B E I S P I E L S A M M L U N G

zur Vorlesung

L I N E A R E   A L G E B R A   UND   G E O M E T R I E

2.Teil

Prof.Dr.Wolfgang STRÖHER

B E I S P I E L S A M M L U N G

zur Vorlesung

L I N E A R E   A L G E B R A   UND   G E O M E T R I E

2. Teil

Die folgende Sammlung folgt in der Anordnung der Beispiele dem Fortschreiten der gleichnamigen Vorlesung. Die am Ende jedes Beispiels in Klammern angeführten Zahlen beziehen sich auf jene Nummern der Vorlesung, die für das betreffende Beispiel von Bedeutung sind.

AFFINE GEOMETRIE

179. $\mathbb{Z}_2$ sei der Körper der Restklassen mod 2. Man zeige, daß die affine Geometrie $G(\mathbb{Z}_2^2)$ genau vier verschiedene Punkte und sechs verschiedene, paarweise parallele Gerade enthält. Man zeige, daß auf jeder Geraden zwei Punkte liegen und durch jeden Punkt drei Gerade gehen. (408-410)

180. $G(\mathbb{Z}_3^2)$ sei die affine Geometrie über $\mathbb{Z}_3$.
   a) Wieviel verschiedene Punkte und Geraden enthält G ?
   b) Wieviele Punkte liegen auf einer Geraden, wieviele Geraden gehen durch einen Punkt ?
   c) Wieviel Büschel paralleler Geraden enthält G ?
   Wieviele Gerade enthält ein Parallelenbüschel ?
   (Die Menge aller zueinander parallelen Geraden heißt Parallelenbüschel). (408-410)

181. In der reellen $\mathfrak{G}_6$ sind die beiden a-Räume L und M gegeben. Man bestimme

1. $L \cap M$
2. den Parallelitätsgrad m von L und M
3. (L,M)

Alle Resultate stelle man in der Form $\mathfrak{r}+H[\mathfrak{c}_1,\dots,\mathfrak{c}_r]$ dar.

a) $L(\mathfrak{a}_1, H[\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3,\mathfrak{b}_4])$, $M(\mathfrak{a}_2, H[\mathfrak{b}_5,\mathfrak{b}_6,\mathfrak{b}_7])$

b) $L(\mathfrak{a}_3, H[\mathfrak{b}_8,\mathfrak{b}_9,\mathfrak{b}_{10},\mathfrak{b}_{11}])$, $M(\mathfrak{a}_4, H[\mathfrak{b}_{12},\mathfrak{b}_{13},\mathfrak{b}_{14}])$

c) $L(\mathfrak{a}_3, H[\mathfrak{b}_8,\mathfrak{b}_9,\mathfrak{b}_{10},\mathfrak{b}_{11}])$, $M(\mathfrak{a}_4, H[\mathfrak{b}_{15},\mathfrak{b}_{16},\mathfrak{b}_{17}])$

d) $L(\mathfrak{a}_5, H[\mathfrak{b}_8,\mathfrak{b}_9])$, $M(\mathfrak{a}_6, H[\mathfrak{b}_{18},\mathfrak{b}_{19}])$

e) $L(\mathfrak{a}_7, H[\mathfrak{b}_8,\mathfrak{b}_9,\mathfrak{b}_{10},\mathfrak{b}_{11}])$, $M(\mathfrak{a}_8, H[\mathfrak{b}_{20},\mathfrak{b}_{21}])$

$\mathfrak{a}_1=(1,0,0,0,0,1)$, $\mathfrak{a}_2=(2,-2,1,0,0,4)$, $\mathfrak{a}_3=(1,0,0,1,0,0)$
$\mathfrak{a}_4=(0,0,1,0,0,1)$, $\mathfrak{a}_5=(2,0,1,0,-1,0)$, $\mathfrak{a}_6=(0,-1,1,1,-3,2)$
$\mathfrak{a}_7=(1,2,0,0,2,2)$, $\mathfrak{a}_8=(0,1,-1,-2,2,1)$;
$\mathfrak{b}_1=(1,1,0,0,0,0)$, $\mathfrak{b}_2=(0,1,1,0,0,-1)$, $\mathfrak{b}_3=(0,0,1,1,0,0)$
$\mathfrak{b}_4=(0,0,0,1,1,1)$, $\mathfrak{b}_5=(0,1,1,1,1,0)$, $\mathfrak{b}_6=(0,1,1,-1,-1,-2)$
$\mathfrak{b}_7=(1,0,1,0,0,1)$, $\mathfrak{b}_8=(1,0,1,0,0,0)$, $\mathfrak{b}_9=(0,1,0,1,0,0)$
$\mathfrak{b}_{10}=(0,0,1,0,1,0)$, $\mathfrak{b}_{11}=(0,0,0,1,0,1)$, $\mathfrak{b}_{12}=(1,2,-1,2,-2,0)$
$\mathfrak{b}_{13}=(2,-1,2,-2,0,-1)$, $\mathfrak{b}_{14}=(1,1,2,2,1,1)$, $\mathfrak{b}_{15}=(1,0,0,0,1,0)$
$\mathfrak{b}_{16}=(0,1,0,0,0,-1)$, $\mathfrak{b}_{17}=(1,1,2,0,1,-1)$, $\mathfrak{b}_{18}=(-1,1,0,0,0,1)$
$\mathfrak{b}_{19}=(1,0,0,-2,0,3)$, $\mathfrak{b}_{20}=(2,-1,-1,-5,-3,-4)$,
$\mathfrak{b}_{21}=(3,2,1,1,-2,-1)$ (408-410)

182. Man zeige: Die r Punkte $X_i(x_{i1},\dots,x_{in})$ einer affinen $\mathfrak{G}_n$ sind genau dann unabhängig, wenn die Matrix

$$\|x_{kj}-x_{1j}\| \quad k=2,\dots,r; \quad j=1,\dots,n$$

der Koordinatendifferenzen des Punktes X_1 und der anderen Punkte den Rang r-1 hat. (411-415)

183. Es sei K ein aus n Elementen bestehender endlicher Körper und $\mathfrak{G}$ eine zweidimensionale affine Geometrie über K. Man zeige für die affine Ebene $\mathfrak{G}$ über K:

a) $\mathfrak{G}$ umfaßt n^2 Punkte

b) In $\mathfrak{G}$ gibt es n+1 Geradenrichtungen

c) Jede Gerade von $\mathfrak{G}$ enthält n Punkte. Man nennt die Anzahl der Punkte auf einer Geraden die Ordnung der affinen Geometrie $\mathfrak{G}$.

d) Durch jeden Punkt gehen n+1 Gerade.

e) Es gibt n Gerade derselben Richtung (im Parallelenbüschel).

f) In $\mathfrak{a}$ gibt es n^2+n Gerade. (408-416)

184.a) Die a-Gerade g werde durch die a-Punkte A= $\{\mathfrak{a}\}$, B= $\{\mathfrak{b}\}$ festgelegt. C= $\{\mathfrak{c}\}$ mit $\mathfrak{c} = \lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{b}$ $(\lambda+\mu = 1)$ sei ein weiterer Punkt von g. Man bestimme das Teilverhältnis T(A,B,C). Wann ist C Mittelpunkt von AB ? (Char K $\neq$ 2).

b) Man betrachte die affine Gerade über einem aus 5 Elementen bestehenden Körper (Nullelement o, Einselement e), dessen Elemente den unten angegebenen Verknüpfungen genügen. Gegeben seien die Punkte $X_0(e)$, $X_1(a)$. Man bestimme die Koordinate des Mittelpunktes von X_0,X_1, ferner die Koordinate jenes Punktes X_2, der mit X_0, X_1 das Teilverhältnis $T(X_0,X_1,X_2)$ = b bestimmt.

+	o	e	a	b	c
o	o	e	a	b	c
e	e	a	b	c	o
a	a	b	c	o	e
b	b	c	o	e	a
c	c	o	e	a	b

.	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

(411-420)

185. Man bestimme die Gleichungen des Verbindungsraumes der gegebenen Punkte der reellen $\mathfrak{a}_5$:

a) $X_1(-3,-6,-2,0,2)$, $X_2(8,1,0,-2,-2)$, $X_3(4,-2,-3,1,-1)$, $X_4(13,6,1,0,-5)$, $X_5(-1,-3,1,-1,1)$

b) $X_1(8,2,-1,1,1)$, $X_2(2,-1,2,0,-2)$, $X_3(8,0,-3,2,0)$, $X_4(12,1,-1,-1,-1)$, $X_5(10,-3,0,-1,-1)$

c) $X_1(1,4,2,1,-1)$, $X_2(2,0,-7,-2,1)$, $X_3(0,8,11,4,-3)$, $X_4(0,4,-5,0,1)$, $X_5(-2,4,-19,-2,5)$

Man diskutiere die räumliche Anordnung der fünf Punkte im Falle c). (411-420)

186. In der reellen G_5 seien die Punkte $X_1,\dots,X_9$ gegeben. Die Punkte $X_1,\dots,X_4$ sowie $X_5,\dots,X_9$ spannen je einen affinen Unterraum L_1 bzw. L_2 auf. Man lege sowohl $L_1 \cap L_2$ als (L_1,L_2) durch Angabe von unabhängigen Punkten fest. Man ermittle den Grad der Parallelität von L_1 und L_2.

a) $X_1(1,1,1,1,1)$, $X_2(3,0,2,0,2)$, $X_3(2,3,0,3,3)$, $X_4(-4,2,-1,2,-2)$, $X_5(0,2,1,1,0)$, $X_6(1,4,2,0,-3)$, $X_7(-3,2,-2,0,-1)$, $X_8(0,1,1,1,1)$, $X_9(1,3,2,3,1)$

b) $X_1(1,1,1,1,1)$, $X_2(3,0,2,0,2)$, $X_3(0,3,0,3,1)$, $X_4(-1,2,-1,2,1)$, $X_5(1,4,1,4,1)$, $X_6(-2,1,-2,1,1)$, $X_7(2,4,2,3,0)$, $X_8(1,3,1,4,2)$, $X_9(2,2,2,3,2)$ (411-420)

187. In der reellen G_6 sind zwei a-Räume L und M durch ihre l.u. Gleichungen gegeben. Man bestimme die Gleichungen von $L \cap M$ sowie (L,M) und ermittle den Parallelitätsgrad von L und M.

a) L: $$\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5 &= -1\\ x_1+x_2-x_5 &= 0\\ 2x_1+x_2-2x_6 &= -3\\ 2x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5-x_6 &= -2 \end{aligned}$$
M: $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5 &= 3\\ x_2-x_3+x_4-x_6 &= -4\\ -2x_1+x_3-x_4+2x_5-2x_6 &= 1 \end{aligned}$$

b) L: $$\begin{aligned} 2x_1-x_2-x_3-2x_5+3x_6 &= 2\\ 2x_2+3x_3-x_4+3x_5 &= -1 \end{aligned}$$
M: $$\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3-x_4 &= 2\\ x_1+x_3+2x_5+x_6 &= 2\\ x_2+2x_3-x_4+x_5-x_6 &= -1\\ x_1+x_2+2x_3+x_5+x_6 &= 4 \end{aligned}$$

c) L: $$\begin{aligned} 2x_1-x_2-x_3-2x_5+3x_6 &= 2\\ x_2+3x_3-x_4+3x_5 &= -1 \end{aligned}$$
M: $$\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3-x_4 &= 2\\ x_1+x_3+2x_5+x_6 &= 2\\ x_2+2x_3-x_4+x_5-x_6 &= -1\\ x_1+x_2+2x_3+x_5+x_6 &= 4 \end{aligned}$$

d) L: $$\begin{aligned} x_1+2x_3-6x_4-x_5+4x_6 &= -1\\ x_1+x_2-x_4-x_5+3x_6 &= 1 \end{aligned}$$
M: $$\begin{aligned} x_1+x_2-2x_5+x_6 &= 2\\ 2x_1-x_4-x_5+6x_6 &= 0\\ x_3-2x_4-x_5-x_6 &= 2\\ 2x_2-x_3+x_4+x_6 &= -2 \end{aligned}$$
(411-420)

188. In der reellen G_5 seien zwei affine Unterräume L,M durch ihre Gleichungen gegeben. Man bestimme die Gleichungen und Dimensionen von $L \cap M$ und (L,M) sowie den Parallelitätsgrad von L und M.

a) L: $x_1-2x_3+x_5 = 0$
$x_1+x_2-x_3+x_5-3 = 0$
$x_1-2x_2-2x_3-2x_4+7x_5+4 = 0$
$x_2+x_4-3x_5-2 = 0$

M: $x_1+2x_2-x_5+6 = 0$
$x_1+2x_2+2x_3-2x_4+5x_5+4 = 0$
$x_3-x_4+3x_5-1 = 0$

b) L: $x_1-x_3+x_5-1 = 0$
$x_1+2x_2-x_3-2x_4+x_5-3 = 0$
$2x_1-x_2-2x_3+x_4+2x_5-1 = 0$
$2x_1+x_2-2x_3-x_4+2x_5-3 = 0$

M: $x_1-x_3+x_4-1 = 0$
$2x_1-3x_2-2x_3+2x_4-3x_5+1 = 0$
$x_1-x_2-x_3+x_4-x_5 = 0$

c) L: $2x_1+x_2-2x_3+x_4+2x_5-3 = 0$
$x_1+2x_2-x_3+2x_4+x_5-3 = 0$
$x_1-x_3+x_5-1 = 0$
$2x_1-x_2-2x_3-x_4+2x_5-1 = 0$

M: $x_1-x_3+x_4-1 = 0$
$2x_1-3x_2-2x_3+2x_4-3x_5-1 = 0$
$x_1-x_2-x_3+x_4-x_5 = 0$

(441-420)

189.a) P sei der Schnittpunkt der beiden Geraden
$$2x_1+3x_2-5 = 0$$
$$x_1-4x_2+3 = 0$$
der reellen G_2. Man ermittle die Gleichung der Verbindungsgeraden von P mit dem Punkt A(16,2) ohne Berechnung der Koordinaten von P.

b) P,Q seien als Schnittpunkte der Geradenpaare
P: $3x_1+2x_2-4 = 0$, $x_1-3x_2+5 = 0$,
Q: $x_1-3x_2-3 = 0$, $x_1+19x_2-29 = 0$
der reellen G_2 gegeben. Man bestimme die Gleichung der Verbindungsgeraden $g = (P,Q)$ ohne Berechnung der Koordinaten dieser Punkte.

c) Man bestimme in der reellen G_3 die Gleichung der Verbindungsebene der Geraden
g: $x_1-x_2+x_3-5 = 0$
$3x_1-2x_2+4x_3+7 = 0$
mit dem Punkt
P: $x_1-2x_2+3 = 0$
$2x_1+8x_3+14 = 0$
$3x_1-2x_3+1 = 0$.

d) Man lege in der reellen G_3 die Verbindungsgerade g der beiden Punkte

$$P: \begin{array}{ll} x_1+2x_2+x_3-1 &= 0 \\ x_1-x_2-1 &= 0 \\ 2x_1-x_3+3 &= 0 \end{array} \qquad Q: \begin{array}{ll} x_1+x_2+2x_3-9 &= 0 \\ 2x_1-x_2-5 &= 0 \\ 2x_1+2x_2+x_3-5 &= 0 \end{array}$$

als Schnittlinie zweier Ebenen fest. Man gebe eine Parameterdarstellung von g an. (411-420)

190. Ein Geradenbüschel der reellen G_2 werde durch die Geraden

$$2x_1-5x_2+7 = 0, \qquad 3x_1+4x_2-24 = 0$$

aufgespannt.

Man bestimme die Gleichung jener Büschelgeraden, welche

a) den Punkt (1,2) enthält

b) zur Geraden $4x_1+3x_2-5 = 0$ parallel ist

c) gleichzeitig Gerade des durch

$$8x_1-12x_2+3 = 0, \qquad 4x_1+20x_2-5 = 0$$

festgelegten Büschels ist.

ERKLÄRUNG: Unter einem Geradenbüschel versteht man die Menge aller Geraden, welche in derselben Ebene liegen und dort durch denselben Punkt gehen. (411-420)

191. Die Geraden g_1 und g_2 der reellen G_3 seien jeweils als Schnitt zweier Ebenen gegeben. Man bestimme die gegenseitige Lage von g_1 und g_2. Haben g_1 und g_2 eine Verbindungsebene, so gebe man deren Gleichung an.

a) $$g_1 \begin{cases} 7x_1-6x_2+2x_3-1 = 0 \\ 19x_1-16x_2+6x_3-5 = 0 \end{cases} \qquad g_2 \begin{cases} 4x_1-5x_2+3x_3-3 = 0 \\ x_1-2x_2+x_3 = 0 \end{cases}$$

b) $$g_1 \begin{cases} x_1-3x_2+2x_3-4 = 0 \\ -x_1+5x_3-7 = 0 \end{cases} \qquad g_2 \begin{cases} 5x_1-x_2+7x_3-1 = 0 \\ 3x_1+x_2-2x_3+1 = 0 \end{cases}$$

c) $$g_1 \begin{cases} 9x_1+5x_2-19 = 0 \\ 16x_2+5x_2-7x_3-5 = 0 \end{cases} \qquad g_2 \begin{cases} -13x_1+5x_2+22x_3-22 = 0 \\ x_1-x_3-2 = 0 \end{cases}$$

(411-420)

192. Ein Ebenenbüschel der reellen G_3 wird durch die beiden Ebenen

$$2x_1-x_2+3x_3-4 = 0, \qquad x_1+3x_2-x_3+5 = 0$$

aufgespannt.

Man bestimme die Gleichung jener Büschelebene, welche

a) den Punkt (1,2,3) enthält

b) zu der durch

$$\begin{aligned} 12x_1-2x_2+7x_3-2 &= 0 \\ 7x_1+5x_2-x_3+3 &= 0 \end{aligned}$$

bestimmten Geraden parallel ist.

<u>ERKLÄRUNG:</u> Ein Ebenenbüschel besteht aus allen Ebenen, welche dieselbe Gerade enthalten. (411-420)

193. Man lege in der reellen G_3 durch den Punkt (1,2,3) jene Ebene, welche zu den beiden Geraden

$$g_1 \left\{ \begin{aligned} 3x_1-6x_2+4x_3-4 &= 0 \\ 9x_1-19x_2+12x_3-9 &= 0 \end{aligned} \right. \qquad g_2 \left\{ \begin{aligned} 4x_1+9x_2-5x_3-6 &= 0 \\ 3x_1+7x_2-4x_3-4 &= 0 \end{aligned} \right.$$

parallel ist und gebe deren Gleichung an. (411-420)

194. Ein Ebenenbündel der reellen G_3 werde durch die Ebenen

$$\begin{aligned} -4x_1+x_2+x_3+1 &= 0 \\ 4x_1-8x_2+3x_3+4 &= 0 \\ 6x_1+7x_2-9x_3+3 &= 0 \end{aligned}$$

aufgespannt. Man bestimme die Gleichung jener Bündelebene, welche

a) die Punkte (3,1,5), (-1,0,1) enthält

b) zur Ebene $6x_1+38x_2-32x_3-7 = 0$ parallel ist

c) die durch
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 -5 &= 0 \\ 4x_1 +6x_2 - x_3 -9 &= 0 \end{aligned}$$
bestimmte Gerade enthält.

<u>ERKLÄRUNG:</u> Unter einem Ebenenbündel versteht man die Menge aller Ebenen, welche durch denselben Punkt gehen. (411-420)

195. In der reellen G_3 seien die Geraden $g_1[(0,-1,2),\ (2,3,4)]$ $g_2[(-2,0,1),\ (6,6,9)]$ durch je zwei ihrer Punkte gegeben. Man lege aus dem Punkt $(-1,-3,11)$ die Treffgerade t an g_1 und g_2 und bestimme deren Schnittpunkte mit den gegebenen Geraden. (411-420)

196. In der reellen G_3 seien der Punkt $P(1,2,3)$ und die beiden Geraden

$$L \begin{cases} x_1-x_2+x_3+2 = 0 \\ x_2+2x_3-5 = 0 \end{cases} \qquad M \begin{cases} x_1+2x_2-x_3+1 = 0 \\ 2x_1+x_3-9 = 0 \end{cases}$$

gegeben. Man lege die Treffgerade aus p an L und M durch ihre Gleichungen fest und bestimme die Treffpunkte. (411-420)

197. In der reellen G_3 seien die beiden Geraden

$$g_1 \begin{cases} 2x_1-3x_2+8x_3-4 = 0 \\ 3x_1-x_2+11x_3+6 = 0 \end{cases} \qquad g_2 \begin{cases} 5x_1-x_3-2 = 0 \\ 4x_1-2x_2-4x_3-17 = 0 \end{cases}$$

gegeben. Man ermittle die Gleichungen jener beiden parallelen Ebenen, die je eine der gegebenen Geraden enthalten. (411-420)

198. Gegeben seien die beiden Geraden

$$g_1 \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 = a_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 = a_2 \end{cases} \qquad g_2 \begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3 = b_1 \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+b_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

der reellen G_3. Man zeige: die Mittelpunkte aller Pkte.paare deren Endpunkte auf g_1 bzw. g_2 liegen, erfüllen eine **Ebene** (Mittenebene) welche sowohl zu g_1 als auch zu g_2 parallel ist. (411-420)

199. In der reellen G_4 sind drei Gerade g_1, g_2, g_3 durch ihre Gleichungen gegeben

$$g_1 \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4-3 = 0, \\ x_1+2x_3+2x_4-5 = 0 \\ 2x_1-x_2+x_3-3 = 0 \end{cases} \qquad g_2 \begin{cases} x_1-x_2+x_4-2 = 0 \\ 2x_2+3x_3-x_4-7 = 0 \\ 3x_1-2x_4+4 = 0 \end{cases}$$

$$g_3 \begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4-1 = 0 \\ 3x_1+x_3-5 = 0 \\ 2x_2-3x_4 = 0 \end{cases}$$

Man ermittle die Gleichungen der Treffgeraden an g_1, g_2, g_3.
(411-420)

200. Man bestimme in der reellen $\mathfrak{G}_4$ die Treffgerade t aus dem Punkt P(2,-1,-1,-1) an die Gerade

$$g: \begin{aligned} x_1+x_4 &= 0 \\ x_2-2x_4-2 &= 0 \\ x_3+x_4 &= 0 \end{aligned}$$

und die Ebene

$$\varepsilon: \begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3+2 &= 0 \\ x_2+2x_3+x_4-6 &= 0 \end{aligned}$$

Man gebe die Gleichungen von t sowie die Koordinaten der Treffpunkte an. (411-420)

201. Es sei $M=\{\mathfrak{a}\}+\mathfrak{U} \in \mathfrak{G}$ ein a-Unterraum und $A_i=\{\mathfrak{a}_i\}\subset M$, $i=1,\dots,r$

Man zeige:

a) Für alle $X=\{\mathfrak{r}\}$ mit

$$\mathfrak{r} := \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathfrak{a}_i, \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1_K, \quad r \in \mathbb{N}^* \qquad (*)$$

gilt $X \subset M$. Die Lin.Komb.(*) heißt daher auch <u>affine Linearkombination.</u>

b) $(A_1,\dots,A_r) = \{X \mid \mathfrak{r} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathfrak{a}_i, \ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1_K, \quad r \in \mathbb{N}^*\}, \ X = \{\mathfrak{r}\}$

(411-420)

202. Die Punktmenge C einer reellen a-Geometrie $\mathfrak{G}_n$ heißt <u>konvex,</u> wenn mit zwei Punkten $A_1 = \{\mathfrak{a}_1\}$, $A_2 = \{\mathfrak{a}_2\} \in C$ der Punkt $A = \{\mathfrak{a}\}$ mit

$\mathfrak{a} := \lambda_1\mathfrak{a}_1+\lambda_2\mathfrak{a}_2, \ \lambda_1+\lambda_2 = 1, \ \lambda_1,\lambda_2 \geq 0$ gleichfalls C angehört.

Man zeige: Folgende Mengen sind konvex:

a) a-Unterräume von $\mathfrak{G}_n$

b) die Menge aller a-Punkte, deren Koordinaten bezüglich eines vorgegebenen a-Bezugssystem die Bedingungen

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n < a \ . \ . \ . \ (H_1)$$

bzw.

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n > a \ . \ . \ . \ (H_2)$$

erfüllen. H_1 bzw. H_2 sind die beiden <u>Halbräume</u>, in welche der a-Raum durch die Hyperebene H mit der Gleichung

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n = a \qquad (H)$$

geteilt wird. H selbst kann man nach Bedarf zu H_1 oder H_2 rechnen. ./.

c) der Durchschnitt konvexer Mengen.

Man illustriere c) an der durch

$$\begin{aligned} 12x_1+21x_2+28x_3 &\leq 84 \\ 8x_1+3x_2+4x_3 &\leq 24 \\ x_1\geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

gegebenen konvexen Menge mit Hilfe eines Schrägrisses.

(411-420)

203. M sei eine beliebige Punktmenge der reellen a-Geometrie. Die Punktmenge

$$C(M):= \{X \mid X = \{\mathfrak{r}\},\quad \mathfrak{r}:= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathfrak{a}_i,\quad A_i = \{\mathfrak{a}_i\} \in M\ ,$$
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\quad \bigwedge_{i=1}^{k} \lambda_i \geq 0,\ k \in \mathbb{N}^*\}$$

heißt konvexe Hülle von M. Sie besteht aus allen konvexen Linearkombinationen der Elemente von M, d.h. der Linearkombinationen mit

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_1 = 1,\quad \bigwedge_{i=1}^{k} \lambda_i \geq 0.$$

Ist $M:= \{A_1, A_2\}$, so heißen die Punkte von C(M), für welche $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ gilt, (innere) Punkte der Strecke A_1A_2.

Für deren Endpunkte A_1, A_2 ist $\lambda_1 = 0$ bzw. $\lambda_2 = 0$.

Man zeige:

Die konvexe Hülle von $M:= \{A_1,\ldots,A_{r+1}\}$ besteht aus der Vereinigungsmenge der Punkte aller Strecken, welche A_{r+1} mit den Punkten der konvexen Hülle der restlichen Punkte $\{A_1,\ldots,A_r\}$ verbinden. (411-420)

204. Der reelle a-Raum werde durch die a-Hyperebene L mit der Gleichung $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = c > 0$ in die beiden Halbräume H_1 und H_2 geteilt. Ferner seien $X, Y \notin L$ zwei a-Punkte.

Man zeige:

a) Liegen X und Y in demselben Halbraum, so hat die von X und Y begrenzte Strecke keinen Punkt mit L gemein.

b) Liegen X und Y in verschiedenen Halbräumen, so gibt es genau einen Punkt Z zwischen X und Y, der in L liegt. (411-420)

205. Die konvexe Hülle der r+1 unabhängigen a-Punkte $\{A_1,\ldots,A_{r+1}\}$ heißt r-dimensionales Simplex. Die Punkte A_i heißen Ecken des Simplex, $C(A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_{r+1})$ heißt die der Ecke A_i gegenüberliegende Seite, die $C(A_i,A_j)$ $1 \leq i,j \leq r+1$ sind die Kanten des Simplex. Die Simplizes der Dimensionen 1,2,3,4 heißen Strecke, Dreieck, Tetraeder, Fünfzell.

Der Punkt $X = \{\mathfrak{x}\}$ mit

$$\mathfrak{x} := \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i \mathfrak{a}_i, \quad \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i = 1,$$ liegt im Innern des Simplex,

wenn $\bigwedge_{i=1}^{r+1} \lambda_i > 0$ gilt.

a) Wann liegt ein Punkt im Äußeren des Simplex, wann in einer Seite, wann in einer Kante, wann ist ein Punkt Ecke?

b) $A_i = \{\mathfrak{a}_i\}$, $i=1,\ldots,4$ seien Ecken eines Tetraeders T des 3-dimensionalen reellen a-Raumes. Welche Lagen bezüglich T haben die Punkte $X_j = \{\mathfrak{x}_j\}$, $j=1,2,3,4$ mit

$\mathfrak{a}_1=(2,-1,4)$, $\mathfrak{a}_2=(0,2,-1)$, $\mathfrak{a}_3=(0,5,2)$, $\mathfrak{a}_4=(-11,1,-1)$

$\mathfrak{x}_1=(1,2,3)$, $\mathfrak{x}_2=(-1,0,2)$, $\mathfrak{x}_3=(-1,2,1)$, $\mathfrak{x}_4=(2,1,1)$?

Anleitung: Man bilde im unteren Teil des Schemas von Nr.196. der Vorlesung, in welchem die l.a. Vektoren auftreten, alle Linearkombinationen, deren GRAUSS'sche Kontrollsumme verschwindet. (411-420)

206. Es sei $\{A_1,\ldots,A_{r+1}\}$ eine Menge von a-Punkten. Ist $\dim(A_1,\ldots,A_{r+1}) = s \leq r$, so heißt $C(A_1,\ldots,A_{r+1})$ s-dimensionales konvexes Polytop. Der Punkt A_i heißt Ecke des Polytops, wenn sich keine Punkte $X_1,X_2 \in C(A_1,\ldots,A_{r+1})$ und keine Zahlen $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ finden lassen, sodaß mit $A_i = \{\mathfrak{a}_i\}$, $X_1 = \{\mathfrak{x}_1\}$, $X_2 = \{\mathfrak{x}_2\}$ gilt:

$\mathfrak{a}_i = \lambda_1\mathfrak{x}_1+\lambda_2\mathfrak{x}_2$, $\lambda_1+\lambda_2 = 1$, $\lambda_1,\lambda_2 > 0$. Es müssen nicht alle A_i $(i=1,\ldots,r+1)$ Ecken sein. Sind $A_{i_1},\ldots,A_{i_s}$ die Ecken des Polytops, so gilt $C(A_{i_1},\ldots,A_{i_s}) = C(A_1,\ldots,A_{r+1})$. Die konvexen Polytope der Dimensionen 2,3,4 heißen konvexes Polygon, Polyeder, Vielzell.

Im dreidimensionalen reellen a-Raum seien die Punkte $A_i = \{\mathfrak{a}_i\}$ $i=1,\ldots,6$ gegeben. Welche Punkte sind Ecken des durch die konvexe Hülle bestimmten Polyeders ?

$\overset{\vee}{\mathfrak{a}}_1 = \|1,3,0\|$, $\overset{\vee}{\mathfrak{a}}_2 = \|2,4,8\|$, $\overset{\vee}{\mathfrak{a}}_3 = \|2,0,5\|$, $\overset{\vee}{\mathfrak{a}}_4 = \|5,4,0\|$,
$\overset{\vee}{\mathfrak{a}}_5 = \|-4,4,-5\|$, $\overset{\vee}{\mathfrak{a}}_6 = \|2,2,4\|$.

Anleitung: Man bestimme wie in Beispiel 205 zunächst jene Linearkombinationen der $\mathfrak{a}_i$, deren Koeffizientensumme verschwindet. Durch weitere Bildung von Linearkombinationen scheide man jene $\mathfrak{a}_j$ aus, die konvexe Linearkombinationen der anderen $\mathfrak{a}_i$ sind. Man fertige zur Kontrolle einen Schrägriß an. (411-420)

207. In der reellen affinen Ebene seien die Punkte $A_1(1,-3)$, $A_2(-1,2)$, $A_3(-1,4)$, $A_4(-3,-2)$, $A_5(1,1)$ $A_6(3,-1)$, $A_7(3,1)$, $A_8(4,2)$ gegeben. Welches Polygon wird durch die konvexe Hülle dargestellt ? Welche Punkte sind Ecken ? (411-420)

208. In der reellen G_3 seien die Punkte $A_0(2,-1,1)$, $E_1(5,-1,2)$, $E_2(-2,0,-1)$, $E_3(3,-3,1)$ gegeben. Man führe ein neues Bezugssystem ein, in dem diese Punkte der Ursprung und die Einheitspunkte sind.

a) Wie lauten die Transformationsgleichungen für die Koordinaten ?

b) Welche neuen Koordinaten erhalten die Punkte $X(1,2,3)$, $Y(4,5,6)$?

c) Welche neue Gleichung erhält die durch

$$2x_1-3x_2+x_3 = 7$$

festgelegte Ebene ? (421)

209. In der reellen G_4 seien die Punkte A_0, E_1, E_2, E_3, E_4 gegeben. Man führe ein neues Bezugssystem ein, in dem diese Punkte Koordinatenursprung bzw. Einheitspunkte sind.

1. Wie lauten die Transformationsgleichungen für die Koordinaten ?
2. Welche neuen Koordinaten erhalten die Punkte P_1, P_2 ?
3. Welche neue Gleichung erhält die durch ihre Gleichung festgelegte Hyperebene ?

a) $A_0(1,2,3,4)$, $E_1(2,0,3,3)$, $E_2(3,3,0,3)$, $E_3(1,1,4,6)$,
$E_4(0,2,5,4)$, $P_1(3,0,3,4)$, $P_2(2,-1,8,7)$,
$3x_1+x_2+2x_3-12 = 0$

b) $A_0(-1,2,0,1)$, $E_1(1,3,1,1)$, $E_2(-4,1,-1,2)$, $E_3(-7,0,-3,3)$,
$E_4(-5,0,-2,2)$, $P_1(2,4,1,1)$, $P_2(-9,-1,0,1)$,
$x_1+x_2+x_3+x_4 = 1$ (421)

210. Man gebe die Transformationsformeln für jenen Wechsel des Bezugssystems der reellen G_3 an, bei dem die Ebenen
$2x_1-x_2+x_3+1 = 0$, $x_1-x_2+3x_3-8 = 0$, $3x_1-2x_2+x_3+10 = 0$
der Reihe nach die neuen Koordinatenebenen mit den Gleichungen $x_1' = 0$, $x_2' = 0$, $x_3' = 0$ werden und der Punkt $(-2,3,5)$ die neuen Koordinaten $(1,1,1)$ enthält. Welche Koordinaten haben der neue Ursprung sowie die neuen Einheitspunkte im alten System ? (421)

211. Ein a-Unterraum M von G werde von den a-Punkten $A_i = \{\mathfrak{a}_i\}$, $i=1,...,r$ aufgespannt. Für jeden beliebigen a-Punkt $X = \{\mathfrak{r}\}$ von M gilt dann $\mathfrak{r} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathfrak{a}_i$ mit $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1_K$ (vgl.Bsp.Nr.201). Sei ferner $\alpha = G(f)\colon G \to G'$ eine projektiv-affine Abbildung (Vorl.Nr.425.) von G in G' und es gelte
$A_i' = \{\mathfrak{a}_i'\} = \alpha(A_i) = \{f(\mathfrak{a}_i)\}$.
Man zeige:
Für den Bildpunkt $\alpha(X) = X' = \{\mathfrak{r}'\} = \{f(\mathfrak{r})\} \subset \alpha(M) = M'$ gilt
$$\mathfrak{r}' = f(\mathfrak{r}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(\mathfrak{a}_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathfrak{a}_i', \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$$
(423-434)

212. In der reellen G_3 bestimme man jene projektiv-affine Abbildung, welche vier durch ihre Koordinaten gegebene Punkte in vier andere gegebene überführt.

a)			b)		
$(1,0,0)$	$\mapsto$	$(0,0,3)$	$(1,0,0)$	$\mapsto$	$(0,0,3)$
$(1,1,1)$	$\mapsto$	$(5,1,0)$	$(1,1,1)$	$\mapsto$	$(5,1,0)$
$(1,1,-1)$	$\mapsto$	$(-1,-1,4)$	$(1,1,-1)$	$\mapsto$	$(-1,-1,4)$
$(2,2,0)$	$\mapsto$	$(5,-2,3)$	$(2,2,0)$	$\mapsto$	$(6,-2,1)$

Man rechne a) und b) im selben Schema. ./.

c) $(1,0,0) \mapsto (0,0,3)$
$(1,1,1) \mapsto (5,1,0)$
$(1,1,-1) \mapsto (-1,-1,4)$
$(1,-1,7) \mapsto (5,-2,3)$

Wodurch unterscheiden sich die drei Fälle a),b),c) ?

d) Man bestimme für die Abbildung b) den Bildraum sowie die Fasern. Gibt es Fasern, die ihren Bildpunkt enthalten ? (423-434)

213. Gegeben sei die projektive Affinität α der reellen G_3 in sich durch ihre Gleichungen:

$$x_1' = 1+x_1-x_2+x_3$$
$$x_2' = -5+2x_1+x_2+3x_3$$
$$x_3' = -1-x_1+3x_2-x_3.$$

Man zerlege α in die Affinität α_z, welche den Punkt $Z(1,2,3)$ festläßt und eine Translation t_u, sodaß gilt

$$\alpha = t_u \circ \alpha_z. \qquad (434)$$

214. 1. Man zeige: Die einzige projektive Affinität einer G_n in sich, die $n+1$ gegebene unabhängige Punkte festläßt, ist die Identität.

2. Man zeige:

a) Läßt eine projektive Affinität zwei Punkte fest, so bleibt jeder Punkt ihrer Verbindungsgeraden fest.

b) Läßt eine projektive Affinität drei Punkte fest, so bleibt jeder Punkt ihrer Verbindungsebene fest.

c) Man verallgemeinere die Aussagen a) und b).

3. Man ermittle alle projektiven Affinitäten der reellen G_3 in sich, welche die Punkte $X_1(1,0,1)$, $X_2(4,2,0)$, $X_3(0,-2,1)$, $X_4(3,4,1)$ festlassen. Welche Punkte bleiben noch fest ? (423-434)

215.a) Es sei $G(L)$ eine affine Geometrie der Dimension $\dim G(L) \geq 2$. Eine von der Identität verschiedene projektive Affinität $\alpha: G(L) \to G(L)$ heißt <u>perspektiv,</u> wenn für je zwei Punkte $P,Q \in G(L)$ gilt

$$(P,\alpha(P)) \,/\!/\, (Q,\alpha(Q)).$$

./.

Man zeige:

Ist $A = \{\mathfrak{a}\}$, $A' = \alpha(A) = \{\mathfrak{a}'\}$ $(A \neq A')$ ein entsprechendes Punktepaar, so gilt für jedes weitere Paar $X = \{\mathfrak{r}\}$, $X' = \alpha(X) = \{\mathfrak{r}'\}$ entsprechender Punkte

$$\mathfrak{r}' - \mathfrak{r} = \lambda_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}) \qquad (\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}') \qquad (*)$$

Hierin bedeutet $\lambda_{\mathfrak{r}}$ einen von $\mathfrak{r}$ abhängigen Skalar.

b) Gilt umgekehrt (*) für beliebige Paare X,X' entsprechenden Punkte, so ist α eine perspektive Affinität

c) Man zeige, daß die durch

$$\begin{aligned} x_1' &= 6 + 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 \\ x_2' &= -3 - 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_3' &= 9 + 6x_1 - 3x_2 + 10x_3 \end{aligned}$$

festgelegte projektive Affinität perspektiv ist. (423-434)

216. Es sei α eine von der Identität verschiedene perspektive Affinität auf $\mathfrak{G}_n$. Man zeige:

a) Entsprechende Gerade sind entweder parallel oder sie schneiden einander.

b) Schneiden entsprechende Gerade einander in einem Punkt S, so ist S ein Fixpunkt von α (d.h. es ist $\alpha(S) = S$).

c) Jeder Fixpunkt von α liegt im Schnitt entsprechender Geraden. (423-434)

217. Man zeige: Eine von der Identität verschiedene projektive Affinität von $\mathfrak{G}$ in sich ist genau dann eine Translation, wenn sie perspektiv ist und keinen Fixpunkt besitzt. (423-434)

218. Man zeige: Die Menge aller Fixpunkte einer von der Indentität verschiedenen perspektiven Affinität der $\mathfrak{G}_n$ ist entweder leer oder eine Hyperebene.

Hinweis: Man zeige, daß der Skalarfaktor $\lambda_{\mathfrak{r}}$ von Beispiel 215. die Gestalt $\lambda_{\mathfrak{r}} = c + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ aufweist und verwerte dies. (423-434)

219.a) Man zeige: Eine perspektive Affinität ist durch Angabe eines entsprechenden Punktepaares A,A' und der Fixhyperebene eindeutig bestimmt.
Anleitung: Man zeige dies durch den Nachweis, daß der Skalarfaktor $\lambda_{\mathfrak{r}}$ von Beispeil 215 für jeden Punkt $\{\mathfrak{r}\}$ eindeutig bestimmt ist.

b) Man bestimme die Gleichungen jener projektiven perspektiven Affinität der reellen G_2, welche die Gerade $x_1+x_2-1 = 0$ zur Affinitätsachse (Menge aller Fixpunkte, vgl.Bsp.218) hat und welche den Punkt A (1,3) in den Punkt A'(4,5) überführt.

c) Man bestimme die Gleichungen jener perspektiven Affinität der reellen G_3, welche die Ebene $2x_1+3x_2+4x_3 = 12$ punktweise festläßt und den Ursprung (0,0,0) in den Punkt (4,5,6) überführt.

d) Man bestimme die Gleichungen jener perspektiven Affinitäten der G_n, deren Fixhyperebene die Gleichung $x_n = 0_K$ hat. (423-434)

220. Man zeige, daß eine projektive Affinität von G in sich dann und nur dann eine Translation ist, wenn der zugeordnete Homomorphismus $g: \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ die Identität ist. (423-434)

221. Gegeben sei die projektive Affinität $\alpha = G(f)$ von $G(L)$ in sich, wobei $L = \mathfrak{a}+\mathfrak{U}$, $f=t_{\mathfrak{a}'}\circ g\circ t_{-\mathfrak{a}}$, $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U})$ und $\mathfrak{a}' \in L$ ist. Man zeige, daß folgende Eigenschaften von α äquivalent sind:

1) $\bigwedge_{M \in G} \alpha(M) /\!/ M$,

2) $\bigwedge_{\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}} g(\mathfrak{U}_1) = \mathfrak{U}_1$.

Eine projektive Affinität mit diesen Eigenschaften heißt Dilatation. (423-434)

222.) a) Man zeige: Eine projektive Affinität $\alpha = \mathfrak{C}(f)$ von $\mathfrak{G}(L)$ in sich ist dann und nur dann eine Dilatation, wenn gilt

$$g = \lambda \, id_{\mathfrak{U}}, \; 0_K \neq \lambda \in K$$

(Bezeichnungsweise wie in Beispiel 221.)

b) Man bestimme die Gleichungen jener Dilatationen der $\mathfrak{G}_n$, welche den Ursprung festlassen.

(423-434,450)

223. Man zeige: Eine von der Identität verschiedene Dilatation von $\mathfrak{C}(L)$ in sich ist eine Translation dann und nur dann, wenn sie keinen Fixpunkt hat. (423-434)

224. Es sei $L = \{\mathfrak{a}\}+\mathfrak{U}$ ein NR von $\mathfrak{B}$, ferner sei $M = \{\mathfrak{b}\}+\mathfrak{U}' \subset L$, d.h. $M \in \mathfrak{a}(L)$. Dann ist $\mathfrak{b} \in L$, $\mathfrak{U}' \subset| \mathfrak{U}$. Ferner sei $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}' \oplus \mathfrak{U}''$. Wir zerlegen den Vektor $\mathfrak{b}-\mathfrak{a} \in \mathfrak{U}$ in die direkten Summanden $\mathfrak{b}-\mathfrak{a} = \mathfrak{u}' \oplus \mathfrak{u}''$ ($\mathfrak{u} \in \mathfrak{U}'$, $\mathfrak{u}'' \in \mathfrak{U}''$) und definieren $\mathfrak{a}' := \mathfrak{a}+\mathfrak{u}''$

a) Man zeige $\mathfrak{a}' \in M$. Man kann also setzen: $M = \{\mathfrak{a}'\}+\mathfrak{U}'$. Man nennt $A' = \{\mathfrak{a}'\}$ die <u>Parallelprojektion</u> <u>(den Schrägriß)</u> von $A = \{\mathfrak{a}\}$ auf M in Richtung von $\mathfrak{U}''$.

b) Es sei $g \in$ End $\mathfrak{U}$ der Projektor von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{U}'$ in Richtung von $\mathfrak{U}''$. Dann sei mit den oben definierten Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$

$$f := t_{\mathfrak{a}'} o g o t_{-\mathfrak{a}}.$$

$\alpha = \mathfrak{C}(f)$ heißt Parallelprojektor von $\mathfrak{C}(L)$ auf $\mathfrak{C}(M)$ in Richtung von $\mathfrak{U}''$. Man zeige:

1. $X = \{\mathfrak{x}\} \in \mathfrak{G}(L) \Rightarrow X' = \{\mathfrak{x}'\} = \{f(\mathfrak{x})\} \in \mathfrak{G}(M)$
2. X' ist Schrägriß von X auf M.
3. $\alpha = \mathfrak{G}(f)$ ist idempotent
4. $X' = \{\mathfrak{x}'\}$ sei Schrägriß von $X = \{\mathfrak{x}\}$ in Richtung von $\mathfrak{U}''$.
   Man zeige
   $$X' = M \cap N \text{ mit } N := \{\mathfrak{x}\}+\mathfrak{U}''$$
   N heißt <u>projizierender Raum</u> durch X.
   Man interpretiere alle Begriffe in der reellen $\mathfrak{G}_2$ bzw. $\mathfrak{G}_3$

(151-153,423-434)

225. In der reellen $\mathfrak{G}_3$ sei

$$5x_1+x_2+6x_3 = 17$$

die Gleichung der Ebene ε bezüglich eines Bezugssystems $S := \{A_0, E_1, E_2, E_3\}$. Man bestimme den Parallelprojektor von $\mathfrak{G}_3$ auf $\mathfrak{G}(\varepsilon)$ in Richtung der Verbindung der beiden Punkte $P_1(2,4,5)$, $P_2(4,5,3)$. ./.

a) Man gebe die Gleichungen des Parallelprojektors bezüglich S an

b) Man gebe seine Gleichungen bezüglich S und des durch die Punkte $A_0'(1,0,?)$, $E_1'(2,1,?)$, $E_2'(-1,4,?) \in \mathfrak{a}(\varepsilon)$ gegebenen Bezugssystems von $\mathfrak{a}(\varepsilon)$ an.
Man verwende Beispiel 224.b.4. (423-434)

226. Bezüglich eines Bezugssystems der reellen $\mathfrak{a}_3$ haben zwei a-Ebenen die Gleichungen

$$\varepsilon \ldots\ x_1+x_2+x_3 = 1,$$
$$\varepsilon' \ldots\ 3x_1'+2x_2'+3x_3' = 6.$$

$A_0(1,0,0)$, $E_1(0,1,0)$, $E_2(0,0,1)$, $X(x_1,x_2,x_3)$ seien Punkte von ε und $A_0'(2,0,0)$, $E_1'(0,3,0)$, $E_2'(0,0,2)$, $X'(x_1',x_2',x_3')$ Punkte von ε'

a) Wie lauten die Koordinaten von $X(y_1,y_2) \in \mathfrak{a}(\varepsilon)$, bezogen auf $A_0,E_1,E_2, \in \mathfrak{a}(\varepsilon)$, wie die Koordinaten von $X'(y_1',y_2') \in \mathfrak{a}(\varepsilon')$ bezüglich $A_0',E_1',E_2' \in \mathfrak{a}(\varepsilon')$?

b) In $\mathfrak{a}_3$ werde ε auf ε' in Richtung von $(1,1,1)$ parallelprojiziert. Wie lautet der Zusammenhang der Koordinaten (y_1',y_2') und (y_1,y_2), wenn Y' der Parallelriß von Y ist ?
(423-434)

227. <u>Definition:</u> Es seien $\mathfrak{a}(L)$ und $\mathfrak{a}(L')$ affine Geometrien derselben Dimension. Unter einer <u>Affinität</u> zwischen $\mathfrak{a}(L)$ und $\mathfrak{a}(L')$ versteht man eine <u>bijektive</u> Abbildung $\alpha: \mathfrak{a}(L) \to \mathfrak{a}(L')$ mit der Eigenschaft

$$\bigwedge_{M,N \in \mathfrak{a}(L)} \quad M \subset L \Leftrightarrow \alpha(M) \subset \alpha(N)$$

Man zeige: Ist $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von a-Unterräumen aus $\mathfrak{a}(L)$, so gilt

a) $\alpha\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} \alpha(M_i)$, wenn $\bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset$

b) $\alpha((M_i,\ i \in I)) = (\alpha(M_i),\ i \in I)$

Ferner zeige man:

c) $\dim \alpha(M) = \dim M$

d) $M /\!/ N \Leftrightarrow \alpha(M) /\!/ \alpha(N)$

<u>Anleitung:</u> Für a) und b) verwende man die Tatsache, daß $\bigcap_{i\in I} M_i$ der größte a-Raum ist, der in allen M_i enthalten ist, $(M_i, i\in I)$ der kleinste a-Raum, der alle M_i umfaßt.
Für c) betrachte man Ketten von a-Unterräumen der Form

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_k \neq \emptyset$$

mit $M_{i+1} \neq M_i$ für $i = 0,1,\ldots,k-1$. Für die "Länge" k der längstmöglichen Kette gilt dim M = k.
Für d) beachte man Vorl.Nr. 431.
<u>Bemerkung:</u> Man beachte, daß über die Grundkörper K,K' der die Nebenräume L, L' umfassenden Vektorräume nichts vorausgesetzt wird. K und K' können daher sehr wohl verschieden sein. (408-434)

228. Es seien $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}'$ zwei Vektorräume über den Körpern K und K', ζ sei ein Körper-Isomorphismus $\zeta: K \to K'$.
$L = \mathfrak{a}+\mathfrak{U}$ bzw. $L' = \mathfrak{a}'+\mathfrak{U}'$ seien a-Räume gleicher Dimension in $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}'$, $\mathfrak{G}(L)$ bzw. $\mathfrak{G}(L')$ die zugehörigen affinen Geometrien. Ferner sei g ein ζ-semilinearer Isomorphismus $g: \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ und $f := t_{\mathfrak{a}'} \circ g \circ t_{-\mathfrak{a}}: L \to L'$. Man zeige:
$\alpha = \mathfrak{G}(f): \mathfrak{G}(L) \to \mathfrak{G}(L')$ ist eine Affinität zwischen $\mathfrak{G}(L)$ und $\mathfrak{G}(L')$ im Sinne der Definition von Beispiel 227.
(119,408-434)

229. Seien $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}'$ zwei Vektorräume über den Körpern K und K' (Char K $\neq$ 2, Char K' $\neq$ 2) und $L = \mathfrak{a}+\mathfrak{U}$, $L' = \mathfrak{a}'+\mathfrak{U}'$ zwei NRe derselben Dimension in den gegebenen Vektorräumen.
$\mathfrak{G}(L)$ bzw. $\mathfrak{G}(L')$ seien die zugehörigen affinen Geometrien und α eine Affinität von $\mathfrak{G}(L)$ auf $\mathfrak{G}(L')$ gemäßt der Definition von Beispiel 227.
Man zeige:

a) Ist $\dim \mathfrak{G}(L) = \dim \mathfrak{G}(L') = 1$, so existiert eine <u>Bijektion</u> $\zeta: K \to K'$ mit der Eigenschaft $\zeta(0_K) = 0_{K'}$, $\zeta(1_K) = 1_{K'}$.
b) Es sei $\dim \mathfrak{G}(L) = \dim \mathfrak{G}(L') \geq 2$ und o.B.d.A. sei $A' = \{\mathfrak{a}'\} = \alpha(A) = \alpha(\{\mathfrak{a}\})$. Dann existiert ein <u>Isomorphismus</u> $\zeta: K \to K'$ und ein ζ-semilinearer Isomorphismus $g: \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$, sodaß $\alpha = \mathfrak{G}(f)$ mit $f = t_{\mathfrak{a}'} \circ g \circ t_{-\mathfrak{a}}$ ist.

Sowohl g als ζ sind durch α eindeutig bestimmt.

Hinweis: a) Man wähle zwei beliebige Punkte $X = \{\mathfrak{x}\}$, $Y = \{\mathfrak{y}\}$ aus $\mathfrak{G}(L)$ und stelle jeden weitern Punkt $Z = \{\mathfrak{z}\}$ in der Form $\mathfrak{z} = \{1_K-\lambda\}\mathfrak{x}+\lambda\mathfrak{y}$ dar (Vorl.Nr. 80). Hier bleibt offen, ob ζ von der Wahl von $\mathfrak{x},\mathfrak{y}$ abhängt.

b) 1. Man zeige zunächst, daß α eine Bijektion $g:\mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ festlegt.

2. Dann zeige man, daß die nach a) auf jeder Geraden existierende Bijektion ζ für alle Geraden durch $A=\{\mathfrak{a}\}$ dieselbe ist. Man wähle hiezu $X_1 = \{\mathfrak{x}_1\}$, $X_2 = \{\mathfrak{x}_2\}$ $\in\mathfrak{G}(L)$ beliebig und betrachte auf den Geraden (A,X_1) und (A,X_2) die zum selben λ gehörigen Punkte $Y_1 = \{\mathfrak{y}_1 = (1_K-\lambda)\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{x}_1\}$, $Y_2 = \{\mathfrak{y}_2 = (1_K-\lambda)\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{x}_2\}$. Man verwende die Tatsache $(X_1,X_2)/\!\!/(Y_1,Y_2)$ und daß daraus $(\alpha(X_1), \alpha(X_2))/\!\!/(\alpha(Y_1), \alpha(Y_2))$ folgt.

3. Zum Nachweis, daß für die Bijektion g

$$\bigwedge_{\mathfrak{u},\mathfrak{v}\in\mathfrak{U}} g(\mathfrak{u}+\mathfrak{v}) = g(\mathfrak{u})+g(\mathfrak{v})$$

gilt, betrachte man die Eckpunkte des Parallelogrammes $A = \{\mathfrak{a}\}$, $X = \{\mathfrak{x} = \mathfrak{a}+\mathfrak{u}\}$, $Y = \{\mathfrak{y} = \mathfrak{a}+\mathfrak{v}\}$, $Z = \{\mathfrak{z} = \mathfrak{a}+(\mathfrak{u}+\mathfrak{v})\}$ und deren Bilder unter α.

Zum Nachweis, daß $g(\lambda\mathfrak{u}) = \zeta(\lambda)g(\mathfrak{u})$ gilt, betrachte man die Bilder der Punkte $\{\mathfrak{x} = \mathfrak{a}+\mathfrak{u}\}$ und $\{\mathfrak{y} = \mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{u}\}$ und beachte 2.

4. Mit Hilfe der Eigenschaften von g zeige man, daß die Bijektion ζ ein Isomorphismus ist.

Bezeichnungsweise: Ist $K = K'$ und $\zeta = id_K$, so heißt α projektive Affinität (Vorl.Nr.425.) (119,408-434)

PROJEKTIVE GEOMETRIE

230. Wieviele Punkte und Gerade enthält die p-Ebene P_2 über Z_2? Wieviele Punkte liegen auf einer Geraden, wieviele Geraden gehen durch einen Punkt ? (435)

231. Man beweise den Satz von PAPPUS: Sind A,B,C drei Punkte einer Geraden der P_2, A',B',C' drei Punkte einer anderen Geraden, so sind die drei Punkte
$L:= (B+C')\cap(B'+C)$, $M:= (C+A')\cap(C'+A)$, $N:= (A+B')\cap(A'+B)$
kollinear.
Anleitung: Man lege die Punkte durch geeignete Vektoren des zugeordneten $\mathfrak{B}_3$ fest.
Man beachte, daß der Beweis des Satzes von der Kommutativität des Grundkörpers Gebrauch macht. (435,436)

232. Man beweise den Satz von DESARGUES: Gegeben seien zwei Dreiecke, A,B,C und A',B',C' einer P_2. Die Verbindungslinien A+A', B+B', C+C' entsprechender Punkte gehen dann und nur dann durch denselben Punkt P, wenn die Schnittpunkte $L = a\cap a'$, $M = b\cap b'$, $N = c\cap c'$ entsprechender Dreieckseiten auf derselben Geraden liegen.
Anleitung: Man lege die Punkte durch geeignete Vektoren des der P_2 zugeordneten $\mathfrak{B}_3$ fest. Man beachte, daß der Beweis die Kommutativität des Grundkörpers nicht voraussetzt! (435,436)

233. Man beweise den Satz von FANO: Die Diagonalpunkte eines vollständigen Vierecks einer P_2 sind dann und nur dann kollinear, wenn der Grundkörper die Charakteristik 2 hat.
Erklärung: Die Menge von vier Punkten (die zu je dreien nicht kollinear sind) einer P_2 zusammen mit ihren sechs Verbindungsgeraden (den Diagonalen) heißt vollständiges Viereck. Die drei von den gegebenen Punkten verschiedenen Schnittpunkte der Diagonalen heißen Diagonalpunkte.
Die Forderung, daß die Diagonalpunkte eines vollständigen Vierecks nicht kollinear sind, heißt Axiom von FANO. (435,436)

234. Konstruktion des 4.harmonischen Punktes:
Im P_2 seien die Punkte X,Y gegeben und auf ihrer Verbindungsgeraden der Punkt Z beliebig gewählt. Es sei A ein beliebiger Punkt nicht auf X+Y und B ein beliebiger, von Z und A verschiedener Punkt auf Z+A. Gilt dann
$C := (X+A)\cap(Y+B)$, $D := (X+B)\cap(Y+A)$, $T := (X+Y)\cap(C+D)$,
so zeige man (Char K $\neq$ 2):
a) Die Lage von T auf X+Y ist von der Wahl der Hilfspunkte A,B unabhängig.
b) T ist der vierte harmonische Punkt zu Z bezüglich der Punkte X und Y. (435,436,442)

235. $A_0(1:2:3:4)$, $A_1(-1:3:0:1)$, $A_2(1:-1:2::1)$, $E(1:4:1:?)$ $X(0:8:3:?)$ sind fünf p-Punkte, welche derselben p-Ebene ϵ der reellen P_3 angehören. Welche Koordinaten erhält X in jenem Bezugssystem von ϵ, welches durch A_0, A_1, A_2, E festgelegt ist? (437-440)

236. Wie man einen reellen Vektorraum in einen komplexen einbetten kann, läßt sich auch eine reelle projektive Geometrie in eine komplexe fortsetzen. Man läßt dann als Koordinaten eines p-Punktes $X(X_1:..:X_n)$ auch komplexe X_j zu. Man spricht in diesem Fall von einem komplexen Punkt. Ein Punkt heißt reell, wenn seine Koordinaten reelle Verhältnisse haben. Eine Hyperebene heißt komplex, wenn mindestens zwei Koeffizienten ihrer Gleichung ein komplexes Verhältnis besitzen. Ersetzt man die Koeffizienten durch ihre konjugiert komplexen, so erhält man die zur gegebenen konjugiert komplexe (k.k) Hyperebene. Da man jeden projektiven Unterraum als Schnitt von Hyperebenen darstellen kann, läßt sich in der komplexen Erweiterung zu jedem projektiven Unterraum der k.k. angeben. Man zeige speziell für die komplexe Erweiterung der reellen P_3:
a) Jede komplexe Ebene enthält genau eine reelle Gerade, nämlich die Schnittgerade mit ihrer k.k.Ebene.
b) Die Verbindungsgerade zweier k.k. Punkte ist reell,

c) Jede in einer reellen Ebene liegende komplexe Gerade enthält genau einen reellen Punkt.

d) Eine komplexe Gerade enthält keinen, einen oder unendlich viele reelle Punkte. Eine komplexe Gerade ohne reellen Punkt heißt hochkomplex, enthält sie einen reellen Punkt niederkomplex, im dritten Fall reell.
Wie kann man diese drei Fälle charakterisieren ?

e) Durch eine niederkomplexe Gerade gibt es genau eine reelle Ebene. (437-446)

*)
237.a) X(1:2:3:4), Y(5:6:7:8), Z(3:2:?:?) seien drei auf derselben p-Geraden liegenden p-Punkte der reellen $\mathfrak{P}_3$. Man ermittle den 4.harmonischen Punkt T zu Z bezüglich X und Y.

b) g sei die von den p-Punkten $X=H[\mathfrak{x}]$, $Y=H[\mathfrak{y}]$ aufgespannte p-Gerade. Ferner seien $Z=H[\mathfrak{z}]$ und $T=H[\mathfrak{t}]$ mit $\mathfrak{z}=\lambda_1\mathfrak{x}+\lambda_2\mathfrak{y}$, $\mathfrak{t}=\mu_1\mathfrak{x}+\mu_2\mathfrak{y}$ zwei p-Punkte von g. Man bestimme den Wert des Doppelverhältnisses D(XYZT). Wann liegen die Punkte (in der angegebenen Reihenfolge) harmonisch?

c) In der $\mathfrak{P}_n$(Char K $\neq$ 2) seien zwei Punkte $A(A_0:A_1:\dots:A_n)$, $B(B_0:B_1:\dots:B_n)$ gegeben. Zwei Punkte $X(X_0:X_1:\dots:X_n)$, $Y(Y_0:Y_1:\dots:Y_n)$ der Verbindungsgeraden A+B haben die Darstellung

$$\begin{aligned} X_j &= \alpha_0 A_j+\alpha_1 B_j, \\ Y_j &= \beta_0 A_j+\beta_1 B_j. \end{aligned} \qquad j=0,1,\dots,n$$

Man gebe den Wert des Doppelverhältnisses D(A,B,X,Y) als Funktion der Parameter α_i,β_i an. (442)

238. Man gebe die Transformationsgleichungen für jenen Wechsel des Bezugssystems der reellen $\mathfrak{P}_3$ an, bei dem $\bar{A}_0,\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{A}_3$ die neuen Grundpunkte, $\bar{E}$ der neue Einheitspunkt wird.

a) $\bar{A}_0(1:1:2:-1)$, $\bar{A}_1(1:2:1:0)$, $\bar{A}_2(1:0:-1:2)$, $\bar{A}_3(1:-1:1:1)$
$\bar{E}(1:1:2:3)$

b) $\bar{A}_0(1:-1:2:1)$, $\bar{A}_1(1:-1:2:-3)$, $\bar{A}_2(1:1:-1:1)$, $\bar{A}_3(1:-2:-1:5)$
$\bar{E}(0:4:3:0)$

c) $\bar{A}_0(1:0:1:1)$, $\bar{A}_1(-2:1:-1:0)$, $\bar{A}_2(3:-1:1:2)$, $\bar{A}_3(0:1:-1:-2)$
$\bar{E}(3:3:-1:-2)$ (444)

*) 236.A. siehe Ergänzungen Seite 71

239. In der reellen P_4 sind zwei Unterräume durch ihre Gleichungen

a) $L: \begin{cases} X_0+X_1-X_2 = 0 \\ X_1-X_4 = 0 \\ 2X_2-X_3 = 0 \end{cases}$ $\quad$ $M: \begin{cases} 2X_0+X_1-X_2+3X_4 = 0 \\ 5X_0+X_1-X_3+10X_4 = 0 \end{cases}$

b) $L: \begin{cases} X_0+X_1-X_2 = 0 \\ 3X_2-2X_3-5X_4 = 0 \end{cases}$ $\quad$ $M: \begin{cases} 4X_0-X_1-X_3 = 0 \\ 2X_1-X_2-X_4 = 0 \end{cases}$

gegeben. Man bestimme die Gleichungen ihres Durchschnittes und des von ihnen aufgespannten p-Raumes. (225,446)

240. In der reellen P_3 seien der p-Punkt P(1:2:2:2) sowie die beiden p-Geraden

$$g_1 \begin{cases} 4X_0-2X_1-X_2 = 0 \\ 2X_0+X_1-X_3 = 0 \end{cases} \qquad g_2 \begin{cases} X_0-X_1+X_2 = 0 \\ X_0-X_3 = 0 \end{cases}$$

gegeben. Man bestimme die Gleichungen der p-Treffgeraden aus P an g_1 und g_2 und gebe die Treffpunkte an. (446)

241. In der reellen P_3 seien zwei p-Gerade

$$g_1 \begin{cases} 5X_0-X_1-X_2 = 0 \\ 5X_0-2X_1+X_3 = 0 \end{cases} \qquad g_2 \begin{cases} X_0-X_1-X_2 = 0 \\ X_0+2X_1-X_3 = 0 \end{cases}$$

und die Ebene ε

$$2X_0-X_2-X_3 = 0$$

Man gebe die Gleichungen der Verbindungsgeraden $(g_1 \cap \varepsilon) + (g_2 \cap \varepsilon)$ an. (446)

242. Man bestimme die Gleichungen jener projektiven Kollineation des reellen P_3 in sich, welche die Punkte $X_1(1:0:0:1)$, $X_2(1:0:1:0)$, $X_3(1:1:0:0)$, $X_4(1:1:0:-1)$, $X_5(0:1:1:0)$ in die Punkte $X_1'(0:1:0:-1)$, $X_2'(2:1:-3:-1)$, $X_3'(0:1:1:1)$, $X_4'(1:1:2:4)$, $X_5'(0:1:1:-3)$ überführt. (447-453)

243. In der reellen $P_3 = P(\mathfrak{B}_4)$ ist eine p-kollineare Selbstabbildung π gegeben durch

a)
$$\begin{aligned} \lambda X_0' &= 2X_0 + X_1 + X_2 + X_3 \\ \lambda X_1' &= 2X_0 + X_1 - 2X_2 - 2X_3 \\ \lambda X_2' &= 2X_0 - 2X_1 + X_2 - 2X_3 \\ \lambda X_3' &= -2X_0 + 2X_1 + 2X_2 + 5X_3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \lambda X_0' &= X_0 + 2X_1 + 2X_2 + 2X_3 \\ \lambda X_1' &= 4X_0 - X_1 - 4X_2 - 4X_3 \\ \lambda X_2' &= 4X_0 - 4X_1 - X_2 - 4X_3 \\ \lambda X_3' &= -4X_0 + 4X_1 + 4X_2 + 7X_3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \lambda X_0' &= -2X_0 + 2X_1 + X_2 + 2X_3 \\ \lambda X_1' &= -4X_0 + 4X_1 + 4X_3 \\ \lambda X_2' &= 2X_2 \\ \lambda X_3' &= X_2 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \lambda X_0' &= -3X_0 + 2X_1 + X_2 + 2X_3 \\ \lambda X_1' &= -4X_0 + 3X_1 + 4X_3 \\ \lambda X_2' &= X_2 \\ \lambda X_3' &= X_2 - X_3 \end{aligned}$$

Man bestimme:

1. jene p-Punkte von P_3, deren Bild unbestimmt ist
2. die Fixpunkte von π
3. $\pi(\mathfrak{B}_4)$
4. die zum Bildpunkt $\pi(X) = (X_0' : X_1' : X_2' : X_3')$ gehörige Faser.
5. Man zeichne die Ebene $X_0 = 0$ als Fernebene aus und interpretiere die Ergebnisse in der so gewonnenen Anschauungs-P_3. (447-453,461)

244. Man bestimme ein neues p-Koordinatensystem derart, daß die Gleichungen der p-kollinearen Abbildungen von Beispiel 243. Normalform annehmen. Man verwerte möglichst die dort bereits gewonnenen Rechenergebnisse. (207-216,447-453)

245. Eine p-Kollineation π der reellen P_3 in sich ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \lambda X_0' &= 3X_0 - 2X_1 - 2X_2 \\ \lambda X_1' &= -X_0 + 3X_1 + X_2 - X_3 \\ \lambda X_2' &= 5X_0 - 6X_1 - 4X_2 + X_3 \\ \lambda X_3' &= 2X_0 - 2X_1 - 2X_2 + X_3 \end{aligned}$$

Man ermittle:

a) die Fixpunkte von π

b) die Fixebenen von π (447-453)

246.1) Durch

$$3x_1' = 3x_1 - 14x_2 + 4x_3 + 10$$
$$3x_2' = 3x_1 + 16x_2 - 2x_3 - 14$$
$$3x_3' = 6x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 19$$

werde eine Affinität α der reellen G_3 in sich festgelegt. Man bestimme:

a) Die Fixpunkte von α

b) Jene Ebenen, die unter α in sich übergehen (aber nicht notwendig punktweise festbleiben müssen).

2) Man löse dieses Beispiel auch, indem man G_3 in P_3 einbettet. (429,447-453,459)

*)

247. In der P_3 sei eine kollineare Selbstabbildung durch ihre Gleichungen gegeben. Man führe ein neues Bezugssystem so ein, daß die Gleichungen der Selbstabbildung Normalform annehmen.

a)
$$\begin{aligned}\lambda X_0' &= 3X_0 - X_1 + 5X_2 + X_3\\ \lambda X_1' &= -X_0 + 3X_1 - 5X_2\\ \lambda X_2' &= -2X_0 + X_1 - 4X_2 - X_3\\ \lambda X_3' &= - X_1 + X_2\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\lambda X_0' &= X_0 - 2X_1 + 2X_2 - X_3\\ \lambda X_1' &= X_0 + 4X_1 - 2X_2 + 2X_3\\ \lambda X_2' &= 2X_1 - X_2 + X_3\\ \lambda X_3' &= - X_1 + X_2\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\lambda X_0' &= 3X_0 + X_1 + 2X_2 + X_3\\ \lambda X_1' &= -2X_0 - X_1 - X_2 - X_3\\ \lambda X_2' &= -2X_0 - X_1 - X_2 - X_3\\ \lambda X_3' &= X_0 + X_1 + X_3\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\lambda X_0' &= X_0 - 4X_1 + 5X_2 - 3X_3\\ \lambda X_1' &= 2X_0 + 3X_1 - 2X_2\\ \lambda X_2' &= 8X_1 - 8X_2 + 3X_3\\ \lambda X_3' &= -2X_0 + 8X_1 - 9X_2 + 4X_3\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}\lambda X_0' &= -2X_0 + X_1 + 2X_2 - 5X_3\\ \lambda X_1' &= 3X_0 - X_1 - 3X_2 + 7X_3\\ \lambda X_2' &= 6X_0 - 4X_1 - 5X_2 + 14X_3\\ \lambda X_3' &= 4X_0 - 2X_1 - 4X_2 + 10X_3\end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned}\lambda X_0' &= 9X_0 + 11X_1 - 32X_2 - 6X_3\\ \lambda X_1' &= 3X_0 + 5X_1 - 12X_2 - 2X_3\\ \lambda X_2' &= 5X_0 + 5X_1 - 16X_2 - 2X_3\\ \lambda X_3' &= -3X_0 - 3X_1 + 10X_2 + 2X_3\end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned}\lambda X_0' &= -7X_0 - 5X_1 - 10X_2 + X_3\\ \lambda X_1' &= 2X_0 - 5X_1 + 5X_2 + 4X_3\\ \lambda X_2' &= 4X_0 + 5X_1 + 5X_2 - 2X_3\\ \lambda X_3' &= X_0 - 10X_1 + 5X_2 + 7X_3\end{aligned}$$

(332-344,444-453)

*) 246.A. s.Ergänzungen

248. In der P_3 sei eine kollineare Selbstabbildung gegeben. Man führe ein neues Bezugssystem so ein, daß die Gleichungen der Selbstabbildung Normalform nach

1. Vorl.Nr. 332
2. Vorl.Nr. 344

annehmen.

Hinweis: Man beachte, daß sich ein Polynom 4.Grades über R stets in zwei quadratische Polynome über R zerlegen läßt.

a)
$$\begin{aligned}
\lambda X_0' &= -X_0 - 2X_1 - X_2 \\
\lambda X_1' &= 3X_0 + X_1 + 2X_2 + 3X_3 \\
\lambda X_2' &= -X_0 - X_2 - 2X_3 \\
\lambda X_3' &= 2X_0 + 3X_1 + 3X_2 + X_3
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\lambda X_0' &= -3X_0 - X_1 - 6X_2 + 8X_3 \\
\lambda X_1' &= 6X_0 + 3X_1 + 10X_2 - 14X_3 \\
\lambda X_2' &= 22X_0 + 6X_1 + 20X_2 - 23X_3 \\
\lambda X_3' &= 14X_0 + 4X_1 + 11X_2 - 12X_3
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
\lambda X_0' &= 25X_0 - 25X_1 + 26X_3 \\
\lambda X_1' &= 2X_0 - X_1 + 2X_3 \\
\lambda X_2' &= - X_3 \\
\lambda X_3' &= -16X_0 + 16X_1 + X_2 - 16X_3
\end{aligned}$$

(332-344,447-453)

249. Man gebe alle p-Kollineationen der reellen P_2 durch die Normalform ihrer Matrizen an und charakterisiere sie durch Angabe der Fixpunkte und der Fixgeraden (7 Typen incl. der Identität).

Anleitung: Man beachte, daß das charakteristische Polynom entweder drei (ev.mehrfach zählende) Faktoren 1.Grades oder einen Faktor 1. und einen Faktor 2.Grades hat. (vgl.Beispiel 168.) (447-453)

250. Man gebe alle Automorphismen der reellen P_3 durch die Normalform ihrer Matrizen an (20 Typen incl. der Identität) vgl.Beispiel 169 und 249.

251. In der reellen p-Ebene habe eine Kurve die Gleichung

$$X_0^2X_2 = X_1^3$$

Man veranschauliche diese Kurve in der a-Ebene, indem man der Reihe nach die Geraden

a) $X_0 = 0$
b) $X_1 = 0$
c) $X_2 = 0$
d) $X_0 - X_1 = 0$

als Ferngeraden auffaßt.
Anleitung zu d): Man führe ein neues p-Bezugssystem ein, in welchem $\lambda X_0' = X_0 - X_1$ ist. Da das neue Bezugssystem hiedurch noch nicht eindeutig bestimmt ist, setze man etwa $\lambda X_1' = X_1$, $\lambda X_2' = X_2$. (461)

252. Eine projektive Kollineation π einer $\mathcal{P}_n$ in sich ($n \geq 2$), welche eine p-Hyperebene punktweise festläßt, heißt Zentralkollineation.
Ein Punkt Z der $\mathcal{P}_n$ mit der Eigenschaft, daß für alle X die Punkte $Z, X, \pi(X)$ kollinear sind, heißt Zentrum von π.
Man zeige:
Eine von der Identität verschiedene Zentralkollineation π hat ein und nur ein Zentrum Z (das ev. in der festen Hyperebene liegt). Z ist ein Fixpunkt von π. (447-453)

253. Es sei $\pi = \mathcal{P}_n(f)$ eine p-Kollineation der $\mathcal{P}_n$ auf sich. Es existiere ein Zentrum $Z = H[\mathfrak{z}]$, d.h. zu jedem Punkt $X = H[\mathfrak{x}]$ existiert ein $\lambda \in K$, sodaß gilt $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \lambda\mathfrak{z}$.
Man zeige:

a) Die Abbildung $\mathfrak{y}^*: \mathfrak{x} \mapsto \lambda$ ist eine Linearform.
b) π ist eine Zentralkollineation (die sich ev. auf die Idendität reduziert), deren Fixpunkte-Hyperebene der Kern von $\mathfrak{y}^*$ ist.
c) Man ermittle die Gleichungen jener Zentralkollineation der reellen $\mathcal{P}_3$ in sich, welche die Ebene
$$X_0 + X_2 + 2X_3 = 0$$
zur Menge der Fixpunkte hat, den Punkt $Z(1:0:-2:1)$ als Zentrum besitzt und den Punkt $A(2:1:-3:1)$ in den Punkt $A'(1:-1:?:?)$ überführt. (368,447-453)

254.a) Man ergänze die affine Ebene von Beispiel 179. durch Hinzunahme einer Ferngeraden zu einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}_2$. Wieviele Punkte und Geraden enthält $\mathfrak{P}_2$, wieviele Punkte liegen auf einer Geraden, wieviele Geraden gehen durch einen Punkt ? (vgl.Beispiel 230.)

b) Man ergänze die affine Ebene von Beispiel 180. zu einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}_2$. Man stelle die Anzahl der Punkte und Geraden fest und kläre die Inzidenzverhältnisse! (454f)

BILINEARFORMEN, QUADRATISCHE FORMEN, HERMITESCHE UND SYMMETRISCHE FORMEN UND MATRIZEN

255.a) Eine Bilinearform über $\mathbb{R}$ ist durch ihre Matrix

$$B_5 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

festgelegt. Man bestimme die zugehörige quadratische Form und die ihr zugeordnete symmetrische Matrix.

b) Man gebe die der quadratischen Form auf $\mathbb{R}^4$

$$q(\mathfrak{x}) = x_1^2-2x_1x_2+3x_1x_4-x_2^2+4x_2x_3-x_3x_4+x_4^2$$

zugeordnete symmetrische Bilinearform an.

c) Bezüglich einer gegebenen Basis habe die quadratische Form $q(\mathfrak{x})$ über $\mathfrak{V}_n$ die Darstellung

$$q(\mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

Man gebe die zugehörige symmetrische Bilinearform $\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ (die sog. "Polarform" zu $q(\mathfrak{x})$) an. (463-467)

256.a) Man bestimme eine zu

$$B_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

kongruente Diagonalmatrix B_3' und gebe die Transformationsmatrix A_3 an ($K = \mathbb{R}$).

b) Bezüglich einer gegebenen Basis des reellen $\mathfrak{R}_3$ hat eine symmetrische Bilinearform die Gestalt

$$\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 2x_1y_2+x_1y_3+2x_2y_1-x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2$$

Man bestimme eine neue Basis, in welcher $\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ eine Normalform gemäß Vorl.Nr.475. annimmt.

c) Bezüglich einer gegebenen Basis des reellen $\mathfrak{R}_3$ hat eine quadratische Form die Gleichung

$$q(\mathfrak{x}) = x_1^2-2x_1x_2+4x_1x_3-x_2^2+2x_2x_3-x_3^2$$

Man bestimme eine neue Basis, in welcher $q(\mathfrak{x})$ eine Normalform gemäß Vorl.Nr.475. annimmt. (469-476)

257. Über Z_5^3 sei bezüglich der kanonischen Basis die quadratische Form

$$q(\mathfrak{x}) = x_1^2+4x_1x_3+2x_3^2+x_2x_3+3x_3^2$$

gegeben. Man bestimme eine Basis, bezüglich welcher $q(\mathfrak{x})$ eine Diagonalmatrix entspricht. (472)

*)
258.a) Welchen Bedingungen müssen die Koeffizienten a_{ij} der quadratischen Form

$$q(\mathfrak{x}) = a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$$

über dem reellen $\mathfrak{R}_2$ genügen, damit $q(\mathfrak{x})$ indefinit, positiv oder negativ definit ist?

b) Man bestimme jene Parameterwerte $t \in R$, für welche die quadratische Form auf R^4

$$q(\mathfrak{x}) = (5t+1)x_1^2+(5t+4)x_2^2+(5t+6)x_3^2+(5t-1)x_4^2+4x_1x_2-24x_3x_4$$

indefinit, positiv oder negativ definit bzw. semidefinit wird. (477-489)

259. Im R^4 sei eine symmetrische Bilinearform β durch

$$S_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{gegeben.}$$

Man bette den R^4 in kanonischer Weise in einen C^4 ein. Man erweitere β zu einer hermiteschen Semibilinearform σ

---

*) 257.A. siehe Ergänzungen S.73

und bestimme $\sigma(\tilde{\mathfrak{x}},\tilde{\mathfrak{y}})$ mit $\tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}_1+i\mathfrak{x}_2$, $\tilde{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y}_1+i\mathfrak{y}_2$ mit $\mathfrak{x}_1=(1,1,0,1)$, $\mathfrak{x}_2=(2,0,0,2)$, $\mathfrak{y}_1=(0,1,1,-1)$, $\mathfrak{y}_2=(-2,1,0,1)$ (483)

260.a) Man bestimme eine zur symmetrischen Matrix

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

kongruente Diagonalmatrix und gebe die Transformationsmatrix an, wenn der Grundkörper

1) $\mathbb{R}$, 2) $\mathbb{C}$ ist.

b) Einer HERMITE'sche Semibilinearform σ auf $\mathbb{C}^4$ ist bezüglich der kanonischen Basis durch die Matrix

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1+i & 0 & -i \\ 1-i & 2 & 1 & 2+3i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & 2-3i & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

gegeben. Man bilde $\sigma(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ und $\sigma(\mathfrak{y},\mathfrak{x})$, wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die kanonischen Koordinaten $\mathfrak{x} = (0,3-i,1,i)$, $\mathfrak{y} = (2+i,0,1+2i,1)$ haben.

Man bilde die zugehörige HERMITE'sche Form q und bestimme $q(\mathfrak{x})$. (484-487)

261. **Man untersuche die Definitheit folgender quadratischer Formen über $\mathbb{R}^3$, gebe deren Normalformen nach SYLVESTER an und bestimme eine neue Basis, bezüglich der die Normalform angenommen wird.**

a) $6x_1^2+4x_1x_2+9x_3^2$

b) $-5x_1^2-2x_2^2-2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$

c) $3x_1^2+5x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$

d) $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$

e) $2x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_3-2x_2x_3$

f) $-x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-2x_1x_3+2x_2x_3$

g) $3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

h) $x_1^2+x_3^2-2x_1x_3+4x_2x_3$

j) $-2x_1^2-2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2$

k) $8x_1^2+19x_2^2+7x_3^2-24x_1\,x_2+8x_1x_3-14x_2x_3$

l) $12x_1^2+3x_2^2-12x_1x_2$

m) $-x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

n) $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$

Man löse diese Aufgaben auch auf folgende Weise: Man bringe durch Ergänzung auf vollständige Quadrate jedes $q(\mathfrak{x})$ auf die Gestalt

$$q(\mathfrak{x})= \lambda_1 l_1^2+\lambda_2 l_2^2+\lambda_3 l_3^2 \ ,$$

worin l_i ein in den x_j linearer Ausdruck ist. Dann wähle man eine neue Basis $\mathfrak{B}'$ derart, daß $y_i = \sigma_i l_i$ die Koordinaten von $\mathfrak{x}$ bez. $\mathfrak{B}'$ sind ($\sigma_i \in \mathbb{R}$ geeignet wählen). (Vgl. Bsp. 257. A)
(484-489)

262. Bezüglich beliebiger Basen entspreche dem Homomorphismus $f: \mathfrak{V}_n \rightarrow \mathfrak{V}'_{n'}$ zwischen zwei Vektorräumen über $\mathbb{C}$ die Matrix $A_{nn'}$. Bezüglich derselben Basen ist durch $\overline{A}^T_{nn'}$ ein Homomorphismus $g: \mathfrak{V}'_{n'} \rightarrow \mathfrak{V}_n$ festgelegt. Dann ist $g \circ f \in \operatorname{End} \mathfrak{V}_n$. Man zeige:
   a) die $g \circ f$ entsprechende Matrix B_n ist hermitesch (die Abbildung $A_{nn'} \mapsto B_n$ heißt GAUSS'sche Abbildung).
   b) B_n ist positiv-definit bzw. semidefinit, je nachdem $\operatorname{rg} A_{nn'} = n$ oder $< n$ ist. (484-489)

263. Man bestimme eine Matrix C_3 so, daß die Matrix A_3 der positiv definiten Form über $\mathbb{R}^3$

$$x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_3+4x_2x_3$$

die Gestalt $A_3 = C_3 . C_3^T$ erhält. (484-489)

264. Bezüglich der kanonischen Basis des $\mathfrak{C}^4$ hat eine hermitesche Form die Gleichung
$x_1\bar{x}_1+(1+2i)x_1\bar{x}_2+(1-2i)x_2\bar{x}_1-ix_2\bar{x}_3+ix_3\bar{x}_2-x_3\bar{x}_3+x_3\bar{x}_4+x_4\bar{x}_3$.
Man transformiere sie durch eine hermitesche Kongruenz auf ihre Normalform, gebe die Transformationsgleichungen sowie die neue Basis an. (484)

265. Man versuche, folgende hermiteschen (symmetrischen) Matrizen A_n nach Vorlesung 494. in der Form $B_n = X_nA_n$ darzustellen. Bei welcher Matrix ist dies nicht möglich? Man bestimme gegebenenfalls die Definitheit.

$$a)\ \begin{Vmatrix} 1 & i & i & -i \\ -i & 0 & 2 & i \\ -i & 2 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 & 2 \end{Vmatrix} \quad b)\ \begin{Vmatrix} 1 & i & i & -i \\ -i & 0 & 1 & i \\ -i & 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 & 2 \end{Vmatrix} \quad c)\ \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & i \\ 1 & 2 & -i & i \\ 0 & i & 5 & 0 \\ -i & -i & 0 & 10 \end{Vmatrix}$$

$$d)\ \begin{Vmatrix} -2 & -2 & 4 & 6 \\ -2 & -3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & -10 & -10 \\ 6 & 5 & -10 & -24 \end{Vmatrix}$$
(494)

266. Im $\mathfrak{R}^3$ sei bezüglich der Basis $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{b}_1=(1,1,0),\ \mathfrak{b}_2=(0,1,1),\ \mathfrak{b}_3=(1,0,1)\}$ die symmetrische Bilinearform
$\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 2x^1y^1+x^1y^2+x^1y^3+x^2y^1+2x^2y^2+x^2y^3+x^3y^1+x^3y^2+2x^3y^3$
$(\overset{\vee}{\mathfrak{x}}= \|x^1,x^2,x^3\|,\ \ \overset{\vee}{\mathfrak{y}}= \|y^1,y^2,y^3\|)$ gegeben. Man bestimme die zur Basis $\mathfrak{B}$ reziproke Basis $\mathfrak{B}' = \{\mathfrak{b}^1,\mathfrak{b}^2,\mathfrak{b}^3\}$. Man bestimme die kontravarianten und kovarianten Koordinaten des Vektors $\mathfrak{x} = (4,3,5)$. (502,503)

267. $\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 2x^1y^1-x^1y^2-x^2y^1+2x^2y^2+x^3y^3$ sei eine auf die kanonische Basis bezogene symmetrische Bilinearform des $\mathfrak{R}^3$. Man zeige, daß es eine zu sich selbst reziproke Basis $\mathfrak{B}$ des $\mathfrak{R}^3$ gibt und man ermittle dieselbe.
Man bestimme die kontravarianten und kovarianten Koordinaten des Vektors $\mathfrak{x} =(a,b,c)$ bezüglich der kanonischen Basis und überzeuge sich, daß beim Basiswechsel: kan.Basis $\to \mathfrak{B}$ kontravariante und kovariante Koordinaten übereinstimmen und gebe dieselben an. (502-505)

UNITÄRE UND EUKLIDISCHE VEKTORRÄUME. SKALARES PRODUKT. ORTHOGONALITÄT

268.a) Man zeige, daß durch die auf die kanonische Basis bezogene Bilinearform

$$\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = (2x_1+x_2)(2y_1+y_2)+(x_1-x_3)(y_1-y_3)+x_3y_3$$

ein Skalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ definiert ist. Man bestimme eine Basis $\mathfrak{B}$, bezüglich der β die Normalform

$$\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = x_1'y_1'+x_2'y_2'+x_3'y_3'$$

annimmt.

b) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ stellt

$$x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+tx_2y_2$$

das Skalarprodukt eines euklidischen $\mathbb{R}^2$ dar?

c) Es seien $\mathfrak{x} = (x_1,x_2)$, $\mathfrak{y} = (y_1,y_2) \in \mathbb{C}^2$, x_1,x_2,y_1,y_2 $a,b,c,d \in \mathbb{C}$. Welche Bedingungen müssen eingehalten werden, daß

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} := ax_1\bar{y}_1+bx_2\bar{y}_1+cx_1\bar{y}_2+dx_2\bar{y}_2$$

ein Skalarprodukt über $\mathbb{C}^2$ darstellt ? (506-508)

269. Es seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ zwei unitäre Räume und es sei $f \in \mathrm{Abb}(\mathfrak{B},\mathfrak{B}')$ (f also nicht notwendig linear !)

Man zeige: Wenn für alle $\mathfrak{x},\mathfrak{y} \in \mathfrak{B}$

$$f(\mathfrak{x})\, f(\mathfrak{y}) = \mathfrak{x}\mathfrak{y}$$

gilt, so ist f linear.

Anleitung: 1. Man zeige zunächst

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{y}\mathfrak{y} \Rightarrow \mathfrak{x} = \mathfrak{y}$$

[Man betrachte $(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})$]

2. Man betrachte $f(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})f(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})$, $[f(\mathfrak{x})+f(\mathfrak{y})]\cdot[f(\mathfrak{x})+f(\mathfrak{y})]$, $f(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})[f(\mathfrak{x})+f(\mathfrak{y})]$. (506-510)

270. Ein komplexer (reeller) Vektorraum heißt <u>normiert,</u> wenn eine Abbildung

$$N: \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$$
$$\mathfrak{x} \mapsto N(\mathfrak{x})$$

mit folgenden Eigenschaften existiert:

I) $N(\mathfrak{x}) \geq 0$

II) $N(\mathfrak{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$

III) $\bigwedge\limits_{\lambda \in C(\mathbb{F})} N(\lambda\mathfrak{x}) = |\lambda| . N(\mathfrak{x})$

IV) $N(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) \leq N(\mathfrak{x}) + N(\mathfrak{y})$

$N(\mathfrak{x})$ heißt die Norm des Vektors $\mathfrak{x}$.

Ist im $\mathbb{F}^n$ durch folgende Abbildungen $f:\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ eine Norm definiert ?

a) $f:(x_1,x_2,\dots,x_n) \mapsto |x_1+x_2|$

b) $f:(x_1,\dots,x_n) \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$

c) $f:(x_1,\dots,x_n) \mapsto \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$

d) $f:(x_1,\dots,x_n) \mapsto \max(|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|)$

e) $f:(x_1,\dots,x_n) \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$

Man gebe in jenen Fällen von a)-e), in denen eine Norm vorliegt, für die Dimensionen $n = 2$ und $n = 3$ die Mengen

$$S: \{\mathfrak{x} \in \mathbb{F}^n \mid N(\mathfrak{x}) = 1\},$$

die sogenannten "Einheitssphären" des normierten $\mathbb{F}^n$, an.

(509-513)

271. Bezüglich der Basis $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n\}$ sei das Skalarprodukt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ eines euklidischen $\mathfrak{V}_n$ durch die symmetrische Matrix $B_n = \|\beta_{ij}\|_n$ gegeben. Dann gilt für zwei Vektoren

$$\mathfrak{x} = x^i \mathfrak{b}_i, \quad \mathfrak{y} = y^j \mathfrak{b}_j, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{y} = \beta_{ij} x^i y^j \quad \text{(EINSTEINkonvention!)}$$

Man bestimme die zu $\mathfrak{B}$ reziproke Basis $\mathfrak{B}' = \{\mathfrak{b}^1,\dots,\mathfrak{b}^n\}$ und stelle das Skalarprodukt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ mit Hilfe der ko- und kontravarianten Koordinaten der Vektoren $\mathfrak{x},\mathfrak{y}$ dar.

Ferner zeige man, daß für $i \neq j$ gilt $\mathfrak{b}_i \perp \mathfrak{b}^j$. (502f,514,515)

272. Es sei $\{\mathfrak{e}_1,\dots,\mathfrak{e}_n\}$ eine Orthonormalbasis eines unitären $\mathfrak{V}_n$ und $\mathfrak{x},\mathfrak{y} \in \mathfrak{V}_n$. Man beweise

a) die Ungleichung von BESSEL:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x} \geq \sum_{i=1}^{m} (\mathfrak{x}\mathfrak{e}_i)(\mathfrak{e}_i\mathfrak{x}), \quad 1 \leq m \leq n$$

b) die Identität von PARSEVAL

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{x}\mathfrak{e}_i)(\mathfrak{e}_i\mathfrak{y}). \qquad (518)$$

273. $\mathfrak{e}_1 = (-5,3,1)$, $\mathfrak{e}_2 = (-6,3,2)$, $\mathfrak{e}_3 = (-2,1,1)$ stelle eine orthonormierte Basis des euklidischen R^3 dar. Wie lautet das Skalarprodukt, bezogen auf die kanonische Basis ? (514-518)

*)

274. Bezüglich der kanonischen Basis $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5\}$ wird in R^5 durch

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 2x_1y_1+x_1y_2+x_1y_5+x_2y_1+2x_2y_2-x_2y_3-x_3y_2+2x_3y_3+x_3y_4+$$
$$+ x_4y_3+2x_4y_4-x_4y_5+x_5y_1-x_5y_4+2x_5y_5$$

ein Skalarprodukt defniert. Man leite aus der kanonischen Basis nach SCHMIDT eine Orthonormalbasis ab. (518,519)

*)

275. Bezüglich der kanonischen Basis eines euklidischen R^3 lautet die Matrix der Fundamentalform

$$B_3 = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|$$

a) Man gebe die zur kanonischen Basis reziproke Basis von R^3 an und drücke das skalare Produkt der Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ mit Hilfe ihrer kontravarianten bzw. kovarianten Koordinaten aus.

b) Man orthonormiere die kanonische Basis nach SCHMIDT und verifiziere die Tatsache, daß bezüglich jeder orthonormalen Basis ko- und kontravariante Koordinaten identisch sind. Man wähle als Beispiel die Vektoren $\mathfrak{x} =(1,-1,2)$, $\mathfrak{y} =(-2,1,3)$. (502f,518,519)

276. Im C^3 sei bezüglich der Basis $\mathfrak{a}_1 =(1,i,o)$, $\mathfrak{a}_2 =(0,1,i)$ $\mathfrak{a}_3 =(i,o,1)$ die hermitesche Form q_H durch ihre Matrix

$$A_3 = \left\| \begin{matrix} 2 & i & -(1-i) \\ -i & 2 & 0 \\ -(1+i) & 0 & 2 \end{matrix} \right\| \qquad \text{gegeben.}$$

---

*) 273.A, 274.A s.Ergänzungen

a) Man zeige, daß q_H positiv definit ist.
b) Im unitären $\mathfrak{C}^3$ mit q_H als Fundamentalform bestimme man für die beiden Vektoren $\mathfrak{x} = (1,2,3)$, $\mathfrak{y} = (1,1,2)$ die Größen $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}\mathfrak{x}$, $|\mathfrak{x}|$, $|\mathfrak{y}|$.
c) Man ermittle die $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ nach SCHMIDT entsprechende Orthonormalbasis $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ und stelle q_H in ihr dar.
d) Man gebe die Matrix von q_H bezüglich der kanonischen Basis an. (488-495,506-509,518,519)

277. Man beweise die Sätze von Vorl.Nr. 526.f,h,j,k,l für endlichdimensionale unitäre Vektorräume nach dem Vorbild von Vorl.Nr.357., ohne sich auf diese Nr. zu berufen. (521-526)

ADJUNGIERTE ABBILDUNGEN, NORMALE ABBILDUNGEN, SELBSTADJUNGIERTE UND ANTISELBSTADJUNGIERTE ENDOMORPHISMEN.

278. Der unitäre $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}^2$ habe bezüglich der kanonischen Basis die Fundamentalform

$$q_H(\mathfrak{x}) = 2x_1\bar{x}_1 + ix_1\bar{x}_2 - ix_2\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2,$$

der unitäre $\mathfrak{B}_3' = \mathfrak{C}^3$ bezüglich der kanonischen Basis die Fundamentalform

$$q_H'(\mathfrak{x}') = 2x_1'\bar{x}_1' + x_1'\bar{x}_3' + x_2'\bar{x}_2' + x_3'\bar{x}_1' + x_3'\bar{x}_3'$$

Ferner entspreche $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{C}^2, \mathfrak{C}^3)$ bezüglich der kanonischen Basen die Matrix

$$A_{23} = \begin{Vmatrix} 1 & i & 0 \\ 1+i & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Man ermittle die zu f adjungierte Abbildung $f^A \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{C}^3, \mathfrak{C}^2)$ durch Angabe ihrer Matrix A_{23}^A bezüglich der kanonischen Basen.
Man verifiziere $f(\mathfrak{x})\mathfrak{y}' = \mathfrak{x}f^A(\mathfrak{y}')$ an den beiden Vektoren $\mathfrak{x} = (1,2)$, $\mathfrak{y}' = (1,1,1)$. (529)

279. Man beweise die Sätze von Vorl.Nr. 536, a,b,f,j,k,l,m für endlichdimensionale unitäre Vektorräume nach dem Vorbild von Vorl.Nr. 366. ohne sich auf diese Nr. zuberufen. (529-536)

280.a) In einem euklidischen $\mathfrak{V}_n$ sei f der durch das Skalarprodukt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ festgelegte Isomorphismus $f:\mathfrak{V}_n \to \mathfrak{V}_n^*$. Ist $\mathfrak{U}$ ein Unterraum von $\mathfrak{V}_n$, $\mathfrak{U}^\perp$ sein orthogonales Komplement, $\mathfrak{U}^0$ sein Annullatorraum, so gilt $\mathfrak{U}^\perp = f^{-1}(\mathfrak{U}^0)$. Man zeige dies. Wegen $\mathfrak{V}_n \cong \mathfrak{V}_n^*$ könnte man $\mathfrak{U}^\perp$ und $\mathfrak{U}^0$ überhaupt identifizieren. Daher folgt auch auf diesem Wege die Entsprechung der Formeln Vorl.Nr. 382. und 526. (378ff,496,497)

b) Es seien $\mathfrak{V}_n$, $\mathfrak{V}'_{n'}$ zwei euklidische Vektorräume und $g: \mathfrak{V}_n \to \mathfrak{V}_n^*$ bzw. $g': \mathfrak{V}'_{n'} \to \mathfrak{V}'^*_{n'}$ die ihnen nach Vorl.Nr.501. durch die Skalarprodukte zugeordneten selbstdualen Isomorphismen.
Ferner sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_n, \mathfrak{V}'_{n'})$ und $f^D \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}'^*_{n'}, \mathfrak{V}_n^*)$ die zu f duale Abbildung.
Man zeige, daß die durch $g^{-1} \circ f^D \circ g'$ definierte Abbildung die zu f adjungierte Abbildung $f^A \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}'_{n'}, \mathfrak{V}_n)$ ist.
Man begründe auch auf diesem Wege die formale Übereinstimmung der Vorl.Nr. 389. und 536. (384ff,529ff)

281. Es seien $\mathfrak{V}_n$, $\mathfrak{V}'_{n'}$ euklidische Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_n, \mathfrak{V}'_{n'})$ sowie $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{V}'_{n'}$. Man zeige:

a) Die inhomogene lineare Gleichung
$$f(\mathfrak{x}) := \mathfrak{a}'$$
hat genau dann eine Lösung, wenn für jede Lösung der homogenen linearen Gleichung
$$f^A(\mathfrak{x}') := \mathfrak{o}$$
gleichzeitig gilt: $\mathfrak{a}'\mathfrak{x}' = 0$. (Man beachte Vorl.Nr.536.a.j.).

b) Gilt mit $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}'$ gleichzeitig $\mathfrak{x}\mathfrak{e}_i \geq 0$ $(i=1,\dots,n)$, so folgt aus $f^A(\mathfrak{x}')\mathfrak{e}_i \geq 0$ $(i=1,\dots,n)$ auch $\mathfrak{a}'\mathfrak{x}' \geq 0$.
<u>Anmerkung:</u> b) läßt sich auch umkehren: Gilt für jedes $\mathfrak{x}' \in \mathfrak{V}'_{n'}$ mit $f^A(\mathfrak{x}')\mathfrak{e}_i \geq 0$ $(i=1,\dots,n)$ auch $\mathfrak{a}'\mathfrak{x}' \geq 0$, so existieren Vektoren $\mathfrak{x} \in \mathfrak{V}_n$ mit $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{e}_i \geq 0$ $(i=1,\dots,n)$ (Satz von J.FARKAS). (536)

282. Bezüglich der kanonischen Basis hat die Fundamentalform eines euklidischen $\mathbb{R}^5$ die Matrix

$$B_5 = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 6 \end{Vmatrix}$$

und ein Endomorphismus f die Matrix

$$A_5 = \frac{1}{6} \begin{Vmatrix} 6 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & -8 & 6 & 8 & 0 \\ 10 & -6 & -7 & 3 & -3 \\ 2 & 10 & 1 & 5 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Man gebe den adjungierten Endomorphismus f^A an und zeige, daß f normal ist. (529,542)

283. Bezüglich der kanonischen Basis (= ON-Basis) hat der normale Endomorphismus f des euklidischen $\mathbb{R}^3$ die Matrix

$$A_3 = \frac{1}{9} \begin{Vmatrix} 10 & -8 & -4 \\ 4 & 13 & -7 \\ 8 & -1 & 13 \end{Vmatrix}$$

Man bestimme eine ON-Basis derart, daß die Matrix von f Normalform annimmt. (542-548)

284. Bezüglich der kanonischen Basis hat die Fundamentalform eines unitären $\mathbb{C}^4$ die Matrix

$$B_4 = \begin{Vmatrix} 4 & -3i & -2 & i \\ 3i & 3 & -2i & -1 \\ -2 & 2i & 2 & -i \\ -i & -1 & i & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{und}$$

ein Endomorphismus f die Matrix

$$A_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & -(1+2i) \\ 0 & 1 & -i & 2-i \\ 0 & 0 & 2 & 1+2i \\ 0 & 0 & 0 & i \end{Vmatrix}.$$

a) Man bestimme die Matrix des adjungierten Endomorphismus f^A bezüglich der kanonischen Basis

b) Man zeige, daß der Endomorphismus f normal ist, bestimme eine Bais von orthonormalen Eigenvektoren und stelle die Matrix von f in dieser Basis dar. (529,542,545)

285. Bezüglich der kanonischen Basis stellt

$$q(\mathfrak{x}) = 2x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+6x_5^2-2x_1x_3+2x_1x_5-2x_2x_4-2x_2x_5+2x_3x_5-2x_4x_5$$

die metrische Fundamentalform einer euklidischen $\mathbb{R}^5$ dar.
Man zeige, daß durch die Matrix

$$A_5 = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 7 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -4 & 0 \\ -8 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$$

ein selbstadjungierter Endomorphismus f von $\mathbb{R}^5$ bestimmt wird. (549)

286. Man zeige:

a) Für einen Endomorphismus f eines unitären oder euklidischen $\mathfrak{B}_n$ gilt

$$f = zo \Leftrightarrow \bigwedge_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}} f(\mathfrak{x})\mathfrak{y} = 0$$

b) für einen selbstadjungierten Endomorphismus eines unitären oder euklidischen $\mathfrak{B}_n$ gilt

$$f = zo \Leftrightarrow \bigwedge_{\mathfrak{x}} f(\mathfrak{x})\mathfrak{x} = 0$$

Anleitung: Man entwickle $f(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})$. Im unitären Fall betrachte man neben $\mathfrak{x}$ auch $c\mathfrak{x}$ mit $c \in \mathbb{C}$

c) für einen Endomorphismus eines unitären (aber nicht euklidischen) $\mathfrak{B}_n$ gilt

$$f = zo \Leftrightarrow \bigwedge_{\mathfrak{x}} f(\mathfrak{x})\mathfrak{x} = 0$$

Anleitung: Man entwickle $f(a\mathfrak{x}+b\mathfrak{y})(a\mathfrak{x}+b\mathfrak{y})$ und betrachte die Spezialfälle $a = b = 1$ und $a = i$, $b = 1$.

d) Ein Endomorphismus eines unitären (aber nicht euklidischen) $\mathfrak{B}_n$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn gilt

$$\bigwedge_{\mathfrak{x}} f(\mathfrak{x})\mathfrak{x} \in \mathbb{R}$$ (549,550)

287. Bezüglich der kanonischen Basis hat die Fundamentalform eines unitären C^4 die Matrix

$$B_4 = \begin{Vmatrix} 4 & -3i & -2 & i \\ 3i & 3 & -2i & -1 \\ -2 & 2i & 2 & -i \\ -i & -1 & i & 1 \end{Vmatrix} .$$

a) Man zeige, daß der Matrix

$$A_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -3 & -3i \\ 0 & 1 & -3i & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

ein selbstadjungierter Endomorphismus f entspricht

b) Man bestimme eine ON-Basis so, daß die Matrix von f Normalform annimmt. (549-552)

288. f sei selbstadjungierter Endomorphismus des euklidischen $\mathfrak{B}_n$, ferner sei g die durch

$$g(\mathfrak{r}) := \frac{\mathfrak{r} f(\mathfrak{r})}{\mathfrak{r}\mathfrak{r}}$$

definierte (nichtlineare!) Abbildung $g: \mathfrak{B}_n \setminus \{\mathfrak{o}\} \to \mathbb{R}$.

Man zeige:

a) $\bigwedge_{u \in \mathbb{R}^*} g(u\mathfrak{r}) = g(\mathfrak{r})$. Man könnte sich deshalb bei der Untersuchung von g auf die Einheitsvektoren von $\mathfrak{B}_n$ beschränken.

b) $\mathfrak{r}$ sei EV von f zum EW λ. Dann gilt $g(\mathfrak{r}) = \lambda$

c) $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ seien die der Größe nach geordneten EW von f. Dann gilt $\lambda_1 \leq g(\mathfrak{r}) \leq \lambda_n$, d.h.: die Extremwerte von g sind der kleinste bzw. größte EW von f. g nimmt diese Extremwerte genau in den zugehörigen EV an.

<u>Anleitung:</u> Man beziehe $\mathfrak{B}_n$ auf eine ON-Basis aus EV und beachte die für die Koordinaten eines beliebigen $\mathfrak{r} \in \mathfrak{B}_n$ bestehenden Ungleichungen

$$\lambda_1(x_1^2+\ldots+x_n^2) \leq \lambda_1 x_1^2+\ldots+\lambda_n x_n^2 \leq \lambda_n\,(x_1^2+\ldots+x_n^2)$$

d) Allgemeiner gilt: Sei $\mathfrak{U} = H[\mathfrak{e}_{i_1},\ldots,\mathfrak{e}_{i_r}]$ der von den EV zu den EW $\lambda_{i_1} \leq \ldots \leq \lambda_{i_r}$ aufgespannte UR, so gilt

$\lambda_{i_1} \leq g|\mathfrak{U}(\mathfrak{r}) \leq \lambda_{i_r}$. (549-552)

289. Man zeige: Im euklidischen $\mathfrak{V}_3$ sind die anti-selbstadjungierten Endomorphismen genau jene, für die (bei entsprechend gewähltem festen Vektor $\mathfrak{a}$) gilt

$$f: \mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{a}\times\mathfrak{x} \text{ (Vektorprodukt).}$$

Wie lautet die adjungierte Abbildung? Warum läßt sich mit Hilfe der anti-selbstadjungierten Abbildungen nicht auch in euklidischen Räumen der Dimensionen $n \geq 4$ ein Vektorprodukt definieren?

Man leite die Rechenregeln für das Vektorprodukt ab:

$\mathfrak{a}\times\mathfrak{x} = -\mathfrak{x}\times\mathfrak{a}$, $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\times\mathfrak{x} = \mathfrak{a}\times\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\times\mathfrak{x}$, $\mathfrak{a}\times(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = \mathfrak{a}\times\mathfrak{x} + \mathfrak{a}\times\mathfrak{y}$,

$\mathfrak{a}\times\mathfrak{x} = \mathfrak{o} \Leftrightarrow \mathfrak{a},\mathfrak{x}$ l.a., $|\mathfrak{a}\times\mathfrak{x}|^2 = |\mathfrak{a}|^2 \cdot |\mathfrak{x}|^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{x})^2$. (559-563)

290. Man zeige: Das "gemischte Produkt" ("skalare Tripelprodukt") $(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}) := \mathfrak{x}(\mathfrak{y}\times\mathfrak{z})$ dreier Vektoren ist eine Determinantenform und es ist $(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = \det(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ bezüglich jeder ON-Basis. Man leite daraus die sich ergebenden Rechenregeln für das gemischte Produkt ab. Man beweise speziell den "Vertauschungssatz" : $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}\times\mathfrak{z}) = \mathfrak{y}(\mathfrak{z}\times\mathfrak{x}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})$. Ferner zeige man

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})\cdot(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{x} & \mathfrak{a}\mathfrak{y} & \mathfrak{a}\mathfrak{z} \\ \mathfrak{b}\mathfrak{x} & \mathfrak{b}\mathfrak{y} & \mathfrak{b}\mathfrak{z} \\ \mathfrak{c}\mathfrak{x} & \mathfrak{c}\mathfrak{y} & \mathfrak{c}\mathfrak{z} \end{vmatrix}$$

speziell: $(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})^2 = G(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ (vgl.auch Vorl.Nr.573.) (559-563)

291.a) Man beweise den Entwicklungssatz von GRASSMANN für das "vektorielle Tripelprodukt":

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} = (\mathfrak{a}\mathfrak{c})\mathfrak{b} - (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\mathfrak{a}$$
$$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{c})\mathfrak{b} - (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$$

Mit Hilfe von a) beweise man ferner

b) die Identität von JACOBI

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} + (\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\times\mathfrak{a} + (\mathfrak{c}\times\mathfrak{a})\times\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) + \mathfrak{b}\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}) + \mathfrak{c}\times(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$$

c) das "vektorielle Quadrupelprodukt"

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{c},\mathfrak{d})\mathfrak{b} - (\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d})\mathfrak{a}$$
$$= (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{d})\mathfrak{c} - (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})\mathfrak{d}$$

Daher gilt auch

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})\mathfrak{d} = (\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d})\mathfrak{a} + (\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{d})\mathfrak{b} + (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{d})\mathfrak{c}$$

$\underline{\text{Anleitung:}}$ Man setze erst $\mathfrak{u} := \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, dann $\mathfrak{v} := \mathfrak{c}\times\mathfrak{d}$ und wende in beiden Fällen den Entwicklungssatz von GRASSMANN sowie die Sätze über das skalare Tripelprodukt an,

d) das "skalare Quadrupelprodukt"

$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\mathfrak{d}) - (\mathfrak{a}\mathfrak{d})(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$

<u>Anleitung:</u> Man schreibe das Quadrupelprodukt als skalares Tripelprodukt $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ und wende den Vertauschungssatz an

e) Man zeige: $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b},\ \mathfrak{b}\times\mathfrak{c},\ \mathfrak{c}\times\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})^2$ (559-563)

292.a) Man berechne den Vektor $\mathfrak{r}$ aus

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}\mathfrak{r} &= \lambda \\ \mathfrak{r}\times\mathfrak{b} &= \mathfrak{c} \end{aligned} \qquad (\mathfrak{a}\mathfrak{b} \neq 0)$$

b) Man berechne die (orthogonalen) Vektoren $\mathfrak{r},\mathfrak{y}$ aus

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}\times\mathfrak{a} &= \mathfrak{y} \\ \mathfrak{r}\times\mathfrak{b} &= \mathfrak{y} \end{aligned} \qquad \mathfrak{a},\mathfrak{b} \text{ l.u.}$$

$\mathfrak{r},\mathfrak{y}$ sind nur bis auf einen gemeinsamen Faktor $\lambda \neq 0$ bestimmt.

c) Man berechne $\mathfrak{r}$ aus

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}\mathfrak{r} &= \lambda \\ \mathfrak{b}\mathfrak{r} &= u \\ \mathfrak{c}\mathfrak{r} &= \nu \end{aligned} \qquad \mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c} \text{ l.u.}$$

<u>Anleitung:</u> Man zeige, daß $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}$ l.u. sind und stelle $\mathfrak{r}$ als Linearkombination dieser Vektoren dar. Man beachte die Beispiele 290 und 291.

293. <u>Definition:</u> Ein LIE'scher Ring (Sophus LIE 1842-1899) über dem Körper K (Char $\neq$ 2) ist ein Vektorraum $\mathfrak{V}$ über K, in dem eine bilineare Selbstabbildung

$$B: \mathfrak{V}\times\mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$$
$$(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \mapsto B(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$$

definiert ist, die folgenden Bedingungen genügt:

1. B ist alternierend, d.h. $B(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$
2. Es gilt die Identität von JACOBI (Carl Gustav JACOBI 1804-1851):

   $B(\mathfrak{a},B(\mathfrak{b},\mathfrak{c})) + B(\mathfrak{b},B(\mathfrak{c},\mathfrak{a})) + B(\mathfrak{c},B(\mathfrak{a},\mathfrak{b})) = \mathfrak{o}$

Man zeige:

a) $B(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ ist schiefsymmetrisch

b) Der reelle $\mathfrak{V}_3$ mit $B(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) := \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ ist ein LIE'scher Ring

c) Der Vektorraum End($\mathfrak{V}$) der Endomorphismen mit

$B(f,g) := g \circ f - f \circ g$

ist ein LIE'scher Ring

Anmerkung: Bei LIE'schen Ringen wird das assoziative Gesetz durch die JACOBI'sche Identität ersetzt (559-563)

294. Die kanonische Basis des euklidischen R^6 sei ON-Basis. Man bestimme den Orthogonalitätsgrad der folgenden Unterräume

$\mathfrak{U}_1 = H[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3]$, $\mathfrak{U}_2 = H[\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_6, \mathfrak{a}_7]$

$\mathfrak{a}_1 = (1,0,0,1,0,1)$, $\mathfrak{a}_2 = (0,7,2,2,-2,0)$, $\mathfrak{a}_3 = (2,-1,0,0,0,1)$

$\mathfrak{a}_4 = (1,1,-1,2,3,0)$, $\mathfrak{a}_5 = (2,1,0,-1,1,2)$, $\mathfrak{a}_6 = (-1,1,1,0,3,4)$

$\mathfrak{a}_7 = (0,0,-2,5,0,1)$ (528,569)

295. Bezüglich der kanonischen Basis (=ON-Basis) haben die Unterräume $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ des euklidischen R^6 die Gleichungen

a)
$$\mathfrak{U}_1: \begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4-x_5 &= 0\\ x_1+x_2-x_3-x_4+x_5+2x_6 &= 0\\ x_3+x_5+x_6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{U}_2: \begin{aligned} x_1-x_2+x_4-x_5 &= 0\\ x_1-2x_2+x_3+x_6 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\mathfrak{U}_1: \begin{aligned} x_1-x_4 &= 0\\ 2x_1-2x_2-x_5 &= 0\\ x_2+3x_3-x_6 &= 0 \end{aligned} \qquad \mathfrak{U}_2: \begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 0\\ x_1+x_2+x_4+x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Man ermittle den Orthogonalitätsgrad von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$. (528,569)

296. f sei der Normalprojektor des euklidischen R^5 auf den Unterraum $\mathfrak{U}_1 = H[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2]$ (kanonische Basis $\mathfrak{E}$ sei ON-Basis). Man bestimme

a) die Matrix von $f: R^5 \to \mathfrak{U}_1$ bezüglich der Basen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}$,

b) Die Matrix von $f \in$ End(R^5) bezüglich $\mathfrak{E}$.

c) Man bestimme die Matrix des Normalprojektors $f_2: \mathfrak{U}_2 \to \mathfrak{U}_1$ bezüglich der Basen $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}$ und $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3\}$ von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2 := H[\mathfrak{B}]$.

$\mathfrak{a}_1 = (1,0,0,-1,1)$, $\mathfrak{a}_2 = (0,1,1,1,0)$
$\mathfrak{b}_1 = (1,1,0,1,1)$, $\mathfrak{b}_2 = (0,1,-1,0,-1)$, $\mathfrak{b}_3 = (1,1,1,1,1)$
(564-570)

*)
297. Bezüglich der kanonischen Basis des euklidischen R^5 sei die Fundamentalform

$$q(\mathfrak{x}) = 2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+x_4^2+x_5^2-2x_1x_3+2x_2x_3$$

gegeben.

a) Man bestimme das orthogonale Komplement $\mathfrak{A}^{\perp}$ zu $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}_1 = (1,0,0,0,1),\ \mathfrak{a}_2 = (0,1,0,1,0)\}$. Man gebe die Gleichung von $H(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{A}^{\perp}$ bezüglich der kanonischen Basis an.
<u>Anleitung:</u>
Man ergänze $\mathfrak{A}$ etwa durch die kanonischen Basisvektoren
$\mathfrak{a}_3 = (1,0,0,0,0)$, $\mathfrak{a}_4 = (0,1,0,0,0)$, $\mathfrak{a}_5 = (0,0,1,0,0)$
zu einer Basis von R^5 und orthonormiere nach SCHMIDT.

b) Man bestimme die Normalprojektion $\mathfrak{u}$ des Vektors $\mathfrak{x} = (x_1,\dots,x_5)$ in den Unterraum $\mathfrak{U} = H(\mathfrak{A})$. (514,564-568)

298. $\mathfrak{U} = H[\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_r]$ sei ein r-dimensionaler Unterraum des euklidischen $\mathfrak{V}_n$. Bezüglich einer ON-Basis $\mathfrak{E}$ des $\mathfrak{V}_n$ seien die Basisvektoren von $\mathfrak{U}$ (die i.a. keine ON-Basis von $\mathfrak{U}$ bilden), durch die Matrix B_{rn} festgelegt. Man gebe die Matrix des Normalprojektors von $\mathfrak{V}_n$ auf $\mathfrak{U}$ bezüglich $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B} := \{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_r\}$ an. (564-568,573-575)

LINEARES AUSGLEICHSPROBLEM, PSEUDOINVERSE EINER MATRIX

299. $\mathfrak{V}_n$ und $\mathfrak{V}'_{n'}$ seien unitäre Vektorräume, ferner sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_n, \mathfrak{V}'_{n'})$ und $f^A \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}'_{n'}, \mathfrak{V}_n)$ die adjungierte Abbildung zu f. Man zeige:

a) Die Endomorphismen $g{:}f^A \circ f \in \mathrm{End}(\mathfrak{V}_n)$ und $h := f \circ f^A \in \mathrm{End}(\mathfrak{V}'_{n'})$ sind selbstadjungiert.

b) Die Eigenwerte von g und h sind nichtnegativ

*) 296.A. siehe Ergänzugen Seite 72

c) $\mathfrak{r}_1,\ldots,\mathfrak{r}_r$ seien Eigenvektoren zu den <u>nichtverschwindenden</u> Eigenwerten $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ von g.
Dann sind die Vektoren $\mathfrak{r}_i' := f(\mathfrak{r}_i)$ $(i=1,\ldots,r)$ Eigenvektoren von h zu den Eigenwerten λ_i $(i=1,\ldots,r)$.

d) Es sei $\{\mathfrak{e}_1,\ldots,\mathfrak{e}_r\}$ ein ON-System von Eigenvektoren von g zu den nichtverschwindenden Eigenwerten $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$.
Dann gilt: $|f(\mathfrak{e}_i)| = \sqrt{\lambda_i}$ und die durch $f(\mathfrak{e}_i) = \sqrt{\lambda_i}\,\mathfrak{e}_i'$ definierten Vektoren $\mathfrak{e}_i' \in \mathfrak{V}_{n'}'$ bilden gleichfalls ein ON-System von EV von h zu den EW λ_i. Umgekehrt ist $f^A(\mathfrak{e}_i') = \sqrt{\lambda_i}\,\mathfrak{e}_i$ $(i=1,\ldots,r)$.
Es gilt also $f(\mathfrak{V}_n) = H[\mathfrak{e}_1',\ldots,\mathfrak{e}_r']$ und $f^A(\mathfrak{V}_{n'}') = H[\mathfrak{e}_1,\ldots,\mathfrak{e}_r]$.

e) g und h sind positiv semidefinit. (529-538,549-558)

300. Es seien f, g und h die in Beispiel 299 genanten Abbildungen. Man zeige:
$\mathrm{kn}\, f = \mathrm{kn}\, g$, $\mathrm{kn}\, f^A = \mathrm{kn}\, h$
$\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, g = \mathrm{rg}\, h = \mathrm{rg}\, f^A$, $\quad f(\mathfrak{V}_n) = h(\mathfrak{V}_{n'}')$, $f^A(\mathfrak{V}_{n'}') = g(\mathfrak{V}_n)$
<u>Hinweis:</u> Beachte Vorlesung Nr. 536. j,l,m. (529-538,559-558)

301.a) Es seien $\mathfrak{V}_n$, $\mathfrak{V}_{n'}'$ unitäre VR und $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_n, \mathfrak{V}_{n'}')$, ferner sei $A_{nn'}$ die Matrix von f bezüglich zweier beliebiger ON-Basen $\mathfrak{B},\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{V}_n$ bzw. $\mathfrak{V}_{n'}'$.
Man zeige: Es gibt zwei ON-Basen $\mathfrak{C},\mathfrak{C}'$ von $\mathfrak{V}_n$ und $\mathfrak{V}_{n'}'$, sodaß die Matrix von f bezüglich $\mathfrak{C},\mathfrak{C}'$ die Gestalt

$$\tilde{A}_{nn'} := B_n A_{nn'} B_{n'}' \qquad (1)$$

annimmt. Die Matrizen $B_n, B_{n'}'$ sind <u>unitär</u> und $\tilde{A}_{nn'}$ ist eine Matrix der Form

$$\tilde{A}_{nn'} = \begin{Vmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

worin $D_r = D_r(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_r})$ eine reguläre Diagonalmatrix ist, deren Elemente die Quadratwurzeln aus den nichtverschwindenden EW der in den Beispielen 299 und 300 definierten Endomorphismen g,h von $\mathfrak{V}_n$ bzw. $\mathfrak{V}_{n'}'$ sind.
Die Größen $\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_r}$ heißen <u>singuläre Werte</u> der Matrix $A_{nn'}$, (1) heißt ihre <u>Singulärwertzerlegung.</u> <u>Sie existiert für jede Matrix</u> $A_{nn'}$.

$\underline{\text{Anleitung:}}$ Man wähle als neue Basen $\mathfrak{C},\mathfrak{C}'$ aus EV von g bzw. h gebildete ON-Basen von $\mathfrak{V}_n, \mathfrak{V}'_{n'}$. Die Matrizen B_n und $B'_{n'}$ entsprechen dann dem Basiswechsel $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{C}' \to \mathfrak{B}'$ (Vorl.Nr.185). Man führe die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A_{34} = \frac{1}{6} \cdot \begin{Vmatrix} 5 & 5 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 6 \end{Vmatrix}$$

aus.

b) Man stelle Formel (1) von a) in der Gestalt

$$A_{nn'} = B_n^{-1} \tilde{A}_{nn'} B'^{-1}_{n'}$$

dar und interpretiere die Matrizen $\tilde{A}_{nn'}, B_n^{-1}$, $B'^{-1}_{n'}$ als auf $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ bezogenen Matrizen von linearen Abbildungen $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_n, \mathfrak{V}'_{n'})$, $f_1 \in \mathrm{End}(\mathfrak{V}_n)$ $f_2 \in \mathrm{End}(\mathfrak{V}'_{n'})$. Man deute die Zerlegung von $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_n, \mathfrak{V}'_{n'})$

$$f = f_2 \circ \tilde{f} \circ f_1$$

geometrisch. (529-538,549-558)

302. Es seien $\mathfrak{V}_n, \mathfrak{V}'_{n'}$ unitäre VRe und $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_n, \mathfrak{V}'_{n'})$. Jede Lösung der Gleichung $f(\mathfrak{r}) := \mathfrak{a}'$ $(\mathfrak{a}' \in \mathfrak{V}'_{n'})$ stellt auch eine Lösung der Gleichung $(f^A \circ f)(\mathfrak{r}) := f^A(\mathfrak{a}')$ dar. Man zeige die Gleichung

$$(f^A \circ f)(\mathfrak{r}) := f^A(\mathfrak{a}') \qquad (1)$$

ist <u>stets für jede Wahl von</u> $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{V}'_{n'}$ <u>lösbar,</u> unabhängig von der Lösbarkeit von $f(\mathfrak{r}) := \mathfrak{a}'$. Man gebe die Lösungsmenge von (1) an.

$\underline{\text{Anleitung:}}$ Man beachte $\mathfrak{V}'_{n'} = f(\mathfrak{V}_n) \oplus \mathrm{kn}\, f^A$ (Vorl.Nr.536.j.) und zerlege $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'_1 + \mathfrak{a}'_2$ in die direkten Summanden $\mathfrak{a}'_1 \in f(\mathfrak{V}_n)$, $\mathfrak{a}'_2 \in \mathrm{kn}\, f^A$. Man beachte ferner Beispiel 300.

Man zeige weiters für jede Lösung $\mathfrak{r}$ von (1)

$$f(\mathfrak{r}) = \mathfrak{a}'_1.$$

(529-538,549-558)

303. Die Abbildung f des euklidischen $\mathbb{R}^3$ in den euklidischen $\mathbb{R}^4$ habe bezüglich der kanonischen Basis (= ON-Basis) die Matrix

$$A_{34} = \frac{1}{6} \begin{Vmatrix} 5 & 5 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 6 \end{Vmatrix} .$$

Man überzeuge sich, daß die Gleichung $f(\mathfrak{r}) := \mathfrak{a}'$ mit $\mathfrak{a}' = (1,0,1,0)$ keine Lösung besitzt. Man gebe die Lösungsmenge von $(f^A \circ f)(\mathfrak{r}) := f^A(\mathfrak{a}')$ an. (529-538,549-558)

304. $\mathfrak{V}_n$ und $\mathfrak{V}'_{n'}$ seien unitäre VRe, ferner sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_n,\mathfrak{V}'_{n'})$. Jeder Lösungsvektor der Gleichung $f(\mathfrak{x}):= \mathfrak{a}'$ ist durch $|f(\mathfrak{x})-\mathfrak{a}'| = 0$ gekennzeichnet. Hat $f(\mathfrak{x}):= \mathfrak{a}'$ <u>keine</u> Lösung, so ist für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{V}_n$ $f(\mathfrak{x})-\mathfrak{a}' = \mathfrak{x}' \neq \mathfrak{o}'$, d.h. es ist stets $|f(\mathfrak{x})-\mathfrak{a}'| > 0$. In jenen Fällen, in denen die gegebene Gleichung im strengen Sinn unlösbar ist, verallgemeinert man den Begriff des Lösungsvektors und sieht $\mathfrak{x}$ als <u>verallgemeinerten</u> Lösungsvektor an, wenn gilt:

$$|f(\mathfrak{x})-\mathfrak{a}'| \text{ minimal.} \qquad (*)$$

Die Auflösung von (*) stellt das <u>lineare Ausgleichsproblem</u> dar. Ist die gegebene Gleichung im strengen Sinne lösbar, so ist deren Lösung auch Lösung von (*). Man zeige:
<u>Das lineare Ausgleichsproblem ist bei gegebenen f und beliebiger Wahl von $\mathfrak{a}'$ stets lösbar.</u>
<u>Anleitung:</u> Man zerlege $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'_1+\mathfrak{a}'_2$ in die direkten Summanden $\mathfrak{a}'_1\in f(\mathfrak{V}_n)$, $\mathfrak{a}'_2 = \mathrm{kn}\, f^A$ (vgl.Beispiel 302.) und beachte $f(\mathfrak{V}) = [\mathrm{kn}\, f^A]^{\perp}$ (Vorl.Nr.536.b.j). Man verwende die Bezeichnungsweise von Beispiel 302. (529-538,549-558)

305. Es sei $\mathfrak{V}_n$, $\mathfrak{V}'_{n'}$ unitär und $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_n,\mathfrak{V}'_{n'})$. Man zeige: Die Lösung des Ausgleichsproblems der Gleichung $f(\mathfrak{x}):= \mathfrak{a}'$ stellt genau die Lösung der Gleichung (1) von Beispiel 302 dar. (529-538,549-558)

306. Die Lösung des Ausgleichsproblems ist nur eindeutig, wenn f <u>injektiv</u> ist. Allgemein wird die Lösung jedoch durch den Nebenraum $L(\mathfrak{a},\mathrm{kn}\, f)$ $(f(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}'_1$, Bezeichnung wie im Beispiel 302) dargestellt. Um auch im allgemeinen Fall einen eindeutig bestimmten Lösungsvektor zu definieren, wählt man $\mathfrak{x} \in L(\mathfrak{a},\mathrm{kn}\, f)$ so, daß gilt

$$|\mathfrak{x}| \text{ minimal.} \qquad (*)$$

Man zeige: Die "kürzeste" Lösung (*) des Ausgleichsproblems ist eindeutig bestimmt.
<u>Anleitung:</u> Man zerlege den Repräsentanten $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2$ der Lösungsmenge $L(\mathfrak{a},\mathrm{kn}\, f)$ in die beiden direkten Summanden $\mathfrak{a}_1\in f^A(\mathfrak{V}'_{n'})$ und $\mathfrak{a}_2\in \mathrm{kn}\, f$ und stelle eine beliebige Lösung $\mathfrak{x}$ des Ausgleichsproblems in der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}+\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u} \in \mathrm{kn}\, f$ dar (Beachte Vorl.Nr. 536. a.l.). (529-538,549-558)

307. Nach Beispiel 306 ist der "kürzeste"Lösungsvektor $\mathfrak{a}_1$ des Ausgleichsproblems für die Gleichung $f(\mathfrak{r}) := \mathfrak{a}'$ eindeutig bestimmt, d.h. er ist durch die Vorgabe von $\mathfrak{a}'$ eindeutig festgelegt. Man zeige (Bezeichnungsweise wie in den Beispielen 299-302,306):

a) Die Abbildung

$$f^*: \begin{array}{ccc} \mathfrak{V}'_{n'} & \to & \mathfrak{V}_n \\ \mathfrak{a}' & \mapsto & \mathfrak{a}_1 \end{array}$$

ist linear.

b) Bezüglich der ON-Basen $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}'$ von $\mathfrak{V}_n$ bzw. $\mathfrak{V}'_{n'}$ hat f^* die $(n' \times n)$-Matrix

$$\begin{Vmatrix} D_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} .$$

Hier ist $D_r^{-1} = D_r^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} \right)$ die Inverse der Matrix D_r von Aufgabe 301.

Ist $A_{nn'}$ die Matrix von f bezüglich beliebiger ON-Basen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{V}_n$ bzw. $\mathfrak{V}'_{n'}$, so nennt man

$$A^*_{nn'} = B'_{n'} \cdot \begin{Vmatrix} D_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot B_n$$

die <u>Pseudoinverse</u> von $A_{nn'}$. (B_n und $B'_{n'}$ haben die gleiche Bedeutung wie in Beispiel 301).

<u>Anleitung zu a):</u> Man zerlege den Übergang $\mathfrak{a}' \mapsto \mathfrak{a}_1$ in folgende Schritte:

$\mathfrak{a}' \mapsto \mathfrak{a}'_1$ (Normalprojektion von $\mathfrak{a}'$ auf $f(\mathfrak{V}_n)$) $\mapsto \{\mathfrak{a}'_1\} \mapsto$ $\mapsto f^-(\{\mathfrak{a}'_1\}) = L(\mathfrak{a}, \mathrm{kn}\ f) \mapsto \{\mathfrak{a}_1\}$ (Normalprojektion von $L(\mathfrak{a}, \mathrm{kn}\ f)$ auf $f^A(\mathfrak{V}'_{n'})$) $\mapsto \mathfrak{a}_1$. (529-538,564-572)

308.a) Man bestimme die Pseudoinverse von

$$A_3 = \frac{1}{21} \cdot \begin{Vmatrix} 18 & -15 & -26 \\ 0 & -42 & 28 \\ 18 & 6 & -40 \end{Vmatrix}$$

und ermittle mit deren Hilfe die kürzeste Lösung des Ausgleichsproblems für die Gleichung

$$\|x_1, x_2, x_3\| \cdot A_3 = \|3, 2, 1\|$$

b) Man bestimme die Pseudoinverse der Matrix

$$A_3 = \frac{1}{27}\begin{Vmatrix} -7 & -10 & 16 \\ -2 & 1 & 20 \\ 10 & 22 & 8 \end{Vmatrix}$$

und ermittle mit deren Hilfe die kürzeste Lösung des Ausgleichsproblems für die lineare Gleichung

$$\|x_1, x_2, x_3\| \cdot A_3 = \|1,1,1\|$$

(529-538,564-572)

309. Der Homomorphismus $f: \mathfrak{V}_n \to \mathfrak{V}'_{n'}$ ($\mathfrak{V}_n, \mathfrak{V}'_{n'}$ unitär) habe bezüglich der ON-Basen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ die Matrix $A_{nn'}$. $A^*_{nn'}$ sei deren Pseudoinverse. $f^*: \mathfrak{V}'_{n'} \to \mathfrak{V}_n$ sei der bezüglich derselben Basen durch $A^*_{nn'}$ festgelegte Homomophismus.
Welche Bedeutung haben die Abbildung $f^* \circ f \in \mathrm{End}(\mathfrak{V}_n)$ bzw. $f \circ f^* \in \mathrm{End}(\mathfrak{V}'_{n'})$?
Man verifiziere das Ergebnis mit der Matrix

$$A_{34} = \frac{1}{6}\begin{Vmatrix} 5 & 5 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 6 \end{Vmatrix}$$

(Man verwende die bereits in 303 gewonnenen Ergebnisse.)

(529-538,564-572)

309.A. bis 309.L. siehe Seiten 76 - 79

GRAM'sche DETERMINANTE. UNITÄRE UND ORTHOGONALE HOMOMORPHISMEN

310. Man kann $V(\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_k) := \sqrt{G(\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_k)}$
das Volumen des "Parallelotops" P nennen, das von den l.u. Vektoren $\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_k$ eines unitären $\mathfrak{V}_n$ aufgespannt wird.
Es sei $\mathfrak{r}_k = \mathfrak{u}_k + \mathfrak{v}_k$ mit $\mathfrak{u}_k \in H[\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{k-1}]$, $\mathfrak{v}_k \perp H[\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{k-1}]$.

a) Man zeige:

$$V(\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_k) = |\mathfrak{v}_k| \cdot V(\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{k-1}).$$

Diese Formel verallgemeinert den Satz: "Volumen eines Parallelepipeds = Grundfläche · Höhe" auf Räume beliebiger Dimension, wenn man $|\mathfrak{v}_k|$ als "Höhe" bezeichnet und das von $\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{k-1}$ aufgespannte Parallelotop der Grundfläche entsprechen läßt.

b) Man bestimme das Volumen des von den Vektoren $\mathfrak{r}_1,\dots,\mathfrak{r}_4$ aufgespannte Parallelotops eines unitären $\mathbb{C}^4$, wenn bezüglich einer ON-Basis gilt

$\check{\mathfrak{r}}_1 = \|1,i,0,0\|$, $\check{\mathfrak{r}}_2 = \|i,0,1,i\|$, $\check{\mathfrak{r}}_3 = \|0,1,i,0\|$, $\check{\mathfrak{r}}_4 = \|1+i,0,0,i\|$.

Man berechne die Höhe $|\mathfrak{v}_4|$. (573-575)

311. Man beweise die Ungleichung von HADAMARD

$$G(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2,\dots,\mathfrak{r}_k) \leq G(\mathfrak{r}_1)G(\mathfrak{r}_2)\dots G(\mathfrak{r}_k)$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Anleitung: Man projiziere $\mathfrak{r}_k$ normal auf den Unterraum $\mathfrak{U} = H[\mathfrak{r}_1,\dots,\mathfrak{r}_{k-1}]$. Dann gilt $\mathfrak{r}_k = \mathfrak{u}_k+\mathfrak{v}_k$ mit $\mathfrak{u}_k \in \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{v}_k \perp \mathfrak{U}$.

Man beachte $G(\mathfrak{r}_k) = (\mathfrak{r}_k\mathfrak{r}_k) \geq \mathfrak{v}_k\mathfrak{v}_k$ (vgl.Vorl.Nr.575.b).

Wann gilt das Gleichheitszeichen ?

Bemerkung: Das Volumen des von $\mathfrak{r}_1,\dots,\mathfrak{r}_k$ aufgespannten Parallelotops ist höchstens gleich dem Produkt seiner Kantenlängen (vgl. Beispiel 310.). (573-575)

312. Bezüglich einer ON-Basis eines unitären $\mathfrak{B}_n$ gelte für die Vektoren $\mathfrak{r}_1,\dots,\mathfrak{r}_k$

$$\check{\mathfrak{r}}_i = \|x_{i1},\dots,x_{in}\| \qquad i=1,\dots,k.$$

Man stelle $G(\mathfrak{r}_1,\dots,\mathfrak{r}_k)$ und $V(\mathfrak{r}_1,\dots,\mathfrak{r}_k)$ mit Hilfe der Koordinatenmatrix

$$X_{kn} = \|x_{ij}\|_{kn} \quad \text{dar.}$$

Speziell betrachte man den Fall $k = n$. (573-575)

313. Es sei $\mathfrak{B}_n$ unitär und $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{B}_n)$. Ferner sei $\mathfrak{B}$ eine beliebige Basis und A_n die Matrix von f bezüglich $\mathfrak{B}$.

a) Wie lautet die Matrix der adjungierten Abbildung f^A bezüglich $\mathfrak{B}$?

Durch welche Eigenschaften ist A_n charakterisiert, wenn f

b) normal

c) selbstadjungiert

d) antiselbstadjungiert

e) unitär ist ?

./.

Man spezialisiere die Ergebnisse für den Fall, daß $\mathfrak{B}$ eine ON-Basis ist. (529,542,549, 559,576)

314. Es sei $\mathfrak{B}_n$ unitär und f ein unitärer Automorphismus von $\mathfrak{B}_n$.
Man zeige: Ist der Unterraum $\mathfrak{U}$ invariant unter f, so ist es auch sein orthogonales Komplement $\mathfrak{U}^{\perp}$. (541,576f)

315. $\{e_1, e_2\}$ und $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ seien orthonormierte Basen der beiden unitären Räume $\mathbb{C}^2$ bzw. $\mathbb{C}^3$. Ferner sei

$$A_{23} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix}$$

die Matrix von $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$ bezüglich dieser Basen.

a) Welchen Bedingungen müssen die a_{ik} genügen, damit f unitär ist ?

b) Es sei $a_{11} = \frac{1}{2}$, $a_{12} = \frac{i}{2}$, $a_{23} = 0$. Man bestimme a_{13}, a_{21}, a_{22} so als Funktionen von reellen Parametern, das f unitär ist. (576,577)

316. Man zeige: die charakteristische Gleichung $p(t) = 0$ einer orthogonalen Matrix ist eine reziproke Gleichung.
Erklärung: Eine algebraische Gleichung des Grades n heißt bekanntlich reziprok, wenn gilt $t^n p(\frac{1}{t}) = \pm p(t)$, Mit jeder Lösung λ ist auch $\frac{1}{\lambda}$ eine Lösung mit derselben Vielfachheit. (276,294,581)

317. Es sei $A_n = \|a_{ij}\|_n$ eine orthogonale Matrix. Man zeige:

a) Ist $\det A_n = 1$, so gilt $a_{ij} = \mathrm{adj}\, a_{ij}$

b) Ist $\det A_n = -1$, so gilt $a_{ij} = -\mathrm{adj}\, a_{ij}$

Anleitung: Man setze in Vorl. 284.c. den Index $k = \mathrm{const.}$ und betrachte für $i=1,\dots,n$ die Formel 284.c. als Gleichungssystem für die Unbekannte $x_j = \mathrm{adj}\, a_{kj}$.
Man vergleiche dieses Gleichungssystem mit den Beziehungen Vorl.Nr. 583.b. (581,583)

318. Man zeige: Jede reguläre A_n über $\mathbb{C}$ läßt sich als Produkt $A_n = C_n B_n$ einer unitären Matrix B_n und einer unteren Dreiecksmatrix C_n darstellen.
Anleitung: Man fasse A_n als Matrix eines Automorphismus f eines unitären $\mathfrak{B}_n$ bezüglich einer ON-Basis $\{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n\}$ auf. Dann stellen die Vektoren $f(\mathfrak{b}_i) = \mathfrak{c}_i$ eine l.u. Menge von Vektoren dar, deren Orthonomierung nach SCHMIDT die ON-Basis $\{\mathfrak{e}_1,\dots,\mathfrak{e}_n\}$ ergibt. Man betrachte die durch $g(\mathfrak{b}_i) = \mathfrak{e}_i$ und $h(\mathfrak{e}_i) = \mathfrak{c}_i$ bestimmten Endomorphismen g und h von $\mathfrak{B}_n$. (519,576-583)

319. Es sei $\{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n\}$ eine ON-Basis eines euklidischen $\mathfrak{B}_n$ und $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{B}_n)$. Man zeige: (HADAMARD)

$$(\det f)^2 \leq \prod_{i=1}^{n} f(\mathfrak{b}_i)f(\mathfrak{b}_i).$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $f(\mathfrak{b}_i)$ eine Orthogonal-Basis bilden (vgl.Beispiel 311.).
Hinweis: Für $\det f \neq 0$ zerlege man nach Beispiel 318 die Matrix A_n von f in das Produkt einer orthogonalen Matrix und einer unteren Dreiecksmatrix. Man beachte
$(\det f)^2 = (\det A_n)^2 = \det(A_n A_n^T)$. (519,576-583)

320. Es seien $\mathfrak{X} = \{\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_m\}$, $\mathfrak{Y} = \{\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_m\}$ Teilmengen eines euklidischen Vektorraumes $\mathfrak{B}_n$. Man zeige

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 & \cdots & \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_m \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{x}_m\mathfrak{y}_1 & \cdots & \mathfrak{x}_m\mathfrak{y}_m \end{vmatrix}^2 \leq \prod_{i=1}^{m} (\mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_i)(\mathfrak{y}_i\mathfrak{y}_i)$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn

1. $\mathfrak{o} \in \mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ ist

   oder

2. $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ m-elementige Orthogonalsysteme mit $H(\mathfrak{X}) = H(\mathfrak{Y})$ sind.

Anleitung: Bezüglich einer ON-Basis des $\mathfrak{B}_n$ entsprechen den gegebenen Vektoren die Koordinatenmatrizen $\check{\mathfrak{x}}_i, \check{\mathfrak{y}}_i$, den Mengen $\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$ die Matrizen

$$X_{mn} = \left\| \begin{matrix} \check{\mathfrak{r}}_1 \\ \vdots \\ \check{\mathfrak{r}}_m \end{matrix} \right\| , \quad Y_{mn} = \left\| \begin{matrix} \mathfrak{y}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{y}_m \end{matrix} \right\| .$$

Dann lautet die Behauptung

$$[\det(X_{mn}Y_{mn}^T)]^2 \leq \prod_{i=1}^{m} (\check{\mathfrak{r}}_i \hat{\mathfrak{r}}_i)(\check{\mathfrak{y}}_i \hat{\mathfrak{y}}_i) .$$

Man unterscheide die Fälle $m \gtreqless n$.
Bildet man im Fall $m < n$ die Menge $\mathfrak{Z} = \{\mathfrak{z}_{m+1}, \dots, \mathfrak{z}_n\}$ von untereinander orthogonalen Vektoren $\mathfrak{z}_{m+k}$, sodaß $\mathfrak{Z} \perp \mathfrak{X}$ ist, so gilt für die Matrizen

$$X_n = \left\| \begin{matrix} \check{\mathfrak{r}}_1 \\ \vdots \\ \check{\mathfrak{r}}_m \\ \check{\mathfrak{z}}_{m+1} \\ \vdots \\ \check{\mathfrak{z}}_n \end{matrix} \right\| , \quad Y_n = \left\| \begin{matrix} \check{\mathfrak{y}}_1 \\ \vdots \\ \check{\mathfrak{y}}_m \\ \check{\mathfrak{z}}_{m+1} \\ \vdots \\ \check{\mathfrak{z}}_n \end{matrix} \right\|$$

$\det(X_{mn}Y_{mn}^T) = \det(X_nY_n^T)$. Auf die quadratischen Matrizen X_n, Y_n läßt sich das Ergebnis von Beispiel 319 anwenden.

(519,576-583)

321. Welche Werte müssen die Größen $x,y,z \in \mathbb{R}$ in der Matrix

$$A_3 = \frac{1}{3} \left\| \begin{matrix} x & 2 & 2 \\ -2 & 1 & z \\ -2 & y & 1 \end{matrix} \right\|$$

annehmen, damit A_3 orthogonal ist ?

322. Bezüglich der kanonischen Basis eines unitären $\mathbb{C}^3$ hat die metrische Fundamentalform die Matrix

$$B_3 = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} 3 & 1-2i & -1-2i \\ 1+2i & 3 & 1-2i \\ -1+2i & 1+2i & 3 \end{matrix} \right\| .$$

Der Automorphismus f hat bezüglich der kanonischen Basis die Matrix

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 1+i & -1 \\ -i & i & -i \\ 1 & -(1-i) & 0 \end{Vmatrix}$$

Man zeige, daß f unitär ist und transformiere durch Wahl einer geeigneten ON-Basis auf Normalform. (576-585)

323. Dem Automorphismus f des euklidischen $\mathbb{R}^3$ entspreche bezüglich einer Orthonormalbasis die Matrix

a) $A_3 = \begin{Vmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ b) $A_3 = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$ c) $A_3 = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{Vmatrix}$

Man zerlege $f = h \circ g$ so in die Abfolge zweier Automorphismen, daß g selbstadjungiert mit lauter positiven Eigenwerten und h orthogonal ist. Man gebe die zugehörigen Matrizen an. (587)

324. Zur symmetrischen Matrix

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 5 & 10 & 8 \\ 10 & 2 & -2 \\ 8 & -2 & 11 \end{Vmatrix}$$

bestimme man eine orthogonale Matrix B_3 derart, daß A_3 durch die Ähnlichkeitstransformation $B_3 A_3 B_3^{-1}$ in eine Diagonalform übergeführt wird. Man gebe die Diagonalform an. (588)

325. Bezüglich einer ON-Basis habe der orthogonale Endomorphismus f des reellen $\mathfrak{V}_4$ die Matrix

$$A_4 = \frac{1}{25}\begin{Vmatrix} -3 & -24 & 6 & 2 \\ 16 & 3 & 18 & 6 \\ 6 & -2 & -12 & 21 \\ -18 & 6 & 11 & 12 \end{Vmatrix}$$

Man bestimme eine ON-Basis derart, daß die Matrix von f Normalform annimmt und gebe letztere an. (589)

326. Es sei g ein antiselbstadjungierter Endomorphismus eines euklidischen $\mathfrak{V}_n$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.
Ferner sei $h := g + \lambda . id$.

Man zeige zunächst:

a) h ist ein Automorphismus,

b) $h+h^A = 2\lambda.\mathrm{id}$.

Es sei weiters
$$f := 2\lambda(h^{-1})^A - \mathrm{id}.$$

Man zeige:

c) f ist orthogonal. Man beachte b)!

d) det f = +1. f ist daher eine Drehung. (559,576,590)

327. Man beweise mit Hilfe von Beispiel 326. folgenden Satz von CAYLEY:
Es sei $T_n = \|t_{ij}\|_n$ eine reelle Matrix mit folgender Eigenschaft ("schiefe Matrix")
$$t_{ij} = -t_{ji} (i \neq j); \ \bigwedge_i t_{ii} = \lambda \neq 0 \ (i,j=1,\dots,n)$$
Sind T_{ij} die zu den Elementen t_{ij} von T_n gehörigen Adjunkten (algebraischen Komplemente) (vgl.Vorl.Nr.282,283), so bilde man die Matrix $A_n = \|a_{ij}\|_n$, für deren Elemente gilt
$$a_{ij} = \frac{2\lambda}{\det T_n} . T_{ij} \qquad (i \neq j)$$
$$a_{ii} = \frac{2\lambda}{\det T_n} . T_{ii} - 1$$
Man zeige: A_n ist orthogonal und det A_n = +1.
Hinweis: Dieser Satz von CAYLEY gestattet es, orthogonale ($n \times n$)-Matrizen als rationale Funktionen der $\frac{n(n-1)}{2}$ frei wählbaren Parameter $\frac{t_{ij}}{\lambda}$ $(1 \leq i < j \leq n)$ zu konstruieren. (589,590)

328. Man setze in Beispiel 327 $n = 3$, $\lambda_0 := \lambda$, $\lambda_1 := t_{12}$, $\lambda_2 := t_{13}$, $\lambda_3 := t_{23}$ und bilde explizit die orthogonale Matrix A_3. Für n = 3 wurde die rationale Darstellung der Matrizen von Drehungen bereits von EULER gegeben. (589,590)

329. Man ermittle eine orthogonale vierzeilige Matrix mit Elementen aus $\mathbb{Q}$ zu den Parametern.

a) $t_{12}:t_{13}:t_{14}:t_{23}:t_{24}:t_{34}: \lambda = 1:2:0:3:0:-1:1$

b) $t_{12}:t_{13}:t_{14}:t_{23}:t_{24}:t_{34}: \lambda = -1:1:0:2:0:1:1$ (589,590)

330. Welcher der beiden orthogonalen Automorphismen des R^3, gegeben durch ihre auf eine ON-Basis bezogene Matrizen, ist eine Drehung, welcher ist uneigentlich orthogonal? Man transformiere beide auf Normalform und lege bei der Drehung Drehachse $\mathfrak{e}_1$ und Drehebene $\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ durch ein orthonormiertes Dreibein fest.
Den uneigentlich orthogonalen Automorphismus stelle man durch die Abfolge eines Drehung mit anschließender Spiegelung dar:

a) $\frac{1}{7}\begin{Vmatrix} -3 & 2 & 6 \\ -6 & -3 & -2 \\ 2 & -6 & 3 \end{Vmatrix}$, b) $\frac{1}{7}\begin{Vmatrix} -3 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{Vmatrix}$ (589-597)

WINKEL - UND ABSTANDSMESSUNG

331. Man beweise in einem euklidischen Vektorraum:

a) für zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ den Kosinussatz
$|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2 = |\mathfrak{x}|^2+|\mathfrak{y}|^2-2|\mathfrak{x}|.|\mathfrak{y}|\cos\alpha$

b) für zwei orthogonale Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ den Satz des PYTHAGORAS
$|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2 = |\mathfrak{x}|^2+|\mathfrak{y}|^2$.

Man zeige für zwei Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ eines unitären Vektorraumes:

c) $4\mathfrak{x}\mathfrak{y} = |\mathfrak{x}+\mathfrak{y}|^2-|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2+i|\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}|^2-i|\mathfrak{x}-i\mathfrak{y}|^2$

d) In einem euklidischen Vektorraum sind zwei Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ dann und nur dann orthogonal, wenn gilt
$|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}|^2 = |\mathfrak{x}|^2+|\mathfrak{y}|^2$

e) die Behauptung d) ist fälsch in unitären Vektorräumen

f) zwei Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ eines unitären Raumes sind dann und nur dann orthogonal, wenn für alle $a,b \in \mathbb{C}$ gilt
$|a\mathfrak{x}+b\mathfrak{y}|^2 = |a\mathfrak{x}|^2+|b\mathfrak{y}|^2$

g) gehören $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ einem euklidischen Vektorraum an, so gilt
$\mathfrak{x}+\mathfrak{y} \perp \mathfrak{x}-\mathfrak{y} \Leftrightarrow |\mathfrak{x}| = |\mathfrak{y}|$
Was kann man im unitären Fall zu dieser Behauptung aussagen?

h) In einem unitären Vektorraum gilt stets
$|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}|^2+|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2 = 2|\mathfrak{x}|^2+2|\mathfrak{y}|^2$ (509-512,515,598)

332. Im euklidischen $\mathfrak{R}^4$ sei der zweidimensionale Unterraum $\mathfrak{U} = H[\mathfrak{v}_1=(1,0,-1,1),\ \ \mathfrak{v}_2=(0,1,1,1)]$ gegeben. Man bestimme die Winkel von $\mathfrak{U}$ gegen folgende zweidimensionale Unterräume (kanonische Basis = ON-Basis)

a) $\mathfrak{U}_1=H[\mathfrak{a}_1=(1,0,2,1),\ \ \mathfrak{a}_2=(0,1,0,0)]$
b) $\mathfrak{U}_2=H[\mathfrak{b}_1=(1,0,2,1),\ \ \mathfrak{b}_2=(0,1,0,1)]$
c) $\mathfrak{U}_3=H[\mathfrak{c}_1=(2,0,4,2),\ \ \mathfrak{c}_2=(0,2,-1,-1)]$
d) $\mathfrak{U}_4=H[\mathfrak{d}_1=(2,0,1,-1),\ \ \mathfrak{d}_2=(0,2,-1,-1)]$
e) $\mathfrak{U}_5=H[\mathfrak{g}_1=(1,0,1,-1),\ \ \mathfrak{g}_2=(0,1,1,-1)]$
f) $\mathfrak{U}_6=H[\mathfrak{h}_1=(1,3,-1,-2),\ \ \mathfrak{h}_2=(5,1,2,-3)]$
g) $\mathfrak{U}_7=H[\mathfrak{f}_1=(2,3,1,5),\ \ \mathfrak{f}_2=(1,2,0,1)]$
h) $\mathfrak{U}_8=H[\mathfrak{f}_1=(2,-3,-5,-1),\ \ \mathfrak{f}_2=(1,0,0,1)]$

(598-604)

332.A. Siehe Ergänzungen

333. Im euklidischen $\mathfrak{R}_4$ sind zwei zweidimensionale Unterräume durch ihre Gleichungen bezüglich einer ON-Basis gegeben

a) $\mathfrak{U}_1: \begin{array}{r} x_1-x_2+x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array}$ $\qquad \mathfrak{U}_2: \begin{array}{r} x_1+x_2+x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}$

b) $\mathfrak{U}_1: \begin{array}{r} 4x_1-x_2-2x_3 = 0 \\ 2x_1-x_2 -2x_4 = 0 \end{array}$ $\qquad \mathfrak{U}_2: \begin{array}{r} x_1-x_2+x_3 = 0 \\ x_1+x_2 -x_4 = 0 \end{array}$

Man bestimme die Winkel von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$. (598-604)

334. Man bestimme die Winkel der beiden Unterräume $\mathfrak{U}_1=H[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2]$ $\mathfrak{U}_2=H[\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2]$ des euklidischen $\mathfrak{R}^5$ (kanonische Basis = ON-Basis).

$\mathfrak{a}_1=(1,0,1,0,0),\ \ \mathfrak{a}_2=(0,1,0,0,1),$
$\mathfrak{b}_1=(1,0,0,-1,0),\ \ \mathfrak{b}_2=(0,1,-1,0,0)$

(598-604)

335. Im euklidischen $\mathfrak{R}_5$ sind zwei Unterräume durch ihre Gleichungen bezüglich einer ON-Basis gegeben:

$\mathfrak{U}_1: \begin{array}{r} x_1 -x_5 = 0 \\ x_2 -x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}$ $\qquad \mathfrak{U}_2: \begin{array}{r} x_1 +x_3 -x_4 = 0 \\ x_2 -x_3 +x_5 = 0 \end{array}$

Man bestimme deren Winkel. (598-604)

336. $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ ($s = \dim \mathfrak{U}_1 \leq t = \dim \mathfrak{U}_2$) seien URe eines euklidischen VRes $\mathfrak{V}_n$ mit $\dim(\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2) = r$ und dem Parallelitätsgrad g.

a) Wieviele Winkel schließen $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ ein, wieviele davon sind von $\frac{\pi}{2}$ verschieden?

b) Man zeige, daß die orthogonalen Komplemente $\mathfrak{U}_1^{\perp}$ und $\mathfrak{U}_2^{\perp}$ dieselbe Anzahl von Winkeln einschließen und daß diese Winkel dieselbe Größe haben wie die von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ eingeschlossenen. Die Bestimmung der Winkel von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ läßt sich also ersetzen durch die Bestimmung der Winkel von $\mathfrak{U}_1^{\perp}$ und $\mathfrak{U}_2^{\perp}$.

c) Die von $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ sind zu den Winkeln von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2^{\perp}$ komplementär.
Wie kann man bei der Bestimmung der Winkel von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2^{\perp}$ auf die von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ eingeschlossenen rechten Winkel zurückschließen?
Die Bestimmung der Winkel von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ läßt sich also ersetzen durch die Bestimmung der Winkel von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2^{\perp}$.
<u>Hinweis zu c):</u> Man unterscheide die Fälle

$$\dim \mathfrak{U}_1 + \dim \mathfrak{U}_2 \leq n \text{ und } \dim \mathfrak{U}_1 + \dim \mathfrak{U}_2 > n$$ (598-604)

337. Man bestimme die Winkel der beiden Unterräume $\mathfrak{U}_1 = H[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3]$, $\mathfrak{U}_2 = H[\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3]$ des euklidischen $\mathfrak{R}^4$ (kanonische Basis = = ON-Basis).

$\mathfrak{a}_1 = (1,0,0,1)$, $\mathfrak{a}_2 = (0,1,0,-1)$, $\mathfrak{a}_3 = (0,0,1,2)$
$\mathfrak{b}_1 = (1,0,0,3)$, $\mathfrak{b}_2 = (0,1,0,4)$, $\mathfrak{b}_3 = (0,0,1,-3)$

Man beachte Beispiel 336. (598-604)

*)
338. a) In einer euklidisch-affinen Geometrie seien die drei kollinearen Punkte $A = \{\mathfrak{a}\}$, $B = \{\mathfrak{b}\}$, $C = \{\mathfrak{c}\}$ gegeben.
Man zeige:

$$|T(A,B,C)| = \frac{\text{Länge } AC}{\text{Länge } BC}$$

Diesem Ausdruck hat man dann entsprechend der Definition Vorl.Nr. 417. und Beispiel 201 und bzw. 203 ein negatives bzw. positives Vorzeichen zu erteilen, je nachdem C im Inneren oder Äußeren der Strecke AB liegt. (418,606)

b) In einer euklidisch-affinen Geometrie seien die vier kollinearen Punkte $A = \{\mathfrak{a}\}$, $B = \{\mathfrak{b}\}$, $C = \{\mathfrak{c}\}$, $D = \{\mathfrak{d}\}$ gegeben. Man bette die affine Geometrie in eine projektive Geometrie ein und zeige:

$$D(ABCD) = \frac{T(ABC)}{T(ABD)}$$

./.

*) 337.A. s. Ergänzungen S.75

sowie
$$|D(ABCD)| = \frac{|T(ABC)|}{|T(ABD)|} = \frac{\text{Länge } AC}{\text{Länge } BC} : \frac{\text{Länge } AD}{\text{Länge } BD}$$
(442,603)

339. In der dreidimensionalen euklidisch-affinen Geometrie sei die Ebene ε durch ihre Gleichung
$$2x_1 - 2x_2 - x_3 + 1 = 0$$
bezüglich eines kartesischen Bezugssystems C gegeben.

a) Man führe in ε ein kartesisches Bezugssystem C_ε mit dem Ursprung $A_0(1,1,?)$ ein, dessen y_1 - Achse durch den Punkt $P(3,5,?)$ geht.
Welche Koordinaten (y_1,y_2) bezüglich C_ε hat der Punkt $X(x_1,x_2,x_3)$ von ε ?

b) Man gebe die Gleichungen des Normalprojektors auf ε bezüglich der Bezugssysteme C und C_ε an.
(vgl. Beispiel 224.) (606)

*)
340. In der euklidisch-affinen $\mathfrak{E}_4$ seien die Geraden
$a[A_1(3,4,2,3),\ A_2(-1,0,4,5)]$, $b[B_1(2,1,-3,3),\ B_2(-4,1,1,1)]$
gegeben (kartesisches Bezugssystem). Man ermittle ihren Abstand und die Fußpunkte des Gemeinlotes. (607,608)

341. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems einer euklidisch-affinen $\mathfrak{E}_4$ wird die Gerade g durch die zwei Punkte $X_1(1,0,1,0)$, $X_2(0,1,0,1)$, die Ebene ε durch die drei Punkte $Y_1(1,1,0,0)$, $Y_2(1,0,0,1)$, $Y_3(0,1,1,1)$ festgelegt. Man bestimme den Abstand von g und ε .
Man gebe die Fußpunkte des Gemeinlotes auf g und ε an. (607,608)

342. Man berechne den Abstand der Ebene $\varepsilon[A(8,9,9,3),\ B(0,5,4,6),\ C(5,0,0,0)]$ von der Geraden $q[P(9,12,2,15),\ Q(9,2,-10,7)]$ in der euklidisch-affinen $\mathfrak{E}_4$ (kartesisches Bezugssystem). Man gebe die Fußpunkte des Gemeinlotes auf ε und g an. (607,608)

343. In einer euklidisch-affinen $_4$ haben zwei Unterräume bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems die Gleichungen

$$L_1:\ \begin{aligned} x_1-x_4-2 &= 0 \\ x_2-3x_4-4 &= 0 \\ x_3-5x_4-6 &= 0 \end{aligned} \qquad L_2:\ \begin{aligned} x_1-x_3+4x_4-3 &= 0 \\ x_2-2x_3+7x_4-4 &= 0 \end{aligned}$$

Man bestimme den Abstand von L_1 und L_2 und gebe die Fußpunkte des Gemeinlotes auf L_1 und L_2 an. (607,608)

---

*) 339.A. und 339.B. siehe Ergänzungen S. 70

344. Bezüglich eines kartesischen Koordiantensystems der euklidischen G_5 seien die Punkte $A_1(-1,5,-3,3,-3)$, $A_2(3,-1,3,3,1)$, $B_1(4,5,2,3,-2)$, $B_2(3,4,2,5,1)$, $B_3(2,6,-1,4,1)$ gegeben.
Man bestimme

a) den Abstand der Geraden $g = (A_1, A_2)$ und der Ebene $\varepsilon = (B_1, B_2, B_3)$

b) die Fußpunkte des Gemeinlotes auf g und ε (607,608)

345. In der euklidisch-affinen G_5 sind zwei Unterräume durch ihre Gleichungen bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems gegeben:

$$L_1:\ \begin{aligned} x_1+2x_5-4 &= 0\\ x_2-3x_5-2 &= 0\\ x_3+3x_5-14 &= 0\\ x_4-2x_5-21 &= 0 \end{aligned} \qquad L_2:\ \begin{aligned} 7x_1+15x_3+2x_4+x_5+401 &= 0\\ 7x_2+3x_3+6x_4+3x_5+209 &= 0 \end{aligned}$$

Man bestimme den Abstand von L_1 und L_2. Man gebe die Fußpunkte des Gemeinlotes auf L_1 und L_2 an. (607,608)

LINEARE OPTIMIERUNG

346. Man löse folgende Optimierungsprobleme:

a)
$$\begin{aligned} 8x_1+7x_2+8x_3 &= \max!\\ x_1 &\le 2\\ x_2 &\le 4\\ x_3 &\le 2\\ 20x_1+15x_2+24x_3 &\le 120\\ x_1,x_2,x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$
(630,631)

b)
$$\begin{aligned} 4x_1+7x_2+6x_3 &= \max!\\ 4x_1+3x_2+3x_3 &\le 24\\ 4x_2+3x_3 &\le 12\\ 2x_2+5x_3 &\le 10\\ x_1,x_2,x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$
(632,633)

c)
$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+4x_3 &= \max!\\ x_1+2x_2+3x_3 &\le 54\\ 3x_1+x_2+4x_3 &\le 77\\ 2x_1+x_2+2x_3 &\le 54\\ 2x_1+3x_3 &\le 48\\ x_1,x_2,x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$
(630,631)

d)
$$\begin{aligned} 20x_1+15x_2+12x_3 &= \min!\\ x_1 &\ge 2\\ x_2 &\ge 3\\ x_3 &\ge 2\\ 5x_1+4x_2+5x_3 &\ge 40\\ x_1,x_2,x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$
(650-652)

e) $2x_1+2x_2+3x_3 = \min!$
$x_1-x_2+2x_3 \geq 6$
$5x_1+5x_2-3x_3 \geq 15$
$x_2 \leq 5$
$x_1,x_2,x_3 \geq 0$ (650-652)

f) $16x_1+42x_2+15x_3 = \min!$
$12x_1+12x_2+6x_3 \geq 18$
$6x_1+6x_2+6x_3 \geq 15$
$3x_1+12x_2+9x_3 \geq 9$
$x_1,x_2,x_3 \geq 0$ (650-652)

g) $x_1+x_2+x_3 = \max!$
$2x_1+4x_2+x_3 \leq 4$
$5x_1+3x_2+2x_3 \leq 5$
$x_1+6x_2+4x_3 \leq 3$
$2x_1 \quad +x_3 \geq 1$
$x_1,x_2,x_3 \geq 0$ (636-640)

h) $x_1+3x_2+4x_3 = \max!$
$x_1+x_2+x_3 \leq 5$
$-x_1+x_2+2x_3 \leq 6$
$x_1,x_2,x_3 \geq 0$ (632,633)

i) $3x_1+x_2+2x_3 = \max!$
$4x_1+x_2 \leq 6$
$4x_1 \quad +5x_3 \leq 9$
$2x_2+x_3 \leq 4$
$3x_1 \quad +x_3 = 3$
$x_1,x_2,x_3 \geq 0$ (636-642)

j) $5x_1+8x_2+6x_3 = \max!$
$2x_1+4x_2+3x_3 \leq 105$
$x_1+x_2+x_3 \leq 45$
$x_2 \leq 15$
$x_1,x_2,x_3 \geq 0$ (630,631)

k) $2x_1+3x_2+4x_3 = \max!$
$15x_1+12x_2+20x_3 = 120$
$2x_1+2x_2+x_3 \geq 10$
$3x_1+5x_2+3x_3 \leq 30$
$-x_1+x_2 \leq 2$
$x_1,x_2,x_3 \geq 0$ (636-640)

l) $20x_1+16x_2+15x_3 = \max!$
$5x_1+2x_2+5x_3 \leq 20$
$25x_1+12x_2+10x_3 \leq 75$
$5x_1+4x_2 \leq 15$
$2x_2 \leq 5$
$x_1,x_2,x_3 \geq 0$ (630,631,641)

347. Ein Betrieb stellt drei Erzeugnisse E_1,E_2,E_3 in vier Abteilungen A_1,A_2,A_3,A_4 her. Der Zeitaufwand in Stunden zur Produktion je Einheit des Erzeugnisses in jeder Abteilung wird durch die Tabelle

a)

	A_1	A_2	A_3	A_4
E_1	1	2	3	0
E_2	3	1	0	1
E_3	2	4	2	1

b)

	A_1	A_2	A_3	A_4
E_1	10	1	2	0
E_2	0	2	1	3
E_3	7	0	0	4

angegeben. Die zur Verfügung stehende Maschinenzeit in Stunden pro Abteilung ist aus

a)

	A_1	A_2	A_3	A_4
h	51	55	39	18

b)

	A_1	A_2	A_3	A_4
h	70	10	10	24

ersichtlich. Der Absatzplan sieht vor, daß

a) das Doppelte der Stückzahl von E_1 und die Stückzahl von E_2 zusammen mindestens 28 betragen muß

b) nicht mehr als 5 Elemente E_1 erzeugt werden

Welche Stückzahlen x_i der Erzeugnisse E_i müssen produziert werden, damit der Gewinn maximal wird, wenn die Gewinnspannen für die Erzeugnisse

a)

E_1	E_2	E_3
36	72	56

b)

E_1	E_2	E_3
1	1	1

sind? Man gebe auch die Auslastung der Abteilungen A_1-A_4 bei Erreichen des Maximums an. (615-656)

348. Ein Betrieb stellt die Produkte E_1, E_2, E_3 her. Die Produktion wird durch die Maschinenkapazität der drei Abteilungen A_1, A_2, A_3 des Betriebes begrenzt. Folgende Zahlenangaben beschreiben die Kapazität des Betriebes

1. Benötigte Maschinenzeit pro Einheit von E_i in Abteilung A_j

a)

	A_1	A_2	A_3
E_1	1	2	3
E_2	2	1	2
E_3	4	2	2

b,c)

	A_1	A_2	A_3
E_1	4	4	5
E_2	0	1	4
E_3	5	0	8

2. Verfügbare Maschinenzeit in den einzelnen Abteilungen

a)

A_1	A_2	A_3
32	42	30

b,c)

A_1	A_2	A_3
200	120	400

Die Gewinnspannen pro Einheit von E_i sind

a)

E_1	E_2	E_3
6	10	12

b)

E_1	E_2	E_3
9	3	20

c)

E_1	E_2	E_3
4	1	5

Wieviele Einheiten x_1, x_2, x_3 von jedem der Produkte E_1, E_2, E_3 sollen hergestellt werden, um den Gewinn zu maximieren? Man beurteile die Auslastung der einzelnen Abteilungen bei Maximalgewinn. (615-656)

349. Zur Tierfütterung in einem landwirtschaftlichen Betrieb werden vorwiegend drei Futtermittel F_1, F_2, F_3 verwendet, deren Gehalt an drei wichtigen Grundstoffen G_1, G_2, G_3 (z.B. Kohlenhydrate, Eiweiß, Fette) aus folgender Matrix hervorgeht

a)

	G_1	G_2	G_3
F_1	2	3	1
F_2	3	1	1
F_3	1	2	1

b)

	G_1	G_2	G_3
F_1	15	10	12
F_2	12	24	15
F_3	10	15	20

Das aus F_1, F_2, F_3 gemischte Futter muß so beschaffen sein, daß es

a) von G_1 und G_2 mindestens je 80 Einheiten, von G_3 höchstens 60 Einheiten

b) von G_1 und G_2 höchstens, von G_3 aber mindestens 120 Einheiten enthält. Die Preise von F_1, F_2, F_3 betragen rsp. je Einheit:

a)

F_1	F_2	F_3
36	24	18

b)

F_1	F_2	F_3
40	30	48

Wieviel Einheiten x_1, x_2, x_3 von F_1, F_2, F_3 sind zu verwenden, damit die Futterkosten minimal werden? Wieviel Prozent der angegebenen Höchst- bzw. Mindestgrenzen der Grundstoffe G_i werden in der optimalen Mischung erreicht? (615-656)

350. In einem chemischen Labor soll aus drei Rohstoffen R_1, R_2, R_3 eine Spezialsäure mit folgenden Eigenschaften hergestellt werden:

1. Die Anteile der drei Hauptbestandteile sollen in jeder Einheit den Bedingungen $B_1 \geq 20$, $B_2 \leq 20$, $B_3 \geq 35$ genügen
2. Der Siedepunkt soll nicht unter 95^0 liegen.

Die Eigenschaften der drei Rohstoffe je Einheit von R_i sind in folgender Tabelle zusammengestellt

Rohstoff	1	2	3
B_1	15	20	25
B_2	10	15	30
B_3	40	30	35
Siedepunkt	95	100	92
Preis	140	120	130

Welche Anteile x_1, x_2, x_3 der Rohstoffe R_1, R_2, R_3 müssen in einer Mengeneinheit der Spezialsäure enthalten sein, damit die Herstellungskosten minimal sind?
Hinweis: Unter der Voraussetzung $x_1+x_2+x_3 = 1$ entspricht der Forderung 2. die Ungleichung $95x_1+100x_2+92x_3 \geq 95$
(615-656)

351. Man löse folgende Optimierungsprobleme

a)
$$\begin{aligned} 70-8x_1-5x_2-10x_3 &= \max! \\ 15x_1+12x_2+20x_3 &\geq 120 \\ x_1 &\leq 2 \\ 4x_2+3x_3 &\leq 24 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 15-4x_1-2x_2-x_3 &= \max! \\ 24x_1+20x_2+15x_3 &\geq 120 \\ 4x_1+5x_2+8x_3 &\leq 40 \\ 10x_1+7x_2 &\leq 70 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(650-651)

352. Für einen landwirtschaftlichen Betrieb besteht die Möglichkeit, drei Anbaukulturen anzulegen. Die Erntemenge ist von der Nutzfläche und der Art der Düngemittel abhängig. Folgende Tabelle stellt den Bedarf dieser Erfordernisse pro Gewichtseinheit der betreffenden Kultur dar und gibt auch die insgesamt verfügbaren Mittel (Fonds) an

Kultur	1	2	3	Fonds
Anbaufläche	2	4	3	30
Düngemittel 1	2	4	5	35
Düngemittel 2	10	5	0	60

Der Gewinn pro Gewichtseinheit beträgt

Kultur	1	2	3
Gewinn	9	6	4

a) Wieviel Gewichtseinheiten müssen von jeder Kultur produziert werden, damit der Gewinn maximal wird?
b) Wie muß der Anbauplan gestaltet werden, damit bei optimalen Gewinn die gesamte Nutzfläche bebaut werden soll?
(652-656)

353. Man ermittle das rationale und das ganzzahlige Optimum des folgenden Problems

a)
$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= \max!\\ -16x_1+18x_2 &\le 9\\ 10x_1-4x_2 &\le 33\\ x_1+2x_2 &\ge 6\\ x_1,x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1+7x_2 &= \max!\\ x_1+10x_2 &\le 92\\ 22x_1-2x_2 &\le 139\\ 5x_1-4x_2 &\le 20\\ x_1,x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(615-656)

QUADRIKEN

354. Man bilde den zum

a) Satz von PAPPUS (vgl.Bsp. 231)

b) Satz von DESARGUES (vgl.Bsp.232)

dualen Satz in der reellen $\mathfrak{P}_2$ und stelle die entsprechenden Figuren dar. (657-659)

355. In der reellen projektiven Ebene $\mathfrak{P}(\mathfrak{V}_3)$ sei eine p-korrelative Selbstabbildung $\varkappa$ durch Vorgabe der Bilinearform β gegeben, der bezüglich einer beliebigen Basis von $\mathfrak{V}_3$ die Matrix

$$B_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$ entspreche.

a) Man gebe das Bild $\varkappa(X)$ des p-Punktes $X(X_0:X_1:X_2)$ an.

b) Welcher Punkt hat kein korrelatives Bild?

c) Was kann man über die Menge aller Bildgeraden sagen?

d) Gibt es Punkte, die auf ihrer Bildgeraden liegen?

e) Man wähle die Gerade $X_0 = 0$ als Ferngerade und interpretiere die Ergebnisse in der reellen affinen Ebene (vgl.Vorl.Nr. 412). (664-669)

356. In der reellen projektiven Ebene sei der Kegelschnitt Q durch seine Gleichung

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} a_{ij}X_iX_j = 0 \quad A_3 = \|a_{ij}\|_3 = A_3^T, \ \det A_3 \neq 0 \text{ gegeben.}$$

a) Man bestimme die Gleichung der Polaren des Punktes $Y(Y_0:Y_1:Y_2)$.

b) Man zeige: Durchläuft der Punkt $Y(Y_0:Y_1:Y_2)$ die Gerade g: $c_0Y_0+c_1Y_1+c_2Y_2 = 0$, so dreht sich dessen Polare um einen Punkt $Z(Z_0:Z_1:Z_2)$, den <u>Pol</u> von g. Man gebe dessen Koordinaten an.

c) Man zeige: g ist die Polare von Z.

d) Man zeige: Schneidet g den Kegelschnitt in zwei Punkten, so ist Z der Schnittpunkt der Kegelschnittstangenten in diesen Punkten. (673-678)

357. Die p-Quadrik Q des reellen P_5 habe die Gleichung

a) $5X_0^2-X_1^2+X_2^2-3X_4^2+32X_5^2+2X_0X_2+2X_0X_4+32X_0X_5+2X_2X_4+16X_4X_5 = 0.$

b) $5X_0^2-X_1^2+X_2^2-3X_4^2+32X_5^2+2X_0X_2+2X_0X_4+32X_0X_5+2X_3X_4+16X_4X_5 = 0$

Man charakterisiere Q geometrisch durch Angabe der p-Dimension s des p-Raumes der auf Q liegenden singulären Punkte sowie durch Angabe der maximalen p-Dimension m der auf Q liegenden p-Räume. (670-686)

358. Bezüglich eines affinen Bezugssystems des G_3 hat die a-Quadrik Q' die Gleichung

$7x_1^2+17x_2^2+x_3^2-22x_1x_2+8x_1x_3-14x_2x_3-16x_1+26x_2-8x_3+8 = 0.$

Man gebe ein Bezugssystem und die Transformationsformeln an, sodaß die Gleichung von Q'Normalform annimmt. (687-698)

359. In einem kartesischen Bezugssystem der euklidisch-affinen Ebene hat ein Kegelschnitt Q' die Gleichung

a) $66x_1^2+59x_2^2-24x_1x_2+120x_1-90x_2-25 = 0$

b) $9x_1^2+16x_2^2+24x_1x_2+228x_1+54x_2+294 = 0$

c) $6x_1^2-x_2^2+24x_1x_2+12x_1-26x_2+6 = 0$

d) $9x_1^2+16x_2^2+24x_1x_2-6x_1-8x_2+1 = 0$

Man gebe ein kartesisches Bezugssystem und die zugehörigen Tranformationsformeln an, sodaß die Gleichung von Q' Normalform annimmt. (697-703)

360. Man gebe eine Matrizenkongruenz an, welche die beiden symmetrischen Matrizen über $\mathbf{R}$

$$A_3 = \begin{Vmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & -11 \end{Vmatrix} , \quad B_3 = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \\ -3 & 5 & 12 \end{Vmatrix} \quad (B_3 \text{ pos.def.})$$

gleichzeitig auf Diagonalform bringt. Man führe die Kongruenz aus. (697)

*)

ERGÄNZUNGEN

246.A. Eine Selbstabbildung der reellen G_2 sei durch ihre (linear gebrochenen) Gleichungen gegeben. Man bestimme die Fixpunkte und Fixgeraden der gegebenen Abbildung und gebe jene Elemente an, denen kein Bild entspricht

1. durch Rechnung in G_2
2. durch Einbettung der G_2 in die reelle P_2

a) $$x_1' = \frac{15x_1-8x_2+5}{-4x_1+2x_2} \qquad x_2' = \frac{24x_1-13x_2+9}{-4x_1+2x_2}$$

b) $$x_1' = \frac{12x_1-9x_2-8}{13x_1-9x_2-9} \qquad x_2' = \frac{x_1-2x_2}{13x_1-9x_2-9}$$

c) $$x_1' = \frac{3x_1+8x_2+4}{4x_1+10x_2+3} \qquad x_2' = \frac{-3x_1-8x_2-3}{4x_1+10x_2+3}$$

d) $$x_1' = \frac{-3x_1-7x_2+2}{2x_1+9x_2-4} \qquad x_2' = \frac{2x_1+4x_2-1}{2x_1+9x_2-4}$$

e) $$x_1' = \frac{32x_1+4x_2-16}{56x_1+28x_2-46} \qquad x_2' = \frac{4x_1+26x_2-29}{56x_1+28x_2-46}$$

f) $$x_1' = \frac{5x_1-8x_2-4}{6x_1-12x_2-5} \qquad x_2' = \frac{x_2}{6x_1-12x_2-5}$$

(461)

*) 361. Ergänzungen Seite 73

273.A. Die kanonische Basis des euklidischen Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ sei ON-Basis. Man orthonormiere die von den Vektoren $a_1,\dots,a_n$ gebildete Basis nach E.SCHMIDT:

a) $\underline{n=4}$ $a_1 = (2,1,4,2)$, $a_2 = (1,3,2,6)$, $a_3 = (1,1,0,1)$,
$a_4 = (3,-3,-1,3)$

b) $\underline{n=4}$ $a_1 = (15,-4,2,-22)$, $a_2 = (3,-17,22,-26)$, $a_3 = (3,1,13,-8)$,
$a_4 = (-3,5,11,-13)$

c) $\underline{n=3}$ $a_1 = (1,2,-2)$, $a_2 = (0,-1,2)$, $a_3 = (2,0,1)$,

d) $\underline{n=4}$ $a_1 = (-3,0,6,2)$, $a_2 = (-1,-7,16,24)$, $a_3 = (1,3,-5,-8)$,
$a_4 = (1,0,0,1)$

e) $\underline{n=4}$ $a_1 = (4,3,-4,20)$, $a_2 = (-1,1,4,4)$, $a_3 = (20,15,1,16)$,
$a_4 = (1,1,1,1)$

f) $\underline{n=3}$ $a_1 = (-1,2,1)$, $a_2 = (1,1,1)$, $a_3 = (2,-1,1)$

g) $\underline{n=3}$ $a_1 = (2,-1,2)$, $a_2 = (3,2,-1,)$ $a_3 = (1,0,1)$

h) $\underline{n=3}$ $a_1 = (2,3,-1)$, $a_2 = (1,-2,-2)$, $a_3 = (-2,2,1)$

(508,518,519)

274.A. Bezüglich der kanonischen Basis des euklidischen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ habe das Skalarprodukt die Matrix

$$B_3 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Man orthonormiere die von den Vektoren $a_1 = (1,1,-1)$, $a_2 = (0,1,1)$, $a_3 = (1,0,1)$ gebildete Basis nach E.SCHMIDT

(508,518,519)

339.A. Im n-dimensionalen euklidisch-affinen Raum sei der Punkt P sowie der von den Punkten $A_1,\ldots,A_r$ aufgespannte a-Unterraum U gegeben. Man berechne den Abstand des Punktes P von U. Man gebe den Fußpunkt F des aus P auf U gefällten Lotes an. Alle Angaben beziehen sich auf ein kartesisches Koordinatensystem.

a) <u>n=3, r=3</u> $P(3,2,7)$, $A_1(12,-7,3)$, $A_2(8,-6,2)$, $A_3(4,-2,-5)$

b) <u>n=3, r=2</u> $P(9,7,3)$, $A_1(10,8,-6)$, $A_2(-2,-1,3)$

c) <u>n=3, r=3</u> $P(13,8,7)$, $A_1(0,-39,1)$, $A_2(-11,-9,-29)$, $A_3(-23,-9,31)$

d) <u>n=3, r=2</u> $P(10,3,1)$, $A_1(7,12,13)$, $A_2(-3,-4,-3)$

e) <u>n=4, r=4</u> $P(3,2,-1,5)$ $A_1(6,1,3,3)$, $A_2(0,0,4,3)$ $A_3(6,0,3,4)$, $A_4(-4,2,4,-1)$

f) <u>n=4, r=3</u> $P(4,3,-2,1)$, $A_1(7,1,-4,6)$, $A_2(8,2,-4,4)$ $A_3(3,-2,-4,16)$

g) <u>n=4, r=2</u> $P(3,4,1,-5)$, $A_1(4,-8,-5,6)$, $A_2(6,-4,-1,10)$

339.B. Im 5-dimensionalen euklidisch-affinen Raum sei der Punkt P sowie der durch seine Gleichungen bezüglich eines kartesischen Bezugsystems bestimmte a-Unterraum U gegeben. Man bestimme den Abstand von P und U und gebe den Fußpunkt F des von P auf U gefällten Lotes an.

a) $P(1,2,3,4,5)$, $3x_1+2x_2+2x_3+10x_4+2x_5 = 184$

b) $P(-11,4,1,4,-3)$,
$$\begin{aligned} 5x_1-x_2+x_3 \qquad +x_5 + 5 &= 0 \\ x_4 \qquad - 1 &= 0 \end{aligned}$$

c) $P(2,3,-2,-8,1)$,
$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+2x_3 \qquad - 25 &= 0 \\ x_4 \qquad - 2 &= 0 \\ x_5 \qquad - 3 &= 0 \end{aligned}$$

236.A. Man untersuche, welche der folgenden Geraden der P_3 reell, niederkomplex, hochkomplex ist. (Siehe Beispiel 236.). Bei der niederkomplexen Geraden gebe man die sie enthaltende reelle Ebene und den auf ihr liegenden reellen Punkt an. Die reelle Gerade lege man als Schnitt reeller Ebenen fest.

a) Die Geraden seien als Schnitt zweier Ebenen festgelegt

$$g_1 \ldots \left[\begin{array}{l} X_0 + iX_1 + (1+i)X_2 + X_3 = 0 \\ (2+i)X_0 - X_1 + 3i\,X_2 + 2X_3 = 0 \end{array}\right.$$

$$g_2 \ldots \left[\begin{array}{l} (1+4i)X_0 + iX_1 + (3+3i)X_2 - (2-2i)X_3 = 0 \\ (2+2i)X_0 + (4-2i)X_1 + (5+3i)X_2 + (1-3i)X_3 = 0 \end{array}\right.$$

$$g_3 \ldots \left[\begin{array}{l} (2+i)X_0 + (1-i)X_1 - (1-2i)X_2 + (1+3i)X_3 = 0 \\ (3+4i)X_0 - i\,X_1 + (1+3i)X_2 + (4+7i)X_3 = 0 \end{array}\right.$$

b) Die Geraden seien als Verbindung zweier Punkte festgelegt

g_1 $[A(1+2i:2+i:-2i:2+4i),\quad B(-1+2i:1+2i:2-i:-2+4i)]$

g_2 $[A(1-i:2+i:3+2i:1+3i),\quad B(-1-i:1+4i:2+7i:3+7i)]$

g_3 $[A(2:-2+3i:2+2i:1),\quad B(1:-2+6i:2-i:-1+3i)]$

(437-446)

296.A. Im euklidischen $\mathfrak{V}_n$ sei der Unterraum $\mathfrak{U}$ gegeben. Man bestimme die Matrix des Normalprojektors von $\mathfrak{V}_n$ auf $\mathfrak{U}$ bezüglich der kanonischen Basis (=ON Basis)

a) $n=3$, $\mathfrak{U}=H[(2,3,8),(1,-2,-3)]$

b) $n=3$, $\mathfrak{U}=H[(4,-1,-11),(-2,3,13)]$

c) $n=3$, $\mathfrak{U}=H[(2,2,2),(3,2,-3)]$

d) $n=4$, $\mathfrak{U}=H[(2,-1,3,1),(1,1,0,5)]$

e) $n=4$, $\mathfrak{U}=H[(3,-2,5,-5),(2,-1,2,-3)]$

f) $n=4$, $\mathfrak{U}=H[(1,1,1,4),(2,-1,3,5),(0,1,1,5)]$

g) $n=5$, $\mathfrak{U}=H[(2,1,2,1,3),(-1,1,1,-2,2),(1,-1,2,2,1)]$

h) $n=5$, $\mathfrak{U}=H[(2,-1,0,2,3),(0,1,1,-1,1),(-2,1,-1,-1,-3)]$

j) $n=5$, $\mathfrak{U}=H[(2,-1,3,1,-3),(-1,2,1,-2,-9),(0,3,-4,2,11),$
$(3,-1,2,0,1)]$

(528,564-568,575)

332.A. Im euklidischen $\mathfrak{R}^4$ sei der zweidimensionale Unterraum $\mathfrak{U} = H[\mathfrak{v}_1=(1,1,0,0),\ \ \mathfrak{v}_2=(0,3,2,2)]$ gegeben. Man bestimme die Winkel von $\mathfrak{U}$ gegen folgende zweidimensionale Unterräume (kanonische Basis = ON-Basis)

a) $\mathfrak{U}_1=H[\mathfrak{a}_1=(1,2,0,1),\ \ \mathfrak{a}_2=(3,0,3,1)]$

b) $\mathfrak{U}_2=H[\mathfrak{b}_1=(1,0,1,0),\ \ \mathfrak{b}_2=(0,1,1,1)]$

c) $\mathfrak{U}_3=H[\mathfrak{c}_1=(1,-2,-2,-2),\ \ \mathfrak{c}_2=(2,-2,-6,9)]$

d) $\mathfrak{U}_4=H[\mathfrak{d}_1=(1,-4,2,-2),\ \ \mathfrak{d}_2=(3,15,-4,-20)]$

e) $\mathfrak{U}_5=H[\mathfrak{g}_1=(4,-4,3,3),\ \ \mathfrak{g}_2=(2,-2,9,-6)]$

f) $\mathfrak{U}_6=H[\mathfrak{h}_1=(2,5,2,2),\ \ \mathfrak{h}_2=(1,1,-1,0)]$

(598-604)

361. Man führe einen Basiswechsel im reellen $\mathfrak{V}_n$ durch, sodaß die beiden gegebenen quadratischen Formen als Quadratsummen dargestellt werden

a) $q_1(\mathfrak{x}) = 5x_1^2 - 26x_1x_2 + 34x_2^2$ (pos.def.)

$q_2(\mathfrak{x}) = 5x_1^2 - 22x_1x_2 + 23x_2^2$

b) $q_1(\mathfrak{x}) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 10x_2x_3 + 6x_3^2$ (pos.def.)

$q_2(\mathfrak{x}) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 - 12x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_2x_3 + 5x_3^2$

c) $q_1(\mathfrak{x}) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2^2 + 4x_2x_3 + 8x_3^2$ (pos.def.)

$q_2(\mathfrak{x}) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 - 12x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3$

d) $q_1(\mathfrak{x}) = 2x_1^2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$ (pos.def.)

$q_2(\mathfrak{x}) = 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$

(697)

257.A. Die Reduktion einer quadratischen Form über einem reellen Vektorraum auf die Normalform von Vorl.Nr.475. läßt sich auch auf folgendem Wege erreichen.

Sei

$$q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

die Darstellung der quadratischen Form bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$ des $\mathfrak{V}_n$

<u>1.Fall:</u> Wenigstens ein Koeffizient a_{ii} sei von Null verschieden, etwa $a_{kk} \neq 0$.

Dann definiere man als neue Koordinate

$$y_k := \sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i$$

und bilde

$$q_1 := q - \frac{1}{a_{kk}} y_k^2$$

Man zeige, daß q_1 eine quadratische Form ist, in welcher die Koordinate x_k nicht mehr auftritt. Daher gilt

$$q = q_1 + \frac{1}{a_{kk}} y_k^2$$

2.Fall: Alle a_{ii} $(i=1,\dots,n)$ seien Null. Ferner sei $a_{kl} \neq 0$ $(k \neq l)$.
Man definiere neue Koordinaten y_k, y_l durch

$$y_k + y_l := \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i$$

$$y_k - y_l := \sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j$$

und bilde

$$q_2 := q - \frac{2}{a_{kl}} (y_k + y_l)(y_k - y_l) = q - \frac{2}{a_{kl}} (y_k^2 - y_l^2).$$

Man zeige, daß q_2 eine quadratische Form ist, in welcher die Koordinaten x_k und x_l nicht mehr auftreten. Daher gilt

$$q = q_2 + \frac{2}{a_{kl}} (y_k^2 - y_l^2)$$

Man gehe durch mehrmalige Anwendung der angebenen Schritte bei einigen Teilbeispielen von Beispiel 261. zu einem neuen Bezugssystem mit den Koordinaten $y_1,\dots,y_n$ über und gebe die entsprechende neue Basis an.
Hinweis: Man beachte, daß die nach obiger Methode gewonnenen Beziehungen zwischen den alten Koordinaten $x_1,\dots,x_n$ und den neuen Koordinaten $y_1,\dots,y_n$ gerade invers zu den in Vorl.184. angeführten Beziehungen sind. (467 - 475)

315.A. Der vierdimensionale Vektorraum $\mathfrak{B}_4$ sei euklidisch. Ferner sei die auf dem r - dimensionalen Unterraum $\mathfrak{U}_r = H[\mathfrak{e}_1,\dots,\mathfrak{e}_r]$ definierte Abbildung

$$f: \mathfrak{U}_r \to \mathfrak{B}_4$$

orthogonal. Man erweitere f zu einem orthogonalen Automorphismus $\bar{f}$ des $\mathfrak{B}_4$

$$\bar{f}: \mathfrak{B}_4 \to \mathfrak{B}_4, \qquad \bar{f}|\mathfrak{U}_r = f$$

f sei durch die Matrix A_{r4} bezüglich der ON-Basis $\{\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4\}$ des $\mathfrak{B}_4$ gegeben.
(Lösung i.a. nicht eindeutig!)

./.

a) $\underline{r = 3}$ $\quad A_{34} = \frac{1}{21}\begin{Vmatrix} 8 & -7 & -2 & 18 \\ -14 & -14 & -7 & 0 \\ 10 & -14 & 8 & -9 \end{Vmatrix}$

b) $\underline{r = 3}$ $\quad A_{34} = \frac{1}{15}\begin{Vmatrix} -10 & 0 & -11 & -2 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 10 & -5 \end{Vmatrix}$

c) $\underline{r = 2}$ $\quad A_{24} = \frac{1}{7}\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 & -6 \\ -6 & 3 & 0 & -2 \end{Vmatrix}$

d) $\underline{r = 2}$ $\quad A_{24} = \frac{1}{9}\begin{Vmatrix} 3 & -8 & -2 & -2 \\ 6 & 2 & -4 & 5 \end{Vmatrix}$

e) $\underline{r = 1}$ $\quad A_{14} = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$

f) $\underline{r = 1}$ $\quad A_{14} = \frac{1}{9}\begin{Vmatrix} -6 & -2 & -5 & 4 \end{Vmatrix}$ (519,582,583)

337.A. $\mathbb{R}^n$ sei ein euklidischer Vektorraum mit der kanonischen Basis als ON-Basis. Man bestimme die Winkel, die die Projektionsrichtung $\mathfrak{U}'$ mit dem Bildraum $\mathfrak{U}$ einschließt bei den Beispielen
a) 117, b) 118, c) 119, d) 120, e) 178

309.I. Sei $\mathfrak{a}'$ ein gegebener Vektor aus $\mathfrak{V}'_{n'}$, und $\mathfrak{a} := f^*(\mathfrak{a}')$
(Alle Bezeichnungen von Beispiel 309.H. werden übernommen.)

a) Man zeige, daß $\mathfrak{a}$ ein Lösungsvektor des linearen Ausgleichsproblems ist (siehe Bsp. 304), d.h. es gilt

$$\bigwedge_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{V}_n} |f(\mathfrak{x})-\mathfrak{a}'| \geq |f(\mathfrak{a})-\mathfrak{a}'|$$

Anleitung: Man verwende die Zerlegung
$f(\mathfrak{x})-\mathfrak{a}' = \mathfrak{u}'+\mathfrak{v}'$.

b) Man zeige: Für jeden Lösungsvektor $\mathfrak{x}$ des linearen Ausgleichsproblems, für den also gilt

$$|f(\mathfrak{x})-\mathfrak{a}'| = |f(\mathfrak{a})-\mathfrak{a}'| \qquad (*)$$

folgt $\qquad f(\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{a})$ bzw. $f(\mathfrak{u}) = \mathfrak{o}'$

c) Man zeige, daß $\mathfrak{a}$ die "kürzeste Lösung" des linearen Ausgleichsproblems ist (Bsp. 306), d.h. daß für alle Lösungen von (*) gilt

$$|\mathfrak{x}| \geq |\mathfrak{a}|$$

Anleitung: Man setze $\mathfrak{x}=\mathfrak{a}+\mathfrak{u}$ und beachte $f^*=f^A \circ q$ (Bsp. 309.D)

Anmerkung: Aus der Eindeutigkeit der kürzesten Lösung (Bsp. 306) folgt die Übereinstimmung der Definition von Bsp. 309.D. mit der Definition von Bsp. 307.

(529-538)

309.J. Man bestimme die kürzeste Lösung folgender Gleichungssysteme

a)
$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-5x_3 &= 1 \\ x_1-x_2 &= 1 \\ x_1+2x_2-x_3 &= 1 \\ 2x_1-5x_2+x_3 &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1-x_2+x_4 &= 2 \\ 2x_2+x_3 &= 1 \\ x_1-2x_4 &= 0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-x_4 &= 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1-x_3+x_4 &= 1 \\ x_2+x_3+2x_4 &= 2 \\ x_1-3x_3 &= 3 \\ x_1+x_2-2x_3+2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3 &= 1 \\ x_1+x_3 &= 0 \\ 2x_2-4x_3 &= -1 \\ 2x_1+3x_2-4x_3 &= 2 \\ 2x_1+x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Alle Gleichungssysteme beziehen sich auf ON-Basen

309.K. Man zeige: $f^*(\mathfrak{V}'_{n'}) = f^A(\mathfrak{V}'_{n'})$ und kn f^* = kn f^A.
Anleitung: Man wende Vorl. 536.f.k. auf die Abbildungen f_1 und f_2 von Bsp. 309.B. an und beachte, daß die Abbildungen q_1 und p_2 von Bbsp. 309.E.a und 309.E.b. Automorphismen von $\mathfrak{V}''_r$ sind. Zum Nachweis von kn f^* = kn f^A zeige man zunächst: kn f^A = kn f_2^A.

(529-538)

309.L.a) Man zeige: Die Eigenvektoren $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_r$ des Endomorphismus g von $\mathfrak{V}_n$ (Bsp. 299) sind auch Eigenvektoren des Endomorphismus p von $\mathfrak{V}_n$ (Bsp. 309.D). (Für die Vektoren $\mathfrak{e}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{e}_n$ muß dies nicht gelten!). Man bestimme die entsprechenden Eigenwerte von p. Man gebe die Matrix P_n von p bezüglich der Basis $\mathfrak{S}$ von Bsp. 301 an.

Von wieviel Parametern hängt P_n ab?

Wann ist p eindeutig bestimmt?

Man zeige: $p \circ g = f^* \circ f$

Man charakterisiere die Abbildung $p \circ g$.

b) Man zeige: Die Eigenvektoren $\mathfrak{e}'_1, \ldots, \mathfrak{e}'_r$ des Endomorphismus h von $\mathfrak{V}'_{n'}$ (Bsp. 299) sind auch Eigenvektoren des Endomorphismus q von $\mathfrak{V}'_{n'}$ (Bsp. 309.D) (Für die Vektoren $\mathfrak{e}'_{r+1}, \ldots, \mathfrak{e}'_{n'}$ muß dies nicht gelten!)

Man bestimme die entsprechenden Eigenwerte von q.

Man gebe die Matrix $Q_{n'}$ von q bezüglich der Basis $\mathfrak{S}'$ von Bsp. 301 an.

Von wieviel Parametern hängt $Q_{n'}$ ab?

Wann ist q eindeutig bestimmt?

Man zeige: $h \circ q = f \circ f^*$

Man charakterisiere die Abbildung $h \circ q$.

(529-538)