B E I S P I E L S A M M L U N G

zur Vorlesung

L I N E A R E A L G E B R A UND G E O M E T R I E

1.Teil

Prof.Dr.Wolfgang STRÖHER

März 1989

B E I S P I E L S A M M L U N G

zur Vorlesung

L I N E A R E   A L G E B R A   U N D   G E O M E T R I E

1.Teil

Die folgende Sammlung folgt in der Anordnung der Beispiele dem Fortschreiten der gleichnamigen Vorlesung. Die am Ende jedes Beispiels in Klammern angeführten Zahlen beziehen sich auf jene Nummern der Vorlesung, die für das betreffende Beispiel von Bedeutung sind.

<u>LOGISCHE UND ALGEBRAISCHE GRUNDLAGEN</u>

1. Man zeige, daß folgende Aussagen stets wahr sind, unabhängig vom Wahrheitswert der Teilaussagen A,B.

   a) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$ Darstellung von "$\Leftrightarrow$" durch "$\Rightarrow$"

   b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow [\neg B \Rightarrow \neg A]$ "Kontraposition"

   c) $[\neg(A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow [A \wedge (\neg B)]$ Negation einer Implikation

   d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow [(\neg A \vee B)]$ Umwandlung von "$\Rightarrow$" in "$\vee$" (1)

2. Man zeige, daß folgende Aussagen stets wahr sind, unabhängig vom Wahrheitswert der Teilaussagen A,B,C. W bedeutet eine beliebige wahre, F eine beliebige falsche Aussage.

   a) $[\neg(\neg A)] \Leftrightarrow A$ Gesetz der doppelten Negation

   b) $(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow F$ Gesetz des Widerspruchs

   c) $(A \vee \neg A) \Leftrightarrow W$ Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten, "tertium non datur"

   d) $[A \vee (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \vee B) \vee C]$ Assoziativität von "$\vee$"

e) $[A \wedge (B \wedge C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \wedge C]$ Assoziativität von "$\wedge$"

f) $F \Rightarrow A$ "ex falso quodlibet"

g) $A \Rightarrow W$ "ex quodlibet verum"

h) $(\neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ Satz vom negierten Vorderglied

i) $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ Satz vom Hinterglied

j) $[\neg (A \wedge B)] \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ Regel von DE MORGAN

k) $[\neg (A \vee B)] \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ Regel von DE MORGAN (1)

3. Man zeige, daß folgende Aussagen stets wahr sind, unabhängig vom Wahrheitswert der Teilaussagen A,B,C.

a) $[A \vee (B \wedge C)] \Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]$ Distributivität von "$\vee$" über "$\wedge$"

b) $[A \wedge (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$ Distributivität von "$\wedge$" über "$\vee$"

c) $[A \Rightarrow (B \wedge C)] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)]$ Distributivität von "$\Rightarrow$" über "$\wedge$"

d) $[A \Rightarrow (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)]$ Distributivität von "$\Rightarrow$" über "$\vee$"

e) $[(A \vee B) \Rightarrow C] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)]$
f) $[(A \wedge B) \Rightarrow C] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)]$ Modifiziertes Distributivitätsgesetz (1)

4. Man zeige, daß folgende Aussagen stets wahr sind, unabhängig vom Wahrheitswert der Teilaussagen A,B,C.

a) $[A \Rightarrow (B \Rightarrow C)] \Leftrightarrow [B \Rightarrow (A \Rightarrow C)]$ Vertauschungsgesetz der Vorderglieder

b) $[A \Rightarrow (B \Rightarrow C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \Rightarrow C]$ Klammer-Änderungsgesetz für "$\Rightarrow$"

c) $[A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B$ Abtrennungsregel "modus ponens"

d) $[(\neg B) \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow (\neg A)$ Widerlegungsregel "modus tollens"

e) $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ Transitivitätsgesetz

f) $\{(A \vee B) \wedge [(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)]\} \Rightarrow C$ Fallunterscheidung (1)

5. Äquivalenzrelationen.

a) Man untersuche, ob die Relation $\sim$ über $\mathbb{Z}^*$, definiert durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow x \text{ teilt } y$$

eine Äquivalenzrelation ist.

b) Es sei $a \in \mathbb{N}^*$ fest gewählt, Über $\mathbb{Z}$ sei durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow x-y \text{ teilbar durch } a$$

eine Relation $\sim$ definiert. Man zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und bestimme die zugehörige Partition Z_a.

c) Es sei $f \in$ Abb.(A,B) und "$\overset{B}{\sim}$" eine Äquivalenzrelation auf B. Man zeige, daß durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow f(x) \overset{B}{\sim} f(y), \quad x,y \in A$$

eine Äquivalenzrelation "$\sim$" auf A definiert ist. "$\sim$" heißt die durch "$\overset{B}{\sim}$" auf A induzierte Äquivalenzrelation (8-13)

6. Man untersuche, ob folgende Zuordnungen Abbildungen sind und begründe dies im Falle der Verneinung. Man stelle fest, ob eine Abbildung injektiv, surjektiv, bijektiv ist oder keine dieser Eigenschaften hat. Man beantworte die bei den speziellen Abbildungen zusätzlich gestellten Fragen

a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$x \mapsto -x$

$f(\mathbb{N}) = \{?\}$, $f^{-}(\{-3\}) = \{?\}$, $f^{-}(\{3\}) = \{?\}$

b) $f: \{a,b,c\} \to \{d,e\}$

$a \mapsto d$

$b \mapsto e$

$c \mapsto d$

$f^{-}(\{d\}) = \{?\}$

c) $f: \{a,b,c\} \to \{d,e\}$

$a \mapsto d$

$b \mapsto e$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$

$x \mapsto |x|$

$f^{-}(\{x \mid x \neq 0\}) = \{?\}$, $f^{-}(\{0\}) = \{?\}$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $[r] :=$ größte ganze Zahl in r

$r \mapsto [r]$

$f(\mathbb{R}) = \{?\}$, $f^{-}(\{z\}) = \{?\}$

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$r \mapsto +\sqrt{r}$

g) $f: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$

$r \mapsto +\sqrt{r}$

h) $f: M \to \{a\}$. M bel. Menge, m bel. Element aus M

$m \mapsto a$

Was kann man aussagen, wenn $M \neq \emptyset$ bzw. wenn $M = \{m\}$ nur ein Element m enthält?

i) $f: M \to N$, "konstante Abbildung"

$m \mapsto c$, $c :=$ festes Element $\in N$

$f^{-}(\{c\}) = \{?\}$, $f^{-}(\{n \mid n \in N,\ n \neq c\}) = \{?\}$

j) Man vergleiche folgende drei Abbildungen

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$

$x \mapsto |x|$ $\quad x \mapsto |x|$ $\quad x \mapsto |x|$ (13-21)

7. Es seien M,N Mengen, ferner sei $A,B, \subset M$ und $U,V \subset N$. $f \in \mathrm{Abb}(M,N)$.

Man zeige

a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, wann gilt Mengengleichheit?

d) $U \subset V \Rightarrow f^{-}(U) \subset f^{-}(V)$

e) $f^{-}(U \cap V) = f^{-}(U) \cap f^{-}(V)$

f) $f^{-}(U \cup V) = f^{-}(U) \cup f^{-}(V)$

g) $A \subset f^{-}(f(A))$, wann gilt Mengengleichheit?

h) $f(f^{-}(U)) \subset U$, wann gilt Mengengleichheit?

i) $f^{-}(U \setminus V) = f^{-}(U \setminus f^{-}(V)$

j) Was kann man über $f(A \setminus B)$ aussagen? (16)

8. Es sei $f \in \mathrm{Abb}(M,N)$. Man zeige, daß

$$f^{-}: \mathfrak{P}(N) \to \mathfrak{P}(M) \qquad (*)$$

eine Abbildung ist und daß die Einschränkung

$$f^{-} \mid \mathfrak{P}(f(M)) \to \mathfrak{P}(M)$$

injektiv ist. f^{-} als Funktion im Sinne von (*) heißt pullback oder Rückholfunktion zu f.

9. Es sei $f \in \mathrm{Abb}(A,B)$, $g \in \mathrm{Abb}(B,C)$ und $h = g \circ f \in \mathrm{Abb}(A,C)$. Ferner sei $Z \subset C$. Man zeige:

$$h^{-}(Z) = (g \circ f)^{-}(Z) = (f^{-} \circ g^{-})(Z) \qquad (16,22,24)$$

10. Es sei $f \in \mathrm{Abb}(A,B)$, $g \in \mathrm{Abb}(B,C)$. Man zeige:

a) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv

b) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv (18-24)

11. Es sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ eine Folge von Teilmengen einer Menge M (vgl. Vorlesung 31. und 32.) Man bezeichnet als Limes superior der Folge die Menge

$$\limsup_{i \to \infty} A_i := \{x \mid x \in A_i \text{ für unendlich viele } i\},$$

als Limes inferior der Folge die Menge

$$\liminf_{i \to \infty} A_i := \{x \mid x \in A_i \text{ für alle } i \text{ mit endlich vielen Ausnahmen}\}.$$

Man zeige:

a) $\liminf\limits_{i \to \infty} A_i \subset \limsup\limits_{i \to \infty} A_i$

b) $\limsup\limits_{i \to \infty} A_i = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=i}^{\infty} A_j$

c) $\liminf\limits_{i \to \infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bigcap\limits_{j=i}^{\infty} A_j$

Anmerkung: Gilt $A = \limsup\limits_{i \to \infty} A_i = \liminf\limits_{i \to \infty} A_i$, so heißt die Folge A_i konvergent und A der Limes der Folge. Man schreibt $A = \lim\limits_{i \to \infty} A_i$. (31,32)

12. Die Menge M habe die Struktur einer abelschen Gruppe $G = (M,+)$. In der Menge $A = \text{Abb}(M,M)$ der Selbstabbildungen von M werde mit Hilfe der Gruppenaddition eine Addition "$\oplus$" folgendermaßen definiert:

$$(f \oplus g)(x) := f(x) + g(x), \qquad f,g \in A, \quad x \in M$$

a) Wie muß man in $(A,\oplus)$ das neutrale Element n und das zu $f \in A$ inverse Element f' wählen, damit $(A,\oplus)$ die Struktur einer kommutativen Gruppe erhält?

b) Die assoziative Verknüpfung $f \circ g$ zweier Elemente $f,g \in A$ bezeichnen wir als "Produkt" von f und g. Warum ist $(A,\oplus,\circ)$ i.a. kein Ring?

c) Wie müßte eine Teilmenge $R \subset A$ beschaffen sein, damit $(R,\oplus,\circ)$ ein Ring ist? (46-52)

13. Durch die Äquivalenzrelation $\sim$ von Beispiel 5.b. wurde in Z eine Partition von a Restklassen erzeugt. In der Menge Z_a dieser Restklassen werden folgende Verknüpfungen definiert
[$\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ sind die durch $x,y,\in Z$ bestimmten Restklassen]:

$$\tilde{x} + \tilde{y} := \widetilde{x+y}$$
$$\tilde{x} \cdot \tilde{y} := \widetilde{x.y}$$

Man zeige:

a) diese Definitionen sind unabhängig von den Repräsentanten der Restklasse

b) $(Z_a,+,.)$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement. (49-52)

14.a) Man zeige, daß $(Z_a,+,.)$ dann und nur dann ein Körper ist, wenn $a = p$ eine Primzahl ist (vgl.Bsp.13.)
<u>Anleitung:</u> Man verwende den Satz, daß die Gleichung $ax + by = 1$ $(a,b \in Z)$ nur dann Lösungen $x,y \in Z$ aufweist, wenn a,b teilerfremd sind.

b) Man zeige, daß der Körper $(Z_p,+,.)$ (p Primzahl) die Charakteristik p besitzt. (49-53)

15. Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement.
$P_R := \{f \mid f:N \to R, \quad f(n)=0_R \text{ für fast alle } n \in N\}$
sei eine Teilmenge von Abb(N,R). Das Bild f(N) von N ist daher eine Folge von Elementen aus R, die fast nur aus 0_R besteht ("fast alle" bedeutet: alle, bis auf endlich viele Ausnahmen):
$f(N)=(a_0,a_1',\ldots), \quad a_i \in R$, fast alle $a_i = 0_R$.
Für je zwei Abbildungen $f,g \in P_R$ werden folgende innere Verknüpfungen definiert:

$$(f+g)(n) := f(n)+g(n),$$

$$(f.g)(n) := \sum_{m=o}^{n} f(m)g(n-m).$$

Jedes Element $f \in P_R$ heißt <u>Polynom.</u> Man zeige, daß $(P_R,+,.)$ ein kommutativer Ring mit dem Einselement e ist, das durch

$e(N) := (1_R,0_R,0_R,\ldots)$

definiert ist. Man nennt P_R daher <u>Polynomring</u> über R.
Das Nullelement $po(N) := (0_R,0_R,\ldots)$ heißt <u>Nullpolynom.</u> (49-52)

16. Die Abbildung $x \in P_R$ sei durch
$x(N) = (0_R, 1_R, 0_R, 0_R, \ldots)$
definiert. Man zeige, daß gilt:
$(x.x)(N) = (0_R, 0_R, 1_R, 0_R, 0_R, \ldots) =: x^2(N)$
$x^3(N) = (0_R, 0_R, 0_R, 1_R, 0_R, 0_R, \ldots)$
.
.
.
und daß allgemein gilt

$$x^n(m) = \delta_{nm}, \quad \delta_{nm} := \begin{cases} 1_R, & \text{wenn } m = n \\ 0_R, & \text{wenn } m \neq n \end{cases}$$

δ_{nm} ist das sogennante "KRONECKER-Symbol". (49-52)

VEKTORRÄUME, UNTERRÄUME, NEBENRÄUME

17. Es sei $(\mathfrak{B},+)$ eine kommutative Gruppe, K ein Körper und $.: K \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ eine äußere Komposition. Das Quadrupel $(\mathfrak{B},+K,.)$ erfülle die Axiome Nr. 57.a,b,c der Vorlesung, nicht aber Nr. 57.d. Es existieren also Elemente $\mathfrak{y} \in \mathfrak{B}$, für die gilt $1_K . \mathfrak{y} \neq \mathfrak{y}$. Andererseits können auch Elemente mit $1_K . \mathfrak{r} = \mathfrak{r}$ auftreten. Man zeige

a) Für ein Element $\mathfrak{r}$ gilt $1_K . \mathfrak{r} = \mathfrak{r}$ genau dann, wenn sich $\mathfrak{r}$ in der Form $\mathfrak{r} = 1_K . \mathfrak{v}$ darstellen läßt
b) Für jedes Element der Form $\mathfrak{z} = \mathfrak{y} - 1_K . \mathfrak{y} \neq \mathfrak{o}$ gilt $1_K . \mathfrak{z} = \mathfrak{o}$
c) Setzt man $\mathfrak{X} := \{\mathfrak{r} \mid 1_K . \mathfrak{r} = \mathfrak{r}\}$ und $\mathfrak{Z} := \{\mathfrak{z} \mid 1_K . \mathfrak{z} = \mathfrak{o}\}$, so läßt sich jedes Element $\mathfrak{y} \in \mathfrak{B}$ in eindeutiger Weise in der Form $\mathfrak{y} = \mathfrak{r} + \mathfrak{z}, \mathfrak{r} \in \mathfrak{X}, \mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$ darstellen.
d) Die in c) definierte Teilmenge $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{B}$ bildet einen Vektorraum. (57,58)

18. Man zeige: Versieht man die Elemente des Polynomringes $P_K = \{f \mid f: N \to K, f(n) = 0_K \text{ für fast alle } n \in N\}$ über dem Körper K (vgl.Bsp. 15.) außer mit der inneren Verknüpfung $(f+g)(n) = f(n)+g(n)$ noch mit der äußeren Verknüpfung $\bigwedge_{\lambda \in K} (\lambda f)(n) := \lambda f(n)$, so bilden die Polynome f einen Vektorraum $\mathfrak{B}(P_K)$ über K. Man zeige ferner:

Definiert man $x^o=e$ (vgl.Bsp.16.), so läßt sich jedes Element $f \in \mathfrak{B}(P_K)$ in der Form $(a_o e =: a_o)$

$$f = \sum_{n \in N} f(n)x^n = f(o)e+f(1)x+f(2)x^2+\ldots = a_o+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

darstellen. Man nennt f ein Polynom in der Unbestimmten x.

Ist $\bigwedge_{\substack{j \in N \\ j>n}} f(j) = 0_K$, so heißt n der Grad des Polynoms f. (57,58)

19. Es sei P_K der Polynomring über dem Körper K und Abb(K,K) die Menge aller Selbstabbildungen von K. Dann läßt sich eine Abbildung Φ von P_K in Abb(K,K) folgendermaßen definieren:

Seien $f = a_o+a_1x+\ldots+a_nx^n$ und $g = b_o+b_1x+\ldots+b_mx^m$ Polynome $\in P_K$, und sei $\varphi, \psi \in$ Abb(K,K), so gelte

$$\Phi: P_K \to \text{Abb}(K,K)$$
$$f \to \Phi(f) = \varphi$$

wobei gelte:

$$\bigwedge_{\lambda \in K} \varphi(\lambda) = \Phi(f)(\lambda) := a_o+a_1\lambda+\ldots+a_n\lambda^n.$$

Es sei $\psi = \Phi(g)$. Man zeige:

Es gilt für alle $\lambda \in K$

$\Phi(f+g)(\lambda) = \varphi(\lambda)+\psi(\lambda)$,

$\Phi(\sigma f)(\lambda) = \sigma\varphi(\lambda)$, $\sigma \in K$

$\Phi(f.g)(\lambda) = \varphi(\lambda).\psi(\lambda)$,

Die so definierten $\varphi = \Phi(f) \in$ Abb(K,K) heißen Polynomfunktionen. Man nennt $\varphi(\lambda)$ den Wert der Polynomfunktion an der Stelle λ. Speziell heißt λ eine Nullstelle der Polynomfunktion, wenn $\varphi(\lambda) = 0_K$ ist.

Anmerkung: Folgende nachlässige Schreibweise ist üblich: Man schreibt statt $\varphi(\lambda) = \Phi(f)(\lambda)$ einfach $f(\lambda) := \varphi(\lambda)$ und spricht vom Wert des Polynoms an der Stelle λ bzw. von der Nullstelle eines Polynoms. Man erhält $f(\lambda)$ durch "Einsetzen" von λ in f.

Man verwechsle diese nachlässige Schreibweise nicht mit der in Beispiel 15 definiierten Schreibweise. (49-52,57,58)

20. Es sei $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom über einem Körper K. Den Wert $f(\lambda)$ des Polynoms an der Stelle $\lambda \in K$ kann man vorteilhaft mit Hilfe des Schemas von RUFFINI-HORNER ermitteln (Paolo RUFFINI 1804 (1765-1822), William George HORNER 1819 (1786-1837))

$$
\begin{array}{c|cccccccc:c}
 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_{i+1} & a_i & \ldots & a_1 & & a_0 \\
\lambda & & \lambda b_{n-1} & \ldots & \lambda b_{i+1} & \lambda b_i & \ldots & \lambda b_1 & & \lambda b_0 \\
\hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_i & b_{i-1} & \ldots & b_0 & & f(\lambda)
\end{array}
$$

Hier ist

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{i-1} = \lambda b_i + a_i \qquad i = n-1, \; n-2, \ldots, 1$$

$$f(\lambda) = \lambda b_0 + a_0$$

a) Man zeige $f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$

b) Wir definieren folgendes Polynom:

$f_1 := b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$.

Man zeige:

$f = (x-\lambda) . f_1 + f(\lambda)$

d.h. f_1 ist der Quotient, $f(\lambda)$ ist der Rest, der sich bei Division von f durch das Polynom 1.Grades $(x-\lambda)$ ergibt. (49-52)

21. Folgende Aufgaben löse man unter Verwendung des Schemas von RUFFINI-HORNER:

a) Man bestimme den Wert von $2x^5 - 15x^3 - 7x^2 - 5$ an der Stelle $x = 3$.

b) Man bestimme die restlichen Nullstellen von $x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 26x + 120$, wenn man bereits die beiden Nullstellen 2 und -3 kennt.

c) Man stelle das Polynom

$2x^6 - 15x^5 + 45x^4 - 69x^3 + 56x^2 - 18x - 7$

in der Gestalt

$$\sum_{i=0}^{6} a_i (x-1)^i$$

dar.

Man bestimme die Koeffizienten a_i durch mehrmalige Anwendungen des Schemas von RUFFINI-HORNER.

d) Man stelle das Polynom $x^3-7x^2+17x-15$ in der Gestalt

$a_3(x-1)(x-2)(x-3)+a_2(x-1)(x-2)+a_1(x-1)+a_o$

dar. (49-52)

e) Man stelle gegebene ganze Zahlen im Binärsystem (Basis 2) oder im Hexadezimalsystem (Basis 16) dar und umgekehrt.

<u>Anmerkung:</u> Zahlen des Binärsystems werden mit den Ziffern $\{0,1\}$, Zahlen des Hexadezimalsystems mit den Ziffern $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$ gebildet, wobei im Dezimalsystem die Entsprechungen A=10,...,F=15 gelten. Binärzahlen werden oft durch vorangestelltes % , Hexadezimalzahlen werden durch $ gekennzeichnet.

Beispiel: % 1001=9, $ C3F=3155

22. Gegeben seien die Polynome: $f=a_nx^n+...+a_1x+a_o$ und $p= x^2-\lambda x-\mu$ über $\mathbb{R}$. Dann gilt:

$f=p.f_1+r$, wo $f_1=b_{n-2}x^{n-2}+...+b_1x+b_o$ ein Polynom (n-2)-ten Gerades und $r=c_1x+c_o$ ein lineares Polynom ist. Man verallgemeinere das Schema von RUFFINI-HORNER und bestimme mit dem so gewonnenen Schema von Lothar COLLATZ (*1910) 1940, bei gegebenem f und p die Koeffizienten von f_1 und r. Man wende das Schema von COLLATZ an auf

a) $f = x^8+x^6+15x^4-15x^3-211x^2+200x+3$

$p = x^2-3x+2$

b) $f = 2x^8-x^7-25x^6+16x^5+5x^4-7x^3+8x^2+18x-12$

$p = x^2+3x-2$ (49-52)

23. Es sei $x_o= \rho+i\sigma$ $(\rho,\sigma \in \mathbb{R})$ eine komplexe Zahl. Sie ist dann Nullstelle des Polynoms $p= x^2-2\rho x+(\rho^2+\sigma^2)$ mit reellen Koeffizienten (warum?). Man verwerte diese Tatsache, um den Wert des Polynoms $f= \sum_{i=o}^{n} a_ix^i$ mit <u>reellen</u> <u>Koeffizienten</u> für das <u>komplexe</u> Argument x_o mit Hilfe des Schemas von COLLATZ zu bestimmen.

a) Man werte $f= 2x^3-x^2+6x-8$ an der Stelle $x_o= 1+2i$ aus.

b) Man gebe die restlichen Nullstellen des Polynoms $x^4+2x^3-x^2+38x+130$ an, wenn die Nullstelle $x_1 = 2+3i$ bereits bekannt ist. (49-52)

24. Man ermittle den größten gemeinsamen Teiler der Polynome

$f(x)= 2x^6-17x^5+25x^4-7x^3+8x^2-9x+2$

$g(x)= 3x^5-23x^4+20x^3-5x^2+7x-2$

Hinweis: Zur Durchführung des EUKLID'ischen Algorithmus verwende man entsprechend verallgemeinerte Schemata von COLLATZ. (49-52)

25. Es sei $f(x)= a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_n$.

a) Man gebe die Koeffizienten der **TAYLOR'schen Entwicklung**

$$f(x+h)= f(h)+ \frac{1}{1!}\, f'(h)x+ \frac{1}{2!}\, f''(h)x+\ldots+ \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(h)x^n$$

von $f(x)$ an der Stelle $x+h$ mit Hilfe des Schemas von RUFFINI-HORNER an (vgl.Bsp. 21.c)

b) Man entwickle $f(x)= x^5-2x^4-3x^3+x^2-4x+3$ an der Stelle $x+2$ nach TAYLOR

c) Man gebe die ersten drei Ableitungen von $f(x)= x^7-5x^6+20x^4-3x-150$ an der Stelle $x=3$ unter Verwendung des Schemas von RUFFINI-HORNER an. (49-52)

26. Es sei M eine Menge, K ein Körper und $\mathfrak{B}(M):= \mathrm{Abb}(M,K)$. Ferner gelte

$$\bigwedge_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}} \bigwedge_{x\in M} (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(x):= \mathfrak{a}(x)+\mathfrak{b}(x)$$

$$\bigwedge_{x\in M} \mathfrak{o}(x):= 0_K, \quad \bigwedge_{x\in M} \bigwedge_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}} (-\mathfrak{a})(x):=-\mathfrak{a}(x)$$

$$\bigwedge_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}} \bigwedge_{x\in M} \bigwedge_{\lambda\in K} (\lambda\cdot\mathfrak{a})(x):= \lambda\cdot\mathfrak{a}(x)$$

a) Man zeige, daß $(\mathfrak{B}(M),+,K,\cdot)$ ein Vektorraum ist.

b) Es sei $M_1\subset M$. Ferner sei $\mathfrak{U}(M_1) \subset \mathfrak{B}(M)$ mit

$$\mathfrak{U}(M_1):= \{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B} \mid \bigwedge_{x\in M_1} \mathfrak{a}(x) = 0_K\}$$

Man zeige, daß $\mathfrak{U}(M_1)$ ein Unterraum von $\mathfrak{B}(M)$ ist.

c) Es sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermengen von M und $\mathfrak{U}(M_i)$ der M_i gemäß b) zugeordnete Unterraum von $\mathfrak{B}$, sodaß gilt $x\in M_i \wedge \mathfrak{a}\in\mathfrak{U}(M_i) \Rightarrow \mathfrak{a}(x) = 0_K$.

Man beweise: $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{U}(M_i)= \mathfrak{U}(\bigcup_{i\in I} M_i)$. (60-64)

27. Welche der folgenden Untermengen des reellen arithmetischen Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ sind Unterräume?

a) $\{(a_1,\ldots,a_n)\,|\,a_1 < a_2\}$

b) $\{(a_1,\ldots,a_n)\,|\,a_1+\ldots+a_n = 0\}$

c) $\{(a_1,\ldots,a_n)\,|\,a_1+\ldots+a_n = 1\}$

d) $\{(a_1,\ldots,a_n)\,|\,a_1 = 2a_2+\ldots+na_n\}$

e) $\{(a_1,\ldots,a_n)\,|\,a_1 = 0 = a_n\}$ (60,61)

28. a) Man gebe alle Vektoren des Unterraumes $\mathfrak{U} \subset Z_5^3$ an, der von $(\bar 1,\bar 2,\bar 0)$, $(\bar 1,\bar 0,\bar 1)$ aufgespannt wird.

b) Es seien $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ Unterräume von $\mathfrak{V}$. Man zeige:

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_2 \Rightarrow \mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1 \vee \mathfrak{V} = \mathfrak{U}_2$$

c) Man zeige: Jeder Körper K, aufgefaßt als Vektorraum über sich selbst, enthält nur die trivialen Unterräume $\{0_k\}$ und K. (60,61)

29. a) $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ seien Teilmengen des Vektorraumes $\mathfrak{V}$. Man zeige:

$$H(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2) \subset H(\mathfrak{A}_1) \cap H(\mathfrak{A}_2) .$$

Man erläutere am Beispiel $\mathfrak{V} = \mathbb{R}^3$,

$\mathfrak{A}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$, $\mathfrak{A}_2 = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$

daß i.a. echtes Enthaltensein vorliegt.

b) $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$ seien Unterräume von $\mathfrak{V}$. Man zeige:

$$(\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_3) + (\mathfrak{U}_2 \cap \mathfrak{U}_3) \subset (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2) \cap \mathfrak{U}_3$$

Man finde ein passendes Beispiel zur Erläuterung.

c) $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$ seien Unterräume von $\mathfrak{V}$. Man zeige:

$$\mathfrak{U}_1 + (\mathfrak{U}_2 \cap \mathfrak{U}_3) \subset (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2) \cap (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_3)$$

Man finde ein passendes Beispiel.

d) Bei der Definition der direkten Summe von Unterräumen eines Vektorraumes $\mathfrak{V}$ (Vorl.Nr. 74) ist die Forderung

$$\bigwedge_{i\in I} \mathfrak{U}_i \cap \Sigma\,\{\mathfrak{U}_k \,|\, k\in I,\ k \neq i\} = \{\mathfrak{o}\}$$

nicht äquivalent mit der Forderung

$$\bigwedge_{\substack{i,k\in I\\ i\neq k}} \mathfrak{U}_i \cap \mathfrak{U}_k = \{\mathfrak{o}\}$$

Man zeige dies an folgendem Beispiel: $\mathfrak{V} = \mathbb{R}^3$

$\mathfrak{U}_1 = \{(\lambda,0,0)\}$, $\mathfrak{U}_2 = \{(0,\mu,0)\}$, $\mathfrak{U}_3 = \{(\rho,\rho,\sigma)\}$,

$\lambda,\mu,\rho,\sigma \in \mathbb{R}$ (60-75)

30. Man zeige: Jede Teilmenge $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ ist genau dann NR, wenn sie mit je endlich vielen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ auch jede Linearkombination $\lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \ldots + \lambda_r \mathfrak{a}_r$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r = 1_K$ enthält. (76-82)

31.a) Man gebe im Vektorraum $\mathfrak{B}_3 := Z_5^3$ die in L $(\mathfrak{r}, \mathfrak{U})$ enthaltenen Vektoren an, wenn
$\mathfrak{r} = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$, $\mathfrak{U} = H[(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{4})]$ ist.

b) Es sei $\mathfrak{B}_n = Z_p^n$ (p... Primzahl). Wieviele Vektoren enthält $\mathfrak{B}_n$? Es sei $\mathfrak{U}$ ein Unterraum von $\mathfrak{B}_n$. Warum ist die Anzahl der Vektoren von $\mathfrak{U}$ ein Teiler der Anzahl der Vektoren von $\mathfrak{B}_n$?
Hinweis: Man betrachte den Quotientenraum $\mathfrak{B}_n/\mathfrak{U}$. (76-87)

32. Die Menge $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ sei linear unabhängig. Man stelle die lineare Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit folgender Mengen fest:

a) $\{\mathfrak{a} + \mathfrak{b},\ \mathfrak{b} + \mathfrak{c},\ \mathfrak{c} + \mathfrak{a}\}$

b) $\{\mathfrak{a} - \mathfrak{b},\ \mathfrak{b} - \mathfrak{c},\ \mathfrak{c} - \mathfrak{a}\}$

c) $\{\mathfrak{a},\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b},\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}\}$

(Char $K \neq 2$) (88-93)

33. Man untersuche die l.A. folgender Vektoren:

a) $K=\mathbb{R}$, $\{\mathfrak{a}_1=(3,5,2),\ \mathfrak{a}_2=(0,1,1),\ \mathfrak{a}_3=(3,6,2)\} \subset \mathbb{R}^3$

b) $K=\mathbb{R}$, $\{\mathfrak{a}_1=(5,2,5),\ \mathfrak{a}_2=(1,1,1),\ \mathfrak{a}_3=(6,2,6)\} \subset \mathbb{R}^3$

c) $K=Z_5$, $\{\mathfrak{a}_1=(\bar{1},\bar{2},\bar{3}),\ \mathfrak{a}_2=(\bar{0},\bar{1},\bar{2}),\ \mathfrak{a}_3=(\bar{3},\bar{1},\bar{4})\} \subset Z_5^3$

d) $K=\mathbb{C}$, $\{\mathfrak{a}_1=(i,i-1),\ \mathfrak{a}_2=(1,1+i)\} \subset \mathbb{C}^2$

e) $K=\mathbb{R}$, $\{\mathfrak{a}_1=(i,i-1),\ \mathfrak{a}_2=(1,1+i)\} \subset \mathbb{C}^2$ (88-93)

34. Man zeige: Zwei Vektoren $\mathfrak{a} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\mathfrak{b} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ aus K^n sind genau dann linear unabhängig, wenn es zwei Indizes i,j $(1 \leq i < j \leq n)$ gibt, sodaß $\lambda_i \mu_j - \lambda_j \mu_i \neq 0_K$ ist. (88-93)

35. Es sei $\{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n\}$ eine Basis eines $\mathfrak{B}_n$ über dem Körper K. Man zeige: Die Vektoren $\{\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n\}$, definiert durch

a) $\mathfrak{a}_i := \sum_{k=1}^{i} a_{ik}\mathfrak{b}_k \qquad i=1,\dots,n$

b) $\mathfrak{a}_i := \sum_{k=i}^{n} a_{ik}\mathfrak{b}_k \qquad i=1,\dots,n$

bilden genau dann eine Basis von $\mathfrak{B}_n$, wenn für die $a_{ik} \in K$ gilt: $\bigwedge_i a_{ii} \neq 0_K$ (94–105)

36. Es sei $\mathfrak{U}$ ein k-dimensionaler Unterraum des Vektorraumes $\mathfrak{B}$ und $\{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_k\}$ eine Basis von $\mathfrak{U}$, ferner gelte $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$, aber $\mathfrak{b} \notin \mathfrak{U}$.

a) Man zeige, daß die Menge $\{\mathfrak{b}_1-\mathfrak{b},\ \mathfrak{b}_2-\mathfrak{b},\dots,\mathfrak{b}_k-\mathfrak{b}\}$ linear unabhängig ist.

b) $\mathfrak{U}'$ sei der von den in a) genannten Vektoren aufgespannte Unterraum. Man bestimme die Dimension von $\mathfrak{U}\cap\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{U}+\mathfrak{U}'$. (94–105)

37.a) Man ermittle eine Basis für den Vektorraum $\mathfrak{B}(M)$ von Beispiel 26., wenn M eine endliche Menge ist.

b) Man gebe eine Basis für den Vektorraum $\mathfrak{B}(P_K)$ der Polynome über dem Körper K an (vgl.Beispiel 18.) (94–105)

38. Es seien K_1 und K_2 zwei Körper mit $K_1 \subset K_2$

a) Man zeige, daß K_2 als Vektorraum über K_1 angesehen werden kann.

b) Speziell bestimme man die Dimensionen folgender Vektorräume:

$\mathbb{Q}$	als Vektorraum über	$\mathbb{Q}$
$\mathbb{C}$	" " "	$\mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	" " "	$\mathbb{C}$
$\mathbb{R}$	" " "	$\mathbb{Q}$

(94–105)

39.a) Man zeige: $\mathfrak{U}_1 \subset| \mathfrak{B}_n \Rightarrow \bigvee_{\mathfrak{U}_2 \subset| \mathfrak{B}_n} \mathfrak{B}_n = \mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{U}_2$

b) Sind $\mathfrak{U}_1,\ldots,\mathfrak{U}_r$ Unterräume eines endlichdimensionalen Vektorraumes $\mathfrak{V}_n$ und ist $\mathfrak{B}_i = \{b_1^i,\ldots,b_{m_i}^i\}$ $(i=1,\ldots,r)$

eine Basis von $\mathfrak{U}_i$, so ist $\mathfrak{B} = \{b_1^1,\ldots,b_{m_1}^1,$

$b_1^2,\ldots,b_{m_2}^2,\ldots,b_1^r,\ldots,b_{m_r}^r\}$ dann und nur dann eine Basis

von $\mathfrak{V}_n$, wenn $\mathfrak{V}_n = \mathfrak{U}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{U}_r$ ist.

(74,75,103-105)

40.a) Man zeige: Sind $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$ Unterräume von $\mathfrak{V}$, so gilt

$$3\dim(\mathfrak{U}_1\cap\mathfrak{U}_2\cap\mathfrak{U}_3) + 3\dim(\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2+\mathfrak{U}_3) + \dim[(\mathfrak{U}_1\cap\mathfrak{U}_2)+\mathfrak{U}_3] +$$
$$+\dim[(\mathfrak{U}_2\cap\mathfrak{U}_3)+\mathfrak{U}_1] + \dim[(\mathfrak{U}_3\cap\mathfrak{U}_1)+\mathfrak{U}_2] + \dim[(\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2)\cap\mathfrak{U}_3] +$$
$$+\dim[(\mathfrak{U}_2+\mathfrak{U}_3)\cap\mathfrak{U}_1] + \dim[(\mathfrak{U}_3+\mathfrak{U}_1)\cap\mathfrak{U}_2] =$$
$$= 4\dim\mathfrak{U}_1 + 4\dim\mathfrak{U}_2 + 4\dim\mathfrak{U}_3$$

b) Es sei $\mathfrak{V}_n = \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{U}_i$, Man zeige:

$$\mathfrak{V}_n = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{U}_i \Leftrightarrow \dim\mathfrak{V}_n = \dim\left(\sum_{i=1}^{r}\mathfrak{U}_i\right) = \sum_{i=1}^{r}\dim\mathfrak{U}_i$$

(107)

41. Es seien $\mathfrak{U}_1,\ldots,\mathfrak{U}_r$ Unterräume des $\mathfrak{V}_n$. Ferner sei $e_i := n-\dim\mathfrak{U}_i$ $(i=1,\ldots,r)$. Man zeige:

a) $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{r}\mathfrak{U}_i\right) = n - \sum_{i=1}^{r} e_i + \sum_{j=1}^{r-1}\{n-\dim[(\bigcap_{k=1}^{j}\mathfrak{U}_k)+\mathfrak{U}_{j+1}]\}$

<u>Anleitung:</u> Induktion über r

b) Die Aussage

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{r}\mathfrak{U}_i\right) = n - \sum_{i=1}^{r} e_i$$

ist äquivalent zur Aussage

$$\mathfrak{V}_n = \mathfrak{U}_i + \left(\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mathfrak{U}_j\right) \qquad i=1,\ldots,r$$

(107)

42. Man diskutiere im vierdimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$ sämtliche Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Nebenräume L_1 und L_2 der Dimensionen

a) $\dim L_1 = \dim L_2 = 2$

b) $\dim L_1 = \dim L_2 = 3$

c) $\dim L_1 = 1$, $\dim L_2 = 2$

d) $\dim L_1 = 1$, $\dim L_2 = 3$

d.h. man gebe $\dim (L_1 \cap L_2)$, $\dim (L_1, L_2)$ sowie den möglichen Grad m der Parallelität von L_1 und L_2 an. (108-117)

43. Welche gegenseitige Lage können zwei dreidimensionale Nebenräume im reellen $\mathfrak{A}_5$ einnehmen? (108-117)

LINEARE ABBILDUNGEN

44. Man weise von folgenden Abbildungen die Linearität nach. Man charakterisiere die Abbildung (injektiv, surjektiv, isomorph) und bestimme Rang, Defekt und Kern.

a) $\mathbb{C}$ sei der Vektorraum der komplexen Zahlen über dem Körper $\mathbb{R}$. Man untersuche $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

c) Es seien P_{n-1}, P_n, P_{n+1} die Vektorräume der Polynome der Grade n-1, n, n+1 über dem Körper $\mathbb{R}$ (vgl. Beispiel 18.).
Es sei $f = \lambda_o + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n x^n \in P_n$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
Man untersuche die Abbildungen

$$D: P_n \to P_{n-1}$$
$$f \mapsto \lambda_1 + 2\lambda_2 x + \ldots + n\lambda_n x^{n-1}$$

und

$$J: P_n \to P_{n+1}$$
$$f \mapsto \lambda_o x + \frac{\lambda_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{n+1} x^{n+1}.$$

(118)

45. Die Abbildung $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x+iy) := x - iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ ordnet jeder komplexen Zahl die konjugierte zu.

a) Ist f linear, wenn die Menge der komplexen Zahlen als Vektorraum über $\mathbb{R}$ aufgefaßt wird?

b) Ist f linear, wenn die Menge der komplexen Zahlen als Vektorraum über $\mathbb{C}$ aufgefaßt wird? (vgl.Beispiel 38.). (118,119)

46. Es seien M und M' zwei Mengen, K ein Körper, $\mathfrak{V}(M)= Abb(M,K)$ und $\mathfrak{V}'(M')= Abb(M',K)$ die Vektorräume der Abbildungen der Mengen M bzw. M' in K (s.Beispiel 26.). Ferner sei $\varphi \in Abb(M,M')$. Dann ist durch die Vorschrift

$\mathfrak{a}(x):= (\mathfrak{a}' \circ \varphi)(x), \qquad \mathfrak{a} \in \mathfrak{V},\ \mathfrak{a}' \in \mathfrak{V}',\ x \in M$

eine Abbildung

$f: \mathfrak{V}' \to \mathfrak{V}, \quad \mathfrak{a}' \mapsto \mathfrak{a}$

festgelegt. Man zeige, daß f linear ist. Man zeige, daß f injektiv ist, wenn φ surjektiv ist. (118)

47. Es sei $f \in Hom(\mathfrak{V}_n, \mathfrak{V}'_{n'})$. Man zeige, daß folgende zwei Aussagen äquivalent sind:

a) f ist injektiv

b) Für einen beliebigen Vektorraum $\mathfrak{V}''_{n''}$ und zwei beliebige $g,h \in Hom(\mathfrak{V}''_{n''}, \mathfrak{V}_n)$ gelte:

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

<u>Anleitung</u> für b) ⇒ a): Man nehme an, es gebe ein $\mathfrak{o} \neq \mathfrak{r} \in \mathfrak{V}_n$ mit $f(\mathfrak{r}) = \mathfrak{o}' \in \mathfrak{V}'_{n'}$. Dann betrachte man jene Abbildung g, welche einen Basisvektor von $\mathfrak{V}''_{n''}$ nach $\mathfrak{r}$ überführt, alle anderen Basisvektoren von $\mathfrak{V}''_{n''}$ aber auf $\mathfrak{o} \in \mathfrak{V}_n$ abbildet.

<u>Bemerkung:</u> Injektive Homomorphismen lassen sich also bei Verknüpfung von links "kürzen". (118-134)

48. Es sei $f \in Hom(\mathfrak{V}_n, \mathfrak{V}'_{n'})$. Man zeige, daß folgende zwei Aussagen äquivalent sind:

a) f ist surjektiv

b) Für einen beliebigen Vektorraum $\mathfrak{V}''_{n''}$ und zwei beliebige $g,h \in Hom(\mathfrak{V}'_{n'}, \mathfrak{V}''_{n''})$ gelte

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

<u>Anleitung</u> für b) ⇒ a): Man nehme an, es sei $f(\mathfrak{V}_n) \neq \mathfrak{V}'_{n'}$. Man ergänze eine Basis von $f(\mathfrak{V}_n)$ zu einer Basis von $\mathfrak{V}'_{n'}$, und betrachte jene Abbildung g, welche alle Basisvektoren von $f(\mathfrak{V}_n)$ auf $\mathfrak{o}'' \in \mathfrak{V}''_{n''}$ abbildet, die restlichen

Basisvektoren von $\mathfrak{V}'_{n'}$ auf $\mathfrak{a}'' \in \mathfrak{V}''_{n''}$ $(\mathfrak{a}'' \neq \mathfrak{o}'')$ abbildet.
<u>Bemerkung:</u> Surjektive Homomorphismen lassen sich also bei Verknüpfung von rechts "kürzen". (118-134)

49. Es sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_n, \mathfrak{V}'_{n'})$, $g \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}'_{n'}, \mathfrak{V}''_{n''})$. Man zeige:

a) $\mathrm{kn}\ f \subset \mathrm{kn}\ (g \circ f)$

b) $(g \circ f)(\mathfrak{V}_n) \subset g(\mathfrak{V}'_{n'})$

c) $\mathrm{def}\ (g \circ f) \geq \mathrm{def}\ f$, $\mathrm{rg}\ (g \circ f) \leq \mathrm{rg}\ f$

d) $\mathrm{def}\ (g \circ f) \geq \mathrm{def}\ g+(n-n')$, $\mathrm{rg}\ (g \circ f) \leq \mathrm{rg}\ g$

e) $\mathrm{def}\ g+ \mathrm{def}\ f \geq \mathrm{def}\ (g \circ f) \geq \max \{\mathrm{def}\ f, \mathrm{def}\ g+(n-n')\}$

f) $\mathrm{rg}\ g + \mathrm{rg}\ f - n' \leq \mathrm{rg}\ g \circ f \leq \min \{\mathrm{rg}\ g, \mathrm{rg}\ f\}$
(Ungleichung von SYLVESTER) (129)

50. Es sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_n, \mathfrak{V}'_{n})$ vorgegeben und $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}'$ seien vorgegebene Untermengen von $\mathfrak{V}_n$ bzw. $\mathfrak{V}'_{n'}$. Man zeige:

a) $f(f^{-}(\mathfrak{A}')) = \mathfrak{A}' \cap f(\mathfrak{V}_n)$

b) $f^{-}(f(\mathfrak{A})) = \mathfrak{A} + \mathrm{kn}\ f$ (Verallgemeinerung von Vorl.Nr.137.)

Wie müssen bei vorgegebenen f $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}'$ gewählt werden, daß gilt:

c) $\mathfrak{A}' = f(f^{-}(\mathfrak{A}'))$

d) $f^{-}(f(\mathfrak{A})) = \mathfrak{A}$?

e) Wie lautet bei vorgegebenem f die Antwort zu d), wenn $\mathfrak{A}$ ein Unterraum von $\mathfrak{V}_n$ ist? (118-134)

51. Es sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_n, \mathfrak{V}'_{n'})$ ferner sei f surjektiv. A sei die Menge der Unterräume von $\mathfrak{V}_n$, welche $\mathrm{kn}\ f$ umfassen:

$$A := \{\mathfrak{U} \mid \mathrm{kn}\ f \subset| \mathfrak{U} \subset| \mathfrak{V}_n\}$$

Ferner sei

$$A' := \{\mathfrak{U}' \mid \mathfrak{U}' \subset| \mathfrak{V}'_{n'}\}$$

Man zeige: Die Abbildung

$$\varphi: A \to A'$$
$$\mathfrak{U} \mapsto \varphi(\mathfrak{U}) := f(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}'$$

ist bijektiv. Man zeige ferner, daß die durch

$$\psi: A' \to A$$
$$\mathfrak{U}' \mapsto \psi(\mathfrak{U}') := f^{-}(\mathfrak{U}') = \mathfrak{U}$$

definierte Abbildung die Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1}$ von φ ist. Man verwende das Ergebnis von Beisp.50.c.e. und Vorl. Nr.29 sowie Beisp.7.b. (118-134)

51.A. Siehe Ergänzungen S.66.

52. Man zeige für $f \in Hom(\mathfrak{V}_n, \mathfrak{V}'_{n'})$ und $g \in Hom(\mathfrak{V}'_{n'}, \mathfrak{V}''_{n''})$:

a) Aus $g \circ f = zo$ mit $f \neq zo$ folgt dann und nur dann $g = zo$, wenn f surjektiv ist.

b) Aus $g \circ f = zo$ mit $g \neq zo$ folgt dann und nur dann $f = zo$, wenn g injektiv ist. (125-135)

53. Es sei f ein Homomorphismus des reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}_{\mathbb{R}}$ in den reellen Vektorraum $\mathfrak{V}'_{\mathbb{R}}$. Man zeige: Bettet man die gegebenen Vektorräume in die komplexen Vektorräume $\mathfrak{V}_{\mathbb{C}}$ bzw. $\mathfrak{V}'_{\mathbb{C}}$ ein, so ist die komplexe Erweiterung $\tilde{f}$ von f injektiv (surjektiv,bijektiv), wenn f injektiv (surjektiv, bijektiv) war. (139,140)

54. Man zeige für $f,g \in End(\mathfrak{V}_n)$, $\dim \mathfrak{V}_n = n$:

a) $(f+g)(\mathfrak{V}_n) \subset f(\mathfrak{V}_n) + g(\mathfrak{V}_n)$

b) $rg(f+g) \leq rg\, f + rg\, g$

c) $def(f+g) \geq def\, f + def\, g - n$

d) Ist f ein Automorphismus, so gilt für beliebiges g $rg(g \circ f) = rg(f \circ g) = rg\, g$ (129,146-149)

55.a) Es seien f,g Endomorphismen eines Vektorraumes. Man zeige: f,g sind dann und nur dann Automorphismen, wenn sowohl $g \circ f$ als auch $f \circ g$ Automorphismen sind.

b) Es seien f,g Endomorphismen eines <u>endlichdimensionalen</u> Vektorraumes. Man zeige: Ist $g \circ f = id$, dann ist sowohl f als auch g ein Automorphismus.

c) Es sei $f \in End(\mathfrak{V})$ $(\dim \mathfrak{V} \leq \infty)$. Man zeige: $f^2 - f - id = zo \Rightarrow f \in Aut(\mathfrak{V})$ (Man beachte Vorl.Nr. 27.).

d) Es sei $f,g \in End(\mathfrak{V})$ $(\dim \mathfrak{V} \leq \infty)$. Gilt $g \circ f = id$, so heißt g <u>linksinverse</u> Abbildung von f. Man zeige: Hat f <u>genau eine</u> Linksinverse, so ist f ein Automorphismus. <u>Anleitung:</u> Man betrachte den Endomorphismus $f \circ g + g - id$.

(146-149)

56. f sei idempotenter Endomorphismus des Vektorraumes $\mathfrak{V}_n$.
Man zeige:

a) f idempotent $\Leftrightarrow f' := id_{\mathfrak{V}} - f$ idempotent

b) f, f' sind orthogonal und supplementär

c) Man bestimme kn f' und $f'(\mathfrak{V}_n)$. (150)

57.a) Ein Endomorphismus f eines Vektorraumes heißt nilpotent mit dem Index k, wenn eine natürliche Zahl $k > 1$ existiert, sodaß $\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k\text{-mal}} = f^k = zo$, jedoch $f^{k-1} \neq zo$ ist.
Ist für einen Vektor $f^{k-1}(\mathfrak{r}) \neq \mathfrak{o}$, so ist die Menge $\{\mathfrak{r}, f(\mathfrak{r}), f^2(\mathfrak{r}), \ldots, f^{k-1}(\mathfrak{r})\}$ l.u. Man beweise dies.
Man zeige:

b) $\bigwedge\limits_{\mathfrak{r} \in \mathfrak{V}_n} f^{k-i}(\mathfrak{r}) \in \text{kn } f^i \qquad i=1,\ldots k$

$(\text{kn } f^o = \text{kn } id_{\mathfrak{V}_n} = \{\mathfrak{o}\}, \quad \text{kn } f^k = \text{kn } zo = \mathfrak{V}_n)$

c) $\bigvee\limits_{\mathfrak{r} \in \mathfrak{V}_n} f^{k-i}(\mathfrak{r}) \notin \text{kn } f^{i-1} \qquad i=1,\ldots,k$

(Beweis indirekt führen!)

d) $\text{kn } f^{i-1} \subsetneq \text{kn } f^i \qquad i=1,\ldots,k$

e) $\bigwedge\limits_{i} f(\text{kn } f^i) \subset \text{kn } f^{i-1} \qquad i=1,\ldots,k$

f) Es sei $\mathfrak{U} \subset | \mathfrak{V}_n$ und $\mathfrak{U} \cap \text{kn } f^j = \{\mathfrak{o}\}$, $j=1,\ldots,k-1$.
Dann ist auch $f(\mathfrak{U}) \cap \text{kn } f^{j-1} = \{\mathfrak{o}\}$ und $f|\mathfrak{U}$ ist injektiv. (150)

58. f sei nilpotent mit dem Index k. Man zeige: Es gibt von $\{\mathfrak{o}\}$ verschiedene Unterräume $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_k$ von $\mathfrak{V}_n$ mit den Eigenschaften

a) $\mathfrak{U}_i \oplus \text{kn } f^{i-1} = \text{kn } f^i, \qquad i=1,\ldots,k$

b) $f(\mathfrak{U}_j) \subset \mathfrak{U}_{j-1}, \qquad j=2,\ldots,k$

c) $f|\mathfrak{U}_j$ ist injektiv $\qquad j=2,\ldots,k$

Daraus folgt, daß sich $\mathfrak{V}_n$ in der Gestalt

$$\mathfrak{V}_n = \mathfrak{U}_k \oplus \mathfrak{U}_{k-1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{U}_1$$

darstellen läßt. Man beachte: $\mathfrak{U}_1 = \text{kn } f$.

<u>Anleitung:</u> Man zeige unter Verwertung des Ergebnisses von Beispiel 57.d für $i=k$, daß es einen von $\{\mathfrak{o}\}$ verschiedenen Unterraum $\mathfrak{U}_k$ mit $\mathfrak{U}_k \oplus \text{kn } f^{k-1} = \text{kn } f^k = \mathfrak{V}_n$ gibt, der die

oben geforderten Eigenschaften hat.
Zum Nachweis, daß sich ein $\mathfrak{U}_{k-1}$ mit der Eigenschaft $f(\mathfrak{U}_k) \subset \mathfrak{U}_{k-1}$ finden läßt, verwende man das Ergebnis von Beispiel 57.e.f. Anschließend Induktion über i. (150)

59. $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ seien Unterräume von $\mathfrak{V}$ und es sei

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{U}_2.$$

f_i seien die Projektoren von $\mathfrak{V}$ auf $\mathfrak{U}_i (i=1,2)$ in Richtung von $\mathfrak{U}$. Man zeige:
$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_2 \Leftrightarrow f_1 o f_2 = f_2 o f_1$. (150-153)

60.a) Ist $f \in End(\mathfrak{V}_n)$ und $\mathfrak{U}$ ein invarianter Unterraum unter f (d.h. $f(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{U}$), dann gilt für einen beliebigen Projektor g auf $\mathfrak{U}$: $g \circ f \circ g = f \circ g$. Gilt umgekehrt $g \circ f \circ g = f \circ g$ für einen Projektor g auf $\mathfrak{U}$, dann ist $\mathfrak{U}$ invariant unter f. Man zeige dies.

b) Ist $\mathfrak{V} = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{U}'$, so sind die beiden Unterräume $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$ dann und nur dann invariant unter $f \in End(\mathfrak{V}_n)$, wenn gilt:

$$g \circ f = f \circ g,$$

worin g der Projektor auf $\mathfrak{U}$ in Richtung von $\mathfrak{U}'$ ist. (150-153)

61. Siehe Ergänzungen Seite 66

61.A. Siehe Ergänzungen Seite 66

62. Es seien $f_i (i=1,2)$ zwei Projektoren auf die Unterräume $\mathfrak{U}_i$ in Richtung der Unterräume $\mathfrak{U}_i'$. Die Charakteristik des Grundkörpers sei $\neq 2$. Man zeige:

a) $f := f_1 + f_2$ ist dann und nur dann Projektor, wenn $f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2 = zo$ ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist f Projektor auf $\mathfrak{U} := \mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{U}_2$ in Richtung von $\mathfrak{U}' := \mathfrak{U}_1' \cap \mathfrak{U}_2'$.

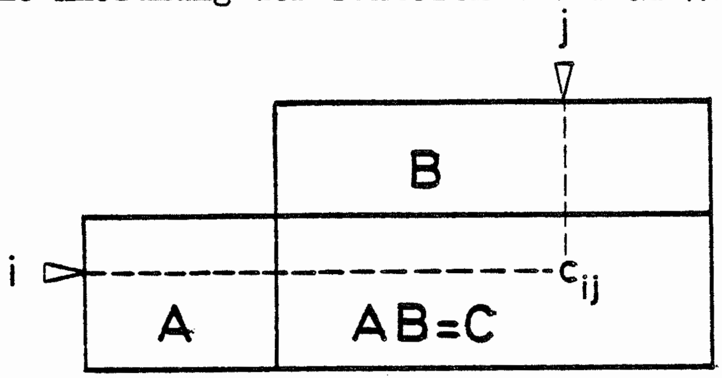
b) $f := f_1 - f_2$ ist Projektor dann und nur dann, wenn $f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2 = f_2$ ist. In diesem Falle ist f Projektor auf $\mathfrak{U} := \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2'$ in Richtung von $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}_1' \oplus \mathfrak{U}_2$.

c) gilt $f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2 =: f$, so ist f Projektor auf $\mathfrak{U} := \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2$ in Richtung von $\mathfrak{U}' := \mathfrak{U}_1' + \mathfrak{U}_2'$.
Weshalb tritt hier keine direkte Summe auf? (147,150-153)

63. Läßt sich ein Vektorraum $\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{U}_r$ als direkte Summe von r Unterräumen darstellen, so gibt es r Projektoren f_i, welche jedem Vektor $\mathfrak{x} \in \mathfrak{V}$ seine Projektion $f_i(\mathfrak{x}) := \mathfrak{x}_i \in \mathfrak{U}_i$ $(i=1,\ldots,r)$ zuordnen. Man zeige, daß $\sum\limits_{i=1}^{r} f_i = id$ ist (Supplementarität der f_i). Ferner zeige man, daß die Summe $f_{i_1} + \ldots + f_{i_k} = f$ von $k \leq r$ Projektoren jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{V}$ nach $\mathfrak{y} \in \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{i_1} + \ldots + \mathfrak{U}_{i_k}$ projiziert, daß für $i \neq j$ immer $f_i \circ f_j = zo$ ist und daß $f \circ f_l = f_l \circ f = zo$ $(l=1,\ldots,r;\ l \neq i_1,\ldots,i_k)$, $f^2 = f$ gilt. (150-153)

DAS RECHNEN MIT MATRIZEN

64. Für die praktische Ausführung des Produktes $AB = C, C = ||c_{ij}||$ zweier Matrizen ist folgende von S. FALK (1951) vorgeschlagene Anordnung der Faktoren zweckmäßig:

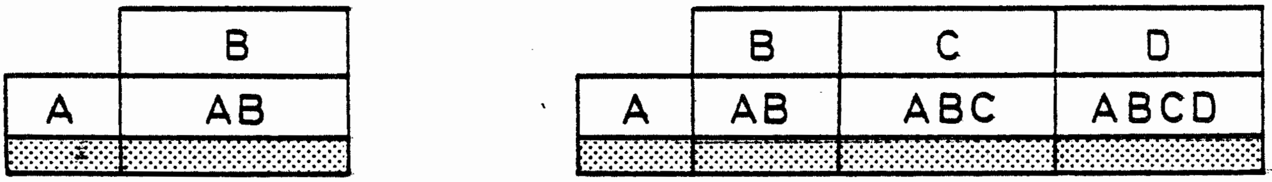


Zur Überprüfung der Richtigkeit der Multiplikation empfiehlt sich die Summenprobe von GAUSS:

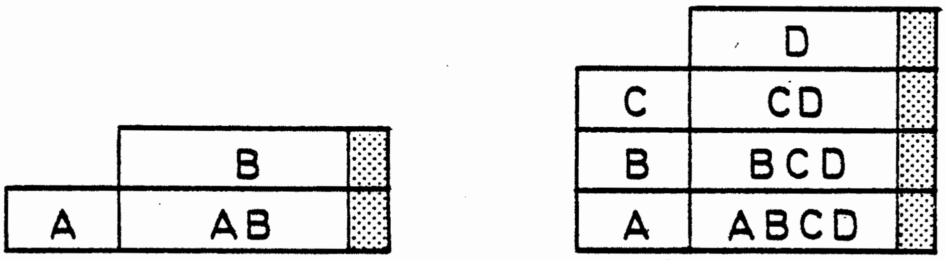
1. Spaltensummenprobe: Man ergänze den ersten Faktor A durch eine weitere Zeile, deren Elemente dadurch entstehen, daß man jeweils die Elemente der Spalten von A aufsummiert. Die so erweiterte Matrix A_1 multipliziere man mit B. Die gewonnene Produktmatrix $A_1B = C_1$ besteht aus der gesuchten Matrix C, welche um eine Zeile vermehrt ist, deren Elemente die Summen der Spalten von C sind. Man beweise dies.

2. <u>Zeilensummenprobe:</u> Man ergänze <u>den zweiten Faktor</u> B durch eine weitere <u>Spalte</u> zu einer Matrix B_2, deren Elemente die Summen der einzelnen Zeilen von B sind. Die Produktmatrix $AB_2 = C_2$ stellt die um die Zeilensummen erweiterte Matrix C dar.
Die folgenden Schemata zeigen die Anordnung der Kontrollzeilen bzw. Spalten bei zwei bzw. mehr Faktoren. (175)

<u>Spaltensummenprobe</u>



<u>Zeilensummenprobe</u>



65. Ein Betrieb stellt aus m verschiedenen Rohstoffen $R_1,\dots,R_m$ in der ersten Produktionsstufe k Zwischenprodukte $Z_1,\dots,Z_k$ her. In einem zweiten Produktionsprozeß werden aus den Zwischenprodukten n Endprodukte $E_1,\dots,E_n$ hergestellt. Vom Rohstoff R_l werden zur Erzeugung einer Einheit des Zwischenproduktes Z_j r_{lj} Einheiten benötigt. Zur Darstellung dieses Sachverhaltes bedient man sich der "Materialverbrauchsmatrix"

$$M_{RZ}\dots \quad \begin{array}{c|ccc} & Z_1 & \dots & Z_k \\ \hline R_1 & r_{11} & \dots & r_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_m & r_{m1} & \dots & r_{mk} \end{array}$$

Zur Herstellung einer Einheit des Endproduktes E_i werden z_{ji} Einheiten des Zwischenproduktes Z_j benötigt. Die zweite Stufe des Produktionsprozesses wird durch die Materialverbrauchsmatrix

$$M_{ZE} \ldots \quad \begin{array}{c|ccc} & E_1 & \cdots & E_n \\ \hline Z_1 & z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_k & z_{k1} & \cdots & z_{kn} \end{array}$$

beschrieben. Man drücke die "Gesamtverbrauchsmatrix"

$$M \ldots \quad \begin{array}{c|ccc} & E_1 & \cdots & E_n \\ \hline R_1 & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_m & x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{array}$$

mit Hilfe der Matrizen M_{RZ} und M_{ZE} aus.
Wieviel Einheiten von jedem der Rohstoffe $R_1,\ldots,R_m$ benötigt man, wenn von den Endprodukten $E_1,\ldots,E_n$ der Reihe nach $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ Einheiten produziert werden sollen?

Beispiel:

	Z_1	Z_2
R_1	0	12
R_2	16	5
R_3	7	9
R_4	8	0

	E_1	E_2	E_3
Z_1	0	15	17
Z_2	12	0	13

$\lambda_1 = 1000, \quad \lambda_2 = 1500, \quad \lambda_3 = 800$ (174,175)

66. Ein Betrieb stellt die Endprodukte $E_1,\ldots,E_n$ aus den Rohstoffen $R_1,\ldots,R_m$ in drei Produktionsstufen über zwei Serien von Zwischenprodukten, nämlich $Z_1,\ldots,Z_k$ und $Y_1,\ldots,Y_l$ her. Der Materialfluß wird durch die Materialverbrauchsmatrizen M_{RZ}, M_{ZY}, M_{RY}, M_{ZE}, M_{YE}, M_{RE} beschrieben. Hier bedeuten M_{RY} und M_{RE} jene Matrizen, welche den Bedarf an (noch unbearbeiteten) Rohstoffen zur Produktion der Zwischenstufen Y_i bzw. der Endprodukte E_j zusätzlich zu den Vorprodukten angeben. Man gebe jene Matrix M an, welche den Gesamtbedarf an Rohstoffen für eine Einheit von E_j beschreibt. (174,175)

Beispiel:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
R_1	3	2	0	0	5
R_2	1	4	2	3	0
R_3	0	0	8	3	1
R_4	2	3	0	1	3

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	2	0
R_2	3	1	1
R_3	0	0	2
R_4	0	3	2

	Y_1	Y_2
R_1	2	0
R_2	0	0
R_3	1	2
R_4	0	3

	Y_1	Y_2
Z_1	4	2
Z_2	1	0
Z_3	0	3

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
Z_1	0	0	5	2	0
Z_2	1	4	0	1	2
Z_3	3	4	0	0	0

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
Y_1	0	0	2	1	0
Y_2	1	0	0	0	3

67. Man zeige: Zerlegt man die Matrizen

$$A_{mn} = \left\| \begin{array}{c|c} A_{rs} & A_{r,n-s} \\ \hline A_{m-r,s} & A_{m-r,n-s} \end{array} \right\| \qquad B_{np} = \left\| \begin{array}{c|c} B_{st} & B_{s,p-t} \\ \hline B_{n-s,t} & B_{n-s,p-t} \end{array} \right\|$$

in der angegebenen Weise in Teilmatrizen, so gilt für das Matrizenprodukt

$$A_{mn}B_{np} = \left\| \begin{array}{c|c} A_{rs}B_{st}+A_{r,n-s}B_{n-s,t} & A_{rs}B_{s,p-t}+A_{r,n-s}B_{n-s,p-t} \\ \hline A_{m-r,s}B_{st}+A_{m-r,n-s}B_{n-s,t} & A_{m-r,s}B_{s,p-t}+A_{m-r,n-s}B_{n-s,p-t} \end{array} \right\|$$

(175)

68. Eine quadratische Matrix $A_n = \|a_{ij}\|_n$ über $\mathfrak{R}$ heißt MARKOV'sche Matrix, wenn gilt

$$o \leq a_{ij} \leq 1 \text{ und } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \text{ für } i=1,2,\ldots,n.$$

Man zeige: das Produkt zweier Markov-Matrizen ist eine Markov-Matrix. (175)

69.a) Bezüglich der gegebenen Basis $\mathfrak{B}$ besitzen n l.u. Vektoren eines $\mathfrak{B}_n$ die Koordinatenmatrizen $\check{\mathfrak{r}}_i = \|x_{i1},\ldots,x_{in}\|$, $i=1,\ldots,n$. Wie lautet bezüglich $\mathfrak{B}$ die Matrix A_n jenes Endomorphismus von $\mathfrak{B}_n$, der die

gegebenen Vektoren in n andere l.u. überführt, deren Koordinatenmatrizen bezüglich $\mathfrak{B}$ lauten
$\check{\mathfrak{x}}'_i = \|x'_{i1}, \ldots, x'_{in}\|$?

b) Dieselben l.u. Vektoren $\mathfrak{x}_i$, $i=1,\ldots,n$ besitzen bezüglich zweier Basen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ die Koordinatenmatrizen
$\check{\mathfrak{x}}_i = \|x_{i1}, \ldots, x_{in}\|$ bzw. $\check{\mathfrak{x}}'_i = \|x'_{i1}, \ldots, x'_{in}\|$.
Wie lautet jene Matrix B_n, welche dem Basiswechsel $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$ zugeordnet ist ?

c) Wie hängen die Matrizen A_n und B_n von a) und b) zusammen, wenn die Koordinaten der Vektoren beidemale dieselben Skalare sind ? (175-184)

70. Im arithmetischen Vektorraum K^n sei durch die Vektoren $\mathfrak{b}_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in})$, $i=1,\ldots,n$ eine Basis $\mathfrak{B}$ festgelegt. Man ermittle die Koordinatenmatrix $\check{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}} = \|x_1, \ldots, x_n\|$ des Vektors $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ bezüglich $\mathfrak{B}$.
Sei $\bar{\mathfrak{B}}$ eine aus den Vektoren $\bar{\mathfrak{b}}_i = (\bar{b}_{i1}, \ldots, \bar{b}_{in})$, $i=1,\ldots,n$ bestehende zweite Basis von K^n, $\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}} = \|\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\|$ die Koordinatenmatrix von $\mathfrak{a}$ bezüglich $\bar{\mathfrak{B}}$.
Man gebe den Zusammenhang von $\check{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}}$ und $\check{\bar{\mathfrak{x}}}_{\mathfrak{a}}$ in Matrizenschreibweise an und bestimme jene Matrix C_n, welche dem Basiswechsel $\mathfrak{B} \to \bar{\mathfrak{B}}$ entspricht. (176-186)

71. Es sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}'_{n'})$, $A_{nn'}$ die zugehörige Matrix bezüglich beliebiger Basen von $\mathfrak{B}_n$ bzw. $\mathfrak{B}'_{n'}$. Man nennt die Matrix $X_{n'n}$ Linksinverse zu $A_{nn'}$, wenn $X_{n'n}A_{nn'} = E_{n'}$ gilt, die Matrix $Y_{n'n}$ Rechtsinverse zu $A_{nn'}$, wenn $A_{nn'}\,Y_{n'n} = E_n$ gilt. Man zeige

a) f ist genau dann injektiv, wenn $A_{nn'}$ eine Rechtsinverse besitzt.

b) f ist genau dann surjektiv, wenn $A_{nn'}$ eine Linksinverse besitzt.

c) f ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $A_{nn'}$ eine Links- und Rechtsinverse besitzt.
In diesem Falle ist die Linksinverse gleich der Rechtsinversen und $X_{nn'} = Y_{n'n}$ ist eindeutig bestimmt.

Man zeige für die Rechtsinverse $Y_{n'n}$ einer Matrix $A_{nn'}$:

d) $Y_{n'n}$ existiert dann und nur dann, wenn
$(\mathrm{rg}\, A_{nn'} = n) \wedge (n \leq n')$

e) $Y_{n'n}$ ist dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn
$n = n'$. (175-186)

72. Für welche Werte des Parameters ist die folgende Matrix regulär, für welche singulär?

$$A_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ t & -3 & 3t & 2 \\ 5 & -4 & t-1 & 1 \end{Vmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

(195)

73. Man überprüfe die l.A. folgender Vektoren und gebe die bestehenden Zusammenhänge an:

a) im $\mathbb{R}^5$: $\mathfrak{a}_1=(1,0,-1,2,0)$, $\mathfrak{a}_2=(-1,1,2,3,-4)$, $\mathfrak{a}_3=(0,1,2,1,-1)$, $\mathfrak{a}_4=(1,0,0,-2,3)$, $\mathfrak{a}_5=(1,0,-2,6,-3)$, $\mathfrak{a}_6=(1,1,-2,15,-10)$

b) im $\mathbb{C}^3$: $\mathfrak{a}_1=(1,0,1)$, $\mathfrak{a}_2=(0,i,2)$, $\mathfrak{a}_3=(-1,1,3i)$, $\mathfrak{a}_4=(-1,2,i)$

c) im Z_3^3: $\mathfrak{a}_1=(\tilde{1},\tilde{0},\tilde{2})$, $\mathfrak{a}_2=(\tilde{0},\tilde{1},\tilde{1})$, $\mathfrak{a}_3=(\tilde{1},\tilde{1},\tilde{0})$, $\mathfrak{a}_4=(\tilde{1},\tilde{0},\tilde{1})$, $\mathfrak{a}_5=(\tilde{2},\tilde{2},\tilde{2})$ (196)

74. $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{b}_1=(1,1,1,0,2),\ \mathfrak{b}_2=(0,1,0,1,0),\ \mathfrak{b}_3=(1,-1,2,1,1)$
$\mathfrak{b}_4=(-2,0,0,1,0),\ \mathfrak{b}_5=(1,1,-2,-1,2)\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^5$.

a) Welche $\mathfrak{b}_i$ lassen sich nach STEINITZ gegen die l.u. Vektoren $\mathfrak{a}_1=(2,4,-2,-2,5)$, $\mathfrak{a}_2=(1,3,-3,-2,3)$, $\mathfrak{a}_3=(3,9,-6,-5,9)$ austauschen ?

b) Welche Koordinaten haben die ausgetauschten $\mathfrak{b}_i$ in der neuen Basis ? (196)

75. Im arithmetischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ stellen die Vektoren
$\mathfrak{a}_1=(2,-3,4,5)$, $\mathfrak{a}_2=(1,-1,3,-4)$, $\mathfrak{a}_3=(2,-5,0,31)$,
$\mathfrak{a}_4=(0,1,2,-13)$, $\mathfrak{a}_5=(3,2,-1,-6)$, $\mathfrak{a}_6=(-6,-3,4,-1)$,
$\mathfrak{a}_7=(1,0,3,1)$ ein Erzeugendensystem dar.

a) Man wähle aus diesem Erzeugendensystem eine Basis aus, deren Vektoren möglichst kleine Indizes haben,

b) Welche Vektoren des gegebenen Erzeugendensystems ließen sich gegen die l.u. Vektoren $\mathfrak{b}_1=(2,-4,2,18)$, $\mathfrak{b}_2=(5,-9,7,32)$ austauschen?

<u>Hinweis:</u> Man berechne a) und b) im selben Schema. (196)

76. Man bestimme zwei reguläre Matrizen A_4, C_5 derart, daß die Matrix

$$B_{45} = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -0 \\ -1 & -5 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & -5 & 4 & 3 & 1 \\ 13 & -5 & 7 & 4 & 3 \end{Vmatrix}$$

Normalform $E_{45}^{(r)} = A_4 \; B_{45} \; C_5$ annimmt (Probe!) (188,198)

*)
77. Der linearen Abbildung $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ist bezüglich der kanonischen Basen dieser Räume die Matrix

$$A_{42} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

zugeordnet. Welche Matrix entspricht f, wenn man $\mathbb{R}^4$ auf $\bar{\mathfrak{B}} = \{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,0,-1)\}$, $\mathbb{R}^2$ auf $\bar{\mathfrak{B}} = \{(1,1),(1,-1)\}$ bezieht? (185,199)

78. Dem Homomorphismus $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ entspricht bezüglich der kanonischen Basen dieser Räume die Matrix

$$A_{34} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

a) Wie lautet die Matrix von f, wenn man in $\mathbb{R}^3$ die neue Basis $\{(1,2,0),(1,0,1),(0,-1,2)\}$ und in $\mathbb{R}^4$ die neue Basis $\{(1,1,0,1),(0,1,1,0),(1,0,-1,2),(0,1,0,1)\}$ einführt ? (185,199)

b) Man führe neue Basen in $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$ ein, sodaß die Matrix von f Normalform annimmt. (188)

---

*) Bspe. 76.A, 76.B, 76.C, 76.D, 76.E siehe Ergänzungen S.60-64

79.a) Es sei $f,g,h,l \in End(\mathfrak{B}_n)$, wobei $f+g$, $f-g \in Aut(\mathfrak{B}_n)$ gelte. Man zeige: Es gibt zwei Endomorphismen $r,s \in End(\mathfrak{B}_n)$, sodaß gilt (Char $K \neq 2$!)

$$f \circ r + g \circ s = h$$

$$g \circ r + f \circ s = l$$

b) Im $\mathbb{R}^3$ entsprechen bez. einer geg. Basis den genannten Endomorphismen folgende Matrizen

$$f.. \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad g.. \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}, \quad h.. \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad l.. \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$$

Man bestimme die Matrizen von r und s.
Welche der gegebenen bzw. gewonnenen Endomorphismen sind Automorphismen ? (174,175,182)

80. In $\mathbb{R}^5$ sind zwei Unterräume $\mathfrak{U}_1 = H[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3]$ und $\mathfrak{U}_2 = H[\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_6]$ mit $\mathfrak{a}_1=(1,2,1,-5,1)$, $\mathfrak{a}_2=(1,2,1,-5,0)$, $\mathfrak{a}_3=(0,2,0,-5,1)$, $\mathfrak{a}_4=(1,-2,1,5,-1)$, $\mathfrak{a}_5=(1,0,2,3,0)$, $\mathfrak{a}_6=(1,0,1,0,0)$ gegeben. Man ermittle

a) eine Basis von $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2$

b) eine Basis von $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}$

c) Man bestimme $\mathfrak{U}' \subset | \mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}'' \subset | \mathfrak{U}_2$ so, daß gilt
$\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{U}' \oplus \mathfrak{U}''$ (197)

81. Im $\mathbb{R}^6$ sei der NR $L(\mathfrak{a}_1, H[\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3])$ gegeben. Man bestimme für jeden der unten angegebenen NRe M_i $(i=1,\dots,5)$

1. den Durchschnitt $L \cap M_i$ und dessen Dimension,
2. den Grad m_i der Parallelität von L und M_i
3. den Verbindungsraum (L,M_i)

Alle Resultate sind in der Form $\mathfrak{r}+H[\mathfrak{c}_1,\dots,\mathfrak{c}_r]$ anzugeben

a) $M_1 = M_1(\mathfrak{a}_2, H[\mathfrak{b}_4, \mathfrak{b}_5])$,

b) $M_2 = M_2(\mathfrak{a}_3, H[\mathfrak{b}_4, \mathfrak{b}_5])$,

c) $M_3 = M_3(\mathfrak{a}_4, H[\mathfrak{b}_4, \mathfrak{b}_6, \mathfrak{b}_7])$,

d) $M_4 = M_4(\mathfrak{a}_2, H[\mathfrak{b}_4, \mathfrak{b}_6, \mathfrak{b}_7])$,

e) $M_5 = M_5(\mathfrak{a}_2, H[\mathfrak{b}_7, \mathfrak{b}_8])$.

Bezüglich der kanonischen Basis gilt:
$\mathfrak{a}_1=(1,1,1,1,0,0)$, $\mathfrak{a}_2=(1,0,1,0,1,-1)$, $\mathfrak{a}_3=(-2,-5,-2,-3,-1,-4)$, $\mathfrak{a}_4=(0,-1,0,-1,-1,-2)$,

$\mathfrak{b}_1=(1,1,0,0,0,1)$, $\mathfrak{b}_2=(0,1,1,1,0,0)$, $\mathfrak{b}_3=(0,0,0,1,1,1)$, $\mathfrak{b}_4=(1,2,1,0,-1,0)$, $\mathfrak{b}_5=(-1,1,2,3,1,0)$, $\mathfrak{b}_6=(2,2,0,-1,-1,1)$, $\mathfrak{b}_7=(1,0,0,0,1,1)$, $\mathfrak{b}_8=(0,-1,-1,-3,0,1)$.

Hinweis: Man löse die Teilaufgaben a)b) sowie c)d) jeweils im selben Rechengang.
Worauf muß man achten, um dies tun zu können? (81,83,200)

82.a) Man zeige: Eine quadratische Matrix A_n ist dann und nur dann mit allen quadratischen Matrizen B_n vertauschbar (d.h. es ist $\bigwedge_{B_n} A_nB_n = B_nA_n$), wenn A_n eine skalare Matrix, d.h. von der Gestalt $A_n = \lambda E_n$ ist.
Anleitung: Man zeige:
1. Um schon mit der speziellen Matrix $C_n := \|\delta_{ij} + \delta_{1i}\delta_{kj}\|$ ($i,j=1,\dots,n$; k fest, $1 \leq k \leq n$) vertauschbar zu sein, muß A_n bereits skalar sein.
2. Eine Skalarmatrix A_n ist mit allen Matrizen B_n vertauschbar.
Für Char K=2 müßte man den Beweis für k=1 gesondert führen. Es werde daher zur Vereinfachung Char K $\neq$ 2 angenommen. (175)

b) Welchen Automorphismen von $\mathfrak{B}_n$ ist bezüglich jeder Basis $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_n$ dieselbe Matrix A_n zugeordnet ? Welche Gestalt hat A_n ?

c) Wie kann man die Basis $\mathfrak{B}$ eines $\mathfrak{B}_n$ variieren, ohne daß sich die Matrix A_n eines beliebig vorgegebenen Endomorphismus ändert ? (175,202)

83.a) Man zeige: f ist ein Automorphismus von $\mathfrak{B}_n$ dann und nur dann, wenn 0_K nicht EW von f ist.

b) Es sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{B}_n)$. Man zeige: $\mathfrak{r}$ ist genau dann EV von f zum EW λ, wenn $\mathfrak{r}$ EV von f^{-1} zum EW λ^{-1} ist.

c) Es sei $f,g \in \mathrm{End}(\mathfrak{B}_n)$. Man zeige:
1. Ist $\mathfrak{r}$ EV von $g \circ f$ zum EW $\lambda \neq 0_K$, so ist $f(\mathfrak{r})$ EV von $f \circ g$ zum EW λ.
2. Ist $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{B}_n)$, gilt auch die Umkehrung von 1.

d) Es sei $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{B}_n)$ nilpotent mit dem Index k. Man zeige, daß alle EWe 0_K sind.

e) Man zeige: Ein einfach strukturierter Endomorphismus von $\mathfrak{B}_n$ ist genau dann ein Projektor, wenn er nur die EWe 0_K und 1_K aufweist.

f) λ sei EW eines Endomorphismus f von $\mathfrak{B}_n$. Dann heißt $\mathfrak{r}$ Hauptvektor zum EW λ, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, sodaß gilt

$$(f - \lambda \mathrm{id})^k(\mathfrak{r}) = \mathfrak{o}.$$

k heißt Stufe von $\mathfrak{r}$ (zu k = 0 gehört nur $\mathfrak{o}$, zu k = 1 gehören die EVen von λ).

Man zeige: Die Menge $\mathfrak{U}_\lambda$ aller Hauptvektoren zum EW λ bilden einen bezüglich f invarianten UR.

(150-153,209-216)

84.a) A_n und B_n seien Matrizen von einfach strukturierten Endomorphismen f,g eines Vektorraumes. Haben f und g n gemeinsame Eigenvektoren, so gilt $A_nB_n = B_nA_n$.

b) Man zeige: Zu einer gegebenen Matrix A_n, die zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist, gibt es eine von n Parametern abhängige Schar von Matrizen B_n, die gleichfalls zu Diagonalmatrizen ähnlich sind und für die gilt $A_nB_n = B_nA_n$. (207-216)

85. Die Matrix

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{Vmatrix}$$

ist diagonalisierbar. Man gebe eine von drei Parametern abhängige Menge von diagonalisierbaren Matrizen B_n an, die mit A_n vertauschbar sind. (207-216,220)

LINEARE GLEICHUNGEN UND DEREN ANWENDUNG

86. Man löse folgende Gleichungssysteme mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von GAUSS

a)
$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_4 &= 1\\ x_1-x_3+3x_4-2x_5+2x_6 &= -2\\ x_1+x_4-x_5+x_6 &= 1\\ x_2-x_3+x_4+x_5 &= -3\\ x_3-2x_4+x_5-x_6 &= 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-x_4 &= 4\\ x_1-x_3+x_5 &= 2\\ 3x_1+x_2-x_5 &= -1\\ 2x_2+x_3+3x_4-x_5 &= 0\\ 2x_1+x_3-x_4 &= 3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_5 &= 3\\ x_1+x_3+x_4+3x_5 &= 1\\ x_3+x_4+x_5 &= 1\\ 2x_2-x_3-x_4-2x_5 &= 2\\ x_1+2x_2+x_3+x_4+2x_5 &= 2 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1-x_2-x_5 &= 3\\ x_1-x_2+x_3-x_4-x_5 &= 2\\ x_3+x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(220)

87. Man löse folgende Gleichungssysteme mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von GAUSS

a)
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2-x_3+x_5 &= 4\\ x_1+x_2+x_3-x_5 &= -1\\ x_2+x_3-3x_4-x_5 &= -2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1-2x_2-3x_3+3x_4+x_5 &= 7\\ x_1-x_2-2x_3+2x_4+x_5 &= 5\\ 2x_1-2x_2-4x_3+5x_4+3x_5 &= 11\\ x_2+2x_3-x_4+x_5 &= -1\\ x_3+x_4+2x_5 &= 3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1-x_3-x_4 &= 1\\ 2x_1+x_2-2x_3-3x_4-x_5 &= 2\\ x_1-x_2-x_3+x_5 &= 1\\ x_2-x_4-x_5 &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3 &= 3\\ x_1-x_3+2x_4 &= 5\\ 4x_1+3x_2-x_4 &= -1\\ x_1-x_2+x_3-2x_4 &= -2\\ 2x_2-3x_3+x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(220)

88. Man bestimme die Lösung des Systems

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3-x_4+3x_5 &= 7\\ 3x_1-x_3-3x_4+6x_5 &= 0\\ x_1-x_2-2x_4+3x_5 &= -1\\ x_1-2x_2+2x_3-3x_4+4x_5 &= 3\\ x_2-x_3+x_4-x_5 &= -1 \end{aligned}$$

(220)

89. Man diskutiere die Lösung des Systems

$$\begin{aligned} (\lambda+1)x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda^2 + 3\lambda \\ x_1 + (\lambda+1)x_2 + x_3 &= \lambda^3 + 3\lambda^2 \\ x_1 + x_2 + (\lambda+1)x_3 &= \lambda^4 + 3\lambda^3 \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$. (218,220)

90. Man bestimme die Lösung des Systems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (t-1)x_3 &= 4t-1 \\ + 2x_2 - (3t-1)x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + (4t-1)x_3 &= 3t-3 \end{aligned}$$

in Abhängigkeit vom Paramter $t \in \mathbb{R}$. (218,220)

91. Welche Werte muß die Größe $t \in \mathbb{R}$ annehmen, damit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-tx_3 \quad\quad + 4x_5 + (t+1)x_6 &= -t \\ -3x_1-6x_2+3tx_3 \quad\quad - 12x_5 - (2t+2)x_6 &= 2t \\ 2x_1+4x_2-2tx_3 + x_4 + 10x_5 \quad\quad &= 2 \\ 2x_1+4x_2-2tx_3 - 2x_4 + 4x_5 + (6t+6)x_6 &= -4-6t \end{aligned}$$

unlösbar wird ?

Man gebe eine Paramterdarstellung der Lösungsmenge für $t = 0$ an. (218,220)

92. Man suche jene Vektoren, welche bei dem Endomorphismus des $\mathbb{R}^3$, der bezüglich der kanonischen Basis durch

a) $A_3 = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 3 \\ -2 & -4 & -2 \end{Vmatrix}$, b) $A_3 = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{Vmatrix}$

festgelegt ist, invariant bleiben. (209,220)

93. Bezüglich der kanonischen Basis ist ein Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$ durch die Matrix

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{Vmatrix}$$

gegeben. Man ermittle alle invarianten eindimensionalen

Unterräume von f. Man wähle eine Basis von $\mathbb{R}^3$, welche aus den Basen der invarianten Unterräume gebildet wird und stelle f in der neuen Basis dar. (209,220)

94. Man bestimme die Gleichungen des Nebenraumes $L(\mathfrak{a},H[\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2])$ bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^5$.
$\mathfrak{a}=(1,2,3,4,5)$, $\mathfrak{b}_1=(1,-1,0,2,1)$, $\mathfrak{b}_2=(0,-3,1,2,0)$. (222)

95. Ein Nebenraum des $\mathbb{R}^5$ wird durch die Vektoren $\mathfrak{a}_1=(1,4,3,0,-4)$, $\mathfrak{a}_2=(-1,0,4,-2,-1)$, $\mathfrak{a}_3=(2,-1,1,1,-5)$, $\mathfrak{a}_4=(2,1,2,1,-4)$, $\mathfrak{a}_5=(2,3,2,1,-5)$ aufgespannt. Man gebe seine Gleichungen bezüglich der kanonischen Basis an. (222)

96. Man bestimme die Dimension des Unterraumes $\mathfrak{U}\subset\mathbb{R}^5$, der von den Vektoren $\mathfrak{a}_1=(1,2,1,2,-3)$, $\mathfrak{a}_2=(2,6,3,2,0)$, $\mathfrak{a}_3=(2,0,0,-1,9)$, $\mathfrak{a}_4=(1,4,2,4,-9)$, $\mathfrak{a}_5=(1,-2,-1,0,3)$ erzeugt wird. Man gebe die l.A. der $\mathfrak{a}_i$ untereinander an und bestimme die Gleichungen von $\mathfrak{U}$ bezüglich der kanonischen Basis. (196,222)

97. $\mathfrak{B}=\{\mathfrak{b}_1=(1,2,3,4),\ \mathfrak{b}_2=(3,-1,2,3),\ \mathfrak{b}_3=(3,4,1,2),$
$\mathfrak{b}_4=(-1,3,-2,4)\}$ sei eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Man bestimme die Koordinaten der Vektoren $\mathfrak{r}_1=(7,10,5,8)$, $\mathfrak{r}_2=(-2,6,-6,-1)$, $\mathfrak{r}_3=(-2,8,2,9)$ bezüglich $\mathfrak{B}$.
Welcher Vektor $\mathfrak{y}$ hat die Koordinaten $\check{\mathfrak{y}}=\|1,1,1,1\|$? (163,220)

98. $\mathfrak{B}=\{\mathfrak{b}_1=(1,2,3,4),\ \mathfrak{b}_2=(2,0,1,3),\ \mathfrak{b}_3=(1,1,0,-2),$
$\mathfrak{b}_4=(3,-2,1,0)\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

a) Wie lauten die Koordinatenmatrizen der Vektoren $\mathfrak{r}=(-3,5,1,-1)$, $\mathfrak{y}=(-7,10,3,8)$ bezüglich $\mathfrak{B}$?

b) Welcher Vektor $\mathfrak{z}$ hat bezüglich $\mathfrak{B}$ die Koordinatenmatrix $\check{\mathfrak{z}}=\|1,2,-1,1\|$? (163,220)

99. Man gebe jene Basis $\mathfrak{B}$ des $\mathbb{R}^3$ an, bezüglich der die Vektoren $\mathfrak{r}_1=(1,2,3)$, $\mathfrak{r}_2=(2,3,4)$, $\mathfrak{r}_3=(2,4,5)$ die Koordinatenmatrizen
$\check{\mathfrak{r}}_1=\|3,2,1\|$, $\check{\mathfrak{r}}_2=\|5,3,1\|$, $\check{\mathfrak{r}}_3=\|3,2,2\|$ besitzen. (163,220)

100. Bezüglich der Basis $\mathfrak{b}_1=(1,-1,1,-1)$, $\mathfrak{b}_2=(0,1,0,1)$ $\mathfrak{b}_3=(1,0,-1,0)$, $\mathfrak{b}_4=(0,1,0,-1)$ hat ein dreidimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^4$ die Gleichung

$$2x_1-x_2+3x_3+5x_4 = 0.$$

Wie lauten dessen Gleichungen bezüglich der kanonischen Basis ? (184,199)

101. $\mathfrak{b}_1=(1,2,3)$, $\mathfrak{b}_2=(1,0,2)$, $\mathfrak{b}_3=(1,2,-1)$ sei eine Basis $\mathfrak{B}$ des $\mathbb{R}^3$. Man bestimme die Koordinaten von $\mathfrak{x}=(4,6,3)$ bezüglich $\mathfrak{B}$.
Welcher Vektor hat bezüglich $\mathfrak{B}$ die Koordinaten $\mathfrak{y}= \|4,5,6\|$?
Der Unterraum $\mathfrak{U}$ habe bezüglich der kanonischen Basis die Gleichung $3x_1-2x_2+x_3 = 0$. Wie lautet die Gleichung von $\mathfrak{U}$ bezüglich $\mathfrak{B}$? (184,220)

102. Im $\mathbb{R}^6$ seien die beiden Unterräume $\mathfrak{U}_1= H[\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_3]$, $\mathfrak{U}_2= H[\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3]$ gegeben. Man bestimme

a) eine Basis von $\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2$
b) eine Basis von $\mathfrak{U}_1\cap\mathfrak{U}_2$
c) man bestimme die Gleichungen von $\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2$ und $\mathfrak{U}_1\cap\mathfrak{U}_2$ bezüglich der kanonischen Basis.

$\mathfrak{a}_1=(1,1,0,0,0,1)$, $\mathfrak{a}_2=(0,1,1,1,0,0)$, $\mathfrak{a}_3=(0,0,0,1,1,1)$
$\mathfrak{b}_1=(1,2,1,0,-1,0)$, $\mathfrak{b}_2=(2,2,0,-1,-1,1)$, $\mathfrak{b}_3=(1,0,0,0,1,1)$
(64,72,197,222)

103. Im $\mathbb{R}^4$ seien die beiden Unterräume $\mathfrak{U}_1= H[\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2]$, $\mathfrak{U}_2=H[\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2]$ gegeben. Man bestimme die Gleichungen von $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2$ und $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2$ bezüglich der kanonischen Basis.
$\mathfrak{a}_1=(1,1,1,1)$, $\mathfrak{a}_2=(2,0,1,2)$; $\mathfrak{b}_1=(-1,-2,1,1)$, $\mathfrak{b}_2=(-2,-1,1,0)$
(64,72,222)

104. Ein Unterraum $\mathfrak{U} \subset \mathbb{R}^5$ ist die Hülle der Vektoren
$\mathfrak{a}_1=(1,0,2,-2,-2)$, $\mathfrak{a}_2=(2,2,0,-4,-3)$, $\mathfrak{a}_3=(1,2,-2,-2,-1)$, $\mathfrak{a}_4=(3,4,-2,-6,-4)$

a) Man gebe die Gleichungen von $\mathfrak{U}$ bezüglich der kanonischen Basis $\mathfrak{B}_0$ an

b) Man bestimme eine einfache Basis von $\mathfrak{U}$ und erweitere sie durch Hinzunahme kanonischer Basisvektoren zu einer Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathbb{R}^5$

c) Man bestimme die Gleichungen von $\mathfrak{U}$ bezüglich der neuen Basis $\mathfrak{B}$

d) Man gebe die Transformationsgleichungen für die Basistransformation $\mathfrak{B}_o \to \mathfrak{B}$ an. (100,184,222)

105. Im $\mathbb{R}^5$ sind zwei Unterräume $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ durch ihre Gleichungen bezüglich der kanonischen Basis gegeben:

$$\mathfrak{U}_1:\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4+x_5 = 0\\ 2x_1-x_2+3x_3+4x_5 = 0\end{cases} \qquad \mathfrak{U}_2:\begin{cases} 3x_1-2x_2+2x_3+x_4+x_5 = 0\\ x_1+x_3+2x_4+x_5 = 0\end{cases}$$

a) Man ermittle die Gleichungen und eine Basis von $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2$.

b) Man ermittle die Gleichungen und eine Basis von $\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2$. (225-227)

106. Im $\mathbb{R}^3$ sind zwei Nebenräume L,M durch ihre Gleichungen bezüglich der kanonischen Basis gegeben:

$$L\ldots\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5\\ x_2 + x_3 = 5\end{cases} \qquad M\ldots\begin{cases} x_1 + x_2 = 3\\ 2x_1 + x_3 = 5\end{cases}$$

Man ermittle die Gleichungen von $L \cap M$ und (L,M)

(81,83,225-227)

107. Im $\mathbb{R}^6$ sei der NR L durch folgende l.u. Gleichungen gegeben

$$L:\quad \begin{aligned} x_1-x_2-x_3+x_4 &= 3,\\ x_1-2x_3+x_4+x_5-x_6 &= 4,\\ x_2+x_3-x_5-x_6 &= 1\end{aligned}$$

Man ermittle für folgenden NR M_i $(i=1,\ldots,4)$

1. die Gleichungen von $L\cap M_i$
2. die Gleichungen von (L,M_i)
3. den Grad m_i der Parallelität von L und M_i

a) M_1:
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+4x_4 &= 4\\ x_2-x_3-3x_4 &= -1\\ x_2-x_6 &= 1\\ x_3-x_5 &= 0\end{aligned}$$

b) M_2:
$$\begin{aligned} x_1+2x_6 &= 6\\ x_2-x_4 &= -1\\ x_3-x_4+3x_6 &= 3\\ x_5+2x_6 &= 2\end{aligned}$$

c) M_3: $x_1-2x_2+4x_4 = -1$
$x_2-x_3-3x_4 = 0$
$x_2-3x_4-x_5 = 1$
$x_2-x_6 = 1$

d) M_4: $x_1+2x_2-2x_4-2x_5-2x_6 = 3$
$x_2-x_3+x_5 = 0$

108. Ein Endomorphismus f des $\mathbb{R}^4$ hat bezüglich der kanonischen Basis die Matrix

$$A_4 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & -1 & 1 \end{Vmatrix} .$$

Man bestimme die Gleichungen des Kerns von f und gebe für ihn sowie für das Bild $f(\mathbb{R}^4)$ eine Basis an. (127,172,186,218)

109. Der Abbildung $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ entspricht bezüglich der kanonischen Basen dieser Räume die Matrix

$$A_{43} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix} .$$

Man ermittle die zum Vektor $\mathfrak{x}'=(x_1',x_2',x_3') \in \mathbb{R}^3$ gehörige Faser von f in $\mathbb{R}^4$ und gebe von ihr eine Parameterdarstellung an. (137)

110. Der Abbildung $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ entspricht, bezogen auf die kanonische Basen dieser Räume die Matrix

$$A_{34} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{Vmatrix} .$$

Man ermittle die Gleichungen von $f(\mathbb{R}^3)$, kn f sowie von $f^-(\mathfrak{U})$, wobei $\mathfrak{U}$ der von (3,2,-1,4) (1,1,-1,2) aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist. (127,137,172,218)

111. Man gebe die Matrix der linearen Abbildung

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \mapsto (\lambda_1,\lambda_2)$$

a) bezüglich der kanonischen Basen dieser Vektorräume,

b) bezüglich der Basen (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1) und (1,1), (1,-1) an. (165,172,184)

112. Man bestimme bezüglich der kanonischen Basis die Matrix A_3 jenes Endomorphismus des $\mathbb{R}^3$, der drei gegebene Vektoren in drei andere gegebene überführt

a)	$(1,2,3) \mapsto (3,2,1)$	b)	$(1,2,3) \mapsto (3,2,1)$
	$(2,3,4) \mapsto (5,3,1)$		$(2,3,4) \mapsto (5,3,1)$
	$(2,4,5) \mapsto (3,2,2)$		$(2,4,5) \mapsto (2,1,0)$
c)	$(1,2,3) \mapsto (3,2,1)$	d)	$(1,2,3) \mapsto (3,2,1)$
	$(2,3,4) \mapsto (5,3,1)$		$(2,3,4) \mapsto (5,3,1)$
	$(1,1,1) \mapsto (3,2,2)$		$(1,1,1) \mapsto (2,1,0)$

Man löse die Fälle a),b) und c),d) jeweils im selben Rechenschema. Man diskutiere die vier Fälle. (165,172,220)

113. $f \in \operatorname{End} \mathbb{R}^3$ sei festgelegt durch

$(1,2,-1) \mapsto (4,3,2)$

$(3,0,1) \mapsto (6,-1,4)$

$(0,2,1) \mapsto (2,1,3)$

Man gebe die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis an. (165,172,220)

114. Der Endomorphismus f des $\mathbb{R}^4$ hat bezüglich der Basis $b_1=(1,1,0,1)$, $b_2=(0,1,1,0)$, $b_3=(1,0,-1,2)$, $b_4=(0,1,0,1)$ die Matrix

$$A_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Wie lautet die Matrix $\bar{A}_4$ von f bezüglich der kanonischen Basis ? (184)

115. Es sei f die lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (x,y) \mapsto x+iy$. Ferner seien $\mathfrak{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ und $\mathfrak{B}_2 = \{(1,1),(1,0)\}$ zwei Basen von $\mathbb{R}^2$, $\mathfrak{B}' = \{1,i\}$ sei eine Basis von $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$.
Man gebe jene Matrizen an, welche $f(\mathfrak{B}_i) = \mathfrak{B}'$ $(i=1,2)$ entsprechen. Man gebe die Transformationsgleichungen für die Koordinaten des Vektors $\mathfrak{x}$ an, die der Abbildung $\mathfrak{B}_i \to \mathfrak{B}'$ entsprechen. (165,185)

116. Es sei $\{\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3\}$ die kanonische Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$. Eine lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ sei durch die Bilder $f(\mathfrak{e}_1)=(1,-3,2,4)$, $f(\mathfrak{e}_2)=(5,-3,0,2)$, $f(\mathfrak{e}_3)=(-2,0,1,1)$ der $\mathfrak{e}_i$ festgelegt. Man bestimme Kern, Rang und Defekt von f. Man bestimme die Gleichungen von kn f und $f(\mathbb{R}^3)$ bezüglich der kanonischen Basen. Man bestimme Basen in $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$, bezüglich derer die Matrix von f Normalform annimmt. (124,127,188)

117. Im $\mathbb{R}^3$ sei $\mathfrak{U} = H[\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2]$, $\mathfrak{U}' = H[\mathfrak{b}_3]$.
Man gebe die Matrix des Projektors auf $\mathfrak{U}$ in Richtung von $\mathfrak{U}'$ bezüglich der kanonischen Basis an.
$\mathfrak{b}_1=(1,0,1)$, $\mathfrak{b}_2=(2,1,0)$, $\mathfrak{b}_3=(0,1,-1)$ (151-153)

118. $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ sei bezüglich der kanonischen Basis die Matrix

$$\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$$

zugeordnet. Man zeige, daß f ein Projektor ist.
Man lege $f(\mathbb{R}^3)$ und kn f durch Angabe ihrer Gleichungen fest. (151-153)

119. Es sei $\mathfrak{b}_1=(2,-1,1)$, $\mathfrak{b}_2=(1,-1,1)$, $\mathfrak{b}_3=(4,-3,2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Man gebe die Projektion $\mathfrak{y}=(y_1,y_2,y_3)$ des Vektors $\mathfrak{x}=(x_1,x_2,x_3)$ auf $\mathfrak{U} = H[\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2]$ in Richtung von $\mathfrak{U}' = H[\mathfrak{b}_3]$ an. Man bestimme die Matrix des Projektors bezüglich der kanonischen Basis. (151-153)

120. Man projiziere den $\mathbf{R}^4$ in Richtung des von (1,2,0,1) aufgespannten Unterraumes auf den von (1,1,0,1), (2,1,1,0), (0,2,2,1) aufgespannten Unterraum $\mathfrak{U}$.
Man bestimme die Matrix des Projektors bezüglich der kanonischen Basis. Man gebe die Projektion $\mathfrak{y}= (y_1,y_2,y_3,y_4)$ des Vektors $\mathfrak{x}= (x_1,x_2,x_3,x_4)$ an. (151-153)

121. Es sei $\mathfrak{B}_3 = H[\mathfrak{B}] = H[\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3]$, $K = \mathbf{R}$. Bezüglich $\mathfrak{B}$ habe der Endomorphismus f die Matrix

$$A_3 = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} -10 & 7 & 17 \\ 8 & -2 & -10 \\ -6 & 6 & 12 \end{Vmatrix}$$

Man zeige:

a) $\operatorname{kn} f = \operatorname{kn} f^2$

b) $\mathfrak{B}_3 = \operatorname{kn} f \oplus f(\mathfrak{B}_3)$

c) f ist kein Projektor (151-153)

DETERMINANTEN UND DEREN ANWENDUNG

122. Man zeige, daß die auf die kanonische Basis bezogene Bilinearform über $\mathbf{R}^3$

$\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = x_1y_1+2x_1y_2+3x_1y_3-x_2y_1-2x_2y_3+2x_3y_2+x_3y_3$

ausgeartet ist. Man gebe Vektoren $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ an, für die gilt

$$\bigwedge_{\mathfrak{y}} \beta(\mathfrak{a},\mathfrak{y}) = 0, \quad \bigwedge_{\mathfrak{x}} \beta(\mathfrak{x},\mathfrak{b}) = 0.$$ (228-245)

123. Eine Bilinearform $\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ über $\mathbf{R}^4$ hat bezüglich der kanonischen Basis die Matrix

$$B_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Man bestimme:

a) alle $\mathfrak{y}$, für welche bei vorgegebenem $\mathfrak{x}$ gilt $\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0$,

b) alle $\mathfrak{x}$, für welche bei vorgegebenem $\mathfrak{y}$ gilt $\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0$.

c) Man ermittle den Wert von $\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ für $\mathfrak{x}=(1,2,3,4)$, $\mathfrak{y}=(4,3,2,1)$

d) Man ermittle alle $\mathfrak{x}$ mit $\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y})= -2$ für $\mathfrak{y}=(1,-1,0,-1)$

(228-245)

124. a) Es sei $\mathfrak{B}_n = H[\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n]$ und $\mathfrak{B}'_{n'} = H[\mathfrak{b}'_1,\dots,\mathfrak{b}'_{n'}]$.
Man zeige:
Es gibt genau eine Bilinearform $\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{x}')$ über $\mathfrak{B}_n \times \mathfrak{B}'_{n'}$, sodaß für die vorgegebene Menge $\{\lambda_{ij} \mid \lambda_{ij} \in K; \quad i=1,\dots,n; \quad j=1,\dots,n'\}$ von nn' Skalaren λ_{ij} gilt: $\beta(\mathfrak{b}_i,\mathfrak{b}'_j) = \lambda_{ij}$.

b) Es sei $\mathfrak{B}_n = H[\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n]$, $\mathfrak{B}'_{n'} = H[\mathfrak{b}'_1,\dots,\mathfrak{b}'_{n'}]$. Man zeige, daß die nn' Bilinearformen $\mathfrak{w}_{pq}$ $(p=1,\dots,n;\ q=1,\dots,n')$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{w}_{pq}(\mathfrak{b}_i,\mathfrak{b}'_j) = \delta_{pi}\delta_{qi}$ eine Basis des Vektorraumes aller Bilinearformen über $\mathfrak{B}_n \times \mathfrak{B}'_{n'}$ bilden. (241)

125. a) Es sei $\mathfrak{B}$ ein Vektorraum über dem Körper K und $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{B},K)$ und $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}$. Man zeige: Die durch

$$\beta: \mathrm{Hom}(\mathfrak{B},K) \times \mathfrak{B} \to K$$
$$(f,\mathfrak{x}) \mapsto \beta(f,\mathfrak{x}) := f(\mathfrak{x})$$

definierte Abbildung β ist eine Bilinearform.

b) $\mathfrak{B}^{(i)}$ $(i=1,\dots,r)$ seien Vektorräume über K, ferner sei $f_i \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{B}^{(i)},K)$ und $\mathfrak{x}_i \in \mathfrak{B}^{(i)}$. Man zeige: Die durch

$$\mu: \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{r} \mathfrak{B}^{(i)} \to K$$
$$(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_r) \mapsto \mu(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_r) := f_1(\mathfrak{x}_1)\dots f_r(\mathfrak{x}_r)$$

definierte Abbildung ist eine Multilinearform.

c) Es seien $\mathfrak{B}^{(i)}$, $\mathfrak{W}^{(i)}$ $(i=1,\dots,r)$ Vektorräume über K und $f_i \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{B}^{(i)},\mathfrak{W}^{(i)})$ sowie $\mathfrak{x}_i \in \mathfrak{B}^{(i)}$; ferner sei

$$\mu: \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{r} \mathfrak{W}^{(i)} \to K$$

eine Multilinearform. Man zeige, daß auch

$$\bar{\mu}: \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{r} \mathfrak{B}^{(i)} \to K$$
$$(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_r) \mapsto \bar{\mu}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_r) := \mu(f_1(\mathfrak{x}_1),\dots,f_r(\mathfrak{x}_r))$$

eine Multilinearform ist. (59,142,235,246,368)

126. Es seien $\mathfrak{V}^{(1)},\mathfrak{V}^{(2)},\ldots,\mathfrak{V}^{(r)}$ $(r\geq 2)$ Vektorräume über K. Ferner sei $M_{r-1}(\mathfrak{V}^{(1)},\ldots,\mathfrak{V}^{(r-1)})$ die gemäß **Vorl.Nr. 241.** mit Vektorraumstruktur versehene Menge der (r-1)-fachen Multilinearformen über $\mathfrak{V}^{(1)}\times\ldots\times\mathfrak{V}^{(r-1)}$.

a) Man zeige: Für jedes $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}^{(r)}, M_{r-1})$ und $\mathfrak{r}_i \in \mathfrak{V}^{(i)}$ ist die Abbildung

$$\mu: \quad \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{r} \mathfrak{V}^{(i)} \to K$$

$$(\mathfrak{r}_1,\ldots,\mathfrak{r}_{r-1},\mathfrak{r}_r) \mapsto \mu(\mathfrak{r}_1,\ldots,\mathfrak{r}_{r-1},\mathfrak{r}_r) := f(\mathfrak{r}_r)(\mathfrak{r}_1,\ldots,\mathfrak{r}_{r-1})$$

eine (von f abhängige) Multilinearform (rekursive Herleitung von Multilinearformen).

b) Durch a) wird jedes $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}^{(r)}, M_{r-1})$ auf eine Multilinearform μ aus der (mit Vektorraumstruktur versehenen) Menge $M_r(\mathfrak{V}^{(1)},\ldots,\mathfrak{V}^{(r)})$ der Multilinearformen über $\mathfrak{V}^{(1)}\times\ldots\times\mathfrak{V}^{(r)}$ abgebildet. Man zeige, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}^{(r)}, M_{r-1}) &\to M_r \\ f &\mapsto \varphi(f) = \mu \end{aligned}$$

linear und bijektiv, also ein Isomorphismus ist. (246)

127.a) Eine quadratische Matrix lasse sich auf **folgende Art** in Teilmatrizen zerlegen

$$A_n = \left\| \begin{array}{c|c} B_k & D_{k,n-k} \\ \hline O_{n-k,k} & C_{n-k} \end{array} \right\| \quad (O_{n-k,k}\ldots \text{ Nullmatrix})$$

Man zeige: $\det A_n = \det B_k \cdot \det C_{n-k}$ (280)

b) Man zeige für die Summe zweier n-zeiligen Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cdots & a_{1,k-1} & a_{1k}+b_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\cdots & a_{n,k-1} & a_{nk}+b_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1}\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}\cdots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$
+\begin{vmatrix}
a_{11}\cdots & a_{1,k-1} & b_{1k} & a_{1,k+1}\cdots & a_{1n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{n1}\cdots & a_{n,k-1} & b_{nk} & a_{n,k+1}\cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

Man formuliere die analoge Regel für Zeilen.

128. Man stelle die Determinante

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}+x & \cdots & a_{1n}+x\\
\vdots & & \vdots\\
a_{n1}+x & \cdots & a_{nn}+x
\end{vmatrix}
$$

als Polynom in x dar, dessen Koeffizienten wieder Determinanten sind.
Man betrachte auch den Sonderfall $a_{ik} = a_i\delta_{ik}$
<u>Hinweis:</u> Man verwende die Verallgemeinerung von Beispiel 127.b. (276–284)

129. Man bestimme den Rang der Matrix

$$
\begin{Vmatrix}
5-9t & -4 & -2\\
-4 & 5-9t & -2\\
-2 & -2 & 8-9t
\end{Vmatrix}
$$

in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$. Man verwende den Satz, daß eine quadratische Matrix genau dann singulär ist, wenn ihre Determinante verschwindet. (276–284)

130. Man berechne den Wert der Determinante

$$
\begin{vmatrix}
2+x & 3+x & 1+x & -x\\
-3+x & x & 4+x & 3-x\\
1+x & -2+x & -1+x & 2-x\\
-2+x & 2+x & -3+x & -1-x
\end{vmatrix}
$$

(276–284)

131. Man beweise für die n-zeilige Determinante

$$
\begin{vmatrix}
a+b & ab & 0 & & & \\
1 & a+b & ab & & 0 & \\
0 & 1 & a+b & \ddots & & \\
& & \ddots & \ddots & a+b & ab\\
& 0 & & & 1 & a+b
\end{vmatrix}
= \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}
$$

./.

Anleitung: Induktion über n

Wie lautet das Ergebnis im Falle a = b ? (276-284)

132. Determinante von VANDERMONDE (1735-1796). Man zeige:

$$\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_i - x_j), \quad i,j=1,\ldots,n$$

Anleitung: Man ziehe die j-te Zeile von der i-ten Zeile ab und zeige, daß sich nunmehr der Faktor $(x_i - x_j)$ aus jedem Element der i-ten Zeile herausheben läßt. (276-284)

133. Man zeige:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = (x_1+x_2+x_3+x_4)\cdot(x_1+x_2-x_3-x_4)\cdot (x_1-x_2+x_3-x_4)\cdot(x_1-x_2-x_3+x_4)$$

Man stelle den Flächeninhalt F des Dreieckes und des Sehnenviereckes bei gegebenen Seiten mit Hilfe obiger Determinante dar. Bekanntlich gilt:

Dreieck ... $16\ F^2=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$

Sehnenviereck ... $16\ F^2=(a+b++c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)$ (276-284)

134. Man gebe für den Wert der Determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

eine Rekursionsformel an. Welche Werte nimmt D_n für a=1 an ? (276-284)

135. Man berechne den Wert der Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

(276-284)

136. Man zeige für folgende n-reihige Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b].(a-b)^{n-1}$$

(276-284)

137. Gegeben sei die Determinante

$$A_n = \begin{vmatrix} r_1 & a & a & \cdots & a \\ b & r_2 & a & \cdots & a \\ b & b & r_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & r_n \end{vmatrix} \qquad a \neq b$$

Man zeige: Ist $p(x)$ das Polynom

$$p(x) = (r_1-x)(r_2-x) \ . \ . \ . \ (r_2-x),$$

so hat die Determinante A_n den Wert

$$A_n = \frac{a.p(b) - b.p(a)}{a - b} .$$

Anleitung: Man subtrahiere von jedem Element von A_n die Unbestimmte x und verwende das Ergebnis von Beispiel 128, daß nämlich die so gewonnene neue Determinante ein in x linearer Ausdruck $l(x)$ ist, dessen Koeffizienten durch Angabe der beiden Werte $l(a)$ und $l(b)$ bestimmt sind.

(276-284)

138. Eine Determinante der Bauart

$$Z(a_1,\ldots,a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

über dem algebraisch abgeschlossenen Körper K heißt Zirkulante. Ist p(x) das Polynom $p(x)= a_1+a_2x +\ldots+ a_nx^{n-1}$ und sind $\omega_1,\ldots,\omega_n$ die n-ten Einheitswurzeln (d.h. Lösungen der Gleichung $x^n-1_K = 0_K$), so gilt für den Wert der Zirkulante

$$Z(a_1,\ldots,a_n)=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{n} p(\omega_i)$$

Man zeige dies.

Anleitung: Man multipliziere die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \cdots & \omega_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

mit $Z(a_1,\ldots,a_n)$. (276-284)

139. Einer Determinante der Bauart

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{n+1} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{n+2} \\ \vdots & & & & \\ x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{2n-1} \end{vmatrix}$$

heißt HANKEL'sche Determinante (Hermann HANKEL, 1839-1873) Man zeige: Die Determinante verschwindet, wenn $x_1,\ldots,x_{2n-1}$ aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen ($n>2$) oder geometrischen Folge sind. (276-284)

140. Es sei $A_n = \|a_{ij}\|_n$ eine singuläre quadratische Matrix über $\mathbb{R}$. Man zeige: Ist $B_n := \|\text{adj } a_{ij}\|_n$ so gilt rg $B_n = 0$ oder rg $B_n = 1$.

Anleitung: Man unterscheide die Fälle rg $A_n < n-1$ und rg $A_n = n-1$ und beachte Vorl.Nr. 286.und 287.

Hinweis zum Fall rg $A_n = n-1$: Nach Vorl.Nr. 161. hat das durch

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \qquad i=1,\dots,n \qquad (*)$$

definierte Gleichungssystem einen eindimensionalen Unterraum als Lösungsmenge. Ist $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ ein Basisvektor des Lösungsraumes, so muß es n Skalare $\rho_1,\dots,\rho_n$ geben, sodaß gilt

$$\rho_i\sigma_j = \text{adj } a_{ij} \qquad i,j=1,\dots,n$$

da nach Vorl.Nr. 284.c jeder Vektor

$(\text{adj } a_{k1}, \text{adj } a_{k2},\dots,\text{adj } a_{kn}) \in \mathbb{R}^n \qquad k=1,\dots,n$

eine Lösung von (*) darstellt. (276-284)

141. Sei $A_n = \|a_{ij}\|_n$ eine Matrix über $\mathbb{R}$. Man sagt, die Matrix

$$R_{n+1} := \left\| \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ \hline y_1 & \cdots & y_n & z \end{array} \right\|$$

gehe aus A_n durch Ränderung hervor. Man nennt R_{n+1} in diesem Zusammenhang geränderte Matrix. Man zeige:

a) $\det R_{n+1} = z.\det A_n - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j.(\text{adj } a_{ij})$

b) Ist $\det A_n = 0$, so lassen sich Skalare $\rho_1,\dots,\rho_n;\ \sigma_1,\dots,\sigma_n$ finden, sodaß gilt

$$\det R_{n+1} = -\Big(\sum_{i=o}^{n} \rho_i x_i\Big).\Big(\sum_{j=o}^{n} \mu_j y_j\Big)$$

Man beachte Beispiel Nr.140. (276-284)

142. $p(X) := \sum_{i=o}^{n} a_i X^i$ und $q(X) := \sum_{j=o}^{m} b_j X^j$ seien Polynome über K (Char K = 0). Man zeige: p(X) und q(X) besitzen genau dann einen gemeinsamen Teiler, wenn das lineare Glei-

chungssystem (m+n Gleichungen, m+n Unbekannte)

$$\sum_{i=o}^{n} a_i x_{i+k} = 0 \qquad k = 0,1,\ldots,m-1$$

$$\sum_{j=o}^{m} b_j x_{j+l} = 0 \qquad l = 0,1,\ldots,n-1$$

nichttriviale Lösung besitzt. Die Determinante dieses linearen Gleichungssystems heißt "Resultante" der beiden Polynome.

Hinweis: Man identifiziere $x_{i+k} := X^{i+k}$, $x_{j+l} := X^{j+l}$

Man überprüfe mit Hilfe ihrer Resultante die beiden Polynome

$$p(X) = X^3 - X^2 - X - 2$$
$$q(x) = X^2 - 3X + 2$$

auf gemeinsame Nullstellen. Man gebe die gemeinsamen Nullstellen explizit an (EUKLIDISCHER Algorithmus!) (276-284)

143. Man zeige: Das Polynom $p(X) = \sum_{i=o}^{n} a_i X^i$ hat genau dann mehrfache Teiler, wenn die Resultante von p(X) und der Ableitung $p'(X) := \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$ verschwindet. Die Resultante von p(X) und p'(X) heißt "Diskriminante" von p(X). Man bestimme die Diskriminanten von

a) $p(X) := X^2 + aX + b$

b) $p(X) := X^3 + aX^2 + bX + c$ (276-284)

144. Gegeben seien die Gleichungen zweier Kegelschnitte:

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 = 0,$$
$$b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x + b_5y + b_6 = 0.$$

Um deren Schnittpunkte zu ermitteln, kann man folgendermaßen vorgehen: Man ordnet beide Gleichungen nach Potenzen von x:

$$A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0$$
$$B_1x^2 + B_2x + B_3 = 0 \qquad A_i, B_j \text{ abhängig von } y$$

Nach Beispiel 142 muß die Resultante dieser Polynome in x für die Schnittpunkte verschwinden. In vorliegendem

Zusammenhang wird die Resultante auch als "Eliminante" bezeichnet. Sie stellt ein Polynom 4.Grades in y dar. Man bestimme nach dieser Methode die Schnittpunkte der Kegelschnitte mit den Gleichungen

$$x^2 + 4xy - 2y^2 - 3x + 2 = 0$$
$$x^2 + 10xy - 6y^2 - 3x + 4y + 2 = 0. \qquad (276\text{-}284)$$

145. Es seien $\mathfrak{B}_n$ ein Vektorraum über K (Char K = 0), $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{B}_n)$ und $\Delta(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_n)$ eine Determinantenform auf $\mathfrak{B}_n$. Man zeige:

a) $\Delta_1(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_n) := \sum_{i=1}^{n} \Delta(\mathfrak{x}_1,\ldots,f(\mathfrak{x}_i),\ldots,\mathfrak{x}_n)$ ist gleichfalls eine Determinantenform, <u>die aber ausgeartet sein kann,</u> für welche also Vorl.Nr.260.b. nicht notwendig gilt. Dann existiert (Vorl.265.) ein Skalar $\lambda \in K$, sodaß gilt $\Delta_1(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_n) = \lambda.\Delta(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_n)$.

b) λ ist, unabhängig von der Wahl von Δ, durch f allein eindeutig bestimmt. Man nennt λ die <u>Spur von f</u> und schreibt

$$\mathrm{sp}(f) = \lambda.$$

Daher gilt

$\Delta_1(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_n) = \mathrm{sp}(f).\Delta(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_n)$

c) Die Abbildung

$$\mathrm{sp}: \mathrm{End}(\mathfrak{B}_n) \to K$$
$$f \mapsto \lambda = \mathrm{sp}(f)$$

ist linear.

Ist $f \in \mathrm{kn}\ \mathrm{sp}$, so heißt f <u>spurfrei.</u> (260-267)

146. Es sei $f, g \in \mathrm{End}(\mathfrak{B}_n)$. Dann gilt für die Spuren dieser Endomorphismen

$$\mathrm{sp}\ (g \circ f).\ \det g = \det g.\ \mathrm{sp}(f \circ g)$$

[und natürlich analog

$$\mathrm{sp}\ (f \circ g).\ \det f = \det f.\ \mathrm{sp}(g \circ f)]$$

<u>Anleitung:</u> In den Definitionen von Beispiel 145. ersetze man $\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_n$ durch $g(\mathfrak{x}_1),\ldots,g(\mathfrak{x}_n)$ und beachte Definition 268. der Vorlesung. (260-267,268-276)

147. Man zeige für $f, g \in \mathrm{End}(\mathfrak{B}_n)$:

$$sp(g \circ f) = sp\,(f \circ g) \qquad (*)$$

Anleitung: Man beachte Beispiel 146. Ist g kein Automorphismus, so wähle man ein Skalar λ, welches kein Eigenwert von g ist und ersetze g durch $(g - \lambda id)$ und bilde den Ausdruck (*)

Achtung: I.a. gilt

$$sp\,(h \circ g \circ f) \neq sp\,(h \circ f \circ g)$$

Gegenbeispiel: $hog = zo$, $hof \neq zo$ (260-276)

148. Es sei $A_n = \| a_{ij} \|$ die Matrix von $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{B}_n)$ bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$. Man definiert

$$sp(A_n) := sp(f)$$

Man drücke sp(f) als Spur der Matrix A_n aus.
(Vorl.295.) (260-276)

149. Gegeben seien n-1 l.u. homogene Gleichungen in den n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = o \qquad (i=1,\dots,n-1)$
Man zeige:

$$x_1 : \dots : x_i : \dots : x_n =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} : \dots : (1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1}, & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,i-1}, & a_{n-1,i+1} & \cdot & a_{n-1,n} \end{vmatrix} :$$

$$: \dots : (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$ (288)

KLASSIFIKATION VON ENDOMORPHISMEN EINES $\mathfrak{B}_n$

150. $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ sei durch die Matrix

$$A_4 = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$$

bezüglich der kanonischen Basis gegeben.

a) Man ermittle das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von f.

b) Man gebe die Eigenvektoren von f an und zeige, daß man aus ihnen eine Basis von $\mathbb{R}^4$ wählen kann,

c) Man führe A_4 durch eine Ähnlichkeitstransformation in eine Diagonalmatrix über. (292-299)

151. Einem Endomorphismus f von $\mathbb{R}^3$ entspricht bezüglich der kanonischen Basis die Matrix

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$$

a) Welche Werte muß der Parameter $t \in \mathbb{R}$ erhalten, damit A_3 zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist ?

b) Man führe die Transformation auf Diagonalform durch. (292-299)

152. Ein Endomorphismus f von $\mathbb{R}^3$ ist bezüglich der kanonischen Basis durch die Matrix

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -6 & 3 & 5 \end{Vmatrix}$$

bestimmt.

a) Man zeige, daß f einfach strukturiert ist

b) Man bestimme die Ähnlichkeitstransformation $X_3\ A_3\ X_3^{-1} = D_3$, (D_3 ... Diagonalmatrix). (292-299)

153. Ein Endomorphismus f des $\mathbb{R}^3$ hat bezüglich der kanonischen Basis die Matrix

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{Vmatrix}$$

a) Man zeige, daß f einfach strukturiert ist

b) Man gebe eine Basis an, bezüglich der die Matrix von f Diagonalform hat

c) Man gebe die b) entsprechende Diagonalmatrix an. (292-299)

154. Bezüglich der kanonischen Basis entspreche dem Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ die Matrix

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -2 \\ -8 & 7 & -6 \end{Vmatrix}$$

Man zeige, daß f einfach strukturiert ist und gebe eine Basis aus Eigenvektoren an. (292-299)

155. $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ sei durch die Matrix

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$$

bezüglich der kanonischen Basis gegeben.

a) Man ermittle das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von f

b) Man gebe die Eigenvektoren von f an und wähle aus ihnen eine Basis von $\mathbb{R}^3$

c) Man führe A_3 durch eine Ähnlichkeitstransformation $X_3\, A_3\, X_3^{-1} = D_3$ in eine Diagonalmatrix D_3 über. (292-299)

156. Bezüglich der kanonischen Basis ist durch

$$A_4 = \begin{Vmatrix} 3 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 \end{Vmatrix}$$

ein Endomorphismus von $\mathbb{C}^4$ festgelegt. Man bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren und gebe eine zu A_4 ähnliche Diagonalmatrix an. (292-299)

157. Man zeige, daß die Matrizen

a) $A_3 = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$, $B_3 = \begin{Vmatrix} 10 & 2 & -6 \\ -12 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$, b) $A_3 = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$, $B_3 = \begin{Vmatrix} -11 & -12 & -4 \\ 15 & 16 & 5 \\ -9 & -9 & -2 \end{Vmatrix}$,

c) $A_3 = \begin{Vmatrix} -9 & -8 & 0 \\ 12 & 10 & -1 \\ -7 & -5 & 2 \end{Vmatrix}$, $B_3 = \begin{Vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 9 & -7 & 6 \end{Vmatrix}$,

ähnlich sind. Man gebe eine Ähnlichkeitstransformation an, die A_3 nach B_3 überführt. (292-299,331-347)

158. Ein Endomorphismus f des reellen $\mathfrak{V}_n$ sei bezüglich einer beliebigen Basis durch seine Matrix

$$A_n = \| 1 - \delta_{ij} \|_n$$

gegeben.
Man zeige, daß f einfach strukturiert ist und gebe Eigenwerte und eine Basis aus Eigenvektoren an. (292-299)

159. Es seien f,g Endomorphismen eines $\mathfrak{V}_n$ über einem <u>algebraisch abgeschlossenen</u> Körper K. Gilt $g \circ f = f \circ g$, so besitzen g und f mindestens einen gemeinsamen Eigenvektor.
<u>Anleitung:</u> Es sei $f(\mathfrak{x}) = \lambda\mathfrak{x}$. Man zeige zunächst

$$(f \circ g^i)(\mathfrak{x}) = \lambda\, g^i(\mathfrak{x}) \qquad i = 0,1\ldots$$

Es seien $\mathfrak{x}, g^1(\mathfrak{x}), \ldots, g^{k-1}(\mathfrak{x})$ l.u., $g^k(\mathfrak{x})$ von den genannten Vektoren l.a. Dann ist $\mathfrak{U} = H[\mathfrak{x}, g(\mathfrak{x}), \ldots, g^{k-1}(\mathfrak{x})]$ unter g invariant und g besitzt in $\mathfrak{U}$ einen Eigenvektor.
(202-212,292-299)

160. Man zeige: Zu jedem Endomorphismus f eines Vektorraumes $\mathfrak{V}_n$ über einem <u>algebraisch abgeschlossenen</u> Körper K läßt sich eine Basis finden, bezüglich der die Matrix A_n von f untere Dreieckform aufweist:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{32} & & a_{nn} \end{matrix} \right\|$$

<u>Anleitung:</u> Induktion über die Dimension n,
Ist $\mathfrak{b}_1$ ein Eigenvektor von f, so wähle man einen (n-1)-dimensionalen Unterraum $\mathfrak{U} \subset| \mathfrak{V}_n$ mit $\mathfrak{V}_n = H[\mathfrak{b}_1] \oplus \mathfrak{U}$.
Stellt f_1 den Projektor von $\mathfrak{V}_n$ auf $\mathfrak{U}$ in Richtung von $H[\mathfrak{b}_1]$ dar, so ist $f_2 := f_1 \circ f$ ein Endomorphismus von $\mathfrak{U}$.
In $\mathfrak{U}$ existiert daher nach Induktionsvoraussetzung eine Basis der angegebenen Art. (151,202-212,292-299)

161. Ein Endomorphismus f des $\mathbb{C}^3$ habe bezüglich der kanonischen Basis die Matrix

$$A_3 = \begin{Vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 8 & 0 & 5 \end{Vmatrix}$$

Man suche eine Basis, bezüglich der f eine untere Dreiecksmatrix entspricht. (292-299)

162. Welche der beiden folgenden Matrizen läßt sich durch eine Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalform reduzieren ? Warum ist gegebenenfalls diese Transformation nicht möglich ?

a) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$, b) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$ (292-299)

163. Im $\mathfrak{V}_4$ hat ein Endomorphismus f bezüglich einer gegebenen Basis die Matrix

$$A_4 = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Man suche eine neue Basis so, daß f eine Matrix in Normalform entspricht, wenn

a) $K = \mathbb{Q}$, b) $K = \mathbb{C}$ ist. (338-347)

164. Im $\mathfrak{V}_3$ über $\mathbb{Q}$ hat ein Endomorphismus f bezüglich einer gegebenen Basis die Matrix

$$A_3 = \begin{Vmatrix} -4 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 5 \end{Vmatrix}$$

Man suche eine Basis so, daß f eine Matrix in Normalform entspricht. (338-347)

165. Man gebe die JORDAN'sche Normalform folgender Matrix über $\mathbb{C}$ an:

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{Vmatrix} 6 & -2 & 8 & 0 & 10 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 4 & -2 & 8 & -2 \end{Vmatrix}$$ (338-347)

166. Man bestimme die Normalform der Matrix

$$A_4 = \begin{Vmatrix} 17 & -8 & -12 & 14 \\ 46 & -22 & -35 & 41 \\ -2 & 1 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{Vmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ und gebe eine Matrizen-Ähnlichkeit an, welche A_4 in die Normalform überführt. (338-347)

167. Im reellen $\mathfrak{B}_4$ sei ein Endomorphismus durch seine Matrix

$$A_4 = \begin{Vmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$$

gegeben. Man führe eine neue Basis so ein, daß die neue Matrix der Selbstabbildung eine Normalform

a) gemäß Vorl.Nr.332.

b) gemäß Vorl.Nr.344.

annimmt.

Hinweis: Man beachte, daß sich ein Polynom 4.Grades über $\mathbb{R}$ stets in zwei quadratische Polynome über $\mathbb{R}$ zerlegen läßt. (338-347)

*)

168. Man gebe alle Normalformen von Endomorphismen des reellen $\mathfrak{B}_3$ an (7 Typen excl. der Identität)

Anleitung: Man beachte, daß das charakteristische Polynom entweder drei (eventuell mehrfach zählende) Faktoren 1.Grades oder einen Faktor 1. und einen Faktor 2.Grades hat. (338-347)

---

*) 167.A, 167.B. siehe Ergänzungen S.64.u.65

169. Man gebe alle Automorphismen des reellen $\mathfrak{B}_4$ durch die Normalformen ihrer Matrizen an (20 Typen excl. der Identität)(vgl.Beispiel 168). (338-347)

170. Gegeben sei die Matrix

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

Man berechne $A_3^4 - 4A_3^3$, indem man diesen Ausdruck auf ein Polynom nöchstens 2.Grades in A_3 zurückführt. (340)

171. Gegeben sei die Matrix

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

a) Man stelle A_3^3 und A_3^4 als Linearkombination von E_3, A_3, A_3^2 dar

b) Man reduziere $q(A_3)= 3E_3-2A_3+A_3^2-2A_3^3+A_3^4$ auf ein gleichwertiges Polynom 2.Grades in A_3. (340)

172. Gegeben sei die Matrix über $\mathbb{R}$

$$A = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

Man ersetze das Matrizenpolynom

$$2A^6 - 3A^5 + 5A^4 + 6A^3 + 7A^2 + A - 4E$$

durch ein gleichwertiges geringsten Grades. (316)

DUALE RAUMPAARE

173. Es seien $\mathfrak{B}_n$ und $\mathfrak{B}'_{n'}$ Vektorräume über K, ferner sei

$\mathfrak{H} := \mathrm{Hom}(\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}'_{n'})$, $\mathfrak{H}' := \mathrm{Hom}(\mathfrak{B}'_{n'}, \mathfrak{B}_n)$ und $f \in \mathfrak{H}$, $g' \in \mathfrak{H}'$.

Man zeige,daß durch

$$\beta(f,g') := sp(g' \circ f)$$

eine nichtausgeartete Bilinearform über $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}'$ definiert wird und daß daher $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}', \beta)$ ein duales Raumpaar bezüglich β ist (vgl. Beispiele 125-128). (229,348)

174.a) $(\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}'_n, \beta)$ sei ein Paar bezüglich β dualer Vektorräume. Es sei $\mathfrak{B}_n = H[\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n]$, $\mathfrak{B}'_n = [\mathfrak{a}'_1,\dots,\mathfrak{a}'_n]$. Bezüglich dieser Basen sei β die Matrix A_n zugeordnet. Man ermittle in $\mathfrak{B}'_n$ die zu $\{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n\}$ duale Basis $\{\mathfrak{b}'_1,\dots,\mathfrak{b}'_n\}$. (351)

b) Es sei $\mathfrak{B}_3 = R^3$ und $\mathfrak{B}'_3 = R^3$ ein duales Raumpaar bezüglich β. Bezüglich der kanonischen Basen von $\mathfrak{B}_3$ und $\mathfrak{B}'_3$ sei β die Matrix

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$$

zugeordnet. Man gebe in $\mathfrak{B}'_3$ die zur kanonischen Basis von $\mathfrak{B}_3$ duale Basis an.

c) $\mathfrak{B}_n = H[\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n]$, $\mathfrak{B}'_n = H[\mathfrak{a}'_1,\dots,\mathfrak{a}'_n]$ sei ein duales Raumpaar bezüglich β; ebenso sei $\mathfrak{B}_{1n'} = H[\mathfrak{c}_1,\dots,\mathfrak{c}_{n'}]$, $\mathfrak{B}'_{1n'} = H[\mathfrak{d}'_1,\dots,\mathfrak{d}'_{n'}]$ ein duales Raumpaar bezüglich β_1. Die Basen $\mathfrak{B}\{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n\}$, $\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{a}'_1,\dots,\mathfrak{a}'_n\}$, $\mathfrak{C} = \{\mathfrak{c}_1,\dots,\mathfrak{c}_{n'}\}$ $\mathfrak{D}' = \{\mathfrak{d}'_1,\dots,\mathfrak{d}'_{n'}\}$ seien <u>beliebig gewählt.</u>
Dann entspreche β bezüglich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}'$ die Matrix B_n, β_1 bezüglich $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}'$ die Matrix C_n. Dem Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}_{1n'})$ entspreche bezüglich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die Matrix $A_{nn'}$. Man gebe die Matrix $X_{n'n}$ der dualen Abbildung $f' \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{B}'_{1n'}, \mathfrak{B}'_n)$ bezüglich $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{A}'$ an. (361-367)

175. Es sei $\mathfrak{B}_n = H[\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n]$ und $\mathfrak{o} \neq \mathfrak{r} \in \mathfrak{B}_n$. Man gebe alle $\mathfrak{y}^* \in \mathfrak{B}^*_n$ an, die $\mathfrak{r}$ annullieren. Man lege diese Linearformen durch ihre Matrizen bezüglich der $\mathfrak{b}_i$ und $1_K \in K$ fest. (368-380)

176. Es sei $\mathfrak{U} = H[\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_r]$ ein Unterraum des $\mathfrak{B}_n = H[\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n]$. Man zeige: Hat die Koordinatenmatrix der $\mathfrak{a}_i$ $(i=1,\dots,r)$ bezüglich der Basis $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n\}$ von $\mathfrak{B}_n$ die Gestalt

$$A_{rn} = \|E_r, A_{r,n-r}\|,$$

so hat die Koordinatenmatrix der Basisvektoren $\overset{*}{c}{}^j$ $(j=1,\dots,n-r)$ das Annullatorraumes $\mathfrak{U}^o = H[\overset{*}{c}{}^1,\dots,\overset{*}{c}{}^{n-r}]$ bezüglich der Kobasis des Dualraumes $\mathfrak{V}_n^* = H[\overset{*}{b}{}^1,\dots,\overset{*}{b}{}^n]$ die Gestalt

$$C_{n-r,n} = \| A^T_{r,n-r}, -E_{n-r} \|.$$

Ferner zeige man: **Die Koordianten der Vektoren** $\overset{*}{c}{}^j$ $(j=1,\dots,n-r)$ sind die Koeffizienten der Gleichungen von $\mathfrak{U}$ bezüglich $\mathfrak{B}$.

Anwendung: Im R^6 seien die Vektoren $\mathfrak{a}_1=(1,2,0,-1,3,6)$, $\mathfrak{a}_2=(2,1,4,3,0,1)$, $\mathfrak{a}_3=(0,1,0,-1,0)$ gegeben. Man bestimme die Gleichungen des von ihnen aufgespannten Unterraumes bezüglich der kanonischen Basis. (359,378-383)

177.1. Es sei $\mathfrak{V}_n = \mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{U}_2$. Man zeige:

a) $\mathfrak{V}_n^* = \mathfrak{U}_1^o \oplus \mathfrak{U}_2^o$

b) $\mathfrak{U}_1 \cong \mathfrak{U}_2^o$, $\mathfrak{U}_2 \cong \mathfrak{U}_1^o$

2. Es sei $f \in End(\mathfrak{V}_n)$ ein Projektor auf $\mathfrak{U}$ in Richtung von $\mathfrak{U}'$. Man zeige:

a) die duale Abbildung $f^D \in End(\mathfrak{V}_n^*)$ ist gleichfalls ein Projektor

b) f^D stellt den Projektor auf $\mathfrak{U}'^o$ in Richtung von $\mathfrak{U}^o$ dar.

3. Man zeige: Ist λ Eigenwert von $f \in End(\mathfrak{V}_n)$, so ist λ auch Eigenwert der dualen Abbildung $f^D \in End(\mathfrak{V}_n^*)$.

4. Ist $\mathfrak{U}$ ein f-invarianter Unterraum von $\mathfrak{V}_n$, so ist sein Annullatorraum $\mathfrak{U}^o$ invariant unter f^D. (378-382,151,209)

178. Es seien $\mathfrak{U} = H[\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_r]$ und $\mathfrak{U}' = H[\mathfrak{a}'_{r+1},\dots,\mathfrak{a}'_n]$ Unterräume von $\mathfrak{V}_n = H[\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n]$ und es gelte $\mathfrak{V}_n = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{U}'$. Um die Matrix des Projektors f auf $\mathfrak{U}$ in Richtung von $\mathfrak{U}'$ bezüglich $\mathfrak{B}$ zu bestimmen, kann man folgendermaßen vorgehen: Man ersetze die gegebene Basis von $\mathfrak{U}'$ durch eine neue Basis $\mathfrak{a}_{r+1},\dots,\mathfrak{a}_n$, deren Koordinatenmatrix bezüglich $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n\}$ die in Beispiel 176. angegebene Gestalt hat und bestimme den Annullatorraum $\mathfrak{U}'^o = H[\overset{*}{c}{}^1,\dots,\overset{*}{c}{}^r]$.

Aus dem Ansatz

$$\mathfrak{b}_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\mathfrak{a}_j \qquad (*)$$

folgt

$$f(\mathfrak{b}_i) = \sum_{j=1}^{r} x_{ij}\mathfrak{a}_j \qquad (**)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten x_{ij} $i=1,\ldots,n$; $j=1,\ldots,r$ bilde man mit Hilfe von (*) die Klammerausdrücke $\langle\mathfrak{b}_i, \overset{*}{\mathfrak{c}}{}^k\rangle$ $i=1,\ldots,n$; $k=1,\ldots,r$. Anschließend stelle man die rechten Seiten von (**) in der Basis $\mathfrak{B}$ dar. Man führe diese Rechnung im reellen $\mathfrak{B}_5$ mit folgender Angabe aus, wenn die Koordinatenmatrizen der $\mathfrak{a}_i$ bezüglich $\mathfrak{B}$ gegeben sind

a) $\mathfrak{U}\{\check{\mathfrak{a}}_1 = \|1,1,0,0,1\|,\ \check{\mathfrak{a}}_2 = \|-1,0,1,1,0\|,\ \check{\mathfrak{a}}_3 = \|2,0,0,0,1\|\}$,
$\mathfrak{U}'\{\check{\mathfrak{a}}'_4 = \|1,1,-1,0,1\|,\ \check{\mathfrak{a}}'_5 = \|1,2,-1,0,2\|\}$.

b) Wie in Beispiel 119.

c) Wie in Beispiel 120. (151,372f,378-383)

ERGÄNZUNGEN

76.A. Der Abbildung $f \in \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}'_{n'})$ sei bezüglich der Basen $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_n$ und $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}'_{n'}$ die Matrix $A_{nn'}$ zugeordnet. Welche der folgenden, durch ihre Matrizen gegebenen Abbildungen ist injektiv (surjektiv, bijektiv)? Man bestimme rg f und def f. Man gebe neue Basen $\bar{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}_n$, $\bar{\mathfrak{B}}' \subset \mathfrak{B}'_{n'}$ an, sodaß die Matrix von f Normalform annimmt (Probe!).

a) $\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \\ -3 & 11 & -2 & 26 \end{Vmatrix}$ b) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{Vmatrix}$

c) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & -5 \\ -1 & 4 & 10 & -11 \end{Vmatrix}$ d) $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$

e) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -9 \\ 5 & 0 & -1 & -3 \end{Vmatrix}$ f) $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$

g) $\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{Vmatrix}$ h) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 3 & 8 \end{Vmatrix}$

i) $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 8 & -4 & -4 & -3 & -5 \\ -1 & -12 & 4 & 8 & 5 & 7 \end{Vmatrix}$ j) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$

k) $\begin{Vmatrix} 1 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & 11 & -4 \\ 0 & 11 & 16 & -5 \\ 1 & -18 & -27 & 9 \\ 3 & -10 & -17 & 7 \end{Vmatrix}$ l) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$

(124,127,129,171,188,195,198)

76.B. Die Matrix $A_{nm} = \|a_{ij}\|_{nm}$ werde als Menge ihrer Zeilen $\check{a}_i$ (i= 1,...,n) bzw. ihrer Spalten $\hat{a}_j$ (j= 1,...,m) aufgefaßt (vgl. die Schreibweise von Vorl.Nr. 168 und 175).

1. Man ersetze im "Grundschema" von S.92 der Vorlesung die Überschrift b_j durch $\hat{a}_j$ und die Überschrift a_i durch $\check{a}_i$. Man bestimme den Rang von A_{nm} nach dem Vorbild von Vorlesung Nr. 196 und gebe die lineare Abhängigkeit der Zeilen $\check{a}_i$ untereinander an. Man entnehme demselben Schema ohne weitere Rechnung auch die lineare Abhängigkeit der Spalten $\hat{a}_j$ untereinander.

2. Es sei r der Rang von A_{nm}. Dann gibt es r Zeilen $\check{c}_k = \check{a}_{i_k}$ (k= 1,...,r), von denen alle anderen linear abhängig sind:

$$\check{a}_i = \sum_{k=1}^{r} c_{ik}\,\check{c}_k \qquad i= 1,\dots,n$$

Man stelle unter Ausnützung dieses Zusammenhanges A_{nm} als Produkt zweier Matrizen dar

$$A_{nm} = \left\| \begin{matrix} \check{a}_1 \\ \vdots \\ \check{a}_n \end{matrix} \right\| = C_{nr} \cdot \left\| \begin{matrix} \check{c}_1 \\ \vdots \\ \check{c}_r \end{matrix} \right\| , \quad C_{nr} = \|c_{ik}\|_{nr}$$

Man gebe eine analoge Faktorenzerlegung von A_{nm} unter Verwendung der l.A. der Spalten an.

<u>Anmerkung:</u> Die oben dargestellte Methode zur Zerlegung einer Matrix in Faktoren ist allgemeiner als die in den Beispielen 76.C. und 76.D. angegebene, da sie nicht die lineare Unabhängigkeit der ersten r Zeilen und Spalten voraussetzt.

a)
$$A_{56} = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & -4 & 1 & -9 & 8 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ -11 & 2 & 1 & 2 & 11 & -7 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{matrix} \right\|$$

b)

$$A_{57} = \left\| \begin{matrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & -7 & -8 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 & 3 & 7 & -8 & -3 \end{matrix} \right\|$$

c)

$$A_{64} = \left\| \begin{matrix} 1 & -4 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & -4 & -7 \\ 3 & 14 & -8 & -13 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -3 & -5 \\ 13 & -13 & 5 & 6 \end{matrix} \right\|$$

d)

$$A_{74} = \left\| \begin{matrix} 2 & -4 & -4 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & -2 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 6 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 7 & -7 & 7 & 1 & 9 \end{matrix} \right\|$$

e)

$$A_{35} = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & 4 & -1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

f)

$$A_{53} = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{matrix} \right\|$$

Hinweis: Wenn in A_{nm} $n > m$ ist, bedeutet es Platzersparnis und Vereinfachung, wenn man das Schema von Vorlsg.Nr. 196 auf die transponierte Matrix A_{nm}^T anwendet.

(175,196)

76.C. Es sei A_{nm} eine Matrix vom Range r, die in folgender Weise unterteilt werde (vgl.Bsp. 67)

$$A_{nm} = \left\| \begin{array}{c|c} M_r & A_{r,m-r} \\ \hline B_{n-r,r} & C_{n-r,m-r} \end{array} \right\|$$

dabei sei die quadratische Matrix M_r regulär.

Man zeige, daß mit den durch

$$X_{n-r,r}\,M_r = B_{n-r,r}\,, \quad M_r Y_{r,m-r} = A_{r,m-r}$$

definierten Matrizen $X_{n-r,r}$ bzw. $Y_{r,m-r}$ gilt:

$$A_{nm} = \left\| \begin{array}{c} E_r \\ \hline X_{n-r,r} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} M_r & A_{r,m-r} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} M_r \\ \hline B_{n-r,r} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} E_r & Y_{r,m-r} \end{array} \right\|$$

Hinweis: Man beachte, daß gilt

$$X_{n-r,r} \cdot A_{r,m-r} = C_{n-r,m-r} = B_{n-r,r} \cdot Y_{r,m-r}$$

Anmerkung: Bei jeder der beiden Faktorenzerlegungen von A_{nm} ist der erste Faktor spaltenregulär, der zweite zeilenregulär

(170, 175, 192-194)

76.D. Es sei A_{nm} eine Matrix vom Range r, deren erste r Zeilen und Spalten l.u. sind. Dann gibt es nach Vorl.Nr.189. zwei reguläre Matrizen L_n und R_m, sodaß gilt

$$L_n A_{nm} R_m = E^r_{nm}$$

1. Man bestimme nach dem Vorbild von Vorl.Nr. 198. nur die Matrix L_n, wobei man alle Umformungen ausschließlich mit Hilfe der ersten r Zeilen ausführe. Man untersuche die Bauart der Matrix L_n und stelle den Zusammenhang mit den Matrizen $X_{n-r,r}$ und $Y_{r,m-r}$ von Beispiel 76.C. her und zerlege A_{nm} auf diese Weise in zwei Faktoren. Welche Bauart hat die anschließend bestimmte Matrix R_m?

2. Welche Bauart hat die Matrix R_m, wenn man (ohne vorhergehende Ermittlung von L_n) nur mit Hilfe der ersten r Spalten die Umformungen durchführt.
Man stelle wieder die Beziehung zu den Matrizen $X_{n-r,r}$ und $Y_{r,m-r}$ her. Man beachte Beispiel 67.

(189, 198)

76.E. Man zerlege folgende Matrizen A_{nm} vom Range r, deren r erste Zeilen und Spalten l.u. sind, nach der Methode

1. von Bsp. 76.C.
2. von Bsp. 76.D.

je auf zwei Arten in Faktoren.

a) $A_{57} = \left\| \begin{matrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & -12 & 2 & 1 & 4 & -17 \\ 2 & 14 & -4 & -4 & 2 & 4 & 2 \end{matrix} \right\|$ $\quad \mathrm{rg}\, A_{57} = 3$

b) $A_{46} = \left\| \begin{matrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{matrix} \right\|$ $\quad \mathrm{rg}\, A_{46} = 3$

c) $A_{35} = \left\| \begin{matrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 15 & -14 & 17 \end{matrix} \right\|$ $\quad \mathrm{Rg}\, A_{35} = 2$

d) $A_{53} = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 7 & -1 & 12 \\ 9 & -7 & 12 \\ 5 & -5 & 6 \end{matrix} \right\|$ $\quad \mathrm{rg}\, A_{53} = 2$

e) $A_{74} = \left\| \begin{matrix} 2 & -4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & -7 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & -31 & -15 & 14 \end{matrix} \right\|$ $\quad \mathrm{rg} A_{74} = 3$

f) $A_{35} = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{matrix} \right\|$ $\quad \mathrm{rg}\, A_{35} = 3$

g) $A_{53} = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{matrix} \right\|$ $\quad \mathrm{rg}\, A_{53} = 3$

167.A. In Vorlesung Nr.344 wird eine Normalform von Endomorphismen eines reellen Vektorraumes behandelt, welche sich der Einbettung des reellen in einen komplexen Vektorraums bedient. Das folgende Beispiel lehrt eine andere Normalform von Endomorphismen eines reellen Vektorraumes, welche auf die Einbettung ins Komplexe verzichtet, aber gegenüber der allgemeinen Normalform von Vorl.Nr.332 eine einfachere Gestalt aufweist:

Es sei f ein Endomorphismus des reellen f - irreduziblen Vektorraumes $\mathfrak{V}_{2n}$ von geradzahliger Dimension 2n. Das Minimalpolynom von f habe die Bauart

$$m(X) = [q(X)]^n, \qquad q(X) = X^2 - \mu_1 X - \mu_o.$$

Das quadratische Polynom q(X) sei über $\mathbb{R}$ irreduzibel. Ferner sei $\mathfrak{r}$ ein Vektor, dessen Minimalpolynom höchsten Grad aufweist, d.h. es ist $m_{\mathfrak{r}}(X) = m(X)$

1. Man zeige: Die Vektoren

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_{2i-1} &:= q^{i-1}(f)(\mathfrak{r}) \\ \mathfrak{b}_{2i} &:= q^{i-1}(f)(f(\mathfrak{r})) \end{aligned} \qquad i = 1,\dots,n$$

bilden eine Basis von $\mathfrak{V}_{2n}$

2. Man bestimme die Matrix von f bezüglich der in 1. angegebenen Basis.

Anmerkung: Für n=1 stimmt obige Normalform mit der Normalform von Vorl.Nr.332 überein (weshalb ?)

(327,329,332,342,344)

167.B. Man ermittle die Normalform gemäß Beispiel 167.A. folgender, durch ihre Matrix bezüglich $\mathfrak{B}$ gegebenen Endomorphismen des reellen $\mathfrak{V}_6$ und gebe eine neue, dieser Normalform entsprechende Basis an.

a) $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 12 & -10 & 4 \end{Vmatrix}$$

b) $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -27 & 54 & -63 & 44 & -21 & 6 \end{Vmatrix}$$

61. Es sei $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{V}_n)$. Man weise die Äquivalenz folgender Aussagen nach:

a) $\mathfrak{V}_n = f(\mathfrak{V}_n) \oplus \mathrm{kn}\, f$

b) Es existiert ein $g \in \mathrm{End}(\mathfrak{V}_n)$ mit

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{und} \quad (g \circ f)(\mathfrak{V}_n) = f(\mathfrak{V}_n)$$

Welche Eigenschaften folgen daraus für g?

c) $\mathrm{kn}\, f^2 = \mathrm{kn}\, f$

Wie muß man g charakterisieren, daß f ein Projektor ist?

Anleitung: Man zeige a) $\Leftrightarrow$ b) und a) $\Leftrightarrow$ c)

Für b) $\Rightarrow$ a) betrachte man den Vektor $\mathfrak{y} := \mathfrak{x} - (g \circ f)(\mathfrak{x})$

Bemerkung: Nur zum Nachweis c) $\Rightarrow$ a) ist endliche Dimension von $\mathfrak{V}$ notwendig. (150-153)

61.A. Es sei $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{V}_n)$ $(\mathrm{Char}\, K \neq 2)$. Man zeige:

a) $f^2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{V}_n} \Leftrightarrow \mathfrak{V}_n = \mathrm{kn}\,(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{kn}\,(f + \mathrm{id})$

Anleitung (für $\boxed{\Rightarrow}$): Man setze für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{V}_n$: $\mathfrak{x} = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2$ mit

$$\mathfrak{u}_1 := \frac{1}{2_K} \cdot [\mathfrak{x} + f(\mathfrak{x})], \quad \mathfrak{u}_2 := \frac{1}{2_K} \cdot [\mathfrak{x} - f(\mathfrak{x})]$$

Was kann man über f aussagen, wenn $\mathrm{kn}\,(f - \mathrm{id})$ oder $\mathrm{kn}(f + \mathrm{id})$ gleich $\{\mathfrak{o}\}$ sind?

b) $f^2 = \mathrm{id} \Leftrightarrow g := \frac{1}{2_K}[f + \mathrm{id}]$ ist Projektor. (150-153)

51.A. Es sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_n^K, \mathfrak{V}_{n'}^K)$. Man zeige, daß es lineare Abbildungen $g, h: \mathfrak{V}_{n'} \to \mathfrak{V}_n$ gibt mit

a) $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathfrak{V}_n}$, genau dann, wenn f injektiv

b) $f \circ h = \mathrm{id}_{\mathfrak{V}_{n'}}$, genau dann, wenn f surjektiv ist. (27,28,118-132)

81.A. Im $\mathbb{R}^6$ sind die beiden Nebenräume L und M gegeben
Man bestimme

1. $L \cap M$
2. den Parallelitätsgrad m von L und M
3. (L,M)

Alle Resultate stelle man in der Form $\mathfrak{r}+H[\mathfrak{c}_1,\ldots,\mathfrak{c}_r]$ dar.

a) $L(\mathfrak{a}_1,H[\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3,\mathfrak{b}_4])$, $M(\mathfrak{a}_2,H[\mathfrak{b}_5,\mathfrak{b}_6,\mathfrak{b}_7])$
b) $L(\mathfrak{a}_3,H[\mathfrak{b}_8,\mathfrak{b}_9,\mathfrak{b}_{10},\mathfrak{b}_{11}])$, $M(\mathfrak{a}_4,H[\mathfrak{b}_{12},\mathfrak{b}_{13},\mathfrak{b}_{14}])$
c) $L(\mathfrak{a}_3,H[\mathfrak{b}_8,\mathfrak{b}_9,\mathfrak{b}_{10},\mathfrak{b}_{11}])$, $M(\mathfrak{a}_4,H[\mathfrak{b}_{15},\mathfrak{b}_{16},\mathfrak{b}_{17}])$
d) $L(\mathfrak{a}_5,H[\mathfrak{b}_8,\mathfrak{b}_9])$, $M(\mathfrak{a}_6,H[\mathfrak{b}_{18},\mathfrak{b}_{19}])$
e) $L(\mathfrak{a}_7,H[\mathfrak{b}_8,\mathfrak{b}_9,\mathfrak{b}_{10},\mathfrak{b}_{11}])$, $M(\mathfrak{a}_8,H[\mathfrak{b}_{20},\mathfrak{b}_{21}])$

$\mathfrak{a}_1=(1,0,0,0,0,1)$, $\mathfrak{a}_2=(2,-2,1,0,0,4)$, $\mathfrak{a}_3=(1,0,0,1,0,0)$
$\mathfrak{a}_4=(0,0,1,0,0,1)$, $\mathfrak{a}_5=(2,0,1,0,-1,0)$, $\mathfrak{a}_6=(0,-1,1,1,-3,2)$
$\mathfrak{a}_7=(1,2,0,0,2,2)$; $\mathfrak{a}_8=(0,1,-1,-2,2,1)$;
$\mathfrak{b}_1=(1,1,0,0,0,0)$, $\mathfrak{b}_2=(0,1,1,0,0,-1)$, $\mathfrak{b}_3=(0,0,1,1,0,0)$
$\mathfrak{b}_4=(0,0,0,1,1,1)$, $\mathfrak{b}_5=(0,1,1,1,1,0)$, $\mathfrak{b}_6=(0,1,1,-1,-1,-2)$
$\mathfrak{b}_7=(1,0,1,0,0,1)$, $\mathfrak{b}_8=(1,0,1,0,0,0)$, $\mathfrak{b}_9=(0,1,0,1,0,0)$
$\mathfrak{b}_{10}=(0,0,1,0,1,0)$, $\mathfrak{b}_{11}=(0,0,0,1,0,1)$, $\mathfrak{b}_{12}=(1,2,-1,2,-2,0)$
$\mathfrak{b}_{13}=(2,-1,2,-2,0,-1)$, $\mathfrak{b}_{14}=(1,1,2,2,1,1)$, $\mathfrak{b}_{15}=(1,0,0,0,1,0)$
$\mathfrak{b}_{16}=(0,1,0,0,0,-1)$, $\mathfrak{b}_{17}=(1,1,2,0,1,-1)$, $\mathfrak{b}_{18}=(-1,1,0,0,0,1)$
$\mathfrak{b}_{19}=(1,0,0,-2,0,3)$, $\mathfrak{b}_{20}=(2,-1,-1,-5,-3,-4)$,
$\mathfrak{b}_{21}=(3,2,1,1,-2,1)$ (81,83,200)

107.A. Im $\mathbb{R}^5$ sein zwei Nebenräume L und M durch ihre Gleichungen gegeben. Man bestimme die Gleichungen und Dimensionen von $L\cap M$ und (L,M) sowie den Parallelitätsgrad von L und M.

a) L: $x_1-2x_3+x_5 = 0$ M: $x_1+2x_2-x_5+6 = 0$
$x_1+x_2-x_3+x_5-3 = 0$ $x_1+2x_2+2x_3-2x_4+5x_5+4 = 0$
$x_1-2x_2-2x_3-2x_4+7x_5+4 = 0$ $x_3-x_4+3x_5-1 = 0$
$x_2+x_4-3x_5-2 = 0$

b) L: $x_1-x_3+x_5-1 = 0$ M: $x_1-x_3+x_4-1 = 0$
$x_1+2x_2-x_3-2x_4+x_5-3 = 0$ $2x_1-3x_2-2x_3+2x_4-3x_5+1 = 0$
$2x_1-x_2-2x_3+x_4+2x_5-1 = 0$ $x_1-x_2-x_3+x_4-x_5 = 0$
$2x_1+x_2-2x_3-x_4+2x_5-3 = 0$

c) L: $2x_1+x_2-2x_3+x_4+2x_5-3 = 0$ M: $x_1-x_3+x_4-1 = 0$
$x_1+2x_2-x_3+2x_4+x_5-3 = 0$ $2x_1-3x_2-2x_3+2x_4-3x_5-1 = 0$
$x_1-x_3+x_5-1 = 0$ $x_1-x_2-x_3+x_4-x_5 = 0$
$2x_1-x_2-2x_3-x_4+2x_5-1 = 0$ (225)

107.B. Im $\mathbb{R}^6$ seien zwei Nebenräume L und M durch ihre l.u. Gleichungen gegeben.
Man bestimme die Gleichungen von $L \cap M$ sowie (L,M) und ermittle den Parallelitätsgrad von L und M.

a) L: $2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5 = -1$
$x_1+x_2-x_5 = 0$
$2x_1+x_2-2x_6 = -3$
$2x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5-x_6 = -2$

M: $x_1+x_2+x_3-x_4-x_5 = 3$
$x_2-x_3+x_4-x_6 = -4$
$-2x_1+x_3-x_4+2x_5-2x_6 = 1$

b) L: $2x_1-x_2-x_3-2x_5+3x_6 = 2$
$2x_2+3x_3-x_4+3x_5 = -1$

M: $x_1+x_2+2x_3-x_4 = 2$
$x_1+x_3+2x_5+x_6 = 2$
$x_2+2x_3-x_4+x_5-x_6 = -1$
$x_1+x_2+2x_3+x_5+x_6 = 4$

c) L: $2x_1-x_2-x_3-2x_5+3x_6 = 2$
$x_2+3x_3-x_4+3x_5 = -1$

M: $x_1+x_2+2x_3-x_4 = 2$
$x_1+x_3+2x_5+x_6 = 2$
$x_2+2x_3-x_4+x_5-x_6 = -1$
$x_1+x_2+2x_3+x_5+x_6 = 4$

d) L: $x_1+2x_3-6x_4-x_5+4x_6 = -1$
$x_1+x_2-x_4-x_5+3x_6 = 1$

M: $x_1+x_2-2x_5+x_6 = 2$
$2x_1-x_4-x_5+6x_6 = 0$
$x_3-2x_4-x_5-x_6 = 2$
$2x_2-x_3+x_4+x_6 = -2$

(225)