{ Möglichkeiten}}$

b) $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+\ldots) = \dfrac{1-x^6}{1-x} \cdot \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{1-x^6}{(1-x)^3} =$

$$= (1-x^6) \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2+i}{2} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2+i}{2} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2+i}{2} x^{i+6}$$

$i = 10$ $\qquad \binom{12}{2} = 66$

$i+6 = 10 \Rightarrow i = 4$ $\qquad \binom{6}{2} = 15$

Insgesamt $\qquad \underline{51 \text{ Möglichkeiten}}$

TUCKER S. 48

54. *Auf wieviele Arten kann man ein Komitee von 15 Politikern aus profillosen Mitgliedern der Parteien A, B, C bilden, wenn*

a) aus jeder Partei mindestens zwei Mitglieder dem Komitee angehören

b) Wenn keine Partei im Komitee die absolute Mehrheit haben darf?

a) <u>1.</u> <u>Methode:</u>

A	B	C	Parteien
⊙⊙	⊙⊙	⊙⊙	Pflichtmitglieder
•••	••	••••	Restmitglieder

11 Symbole, 2 bzw. 9 davon gleich

$$\frac{11!}{2!9!} = \binom{11}{2} = \underline{55 \text{ Möglichkeiten}}$$

2. Methode: erzeugendes Polynom

$$(x^2+x^3+...)^3 = x^6(1+x+x^2..)^3 = \frac{x^6}{(1-x)^3} = x^6 \sum_{i=0}^{\infty} \binom{3+i-1}{3-1} x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2+i}{2} x^{i+6}$$

für $i+6 = 15 \Rightarrow i = 9$ folgt $\binom{11}{2} = \underline{55 \text{ Möglichkeiten}}$

b) Eine Partei hat die Absolute Mehrheit, wenn sie mindestens 8 Mitglieder entsendet. Wir müssen also von der Menge aller Möglichkeiten jene Möglichkeiten abziehen, in denen eine Partei mindestens 8 Sitze hat. Dabei ist klar, daß jede Partei mindestens ein Mitglied entsenden muß, da sonst eine der beiden anderen Parteien sicher die absolute Mehrheit hat.

1. Methode:

A	B	C	Parteien
⊙	⊙	⊙	Pflichtmitglieder
•••••	••••	•••	Restsitze

$\binom{14}{2} = 91$ Möglichkeiten insgesamt

Die Partei A habe 8 Sitze

A	B	C	Parteien
⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙	⊙	⊙	Pflichtsitze
••	•	••	Restsitze

$\binom{7}{2} = 21$ Möglichkeiten

Da diese Verteilung für alle 3 Parteien möglich ist, gibt es

$$91-3.21 = \underline{28 \text{ Möglicheiten}}$$

2. Methode: erzeugendes Polynom

Von jeder Partei mindestens 1 und höchstens 7 Mtgleder

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)^3 = x^3(1+x +x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3 = x^3\left(\frac{1-x^7}{1-x}\right)^3 =$$

$$= x^3 \sum_{i=0}^{3} (-x^7)^i \binom{3}{i} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{3+j-1}{3-1} x^j = \sum_{i=}^{3} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^i \binom{3}{i} \binom{2+j}{2} x^{j+7i+3}$$

für $j+7i+3 = 15$ gilt $j = 12-7i$, daher ist der Koeffizient von x^{15}

$$\sum_{i=0}^{3} (-1)^i \binom{3}{i} \binom{14-7i}{2} = \binom{3}{0}\binom{14}{2} - \binom{3}{1}\binom{7}{2} + 0 = 91-3.21 = \underline{28 \text{ Möglichk.}}$$

TUCKER S. 49

55. *Jemand besitzt 10-Schilling-, 5-Schilling- und 1-Schilling-Münzen, jeweils im Wert von 100 Schilling. Auf wieviele Arten kann man diesem Vorrat*

a) 8 Münzen

b) 18 Münzen

c) 28 Münzen

d) 40 Münzen

entnehmen?

Es gibt also

$$\left.\begin{array}{rl} \text{zehn} & \text{10-Schilling-Münzen} \\ \text{zwanzig} & \text{5-Schilling-Münzen} \\ \text{hundert} & \text{1-Schilling-Münzen} \end{array}\right\} \text{120 Münzen}$$

a)

10	5	1	Münzart
••••	•	•••	8 entnommene Münzen

$$\frac{(8+2)!}{2!8!} = \binom{10}{2} = \underline{45 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>oder:</u> erzeugendes Polynom

Da keine Entnahme die vorhandenen Mengen überschreitet, können wir allgemein ansetzen:

$$(1+x+x^2+\ldots)^3 = \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+2}{2} x^i$$

Für $i = 8$ ergeben sich $\binom{10}{2} = \underline{45 \text{ Möglichkeiten}}$

b) Hier können höchstens zehn 10-Schilling-Münzen entnommen werden. Wir berechnen zunächst alle Möglichkeiten unter Annahme von beliebig vielen 10-Schilling-Münzen und ziehen dann alle Möglichkeiten ab, bei denen mindestens elf 10-Schilling-Münzen vorkommen

$$\begin{array}{c|c|cl} 10 & 5 & 1 & \text{Münzart} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \text{18 entnommene Münzen} \end{array} \quad \binom{20}{2} = \underline{190 \text{ Möglichkeiten}}$$

Mindestens elf 10-Schilling-Münzen

$$\begin{array}{c|c|cl} 10 & 5 & 1 & \text{Münzart} \\ \odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot & & & \text{11 Pflichtmünzen} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \text{7 Restmünzen} \end{array} \quad \binom{9}{2} = \underline{36 \text{ Mögl.}}$$

Daher insgesamt 190 - 36 = <u>154 Möglichkeiten</u>

<u>oder:</u> erzeugendes Polynom

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{10})(1+x+\ldots)^2 = \frac{1-x^{11}}{1-x} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x^{11}) \cdot \frac{1}{(1-x)^3} =$$

$$= (1-x^{11}) \sum_{i=0}^{\infty} \binom{3+i-1}{3-1} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2+i}{2} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2+i}{2} x^{i+11}$$

Daher für den Koeffizienten von x^{18}

$i = 18 \qquad \binom{20}{2} = 190$

$i+11 = 18 \Rightarrow i = 7 \qquad \binom{9}{2} = 36$

Daher insgesamt 190-36 = <u>154 Möglichkeiten</u>

c) Hier kann man höchstens zehn 10-Schilling-Münzen und höchstens zwanzig 5-Schilling-Münzen entnehmen, d.h. wir müssen von allen denkbaren Möglichkeiten diejenigen abziehen, bei denen mindestens elf 10-Schillingmünzen und mindestens einundzwanzig 5-Schillingmünzen auftreten.

Alle Möglichkeiten

$$\begin{array}{c|c|cl} 10 & 5 & 1 & \text{Münzart} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \text{28 entnommene Münzen} \end{array} \quad \binom{30}{2} = \underline{435 \text{ Möglichkeiten}}$$

Mindestens elf 10-Schilling-Münzen

$$\begin{array}{c|c|cl} 10 & 5 & 1 & \text{Münzart} \\ \odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot & & & \text{11 Pflichtmünzen} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \text{17 Restmünzen} \end{array} \quad \binom{19}{2} = \underline{171 \text{ Mögl.}}$$

Mindestens einzundzwanzig 5-Schilling-Münzen

$$\begin{array}{c|c|cl} 10 & 5 & 1 & \text{Münzart} \\ & \odot\odot\ldots\odot\odot & & \text{21 Pflichtmünzen} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \text{7 Restmünzen} \end{array} \quad \binom{9}{2} = \underline{36 \text{ Mögl.}}$$

Den Fall, daß elf 10-Schilling-Münzen <u>und</u> einundzwanzig 5-Schilling-Münzen abgezogen wurden, kann man ausschließen, da 11+21 =

32 mehr Münzen ergäben, als überhaupt zu entnehmen sind

Daher insgesamt 435 - 171 - 36 = 228 Möglichkeiten

oder: erzeugendes Polynom

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{10})(1+x+x^2+\ldots+x^{20})(1+x+\ldots) = \frac{1-x^{11}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{21}}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x} =$$

$$= \frac{1-x^{11}-x^{21}+x^{32}}{(1-x)^3} = (1-x^{11}-x^{21}+x^{32})\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^i - \sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^{i+11} - \sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^{i+21} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^{i+32}}_{\text{nicht zutreffend}}$$

Für den Koeffizienten von x^{28} gilt dann

$$i = 28 \qquad \binom{30}{2} = 435 \quad +$$

$$i+11 = 28 \Rightarrow i = 17 \qquad \binom{19}{2} = 171 \quad -$$

$$i+21 = 28 \Rightarrow i = 7 \qquad \binom{9}{7} = 36 \quad -$$

insgesamt daher 435-171-36 = 228 Möglichkeiten

c) Wir betrachten wieder alle Möglichkeiten

10	5	1	Münzart
....	.	...	40 entnommene Münzen

$$\binom{42}{2} = 861 \quad +$$

weniger alle Möglichkeiten mit mindestens elf 10-S Münzen

10	5	1	Münzart
⊙..⊙			11 Pflichtmünzen
..	...	..	29 Restmünzen

$$\binom{31}{2} = 465 \quad -$$

weniger alle Möglicheiten mit mindestens einundzwanzig 5-S Münzen

10	5	1	Münzart
	⊙⊙...⊙⊙		21 Pflichtmünzen
.	...	..	19 Restmünzen

$$\binom{21}{2} = 210 \quad -$$

Nun ist noch jene Anzahl von Münzen hinzuzufügen, die beim 2. und 3. Fall doppelt weggenommen wurden, dies sind 11+21 = 32 Münzen

10	5	1	Münzart
⊙...⊙	⊙...⊙		32 Pflichtmünzen
....	...	.	8 Restmünzen

$$\binom{10}{2} = 45 \quad +$$

Insgesamt daher 861-465-210+45 = 231 Möglichkeiten

oder: ~~charakteristisches~~ Polynom wie oben: + erzeugendes

$$(1+x+x^2+...+x^{10})(1+x+x^2+...+x^{20})(1+x+...) =$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^{i}-\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^{i+11}-\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^{i+21}+\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^{i+32}$$

für den Koeffizienten von x^{40} ergibt sich

$i = 40$ $\qquad\binom{42}{2} = 861 \quad +$

$i+11 = 40 \Rightarrow i = 29$ $\qquad\binom{31}{2} = 465 \quad -$

$i+21 = 40 \Rightarrow i = 19$ $\qquad\binom{21}{2} = 210 \quad -$

$i+32 = 40 \Rightarrow i = 8$ $\qquad\binom{10}{2} = 45 \quad +$

Zusammen daher wie oben 231 Möglichkeiten

56. *Auf wieviele Arten kann man aus einem (genügend großen) Vorrat von weißen, schwarzen und roten Kugeln, sowie je einer gelben, grünen und blauen Kugel eine Auswahl von 10 Kugeln treffen?*

1. Methode:

a) keine Einzelkugel

$$\begin{array}{c|c|c} W & S & R \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{Farben}\\ \text{10 Kugeln}\end{array} \qquad \binom{12}{2} = \text{66 Möglichkeiten}$$

b) eine Einzkugel, auf 3 Arten wählbar

$$\begin{array}{c|c|c} W & S & R \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{Farben}\\ \text{9 Kugeln}\end{array} \qquad 3\binom{11}{2} = \text{165 Möglichkeiten}$$

c) zwei zwei Einzelkugeln auf $\binom{3}{2}$ Arten wählbar

$$\begin{array}{c|c|c} W & S & R \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{Farben}\\ \text{8 Kugeln}\end{array} \qquad \binom{3}{2}\binom{10}{2} = \text{135 Möglichkeiten}$$

d) drei Einzelkugel, nur auf eine Art wählbar

$$\begin{array}{c|c|c} W & S & R \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{Farben}\\ \text{7 Kugeln}\end{array} \qquad \binom{9}{2} = \text{36 Möglichkeiten}$$

Zusammen daher 66+165+135+36 = 402 Möglichkeiten

2. Methode: erzeugendes Polynom

$$(1+x)^3(1+x+x^2+...)^3 = \left(\frac{1-x^2}{1-x}\right)^3 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} = (1-x^2)^3 \cdot \frac{1}{(1-x)^6} =$$

$$= \sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}.(-x^2)^i . \sum_{j=0}^{\infty}\binom{6+j-1}{6-1}x^j = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^i\binom{3}{i}\binom{5+j}{5}x^{2i+j}$$

Für den Koeffizienten von x^{10} ergibt sich: $2i+j = 10 \Rightarrow j = 10-2i$ daher

$$\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\binom{3}{i}\binom{15-2i}{5} = \binom{3}{0}\binom{15}{5}- \binom{3}{1}\binom{13}{5}+\binom{3}{2}\binom{11}{5}-\binom{3}{3}\binom{9}{5} = \underline{402 \text{ Mögl.}}$$

TUCKER S. 49

57. *a) Auf wieviele Arten kann man aus den Zahlen von 1 bis 25 Auswahlen von 8 Zahlen mit Wiederholungen bilden?*

b) Wieviele dieser Auswahlen haben eine gerade Summe?

a)	1	2	...	24	25	gegebene Zahlen
	...	.		..	.	Auswahl von 8 Zahlen

$$\frac{(24+8)!}{8!24!} = \binom{32}{8} = \underline{10\ 518\ 300 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>oder</u>: Erzeugendes Polynom. Jede der 25 Zahlen kann von 0mal bis 8mal verwendet werden.

$$(1+x+x^2+\ ...\ +x^8)^{25} = \left(\frac{1-x^9}{1-x}\right)^{25} = \sum_{i=0}^{25}\binom{25}{i}(-x^9)^i.\sum_{j=0}^{\infty}\binom{25+j-1}{25-1}x^j =$$

$$= \sum_{i=0}^{25}.\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^i\binom{25}{i}\binom{24+j}{24}x^{9i+j}$$

Für den Koeffizienten von x^8 gilt: $9i+j = 8 \Rightarrow j = 8-9i$, daher

$$\sum_{i=0}^{25}(-1)^i\binom{25}{i}\binom{32-9j}{24} = \binom{25}{0}\binom{32}{24}-0... = \binom{32}{24} = \underline{10\ 518\ 300 \text{ Mögl.}}$$

b) Eine Summe von 8 Summanden ist gerade bei

8 geraden 0 ungeraden Summanden
6 geraden 2 ungeraden Summanden
4 geraden 4 ungeraden Summanden
2 geraden 6 ungeraden Summanden
0 geraden 8 ungeraden Summanden

Unter den gegebenen Zahlen

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24 25

sind

12 gerade und 13 ungerade Zahlen

Daher gibt es folgende Möglichkeiten der Auswahlen mit Wiederholung

8 geraden 0 ungeraden Summanden $\binom{12+8-1}{8}\binom{13+0-1}{0}=\binom{19}{8}\binom{12}{0} = 75582$

6 geraden 2 ungeraden Summanden $\binom{12+6-1}{6}\binom{13+2-1}{2}=\binom{17}{6}\binom{14}{2} = 1126216$

4 geraden 4 ungeraden Summanden $\binom{12+4-1}{4}\binom{13+4-1}{4}=\binom{15}{4}\binom{16}{4} = 2484300$

2 geraden 6 ungeraden Summanden $\binom{12+2-1}{2}\binom{13+6-1}{6}=\binom{13}{2}\binom{18}{6} = 1447992$

0 geraden 8 ungeraden Summanden $\binom{12+0-1}{0}\binom{13+8-1}{8}=\binom{11}{0}\binom{20}{8} = 125970$

Anzahl der geraden Summen daher 5260060

TUCKER S. 50

58. *Wieviele ganzzahlige Lösungstripel der Gleichung*

$$x+y+z = 25$$

gibt es , bei denen gilt x,y,z > 4 ?

5 Mindesteinheiten
10 Resteinheiten

$$\frac{(2+10)!}{2!10!} = \binom{12}{2} = \underline{66 \text{ Lösungen}}$$

oder: Erzeugendes Polynom

$$(x^5+x^6+\ldots)^3 = x^{15}(1+x+\ldots)^3 = \frac{x^{15}}{(1-x)^3} = x^{15}.\sum_{i=0}^{\infty}\binom{3+i-1}{3-1}x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^{i+15}$$

Der Koeffizient von x^{25} ergibt: $i+15 = 25 \Rightarrow i = 10$

$$\binom{12}{2} = \underline{66 \text{ Lösungen}}$$

EISEN S. 32

59. *Wieviele ganzzahlige Lösungsquadrupel der Gleichung*

$$x+y+z+w = 58 \text{ mit } x>-5,\ y>6,\ z>-15,\ w>9$$

gibt es?

Wir setzen

$$a = x+5,\ b = y-6,\ c = z+15,\ w = d-9$$

Dann ist a,b,c,d >0 und es gilt

$$a+b+c+d = x+y+z+w + (5-6+15-9) = 58 +5 = 63$$

Daher

a	b	c	d	
⊙	⊙	⊙	⊙	je eine Mindesteinheit
•	• •	• • •		59 Resteinheiten

$$\frac{(3+59)!}{3!59!} = \binom{62}{3} = \underline{37\ 320 \text{ Lösungsquadrupel}}$$

<u>oder</u>: Erzeugendes Polynom

$$(x^{-4}+x^{-3}+x^{-2}+x^{-1}+1+x+...)(x^{7}+x^{8}+...)(x^{-14}+x^{-13}+...)(x^{10}+x^{11}+...) =$$

$$x^{-4}.x^{7}.x^{-14}.x^{10}.(1+x+x^{2}+...)^{4} = x^{-1}.\frac{1}{(1-x)^{4}} = x^{-1}.\sum_{i=0}^{\infty}\binom{3+i}{3}x^{i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{3+i}{3}x^{i-1}$$

Für den Koeffizienten von x^{58} gilt: $i-1 = 58 \Rightarrow i = 59$. Daher

$$\binom{3+59}{3} = \binom{62}{3} = \underline{37\ 820 \text{ Lösungsquadrupel}}$$

EISEN S. 32

60. *Wieviele nichtnegative Lösungstripel hat die Gleichung*

$$x+y+z < 25$$

Wir betrachten die Menge der Lösungstripel aller Gleichungen

$$x+y+z = i \text{ für } I = 0,1,2,\ ...\ ,24$$

i

$$\begin{array}{c|c|c} x & y & z \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \end{array} \quad \text{i Einheiten}$$

$$\text{Daher } \frac{(2+i)!}{i!2!} = \binom{2+i}{2}$$

Insgesamt daher

$$\sum_{i=0}^{24} \binom{2+i}{2} = \binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+ \ldots +\binom{2+24}{24} = \binom{2+24+1}{24} = \binom{27}{24} = \underline{2925 \text{ Mögl}}.$$

EISEN S. 34 $(1+x+\ldots+x^{24}+\ldots)^3 = \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_0 \binom{3+i-1}{i} x^i = \sum_0^i \binom{2+i}{i} x^i =$ siehe oben $i \leq 24$

61. *Eine Kommission von*

a) 2n+1

b) 2n

Personen wird von drei Parteien beschickt. Auf wieviele Arten kann dies geschehen, wenn stets zwei Parteien zusammen die Mehrheit besitzen sollen?

a) Eine Partei allein darf nie mehr als n Mitglieder entsenden, da bei n+1 Mitgledern derselben Partei diese bereits allein die Mehrheit besäße. Entsendet daher eine Partei etwa n-k Mitglieder, so haben die beiden anderen Parteien zusammen 2n+1-n+k = n+1+k, also die Majorität. Es muß daher gelten

$$x_1+x_2+x_3 = 2n+1 \text{ mit } x_1 \leq n,\ x_2 \leq n,\ x_3 \leq n$$

Setzt man

$$x_1+y_1 = n,\ x_2+y_2 = n,\ x_3+y_3 = n$$

so folgt

$$y_1+y_2+y_3 = 3n-(x_1+x_2+x_3) = 3n-2n-1 = n-1$$

also

$$\begin{array}{c|c|c} y_1 & y_2 & y_3 \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \end{array} \quad \text{zusammen n-1 Mitglieder}$$

also

$$\frac{[(n-1)+2]!}{(n-1)!2!} = \underline{\binom{n+1}{n-1} \text{ Möglichkeiten}}$$

b) Eine Partei darf maximal n-1 Mtglieder entsenden, da bei n Mitgliedern eine Mehrheitsbildung nicht möglich ist.

$$x_1+x_2+x_3 = 2n \quad \text{mit} \quad x_1 \le n-1,\ x_2 \le n_1-1,\ x_3 \le n-1$$

Wir setzen

$$x_1+y_1 = n-1,\ x_2+y_2 = n-1,\ x_3+y_3 = n-1$$

daher

$$y_1+y_2+y_3 = 3n-3-(x_1+x_2+x_3) = 3n-3-2n = n-3$$

Daher

$$\frac{[(n-3)+2]!}{(n-3)!2!} = \underline{\binom{n-1}{n-3} \text{ Möglichkeiten}}$$

LIU S. 14

62. *Es sind 10 verschiedene Kugeln in 7 verschiedene Schachteln zu verteilen. Auf wieviele Arten ist dies möglich, wenn bei jeder Verteilung jeweils 3,3,2,1,1,o,o Kugeln in den einzelnen Schachteln sein sollen?*

1	2	3	4	5	6	7	Schachteln
3	3	2	1	1	0	0	Verteilung der Kugeln
0	3	2	1	0	3	1	in den Schachteln

Die Verteilung der Ziffern 3,3,2,1,1,0,0 auf die Schachteln ist auf 7! Arten möglich, wobei dreimal je zwei gleichartige Gruppen auftreten.

$$\frac{7!}{2!2!2!} \text{ Möglichkeiten der Gruppierungen}$$

Die Verteilung der Kugeln auf die einzelnen Gruppen kann auf folgende Arten geschehen:

$$\binom{10}{3}\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{1} = \frac{10!}{3!7!} \cdot \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{2!}{1!1!} = \underline{\frac{10!}{3!3!2!} \text{ Mögl.}}$$

Insgesamt daher

$$\frac{7!}{2!2!2!} \cdot \frac{10!}{3!3!2!} = \underline{31\ 752\ 000 \text{ Möglichkeiten}}$$

EISEN S.36

63. *a) Auf wieviele Arten können 12 Personen auf 6 Paare aufgeteilt* Partitionen! *werden?*

b) Auf wieviele Arten kann man 6 verschiedene Spielsachen auf drei Kinder A,B,C aufteilen, sodaß A drei, B zwei und C ein Stück erhält?

c) 8 Tennisspieler sollen vier Singles spielen, wobei die Spiele gleichzeitig stattfinden. Auf wieviele Arten können die Spiele arrangiert werden?

d) Auf wieviele Arten können drei Leute 12 Kugeln gleichmäßig *untereinander aufteilen, wenn jede Person 4 Kugeln erhält und*

1. alle Kugeln gleiche Größe

2. alle Kugeln verschiedene Größe haben?

Partitionen $\lambda_2=6, n=12$ $\frac{12!}{(2!)^6 6!}$

a)

1	2	3	4	5	6	Paare
ab	cd	ef	gh	ij	kl	Personen

Für die Personen gibt es 12! Möglichkeiten der Anordnung. Da es bei jedem Paar auf die Reihenfolge der Personen nicht ankommt, gibt es

$$\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{12!}{2!^6}$$

Möglichkeiten der Paarbildung, und da es auf die Reihenfolge der Paare selbst auch nicht ankommt, gibt es insgesamt

$$\frac{12!}{2!^6 . 6!} = \underline{\text{10 395 Möglichkeiten}}$$

$n=6, \lambda_3=1\ \lambda_2=1, \lambda_1=1$ $\frac{6!}{1!2!3!\ 1!1!1!}$

b)

A	B	C	Kinder
abc	de	f	Spielsachen

$$\frac{6!}{3!2!1!} = \underline{\text{60 Möglichkeiten}}$$

Partition $\lambda_2=4, n=8$ $\frac{8!}{(2!)^4 4!}$

c)

1	2	3	4	Tennisplätze
ab	cd	ef	gh	Spieler

$$\frac{8!}{2!^4 . 4!} = \underline{\text{105 Möglichkeiten}}$$

d) 1.

A	B	C	Personen
....	....	....	Kugeln

Nur eine Möglichkeit

$n=12, \lambda_4=3$ $\frac{12!}{(4!)^3}$

2.

A	B	C	Personen
1234	5678	9 10 11 12	Kugeln

$$\frac{12!}{4!^3} = \underline{\text{34 650 Möglichkeiten}}$$

EISEN S. 37

64. *Auf wieviele verschiedene Arten kann man 20 rote und 15 grüne Zuckerln unter fünf Kinder verteilen, wenn*

a) einige Kinder leer ausgehen können

b) jedes Kind mindesten ein rotes Zuckerl erhält

c)jedes Kind mindestens ein rotes und ein grünes Zuckerl erhält?

a) Verteilung der roten Zuckerln

1	2	3	4	5	Kinder
•••••	•••		••		20 rote Zuckerln

$$\frac{(20+4)!}{4!20!} = \binom{24}{4} = \underline{10\ 626 \text{ Möglichkeiten}}$$

Analog für die grünen Zuckerln

$$\binom{19}{4} = \underline{3\ 876 \text{ Möglichkeiten}}$$

Daher insgesamt

$$10\ 626.3\ 867 = \underline{41\ 186\ 376 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) Verteilung der roten Zuckerln

1	2	3	4	5	Kinder
⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	Pflichtzuckerln
••••	••		••	••••	15 rote Restzuckerl

$$\frac{(4+15)!}{4!15!} = \binom{19}{4} \text{ Möglichkeiten}$$

Ebensoviele Möglichkeiten für die grünen Zuckerln (s.O.). Daher

$$\binom{19}{4}^2 = \underline{15\ 023\ 376 \text{ Möglichkeiten}}$$

c) Verteilung der grünen Zuckerln

1	2	3	4	5	Kinder
⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	grüne Pflichtzuckerln
••••		•••		•••••	10 = Restzuckerln

Zusammen mir der Verteilung der roten Zuckerln (s.o.)

$$\binom{14}{4} \cdot \binom{19}{4} = \underline{3\ 879\ 876 \text{ Möglichkeiten}}$$

65. *Auf wieviele Arten kann man die Vokale a,e,i,o u und acht x anordnen, wenn keine zwei Vokale aufeinanderfolgen dürfen?*

Die Anordnung der Vokale ist auf 5! Arten möglich. Bei jeder Anordnung muß zwischen die Vokale ein Pflicht-x eingeschaltet werden, wozu vier x verbraucht werden

a x e x i x o x u

x x | x | | | | x

Die restlichen 4 x können in die entstehenden 6 Abschnitte beliebig verteilt werden. Dies ist auf $\frac{(4+5)!}{4!5!} = \binom{9}{4}$ Arten möglich. Insgesamt daher

$$5!.\binom{9}{4} = \underline{15\ 120 \text{ Möglichkeiten}}$$

TUCKER S: 53

66. *a) Auf wieviele Arten kann man 4 gleichartige und 6 unterschiedliche Objekte in 5 verschiedene Schachteln verteilen?*
b) Bei wievielen Verteilungen enthält jede Schachtel genau zwei Objekte?

a) Verteilung der 4 gleichartigen Objekte

1	2	3	4	5	Schachteln
••	•			•	4 gleiche Objekte

$$\binom{8}{4} = 70 \text{ Möglichkeiten}$$

Verteilung der verschiedenartigen Objekte

1	2	3	4	5	Schachteln
abc	d		e	f	6 versch. Objekte

Die 6 Objekte lassen sich auf 5^6 = 15625 Arten auf die 5 Schachteln verteilen. Daher

$$70.15625 = \underline{1\ 093\ 750 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) Die Verteilung von je zwei Objekten auf die Schachteln ist auf folgende Arten möglich

1. Je zwei gleiche Objekte in 2 Schachteln ... $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten
   In die restlichen 3 Schachteln kann man die verschiedenen Objekte auf (6.5).(4.3).(2.1) = 6! Arten verteilen. Da es auf die Reihenfolge in einer Schachtel nicht ankommt gibt es $\frac{6!}{2!2!2!}$ Möglichkeiten. Insgesamt daher

$$\binom{5}{2} \cdot \frac{6!}{2!2!2!} = \underline{900 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>oder</u>: Es gibt $\binom{6}{2}$ Möglichkeiten, je zwei der verschiedenen Elemente zu paaren. Diese Zweierpakete man auf 5.4.3 Arten in 3 der 5 Schachteln verteilen. Die verbleibenden zwei Schachtel werden mit je zwei gleichartigen Kugeln gefüllt. Daher

$$\binom{6}{2}.5.4.3 = \binom{6}{2}.\frac{5!}{2!} = \underline{900\text{ Möglichkeiten}}$$

$\frac{5!}{2!}$ kann interpretiert werden als Verteilung von 5 Päckchen, wovon zwei gleich sind.

2. Es können in eine Schachtel zwei gleiche,in zwei andere Schachteln je eine der gleichen und eine der verschiedenen Kugeln gelegt werden. In die restlichen zwei Schachteln je zwei verschiedene Objekte kommen.
   Verteilung der zwei gleichen Objekte ... 5 Möglichkeiten
   Koppelung der restlichen 2 gleichen Objekte mit je einem der verschiedenen Objekte auf 6.5 Arten möglich. Verteilung dieser Koppelung in die verbleibenden 4 Schachteln auf $\binom{4}{2}$ Arten. Insgesamt daher $6.5.\binom{4}{2}$ Möglichkeiten.
   In die verbleibenden zwei Schachteln können die restlichen vier der verschiedenen Objekte auf $\binom{4}{2}$ Arten verteilt werden (Auswahl von 2 Elementen und Eingabe in eine der freien Schachteln. Die Füllung der anderen ist dann bestimmt). Daher
   $$5.(6.5.\binom{4}{2}).\binom{4}{2} = \underline{5\ 400\text{ Möglichkeiten}}$$
3. Es können vier der 6 verschiedene Objekte mit je einem der 4 gleichartigen in dieselbe Schachtel kommen ... 6.5.4.3 Mögl.
   Jede dieser Koppelungen kann auf $\binom{5}{4}$ Arten in einer Schachtel verstaut werdenDaher insgesamt
   $$6.5.4.3.\binom{5}{4} = \frac{6!}{2!}.\binom{5}{4} = 1\ 800\text{ Möglichkeiten}$$
   Zusammen daher
   $$900+5400+1800 = \underline{8\ 100\text{ Möglichkeiten}}$$
   TUCKER S. 55

67. *Ein Geschäft führt vier Sorten von Zuckerwaren, von denen die Sorten A,B,C je 1 S, die Sorte D 5 S pro Stück kostet. Wieviele verschiedene Einkaufsmöglichkeiten gibt es für ein Kind, welches 17 S besitzt und sein ganzes Geld ausgibt?*

Es ist das System

$$x_1+x_2+x_3+5x_4=17$$

zu lösen. Wir gruppieren nach der Sorte D

0 Stück D $x_1+x_2+x_3 = 17$

$\overset{x_1}{\cdots\cdot} \;\Big|\; \overset{x_2}{\cdot\cdot\cdot} \;\Big|\; \overset{x_3}{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}$ 3 Sorten 17 S $\binom{19}{2}$ = 171 Möglichkeiten

1 Stück D $x_1+x_2+x_3 = 12$ $\binom{14}{2}$ = 91 Möglichkeiten

2 Stück D $x_1+x_2+x_3 = 7$ $\binom{9}{2}$ = 36 Möglichkeiten

3 Stück D $x_1+x_2+x_3 = 2$ $\binom{4}{2}$ = 6 Möglichkeiten

Daher zusammen 171+91+36+6 = <u>304 Möglichkeiten</u>

<u>oder:</u> Erzeugendes Polynom

$$(1+x+x^2+\dots+x^{17})^3(1+x^5+x^{10}+x^{15}) = \left(\frac{1-x^{18}}{1-x}\right)^3.\left(\frac{1-x^{20}}{1-x^5}\right) =$$

$$= (1-x^{18})^3.(1-x^{20}).\frac{1}{(1-x)^3}\cdot\frac{1}{1-x^5} =$$

$$= (1\underbrace{-3x^{18}-x^{20}+3x^{36}+3x^{38}-x^{54}-3x^{56}+x^{74}}_{\text{wird nicht gebraucht}}).\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^i.\sum_{j=0}^{\infty}x^{5j} =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^{i+5j}$$

der Koeffizient von x^{17} ergibt sich wegen $i+5j = 17 \Rightarrow i = 17-5j$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\binom{19-5j}{2} = \binom{19}{2}+\binom{14}{2}+\binom{9}{2}+\binom{4}{2} = \underline{304 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>Anmerkung:</u> Einfacher wäre der Ansatz gewesen

$$(1+x+x^2+\dots)^3(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\dots) = \dots$$

TUCKER S 55

68. *Auf wieviele Arten kann man die Buchstaben des Wortes DIVISION anordnen, ohne daß zwei I unmittelbar aufeinander folgen?*

Zwischen die drei I muß je einer der drei Restbuchstaben D,V,S, O,N eingefügt werden.

I ⊙ I ⊙ I
| •• | | •

Die drei restlichen Buchstaben können dann in die drei entstehenden Abschnitte auf

$$\binom{3+3}{3} = \binom{6}{3} = 20 \text{ Arten}$$

eingefügt werden. Die so verteilten 5 Buchstaben DVSON können noch auf 5! Arten umgeordnet werden. Daher insgesamt

$$\binom{6}{3}.5! = \underline{2400 \text{ Möglichkeiten}}$$

oder: Wir berechnen zunächst alle $\frac{8!}{3!}$ Anordnungen und ziehen alle Anordnungen ab, bei denen 2 oder 3 I hintereinander stehen. Wir vereinigen zunächst zwei II = X zu einem neuen Symbol und betrachten die Anordnungen der Buchstaben DVSONIX. Davon gibt es 7!. Darin sind aber in der Anordnung IX = III= XI alle dreifach auftretenden III bereits mitgezählt. Um Doppelzählungen zu vermeiden, setzen wir daher Y = IX und müssen alle 6! Möglichkeiten der Anordnungen von DVSONY wieder zurückrechnen. Daher

$$\frac{8!}{3!} - 7! + 6! = \underline{2400 \text{ Möglichkeiten}}$$

TUCKER S. 57

69. *Auf wieviele Arten kann man die 26 Buchstaben des Alphabets anordnen, sodaß nie zwei Vokale aufeinanderfolgen?*

Die fünf Vokale kann man auf 5! Arten anordnen.

v • v • v • v • v
....| ... | | • | | .....

Zwischen die Vokale können wir 4 der restlichen 21 Konsonanten einfügen und die restlichen 17 auf $\binom{17+5}{5}$ Arten in die entstehenden Abschnitte einfügen. Die in den Abschnitten befindlichen 21 Konsonanten können noch auf 21! Arten umgeordnet werden. Daher

$$5!\binom{22}{5}21! = \underline{161\ 451\ 464\ 537\ 975\ 567\ 155\ 200\ 000\ \text{Möglichkeiten}}$$

TUCKER S.57

70. *Wieviele ganzzahlige Lösungsquintupel besitzt die Gleichung*

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 28$$

wenn

a) $x_i \geq 0$

b) $x_i > 0$ $\quad i = 1,2,3,4,5$

c) $x_i > i$

a)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c l} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \text{Unbekannte} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \text{28 Einsen} \end{array}$$

$$\binom{28+4}{4} = \binom{32}{4} = \underline{35\ 960\ \text{Möglichkeiten}}$$

<u>oder:</u> $(1+x+...)^5 = (1+x+...)^5 = \frac{1}{(1-x)^5} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{4+i}{4}x^i$

für $i = 28$ folgt $\binom{32}{4} = \underline{35\ 960\ \text{Möglichkeiten}}$

b)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c l} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \text{Unbekannte} \\ \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & x_i \text{ mindestens } 1 \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \text{23 Einsen} \end{array}$$

$$\binom{23+4}{4} = \binom{27}{4} = \underline{17\ 550\ \text{Möglichkeiten}}$$

<u>oder:</u> $(x+...)^5 = x^5(1+x+...)^5 = \frac{x^5}{(1-x)^5} = x^5\sum_{i=0}^{\infty}\binom{4+i}{4}x^i =$

$= \sum_{i=0}\binom{4+i}{4}x^{i+5}$. Für $i+5 = 28 \Rightarrow i = 23 \Rightarrow \binom{27}{4} = \underline{17\ 550\ \text{Mögl.}}$

c) Wir setzen $y_i = x_i - i \Rightarrow y_i > 0$

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 - (1+2+3+4+5) = 28-15 = 13$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c l} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & \text{Unbekannte} \\ \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & y_1 \text{ mindestens } 1 \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \text{8 Einsen} \end{array}$$

$$\binom{8+4}{4} = \binom{12}{4} = \underline{495 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>oder:</u> $(x^2+x^3+\ldots)(x^3+\ldots)(x^4+\ldots)(x^5+\ldots)(x^6+\ldots) = \dfrac{x^{20}}{(1-x)^5} =$

$$= x^{20}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{4+i}{4}x^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{4+i}{4}x^{i+20}$$

Für $i+20 = 28 \Rightarrow i = 8$ folgt $\binom{12}{4} = 495$ <u>Möglichkeiten</u>

TUCKER S. 57

71. *Wieviele ganzzahlige Lösungstripel besitzt die Gleichung*

$$x_1+x_2+x_3 = 0 \text{ mit } x_i \geq -5$$

Wir setzen $y_i = x_i+5 \Rightarrow y_i \geq 0$

$$y_1+y_2+y_3 = x_1+x_2+x_3+15 = 15$$

$$\begin{array}{c|c|c} \overset{y_1}{\cdots\cdot} & \overset{y_2}{\cdots} & \overset{y_3}{\cdots\cdots} \end{array} \quad \begin{array}{l}\text{Variable}\\ \text{15 Einsen}\end{array} \binom{15+2}{2} = \binom{17}{2} = \underline{136 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>oder:</u> $(x^{-5}+x^{-4}+\ldots+1+x+\ldots)^3 = \dfrac{1}{x^{15}(1-x)^3} = \dfrac{1}{x^{15}}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^i =$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^{i-15}$$

Für $i-15 = 0 \Rightarrow i = 15$ folgt $\binom{17}{2} = \underline{136 \text{ Möglichkeiten}}$

TUCKER S.

72. *Wieviele ganzzahlige Lösungsquadrupel der Ungleichung*

$$x_1+x_2+x_3+x_4 < 100, \quad x_i > 0$$

gibt es?

Es sei $x_1+x_2+x_3+x_4 = k$, $x > 0$

$$\begin{array}{c|c|c|c l} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \text{Unbekannte} \\ \odot & \odot & \odot & \odot & x_k \text{ mindestens 1} \\ \cdots & \cdot\cdot & \cdots\cdot\cdot & \cdots\cdots & \text{k-4 Einsen} \end{array}$$

$$\binom{k-4+3}{3} = \binom{k-1}{3} \text{ Möglichkeiten.}$$

Insgesamt daher (mit einer Formel der Vorlesung S,24)

$$\sum_{k=4}^{99}\binom{k-1}{3} = \binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\ldots+\binom{98}{3} = \binom{98+1}{3+1} = \binom{99}{4} = \underline{3\ 764\ 376 \text{ Mögl.}}$$

TUCKER S. 57

73. *Auf wieviele Arten kann man k Kugeln in n verschiedene Schachteln verteilen (k<n), wenn in jeder Schachtel maximal eine Kugel ist und wenn*

a) alle Kugeln identisch sind

b) die Kugeln verschieden sind?

a) Wir denken uns die n Schachteln numeriert und greifen k davon heraus und legen in jede der herausgegriffenen Schachteln eine Kugel. Daher

$$\binom{n}{k} \ \underline{\text{Möglichkeiten für gleiche Kugeln}}$$

b) In die $\binom{n}{k}$ herausgegriffenen Schachteln können wir die Kugeln auf k! verschieden Arten verteilen. Daher

$$\binom{n}{k}.k! = \frac{n!}{k!(n-k)!}.k! = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ Mögl. für verschiedene Kugeln}$$

oder

Die 1. Kugel kann auf n Arten verteilt werden
Die 2. Kugel kann auf n-1 Arten verteilt werden
Die 3. Kugel kann auf n-2 Arten verteilt werden
....
Die k. Kugel kann auf n-(k-1) Arten verteilt werden

Insgesamt daher

$$n(n-1)(n-1)\ldots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} \equiv k\text{-Anordn. Elementen}$$

TUCKER S. 57

74. *Auf wieviele Arten kann man drei verschiedene Teddybären und neun identische Lutscher an vier Kinder verteilen*

a) ohne Einschränkung

b) kein Kind erhält zwei Teddybären

c) jedes Kind erhält drei Geschenke?

	1	2	3	4	Kinder
a)	⊙⊙⊙	⊙⊙⊙⊙	⊙	⊙	9 gleiche Lutscher
	••	•			3 verschiedene Teddys

Verteilung der Lutscher auf $\binom{9+3}{3} = \binom{12}{3} = 220$ Arten

Verteilung der Teddys ≡ Abbildung einer 3-elementigen in eine 4-elementige Menge ⇛ $4^3 = 64$ Möglichkeiten. Daher insgesamt

$$220.64 = \underline{14\ 080 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) Verteilung der Lutscher wie oben. Verteilung der Teddys ≡ 3-Anordnung von 4 Elementen ⇛ 4.3.2 = 24 Möglichkeiten.
Insgesamt daher 220.24 = <u>5 280 Möglichkeiten</u>

c) 1. Ein Kind erhält alle drei Teddys ... 4 Möglichkeiten Die neun Lutscher werden zu je dreien an die restlichen drei Kinder verteilt ... 1 Möglichkeit. Zusammen also 1.4 = <u>4 Mögl.</u>

2. Ein Kind erhält 2 Teddys. Auswahl der Teddys auf auf $\binom{3}{2}$ Arten möglich, die Vergabe der beiden Teddys an die Kinder auf 4 Arten möglich, die Vergabe des letzen Teddys auf 3 Arten möglich: insgesamt $4.\binom{3}{2}.3 = 36$ Möglichkeiten. Von den Kindern bekommt eines einen Lutscher, eines 2 Lutscher, die beiden letzten je drei Lutscher. Da diese Verteilung nur auf eine Weise möglich ist: Insgesamt 36.1 = <u>36 Möglichkeiten</u>

3. Drei Kinder erhalten je einen Teddy ≡ 3-Anordnung von 4 Elementen ⇛ 4.3.2 = 24 Möglichkeiten. Die Verteilung der Lutscher nur auf eine Art möglich: 1.24 = <u>24 Möglichkeiten</u>
Zusammen daher

$$4+36+24 = \underline{64 \text{ Möglichkeiten}}$$

TUCKER S. 57

75. *Auf wieviele Arten kann man acht Kugeln in sechs verschiedene Schachteln verteilen, wenn in den ersten zwei Schachteln zusammen maximal vier Kugeln sind und wenn*
a) die Kugeln identisch sind

b) die Kugeln verschieden sind?

1. Methode: a) Wir betrachten die ersten beiden Schachteln

$\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \odot\odot & \odot \end{array}$ Schachteln i Kugeln $\binom{i+1}{1}$ = i+1 Möglichkeiten $0 \le i \le 4$

Die restlichen 8-i Kugeln verteilen wir auf die Schachteln 3-6

$\begin{array}{c|c|c|c} 3 & 4 & 5 & 6 \\ \odot\odot\odot & \odot & \odot\odot & \odot\odot\odot\odot\odot \end{array}$ Schachteln 8-i Kugeln $\binom{8-i+3}{3} = \binom{11-i}{3}$ Möglichkeiten

Zusammen daher

$$\sum_{i=0}^{4}(i+1).\binom{11-i}{3} = 1.\binom{11}{3}+2.\binom{10}{3}+3.\binom{9}{3}+4.\binom{8}{3}+5.\binom{7}{3} = 1056 \text{ Möglichkeiten}$$

b) Wir wählen i Kugeln auf $\binom{8}{i}$ Arten aus und verteilen sie auf 2^i Arten in die beiden ersten Schachteln: $2^i\binom{8}{i}$ Möglichkeiten.

Die restlichen 8-i Kugeln verteilen wir auf 4^{8-i} Arten auf die restlichen 4 Schachteln. Insgesamt daher

$$\sum_{i=0}^{4} 2^i\binom{8}{i}4^{8-i} = \sum_{i=0}^{4} 2^i.2^{16-2i}\binom{8}{i} = \sum_{i=0}^{4} 2^{16-i}\binom{8}{i} =$$

$$= 2^{16}\binom{8}{0}+2^{15}\binom{8}{1}+2^{14}\binom{8}{2}+2^{13}\binom{8}{3}+2^{12}\binom{8}{4} = 1\ 531\ 904 \text{ Möglichkeiten}$$

2. Methode: Erzeugendes Polynom

a) a,b seien die beiden ersten Schachteln. a^i bedeute, daß in der ersten Schachtel i gleichartige Objekte sind. Für die ersten beiden Schachteln gilt daher der Aufzähler

$$1+(a+b)x+(a^2+ab+b^2)x^2+(a^3+a^2b+ab^2+b^3)x^3+(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)x^4$$

daher der Abzähler für alle Schachteln

$$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)(1+x+x^2+...)^4 = (1+2x+3x^2+4x^3+5x^4).\frac{1}{(1-x)^4} =$$

$$= (1+2x+3x^2+4x^3+5x^4).\sum_{i=0}^{\infty}\binom{3+i}{3}x^i =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{3+i}{3}(x^i+2x^{i+1}+3x^{i+2}+4x^{i+3}+5x^{i+4}) \text{ für } i+j = 8 \text{ und } j = 0,1,2,3,4$$

Daher

$$\binom{11}{3}+2\binom{10}{3}+3\binom{9}{3}+4\binom{8}{3}+5\binom{7}{3} = \underline{1056 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) $\frac{1}{i!}a^i$ bedeutet, daß in der Schachtel a i verschiedene Objekte liegen, auf deren Reihenfolge es nicht ankommt. Daher lautet der <u>Aufzähler</u> für die beiden ersten Schachteln

$$1+(a+b)x+(\frac{a^2}{2!}+ab+\frac{b^2}{2!})x^2+(\frac{a^3}{3!}+\frac{a^2b}{2!}+\frac{ab^2}{2!}+\frac{b^3}{3!})x^3+$$
$$+(\frac{a^4}{4!}+\frac{a^3b}{3!}+\frac{a^2b^2}{2!2!}+\frac{ab^3}{3!}+\frac{b^4}{4!})x^4$$

Daher lautet der <u>Abzähler</u> insgesamt

$$\left[1+2x+(\frac{1}{2!}+1+\frac{1}{2!})x^2+(\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!})x^3+(\frac{1}{4!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})x^4\right]\cdot$$
$$\cdot(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)^4 =$$
$$= \left[1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4\right].(\hat{e}^x)^4 =$$
$$= \left[1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4\right]\cdot$$
$$\cdot\left[1+4x+\frac{4^2}{2!}x^2+\frac{4^3}{3!}x^3+i\frac{4^4}{4!}x^4+\frac{4^5}{5!}x^5+\frac{4^6}{6!}x^6+\frac{4^7}{7!}x^7+\frac{4^8}{8!}x^8+\ldots\right]$$

Der Koeffizient von $\frac{x^8}{8!}$ lautet

$$8!.\left[\frac{4^8}{8!}+2.\frac{4^7}{7!}+2.\frac{4^6}{6!}+\frac{4}{3}.\frac{4^5}{5!}+\frac{2}{3}.\frac{4^4}{4!}\right] = \underline{1\ 531\ 904 \text{ Mögl.}}$$

TUCKER S. 57

76. *Auf wieviele Arten kann man 15 gleichartige Objekte in vier verschiedene Schachteln verteilen, wenn die Anzahl der Objekte in der vierten Schachtel ein Vielfaches von 3 sein soll?*

In der 4. Schachtel müssen 3i Objekte sein (i = 0,1,2,3,4,5). In den restlichen 3 Schachteln sind die verbleibenden 15-3i Objekte zu verteilen

1	2	3	Schachteln
...	..	....	15-3i Objekte

Dies ist auf $\binom{15-3i+2}{2} = \binom{17-3i}{2}$ Arten möglich. Insgesamt daher

$$\sum_{i=0}^{5}\binom{17-3i}{2} = \binom{17}{2}+\binom{14}{2}+\binom{11}{2}+\binom{8}{2}+\binom{4}{2}+\binom{2}{2} = \underline{321\ \text{Möglichkeiten}}$$

TUCKER S. 57

77. *Wieviele Ergebnisse können die Wahlen zum Klassensprecher ergeben, wenn 5 Kandidaten zur Verfügung stehen und es 40 Wahlberechtigte gibt, wenn*

a) jeder Kandidat mindestens zwei Stimmen bekommt

b) ein Kandidat höchstens eine Stimme, alle anderen aber mindestens zwei Stimmen erhalten

c) kein Kandidat die absolute Mehrheit erringt?

a)

1	2	3	4	5	Kandidaten
⊙⊙	⊙⊙	⊙⊙	⊙⊙	⊙⊙	10 Pflichtstimmen
•	••	•••		••••	30 freie Stimmen

$$\binom{30+4}{4} = \binom{32}{4} = \underline{46\ 376\ \text{Möglichkeiten}}$$

b) 1. Ein Kandidat erhält keine Stimme

1	2	3	4	5	Kandidaten
	⊙⊙	⊙⊙	⊙⊙	⊙⊙	8 Pflichtstimmen
	••	•••		••••	32 freie Stimmen

Da dies bei allen fün Kandidaten zutreffen könnte, gibt es hier

$$5.\binom{32+3}{3} = 5.\binom{35}{3} = \underline{32\ 725\ \text{Möglichkeiten}}$$

2. Ein Kandidat erhält nur eine Stimme 5 Möglichkeiten

1	2	3	4	5	Kandidaten
⊙	⊙⊙	⊙⊙	⊙⊙	⊙⊙	9 Pflichtstimmen
	••	•••		••••	31 freie Stimmen

$$5.\binom{31+3}{3} = 5.\binom{34}{3} = \underline{29\ 920\ \text{Möglichkeiten}}$$

Insgesamt daher

$$32\ 725 + 29\ 920 = \underline{62\ 645\ \text{Möglichkeiten}}$$

c) Wir berechnen jene Fälle, bei denen ein Kandidat die absolute Mehrheit besitzt, daher mindestens 21 Stimmen erreicht 5.Mögl.

1	2	3	4	5	Kandidaten
$\boxed{21}$					21 Pflichtstimmen
.	..	...		....	19 freie Stimmen

$$5.\binom{19+4}{4} = 5.\binom{23}{4} = \underline{44\ 275 \text{ Möglichkeiten}}$$

Ziehen wir dies von allen Möglickeiten ab, so verbleiben

$$\binom{44}{4}-5.\binom{23}{4} = \underline{91\ 476 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>oder:</u> erzeugendes Polynom

a) Jeder der 5 Kandidaten erhält mindestens 2 und höchstens 40 Stimmen

$$(x^2+x^3+\ldots)^5 = x^{10}\,\frac{1}{(1-x)^5} = x^{10}.\sum_{i=0}^{\infty}\binom{4+i}{4}x^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{4+i}{4}x^{i+10}$$

Für den Koeffizienten von x^{40} gilt: $i+10 = 40 \Rightarrow i = 30$, daher

$$\binom{34}{4} = \underline{46\ 376 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) Für die 5 Kandidaten gibt es folgende Möglichkeiten

$$5.(1+x).x^8.(1+x+\ldots)^4 = 5x^8(1+x)\sum_{i=0}^{\infty}\binom{3+i}{3}x^i =$$

$$= \sum_{i=}^{\infty}5.\binom{3+i}{3}(x^{i+8}+x^{i+9})$$

$$i+8 = 40 \Rightarrow i = 32 \Rightarrow 5.\binom{35}{3} = \underline{32\ 725 \text{ Möglichkeiten}}$$

$$i+9 = 40 \Rightarrow i = 31 \Rightarrow 5.\binom{34}{3} = \underline{29\ 920 \text{ Möglichkeiten}}$$

Zusamen daher 32 725+29 920 = <u>62 645 Möglichkeiten</u>

c) Ein Kandidat kann maximal 20 Stimmen bekommen

$$(1+x+\ldots+x^{20})^5 = \left(\frac{1-x^{21}}{1-x}\right)^5 = \sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}(-x^{21})^i.\sum_{j=0}^{\infty}\binom{4+j}{4}x^j =$$

$$= \sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^i\binom{5}{i}\binom{4+j}{4}x^{21i+j}$$

für $21i+j = 40 \Rightarrow j = 40-21i \Rightarrow \sum_{i=0}^{5}(-1)^i\binom{5}{i}\binom{44-21i}{4} =$

$$= \binom{5}{0}\binom{44}{4}+\binom{5}{1}\binom{23}{4}+0+0+0 = \underline{91\ 476 \text{ Möglichkeiten}}$$

TUCKER S. 57

78. *Auf wieviele Arten kann man ein Haus mit 10 unterschiedlichen Zimmern ausmalen, wenn maximal drei verschiedene Farben verwendet werden?*
Die verwendeten Farben können aus 20 verschiedenen Farbwerten ausgewählt werden.Jedes Zimmer wird in einer einzigen Farbe ausgemalt.

Anzahl der Zimmer = Anzahl der Objekte = n = 10 verschiedene
Anzahl der Farben = Anzahl der Schachteln = s = 20 verschiedene
Es sollen also 10 verschiedene Objekte in eine oder zwei oder drei verschiedene Schachteln aus 20 verpackt werden, während die übrigen leer bleiben.
Die Zuordnung der 10 verschiedenen Objekte auf die maximal 3 verschiedene Schachteln ist eine surjektive Abbildung.
Für die Anzahl der surjektiven Abbildungen einer n-elementigen Menge auf eine r-elementige Menge ist $r!S_n^r$
Greifen wir aus den s Farben k heraus, so gibt es dafür $\binom{s}{k}$ Möglichkeiten. Pro Farbenauswahl gibt es daher $k!S_n^k$ Möglichkeiten, insgesamt daher

$$\binom{s}{k}k!S_n^k \qquad k = 1,2,3$$

Möglichkeiten. Insgesamt gibt es daher für alle möglichen Farbenauswahlen

$$\sum_{k=1}^{3}\binom{20}{k}k!S_{10}^k = \binom{20}{1}1!S_{10}^1+\binom{20}{2}2!S_{10}^2+\binom{20}{2}3!S_{10}^3 =$$

$= 20.1.1 + 190.2.511+1140.6.9330 = \underline{64\ 011\ 400 \text{ Möglichkeiten}}$

EISEN S. 87

79. *Auf wieviele Arten können 7 verschiedene Kugeln in vier verschiedene Schachteln verteilt werden, wenn die erste Schachtel genau zwei Kugeln enthält und die Reihenfolge der Kugeln in den Schachteln belanglos ist?*

<u>1. Methode:</u> Die zwei Kugeln für die erst Schachtel können auf $\binom{7}{2}$ Arten gewählt werden. Die restlichen 5 Kugeln könne auf 3^5 Arten in die restlichen drei Schachtel verteilt werden. Daher

$$\binom{7}{2}.3^5 = \underline{5\ 103 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>2. Methode:</u> Die Anzahl der Kugeln in den Schachteln 1,2,3,4 sei $i_1 = 2$, i_2, i_3, i_4 mit $2+i_2+i_3+i_4 = 7$. Daher sind alle Möglichkeiten ("oder")

$$\sum_{i_2+i_3+i_4=5} \frac{7!}{2!i_2!i_3!i_4!} = \frac{7!}{2!5!} \cdot \sum_{i_2+i_3+i_4=5} \frac{5!}{i_2!i_3!i_4!}$$

Nach dem polynomischen Lehrsatz ist das aber

$$\frac{7!}{2!5!}(1+1+1)^5 = \binom{7}{2}.3^5 = \underline{5\ 103 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>3. Methode:</u> Erzeugende Funktion

$$\frac{x^2}{2!}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)^3$$

Da wir höchstens die 7. Potenz benötigen, ist es für die Rechnung einfacher, zu rechnen

$\frac{3^3 x^3}{3!} \cdot 3^{4}$

$$\frac{x^2}{2!}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)^3 = \frac{x^2}{2!}(\hat{e}^x)^3 = \frac{x^2}{2!}(1+3\frac{x}{1!}+3^2\frac{x^2}{2!}+\ldots)$$

Der Koeffizient von $\frac{x^7}{7!}$ lautet daher

$$\frac{1}{2!} \cdot \frac{3^5}{5!}.7!$$

<u>4.Methode:</u>STIRLINGsche Zahlen. Es gibt $\binom{7}{2}$ Möglichkeiten zur Verteilung in die erste Schachtel. Die restlichen 5 Kugeln

können auf $\binom{3}{1}.1!S_5^1$ oder $\binom{3}{2}.2!S_5^2$ oder $\binom{3}{3}.3!S_5^3$ in die restlichen Schachteln verpackt werden. Daher gilt

$$\binom{7}{2}\left[\binom{3}{1}.1!S_5^1+\binom{3}{2}.2!S_5^2+\binom{3}{3}.3!S_5^3\right] =$$

$$= 21[3.1+3.2.15+6.25 = \underline{5103 \text{ Möglichkeiten}}$$

EISEN S. 84

80. *Auf wieviele Arten kann man 25 Spielsachen aus 7 Typen auswählen, wenn man von jedem Typ zwischen 2 und sechs Spielsachen auswählt?*

Es ist der Koeffizient von x^{25} des erzeugenden Polynoms

$$(x^2+x^3+\ldots+x^6)^7$$

zu suchen.

$$(x^2+x^3+\ldots+x^6)^7 = x^{14}(1+x+x^2+x^3+x^4)^7 = x^{14}\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^7 =$$

$$= x^{14}.\sum_{i=0}^{7}\binom{7}{i}(-x^5)^i.\sum_{j=0}^{\infty}\binom{6+j}{6}x^j = \sum_{i=0}^{7}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^i\binom{7}{i}\binom{6+j}{6}x^{5i+j+14}$$

für $5i+j+14 = 25 \Rightarrow j = 11-5i$

$$\sum_{i=0}^{7}(-1)^i\binom{7}{i}\binom{17-5i}{6} = \binom{7}{0}\binom{17}{6}-\binom{7}{1}\binom{12}{6}+\binom{7}{2}\binom{7}{6}-0+\ldots = \underline{6\ 055 \text{ Mögl.}}$$

TUCKER S. 88

81. *Auf wieviele Arten kann man r Zuckerln unter 8 Kinder verteilen, wenn*

a) jedes Kind mindestens ein Zuckerl bekommt?

b) jedes Kind eine gerade Anzahl von Zuckerln bekommt?

c) ein Kind bekommt von den r Zuckerln soviel es will, während die restlichen Zuckerln beliebig auf die anderen Kinder verteilt werden?

a) $(x+x^2+\ldots)^8 = x^8(1+x+x^2+\ldots) = \dfrac{x^8}{(1-x)^8} = x^8.\sum_{i=0}^{\infty}\binom{7+i}{7}x^i =$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{7+i}{7} x^{i+8}$$

Für $i+8 = r \Rightarrow i = r-8$, daher

$$\underline{\binom{r-1}{7} = \binom{r-1}{r-8} \text{ Möglichkeiten}}$$

b) $(1+x^2+x^4+...)^8 = \frac{1}{(1-x^2)^8} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{7+i}{7} x^{2i}$

Für $2i = r$ folgt $i = \left[\frac{r}{2}\right]$ daher

$$\underline{\binom{7+\left[\frac{r}{2}\right]}{7} = \binom{7+\left[\frac{r}{2}\right]}{\left[\frac{r}{2}\right]} \text{ Möglichkeiten}}$$

c) Das erste Kind will n Zuckerln

$$x^n(1+x+x^2+...)^7 = \frac{x^n}{(1-x)^7} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+6}{6} x^{i+n}$$

für $i+n = r \Rightarrow i = r-n$ ergeben sich

$$\underline{\binom{6+r-n}{6} = \binom{6+r-n}{r-n} \text{ Möglichkeiten}}$$

TUCKERS. 91

82. *Auf wieviele Arten kann man die Summe 25 erhalten, wenn man 10 verschiedene Würfel wirft?*

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^{10} = x^{10}(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^{10} = x^{10}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^{10} =$$

$$= x^{10}.\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} (-x^6)^i . \sum_{j=0}^{\infty} \binom{9+j}{9} x^j = \sum_{i=0}^{10}\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^i \binom{10}{i} \binom{9+j}{9} x^{6i+j+10}$$

Für $6i+j+10 = 25 \Rightarrow j = 15-6i$ gilt

$$\sum_{i=0}^{10} (-1)^i \binom{10}{i} \binom{24-6i}{9} = \binom{10}{0}\binom{24}{9} - \binom{10}{1}\binom{18}{9} + \binom{10}{2}\binom{12}{9} + 0 + ... =$$

$$= \underline{831\ 204 \text{ Möglichkeiten}}$$

TUCKER S. 91

83. *Gegeben seien sechs Packungen von je fünf gleichen Objekten (A,A,A,A,A), (B,B,B,B,B), ..., (F,F,F,F,F). Auf wieviele Arten kann man sämtliche vorhandenen Objekte auf Haufen von je 15 Objekten aufteilen?*

Gesucht sind alle Möglichkeiten, Haufen von je 15 Objekten zu bilden. Da insgesamt 30 Objekte vorhanden sind, ergibt sich mit jedem 15er-Haufen ein korrespondierender 15er-Haufen, der den ersten auf die Gesamtmenge der vorhandenen Objekte ergänzt. Tritt eine ungerade Anzahl von Haufen auf, so gibt es genau zwei gleiche Haufen, die dann aber nicht als verschieden gezählt werden.

Vorbereitendes Beispiel: Gegeben: (A,A), (B,B), (CC). Gesucht: Aufteilung in Dreierhaufen

AAB BCC	ergänzende Haufen
AAC BBC	ergänzende Haufen
ABB ACC	ergänzende Haufen
ABC ABC	2 gleiche Haufen

$$(1+x+x^2)^3 = \left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)^3 =$$

$$= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^3\binom{3}{i}\binom{2+j}{2}x^{3i+j}$$

$$j+3i = 3 \Rightarrow j = 3-3i$$

$$\sum_{i=0}^{3}(-1)^3\binom{3}{i}\binom{5-3i}{2} = 7$$

Daher gibt es $\left[\frac{7}{2}\right]$ = 3 einander ergänzende Dreierhaufen und ein gleichartiges Paar.

Anwedung auf das gegebene Beispiel

$$(1+x+x^2+\ldots+x^5)^6 = \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^6 = \sum_{i=0}^{6}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^i\binom{6}{i}\binom{5+j}{5}x^{6i+j}$$

Für $6i+j = 15 \Rightarrow j = 15-6i$ ergeben sich

$$\sum_{i=0}^{6}(-1)^i\binom{6}{i}\binom{20-6i}{5} = \binom{6}{0}\binom{20}{5}-\binom{6}{1}\binom{14}{5}+\binom{6}{2}\binom{8}{5}+0\ldots = 4\ 332$$

Einzelhaufen. Daher 2166 Paare von einander ergänzenden Haufen wobei keine gleichartigen vorkommen

TUCKER S. 91

84. *Man suche die erzeugende Funktion für die Anzahl von Möglichkeiten, n Augen zu würfeln, wenn man beliebig oft würfeln kann (die Reihenfolge der Ergebnisse der Würfe wird berücksichtigt)*

0 Augen zu würfeln ist auf keine Weise möglich. Beim ersten Wurf kann man 1 oder 2 oder ... 6 Augen werfen:

$$x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$$

ebenso gibt es für jeden weiteren Wurf diese Möglicheiten. Nach zwei Würfen kann einer der Exponenten von

$$(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$$

als Augenzahl auftreten, nach drei Würfen einer der Exponenten von

$$(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3 \text{ usw.}$$

Die gesuchte Augenzahl n ist daher ein Exponent der 1. oder 2. oder 3. Potenz in der Entwicklung von

$$1+(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)+(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2+\ \dots =$$

$$= \frac{1}{1-(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)}$$

Entwicklung nach TAYLOR ergibt

$$1+x+2x^2+4x^3+8x^4+\underline{16x^5}+32x^6+63x^7+125x^8+248x^9+492x^{10}+976x^{11}+\ \dots$$

Für die Erwürfelung von 5 gibt es also folgende 16 Möglichkeiten

5	1× würfeln	113	3× würfeln	1112	4× würfeln
14	2× würfeln	122		1121	
23		131		1211	
32		212		2111	
41		221		11111	5× würfeln
		311			

TUCKER S. 92

KII **85.** *Wieviele natürliche Zahlen < 1000 sind weder durch 5 noch durch 7 teilbar?*

Menge aller betrachteten Zahlen $|A| = 999$

Menge der durch 5 teilbaren Zahlen $|A_5| = \left[\frac{999}{5}\right] = 199$

Menge der durch 7 teilbaren Zahlen $|A_7| = \left[\frac{999}{7}\right] = 142$

Menge der durch 5 und 7 teilbaren Zahlen $|A_5 \cap A_7| = \left[\frac{999}{35}\right] = 28$

Daher ergibt die symbolische Berechnung

$$|\bar{A}_5 \cap \bar{A}_7| = |(1-A_5)(1-A_7)| = |1-A_5-A_7+A_5.A_7| =$$
$$= |A|-|A_5|-|A_7|+|A_5 \cap A_7|$$

Daher

$$|A_5 \cap A_7| = 999-199-142+28 = \underline{686 \text{ Zahlen}}$$

EISEN S. 103

KI **86.** *Wieviele Anordnungen der Buchstaben a,b,c,d,e gibt es, in denen das Wort ade nicht vorkommt?*

Grundmenge A sie die Menge aller Anordnungen

$$|A| = 5!$$

Betrachten wir das Einzelelement ade ("Riesenbuchstabe", "Jumboletter"), so haben wir insgesamt die Buchstaben b,c,(ade). Die Menge dieser Anordnungen ist

$$|A_1| = 3!$$

daher

$$|\bar{A}_1| = |A|- |A_1| = 5!-3! = \underline{114 \text{ Anordnungen}}$$

TUCKER S. 144

KI **87.** *Von 100 Schülern eines Jahrganges wählen 50 Englisch, 40 Französisch, 20 Schüler wählen beide Srachen. Wieviele Schüler wählen keine Sprache?*

$|A| = 100$, $|E| = 50$, $|F| = 40$, $|E \cap F| = 20$

1. Methode:

$$|E \cup F| = |E|+|F|-|E \cap F| = 50+40-20 = 70$$

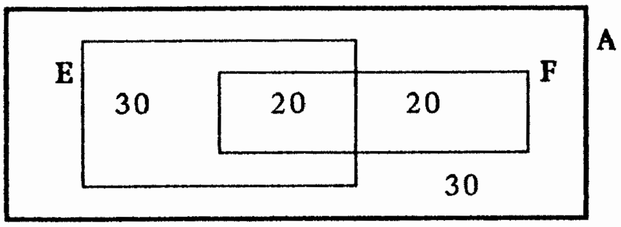
Es gibt also 70 Sprachschüler, daher wählen

30 Schüler keine Sprache

2. Methode:

$$|\bar{E}\cap\bar{F}| = |(1-E)(1-F)| = |1-E-F+E.F| = |A|-|E|-|F|+|E\cap F| =$$
$$= 100-50-40+20 = \underline{30 = |\bar{E}\cap\bar{F}|}$$

<u>3. Methode:</u>



TUCKER S. 145

KI **88.** *Wieviele Anordnungen der Ziffern 0,1,...,9 gibt es, bei denen die erste Ziffer größer als 1 und die letze Ziffer kleiner als 8 ist?*

A...Menge aller Anordnungen $|A| = 10!$

E...Menge aller Anordnungen, deren 1. Ziffer 0 oder 1 ist

$$|E| = 2.9!$$

L...Menge aller Anordnungen, deren letzte Ziffer 8 oder 9 ist

$$|L| = 2.9!$$
$$|E\cap L| = 2.2.8!$$

Daher

$$|\bar{E}\cap\bar{L}| = |(1-E)(1-L)| = |1-E-L+E.L| = |A|-|E|-|L|+|E\cap L| =$$
$$= 10!-2.9!-2.9!+2.2.8! = \underline{2\ 338\ 560 \text{ Anordnungen}}$$

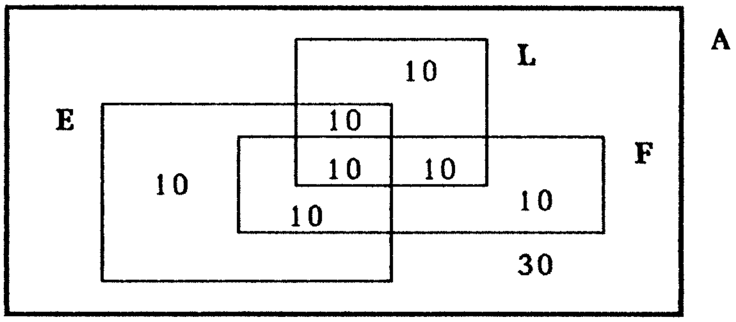
TUCKER S. 145

KI **89.** *Unter 100 Schülern desselben Jahrganges wählen 40 Englisch, 40 Französisch, 40 Latein, je 20 Schüler wählen je zwei Sprachen und 10 Schüler wählen alle drei Sprachen. Wieviele Schüler wählen keine Fremdsprache?*

$$|A| = 100,\ |E| = |F| = |L| = 40$$
$$|E\cap F| = |E\cap L| = |F\cap L| = 20$$
$$|E\cap F\cap L| = 10$$

Gesucht ist: $|\bar{E}\cap\bar{F}\cap\bar{L}|$

$$|\bar{E}\cap\bar{F}\cap\bar{L}| = |(1-E)(1-F)(1-L)| = |1-E-F-L+E.F+E.L+F.L-E.F.L| =$$
$$= |A|-|E|-|F|-|L|+|E\cap F|+|E\cap L|+|F\cap L|-|E\cap F\cap L| =$$
$$= 100-40-40-40+20+20+20-10 = \underline{30 \text{ wählen keine Fremdsprache}}$$



TUCKER S. 147

KⅡ **90.** *Wieviele Zahlen*

a) ≤ 70 sind zu 70

b) ≤ 72 sind zu 72

relativ prim?

a) Grundmenge $A = \{1,...,70\}$ $\quad |A| = 70$

Ferner gilt $70 = 2.5.7$

Wir haben also alle Zahlen <70 zu suchen, die nicht durch 2,5 oder 7 teilbar sind.

Seien Z, F und S die Mengen der Zahlen ≤ 70 die durch 2, 5, 7 teilbar sind

$|Z| = \frac{70}{2} = 35$, $|F| = \frac{70}{5} = 14$, $|S| = \frac{70}{7} = 10$

$|Z \cap F| = \frac{70}{10} = 7$, $|Z \cap S| = \frac{70}{14} = 5$, $|F \cap S| = \frac{70}{35} = 2$

$|Z \cap F \cap S| = \frac{70}{70} = 1$

Gesucht wird daher

$$|\bar{Z} \cap \bar{F} \cap \bar{S}| = |(1-Z)(1-F)(1-S)| = |1-Z-F-S+Z.F+Z.S+F.S-Z.F.S| =$$

$$= |A|-|Z|-|F|-|S|+|Z \cap F|+|Z \cap S|+|F \cap S|-|Z \cap F \cap S| =$$

$$= 70-35-14-10+7+5+2-1 = \underline{24 \text{ teilerfremde Zahlen}}$$

Nach EULER ergäbe sich

$$\varphi(70) = 70\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right) = \underline{24 \text{ teilerfremde Zahlen}}$$

b) Grundmenge $A = \{1,...,72\}$, $\quad |A| = 72$, $\quad 72 = 2^3 3^2$

$|Z| = \frac{72}{2} = 36$, $|D| = \frac{72}{3} = 24$, $|Z \cap D| = \frac{72}{6} = 12$

Daher wie oben

$|\bar{Z}\cap\bar{D}| = |A|-|Z|-|D|+|Z\cap D| = 72-36-24+12 = \underline{\text{24 teilerfremde Zahlen}}$

Nach EULER $\varphi(72) = 72\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = \underline{\text{24 wie oben}}$

TUCKER S. 147

KI **91.** *Wieviele ternäre n-tupel, gebildet aus den Ziffern 0,1,2 enthalten mindestens eine 0, eine 1 und eine 2?*

Es ist $|A| = 3^n$

Weiters seien A_0, A_1, A_2 die Mengen jener n-tupel, in denen 0,1,2 nicht vorkommt. dann ist die Menge jener n-tupel, in denen 0,1,2 mindestens je einmal vorkommt $\bar{A}_0\cap\bar{A}_1\cap\bar{A}_2$.

Es ist $|A_0| = |A_1| = |A_2| = 2^n$, da jede der n Stellen nur mit jeweils einer der anderen Ziffern besetzt werden kann. Ferner ist

$|A_i\cap A_j| = 1$

denn es gilt

$A_0\cap A_1 = \{2,2,\ldots,2\}$

$A_0\cap A_2 = \{1,1,\ldots,1\}$

$A_1\cap A_2 = \{0,0,\ldots,0\}$

Ferner ist

$A_0\cap A_1\cap A_2 = \emptyset \Rightarrow |A_0\cap A_1\cap A_2| = 0$

Daher ist

$$|\bar{A}_0\cap\bar{A}_1\cap\bar{A}_2| = |(1-A_0)(1-A_1)(1-A_2)| =$$

$$= |A|-|A_0|-|A_1|-|A_2|+|A_0\cap A_1|+|A_0\cap A_2|+|A_1\cap A_2|-|A_0\cap A_1\cap A_2| =$$

$$= 3^n-3.2^n+3-0 = \underline{3.(3^{n-1}-2^n+1)\text{ n-tupel}}$$

TUCKER S. 148

KI **92.** *Von 100 Schülern eines Jahrganges wählen je 40 die Sprachen Englisch, Französisch, Latein. 20 Schüler wählen nur Englisch, ebensoviele nur Französisch, 15 nur Latein. 10 Schüler wählen Englisch und Französisch.*

Wieviele Schüler wählen alle drei Sprachen?

Wieviele Schüler wählen keine einzige Sprache?

Gegeben: $|E| = |F| = |L| = 40$

$|E\cap\bar{F}\cap\bar{L}| = |F\cap\bar{E}\cap\bar{L}| = 20$

$|L\cap\bar{E}\cap\bar{F}| = 15$

$|E\cap F| = 10$

Gesucht: $|E\cap F\cap L|$, $|\bar{E}\cap\bar{F}\cap\bar{L}|$

Es gilt

$$|E\cap\bar{F}\cap\bar{L}| = |E(1-F)(1-L)| = |E-E.F-E.L+E.F.L| =$$
$$= |E|-|E\cap F|-|E\cap L|+|E\cap F\cap L|$$

daher

$$20 = 40-10-|E\cap L|+|E\cap F\cap L| \Rightarrow \underline{|E\cap L|-|E\cap F\cap L| = 10} \qquad (1)$$

$$|F\cap\bar{E}\cap\bar{L}| = |F(1-E)(1-L)| = |F-E.F-F.L+E.F.L| =$$
$$= |F|-|E\cap F|-|F\cap L|+|E\cap F\cap L|$$

daraus

$$20 = 40-10-|F\cap L|+|E\cap F\cap L| \Rightarrow \underline{|F\cap L|-|E\cap F\cap L| = 10} \qquad (2)$$

$$|L\cap\bar{E}\cap\bar{F}| = |L(1-E)(1-F)| = |L-E.L-F.L+E.F.L| =$$
$$= |L|-|E\cap L|-|F\cap L|+|E\cap F\cap L|$$

daher

$$15 = 40-|E\cap L|-|F\cap L|+|E\cap F\cap L| \Rightarrow \underline{|E\cap L|+|F\cap L|-|E\cap F\cap L| = 25} \qquad (3)$$

Daraus

$$\begin{array}{ll} (3)-(1) \Rightarrow \\ (3)-(2) \Rightarrow \\ (1) \qquad \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} |F\cap L| = 15 \\ |E\cap L| = 15 \\ |E\cap F\cap L| = 5 \end{array}}$$

Damit ergibt sich

$$|\bar{E}\cap\bar{F}\cap\bar{L}| = |(1-E)(1-F)(1-L)| = |1-(E+F+L)-(E.F+E.L+F.L)-E.F.L| =$$
$$= |A|-(|E|+|F|+|L|)+(|E\cap F|+|E\cap L|+|F\cap L|)-|E\cap F\cap L|$$

daher

$$|\bar{E}\cap\bar{F}\cap\bar{L}| = 100-(3.40)+(2.15-10)-5 = 15$$

$$\boxed{|\bar{E}\cap\bar{F}\cap\bar{L}| = 15}$$

5 Schüler lernen alle drei Sprachen

15 Schüler lernen keine einzige Sprache

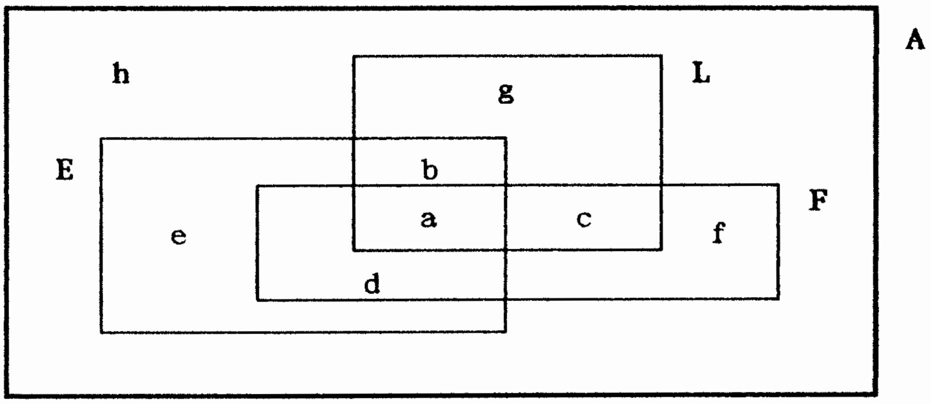
Verwendung von VENN-Diagrammen

Wir unterteilen A in die fremden Teilmengen

$$A = a \cup b \cup c \cup d \cup e \cup f \cup g \cup h$$

Dann gilt

$$|A| = |a|+|b|+|c|+|d|+|e|+|f|+|g|+|h|$$



Laut Angabe gilt

$|A| = |a|+|b|+|c|+|d|+|e|+|f|+|g|+|h| = 100$

$|E| = |a|+|b|+|d|+|e| = 40$

$|F| = |a|+|c|+|d|+|f| = 40$

$|L| = |a|+|b|+|c|+|g| = 40$

$|E \cap \bar{F} \cap \bar{L}| = \underline{|e| = 20}$

$|F \cap \bar{E} \cap \bar{L}| = \underline{|f| = 20}$

$|L \cap \bar{E} \cap \bar{F}| = \underline{|g| = 15}$

$|E \cap F| = |a|+|d| = 10$

Daraus

$|E| = |e|+|b|+(|a|+|d|) = 20+|b|+10 = 40 \Rightarrow |b| = 10$

$|F| = |c|+|f|+(|a|+|d|) = |c|+20+10 = 40 \Rightarrow |c| = 10$

$|L| = |a|+|b|+|c|+|g| = |a|+10+10+15 = 40 \Rightarrow |a| = 5,\ |d| = 5$

$|A| = 5+10+10+5+20+20+15+|h| = 100 \Rightarrow |h| = 15$

Daher

$\underline{|E \cap F \cap L| = |a| = 5}$

$\underline{|\bar{E} \cap \bar{F} \cap \bar{L}| = |h| = 15}$

TUCKER S. 148

KII **93.** *Wieviele neunstellige Kenn-Nummern (führende Nullen möglich) gibt es mit mehrfach auftretenden Ziffern?*

$|A| = 10^9$ ... Anzahl aller Kenn-Nummern

$|V| = 10.9.8\ldots2 = 10!$ ... Kenn-Nummern mit verschiedenen Ziffern

$|\bar{V}| = |A| - |V| = 10^9 - 10!$ = 996 371 200 Kenn-Nummern mit mehrfach auftretenden Ziffern

TUCKER S. 149

Kl **94.** *Wieviele neunstellige Kenn-Nummern (führende Nullen möglich) gibt es, in denen mindestens eine Ziffer mehrfach auftritt?*

$|A| = 10^9$ ... Anzahl aller Kennziffern

$|V| = 10.9.8.7.6.5.5.4.3.2 = 10!$ ... Anzahl aller Kennz-Nummern mit verschiedenen Ziffern

$$|\bar{V}| = |A| - |V| = 10^9 - 10! = \underline{996\ 371\ 200 \text{ Kenn-Nummern}}$$

TUCKER S. 149

Kl **94.** *Wieviele ternäre n-tupel gibt es, in denen wenigstens zwei gleiche Ziffern aufeinander folgen?*

$|A| = 3^n$ ... Anzahl der ternären n-tupel

$|B|$ sei die Anzahl der ternären n-tupel, bei denen keine zwei aufeinander folgende Ziffern vorkommen. In diesem Falle kann man die erste Ziffer auf 3 Arten wählen, jede folgende aber nur auf zwei Arten, da keine Ziffer unmittelbar wiederholt werden kann. Daher

$$|B| = 3.2^{n-1}$$

$$|B| = |A| - |B| = 3^n - 3.2^{n-1} = \underline{3(3^{n-1} - 2^{n-1}) \text{ Möglichkeiten}}$$

TUCKER S. 149

Kl **95.** *In einer Bibliothek sind 200Bücher, davon 70 in frabzösischer Sprache und Bücher über Mathematik. Wieviele nicht-französische Bücher, die auch keinen mathematischen Inhalt haben, gibt es, wenn.es*

a) 30 Mathematikbücher in französischer Sprache

b) 60 nicht-mathematische Bücher in französischer Sprache

gibt?

$|A| = 200$, $|F| = 70$, $|M| = 100$

a) gegeben: $|M\cap F| = 30$, gesucht: $|\bar{M}\cap\bar{F}|$

$$|\bar{M}\cap\bar{F}| = |(1-M)(1-F)| = |1-M-F+M.F| = |A|-|M|-|F|+|M\cap F| = \\ = 200-100-70+30 =$$

= 60 französische Bücher ohne mathematischen Inhalt

b) gegeben: $|\bar{M}\cap F| = 60$, gesucht: $|\bar{M}\cap\bar{F}|$

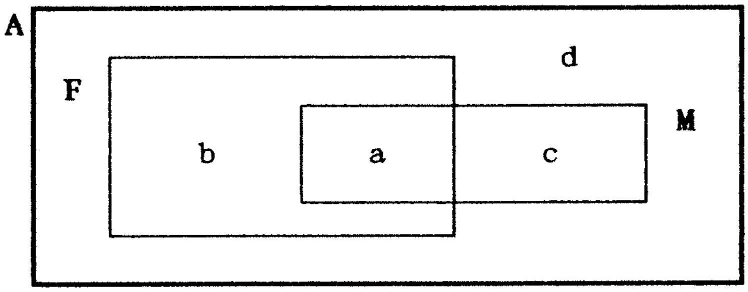
$$|\bar{M}\cap F| = |(1-M)F| = |F-M.F| = |F|-|M\cap F| = 70-|M\cap F| = 60 \Rightarrow \\ |M\cap F| = 10$$

Daher wie oben

$$|\bar{M}\cap\bar{F}| = |A|-|M|-|F|+|M\cap F| = 200-100-70+10 =$$

= 40 französische Bücher ohne mathematischen Inhalt

Lösung mit VENN-Diagrammen



$A = a \cup b \cup c \cup d$

$|A| = |a|+|b|+|c|+|d| = 200$

$|F| = |a|+|b| = 70$,

$|M| = |a|+|c| = 100$

a) $|M\cap F| = |a| = 30$

daher

$|b| = 70-|a| = 40$

$|c| = 100-|a| = 70$

$|d| = 200-30-40-70 = 60$

Demnach

$|\bar{M}\cap\bar{F}| = |d| = 60$

b) $|\bar{M}\cap F| = |b| = 60$

daher

$|a| = 70-|b| = 10$

$|c| = 100-|a| = 90$

$|d| = 200-10-60-90 = 40$

Demnach

$|\bar{M}\cap\bar{F}| = |d| = 40$

TUCKER S. 150

96. *Wieviele Anordnungen der Ziffern 0,1,...,9 enden nicht mit 8 und beginnen nicht mit 3?*

$|A| = 10!$ ... Menge aller Anordnungen

$|B| = 9!$ ... Menge der Anordnungen, die mit 8 enden

$|C| = 9!$ ... Menge der Anordnungen, die mit 3 beginnen

$|B\cap C| = 8!$... Menge der Anordnungen, die mit 8 enden und mit 3 beginnen

daher

$$|\bar{B}\cap\bar{C}| = |(1-B)(1-C)| = |1-B-C+B.C| = |A|-|B|-|C|+|B\cap C| =$$

$$= 10!-9!-9!+8! = \underline{2\ 943\ 360\ \text{Anordnungen}}$$

TUCKER S. 150

KJ **97.** *Wieviele n-tupel der Ziffern 0,1,...,9 gibt es, in denen wenigstens eine der Ziffern 1,2 oder 3 fehlt?*

$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 9^n$ ... Anzahlen der n-tupel, in denen je 1,2 bzw. 3 fehlt

$|A_1\cap A_2| = |A_1\cap A_3| = |A_2\cap A_3| = 8^n$ ... Anzahlen der n-tupel, in denen je zwei der drei Ziffern 1,2,3 fehlen

$|A_1\cap A_2\cap A_3| = 7^n$ ... Anzahl der n-tupel, in denen 1.2.3 fehlen

Gesucht ist $|A_1\cup A_2\cup A_3|$. Nun gilt

$$|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3| =$$

$$= 3.9^n-3.8^n+7^n\ \underline{\text{n-tupel}}$$

Verallgemeinerung: Gesucht ist die Anzahl der n-tupel von r Elementen, in denen mindestens eines von m vorgegebenen Elementen fehlt

$$|A_1\cup\ldots\cup A_m| = m.(r-1)^n-\binom{m}{2}(r-2)^n + \ldots (-1)\binom{m}{m}(r-m)^n$$

TUCKER S. 150

KJ **98.** *Von 200 Schülern wählen je 80 eine der drei Sprachen Englisch, Französisch, Latein, je 30 wählen jede mögliche Paarung von je zweien dieser Sprachen und 15 wählen alle drei Sprachen*

a) Wieviele Schüler wählen keine der drei Sprachen?

b) Wieviele Schüler wählen nur Latein?

$|A| = 200$, $|E| = |F| = |L| = 80$, $|E\cap F| = |E\cap l| = |F\cap L| = 30$

$|E\cap F\cap L| = 15$

a) $|\bar{E}\cap\bar{F}\cap\bar{L}| = |(1-E)(1-F)(1-L)| = |1-E-F-L+E.F+E.L+F.L-E.F.L| =$

$$= |A|-|E|-|F|-|L|+|E\cap F|+|E\cap L|+|F\cap L|-|E\cap F\cap L| =$$

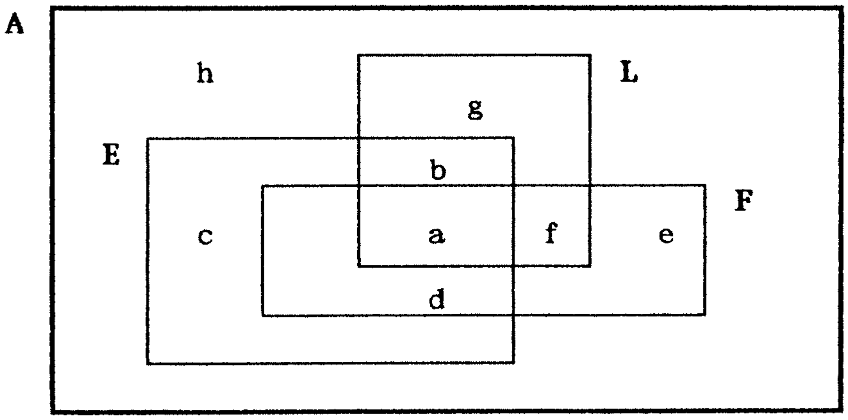
$$200-3.80+3.30-15 = \underline{35\ \text{Schüler wählen keine Sprache}}$$

b) $|\bar{E}\cap\bar{F}\cap L| = |(1-E)(1-F)L)| = |L-E.L-F.L+E.F.L| =$

$$= |L|-|E\cap L|-|F\cap L|+|E\cap F\cap L| = 80 -2.30+15 =$$

= <u>35 Schüler wählen mur Latein</u>

<u>Lösung mit VENN-Diagramm</u>



$|A| = |a|+|b|+|c|+|d|+|e|+|f|+|g|+|h| = 200$

$|E| = |a|+|b|+|c|+|d| = 80$

$|F| = |a|+|d|+|e|+|f| = 80$

$|L| = |a|+|b|+|f|+|g| = 80$

$|E\cap F\cap L| = |a| = 15$

$$\left.\begin{array}{l} |E\cap F| = |a|+|d| = 30 \\ |E\cap L| = |a|+|b| = 30 \\ |F\cap L| = |a|+|f| = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} |d| = 15 \\ |b| = 15 \\ |f| = 15 \end{array}$$

$|c| = 35$, $|e| = 35$, $|g| = 35$, $|h| = 35$

Daher

a) $|\bar{E}\cap\bar{F}\cap\bar{L}| = |h| = 35$

b) $|\bar{E}\cap\bar{F}\cap L| = |g| = 35$

TUCKER S. 150

KJ **99.** *Auf wieviele Arten kann man 20 verschiedene Leute in drei verschiedene Zimmer verteilen, wobei wenigstens eine Person in einem Raum ist?*

<u>1. Methode:</u>

$|A| = 3^{20}$... Anzahl aller möglichen Verteilungen von 20 Personen in 3 Zimmer

$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^{20}$ ... Anzahl der möglichen Verteilungen, wenn jeweils ein Zimmer leer bleibt

$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1$ ... Anzahl der Möglichkeiten bei zwei leeren Zimmern ≡ alle Personen müssen in dasselbe Zimmer

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$ ... alle Zimmer sind leer

Gesucht

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = |(1-A_1)(1-A_2)(1-A_3)| =$$

$$|1-A_1-A_2-A_3+A_1.A_2+A_1.A_3+A_2.A_3-A_1.A_2.A_3| =$$

$$= |A|-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1 \cap A_2|+|A_1 \cap A_3|+|A_2 \cap A_3|-|A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$$

$$= 3^{20}-3.2^{20}+3.1-0 = \underline{\text{3 483 638 676 Möglichkeiten}}$$

2.Methode: Die Verteilung der 20 Personen auf drei nicht leere Zimmer entspricht einer surjektiven Abbildung, daher

$$3!S_{20}^{3} = 3!580606446 = \underline{\text{3 483 638 676 Möglichkeiten}}$$

TUCKER S. 150

K1 **100.***Wieviele Anordnungen der Buchstaben des Wortes BLABLA gibt es, bei denen niemals zwei gleiche Buchstaben aufeinanderfolgen?*

$|N| = \frac{6!}{2!2!2!} = 90$ ... Gesamtzahl der möglichen Anordnungen

Wir fassen (AA), (BB), (LL) zu "Riesenbuchstaben" zusammen

$|A| = |B| = |L| = \frac{5!}{2!2!} = 30$ Anzahl der Wörter mit je einem Riesenbuchstaben

$|A \cap B| = |A \cap L| = |B \cap L| = \frac{4!}{2!} = 12$ Anzahl der Wörter mit je zwei Riesenbuchstaben

$|A \cap B \cap L| = 3!$ Anzahl der Wörter mit 3 Riesenbuchstaben. Daher

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{L}| = |(1-A)(1-B)(1-L)| = |1-A-B-L+A.B+A.L+B.L+A.B.L| =$$

$$= |N|-|A|-|B|-|L|+|A \cap B|+|A \cap L|+|B \cap L|+|A \cap B \cap L| =$$

$$=90-3.30+3.12-6 = \underline{\text{30 Anordnungen}}$$

TUCKER S. 150

K1 **101.***Wieviele Anordnungen der Buchstaben des Wortes SEKTOR gibt es, in welchem entweder S vor E oder E vor K oder K vor T steht? ("Vor" bede$\overset{u}{\text{i}}$tet, daß der Buchstabe irgendwo vorher, nicht aber unbedingt unmittelbar vor dem anderen genannten Buchstaben steht)*

1. Methode: Wir suchen alle Möglichkeiten, bei denen entgegen der Annahme T vor K und K vor E und E vo S steht. Diese Menge ist genau das Komplement der gesuchten Menge M

$|A| = 6!$ ... Menge aller möglichen Anordnungen. Aus den vorhandenen sechs Stellen suchen wir auf $\binom{6}{4}$ Arten vier für die falsche Reihenfolge TKES aus.

· T K · E S

Die restlichen s Stellen besetzen wir auf 2! Arten mit den Buchstaben O und R. Die Anzahl der unzulässigen Möglichkeiten ist daher

$$|\bar{M}| = \binom{6}{4}.2! = 30 \text{ unzuläassige Möglichkeiten}$$

Daher zulässig

$$|M| = |A|-|\bar{M}| = 6!-30 = \underline{690 \text{ Möglichkeiten}}$$

2. Methode: Es sei $|A_1|$ die Anzahl der Fälle, in denen S vor E auftritt. Wir wählen auf $\binom{6}{2}$ Arten zwei Stellen aus und besetzen sie mit Svor E. Die restlichen Stellen besetzen wir auf 4! Arten mit den anderen Buchstaben.

$|A_1| = \binom{6}{2}.4!$ Möglichkeiten für S vor E · · S · E ·

$|A_2| = \binom{6}{2}.4!$ Möglichkeiten für E vor K

$|A_3| = \binom{6}{2}.4!$ Möglichkeiten für K vor T

Wir wählen drei Stellen für S vor E und E vor K und besetzen die drei restlichen Stellen mti den übrigen Buchstaben

S · E K · ·

$|A_1 \cap A_2| = \binom{6}{3}.3!$ Möglichkeiten für S vor E und E vor K

Wir wählen drei Stellen für S vor E und von den verbleibenden vier Stellen zwei für K vor T und verteilen die restlichen Buchstaben auf die verbleibenden zwei Stellen

$$\underbrace{S\ \overbrace{K\ T}\ \cdot\ E}\ \cdot$$

$|A_1 \cap A_3| = \binom{6}{2}.\binom{4}{2}.2!$ Möglichkeiten für S vor E und E vor K

Wir wählen drei Stellen für E vor K und K vor T und besetzen die drei restlichen Stellen mit den übrigen Buchstaben

E · K T · ·

$|A_2 \cap A_3| = \binom{6}{3}.3!$ Möglichkeiten für E vor K und K vor T

Ferner gilt

· S E · K T

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{6}{4}2!$ Möglichkeiten für S vor E vor K vor T

Gesucht ist $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$. Nun gilt nach de MORGAN

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \overline{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3}$$

Daher

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |\overline{(1-A_1)(1-A_2)(1-A_3)}| = |1-(1-A_1)(1-A_2)(1-A_3)| =$$

$$|A_1+A_2+A_3-A_1.A_2-A_1.A_3-A_2.A_3+A_1.A_2.A_3| =$$

$$= |A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1 \cap A_2|-|A_1 \cap A_3|-|A_2 \cap A_3|+|A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$$

$$= 3.\binom{6}{2}.4!-2.\binom{6}{3}.3!-\binom{6}{2}.\binom{4}{2}.2!+\binom{6}{4}.2! = \underline{690 \text{ Möglichkeiten}}$$

TUCKER S. 151

KII **102.** *Gegeben seien die Buchstaben AABCDD. Wieviele Anordnungen gibt es, bei denen*

a) beide A vor beiden D kommen (vgl. Beispiel 101)

b) B vor wenigstens einem D kommt

c) die Eigenschaften [a) und b)] bzw. [a) oder b)] gelten

d) wenigstens ein A vor wenigstens einem D kommt

e) die Eigenschaften [b) und d)] bzw. [b) oder d)] gelten

f) mindestens ein A hinter einem D kommt

g) B niemals vor D steht

h) kein A vor D steht

i) entweder A vor D oder B vor D steht?

Die Menge aller Anordnungen überhaupt beträgt

$$|M| = \frac{6!}{2!2!} = \underline{180 \text{ Möglichkeiten}}$$

a) Wir wählen aus den 6 Stellen 4 aus, auf denen wir dann AABB in der gewünschten Reihenfolge placieren

· A · A · D D

Die beiden freien Stellen können wir dann auf 2! Arten mit B und C besetzen

$$|a| = \binom{6}{4} . 2! = \underline{30 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) 1. Methode: Verboten ist also der Fall, daß beide D vor dem B kommen

$$\cdot\ D \cdot D \cdot B$$

Wir wählen also 3 Stellen aus, auf denen wir die D und B placieren. Die restlichen Stellen besetzen wir mit AAC

$$|\bar{b}| = \binom{6}{3} \cdot \frac{3!}{2!} = \underline{60 \text{ Möglichkeiten}}$$

Daher ist die Menge aller

$$|b| = |M| - |\bar{b}| = 180-60 = \underline{120 \text{ Möglichkeiten}}$$

2. Methode: Es soll B mindestens vor einem D kommen

1.Möglichkeit $\cdot\ D \cdot B\ D \cdot$ $\binom{6}{3} \cdot \frac{3!}{2!}$ = 60 Möglichkeiten

2.Möglichkeit $B \cdot \cdot\ D\ D \cdot$ $\binom{6}{3} \cdot \frac{3!}{2!}$ = 60 Möglichkeiten

Zusammen ergibt das $60+60 = \underline{120 \text{ Möglichkeiten}}$

Die dritte Möglichkeit $\cdot\ D \cdot D \cdot B$ ergänzt mit ihren $\binom{6}{3} \cdot \frac{3!}{2!}$ Arten die zwei erlaubten Möglichkeiten zur Gesamtmenge M.

c) Gesucht ist $|a \cap b|$ sowie $|a \cup b|$

Bestimmung von $|a \cap b|$

Zur Unterbringung von AADD und B benötigen wir 5 Stellen. Dafür gibt es $\binom{6}{5}$ = 6 Möglichkeiten. Da auf diesen 5 Stellen B jedenfalls von mindestens einem D stehen muß, kann ein D nur an der letzten dieser 5 Stellen stehen:

$$A\ B\ A\ D \cdot \overset{\downarrow}{D}$$

Es blieben also nur 4 Stellen für AAD und B, sodaß wir für AAD noch $\binom{4}{3}$ Stellen auwählen können. Andie letze freie Stell kommt dann das C:

$$\underline{|a \cap b|} = \binom{6}{5} \cdot \binom{4}{3} = \underline{24 \text{ Möglichkeiten}}$$

dann gilt weiter nach de MORGAN

$$|a \cup b| = |a| + |b| - |a \cap b| = 30 + 120 = \underline{150 \text{ Möglichkeiten}}$$

d) Es ist verboten, daß beide D vor beiden A kommen. Wir wählen 4 stellen für DDAA aus und besetzen die Reststellen mit b und c:

$|\bar{d}| = \binom{6}{4}.2! = 30 \Rightarrow |d| = |M|-|\bar{d}| = 180 - 30 =$ 150 Möglichkeiten

e) Gesucht ist $|b\cap d|$ sowie $|b\cup d|$

Bestimmung von $|b\cap d|$

1. Methode: Wegen $|\bar{b}\cap\bar{d}| = |M|-|a|-|b|+|b\cap d|$ bestimmen wir zuerst $|\bar{b}\cap\bar{d}|$: hier müssen beide D sowohl vor B als auch vor beiden A kommen. Wir wählen also 5 Stellen aus, die wir mit DDAAB besetzen. Von diesen 5 Stellen müssen die beiden ersten mit DD besetzt werden. Die restlichen 3 Stellen können dann beliebig mit AAB besetzt werden. Daher

$|\bar{b}\cap\bar{d}| = \binom{6}{5}\cdot\frac{3!}{2!} = 18$. Daraus

$|b\cap d| = |a|+|b|-|M|+|\bar{b}\cap\bar{d}| = 120+150-180+18 =$ 108 Möglichkeiten

2. Methode: Es soll wenigstens ein A vor wenigstens einem D und B vor wenigstens einem D. Demnach wählen wir 5 Stellen aus postieren die Buchstaben AADDB in der angegebenen Weise. Dies ist auf zwei arten möglich

D ist an der 5.Stelle der 5 ausgewählten Plätze: ADBAD. Dann können wir die ersten 4 Stellen mt AABD besetzen:

$$\binom{6}{5}\cdot\frac{4!}{2!} = \text{72 Möglichkeiten}$$

oder

ein A an letzter Stelle der 5 ausgewählten Plätze und unmittelbar vorher ein D. Dann können ABD auf drei restliche Plätze verteilt werden:

$$\binom{6}{5}.3! = \text{36 Möglichkeiten}$$

Insgesamt daher 72+36 = 108 Möglichkeiten

Daraus ergibt sich dann

$|a\cup d| = |a|+|d|-|b\cap d| = 120+150-108 = 162$ Möglichkeiten

f) 1. Methode: $\bar{f}$ ... beide A vor beiden D AADD

$|\bar{f}| = \binom{6}{4}.2! = \Rightarrow |f| = |M|-|\bar{f}| = 180-30 =$ 150 Möglichkeiten

2. Methode: Wir wählen 4 Stellen aus. Dann gibt es folgende Möglichkeiten

A an letzter Stelle: für die Verteilung von ADD verbleiben dann

<u>A an letzter Stelle:</u> für die Verteilung von ADD verbleiben dann $\binom{6}{4}\cdot\frac{3!}{2!}$ Möglichkeiten. Zusammen mit der Verteilung von B und c daher $\binom{6}{4}\cdot\frac{3!}{2!}.2! = \underline{90\text{ Möglichkeiten}}$

<u>D an letzter Stelle</u> :Dann muß A an dritter Stelle der 4 ausgewählten Stellen stehen. Das restliche A und D kann auf 2! Arten verteilt werden, ebenso B und C. Daher

$$\binom{6}{4}.2!.2! = \underline{60\text{ Möglichkeiten}}$$

$$\text{Daher insgesamt } |f| = 90+60 = \underline{150\text{ Möglichkeiten}}$$

g) Es soll B nie vor D sein, d.h. es sind stets beide D vor B.

<u>1. Methode</u>: Wir wählen 3 Stellen aus, die wir mit DDB besetzen. Auf die restlichen Stellen verteilen wir dann beliebig A,A,C:

$$|g| = \binom{6}{3}\cdot\frac{3!}{2!} = \underline{60\text{ Möglichkeiten}}$$

<u>2. Methode:</u> Wir berechnen $|\bar{g}|$: Mindestens ein D muß vor B sein. Wir wählen wieder 3 Stellen aus und besetzen die erste mit D. Das restlicheD und B kann dann auf 2! Arten auf die verbleibenden 2 Stellen verteilt werden. Schließlich verteilen wir noch A,A,C

$$|\bar{g}| = \binom{6}{3}.2!.\frac{3!}{2!} = 120 \Rightarrow$$

$$|g| = |M|-|\bar{g}| = 180-120 = \underline{60\text{ Möglichkeiten}}$$

h) Kein A vor D ⇒ Beide D vor beiden A. Nach Auswahl von 4 Stellen verteilen wir DDAA und dann B,C

$$|h| = |\bar{d}| = \binom{6}{4}.2! = \underline{30\text{ Möglichkeiten}}$$

i) Fragestellung wie bei e) $|d\cup b|$

<u>3. Methode:</u> $|d\cup b| = |M|-|\overline{d\cup b}| = |M|-|\bar{d}\cap\bar{b} = |e||$

$|\bar{d}\cap\bar{b}|$ bedeutet; kein A vor D und kein B vor D. Wir wählen daher 5 Stellen, die wir zuerst mit den beiden DD besetzen und dann A,A,B in beliebiger Reihenfolge:

$$|\bar{d}\cap\bar{b}| = \binom{6}{5}\cdot\frac{3!}{2!} = 18 \Rightarrow$$

$$|d\cup b| = |M|-|\bar{d}\cap\bar{b}| = |e| = 180-18 = \underline{162\text{ Möglichkeiten}}$$

103. *Bei wievielen Anordnungen der Buchstaben des Wortes MATHEMATIK* *kommen beide T vor beiden A oder beide A vor beiden M oder beide M vor dem E?*

A_1 beide T vor beiden A: Auswahl von 4 Stellen auf $\binom{10}{4}$ Arten und Besetzung mit TTAA. Die restlichen Buchstaben MHEMIK lassen sich auf $\frac{6!}{2!}$ Arten anordnen. Daher

$$|A_1| = \binom{10}{4} \cdot \frac{6!}{2!} = \underline{75\ 600}$$

A_2 beide A vor beiden M wie oben

$$|A_1| = \binom{10}{4} \cdot \frac{6!}{2!} = \underline{75\ 600}$$

A_3 beide M vor E: Auswahl dreier Stellen und Besetzung mit MME. Verteilung der Restbuchstaben ATHATIK auf die freien Plätze

$$|A_3| = \binom{10}{3} \cdot \frac{7!}{2!2!} = \underline{151\ 200}$$

$A_1 \cap A_2$ beide T vor beiden A und beide A vor beiden M: Aus wahl von 6 Stellen und Besetzung mit TTAAMM. Besetzung der Reststellen mit H,E,I,K

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{10}{6} .4! = \underline{5\ 040}$$

$A_1 \cap A_3$ beide T vor beiden A und beide M vor E: Auswahl von 4 Stellen für beide T vor den beiden A und anschließend Auswahl von 3 Stellen für die beiden M vor E. Schließlich Verteilung der drei Restbuchstaben

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} .3! = \underline{25\ 200}$$

<u>andere</u> <u>Möglichkeit:</u> Auswahl zunächst von 7 Stellen für A,A,T,T,-M,M,E. Daraus dann Auswahl von 4 Stellen für TTAA. Dann ist die Position von MME bestimmt. Für die restlichen Buchstaben H,I,K 3! Möglichkeiten:

$$\binom{10}{7} \cdot \binom{7}{3} .3! = \frac{10!}{7!3!} \cdot \frac{7!}{3!4!} .3! = \frac{10!}{4!6!} \cdot \frac{6!}{3!3!} = \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} .3!$$

$A_2 \cap A_3$ beide A vor beiden M und beide M vor E: Auswahl von 5 Stellen für AAMME und Verteilung von H,I,K,T,T auf die 5 Reststellen

$$|A_2 \cap A_3| = \binom{10}{5} \cdot \frac{5!}{2!} = \underline{15\ 120}$$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ Beide T vor beiden A und beide A vor beiden M und beide M vor E. Auswahl von 7 Stellen für TTAAMME. Verteilung von H,I,K auf die Reststellen

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{10}{7}.3! = \underline{720}$$

Daher

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_2| = |A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1A_2|-|A_1A_3|-|A_2A_3|+|A_1A_2A_3| =$$

$$= 2.75600+151200-5040-25200-15120+720 = \underline{257\ 760 \text{ Möglichkeiten}}$$

KII **104.** *Auf wieviele Arten kann man n verschiedene Objekte in r verschiedene Schachtelnverteilen, sodaß mindestens eine Schachtel leer bleibt?* $(k \leq n)$

1\. Methode: Wir bestimmen zunächst die Anzahl der Möglichkeiten, bei der keine Schachtel leer bleibt: Anzahl der surjektiven Abbildungen von n Elementen auf r Elemente:

$$r!S_n^r \text{ Möglichkeiten}$$

Anzahl der Abbildungen überhaupt: r^n. Daher

$$\underline{r^n - r!S_n^r \text{ Möglichkeiten}}$$

2\. Methode:

A_i Menge der Verteilungsmöglichkeiten, bei der die Schachtel i (i = 1,...,r) leer bleibt

$|A_i| = (r-1)^n$

$|A_iA_j| = (r-2)^n$

....

$|A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}| = (r-k)^n$

$$|\bigcup_{i=1}^{r}| = \sum_{i=1}^{r} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{r} |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j<k}}^{r} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots =$$

$$= r(r-1)^n - \binom{r}{2}(r-2)^n + \binom{r}{3}(r-3)^n - \quad =$$

Daher

$$\underline{|\bigcup_{i=1}^{r}| = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1}\binom{r}{i}(r-i)^n} \overset{\substack{\text{s.oben}\\ \downarrow}}{=} r^n - r!S_n^r \Rightarrow$$

Daraus folgt die Formel für die STERLINGschen Zahlen 2.Art

$$r!S_n^r = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1}\binom{r}{i}(r-i)^n$$

TUCKER S. 154

KS **105.** *Wieviele verschiedene Lösungssextupel der Gleichung*

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 20 \qquad 0 \le x_i \le 8$$

existieren?

<u>1. Methode:</u> Wir suchen zunächst nur die nichtnegativen Lösungen ($0 \le x_i$) der Gleichung. Ihre Anzahl ist identisch mit der Verteilung von 20 gleichen Elementen in 6 verschiedene Schachteln

1	2	3 ...	6	Schachteln
....	..		.....	20 Einsen

$|A| = \binom{25}{5}$ = <u>53 130 Möglichkeiten</u>

Wir betrachten nun jene Teilmengen der Lösungsmenge, für welche gilt

$x_i \in A_i \qquad x_i>8 \Leftrightarrow x_i \ge 9 \qquad i = 1,...,6$

Die gesuchte Lösungsmenge ist dann $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6$. Setzen wir

$$y_1 := x_1-9,$$

so folgt

$$y_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 - 9 = 11$$

Daher ist

$|A_1| = \binom{16}{5}$ = <u>4 368</u> die Anzahl der Lösungssextupel mit

$$y_1 \ge 0 \Rightarrow X_1 \ge 9$$

Sei ferner

$$y_2 := x_2-9$$

so folgt

$$y_1+y_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 - 18 = 2$$

$|A_1 \cap A_2| = \binom{7}{2} = 21$ Anzahl der Lösungssextupel mit

$$x_1, x_2 \ge 9$$

Der Versuch 3 Lösungen $x_i \ge 9$ zu finden, z.B. mit

$$y_3 := x_3-9$$

ergäbe

$$y_1+y_2+y_3+x_4+x_5+x_6 = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6-27 = -7$$

ist also unzulässig. Daher

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

Daraus folgt

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6| = |A| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$$

$$\binom{25}{5} - 6\binom{16}{5} + \binom{6}{2}\binom{7}{5} + 0 = \underline{27\ 237.\text{Lösungssextupel}}$$

2. Methode: Erzeugende Funktion

$$(1+x+x^2+...+x^8)^6 = \left(\frac{1-x^9}{1-x}\right)^6 = \sum_{i=0}^{6} (-1)^i \binom{6}{i} x^{9i} . \sum_{j=0}^{\infty} \binom{5+j}{5} x^j =$$

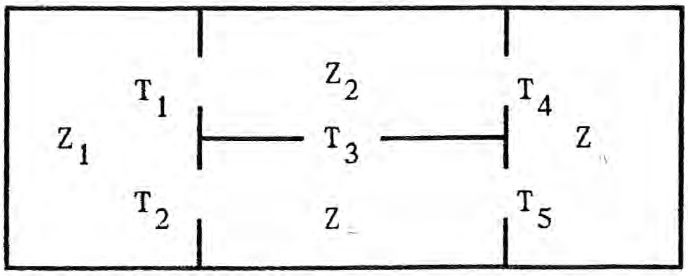
$$= \sum_{i=0}^{6} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^i \binom{6}{i} \binom{5+j}{5} x^{9i+j}$$

Daher für $9i+j = 20 \Rightarrow j = 20-9i$

$$\sum_{i=0}^{6} (-1)^i \binom{6}{i} \binom{25-9i}{5} = \binom{6}{0}\binom{25}{5} - \binom{6}{1}\binom{16}{5} + \binom{6}{2}\binom{7}{5} + 0... = \underline{27\ 237\ \text{Lös.}}$$

TUCKER S. 154

KII **106.** *Auf wieviele Arten kann man die vier Zimmer in dem gegebenen Lageplan mit n verschiedenen Farben bemalen, wenn je zwei durch eine Türe verbundenen Räume verschiedene Farben haben sollen? Welche Minimalzahl von Farben ist erforderlich?*



Insgesamt gibt es $|A| = n^4$ Möglichkeiten, die vier Zimmer mit n Farben zu färben.

Es sei $|A_i|$ die Anzahl der Bemalungen, wenn die beiden durch die Türe T_i verbundenen Raäume gleich bemalt sind. Dann gelten die durch T_i verbundenen Räume als ein Raum und es bleiben nur mehr drei mit n verschiedenen Farben zu bemalende Räume. Daher

Daher

$|A_i| = n^3 \quad i = 1,2,3,4,5 \quad i \ldots$ Nummer der Verbindungstüre

$$\sum_{i=1}^{5} |A_i| = 5n^3$$

Für die drei durch die Türen T_i und T_j verbundenen und gleich bemalten Räume gilt

$$|A_i \cap A_j| = n^2, \quad \sum |A_i \cap A_j| = \binom{5}{2} n^2$$

Beispiel

$A_1 \cap A_2$

$A_1 \cap A_3$

$A_1 \cap A_4$

$A_1 \cap A_5$

$A_2 \cap A_3$

$A_2 \cap A_4$

$A_2 \cap A_5$

$A_3 \cap A_4$

$A_3 \cap A_5$

$A_4 \cap A_5$

Anmerkung:

Durch zwei Türen werden im vorlegenden Fall je zwei oder drei Räume zu einem Großraum vereinigt. Stets aber bleiben zwei verschieden zu färbende Großräume

Diese Anmerkung gilt nicht mehr für $|A_i \cap A_j \cap A_k|$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$

$A_1 \cap A_2 \cap A_4$

$A_1 \cap A_2 \cap A_5$

$A_1 \cap A_3 \cap A_4$

$A_1 \cap A_3 \cap A_5$

$A_1 \cap A_4 \cap A_5$

$A_2 \cap A_3 \cap A_4$

$A_2 \cap A_3 \cap A_5$

$A_2 \cap A_4 \cap A_5$

$A_3 \cap A_4 \cap A_5$

Wir erkennen, daß nur in zwei Fällen verschiedene Farben auftreten. In allen anderen 8 Fällen kommt man mit einer Farbe aus. Daher

$$\sum |A_i \cap A_j \cap A_k| = \left[\binom{5}{3}-2\right]n+2n^2$$

Durch vier Türen werden alle Räume miteinander verbunden, sodaß man stets mit einer Farbe auskommt

$$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = n \Rightarrow \sum |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = \binom{5}{4}n$$

Ebenso

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = n$$

Daher

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5| = |A| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| +$$

$$+ \sum |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| =$$

$$= n^4-5n^3+\binom{5}{2}n^2-\left[\binom{5}{3}-2\right]n-2n^2+\binom{5}{4}n-n = n^4-5n^3+8n^2-4n =$$

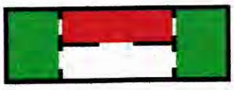
$$= \underline{n(n-1)(n-2)^2 \text{ Möglichkeiten}}$$

Da die Anzahl der Möglichkeiten >0 sein muß gilt

$f(n) = n(n-1)(n-2)^2 > 0 \Rightarrow n > 2 \Rightarrow \underline{n \geq 3 \text{ Mindestens drei Farben}}$

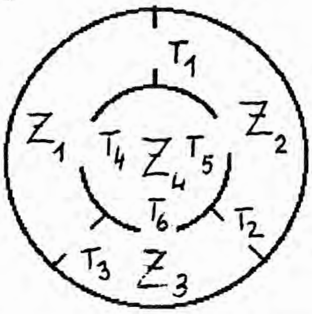
n	f(n)
3	6
4	48
5	180
⋮	⋮

Beispiel für n = 3 Farben ... & Möglichkeiten



TUCKER S. 156

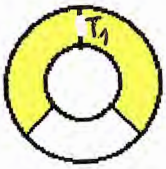
KII **107.** *Die Räume des Turms mit dem angegebenen Grundriß sollen mit n Farben ausgemalt werden, wobei zwei durch Türen verbundene Räume nicht dieselbe Farbe haben sollen.*
Wieviele Farben benötigt man mindestens?

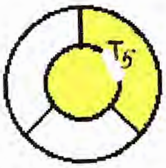


Die Gesamtheit der Färbemöglicheiten beträgt

$|A| = n^4$

Sei $|A_i|$ die Anzahl der Färbungen, die möglich sind, wenn zwei durch die Türe T_i verbundenen Räume gleich ausgemalt werden. Es gibt folgende Möglichkeiten





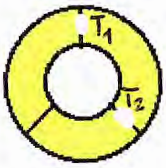
Jede der Türen T_1, T_2, T_3 bzw. T_4, T_5, T_6 schafft einen Großraum und zwei verbleibende Räume. Daher

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = n^3 \qquad |A_4| = |A_5| = |A_6| = n^3$$

also

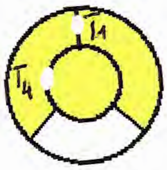
$$\sum_{i=1}^{6} |A_i| = 6n^3$$

Auswahl von 2 Türen A_i, A_j. Es gibt folgende Möglichkeiten

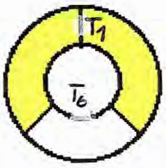


$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = n^2$$

$$|A_1 \cap A_4| = |A_1 \cap A_5| = |A_2 \cap A_5| = |A_2 \cap A_6| =$$



$$= |A_3 \cap A_4| = |A_3 \cap A_6| = n^2$$

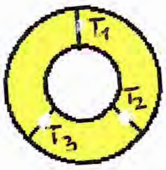


$$|A_1 \cap A_6| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_5| = n^2$$

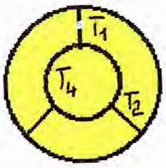
$$|A_4 \cap A_5| = |A_4 \cap A_6| = |A_5 \cap A_6| = n^2$$

Daher insgesamt $\underline{\sum |A_i \cap A_j| = \binom{6}{2} n^2}$

Auswahl von 3 Türen

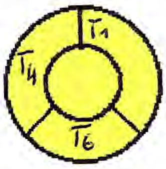


$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = n^2$$

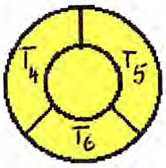


$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_2 \cap A_5| = |A_1 \cap A_2 \cap A_6| =$$
$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_5| = |A_1 \cap A_3 \cap A_6| =$$
$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = |A_2 \cap A_3 \cap A_6| = n$$

$$|A_1 \cap A_4 \cap A_5| = |A_2 \cap A_5 \cap A_6| = |A_3 \cap A_4 \cap A_6| = n^2$$



$$|A_1 \cap A_4 \cap A_6| = |A_2 \cap A_4 \cap A_5| = |A_3 \cap A_5 \cap A_4| =$$
$$|A_1 \cap A_5 \cap A_6| = |A_2 \cap A_4 \cap A_6| = |A_3 \cap A_5 \cap A_6| = n^2$$



$$|A_4 \cap A_5 \cap A_6| = n$$

Daher

$$\sum |A_i \cap A_j \cap A_k| = n^2+9n+3n^2 6n+n = \underline{4n^2+16n}$$

Für alle anderen Fälle reicht eine Farbe aus. Daher

$$\sum |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = \binom{6}{4} n$$

$$\sum |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m| = \binom{6}{5} n$$

$$\sum |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m \cap A_n| = \binom{6}{6} n$$

Daher

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6| = n^4-6n^3+\binom{6}{2}n^2-4n^2-16n+\binom{6}{4}n-\binom{6}{5}n+n =$$

$$= n^4-6n^3+11n^2-6n = n(n-1)(n-2)(n-3) = \underline{\frac{n!}{(n-1)!} \text{ Möglichkeiten}}$$

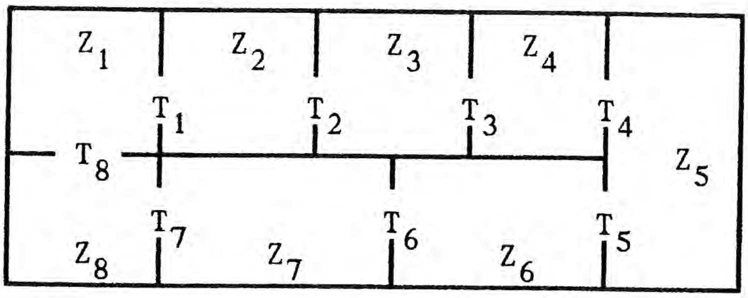
Daher werden mindestens 4 Farben benötigt

n	f(n)
4	24
5	120
6	360
7	840
8	1680
⋮	⋮

TUCKER S. 161

KII **108.** *Auf wieviele Arten kann man die Räume des folgenden Lageplanes mit n Farben ausmalen, wenn zwei durch eine Tür verbundenen Zim-*

mer nicht in derselben Farbe gestrichen werden dürfen. Wieviele Farben sind mindestens erforderlich?



Die 8 Zimmer könenn mit n Farben auf

$$|A| = n^8$$

Arten bemalt werden.

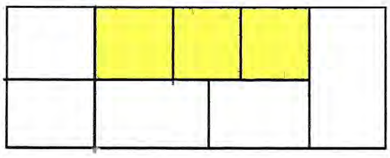
$|A_i|$ sie die Anzahl der Bemalungen, wenn die durch die Türe T_i verbundenen Räume gleich bemalt werden. Dann gilt

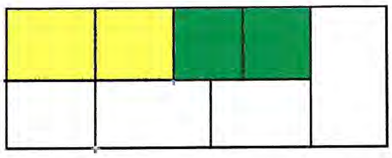
$$|A_i| = n^7 \Rightarrow \sum |A_i| = 8n^7$$

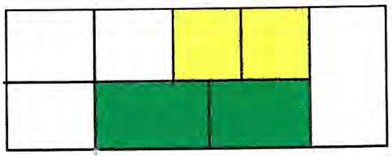
Für zwei Türen T_i, T_j gilt

$$|A_i \cap A_j| = n^6 \Rightarrow \sum |A_i \cap A_j| = \binom{8}{2} n^6$$

In diesem Fall gibt es folgende Möglichkeiten

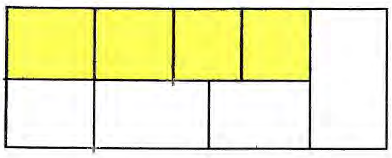


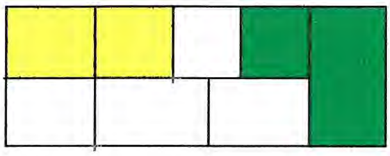




Für drei Türen

$$\sum |A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{8}{3} n^5$$





....

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8| = \binom{8}{8} n$$

Daher

$$|\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_8| = n^8 - 8n^7 + \binom{8}{2} n^6 - \binom{8}{3} n^5 + \binom{8}{4} n^4 - \binom{8}{5} n^3 + \binom{8}{6} n^2 - \binom{8}{7} n^1 + \binom{8}{8} n$$

Ergänzen wir die rechte Seite durch Hinzufügung von

$$\binom{8}{8}n^0-1 = 1-1$$

so erhalten wir für die rechte Seite

$$|\bar{A}_1\cap\ldots\cap\bar{A}_8| = n^8-8n^7+\binom{8}{2}n^6-\binom{8}{3}n^5+\binom{8}{4}n^4-\binom{8}{5}n^3+\binom{8}{6}n^2-\binom{8}{7}n^1+\binom{8}{8}n^0+n-1 =$$

$$= \underline{(n-1)^8+(n-1) \text{ Möglichkeiten} \qquad n\geq 2}$$

n	2	3	4	5	6	7
f(n)	3	258	6564	65540	390630	1679622

TUCKER S. 161

109. *Eine Gesellschaft besteht aus n Damen und n Herren. Auf wieviele Arten können sich Tanzpaare bilden, wenn nicht notwendig alle Damen bezw. Herren sich am Tanz beteiligen?*

Wenn sich r Damen beteiligen, so können sie auf $\binom{n}{r}$ Arten ausgewählt werden, detto die entsprechenden r Herren auf $\binom{n}{r}$ Arten. Denkt man sich die r Damen in einer Reihe aufgestellt, so können ihnen die r Herren auf r!Weisen zugeteilt werden. bei Beteiligung von je r Herren und Damen gibt es daher

$$\binom{n}{r}\binom{n}{r}r! = \binom{n}{r}^2 r!$$

Möglichkeiten. Insgesamtn daher

$$\underline{\binom{n}{1}^2 1!+\binom{n}{2}^2 2!+\binom{n}{3}^2 3!+ \ldots +\binom{n}{n}^2 n! \text{ Möglichkeiten}}$$

FLACHSMEYER S.97

110. *Jemand beteiligt sich am Spiel "Sechs aus 45".*

a) Wieviele Tips muß man abgeben, um sicher alle sechs richtigen Zahlen zu setzen?

b) Wieviele Möglichkeiten bestehen, überhaupt keine richtige Zahl zu erraten?

c) Wieviele Möglichkeiten gibt es, höchstens eine (zwei, drei, vier, fünf) Zahlen zu erraten?

d) Wieviele Möglichkeiten gibt es, mindestesn eine (zwei, drei, vier, fünf) Zahlen zu erraten?

a) Man muß alle denkbaren 6-Auswahlen aus 45 setzen

$$\binom{45}{6} = 8\ 145\ 060 \text{ Möglichkeiten}$$

b) Wir haben die einzige richtige Sechsergruppe zu entfernen und von den restlichen 39 Zahlen alle denkbaren 6-Auswahlen zu bilden

$$\binom{39}{6} = 3\ 262\ 623 \text{ Möglichkeiten}$$

c) Wir bestimmen zunächst die Anzahl der Möglichkeiten, genau eine richtige Zahl zu erraten. Dazu entfernen wir zunächst die richtige Sechsergruppe und bilden aus den verbleibenden 39 Zahlen alle möglichen 5-Auswahlen, die wir dann auf 6 Arten durch eine der richtigen Zahlen ergänzen:

$$\binom{6}{1}\binom{39}{5} = 3\ 454\ 542 \text{ Möglichkeiten mit genau einer richtigen Zahl}$$

Um die Anzahl der Möglichkeiten mit höchstens einer richtigen Zahl zu finden, haben wir die Anzahl b) aller falschen Tips dazu zu addieren

$$\binom{6}{1}\binom{39}{5}+\binom{39}{6} = 6\ 717\ 165 \text{ Tips mit maximal einer richtigen Zahl}$$

Analog fahren wir nun fort

$$\binom{6}{2}\binom{39}{4} = 1\ 233\ 765 \quad \text{genau zwei richtige Tips}$$

$$\binom{6}{0}\binom{39}{6}+\binom{6}{1}\binom{39}{5}+\binom{6}{2}\binom{39}{4} = 7\ 950\ 930 \text{ maximal zwei richige Tips}$$

daher weiter

$$\binom{6}{0}\binom{39}{6}+\binom{6}{1}\binom{39}{5}+\binom{6}{2}\binom{39}{4}+\binom{39}{3} = 8\ 133\ 710 \quad \text{max.3 richtig}$$

$$\binom{6}{0}\binom{39}{6}+\binom{6}{1}\binom{39}{5}+\binom{6}{2}\binom{39}{4}+\binom{6}{3}\binom{39}{3}+\binom{6}{4}\binom{39}{2} = 8\ 144\ 825 \text{ max.4 richtig}$$

$$\binom{6}{0}\binom{39}{6}+\binom{6}{1}\binom{39}{5}+\binom{6}{2}\binom{39}{4}+\binom{6}{3}\binom{39}{3}+\binom{6}{4}\binom{39}{2}+\binom{6}{5}\binom{39}{1} = 8\ 145\ 059 \text{ m.5 r.}$$

Das letzte Resultat ist genau $\binom{45}{6}-1$, das ist die Menge aller Tips weniger dem einen, daer alle sechs richtigen Tips enthält. Diese Resultat kann man auch anders interpretieren. In diese Summe bedeutet

$\binom{6}{0}\binom{39}{6}$ ... kein richtiger Tip, alle 6 abgegebenen Tips falsch

$\binom{6}{1}\binom{39}{5}$ ... ein richtiger Tip, 5 falsche Tips usw.

d) Um mindestens eine richtige Zahl zu erraten, müssen wr von allen Möglichkeiten a) die Möglichkeiten b) abziehen, bei denen überhaupt nichts richtg ist usw.

$\binom{45}{6}-\binom{6}{0}\binom{39}{6}$ = 4 882 437 mindestens 1 richtiger Tip

$\binom{45}{6}-\binom{6}{0}\binom{39}{6}-\binom{6}{1}\binom{39}{5}$ = 1 427 895 mindestens 2 richtige Tips

$\binom{45}{6}-\binom{6}{0}\binom{39}{6}-\binom{6}{1}\binom{39}{5}-\binom{6}{2}\binom{39}{4}$ = 194 130 mind. 3.richtige Tips

$\binom{45}{6}-\binom{6}{0}\binom{39}{6}+\binom{6}{1}\binom{39}{5}-\binom{6}{2}\binom{39}{4}-\binom{6}{3}\binom{39}{3}$ = 11 350 mind. 4 richtige Tips

$\binom{45}{6}-\binom{6}{0}\binom{39}{6}-\binom{6}{1}\binom{39}{5}-\binom{6}{2}\binom{39}{4}-\binom{6}{3}\binom{39}{3}-\binom{6}{4}\binom{39}{2}$ = 235 mind. 5 r.Tips

$\binom{45}{6}-\binom{6}{0}\binom{39}{6}-\binom{6}{1}\binom{39}{5}-\binom{6}{2}\binom{39}{4}-\binom{6}{3}\binom{39}{3}-\binom{6}{4}\binom{39}{2}-\binom{6}{5}\binom{39}{1}$ = 1 mind.1 r.T.

FLACHSMEYER S. 92

111.*Ein Ziffernschloß besteht aus vier Ringen, auf denen die Ziffern 0,1,...,9 angebracht sind. Wie lange dauert es im ungünstigsten Fall, das Schloß durch Probieren zu öffnen, wenn man zum Einstellen einer Nummer und der Probe, ob sich das Schloß öffnen läßt, 15 Sekunden benötigt?*

Für jede der vier Stellen gibt es 10 Möglichkeiten der Einstellung, daher

10^4 Einstellungsmöglichkeite

Nur eine davon ist richtig, demnach

$\underline{10^4-1 \text{ ungüstige Einstellungen}}$

Dauer der Versuche daher $\underline{1^d\ 17^h\ 39^{min}\ 45^{sek}}$

FLACHSMEYER S.92

112.*Im Morse-Alphabet wird jeder Buchstabe durch eine Kombination von Punkten und Strichen dargestellt. Wie lange können diese Zeichenfolgen maximal sein, wenn die 26 Buchstaben des Alphabets* *a,b,...z dargestellt werden sollen?*

Wir betrachten die Anzahl der Zeichenfolgen der Länge x. Jede Stelle kann mit · oder – besetzt werden. Daher gibt es

$$2^x \text{ Zeichenfolgen}$$

Es muß daher sein

$$2^1+2^2+2^3+ \ldots +2^x = 26 \Rightarrow \frac{2^{x+1}-2}{2-1} = 2^{x+1}-2 = 26 \Rightarrow 2^x-1 = 13 \Rightarrow$$

$$2^x = 14 = x = \frac{\ln 14}{\ln 2} = 3{,}81 \quad \underline{\text{Maximale Länge 4 Zeichen}}$$

FLACHSMEYER S.91

KII **113.** *Man gebe die Anzahl der ganzzahligen Lösungstripel der Gleichung*

$$x + y + z = 60 \text{ mit } 15 \le x \le 19,\ 16 \le y \le 21,\ 17 \le z \le 23$$

an. Man zähle de Lösungstripel auf, welche dieser Bedingung genügen.

Wir betrachten folgende Lsungsmengen

A_1 ... Menge aller Lösungen mit $x \ge 15$

A_2 ... Menge aller Lösungen mit $y \ge 16$

A_3 ... Menge aller Lösungen mit $z \ge 17$

A_4 ... Menge aller Lösungen mit $x \ge 20$

A_5 ... Menge aller Lösungen mit $y \ge 22$

A_6 ... Menge aller Lösungen mit $z \ge 24$

Gesucht ist die Menge $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6$

Die Menge $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ist gleichmächtig mit der Menge der Lösungstripel der Gleichung, welche aus der Angabe durch die Substitution

$$x' := x-15,\ y' := y-16,\ z' := z-17$$

hervorgeht:

$$(x'+15)+(y'+16)+(z'+17) = 60 \Rightarrow x'+y'+z' = 12 \qquad (1)$$

$$0 \le x' \le 5,\ 0 \le y' \le 6,\ 0 \le z' \le 1$$

Wir haben also zunächst auf die 3 Unbekannten x',y',z' 12 Einheiten zu verteilen.

$$\begin{array}{c|c|cl} x' & y' & z' & \text{Unbekannte} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \text{12 Einheiten} \end{array}$$

daher gibt es $\binom{14}{2}$ $\underline{= 91 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\ \text{Möglichkeiten}}$

Nunmehr bestimmen wir $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$. Da wir $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ bereits kennen, müssen wir die Anzahl der x' durch die Bedingung

$$x'' := x'-5 = x-20$$

einzuschränken, daher wegen (1)

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ ... $(x''+5)+y'+z' = 12 \Rightarrow x''+y'+z' = 7$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \binom{9}{2} = 36$$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5$ ... $x'+(y''+6)+z' = 12 \Rightarrow x'+y''+z' = 6$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \binom{8}{2} = 28$$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_6$ ... $x'+y'+(z''+7) = 12 \Rightarrow x'+y'+z'' = 5$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_6| = \binom{7}{2} = 21$$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$ ... $x''+(y''+6)+z' = 7 \Rightarrow x''+y''+z' = 1$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = \binom{3}{2} = 1$$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6$ ... $x''+y'+(z''+7) = 7 \Rightarrow x''+y'+z'' = 0$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6| = \binom{2}{2} = 1$$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6$ ... $x'+y''+(z''+7) = 6 \Rightarrow x'+y''+z'' = -1$

keine ganzzahligen Lösungen ≥ 0, daher

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6| = 0$$

Umsomehr gilt

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| = 0$$

Nun gilt

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| -$$

$$-|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_6| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6| +$$

$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap\cap A_5 \cap A_6| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| =$$

$$= 91-36-28-21+3+1+0-0 = \underline{10\ \text{Lösungen}}$$

Aufzählung der Lösungen

x	16	17	17	18	18	18	19	19	19	19
y	21	20	21	19	20	21	18	19	20	21
z	23	23	22	23	22	21	23	22	21	20

Andere Methode: Erzeugendes Polynom

$$(x^{15}+x^{16}+x^{17}+x^{18}+x^{19})\cdot(x^{16}+x^{17}+x^{18}+x^{19}+x^{20}+x^{21})\cdot$$

$$\cdot(x^{17}+x^{18}+x^{19}+x^{20}+x^{21}+x^{22}+x^{12}) =$$

$$= x^{48}(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6) =$$

$$= x^{48}(1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+20x^5+24x^6+26x^7+26x^8+24x^9+20x^{10}+15x^{11}+$$

$$+\underline{10x^{12}}+6x^{13}+3x^{14}+x^{15})$$

Der Koeffizient von x^{60} ergibt die Anzahl der Lösungstripel = 10

KI **114.** *Man zeige*

$$\left.\begin{array}{ll} a) & \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{n-k}{n-m}\cdot\binom{n}{k} = 2^m\binom{n}{m} \\ b) & \displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^k\binom{n-k}{n-m}\cdot\binom{n}{k} = 0 \\ c) & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k\binom{n-k}{m}\cdot\binom{n}{k} = 0 \end{array}\right\} \quad 0 < m \le n$$

a) Es gilt

$$2^m = (1+1)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}$$

Multiplikation beider Seiten mit $\binom{n}{m}$ ergibt

$$2^m\binom{n}{m} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{m}$$

Nun gilt

$$\binom{m}{k}\binom{n}{m} = \frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-k)!}{(n-m)!(m-k)!}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n-k}{n-m}\cdot\binom{n}{k}$$

Daher

$$\underline{2^m\binom{n}{m} = \sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k}}$$

b) Es gilt

$$(1-1)^m = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k} = 0$$

Multiplikation beider Seiten mit $\binom{n}{m}$ ergibt wie oben

$$0 = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{n}{m} = \underline{\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k} = 0}$$

c) $(1-1)^{n-m} = \sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{n-m}{k} = 0$. Wie oben folgt

$$\binom{n-m}{k}\binom{n}{m} = \frac{(n-m)!}{k!(n-m-k)!}\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$\frac{(n-k)!}{m!(n-m-k)!}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n-k}{m}\binom{n}{k} \Rightarrow \underline{\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{m}\binom{n}{k} = 0}$$

RIORDAN S.15

KI **115.**

$$\left.\begin{aligned} a)\ & \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{1+i}\binom{n}{i} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \\ b)\ & \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{1+i}\binom{n}{i} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}\right\}$$

Man beachte: $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^n$

Es ist

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}x^j = 1+\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}x^j = 1+\sum_{j=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!}x^j$$

$$= 1+\sum_{j=0}^{n+1}\frac{n+1}{j}\cdot\frac{n!}{(j-1)!(n+1-j)!}x^j$$

$$\text{Setzen wir } i:=j-1 \Rightarrow \begin{cases} j = 1 \Rightarrow i = 0 \\ j = n+1 \Rightarrow i = n \end{cases}$$

daher

$$(1+x)^{n+1} = 1+(n+1)\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1+i} \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} x^{i+1} \Rightarrow$$

$$\underline{(1+x)^{n+1} = 1+(n+1)\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1+i} \binom{n}{i} x^{i+1}}$$

a) Wir setzen $x = 1 \Rightarrow 2^n = (1+x)^{n+1} = 1+(n+1)\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1+i} \binom{n}{i} \Rightarrow$

$$\underline{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1+i} \binom{n}{i} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$$

b) $(1+x)^{n+1} = 1+(n+1)x+(n+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+i} \binom{n}{i} x^{i+1}$

Setzen wir $x = -1$, so folgt

$$0 = 1+(n+1)(-1)+(n+1)\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1+i} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \quad \text{daraus}$$

$$\underline{\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} \binom{n}{i} = \frac{n}{n+1}}$$

RIORDAN S. 15

KI **116.** *a) Auf wieviele Arten kann man p Pluszeichen und m Minuszeichen in einer Reihe anordnen, sodaß nie zwei Minuszeichen nebeneinander zu stehen kommen?*

b) n Stellen sollen durch Plus- und Minuszeichen so besetzt werden, daß nie zwei Minuszeichen nebeneinander stehen. Man zeige, daß für die Anzahl F(n) der Besetzungsmöglichkeiten gilt:

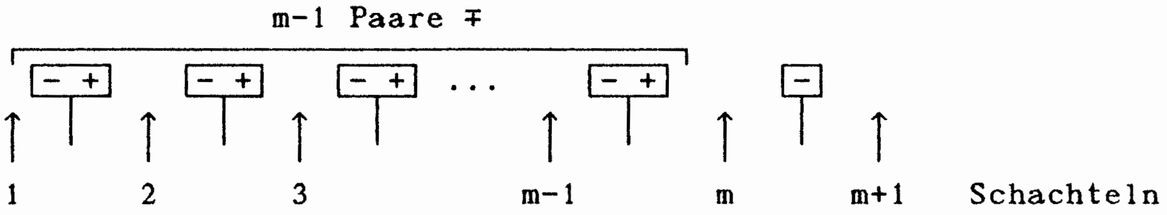
$$F(n) = F(n-1)+F(n-2), \quad n > 1, \quad F(0):= 1, \quad F(1):= 2$$

Die F(n) sind daher FIBONACCI-Zahlen.

(LEONARDO von Pisa, genannt FIBONACCI 1180 – 1250)

a) 1. Methode:

Wir fassen m-1 Minuszeichen mit m-1 Pluszeichen zu je einem Paar zusammen:



In die dadurch entstehenden m+1 "Schachteln" verteilen wir die verbleibenden p-(m-1) Pluszeichen. Daher

$$\underline{\frac{(m+p-(m-1))!}{(p-(m-1))!m!} = \frac{(p+1)!}{(p-(m-1))!m!} = \binom{p+1}{m} \text{ Möglichkeiten}}$$

2. Methode: Wir postieren die Pluszeichen in einer Reihe und numerieren sie von 1 bis p.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & p \\ + & + & + & .. & + \end{array}$$

Die Stellung der Minuszeichen charakterisieren wir durch Angabe der Nummer des Pluszeichens, hinter welchem es zu stehen kommt. Wir haben daher aus den Stellennummern 0,1,2, ... ,p m Stellen auszuwählen. Dazu gibt es

$$\underline{\binom{p+1}{m} \text{ Möglichkeiten}}$$

b) Wir betrachten von den F(n) Möglichkeiten der Anordnung der Plus- und Minuszeichen jene, die mit einem Pluszeichen enden.

$$\underbrace{\cdots\ \ \ldots\ \ \cdots}_{n-1 \text{ Stellen}}|+$$

Da die vorausgehenden n-1 Stellen nach Vorschrift mit + und - Zeichen besetzt werden können, gibt es F(n-1) Möglichkeiten. Nun betrachten wir jene n stelligen Anordnungen, die mit einem - enden.

$$\underbrace{\cdots\ \ \ldots\ \ \cdot\cdot}_{n-2 \text{ Stellen}}|+\ -$$

Dann muß nach Voraussetzung das vorhergehende Zeichen ein + sein, sodaß die Anzahl dieser Möglichkeiten F(n-2) beträgt. Daher gilt

$$\underline{F(n) = F(n-1)+F(n-2)}$$

$F(0) = 1,\ F(1) = 2,\ F(2) = 3,\ F(3) = 5,\ F(4) = 8,\ F(5) = 13,\ldots$

Wegen a) gilt (p+m = n)

$$F(n) \sum_{m=0}^{q} \binom{n-m+1}{m} \qquad q = \left[\frac{n+1}{2} \right]$$

Es ist nämlich $n-m+1 \geq m \Rightarrow n+1 \geq 2m \Rightarrow m = q$

RIORDAN S. 14

KII117.a) Abracadabra *ist ein magisches Wort, mit dessen Hilfe man ehedem glaubte, verschiedene Krankheiten, besonders das hartnäckige dreitägige Wechselfieber, heilen zu können. Nach der Anweisung des basilidischen Arztes Q. Serenus Sammonicus ist jenes Wort so zu schreiben:*

A b r a c a d a b r a
A b r a c a d a b r
A b r a c a d a b
A b r a c a d a
A b r a c a d
A b r a c a
A b r a c
A b r a
A b r
A b
A

Auf wieviele Arten kann man das Wort Abracadabra *bei einem der* A *links beginnend bis zum* a *in der rechten oberen Ecke lesen, wenn man nur in horizontaler Richtung und nach rechts oben weiterschreiten darf?*

b) *In Ovideo, in der Provinz Asturien in Spanien, befindet sich die von einem alten Fürsten Silo erbaute Kirche San Salvador. Der Grabstein des Fürsten trägt die Inschrift:*

t	i	c	e	f	s	p	e	c	n	c	e	p	s	f	e	c	i	t
i	c	e	f	s	p	e	c	n	i	n	c	e	p	s	f	e	c	i
c	e	f	s	p	e	c	n	i	r	i	n	c	e	p	s	f	e	c
e	f	s	p	e	c	n	i	r	p	r	i	n	c	e	p	s	f	e
f	s	p	e	c	n	i	r	p	o	p	r	i	n	c	e	p	s	f
s	p	e	c	n	i	r	p	o	l	o	p	r	i	n	c	e	p	s
p	e	c	n	i	r	p	o	l	i	l	o	p	r	i	n	c	e	p
e	c	n	i	r	p	o	l	i	S	i	l	o	p	r	i	n	c	e
p	e	c	n	i	r	p	o	l	i	l	o	p	r	i	n	c	e	p
s	p	e	c	n	i	r	p	o	l	o	p	r	i	n	c	e	p	s
f	s	p	e	c	n	i	r	p	o	p	r	i	n	c	e	p	s	f
e	f	s	p	e	c	n	i	r	p	r	i	n	c	e	p	s	f	e
c	e	f	s	p	e	c	n	i	r	i	n	c	e	p	s	f	e	c
i	c	e	f	s	p	e	c	n	i	n	c	e	p	s	f	e	c	i
t	i	c	e	f	s	p	e	c	n	c	e	p	s	f	e	c	i	t

Auf wieviele Arten läßt sich von der Mitte S *nach den vier* t *in den Ecken die Inschrift:* Silo princeps fecit *lesen?*

a) $1+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\binom{10}{3}+\dots+\binom{10}{10} = (1+1)^{10} = \underline{2^{10} = 1024 \text{ Mögl.}}$

b) $4 \cdot \frac{16!}{7!9!} = 4\binom{16}{7} = \underline{45\,760 \text{ Möglichkeiten}}$

HEIS S.354

K II **118.** *Aus einem Vorrat von 20 schwarzen, 25 weißen und 30 roten Kugeln soll ein Vorrat von 60 Kugeln gebildet werden. Auf wieviele Arten ist dies möglich?*

<u>1. Methode:</u> Nimmt man zunächst darauf keine Rücksicht, daß die Zahl der farbigen Kugeln jeweils beschränkt ist, so gibt es

$|A|$ Möglichkeiten insgesamt

Berücksichtigt man die Beschränkung in der Anzahl der Farben, so sei

$|A_1|$ ... Möglichkeiten mit mehr als 20 schwarzen Kugeln
$|A_2|$ ... Möglichkeiten mit mehr als 25 weißen Kugeln
$|A_3|$ ... Möglichkeiten mit mehr als 30 roten Kugeln

gesucht ist

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|$$

Es gilt

$$|A_1\cap A_2\cap A_3| = |A|-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

A	S	W ..	R ...	$\binom{60+2}{2} = \binom{62}{2} = 1\,891$
A_1	S 21	W ..	R ...	$\binom{60-21+2}{2} = \binom{41}{2} = 820$
A_2	S	W 26 ..	R ...	0 $\binom{60-26+2}{2} = \binom{36}{2} = 630$
A_3	S	W 000 ..	R 31 ...	$\binom{60-31+2}{2} = \binom{31}{2} = 465$
$A_1\cap A_2$	S 21	W 26 ..	R ...	$\binom{60-21-26+2}{2} = \binom{15}{2} = 105$
$A_1\cap A_3$	S 21	W ..	R 31 ...	$\binom{60-21-31+2}{2} = \binom{10}{2} = 45$

$A_2 \cap A_3$	S	W 26 ..	R 31 ...	$\binom{60-26-31+2}{2} = \binom{5}{2} = 10$
$A_1 \cap A_2 \cap A_3$	S 21	W 26 ..	R 32 ...	$\binom{60-21-26-31+2}{2} = \binom{-16}{2} = 0$

Daher

$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = 1891-820-630-465+105+45+10-0 = \underline{136 \text{ Möglichkeiten}}$

2\. Methode: Erzeugendes Polynom

$$(1+x+ \dots +x^{20})(1+x+ \dots +x^{25})(1+x+ \dots +x^{30} =$$

$$= \frac{(1-x^{21})(1-x^{26})(1-x^{27})}{(1-x)^3} =$$

$$= (1-x^{21}-x^{26}-x^{31}+x^{47}+x^{52}+x^{57}-x^{78})\sum_{i=0}^{\infty} \binom{2+i}{i} x^i$$

Die Exponenten der Summanden müssen stets 60 sein. Daher gilt

$i = 60 \qquad \binom{62}{2} = 1891$

$i+21 = 60 \Rightarrow i = 39 \qquad \binom{41}{2} = 820$

$i+26 = 60 \Rightarrow i = 34 \qquad \binom{36}{2} = 630$

$i+31 = 60 \Rightarrow i = 29 \qquad \binom{31}{2} = 465$

$i+47 = 60 \Rightarrow i = 13 \qquad \binom{15}{2} = 105$

$i+52 = 60 \Rightarrow i = 8 \qquad \binom{10}{2} = 45$

$i+57 = 60 \Rightarrow i = 3 \qquad \binom{5}{2} = 10$

$i+78 = 60 \Rightarrow i = -18$ unbrauchbar

Daher wie oben

$1891-820-630-465+105+45+10-0 = \underline{136 \text{ Möglichkeiten}}$

3\. Methode: Wie bei der ersten Methode, nur ohne Siebformeln

119. Das Problem von Obry TERQUEM (1782-1862)

Aus der linear geordneten Menge N: = { 1,2, ... , n} ist die Anzahl f(n,r) der linear geordneten r-Auswahlen zu bestimmen, bei denen an ungerader Stelle ein ungerades Element von N, an gerader Stelle ein gerades Element von N zu stehen kommt.

Man zeige:

a) $f(n,r) = f(n-2,r)+f(n-1,r-1), \qquad f(n,0):=0$

b) $f(n,r) = \binom{m}{r}$ mit $m:=\left[\frac{r+n}{2}\right]$ (*größte ganze ZahL in* $\frac{r+n}{2}$)

c) $F(n):=\sum_{r=0}^{n} f(n,r) = F(n-1)+F(n-2)$

Die F(n) sind demnach FIBONACCI-Zahlen

a) <u>1.Fall:</u> $r = 2\rho+1$ ... r ist ungerade

α) $n = 2\nu+1$ ... n ist ungerade

Es gibt r-Auswahlen, bei denen $n-1 = 2\nu$ und $n = 2\nu+1$ an vorletzter und letzter Stelle stehen:

$$\underbrace{\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \overset{n-1}{\cdot}\ \ \overset{n}{\cdot}}_{r\ (\text{ungerade})}$$

Entfernen wir zunächst diese Auswahlen, so bleiben jene f(n-2,r) übrig, die sich aus den restlichen n-2 Elementen durch r-Auswahl bilden lassen, deren letzte Ziffer also maximal n-2 ist:

$$\underbrace{\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \overset{\le n-2}{\cdot}}_{r\ (\text{ungerade})}$$

Um nun die Anzahl jener r-Auswahlen zu ermitteln, welche mit n-1 oder n enden, bilden wir die f(n-1,r-1) (n-1)-Auswahlen der Elemente der Menge {1, ...,n-1}. Da n-1 und r-1 beide gerade Zahlen sind, endet jede dieser Auswahlen mit einer geraden Zahl, die maximal den Wert n-1 besitzt:

$$\underbrace{\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \overset{\le n-1}{\cdot}}_{r-1\ (\text{gerade})}\ \Big|\ \overset{n}{\cdot}$$

Fügen wir nun jeder dieser Zahlen die Ziffer n hinzu, sohaben wir die fehlenden Auswahlen ergänzt und es gilt

$$\underline{f(2\nu+1,2\rho+1) = f(2\nu-1,2\rho+1)+f(2\nu,2\rho)} \qquad (*)$$

β) $n = 2\nu+2$ ... n ist gerade

Die r-Auswahl von $\{1,2, ...,2\nu+1,2\nu+2\}$ enthält alle Auswahlen von α). Das gerade Element $2\nu+2$ könnte nur an der letzten Stelle stehen, was unmöglich ist, da die letzte Stelle wegen $r = 2\rho+1$ ungerade ist. r-Auswahlen, in denen $2\nu+2$ auftritt können daher nicht gebildet werden. Es gilt daher

$$\underline{f(2\nu+2,2\rho+1) = f(2\nu+1,2\rho+1)} \tag{1}$$

2. Fall: $r = 2\rho$ ... r ist gerade

α) $n = 2\nu$ ... n ist gerade

Die Überlegung ist genau dieselbe wie bei Fall 1, α)

$$f(2\nu,2\rho) = f(2v-2,2\rho)+f(2\nu-1,2\rho-1) \tag{**}$$

β) $n = 2\nu+1$ ... n ist ungerade

n müßte wieder als größtes Element an letzter, also gerader Stelle stehen, was nach Voraussetzung nicht möglich ist. Daher gilt wieder

$$\underline{f(2\nu+1,2\rho) = f(2\nu,2\rho)} \tag{2}$$

(*) und (**) kann man ohne Rücksicht auf gerade und ungerade zusammenfassen zu (vgl. (1) und (2)):

$$\boxed{f(n,r) = f(n-2,r)+f(n-1,r-1)} \tag{†}$$

b) Aus (1) und (2) erkennt man, daß r-Auswahlen aus Mengen, die sich nur in einem Element unterscheiden (bei gleichem r) dieselbe Anzahl von r-Auswahlen ergeben. Ferner erkennt man, daß (1) aus (2) hervorgeht, wenn man sämtliche Argumente um 1 vermehrt. Betrachtet man (1), so genügt es nicht, daß die Argumente n, $n+1$ ungerade und gerade sind, sondern das größere Argument muß gerade sein, und r gleichzeitig ungerade.
Bei (2) muß das größere Argument ungerade sein und r gerade.
D.h. bei (1) und (2) unterscheiden sich die Summen der Argumente jeweils um 1. Unter den genannten Voraussetzungen gilt daher für (1) und (2) gemeinsam

$$f(n,r) = f(n+1,r)$$

Es gilt jedoch für beide Fälle

$$m := \left[\frac{n+r}{2}\right] = \left[\frac{n+r+1}{2}\right]$$

Es muß daher eine Funktion $g(m,r)$ geben, sodaß gilt

$$f(n,r) = g(m,r) \tag{‡}$$

Zur Bestimmung von $g(m,r)$ ziehen wir die Rekursionsformel (†) heran

$$f(n,r) = f(n-2,r)+f(n-1,r-1) \tag{†}$$

mit der Anfangsbedingung

$$f(n,0):=1$$

ferner gilt

$$f(n,1) = \left[\frac{n+1}{2}\right],\; f(n,n) = 1, \text{ und } f(n,r) = 0, \text{ wenn } r\geq n \text{ ist}$$

Aus (†) folgt die Konstruktion von f(n,r) aus folgender Rabelle

						r						
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	4	1	2	3	1	1	0	0	0	0	0	0
n	5	1	3	3	4	1	1	0	0	0	0	0
	6	1	3	6	4	5	1	1	0	0	0	0
	7	1	4	6	10	5	6	1	1	0	0	0
	8	1	4	10	10	15	6	7	1	1	0	0
	9	1	5	10	20	15	21	t	8	1	1	0
	10	1	5	15	20	35	21	28	8	9	1	1

Nun folgt aus (‡) und (†)

$$g(m,r) = g(m-1,r)+g(m-1,r-1) \text{ mit } g(m,0) = 1,\; g(m,m) = 1 \qquad (\bullet)$$

Diese Beziehung entspricht genau der Definition der Binomialkoeffizienten. Die Konstruktion von g(m,r) folgt daher gemäß dem PASCALschen Dreieck:

					r		
		0	1	2	3	4	5
	0	1					
	1	1	1				
m	2	1	2	1			
	3	1	3	3	1		
	4	1	4	6	4	1	
	5	1	5	10	10	5	1

Daher gilt

$$\boxed{f(n,r) = g(m,r) = \binom{m}{r} \text{ mit } m := \left[\frac{n+r}{2}\right]}$$

c) Es gilt

$$F(n) = \sum_{r=0}^{n} f(n,r) = \sum_{r=0}^{n} f(n-2,r) + \sum_{r=0}^{n} f(n-1,r-1) = F(n-2)+F(n-1)$$

RIORDAN S. 17

120. *Die vier Ecken eines regelmäßigen Tetraeders sollen auf die sechs Ecken eines Würfels abgebildet werden, wobei Drehungen beider Körper keine Rolle spielen. Wieviele Abbildungen gibt es?*

Die Zyklusindizes der Drehungsgruppen von Tetraeder und Würfel lauten

$$P(T) = \frac{1}{12}\,[x_1^4+8x_1x_3+3x_2^2]$$

$$P(W) = \frac{1}{24}\,[x_1^8+8x_1^2x_3^2+9x_2^4+6x_4^2]$$

Die Anzahl der Möglichkeiten ist daher

$$M = \frac{1}{12.24}\left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^4+8\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z_3}\right)+3\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2\right].$$

$$.\left[\hat{e}^{8(z1+z2+z3)}+8\hat{e}^{2(z1+z2+z3)}.\hat{e}^{2.3z3}+9\hat{e}^{4.2z2}+*\right]\Bigg|_{zi=0} =$$

$$= \frac{1}{12.24}\left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^4+8\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z_3}\right)+3\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2\right].$$

$$.\left[\hat{e}^{8(z1+z2+z3)}+8\hat{e}^{(2z1+2z2+8z3)}+9\hat{e}^{8z2}+*\right]\Bigg|_{zi=0} =$$

$$= \frac{1}{12.24}\,[(8^4+8.2^4)+8(8.8+8.2.8)+3(8^2+8.2^2+9.8^2)] = \underline{27\text{ Mögl.}}$$

DE BRUIN: Generalization... S. 61

KII**121.** *Die Seitenflächen eines Würfels sollen mit sechs Farben a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 bemalt werden, jede Würfelfläche mit einer anderen Farbe. Die Färbung soll so beschaffen sein, daß die durch h = $(a_1a_2)(a_3a_4)(a_5a_6)$ festgelegte Farbvertauschung einer Drehung des Würfels äquivalent ist*

Der Zyklusindex für die Drehungen der Würfelflächen lautet

$$P(W) = \frac{1}{24}\,[x_1^6+3x_1^2x_2^2+6x_1^2x_4+6x_2^3+8x_3^2]$$

Ferner gilt

$$h = h^3 = h^5 = (a_1a_2)(a_3a_4)(a_5a_6)$$

$$h^3 = h^4 = h^6 = \varepsilon$$

daher wegen

$$p_i = \sum_{a=h^1(a)} W(a).W(h(a)).W(h^2(a)) \;...\; W(h^{1-1}(a))$$

$p_1 = 0$

$p_2 = 2a_1a_2+2a_3a_4+2a_5a_6$

$p_3 = 0$

$p_4 = 2a_1^2a_2^2+2a_3^2a_4^2+2a_5^2a_6^2$

$p_5 = 0$

$p_6 = 2a_1^3a_2^3+2a_3^3a_4^3+2a_5^3a_6^3$

Daher ist die Anzahl der möglichen Färbungen überhaupt

$$P(0,p_2,0,p_4,0,p_6) = \frac{1}{24}[6(a_1a_2+a_3a_4+a_5a_6)^3 2^3] =$$
$$= 2(a_1a_2+a_3a_4+a_5a_6)^3$$

Da wir eine Färbung in allen sechs Farben wünschen, haben wir den Koeffizienten von $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ zu ermitteln. Es gilt

$$2(a_1a_2+a_3a_4+a_5a_6)^3 = 2\sum_{i,j,k} \frac{3!}{i!j!k!}(a_1a_2)^i(a_3a_4)^j(a_5a_6)^k$$

Wir haben also $i = j = k = 1$, daher

$$2\cdot\frac{3!}{1!1!1!} = \underline{12 \text{ Färbungen}}$$

BERGE S. 167, DE BRUIJN: Color Patterns S. 420, DE BRUIJN S. 199

K6 **122.** *Auf wieviele Arten kann man zwei schwarze und drei rote Kugeln in drei Schachteln verteilen, von denen zwei ununterscheidbar sind (leere Schachteln möglich)?*

Wir denken uns die schwarzen Kugeln mit 1 und 2, die drei roten Kugeln mit 3,4,5 numeriert. Die Ununterscheidbarkeit der schwarzen Kugeln induziert die Gruppe

$$S_2 = \{(1)(2),(12)\}$$

die Ununterscheidbarkeit der roten Kugeln die Gruppe

$$S_3 = \{(3)(4)(5),(345),(354),(3)(45),(34)(5),(35)(4)\}$$

Daher induzieren die 5 Kugeln das direkte Produkt

$$G := S_2 \times S_3$$

Kennzeichnen wir die drei Schachteln durch die Farben a,b,c, so induziert die Ununterscheidbarkeit zweier Schachteln die Gruppe

$$H = \{(a)(b)(c),(a)(bc)\} = \{e,h\}$$

daher

G: $\varepsilon = (1)(2)(3)(4)(5)$

$\pi_1 = (1)(2)(345)$

$\pi_2 = (1)(2)(354)$

$\pi_3 = (1)(2)(3)(45)$

$\pi_4 = (1)(2)(34)(5)$

$\pi_5 = (1)(2)(35)(4)$

$\pi_6 = (12)(3)(4)(5)$

$\pi_7 = (12)(345)$

H: $e = (a)(b)(c)$

$h = (a)(bc)$

$P(H) = \frac{1}{2}[x_1^3+x_1x_2]$

$\pi_8 = (12)(354)$

$\pi_9 = (12)(3)(45)$

$\pi_{10} = (12)(34)(5)$

$\pi_{11} = (12)(35)(4)$

$$P(G) = \frac{1}{12}[x_1^5+4x_1^3x_2+2x_1^2x_3+3x_1x_2^2+3x_2x_3]$$

<u>1. Methode:</u>Die Anzahl der Muster ist nach Seite 174 der Vorl.

$$\frac{1}{|\bar{G}|} \cdot \sum_{(\pi,h)\in G} \nu(\pi,h) \qquad \bar{G} = G\times H = S_2\times S_3\times H$$

Hier stellt $\nu(\pi,h)$ die Anzahl der Färbungen

$$\varphi: X = \{1,2,3,4,5\} \longrightarrow A = \{a,b,c\}$$

dar, wobei gilt

$$h\circ\varphi\circ\pi = \varphi$$

Dabei gibt es folgende Möglichkeiten

$\nu(\varepsilon,e) = 3^5 = \underline{243}$ Jedes Element von X kann mit einer der Farben a,b,c gefärbt werden. Die Elemente von X und A bleiben einzeln fest.

$\nu(\varepsilon,h) = \underline{1}$ Es ist nur die einheitliche Färbung mit der Farbe a möglich, da die Zykluslänge 2 von (bc) kein Teiler einer Zykluslänge von ε ist

$\nu(\pi_1,e) = 3^3 = \underline{27}$ Jeder Zyklus von π_1 kann mit a,b,oder c gefärbt werden

$\nu(\pi_1,h) = \underline{1}$ Jeder Zyklus von π_1 kann nur mit a gefärbt werden

$\nu(\pi_1,e) = 3^3 = \underline{27}$

$\nu(\pi_1,h) = \underline{1}$

wie bei π_1

$\nu(\pi_3,e) = \nu(\pi_4,e) = \nu(\pi_5,e) = \nu(\pi_6,e) = 3^4 = \underline{81}$

$\nu(\pi_3,h) = \nu(\pi_h,h) = \nu(\pi_5,h) = \nu(\pi_h,h) = 1+2 = \underline{3}$ da entweder einheitliche Färbung mit a möglich ist, oder die Einerzyklen mit a und der Zeierzyklus mit (bc) oder (cb) färbbar ist

$\nu(\pi_7,e) = \nu(\pi_8,e) = 3^2 = \underline{9}$

$\nu(\pi_7,h) = \nu(\pi_8,h) = 1+2 = \underline{3}$, da jeder Zyklus mit a färbbar ist, oder der Dreierzyklus mit a und der Zweierzyklus mit (bc) oder (cb) färbbar ist

$\nu(\pi_9,e) = \nu(\pi_{10},e) = \nu(\pi_{11},e) = 3^2 = \underline{9}$

$\nu(\pi_9,h) = \nu(\pi_{10},h) = \nu(\pi_{11},h) = 1+2+2+2.2 = \underline{9}$,Färbung aller Zyklen mit a, oder eines der Zweierzyklen und des Einerzyklus mit a und des zweiten Zweierzyklus mit (bc) oder (cb), oder des Einerzyklus mit a und jedes der beiden Zweierzyklen mit (bc) oder (cb)

Insgesamt daher

$$\frac{1}{24}[243+1+2.28+4.+84+2.12+3+36] = \underline{32 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>2.</u> <u>Methode:</u> nach Seite 179 der Vorlesung

$$P\left(G;\frac{\partial}{\partial z_1},\frac{\partial}{\partial z_2},\frac{\partial}{\partial z_3},\frac{\partial}{\partial z_4},\frac{\partial}{\partial z_5}\right).P\left(H;\hat{e}^{(z1+...+z5)},\hat{e}^{2(z2+z4)}\right)$$

daher

$$\frac{1}{12.2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^5+4\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^3\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)+2\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial z_3}\right)+\right.$$

$$\left.+3\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2++2\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z_3}\right)\right].$$

$$.\left[\hat{e}^{3(z1+z2+z3+z4+z5)}+\underbrace{\hat{e}^{(z1+z2+z3+z4+z5)}.\hat{e}^{2(z2+z4)}}_{\hat{e}^{(z1+3z2+z3+2z4+z5)}}\right]\Bigg|_{z_i=0} =$$

$$\frac{1}{24}[(3^5+1)+4(3^3.3+3+2(3^2.3+1)+3(3.3^2+3^2)+2(3.3+3.1)] = \underline{32 \text{ Mögl.}}$$

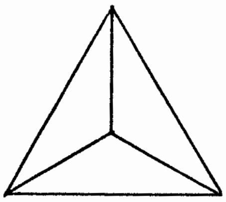
$\boxed{\text{Empirische Lösung Seite 125}}$

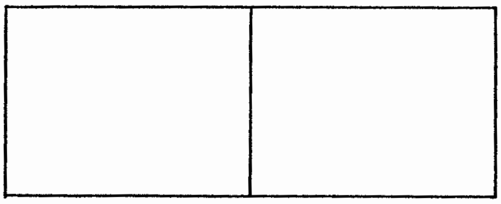
KI **123.** *Man gebe das Muster-Inventar an, wenn bei folgenden Figuren unter Voraussetzung von Drehungs- und Umklappungsinvarianz*

a) die Ecken

b) die Kanten

mit maximal zwei Farben a, b bemalt werden sollen?





Zu Beispiel 122

Schwarze Kugeln: • Rote Kugeln: ○

	gleiche Schachteln	
• • ○ ○ ○		
• • ○ ○	○	
• • ○	○ ○	
• • ○	○	○
• •	○ ○ ○	
• •	○ ○	○
• ○ ○ ○	•	
• ○ ○	• ○	
• ○ ○	•	○
• ○	• ○ ○	
• ○	• ○	○
• ○	•	○ ○
•	• ○ ○ ○	
•	• ○ ○	○
•	• ○	○ ○
•	•	○ ○ ○
○ ○ ○	• •	
○ ○	• • ○	
○ ○	• •	○
○	• • ○ ○	
○	• • ○	○
○	• •	○ ○
	• • ○ ○ ○	
	• • ○ ○	○
	• • ○	○ ○
	• •	○ ○ ○
○ ○ ○	•	•
○ ○	• ○	•
○	• ○ ○	•
○	• ○	• ○
	• ○ ○ ○	•
	• ○ ○	• ○

Fortsetzung von Beispiel **123**

Es gilt

$$\text{inv } M = P(G;\sum W(a),\sum W(a)^2,\sum W(a)^3, \ldots,\sum W(a)^n)$$

1.a) $\varepsilon = (1)(2)(3)(4)$

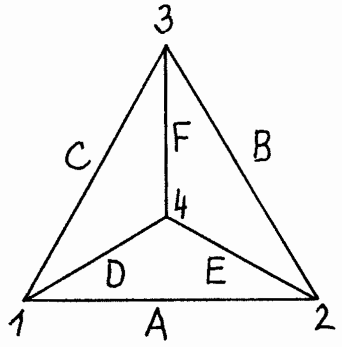
$\pi_1 = (123)(4)$

$\pi_2 = (123)(4)$

$\pi_3 = (12)(3)(4)$

$\pi_4 = (1)(23)(4)$

$\pi_5 = (1)(2)(4)$



$P = \frac{1}{6}[x_1^4+3x_1^2x_2+2x_1x_3]$

Daher

$$\text{inv } M = \frac{1}{6}[(a+b)^4+3(a+b)^2(a^2+b^2)+2(a+b)(a^3+b^3)]$$

$$\underline{\text{inv } M = a^4+2a^3b+2a^2b^2+2ab^3+b^4}$$

Setzt man a = b = 1, so erhält man die Gesamtzahl der Färbemöglichkeiten

<u>8 Färbemöglichkeiten</u>

b) $\varepsilon = (A)(B)(C)(D)(E)(F)$

$\pi_1 = (ABC)(DEF)$

$\pi_2 = (ACB)(DFE)$

$\pi_3 = (A)(BC)(DE)(F)$ $\qquad P = \frac{1}{6}[x_1^6+3x_1^2x_2^2+2x_3^2]$

$\pi_4 = (AC)(B)(D)(EF)$

$\pi_5 = (AB)(C)(DF)(E)$

$$\text{inv } M = \frac{1}{6}[(a+b)^6+3(a+b)^2(a^2+b^2)^2+2(a^3+b^3)^2] =$$

$$\underline{\text{inv } M = a^6+2a^5b+4a^4b^2+6a^3b^3+4a^2b^4+2ab^5+b^6}$$

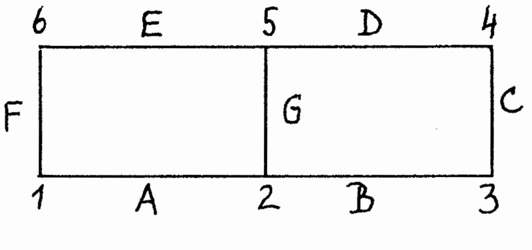
$a = b = 1 \Rightarrow$ <u>20 Färbemöglichkeiten</u>

2.a) $\varepsilon = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$

$\pi_1 = (13)(2)(46)(5)$

$\pi_2 = (16)(25)(34)$

$\pi_3 = (14)(25)(36)$



$P = \frac{1}{4}[x_1^6+x_1^2x_2^2+2x_2^3)$

$$\text{inv } M = \frac{1}{4}[(a+b)^6+(a+b)^2(a^2+b^2)^2+2(a^2+b^2)^3]$$

$$\underline{\text{inv } M = a^6+2a^5b+6a^4b^2+6a^3b^3+6a^2b^4+2ab^5+b^6}$$

$a = b = 1 \Rightarrow$ <u>24 Färbemöglichkeiten</u>

b) $\varepsilon = (A)(B)(C)(D)(E)(F)(G)$

$\pi_1 = (AB)(CF)(DE)(G)$

π_2 = (AE)(BD)(C)(F)(G) $\qquad P = \frac{1}{4}[x_1^7+x_1^3x_2^2+2x_1x_2^3]$

π_3 = (AD)(BE)(CF)(G)

$$\text{inv } M = [(a+b)^7+(a+b)^3(a^2+b^2)^2+2(a+b)(a^2+b^2)^3]$$

$$\underline{\text{inv } M = a^7+3a^6b+8a^5b^2+12a^4b^3+12a^3b^4+8a^2b^5+3ab^6+b^7}$$

$a = b = 1 \Rightarrow$ <u>48 Färbemöglichkeiten</u>

TUCKER S. 199

KII **124.** *Es seien π_1 und π_2 Elemente einer Permutationsgruppe G. Es gelte für ein festes $\pi \in G$*

$$\pi_2 = \pi\circ\pi_1\circ\pi^{-1}$$

Man zeige: $\lambda_1(\pi_1) = \lambda_1(\pi_2)$, d.h. konjugierte Elemente einer Permutationsgruppe haben dieselbe Anzahl von Fixelementen

Es sei $\pi_2 = \pi\circ\pi_1\circ\pi^{-1} \Rightarrow \pi_1 = \pi^{-1}\circ\pi_2\circ\pi$. Ferner sei $\pi_1(i) = i$. Dann gilt

$$\pi_1(i) = \pi^{-1}\circ\pi_2\circ\pi(i) = i \Rightarrow \pi_2\circ\pi(i) = \pi(i)$$

Setzen wir $\pi(i) = j$, so gilt

$$\pi_2(j) = j$$

Jedem Fixelement von π_1 entspricht ein Fixelement $j = \pi(i)$ von π_2. Da die Abbildung

$$\pi: i \longrightarrow j$$

bijektiv ist, gilt

$$\lambda_1(\pi_1) = \lambda_1(\pi_2)$$

EISEN S. 150

KI **125.** *Auf wieviele Arten kann man die Ecken eines Würfels schwarz oder weiß färben?*

<u>1. Methode</u>: BURNSIDE Seite 171 ff Der Vorlesung. Wir suchen die Anzahlen der bei den Drehungen konstant bleibenden Flächen

Typ	Permutation	v	verträgl.Belegungen	
1^8	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)	1	(s)(s)(s)(s)(s)(s)(s)(s) ⋮	2^8
2^4	(17)(28)(34)(56) ⋮	9	(ss)(ss)(ss)(ss) ⋮	2^4
$1^2 3^2$	(168)(274)(3)(5) ⋮	8	(sss)(sss)(s)(s) ⋮	2^4
4^2	(1234)(5678) ⋮	6	(ssss)(ssss) ⋮	2^2

Daher

$$\frac{1}{24}[2^8+(6+3)2^4+8.2^4+6.2^3] = \underline{\text{23 Möglichkeiten}}$$

<u>2.</u> <u>Methode:</u> PóLYA (Seite 191): Anwendung des Zyklusindex ergibt

$$P = \frac{1}{24}[x_1^8+9x_2^4+8x_1^2x_3^2+6x_4^2] = \frac{1}{24}[2^8+9.2^4+8.2^2.2^2+6.2^2] = \underline{23}$$

EISEN S. 190

KII **126.** *Auf wieviele Arten kann man bei einem Würfel drei Seitenflächen weiß und drei schwarz bemalen?*

<u>1.</u> <u>Methode</u>: BURNSIDE Seite 171 ff. Wir suchen die Anzahlen der bei den Drehungen konstant bleibenden Flächen

Typ	Permutation	v	verträgl.Belegungen	$f_{3,3}$
1^6	(1)(2)(5)(4)(5)(6)	1	(s)(s)(s)(w)(w)(w) ⋮	$\frac{6!}{3!3!}$
3^2	(134)(265) ⋮	8	(sss)(www) ⋮	2
$1^2 2^2$	(1)(24)(35)(6) ⋮	3	(s)(ss)(w)(ww) ⋮	2.2

Daher $\frac{1}{24}[20+8.2+3.2.2] = \underline{\text{2 Möglichkeiten}}$

<u>2.</u> <u>Methode:</u> PóLYA (Seite 191): Anwendung des Zyklusindex ergibt

$$P = \frac{1}{24}[x_1^2+3x_1^2x_2^2+6x_1^2x_4+6x_2^3+8x_3^2]$$

Daher lautet das Musterinventar

$$\frac{1}{24}[(w+s)^6+3(w+s)^2(w^2+s^2)^2+6(w+s)^2(w^4+s^4)+6(w^2+s^2)^3+8(w^3+s^3)^2] =$$

$$= s^6+s^5w+2s^4w^2+2s^3w^3+2s^2w^4+sw^5+w^6$$

Der Koeffizient von w^3s^3 ergibt <u>2 Möglichkeiten</u>
EISEN S. 190

KI127. *Auf wieviele Arten kann man die Seitenflächen eines Würfels mit c Farben bemalen, wenn nicht notwendig stets alle Farben Verwendung finden?*

<u>1. Methode</u>: BURNSIDE Seite 171 ff der Vorlesung. Wir suchen die Anzahlen der bei den Drehungen konstant bleibenden Flächen

Typ	Permutation	v	verträgl.Belegungen	$f_{3,3}$
1^6	(1)(2)(5)(4)(5)(6)	1	(s)(s)(s)(s)(s)(s)	c^6
			⋮	
2^3	(13)(26)(35)	6	(ss)(ss)(ss)	c^3
	⋮		⋮	
3^2	(134)(265)	8	(sss)(sss)	c^2
	⋮		⋮	
$1^2 4^1$	(1)(2345)(6)	6	(s)(ssss)(s)	c^3
	⋮		⋮	
$1^2 2^3$	(1)(24)(35)(6)	6	(s)(ss)(ss)(s)	c^4
	⋮		⋮	

Daher $\frac{1}{24}[c^6+6c^3+8c^2+6c^3+3c^4] = \underline{\frac{1}{24}[c^6+3c^4+12c^3+8c^2]\text{ Mögl.}}$

<u>2. Methode:</u> PóLYA (Seite 191): Der Zyklusindex

$$P = \frac{1}{24}[x_1^6+3x_1^2x_2^2+6x_1^2x_4+6x_2^3+8x_3^2]$$

ergibt für $x_i = c$ dasselbe Ergebnis
EISEN S. 190

KV128. *Auf wieviele Arten kann man aus Perlen in drei verschiedenen Farben a,b,c ein aus*

$$n = 4,\ n = 6,\ n = 12$$

Perlen bestehendes Halsband bilden, wenn es

a) drehungsinvariant

b) invariant gegen Drehungen und Umwendungen

sein soll und jede Farbe mindestens einmal vorkommt?

Die drei Farben, auf deren Reihenfolge es natürlich ankommt, sollen auf n Stellen zunächst linear angeordnet werden, wobei jede Farbe mindestens einmal auftreten soll:

$$(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)^3 = (\hat{e}^x-1)^3 = \hat{e}^{3x}-3\hat{e}^{2x}+3\hat{e}^x-1) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} 3^i \frac{x^i}{i!} -3.\sum_{i=0}^{\infty} 2^i \frac{x^i}{i!} +3.\sum_{i=}^{\infty} \frac{x^i}{i!} -1 = \sum_{i=0}^{\infty} (3^i-3.2^i+3)\frac{x^i}{i!}$$

Anzahl der linearen Anordnungen von n Elementen in drei Farben, wobei jede Farbe mindestens einmal auftritt

$$f(n) = \underline{3^n-3.2^n+3}$$

<u>Andere Überlegung:</u> Es gibt insgesamt 3^n Möglichkeiten die n Stellen mit 3 Farben zu belegen. Davon sind alle Möglichkeiten abzuziehen, bei denen nur 2 Farben auftreten. Wählen wir zwei Farben aus (3 Möglichkeiten), so gibt es 2^n Möglichkeiten, sie auf eine der n Stellen zu setzen (zusammen 3.2^n Möglichkeiten). Da der Fall der Färbung mit einer einzigen Farbe gleichfalls auftritt und dabei das Auftreten einer Farbe jeweils einmal zu oft abgezogen wird (man beachte die Paarungen (sw),(sr),(wr)), so sind diese drei überschüssigen Fälle wieder abzuziehen. Daher wie oben $f(n) = 3^n-3.2^n+3$

$\boxed{n = 4}$ f(n) = 36 lineare Anordnungen

a) Da es außer der Identität bei der Drehungsgruppe des Quadrats keine Möglichkeiten gibt, drei Farben in invarianter Weise zu verteilen, gilt

Typ	Permutation	v	verträgl.Belegungen	$f_{2,1,1}$
1^4	(1)(2)(3)(4)	1	(a)(a)(b)(c) ⋮	f(4)

$$\frac{1}{4}[f(4)+0] = \underline{9 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) Für die Diëdergruppe des Qadrates gilt

Typ	Permutation	v	verträgl.Belegungen	$f_{2,1,1}$
1^4	(1)(2)(3)(4)	1	(a)(a)(b)(c) ⋮	f(4)
$1^2 2$	(1)(24)(3)	2	(a)(bb)c)	3!

$$\frac{1}{8}[f(4)+2.3!] = \underline{6 \text{ Möglichkeiten}}\text{-}$$

$\boxed{n = 6}$ f(n) = 540

a) für die Drehungsgruppe des Sechsecks gilt

Typ	Permutation	v	verträgl.Belegungen	$f_{i,j,k}$
1^6	(1)(2)(5)(4)(5)(6)	1	(a)(a)(a)(a)(b)(c) ⋮	f(6)
2^3	(14)(25)(36) ⋮	2	(aa)(bb)(cc) ⋮	3!

$$\frac{1}{6}[f(6)+2.3!] = \underline{91 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) für die Diëdergruppe des Sechsecks gilt

Typ	Permutation	v	verträgl.Belegungen	$f_{i,j,k}$
1^6	(1)(2)(5)(4)(5)(6)	1	(a)(a)(a)(a)(b)(c) ⋮	f(6)
2^3	(14)(25)(36) ⋮	4	(aa)(bb)(cc) ⋮	3!
$1^2 2^3$	(1)(26)(35)(4) ⋮	3	(a)(aa)(bb)(c) ⋮	f(4)

$$\frac{1}{12}[f(6)+4.3!+3.f(4)] = \underline{56 \text{ Möglichkeiten}}$$

$\boxed{n = 12}$ f(12) = 519 156

a) für die Drehungsgruppe Zwölfecks gilt

Typ	Permutation	v	zul.Bel.	$f_{i,j,k}$
1^{12}	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)	1	(a)...(c)	f(12)
2^6	(17)(28)(39)(4 10)(5 11)(6 12)	1	(aa)..(cc)	f(6)
3^4	(159)(26 10)(37 11)(48 12)	2	(aaa)...	f(4)
4^3	(147 10)(258 11)(369 12)	2	(aaaa)...	3!

$$\frac{1}{12}[f(12)+f(6)+2.f(4)+2.3!] = \underline{43\ 315 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) für die Diëdergruppe des Zwölfecks giltf(7) = 1 806

Typ	Permutation	v	zul.Bel.	$f_{i,j,k}$
1^{12}	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)	1	(a)...(c)	f(12)
2^6	(17)(28)(39)(4 10)(5 11)(6 12)	7	(aa)..(cc)	f(6)
3^4	(159)(26 10)(37 11)(48 12)	2	(aaa)...	f(4)
4^3	(147 10)(258 11)(369 12)	2	(aaaa)...	3!
$1^2 2^5$	(1)(7)(2 12)(3 11)(4 10)(59)(68)	6	(a)(a)...	f(7)
	⋮		⋮	

$\frac{1}{24}$ [f(12)+7f(6)+2f(4)+2.3!+6f(7)] = <u>22 244 Möglichkeiten</u>

TUCKER S. 192

KII **129.** *Auf wieviele Arten kann man 4 weiße, 4 schwarze und 4 rote Kugeln (von denen die gleichgefärbten jeweils ununterscheidbar sind) in 3 gleichartige Schachteln verteilen?*

Wir verteilen zunächst die 4 weißen Kugeln in drei verschiedene Schachteln

1	2	3	Schachteln
○	○○	○	weiße Kugeln

Dafür gibt es $\binom{6}{2}$ = Möglichkeiten. Da diese 15 Möglichkeiten für eine Farbe jeweil mit den beiden anderen Farben kombinierbar ist, gibt es 15^3 = 3375 Möglichkeiten, die gegebenen Kugeln in 3 verschiedene Schachteln zu verteilen.

Da die Schachteln gleich sind, spielt eine Permutation der 3 Schachteln keine Rolle.

ε = (1)(2)(3) alles bleibt fest ... 15^3 Möglichkeiten

π_1 = (1)(23)

π_2 = (13)(2)

π_3 = (12)(3)

π_4 = (123)

π_5 = (132)

Bei π_1, π_2, π_3 treten jeweils zwei Schachteln auf, die in gleicher Weise zu füllen sind. Die restlichen Kugeln sind in die dritte Schachtel zu füllen.

In jede der beiden gleichartigen Schachteln können jeweils 0, 1, 2 Kugeln derselben Farbe gefüllt werden. 3 Kugeln können nicht in eine der beiden Schachteln gefüllt werden, da dann in die andere Schachtel auch drei Kugeln dieser Farbe kommen müßten; es sind aber nur 4 Kugeln vorhanden.

Beispiel (12)3 •∘∘ | •∘∘ | ••⊙⊙⊙⊙
oder •∘⊙⊙ | •∘⊙⊙ | ••∘∘

Da von jeder Farbe 0, 1 oder 2 Kugeln gewählt werden können und drei Farben vorhanden sind, lautet das erzeugende Polynom für die Verteilung in zwei gleiche Schachteln

$$(1+x+x^2)^3 = 1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$$

man entnimmt daraus z.B. daß es drei Möglichkeiten gibt 5 Kugeln in den gleichartigen Schachteln zu deponieren:

• • ∘ ∘ ⊙ | • • ∘ ∘ ⊙ | ⊙ ⊙
• • ∘ ⊙ ⊙ | • • ∘ ⊙ ⊙ | • •
• ∘ ∘ ⊙ ⊙ | • ∘ ∘ ⊙ ⊙ | • •

insgesamt gibt es daher für π_1 $(1+1+1)^3$ Möglichkeiten. Ebenso viele für π_2 und π_3. Daher

für π_1, π_2, π_3 3.3^3 Möglichkeiten.

Für π_4 und π_5 gibt es überhaupt keine Möglichkeit, die Kugeln in der angegebenen Weise zu verteilen, da je 4 Kugeln in drei Schachteln nicht zyklisch vertauschbar eingefüllt werden können

Typ	Permut.	v	verträgl.Belegungen	f
1^3	(1)(2)(3)	1	siehe oben	15^3
$1^2 2$	(1)(23)	3	siehe oben	3^3

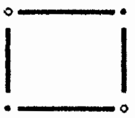
Daher nach BURNSIDE (S. 168)

$$\frac{1}{6}[15^3+3.3^3] = \underline{576 \text{ Möglichkeiten}}$$

KT **130.** *Auf wieviele Arten kann man drehungsinvariant alle Ecken eines Quadrats mit maximal 3 Farben einfärben, wenn benachbarte Ecken verschiedene Farben haben sollen?*

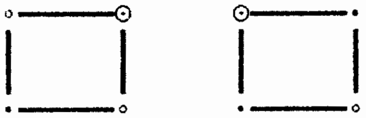
Es gibt folgende Färbemöglichkeiten

1. Verwendung von bloß zwei Farben



⇒ 6 Möglichkeiten, da aus den 3 gegebenen Farben jeweils auf 3 Arten je 2 ausgewählt werden können und das Quadrat bei jeder Auswahl auf 2 Arten eingefärbt werden kann

2. Verwendung aller drei Farben
Wählt man eine spezielle Farbe aus (auf 3 Arten möglich), so gibt es jeweils 2 Möglichkeiten,drei Farben auf die restlichen Eckpunkte der Vorschrift entsprechend zu verteilen



Hier gibt es 2.2.3 = 12 Möglichkeiten. Insgesamt daher

6+12 = <u>18 Möglichkeiten</u>

Drehungsgruppe des Quadrats:

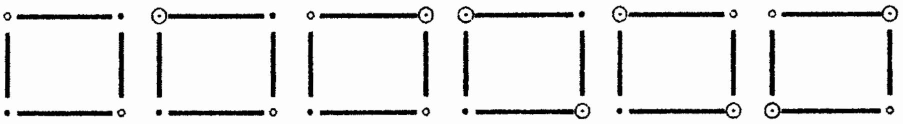
$$\varepsilon = (1)(2)(3)(4),\ \delta = (1234),\ \delta^2 = (13)(24),\ \delta^3 = (1432)$$

Daher nach BURNSIDE

Typ	Permutation	v	verträgl.Belegungen	f
1^4	(1)(2)(3)(4)	1	(a)(b)(a)(c)	18
			⋮	
$1^2 2$	(13)(24)	2	(ab)(ac)	
	⋮		⋮	

$$\frac{1}{4}[18+6] = \underline{6 \text{ Möglichkeiten}}$$

Aufzählung



TUCKER S. 186

KI **131.** *Auf wieviele Arten kann man mit 3 Farben einen Stab mit n Farbringen versehen, wenn benachbarte Ringe verschiedene Farben haben sollen und die Färbung umwendungsinvariant (Vertauschung der Stabenden) sein soll.*

Die zugrunde liegende Gruppe ist:

ε, π ... Umwendung

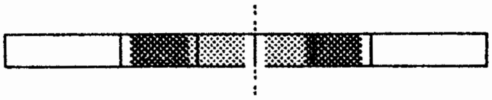
Da der erste Ring auf 3 Arten gefärbt werden kann, alle folgenden Ringe aber nur mehr auf je 2 Arten, gibt es insgesamt

$$3.2^{n-1} \text{ Färbemöglichkeiten}$$

n gerade

ε ... 3.2^{n-1} Invarianzen

π ... keine zulässigen Invarianzen, da bei Umwendung in der Mitte zwei gleiche Farben aufeinander stoßen würden



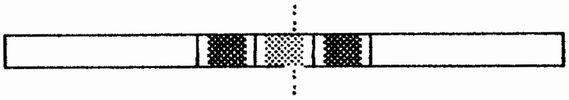
Daher nach BURNSIDE

$$\text{n gerade} \quad \frac{1}{2}[3.2^{n-1}+0] = 3.2^{n-2} \text{ Färbungen}$$

n ungerade $n = 2m+1$

ε ... 3.2^{n-1} Invarianzen

π ... $3.2^{m} = 3.2^{(n-1)/2}$ Invarianzen. Denn für den Ring in der Mitte gibt es 3 Möglichkeiten der Färbung, für die anschließenden Ringe nur mehr je 2 Möglichkeiten



$$\text{n ungerade} \quad \frac{1}{2}[3.2^{n-1}+2.2^{(n-1)/2}] \text{ Färbemöglichkeiten}$$

TUCKER S. 186

KI**132.** *n-stellige Zahlen, die mit den Ziffern 0,1,6,8,9 gebildet werden (führende Nullen möglich) stellen wieder n-stellige Zahlen dar, wenn man den Zettel, auf dem sie geschrieben sind, auf den Kopf stellt (z.B. 0089 und 6800). Wieviele umkehrungsinvariante Zahlen gibt es?*

(vgl.Beispiel 135)

Die relevante Gruppe lautet

$\varepsilon = (0)(1)(6)(8)(9)$

π ... Umkehrung

Da die Umwendung π Anfang und Ende der Zahl vertauscht, müssen wir zwischen geradem und ungeradem n unterscheiden

n gerade $n = 2m$ • • • • • • ⋮ • • • • • •

Die linke Hälfte kann auf $5^m = 5^{n/2}$ Arten besetzt werden. Dann ist die rechte Hälfte eindeutig bestimmt. Die linke Hälfte kann dann so gewählt werden, daß die gebildete Zahl gegenüber π invariant ist. Daher

<u>n gerade</u> $\quad \underline{\frac{1}{2}[5^n+5^{n/2}]\text{ Möglichkeiten}}$

<u>n ungerade</u> $\quad n = 2m+1$. In der Mitte kann nur 0, 1 oder 8 stehen

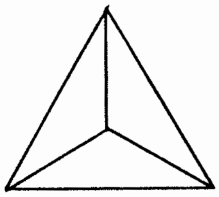
$$\begin{array}{c} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ 0\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 1 \\ 8 \end{array}$$

Wieder gibt es $5^m = 5^{(n-1)/2}$ Möglichkeiten, die linke Hälfte zu besetzen und die rechte Hälfte so zu ergänzen, daß die gebildete Zahl π-invariant ist. daher

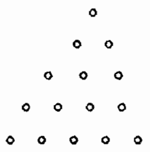
<u>n ungerade</u> $\quad \underline{\frac{1}{2}[5^n+5^{(n-1)/2}]\text{ Möglichkeiten}}$

TUCKER S. 186

KI **133.** *a) Auf wieviele Arten kann man die Eckpunkte der nebenstehenden Figur mit drei Farben drehungsinvariant einfärben?*



b) Fünfzehn Kugeln sind in der angegebenen Weise in Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks gelagert. Auf wieviele Arten kann man sie drehungsinvariant mit drei Farben bemalen?



c) Auf wieviele Arten kann man die 64 Felder eines 8×8-Schachbrettes mit zwei Farben bemalen?

a) $\varepsilon = (1)(2)(3)(4)$

$\delta = (123)(4)$

$\delta^2 = (132)(4)$

Zyklusindex $P = \frac{1}{3}[x_1^4+2x_1x_3]$

Nach BURNSIDE daher $\frac{1}{3}[3^4+2.3.3] = \underline{33\text{ Möglichkeiten}}$

b) ε = (1) ... (15)

δ = (1 11 15)(2 12 10)(3 7 14)(4 13 6)(5 8 9)

δ^2 = (1 15 11)(2 10 12)(3 14 7)(4 6 13)(5 9 8)

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15

Zyklusindex: $\frac{1}{3}[x_1^{15}+2x_3^5]$ Nach BURNSIDE daher

$$\frac{1}{3}[3^{15}+2.3^5] = \underline{4\ 783\ 131 \text{ Möglichkeiten}}$$

c) ε = (1) ... (64)

δ = (1 8 6 4 5 7) ...

δ^2 = (1 64)(2 63) ...

δ^3 = (1 57 64 8)

Typus: 1^{64}
4^{16}
2^{32}
4^{14}

Zyklusindex

$\frac{1}{4}[x_1^{64}+x_2^{32}+2x_4^{16}]$

57	58	59	60	61	62	63	64
49	50	51	52	53	54	55	56
41	42	43	44	45	46	47	48
33	34	35	36	37	38	39	40
25	26	27	28	29	30	31	32
17	18	19	20	21	22	23	24
9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8

Daher nach BURNSIDE

$$\frac{1}{4}[2^{64}+2^{32}+2.2^{16}] =$$

<u>4 611 686 019 501 162 496 Mögl.</u>

<u>Nachtrag</u> <u>zu</u> <u>a):</u> Nach PóLYA lautet der Musterabzähler

$$P = \frac{1}{3}[(a+b+c)^4+2(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)] =$$

$$= a^4+b^4+c^4+2a^3b+2a^3c^2+2a^2b^2+2a^2c^2+4a^2bc+2ab^3+2ac^3+$$

$$+4ab^2c++4abc^2+2b^2c^2+2b^3c+2bc^3$$

Die Summe der Koeffizienten ergibt 33 als Anzahl der Muster

TUCKER S. 185 u. 186

XI **134.** *Auf wieviele Arten lassen sich n gleichartige Objekte in 3 gleichartige Schachteln verteilen?*

Wir verteilen zunächst die n gleichartigen Objekte in 3 <u>verschiedene</u> Schachteln

1 | 2 | 3
.... | .. | .....

Schachteln
n Objekte

$\binom{n+2}{2}$ Möglichkeiten

Da die Schachteln <u>gleichartig</u> sein sollen, müssen sie permutierbar sein. Wir haben daher die Gruppe S_3 zu betrachten

$\varepsilon = (1)(2)(3)$
$\pi_1 = (1)(23)$
$\pi_2 = (12)(3)$
$\pi_3 = (123)$
$\pi_4 = (132)$
$\pi_5 = (13)(2)$

Bei jeder dieser Permutationen müssen wir die Anzahl der festbleibenden Elemente feststellen

ε ... jede der $\binom{n+2}{2}$ Möglichkeiten bleibt fest

π_1,π_2,π_3 Die Verteilung in diesen Permutationen bleibt konstant, wenn in π_1 in den Schachteln 2 und 3, in π_2 in den Schachteln 1 und 2 und in π_5 in den Schachteln 1 und 3 je gleich viele Objekte liegen. In jedem dieser drei Fälle sind dann folgende Verteilungen möglich

$$n = 2m \quad \left.\begin{array}{ccc} 0 & 0 & n \\ 1 & 1 & n-2 \\ 2 & 2 & n-4 \\ & \vdots & \\ m & m & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} m+1 = \\ \frac{n}{2}+1 \text{ Mögl.} \end{array} \qquad n = 2m+1 \quad \left.\begin{array}{ccc} 0 & 0 & n \\ 1 & 1 & n-2 \\ 2 & 2 & n-4 \\ & \vdots & \\ m & m & 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} m+1 = \\ \frac{n+1}{2} \text{ Mögl.} \end{array}$$

π_3, π_4 bei diesen Permutationen sind alle drei Schachteln vertauschbar. Dies ist natürlich nur möglich, wenn in allen Schachteln gleichviele Elemente sind, d.h. wenn n durch 3 teilbar ist. Nur dann gibt es bei π_3 und π_4 Invarianzen. Daher gibt es insgesamt nach BURNSIDE folgende Fälle

n durch 3 teilbar

n gerade $\quad \frac{1}{6}\left[\binom{n+2}{2}+3\left(\frac{n}{2}+1\right)+2\right]$ Möglichkeiten

n ungerade $\quad \frac{1}{6}\left[\binom{n+2}{2}+3\left(\frac{n+1}{2}\right)+2\right]$ Möglichkeiten

n nicht durch 3 teilbar

n gerade $\quad \frac{1}{6}\left[\binom{n+2}{2}+3\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]$ Möglichkeiten

n ungerade $\quad \frac{1}{6}\left[\binom{n+2}{2}+3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]$ Möglichkeiten

andere Möglichkeit:Die Verteilung von gleichen Objekten in gleiche Schachteln ist identisch mit der Zerlegung von ganzen Zahlen in Summanden. Speziell führt unser Fall auf die Zerlegung der Zahl n in maximal 3 Summanden, von denen der größte ≤ n ist. Nach Seite 109 der Vorlesung haben wir daher zu setzen r = 3 und M = n. Die erzeugende Funktion lautet dann

$$\frac{(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} \qquad \frac{(1-x^4)(1-x^5)\cdot\ldots\cdot(1-x^{3+n})}{(1-x)(1-x^2)\cdot\ldots\cdot(1-x^n)}$$

TUCKER S. 186

KT **135.** *Um alle fünfstelligen Zahlen (führende Nullen möglich) anzuschreiben, benötigt man 10^5 Zettel. Die Ziffern o,1,6,8,9 gehen, wenn man sie auf den Kopf stellt, in die Ziffern 0,1,9,8,6 über. Manche Zettel kann man daher zur Darstellung zweier Zahlen benutzen. So kann der Zettel mit der Zahl 11668 auch durch Umlegen als 89911 gelesen werden.*

Wieviele Zettel benötigt man, um alle Zahlen von 00000 – 99999 unter Beachtung der Möglichkeit der Umlegung darszustellen?

Es sei X = {00000, ... ,99999} die Menge der betrachteten Zahlen und G die Gruppe $\{\varepsilon,\pi\}$, worin π die Permutation ist, die alle nichtumkehrbaren Zahlen, das sind jene, die mindestens eine der Ziffern 2,3,4,5,7 enthalten, in sich überführt und ebenso jene Zahlen in sich überführt, die sich reproduzieren, wenn man sie auf den Kopf stellt; so geht z.B. 16091 in sich selbst über. π vertauscht also die auf zwei Arten lesbaren Zahlen.

ε ... hält alle 10^5 Zahlen fest

π ... hält zunächst alle Zahlen fest, die 2,3,4,5,7 enthalten.

Ihre Zahl ist 10^5 – Anzahl der Zahlen, die 0,1,6,8,9 enthalten, also 10^5-5^5.

Bei der Anzahl der selbstumkehrbaren Zahlen muß eine der selbstumkehrbaren Ziffern in der Mitte stehen; dafür gibt es die 3 Möglichkeiten 0,1,8. Dann kann man die beiden vorangehenden Stellen mit 0,1,6,8,9 besetzen. Dann sind auch die restlichen Stellen der Zahl bestimmt; daher gibt es hier 3.5^2 Möglichkeiten.

Bei π gibt es also $10^5-5^5+3.5^2$ Möglichkeiten. Nach BURNSIDE ist somit die Anzahl der Zettel

$$\frac{1}{2}[10^5+(10^5-5^5+3.5^2)] = \underline{98\ 475 \text{ Zettel}}$$

LIU S. 139

KI **136.** *Aus einem Vorrat von weißen, schwarzen und roten Perlen werden Armbänder aus 5 Perlen gebildet. Wieviele verschiedene Muster gibt es?*

Zwei Armbänder sind äquivalent, wenn sie durch Drehung und Umwendung auseinander hervorgehen.

Diëdergruppe des Fünfecks:

$\varepsilon = (1)(2)(3)(4)(5)$ $\sigma_1 = (1)(25)(34)$

$\delta = (12345)$ $\sigma 2 = (13)(2)(45)$

$\delta^2 = (13524)$ $\sigma_3 = (159)(24)(3)$ $P = \frac{1}{10}[x_1^5+4x_5+5x_1x_2^2]$

$\delta^3 = (14253)$ $\sigma_4 = (12)(35)(5)$

$\delta^4 = (15432$ $\sigma_5 = (14)(23)(5$

daher nach PóLYA $\frac{1}{10}[3^5+4.3+5.3.3^2] = \underline{39 \text{ Muster}}$

LIU S. 138

KI **137.** *Aus einem Vorrat von weißen und schwarzen Perlen werden Schmuckketten gebildet. Zwei Ketten mit einer bestimmten Anordnung der Perlen gelten als äquivalent, wenn die eine aus der anderen durch Vertauschen der Enden (in gestreckter Lage der Ketten) hervorgeht. Wieviele Muster von Ketten gibt es, wenn eine Kette aus*

a) 3 Perlen

b) 4 Perlen

c) n Perlen besteht?

a) Es gibt folgende 8 Anordnungen, wovon die übereinander stehenden jeweils äquivalent sind, denn wir betrachten z.B. wws und sww als identisch

1 www	2 wws	4 wsw	5 wss	7 sws	8 sss
	3 sww		6 ssw		

Es gibt empirisch also 6 Äquivalenzklassen.

Die zugrundeliegende Gruppe ist

ε ... Identität, π ... Umwendungen

Für die Identität gibt es 2^3 Möglichkeiten, da jede der 3 Stellen mit zwei Farben besetzt werden kann. Bei den Umwendungen kann man die mittlere der drei Stellen auf 2 Arten mit einer Farbe besetzen, die linke Stelle auf 2 Arten. Dann ist aus Symmetriegründen, die rechte Stelle bestimmt. Es gibt daher bei π 2.2 Identitäten. Nach BURNSIDE gilt also

$$\frac{1}{|G|}\sum \lambda_1(\pi) = \frac{1}{2}[2^3+2.2] = \underline{6 \text{ Möglichkeiten}}$$

b) Experimentell ergeben sich folgende 16 Fälle, von denen die jeweils übereinander stehenden identifiziert werden

1 wwww	2 wwws	4 wwsw	6 wwss	8 wsws	10 wssw	11 swws
	3 swww	5 wsww	7 ssww	9 swsw		

12 sssw	14 ssws	16 ssss
13 wssw	15 swss	

Für unsere Fragestellung gibt es daher 10 relevante Fälle. Gruppentheoretisch gilt für die beiden Permutationen

ε ... Identität, π ... Umwendung

Bei ε gibt es 2^4 Invarianzen. da jede der 4 Stellen mit 2 Farben belegt werden kann. Aus Symmetriegründen müssen von den 4 zu besetzenden Stellen die beiden mittleren gleich sein (2 Möglichkeiten), währen die Stelle links außen wieder auf 2 Arten besetzt werden kann. dann ist auch die vierte Stelle bestimmt (2.2 Möglichkeiten). Dann gilt nach BURNSIDE

$$\frac{1}{|G|}\sum \lambda_1(\pi) = \frac{1}{2}[2^4+2.2] = \underline{10 \text{ Möglichkeiten}}$$

c) Auch hier besteht die Gruppe aus den beiden Permutationen

ε ... Identität, π ... Umwendung

Da jede der n Steller mit 2 Farben belegt werden kann, enthält ε 2^n Invarianzen. Für die Umwendungen müssen wir die beiden Fälle unterscheiden

<u>n gerade</u> n = 2m. Bei ε treten dann 2^n Invarianzen auf.
Bei den Umwendungen π müssen aus Symmetriegründen die beiden mittleren Elemente gleich besetzt werden, was auf 2 Arten möglich ist. Für die linke Hälfte gibt es 2^{m-1} Möglichkeiten, womit

auch die rechte Hlfte bestimmt ist. Daher gibt es bei π $2.2^{m-1} = 2^m = 2^{n/2}$ Invarianzen. Nach BURNSIDE gilt

<u>n gerade</u> $\frac{1}{|G|}\sum \lambda_1(\pi) = \frac{1}{2}[2^n+2^{n/2}]$ 10 Möglichkeiten

<u>n ungerade</u> $n = 2m+1$. Die Invarianzen von ε sind wieder 2^n. Bei π kann man das mittlere Element auf 2 Arten wählen, während es für die eine Seite 2^m Möglichkeiten gibt., insgesamt bei π also $2.2^m = 2^{m+1} = 2^{(n+1)/2}$ Möglichkeiten. Daher

$$\frac{1}{|G|}\sum \lambda_1(\pi) = \underline{\frac{1}{2}[2^n+2^{(n+1)/2}] \text{ Möglichkeiten}}$$

LIU S. 138

138. *Auf wieviele Arten kann man eine Treppe von n Stufen hochsteigen, wenn man maximal eine Stufe auf einmal überspringen kann ($n\geq 2$). Man gebe die erzeugende Funktion an.*
<u>Hinweis:</u> Man gebe zunächst eine Rekursionsformel für die Anzahl a der Möglichkeiten an

Beginnt man mit dem Nehmen einer Stufe, so bleiben a_{n-1} Möglichkeiten. Beginnt man mit zwei Stufen, so bleiben a_{n-2} Möglichkeiten. Daher

$$a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$$

Die a_n sind daher FIBONACCI-Zahlen. Die Berechnung der erzeugenden Funktion siehe Vorlesung Seite 74 f.
EISEN S. 94

KI 139. *Auf wieviele Arten kann man eine weiße, zwei rote und zwei blaue Kugeln in vier verschiedene Schachteln verteilen?*

<u>1. Methode:</u>

Verteilung der weißen Kugel	4 Möglichkeiten
Verteilung der 2 roten Kugeln	$\binom{5}{2}$ Möglichkeiten
Verteilung der 2 blauen Kugeln	$\binom{5}{2}$ Möglichkeiten

Daher insgesamt

$$4.\binom{5}{2}.\binom{5}{2} = \underline{400 \text{ Möglichkeiten}}$$

2. Methode: Wir ordnen den Kugeln die Zahlen 1,2,3,4,5 zu. $X = \{1,2,3,4,5\}$. Die Menge der "Farben" ≡ Schachteln sei $A = \{a,b,c,d\}$. Dann lauten die entsprechenden Permutationen

$\varepsilon = (1)(2)(3)(4)(5)$

$\pi = (1)(2)(3)(45)$ Zyklusindex

$\pi = (1)(23)(4)(5)$ $P = \frac{1}{4}[x_1^5+2x_1^3x_2+x_1x_2^2]$

$\pi = (1)(23)(45)$

Daher bei 4 Farben

$$\frac{1}{4}[4^5+2.4^3.4+4.4^2] = \underline{400 \text{ Möglichkeiten}}$$

140.*Aus einem Vorrat von 10 schwarzen, 10 roten , 15 blauen und 15 grünen Kugeln ist eine Auswahl von 42 Kugeln zu treffen, wobei in jeder Auswahl mindestens je 2 schwarze und rote Kugeln und mindestens je 3 blaue und grüne Kugeln enthalten sein sollen.*

Elementare Methode

Wir haben zu berücksichtigen, daß bei jeder Auswahl von jeder Kugelgruppe zunächst je 2 bzw. 3 "Pflichtexemplare" zu berücksichigen sind. Zunächst wird bei den Auswahlen nicht berücksichtigt, daß die einzelnen Vorräte beschränkt sind. Daher muß in weiteren Schritten korrigiert werden, was zuviel bzw. zu wenig an Kugeln augewählt wurde.

10s	10r	15b	15g	Vorräte	
2	2	3	3	10 Pfl. 32 frei	$+\binom{32+\overset{3.}{}}{3}$ = +6545 Gesamtmögl.
11	2	3	3	je 19 Pfl. 23 frei	$-2.\binom{23+3}{3}$ = −5200
2	11	3	3		
2	2	16	3	je 23 Pfl. 19 frei	$-2.\binom{19+3}{3}$ = −3080
2	2	3	16		
11	11	3	3	28 Pfl. 14 frei	$+\binom{14+3}{3}$ = +680
11	2	16	3	je 32 Pflichtexemplare 10 freie Exemplare	$+ 4.\binom{10+3}{3}$ = +1144
11	2	3	16		
2	11	16	3		
2	11	3	16		
2	2	16	16	36 Pfl. 6 frei	$+\binom{6+3}{3}$ = +84

11	11	16	3	je 41 Pfl., 1 frei $-2\binom{1+3}{3} = \cancel{-4} -8$
11	11	3	16	
11	11	16	3	mehr als 42 Plichtexemplare
....	.....	.....	..	

Daher gibt es insgesamt

$$6545-(5200+3080)+(680+1144+84)-8 = \underline{165 \text{ Möglichkeiten}}$$

<u>erzeugendes</u> <u>Polynom</u>

$$(x^2+x^3+ \dots +x^{10})^2(x^3+x^4+ \dots +x^{15})^2 =$$

$$= x^{10}(1+x+ \dots +x^8)(1+x+ \dots +x^{12})^2 = x^{10}\frac{(1-x^9)^2}{(1-x)^2} \cdot \frac{(1-x^{13})^2}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{x^{10}(1-2x^9-2x^{13}+x^{18}+4x^{22}+x^{26}-2x^{31}-2x^{35}+x^{44})}{(1-x)^4} =$$

$$= (x^{10}-2x^{19}-2x^{23}+x^{28}+4x^{32}+x^{36}-2x^{41}-2x^{45}+x^{54}).\sum\binom{3+i}{3}x^i$$

$i+10 = 42 \Rightarrow i = 32 \dots \quad \binom{35}{3} = + 6545$

$i+19 = 42 \Rightarrow i = 23 \dots -2.\binom{26}{3} = - 5200$

$i+23 = 42 \Rightarrow i = 19 \dots -2.\binom{22}{3} = - 3080$

$i+28 = 42 \Rightarrow i = 14 \dots \quad \binom{17}{3} = + 680$

$i+32 = 42 \Rightarrow i = 10 \dots 4.\binom{13}{3} = + 1144$

$i+36 = 42 \Rightarrow i = 6 \dots \quad \binom{9}{3} = + 84$

$i+41 = 42 \Rightarrow i = 1 \dots -2.\binom{4}{3} = - 8$

$\underline{165}$

141.*Man gebe die Anzahl der Möglichkeiten an, mit r gleichen Würfeln die Augenzahl n zu erzielen.*

Mit jedem Würfel kann maximal die Augenzahl $M \leq 6$ erzielt werden. Es ist also die Zahl n als eine Summe von r Summanden darzustellen, von denen der größte $\leq M = 6$ ist und der kleinste ≥ 1 ist. Nach Seite 110 der Vorlesung ist die erzeugende Funktion für die Zerlegung von n in genau r Summanden, von denen jeder $\leq M$ ist,

$$x^r \frac{(1-x^{r+1})(1-x^{r+2})\dots(1-x^{r-1+M})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{M-1})}$$

Beispiel: M = 6, r = 4, n = 13

r = 4 M = 6

?

$$x^4 \frac{(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)(1-x^9)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)} =$$

$$x^4+x^5+2x^6+3x^7+5x^8+6x^9+8x^{10}+9x^{11}+11x^{12}+11x^{13}+12x^{14}+11x^{15}+11x^{16}+9x^{17}+8x^{18}+$$

$$+6x^{19}+5x^{20}+3x^{21}+$$

$$+2x^{22}+x^{23}+x^{24}$$ Ende!

n = 9	n = 10	n = 11	n = 12	n = 13
1116	1126	1136	1146	1156
1125	1135	1145	1155	1246
1134	1144	1226	1236	1255
1224	1225	1235	1245	1336
1233	1234	1244	1335	1345
2223	1333	1334	1344	1444
	2224	2225	2226	2236
	2233	2234	2235	2245
		2333	2244	2335
			2334	2344
			3333	3334

143. *a) Gegeben seien 6 Punkte der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Je zwei Punkte werden durch Strecken verbunden die entweder schwarz oder rot gefärbt sind.*

Man zeige, daß es mindestens ein Punktetripel gibt, dessen Verbindungsstrecken dieselbe Farbe aufweisen ("chromatisches Dreieck")

Hinweis: Taubenschlagprinzip!. Man wähle einen der Punkte, etwa P_0, und überlege, daß von ihm aus mindestens drei Strecken derselben Farbe ausgehen müssen.

Dieses Beispiel wird manchmal so formuliert: In einer Gesellschaft von 6 Personen sind mindestens drei Personen miteinander verwandt oder mindestens drei Personen sind miteinander nicht verwandt.

b) Gegeben seien 17 Punkte der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Jede Verbindungsstrecke von je zwei Punk-

142. Auf wieviele Arten kann man 17 als Summe der Zahlen 2, 3 und 7 darstellen? Diese Aufgabe stellt auch die Lösung des Problems dar, die Anzahl der nichtnegativen ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$2x_1 + 3x_2 + 7\,x_3 = 17$$

zu ermitteln

$$(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)(1+x^7+x^{14}+x^{21}+\cdots)=\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^7)}=$$

$$=1+x^2+x^3+x^4+x^5+2x^6+2x^7+2x^8+3x^9+3x^{10}+3x^{11}+4x^{12}+4x^{13}+5x^{14}+6x^{16}+\underline{\underline{6x^{17}}}+$$

$$+7x^{18}+7x^{19}+8x^{20}+\cdots$$

Aufzählung:

3 7 7
2 2 3 3 7
2 2 2 2 2 7
2 3 3 3 3 3
2 2 2 2 3 3 3
2 2 2 2 2 2 2 3

Der Aufzähler als Lösung der Gleichung $2x_1 + 3x_2 + 7\,x_3 = 17$

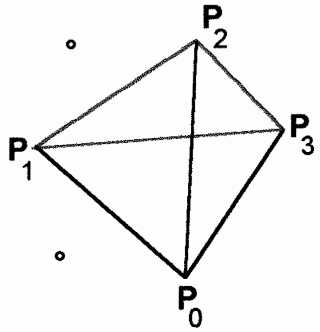
$$\frac{1}{(1-ax^2)(1-bx^3)(1-cx^7)}$$

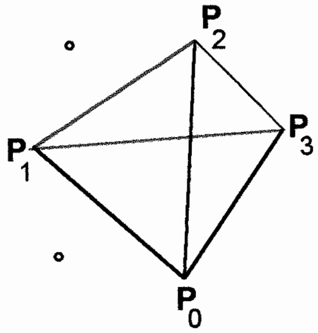
Der Koeffizient von x^{17} lautet

$$a^7b + a^5c + a^4b^3 + a^2b^2c + ab^5 + bc^5$$

ten werde in einer der Farben schwarz, rot oder blau eingefärbt. Man zeige: Es gibt mindestens ein Punktetripel, dessen Verbindungslinien in derselben Farbe gefärbt sind. Man führe diese Aufgabe auf den Fall a) zurück.

a)





Von P_0 müssen nach dem Taubenschlagprinzip mindestens 3 gleichfarbige (z.B. schwarze) Strecken ausgehen. Die Endpunkte dieser Strecken seien $P_1P_2P_3$: ist dieses Dreiecke einfärbig (z.B. schwarz), so stimmt die Behauptung. Gilt dies nicht, so wenden wir das Taubenschlagprinzip auf die etwa von P_1 ausgehenden Strecken P_1P_0, P_1P_2, P_1P_3 an. Mindestens zwei müssen dieselbe Farbe haben. Ist außer P_1P_0 noch eine Strecke, (etwa P_1P_2) schwarz, so gilt die Behauptung für $\Delta\ P_1P_2P_0$. Sind beide Strekken P_1P_2 und P_1P_3 rot (Figur), dann muß die Verbindung P_2P_3 schwarz oder rot sein. In beiden Fällen entsteht ein chromatisches Dreieck.

b) Wir wählen einen der 17 Punkte, etwa P_0, aus. Dann müssen mindestens 6 Verbindungsstrecken mit den anderen Punkten gleiche Farbe (z.B schwarz) aufweisen. Geht von einem von P_0 verschiedenen Punkt eine schwarze Strecke zu einem anderen Punkt aus, so stimmt die Behauptung.

Geht von keinem der 6 Punkte eine schwarze Strecke aus, so können nur die beiden anderen Farben auftreten und es reproduziert sich der Fall a)

EISEN S.41

R.E.GREENWOOD and A.M.GLEASON: Combinatorial relations and chromatic graphs. Can.J.of Math. 7 (1955)

144.*Gegeben seien 7 Objekte und 4 Schachteln. Man ermittle die An-*

zahl der Möglichkeiten, die Objekte in die Schachteln zu verteilen, wenn folgende Bedingungen gelten:

A. Alle Objekte und Schachteln sind verschieden
  a) leere Schachteln möglich
  b) keine Schachtel bleibt leer
  c) in der 1. Schachtel sind genau 2, in der 2. Schachtel genau drei Objekte, die 3. oder 4. Schachtel kann auch leer sein

B. Alle Objekte sind gleich, alle Schachteln verschieden
  a), b), c) wie bei A.

C. Alle Objekte verschieden, alle Schachteln gleich
  a), b) wie oben
  c) In einer Schachtel 2, in einer anderen 3 Objekte

D. Alle Objekte gleich, alle Schachteln gleich
  a), b), c) wie bei C.

A. Objekte verschieden, Schachteln verschieden

a) Leere Schachteln möglich

Abbildung einer 7-elementigen in eine 4-elementige Menge:

$$\underline{4^7 = 16\ 384 \text{ Möglichkeiten}}$$

Erzeugendes Polynom: $(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots)^4 = \hat{e}^{4x} = \sum_{i=0}^{\infty} 4^i \frac{x^i}{i!}$

Für i = 7 ist der Koeffizient von $\frac{x^7}{7!}$ ... $4^7 = \underline{16\ 384}$

b) keine leeren Schachtel: Surjektive Abbildung einer 7-elementigen auf eine 4-elementige Menge

$$4!S_7^4 = 4!.350 = \underline{8400 \text{ Möglichkeiten}}$$

Erzeugendes Polynom: $(x+\frac{x^2}{2!}+\dots)^4 = (\hat{e}^x-1)^4 = \sum_{i=0}^{4} (-1)^{4-i}\binom{4}{i}\hat{e}^{ix} =$

$$= \sum_{i=0}^{4} (-1)^{4-i}\binom{4}{i} . \sum_{i=0}^{\infty} i^j \frac{x^j}{j!} = \sum_{i=0}^{4}\sum_{i=}^{\infty} (-1)^{4-i}\binom{4}{i} i^j \frac{x^j}{j!}$$

Für j = 7 ist der Koeffizient von $\frac{x^7}{7!}$ gleich

$$\sum_{i=0}^{4}(-1)^{4-i}\binom{4}{i}.i^7 = 0-\binom{4}{1}1^7+\binom{4}{2}2^7-\binom{4}{3}3^7+\binom{4}{4}4^7 = 8400$$

c) in der 1.Schachtel 2, in der 2. Schachtel 3 Objekte

1. 3. oder 4. Schachtel kann leer sein

$\binom{7}{2}$ Möglichkeiten für die 1. Schachtel

$\binom{5}{3}$ Möglichkeiten für die 2. Schachtel

$\binom{7}{2}\cdot\binom{7}{2}$ Möglichkeiten für die 1. und 2.Schachtel

für die Verteilung der restlichen 2 Objekte in die 3. und 4. Schachtel gibt es 2^2 Möglichkeiten, daher insgesamt

$$\binom{7}{2}\cdot\binom{7}{2}.2^2 = \underline{840\text{ Möglichkeiten}}$$

Erzeugende Funktion: $\left(\frac{x^2}{2!}\right)\left(\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)^2 =$

$$= \frac{x^5}{2!3!}\left(1+2x+2x^2+x^3+\frac{x^4}{2!^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2!3!}\left(5!\frac{x^5}{5!}+2.6!\frac{x^6}{6!}+2.7!\frac{x^7}{7!}+8!\frac{x^8}{8!}+\frac{1}{2!^2}.9!\frac{x^9}{9!}\right)$$

Der Koeffizient von $\frac{x^7}{7!}$ beträgt $\frac{1}{2!3!}.2.7! = \underline{840}$

2. Weder die 3. noch die 4. Schachtel ist leer. Da die restlichen Objekte auf 2 Arten in diese Schachteln verteilt werden können, gibt es

$$\binom{7}{2}\cdot\binom{7}{2}.2 = \underline{240\text{ Möglichkeiten}}$$

Erzeugendes Polynom: $\left(\frac{x^2}{2!}\right)\left(\frac{x^3}{3!}\right)\left(\frac{x}{1!}\right)^2 = \frac{1}{2!3!}7!\frac{x^7}{7!}$

Daraus $\frac{1}{2!3!}7! = \underline{420\text{ Möglichkeiten}}$

B. Objekte gleich ,Schachteln verschieden

a) leere Schachteln möglich

$$\underset{....}{1}\;\Big|\;\underset{..}{2}\;\Big|\;3\;\Big|\;\underset{.}{4}\quad \begin{matrix}\text{Schachteln}\\ \text{7 Objekte}\end{matrix}\;\binom{7+3}{3} = \underline{120\text{ Mögl.}}$$

Erzeugendes Polynom: $(1+x+x^2+...)^4 = \frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+3}{3}x^i$

b) keine Schachtel ist leer

1	2	3	4	Schachteln	
⊙	⊙	⊙	⊙	4 Pflichtstücke	$\binom{3+3}{3} = 20$ Mögl.
•	••			3 freie Stücke	

Erzeugendes Polynom: $(x+x^2+...)^4 = x^4(1+x+...)^4 = \dfrac{x^4}{(1-x)^4} =$

$$= x^4 \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+3}{3} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+3}{3} x^{i+4}$$

Daher für $i+4 = 7 \Rightarrow 1 = 3$ ... $\binom{6}{3} = 20$

c) in der 1. Schachtel 2, in der 2. Schachtel 3 Objekte

1. 3. bzw. 4.Schachtel kann leer sein

1	2	3	4	Schachtel	
⊙⊙	⊙⊙⊙			7 Pflichtstücke	$\binom{2+1}{1} = 3$ Mögl.
		••		2 freie Stücke	

Erzeugendes Polynom: $(x^2)(x^3)((1+x+x^2) = x^5(1+2x+3x^2+2x^3+x^4)$

Koeffizient von x^7 ... 3 Möglichkeiten

2. 3. und 4. Schachtel nicht leer

1	2	3	4	Schachteln	
⊙⊙	⊙⊙⊙	⊙	⊙	7 Pflichtstücke	1 Möglichkeit

Erzeugendes Polynom: $(x^2)(x^3)(x)^2 = 1.x^7$ 1 Möglichkeit

C. Objekte verschieden, Schachteln gleich

a) leere Schachteln möglich ... STERLING

$$S_7^1+S_7^2+S_7^3+S_7^4 = 1+63+301+350 = 715 \text{ Möglichkeiten}$$

Erzeugendes Polynom: Wir addieren die Fälle in denen keine Schachtel leer, eine Schachtel leer. ... ,drei Schachteln leer sind.

Keine Schachtel leer:

$$\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ...\right)^4 = (e^x-1)^4$$

Da es auf die Reihenfolge der Schachteln nicht ankommt

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{4!}(\hat{e}^{x}-1)^{4}\\ \frac{1}{3!}(\hat{e}^{x}-1)^{3}\\ \frac{1}{2!}(\hat{e}^{x}-1)^{2}\\ \frac{1}{1!}(\hat{e}^{x}-1)^{1}\end{array}\right\} +$$

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{i!}(\hat{e}^{x}-1)^{i} = \sum_{i=0}^{4}\frac{1}{i!}\cdot\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\hat{e}^{jx}(-1)^{i-j} =$$

$$= \sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{i!}\binom{i}{j}(-1)^{i-j}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}j^{k}\frac{x^{k}}{k!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{i-j}\frac{1}{i!}\binom{i}{j}j^{k}\cdot\frac{x^{k}}{k!}$$

Da es 7 verschiedene Objekte gibt, haben wir $k = 7$ zu setzen.

Dann ist der Koeffizient von $\frac{x^7}{7!}$

$$\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\frac{1}{i!}\binom{i}{j}j^{7} = \sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\frac{1}{i!}\frac{i!\,j^{7}}{j!(i-j)!} =$$

$$\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\frac{j^{7}}{j!(i-j)!} = \ldots\ 715$$

145. *Man bestimme die Anzahl der r–Anordnungen von n verschiedenen Objekten mit Wiederholung, wenn bei den Wiederholungen nicht zwei gleiche Objekte nebeneinander stehen sollen.*
Man gebe das erzeugende Polynom an

1	2	3	...	Stellen
n	n−1	n−1		Möglichkeiten der Besetzung

An der ersten Stelle kann man ein beliebiges der n Objekte setzen. An jeder der folgenden Stellen aber nur mehr (n−1) Objekte, da das zuletzt angeschriebene Objekt ausscheidet. Daher

Fortsetzung von Beispiel **144**

b) Objekte verschieden. Schachteln gleich, keine leeren Schachteln

$$S_7^4 = 350$$

c) In einer Schachtel 2, in einer anderen 3 Objekte

1. Leere Schachteln möglich

$\binom{7}{2}$ Möglichkeiten für eine Schactel

$\binom{5}{3}$ Möglichkeiten für eine weitere Schachtel

Nachdem 3 + 2 = 5 Objekte auf zwei Schachteln verteil wurden, müssen noch 2 Objekte auf die restlichen zwei Schachteln verteilt werden. Das ist auf zwei Arten möglich:
Beide Objekte in dieselbe Schachtel, oder in jede Schachtel je ein Objekt.
Daher insgesamt

$$\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{3}\cdot 2=\underline{420\ \ \text{Möglichkeiten}}$$

2. Keine Leeren Schachteln. Es gibt nur eine Möglichkeit der Verteilung der Kugeln in gleiche Schachteln. Daher

$$\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{3}\cdot 1=\underline{210\ \text{Möglichkeiten}}$$

D. Alle Objekte gleich, Alle Schachteln gleich

a) leere Schachteln möglich: Zerlegung der Zahl 7 in vier Summanden

$$P_7^1+P_7^2+P_7^3+P_7^4=1+3+4+3=\underline{11\ \text{Möglichkeiten}}$$

b) Keine leerenSchachteln: Zerlegung der Zahl 7 in genau 4 Summanden

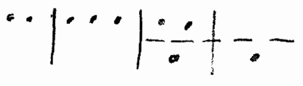
$$P_7^4=\underline{3\ \text{Möglichkeiten}}$$

Erzeugendes Polynom

$$\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}=x^4+x^5+2x^6+\underline{\underline{3x^7}}+5x^8+\cdots$$

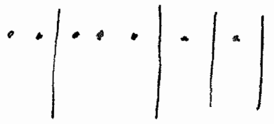
c) in einer Schachtel 2, in einer anderen 3 Objekte

1. Leere Schachteln möglich



2 Möglichkeiten der Verteilung in die restlichen Schachteln

2. Keine leeren Schachteln



Nur eine Verteilungsmöglichkeit

$n(n-1)^{r-1}$ Möglichkeiten

Erzeugendes Polynom:

$$nx+n(n-1)x^2+n(n-1)^2x^3+n(n-1)^3x^4+\ldots =$$

$$= nx[1+(n-1)x+(n-1)^2x^2+(n-1)^3x^3+\ldots =$$

$$= \frac{nx}{1-(n-1)x}$$

EISEN S. 82

146. *Ein Vorrat besteht aus je 2n-mal den Buchstaben a,b,c. Auf wieviele Arten kann man aus diesem Vorrat eine Auswahl m.W. von 3n Objekten wählen?*

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{2n})^3 = \left(\frac{1-x^{2n+1}}{1-x}\right)^3 =$$

$$= \sum_{i=0}^{3}(-1)^i\binom{3}{i}x^{(2n+1)i}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\binom{2+j}{2}x^j = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^i\binom{3}{i}\binom{2+j}{2}x^{j+(2n+1)i}$$

Es soll $j+(2n+1)i = 3n \Rightarrow j = 3n-(2n+1)i$ gelten, daher

$$\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\binom{3}{i}\binom{2+3n-(2n+1)i}{2} = \binom{2+3n}{2}-3\binom{n+1}{2} =$$

$$= \frac{(3n+2)(3n+1)}{2}-3.\frac{(n+1)n}{2} = 3n^2+3n+1 \text{ Möglichkeiten}$$

Beispiel: $n = 2 \Rightarrow$ Vorrat: aaaa bbbb cccc

Zu besetzen sind 6 Stellen. Anzahl der MMöglichkeiten: 19

aaaabb
aaaabc
aaaacc
aaabbb
aaabbc
aaabcc
aaaccc
aabbbb
aabbbc
aabbcc
aabccc
aacccc
abbbbc
abbbcc
abbccc
abcccc
bbbbcc
bbbccc
bbcccc

LIU S. 52

147. *a) Gegeben seien r verschiedene Schachteln (numeriert von 1 bis r) und n verschiedene Objekte. Auf wieviele Arten können genau k Objekte in der Schachtel mit der Nummer q gelagert werden?*

b) Verallgemeinerung: Es werden aus den r Schachteln m bestimmte ausgewählt, wobei in der 1.der ausgewählten Schachteln k_1*, in der 2.* k_2*, ... der gegebenen Elemente zu liegen kommen.*
Man gebe das erzeugende Polynom an.

Jedes Objekt kann auf r-1 Arten <u>nicht</u> in einer bestimmten Schachtel gelagert werden und auf genau eine Art in der Schachtel q. Daher ist das erzeugende Polynom

$$\underline{((r-1)x_q^0+x_q)^n \quad \text{gesucht: Koeffizient von } x_q^k}$$

<u>Andere</u> <u>Methode:</u> In der ausgewählten Schachtel können auf $\binom{n}{k}$ Arten k Objekte gelagert werden. Die restlichen n-k Objekte können auf $(r-1)^{n-k}$ Arten in den restlichen Schachteln verteilt werden (Anzahl der Abbildungen). Daher gibt es

$$\underline{\binom{n}{k}(r-1)^{n-k}} \text{ Möglichkeiten (Binomialkoefizienten von oben)}$$

b) Jedes Objekt kann auf r-m Arten <u>nicht</u> in eine der m ausgewählten Schachteln gelegt werden, aber auf genau eine Art in eine der Schachteln gelegt werden. Erzeugendes Polynom daher

$$\underline{(r-m+x_1+x_2+\dots+x_m)^n}$$

<u>Andere</u> <u>Methode:</u> In die 1. Schachtel können k_1 Objekte auf $\binom{n}{k_1}$ Arten gelegt werden,...., daher

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_1}\cdots\binom{n-k_1-\dots-k_{m-1}}{k_m}\cdot\underbrace{(r-m)^{n-(k_1+\dots+k_m)}}_{\text{Verteilung der Restelemente auf die Restschachteln}} =$$

$$\underline{= \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}\cdot(r-m)^{n-(k_1+\dots+k_m)}}$$

EISEN S. 90

148. *Auf wieviele Arten kann man aus 12 weißen, 18 schwarzen und 20 roten Kugeln einen Vorrat von 36 Kugeln entnehmen?*

Erzeugendes Polynom: $(1+x+...+x^{12})(1+x+...x^{18})(1++x+...+x^{20})$ =

$$= \frac{(1-x^{13})}{(1-x)} \cdot \frac{(1-x^{19})}{(1-x)} \cdot \frac{(1-x^{21})}{(1-x)} = \frac{(1-x^{13}-x^{19}-x^{21}+x^{32}+x^{34}+x^{40}-x^{53})}{(1-x)^3}$$

$$= (1-x^{13}-x^{19}-x^{21}+x^{32}+x^{34}+x^{40}-x^{53}).\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^i$$

$i = 36$ ... $\binom{38}{2} = 703$ +

$i+13 = 36 \Rightarrow i = 23$ ... $\binom{25}{2} = 300$ −

$i+19 = 36 \Rightarrow i = 17$ ... $\binom{19}{2} = 171$ −

$i+21 = 36 \Rightarrow i = 15$ ... $\binom{17}{2} = 136$ −

$i+32 = 36 \Rightarrow i = 43$ ... $\binom{6}{2} = 15$ +

$i+34 = 36 \Rightarrow i = 2$ ... $\binom{4}{2} = 6$ +

117 Möglichkeiten

149. *Auf wieviele Arten kann man 6 verschiedene und 5 gleiche Objekte in*

a) vier verschiedene

b) vier gleiche

Schachteln verteilen, wenn

1. einige Schachteln auch leer sein können

2. Keine Schachtel leer sein darf?

a)1. Verpackung der 6 verschiedenen Objekte in 4 verschiedene Schachteln, leere möglich

4^6 = 4096 Möglichkeiten

Verpackung der 5 gleichen Objekte in 4 verschiedene Schachteln

$\binom{3+5}{3}$ = 56 Möglichkeiten

Insgesamt daher

4096.56 = 229 367 Möglichkeiten

a)2. Verpackung von 6 verschiedenen Objekten in 4 verschiedene, nichtleere Schachteln (surjektive Abbildung)

$$4!S_6^4 = 24.65 = 1560 \text{ Möglichkeiten}$$

Verpackung von 5 gleichen Objekten in 4 verschiedene, nichtleere Schachteln (in jeder Schachtel ein Pflichtobjekt)

$$\binom{3+1}{1} = 4 \text{ Möglichkeiten}$$

Insgesamt daher

$$1560.4 = \underline{6240 \text{ Möglichkeiten}}$$

b)1. 6 verschiedene Objekte in 4 gleiche Schachteln, leere möglich

$$S_6^1+S_6^2+S_6^3+S_6^4 \quad 1+31+90+65 = 187 \text{ Möglichkeiten}$$

5 gleiche Objekte in 4 gleiche Schachteln ≡ Zerlegung von 5 in maximal 4 Summanden

$$P_5^1+P_5^2+P_5^3+P_5^4 = P_9^4 = 6 \text{ Möglichkeiten}$$

Insgesamt daher

$$187.6 = \underline{1122 \text{ Möglichkeiten}}$$

b)2. 6 versch. Objekte, 4 gleiche nichtleere Schachteln

$$s_6^4 = 65 \text{ Möglichkeiten}$$

5 gleiche Objekte, 4 gleiche nicht nichtleere Schachteln

$$P_4^5 = 1$$

Zusammen daher

$$\underline{65.1 = 65 \text{ Möglichkeiten}}$$

150. *a) Wieviele ganzzahlige Lösungstripel $x_i \geq 0$ hat die Gleichung*

$$x_1+3x_2+5x_3 = 20$$

Man zähle die Lösungstripel auf.

b) Wieviele ganzzahlige Lösungstripel $x_i > 0$ hat die Gleichung

$$x_1+3x_2+5x_3 = 22$$

Man zähle die Lösungstripel auf.

---

a) $(1+x+x^2+ \ldots +x^{20})(1+x^3+x^6+ \ldots +x^{18})(1+x^5+x10+ \ldots +x^{20}) =$

$= 1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+4x^7+5x^8+6x^9+7x^{10}+8x^{11}+9x^{12}+10x^{13}+11x^{14}+$

$13x^{15}+14x^{16}+15x^{17}+17x^{18}+18x^{19}\underline{+20x^{20}}+20x^{21}+21x^{22}+23x^{23}+23x^{24}+\ldots$

Daher gibt es 20 Lösungstripel

x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
4	4	4	2	2	4	1	3	6	0	4	8
3	0	5	2	3	1	1	4	3	0	3	11
3	1	2	1	0	15	1	5	0	0	2	14
2	0	10	1	1	12	0	6	2	0	1	17
2	1	7	1	2	9	0	5	5	0	0	20

b) $(x+x^2+x^3+...+x^{22})(x^3+x^6+...+x^{21})(x^5+x^{10}+...+x^{20}) =$

$= x^9(1+x+x^2+ ...+x^{21})(1+x^3+x^6+ ... +x^{18})(1+x^5+x10+ ... +x^{15})$

Eine Neuberechnung ist nicht erforderlich, da wir bloß jeden Exponenten von a) um 9 erhöhen müssen. Der gesuchte Koeffizient von $x^{22} = x^{9+13}$ ist daher 10.

Es gibt 10 ganzzahlige Lösungstripel

x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
3	1	4	1	1	14
3	2	1	1	2	11
2	1	9	1	3	8
2	2	6	1	4	5
2	3	3	1	5	5

151. *Auf wieviele Arten kann man die Buchstaben des Wortes RISIKOFALL neu anordnen, ohne daß die beiden I und L nebeneinander zu stehen kommen?*

1. Methode: Es gibt $\frac{4!}{2!2!}=6$ Anordnungen der Buchstaben I I L L. Es bleiben dann noch 6 Buchstaben zur Verteilung:

I ⊙ I L ⊙ L ·| · | ·· | |	2 Pflichtbuchstaben 4 Restbuchstaben	$\binom{8}{4}6!$ Mögl.	
I L I L ·| · | ·· | · | ·	0 Pflichtbuchstaben 6 Restbuchstaben	$\binom{10}{4}6!$ Mögl.	6
I L ⊙ L I ·| · | ·· | · |	1 Pflichtbuchstabe 5 Restbuchstaben	$\binom{9}{4}6!$ Mögl.	
L I ⊙ I L ·| · | · | ·· |	1 Pflichtbuchstabe 5 Restbuchstaben	$\binom{9}{4}6!$ Mögl.	
I L I L ·| · | ·· | · | ·	0 Pflichtbuchstaben 6 Restbuchstaben	$\binom{10}{4}6!$ Mögl.	
L ⊙ L I ⊙ I | · | ··· | |	2 Pflichtbuchstaben 4 Restbuchstaben	$\binom{8}{4}6!$ Mögl.	

Daher insgesamt

$$2.6!\left[\binom{8}{4}+\binom{9}{4}+\binom{10}{4}\right] = \underline{584\ 640\ \text{Möglichkeiten}}$$

Andere Methode:

Für die Anordnung aller 10 Buchstaben gibt es

$$\frac{10!}{2!2!} = 907\ 200\ \text{Möglichkeiten}$$

Abzuziehen sind alle Fälle, in denen der Riesenbuchstabe II auftritt unter Berücksichtigung des zweimaligen Auftretens von L:

$$\frac{9!}{2!} = 181\ 440\ \text{Möglichkeiten}$$

Dasselbe für den Riesenbuchstaben LL, wobei I zweimal auftritt:

$$\frac{9!}{2!} = 181\ 440\ \text{Möglichkeiten}$$

Da in den beiden obigen Fällen die Riesenbuchstaben II und LL beidemale abgezogen wurden, müssen wir deren Anzahl zur Korrektur wieder hinzufügen

$$8! = 40\ 320\ \text{Möglichkeiten}$$

Insgesamt daher

$$907200-2.181440+40320 = \underline{584\ 640\ \text{Möglichkeiten}}$$

152.*Gegeben seien 8 Objekte und 4 Schachteln. Auf wieviele Arten kann man die Objekte in die Schachteln verteilen, wenn*

a) alle Objekte gleich und

1. die Schachteln verschieden

2. die Schachteln gleich sind?

b) alle Objekte verschieden und

1. alle Schachteln verschieden

2. alle Schachteln gleich sind?

a)1.

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Schachteln} \\ \text{8 Objekte} \end{array} \binom{8+3}{3} = \underline{165\ \text{Mögl.}} \quad \left(\sum_{n=0}^{8} x^n\right)^4$$

2. Die Anzahl der Verteilungsmöglichkeiten ist gleich der Anzahl der Zerlegungsmöglichkeiten von 8 in Summanden:

$$P_8^1+P_8^2+P_8^3+P_8^4 = P_{12}^4$$

Nach Vorlesung Seite 92 und 97 gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i^r x^i = \frac{x^r}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)} \text{ n in unserem Fall}$$

$$r = 4,\ n = 12 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} =$$

$$= x^4+x^5+2x^6+3x^7+5x^8+6x^9+9x^{10}+11x^{11}\underline{+15x^{12}}+18x^{13}+23x^{14}+27^{15}x+\dots$$

Es gibt also P_{12}^4 = <u>15 Möglichkeiten</u>

b) 1. Jedes Objekt kann auf 4 Arten in eine Schachtel gelegt werden, daher

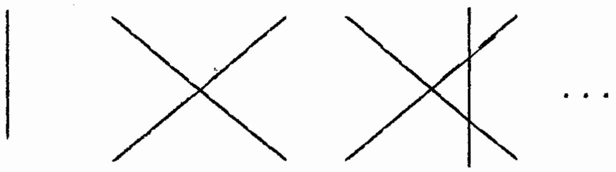
$$4^8 = \underline{65\ 538 \text{ Möglichkeiten}}$$

2. Verteilung von 8 verschiedenen Objekten in 4 gleiche Schachteln:.

$$S_8^1+S_8^2+S_8^3+S_8^4 = 1+127+966+1701 = \underline{2\ 795 \text{ Möglichkeiten}}$$

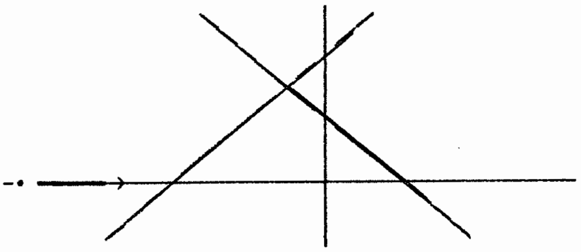
153. *In wieviele Teile wird die Ebene durch n Gerade geteilt, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch denselben Punkt gehen?*

Sei a_n die Anzahl der Teile bei n Geraden



$a_0 = 1$ $a_1 = 2$ $a_2 = 4$ $a_3 = 7$

Wir betrachten nun n-1 Gerade, welche die Ebene in a_{n-1} Teile teilen:



Fügen wir nun eine n-te Gerade hinzu und durchlaufen wir diese von links nach rechts. Sie schneidet die bereits vorhandenen n-1 Geraden in ebensovielen Punkten. Beim Überschreiten jedes

Schnittpunktes gelangt der wandernde Punkt in ein neues Teilgebiet der Ebene. Insgesamt durchschreitet der Punkt daher n Teilgebiete. Jedes dieser Teilgebiete wird durch die n-te Gerade in zwei Teile zerlegt, sodaß n neue Teilgebiete hinzukommen. Es gilt also

$$a_n = a_{n-1}+n, \qquad a_0 = 1,\ a_1 = 2$$

Daher gilt (Vorlesung Seite 72 ff)

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} = f(n), \qquad C_0 = 1,\ C_1 = -1,\ f(n) = n$$

Daher entsprechend der Formel Vorlesung S.73:

$$[C_0+C_1x].F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + C_0(a_0) \Rightarrow [1-x].F(x) = \underbrace{x+2x^2+3x^3+\dots}_{} +1$$

also nach Vorlesung Seite 49

$$(1-x).F(x) = \frac{x}{(1-x)^2}+1 = \frac{1-x+x^2}{(1-x)^2}$$

$$F(x) = \frac{1-x+x^2}{(1-x)^3} = (1-x+x^2).\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^i$$

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^i - \sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i}{2}x^{i+2}$$

Gesucht ist der Koeffizient der Potenz x^n

$i = n \quad \dots +\binom{n+2}{2}$

$i+1 = n \Rightarrow i = n-1 \quad \dots -\binom{n+1}{2}$

$i+2 = n \Rightarrow i = n-2 \quad \dots +\binom{n}{2}$

Daher

$$\underline{a_n} = \binom{n+2}{2}-\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2} = \underline{\frac{1}{2}[n^2+n+2]}$$

Das erzeugende Polynom lautet daher

$$\underline{F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}[n^2+n+2].x^n}$$

EISEN S 153

$F(x) = 1+2x+4x^2+7x^3+11x^4+16x^5+22x^6+29x^7+37x^8+46x^9+56x^{10}+67x^{11}+79x^{12}+92x^{13}+$
$+106x^{14}+121x^{15}+137x^{16}+154x^{17}+172x^{18}+191x^{9}+211x^{20}+\dots$

Literatur

BARDEY E.: Aufgabensammlung. Wien, Karl Graeser, 1903

BRUIJN d N.G.: Generalization of Polya's Fundamental Theorem in Enumnerative Combinatorial Analysis. Indagationes Mathematicae 21 (1959)

BRUIJN de N.G.: Color Patterns That Are Invariant under a Given Permutation of the Colors. Journal of Combinatorial Theorie 2, 418-421 (1967)

EISEN Martin: Elementary combinatorial Analysis, Gordon & Breach, New York, 1969

HEIS Eduard: Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, Köln, Verlag der M. DuMont-Schauberg'schen Buchhandlung. 1897

LIU C.L.: Intrduction to combinatorial Mathematics, McGraw-Hill, New York

RIORDAN John: An Introduction to combinatorial Analysis, Wiley, New York, Cahpmayn & Hall, London, 1958

TUCKER Alan: Applied Combinatorics, Wiley, New York, 1980

GREENWOOD R.E. and GLEASON A.M: Combinatorial relations and chromatic graphs . Can. J. of Math. 7 (1955)

RAMSEY F.P.: On a Problem of formal logic. Proc. Lond. Math. Soc. 2nd series, 30 (1931)