Vorlesungen

aus

MULTILINEARER ALGEBRA

Prof.Dr.Wolfgang STRÖHER

MULTILINEARE ALGEBRA

(Prof. STRÖHER)

1. Homomorphiesatz: Es sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V},\mathfrak{V}')$ und $\mathfrak{U}$ ein Unterraum von $\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{U} \subset \mathrm{kn}\, f$. Ferner sei ω die natürliche Abbildung $\omega: \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}/\mathfrak{U}$. Dann gibt es genau ein

   $g_{\mathfrak{U}}: \mathfrak{V}/\mathfrak{U} \to \mathfrak{V}'$ mit $f = g_{\mathfrak{U}} \circ \omega$

   a) $\mathrm{kn}\, g_{\mathfrak{U}} = \mathrm{kn}\, f/\mathfrak{U}$

   b) $g_{\mathfrak{U}}$ injektiv $\Leftrightarrow \mathfrak{U} = \mathrm{kn}\, f$

   c) $g_{\mathfrak{U}}$ surjektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv

   d) $f(\mathfrak{V}) \cong \mathfrak{V}/\mathrm{kn}\, f$

Äußere direkte Summen und Produkte von Vektorräumen

2. Es sei I eine Indexmenge und $(\mathfrak{V}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektorräumen über demselben kommutativen Körper K. Dann heißt

   $$\mathop{\mathrm{X}}_{i\in I} \mathfrak{V}_i := \{\sigma \mid \sigma: I \to \bigcup_{i\in I} \mathfrak{V}_i \wedge \sigma(i) \in \mathfrak{V}_i\}$$

   das kartesische Produkt der Vektorräume $\mathfrak{V}_i$.

   Es werde ihm auf folgende Weise die Struktur eines Vektorraumes erteilt:

   $\sigma_1, \sigma_2, \sigma \in \mathop{\mathrm{X}}_{i\in I} \mathfrak{V}_i,\ \sigma_1(i) = \mathfrak{a}_{i1}, \sigma_2(i) = \mathfrak{a}_{i2}, \sigma(i) = \mathfrak{a}_i \in \mathfrak{V}_i, \lambda \in K$

   $(\sigma_1+\sigma_2)(i) := \sigma_1(i)+\sigma_2(i) = \mathfrak{a}_{i1} + \mathfrak{a}_{i2}$

   $(\lambda\sigma)(i) := \lambda \cdot \sigma(i) = \lambda \mathfrak{a}_i$

   Der so definierte Vektorraum $\mathfrak{P}(\mathfrak{V}_i,\ i \in I)$ heißt direktes Produkt der Vektorräume $\mathfrak{V}_i$.

   Jener Teilraum $\mathfrak{S} \subset\mid \mathfrak{P}$, für den gilt

$\sigma(i) = \mathfrak{o}_i$ für <u>fast alle</u> $i \in I$

heißt (äußere) <u>direkte Summe</u> der Vektorräume $\mathfrak{V}_i$ und wird auch mit

$$\mathfrak{S} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{V}_i$$

bezeichnet. Im Falle einer <u>endlichen</u> Indexmenge $I = \{1, \ldots, n\}$ bedeuten direkte Summe und direktes Produkt dasselbe. In diesem Falle schreibt man auch

$$\mathfrak{S} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{V}_i = \mathfrak{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{V}_n .$$

Da im endlichen Falle jedem Element von $\mathfrak{S}$, also jeder Abbildung σ in bijektiver Weise ein n-tupel von Bildvektoren $(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ mit $\mathfrak{a}_i \in \mathfrak{V}_i$ entspricht, können wir in diesem Falle σ mit dem entsprechenden n-tupel <u>identifizieren</u>. Die Vektorraum-Struktur von $\mathfrak{S}$ überträgt sich dann folgendermaßen auf die n-tupel

$$\sigma_1 = (\mathfrak{a}_{11}, \ldots, \mathfrak{a}_{n1}), \quad \sigma_2 = (\mathfrak{a}_{12}, \ldots, \mathfrak{a}_{n2}), \quad \sigma = (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = (\mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{a}_{12}, \ldots, \mathfrak{a}_{n1} + \mathfrak{a}_{n2})$$

$$\lambda \sigma = (\lambda \mathfrak{a}_1, \ldots, \lambda \mathfrak{a}_n)$$

<u>Achtung</u>: Das kartesische Produkt und das direkte Produkt stellen <u>dieselbe Menge</u> dar, aber <u>nur</u> das direkte Produkt hat die Struktur eines Vektorraumes und nur in diesem Falle sind bei endlichem I Summen von n-tupeln bzw. Vielfache von n-tupeln mit Skalaren erklärt.

3. Unter den Abbildungen $\sigma \in \mathfrak{S}$ haben folgende <u>Indikatorabbildungen</u> besondere Bedeutung:

i .... fester Index, k .... beliebiger Index

$$\sigma_{\mathfrak{a}_i}(k) = \begin{cases} \mathfrak{a}_i \ldots k = i \\ \mathfrak{o}_k \ldots k \neq i \end{cases}$$

Im endlichen Falle gilt

$$\sigma_{\mathfrak{a}_i} = (\mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_{i-1}, \mathfrak{a}_i, \mathfrak{o}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{o}_n)$$

4. Die zu den Basisvektoren der $\mathfrak{B}_i$ gehörigen Indikatorabbildungen stellen eine Basis von $\mathfrak{S}$ (aber nicht von $\mathfrak{P}$) dar.

Die natürliche Injektion, die natürliche Projektion

5. Definition: Die für jeden festen Index $i \in I$ definierte Abbildung

$$\iota_i : \mathfrak{B}_i \to \mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{a}_i \mapsto \iota_i(\mathfrak{a}_i) = \sigma_{\mathfrak{a}_i}$$

ist linear. ι_i heißt natürliche Injektion.
Bei endlichem I gilt:

$$\mathfrak{a}_i \mapsto (\mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_{i-1}, \mathfrak{a}_i, \mathfrak{o}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{o}_n)$$

6. Definition: Die für jeden festen Index $i \in I$ definierte Abbildung

$$\pi_i : \mathfrak{P} \to \mathfrak{B}_i$$
$$(\mathfrak{S} \to \mathfrak{B}_i)$$
$$\sigma \mapsto \pi_i(\sigma) := \sigma(i) = \mathfrak{a}_i$$

ist linear. π_i heißt natürliche Projektion (natürliche Surjektion).
Bei endlichem I gilt

$$(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_i, \ldots, \mathfrak{a}_n) \mapsto \mathfrak{a}_i$$

7. Es gilt

$$\pi_i \circ \iota_i = id_{\mathfrak{B}_i}, \quad \pi_j \circ \iota_i = \text{zo für } i \neq j$$

Für alle $\sigma_{\mathfrak{a}_i} \in \iota_i(\mathfrak{B}_i)$ gilt

$$(\iota_i \circ \pi_i)(\sigma_{\mathfrak{a}_i}) = \sigma_{\mathfrak{a}_i}$$

8. Der Vektorraum $\mathfrak{S} = \bigoplus_{i=I} \mathfrak{B}_i$ ist die (innere) direkte Summe seiner Unterräume $\iota_i(\mathfrak{B}_i)$

Beziehungen zu linearen Abbildungen

9. Zu jedem Vektorraum $\mathfrak{W}$ und zu jeder Familie $(f_i)_{i\in I}$ von linearen Abbildungen $f_i:\mathfrak{V}_i \to \mathfrak{W}$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f: \bigoplus\limits_{i\in I} \mathfrak{V}_i \to \mathfrak{W}$, für die für alle i gilt: $f\circ\iota_i = f_i$.

10. Ein Vektorraum $\mathfrak{M}$ ist genau dann zu $\bigoplus\limits_{i\in I} \mathfrak{V}_i$ isomorph, wenn es für alle Indizes $i \in I$ lineare Abbildungen $g_i:\mathfrak{V}_i \to \mathfrak{M}$ gibt, sodaß zu jedem Vektorraum $\mathfrak{W}$ und zu jeder Familie $f_i:\mathfrak{V}_i \to \mathfrak{W}$ von linearen Abbildungen genau eine lineare Abbildung $g:\mathfrak{M} \to \mathfrak{W}$ existiert, für die für alle $i \in I$ gilt: $g\circ g_i = f_i$. Alle g_i erweisen sich als injektiv.

11. Zu jedem Vektorraum $\mathfrak{W}$ und jeder Familie $(f_i)_{i\in I}$ von linearen Abbildungen $f_i:\mathfrak{W} \to \mathfrak{V}_i$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f:\mathfrak{W} \to \mathfrak{P}(\mathfrak{V}_i)$ für die für alle i gilt: $\pi_i\circ f = f_i$

12. Ein Vektorraum $\mathfrak{M}$ ist genau dann zu $\mathfrak{P}(\mathfrak{V}_i)$ isomorph, wenn es für alle Indizes $i \in I$ lineare Abbildungen $g_i:\mathfrak{M} \to \mathfrak{V}_i$ gibt, sodaß zu jedem Vektorraum $\mathfrak{W}$ und zu jeder Familie $(f_i)_{i\in I}$ von linearen Abbildungen $f_i:\mathfrak{W} \to \mathfrak{V}_i$ genau eine lineare Abbildung $g:\mathfrak{W} \to \mathfrak{M}$ existiert, für die für alle i gilt: $g_i\circ g = f_i$. Alle g_i erweisen sich als surjektiv.

13. Ist $(\mathfrak{X}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektorräumen und $\mathfrak{X}$ ein beliebiger Vektorraum, so gilt

a) $\mathrm{Hom}\,(\bigoplus\limits_{i\in I} \mathfrak{X}_i, \mathfrak{X}) \cong \mathfrak{P}(\mathrm{Hom}(\mathfrak{X}_i, \mathfrak{X}))$

b) $\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{X}, \mathfrak{P}(\mathfrak{X}_i)) \cong \mathfrak{P}(\mathrm{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_i))$

Multilineare Abbildungen

14. Definition: Eine Abbildung

$$\mu : \mathop{X}_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i \to \mathfrak{V}$$

$$(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p) \mapsto \mathfrak{x}=\mu(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p)$$

heißt multilinear (p-fach linear, p-linear), wenn sie in jedem Argument linear ist:

$$\mu(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_i+\mathfrak{y}_i,\dots,\mathfrak{x}_p)=\mu(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_i,\dots,\mathfrak{x}_p)+\mu(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_i,\dots,\mathfrak{x}_p)$$

$$\mu(\mathfrak{x}_1,\dots,\lambda\mathfrak{x}_i,\dots,\mathfrak{x}_p)=\lambda\cdot\mu(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_i,\dots,\mathfrak{x}_p)$$

Ist $\mathfrak{V}$=K (gemeinsamer Grundkörper aller $\mathfrak{V}_i$), so heißt μ Multilinearform (p-Linearform, p-Form).

Achtung: $\mathop{X}_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i$ hat i.a. nicht die Struktur eines Vektorraumes. $\mu(\mathop{X}_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i)$ ist i.a. kein Unterraum von $\mathfrak{V}$.

15. Sind die Vektorräume $\mathfrak{V}_i (i=1,\dots,p)$ endlichdimensional und ist dim $\mathfrak{V}_i=n_i$, so gilt

$$\dim H(\mu(\mathop{X}_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i)) \leq n_1 . n_2 \dots n_p$$

16. Der Menge der p-linearen Abbildungen $\mathop{X}_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i \to \mathfrak{V}$ wird durch folgende Definitionen die Struktur eines Vektorraumes aufgeprägt

$$(\mu_1+\mu_2)(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p):=\mu_1(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p)+\mu_2(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p)$$

$$(\lambda\mu)(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p):=\lambda\cdot\mu(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p)$$

17. Es sei $\mathfrak{H}:= \mathrm{Hom}(\mathop{X}_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i, \mathfrak{V})$ der Vektorraum der p-linearen Abbildungen $\mathop{X}_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i \to \mathfrak{V}, \mathfrak{H}_1:= \mathrm{Hom}(\mathop{X}_{j=2}^{p} \mathfrak{V}_j, \mathfrak{V})$

der Vektorraum der (p-1)-linearen Abbildungen $\overset{p}{\underset{j=2}{\mathsf{X}}} \mathfrak{V}_j \to \mathfrak{V}$

und $\mathfrak{H}_2 := \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{H}_1)$ der Vektorraum der linearen Abbildungen $\mathfrak{V}_1 \to \mathfrak{H}_1$. Dann gilt

$$\mathfrak{H} \cong \mathfrak{H}_2$$

18. Ist die Dimension aller Vektorräume $\mathfrak{V}_i, \mathfrak{V}$ endlich, so gilt:

$$\dim \mathrm{Hom}(\overset{p}{\underset{i=1}{\mathsf{X}}} \mathfrak{V}_i, \mathfrak{V}) = \dim \mathfrak{V}_1 \dots \dim \mathfrak{V}_p \cdot \dim \mathfrak{V}$$

19. Die Vektorräume $\mathfrak{V}_i$ $(i=1,\dots,p)$ seien endlichdimensional ($\dim \mathfrak{V}_i = n_i$). Ferner sei μ eine p-lineare Abbildung

$$\mu: \overset{p}{\underset{i=1}{\mathsf{X}}} \mathfrak{V}_i \to \mathfrak{W}$$

gilt nun

a) $\mathfrak{W} = H(\mu(\overset{p}{\underset{i=1}{\mathsf{X}}} \mathfrak{V}_i))$

b) $\dim \mathfrak{W} = n_1 \dots n_p$

so gibt es zu jedem Vektorraum $\mathfrak{V}$ und jeder p-linearen Abbildung $\nu: \overset{p}{\underset{i=1}{\mathsf{X}}} \mathfrak{V}_i \to \mathfrak{V}$ genau eine lineare Abbildung $f: \mathfrak{W} \to \mathfrak{V}$, sodaß gilt: $\nu = f \circ \mu$

Alternierende und schiefsymmetrische p-lineare Abbildungen

20. Definition: Eine p-lineare Abbildung

$$\alpha: \overset{p}{\underset{i=1}{\mathsf{X}}} \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$$
$$(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_p) \mapsto \alpha(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_p)$$

heißt p-alternierend, wenn $\alpha(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_p) = \mathfrak{o}_{\mathfrak{W}}$ ist, sobald irgend zwei unter den Vektoren $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_p \in \mathfrak{V}$ gleich sind.

21. Sei $\alpha: \mathop{X}\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ p-alternierend. Dann gilt

$$\mathfrak{x}_i \text{ l.a.} \Rightarrow \alpha(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p) = \mathfrak{o}_{\mathfrak{W}}$$

22. Ist $p > \dim \mathfrak{V}$, so ist die Nullabbildung die einzige p-alternierende Abbildung von $\mathop{X}\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{V}$ in einen beliebigen Vektorraum $\mathfrak{W}$.

23. <u>Definition</u>: Eine p-lineare Abbildung

$$\mu: \mathop{X}\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$$

heißt <u>p-schiefsymmetrisch</u> (<u>p-antisymmetrisch</u>), wenn für jede Permutation π der Indizes $\{1, \ldots, p\}$ gilt:

$$\mu(\mathfrak{x}_{\pi(1)}, \ldots, \mathfrak{x}_{\pi(p)}) = \operatorname{sgn} \pi \cdot \mu(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p)$$

24. Jede p-alternierende Abbildung ist p-schiefsymmetrisch. Ist Char $K \neq 2$, so ist auch jede p-schiefsymmetrische Abbildung p-alternierend.

25. μ sei p-linear. Dann heißt die Abbildung

$$\mu_\alpha(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p) := \sum_\pi \operatorname{sgn} \pi \cdot \mu(\mathfrak{x}_{\pi(1)}, \ldots, \mathfrak{x}_{\pi(p)})$$

die <u>Antisymmetrisierte</u> zu μ . μ_α ist p-schiefsymmetrisch.

<u>Anmerkung</u>: In den Anwendungen ($K=\mathbb{R}$ oder $K=\mathbb{C}$) wird häufig die Abbildung

$$\mu_\alpha(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_\pi \operatorname{sgn} \pi . \ \mu(\mathfrak{x}_{\pi(1)}, \ldots, \mathfrak{x}_{\pi(p)})$$

als Antisymmetrisierte zu μ bezeichnet. Dies geschieht z.B. später im Satz 108.

26. Die p-alternierenden Abbildungen sind genau die Antisymmetrisierten von p-linearen Abbildungen. Ist Char $K \neq 2$, so sind auch die p-schiefsymmetrischen Abbildungen die Antisymmetrisierten von p-linearen Abbildungen.

27. <u>Bezeichnung</u>: Es sei I eine Indexmenge und Δ die Menge aller aus paarweise verschiedenen Elementen von I gebildeten p-tupel.
Zwei p-tupel $(i_1,\dots,i_p)$, $(j_1,\dots,j_p)$, $(i_l, j_s \in I)$ heißen <u>äquivalent</u>, wenn sie durch Permutation auseinander hervorgehen. D sei die Menge, die entsteht, wenn man aus jeder der so bestimmten Äquivalenzklassen von p-tupeln genau einen Repräsentanten wählt.

28. Sei $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{b}_i\}_{i\in I}$ (I nicht notwendig endlich) eine Basis von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ ein Vektorraum. Es sei nun $\mathfrak{a}_{i_1\dots i_p} \in \mathfrak{W}$ für jedes p-tupel aus D.
Dann gibt es genau eine p-alternierende Abbildung

$$\alpha: \mathop{X}_{k=1}^{p} \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$$

$$(\mathfrak{b}_{i_1},\dots,\mathfrak{b}_{i_p}) \mapsto \mathfrak{a}_{i_1,\dots,i_p}$$

Ist

$$\mathfrak{x}_j = \sum_{i_j=1}^{r_j} x_j^{i_j}\, \mathfrak{b}_{i_j} \qquad j=1,\dots,p$$

so gilt

$$\alpha(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p) = \overline{\sum_{(i_1,\dots,i_p)\in D}} \left[\sum_{\pi} \operatorname{sgn}\pi\, x_1^{i_{\pi(1)}} \cdots x_p^{i_{\pi(p)}}\right] \mathfrak{a}_{i_1,\dots,i_p}$$

wobei die erste Summe über alle jene Index-p-tupel $\in D$ zu erstrecken ist, welche sich aus den Indizes der bei der Darstellung der $\mathfrak{x}_j$ auftretenden Basisvektoren bilden lassen.

29. Ist $\dim \mathfrak{V} = n$, so ist für $p > n$ die Abbildung α von 28. die Nullabbildung. Ist $p \le n$, so kann als Menge D aller Repräsentanten die Menge aller p-tupel $(i_1,\dots,i_p)$ mit $1 \le i_1 < \dots < i_p \le n$ gewählt werden. Ist dann

$$\mathfrak{x}_j = \sum_{i_j=1}^{n} x_j^{i_j}\, \mathfrak{b}_{i_j} \qquad j=1,\dots,p$$

So gilt

$$\alpha(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p)=\sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n}\begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \dots & x_1^{i_p}\\ \vdots & & \vdots \\ x_p^{i_1} & \dots & x_p^{i_p}\end{vmatrix}\cdot \mathfrak{a}_{i_1\dots i_p}$$

30. Es sei $\mathfrak{V}$ ein n-dimensionaler <u>euklidischer</u> Vektorraum ($n\geq 3$) mit der ON-Basis $\{\mathfrak{e}_1,\dots,\mathfrak{e}_n\}$.

Dann ist nach 28. eindeutig eine (n-1)-alternierende Abbildung $\alpha\colon \mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n-1} \mathfrak{V}\to\mathfrak{V}$ mit

$$\alpha(\mathfrak{e}_1,\dots,\mathfrak{e}_{i-1},\mathfrak{e}_{i+1},\dots,\mathfrak{e}_n):=(-1)^{i-1}\mathfrak{e}_i$$

bestimmt. Ist

$$\mathfrak{x}_j=\sum_{i_j=1}^{n} x_j^{i_j}\cdot\mathfrak{e}_{i_j} \qquad j=1,\dots,n-1$$

so gilt

$$\alpha(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_{n-1})=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} x_1^1,\dots,x_1^{i-1}, & x_1^{i+1},\dots,x_1^n\\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^1,\dots,x_{n-1}^{i-1}, & x_{n-1}^{i+1},\dots,x_{n-1}^n\end{vmatrix}\cdot(-1)^{i-1}\mathfrak{e}_i$$

Die Abbildung α ist unabhängig von der Basis und hängt nur vom Vektorraum und seiner Orientierung ab. Im Falle n=3 heißt

$$\alpha(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2)=:\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{x}_2$$

das <u>Vektorprodukt</u> (<u>äußeres Produkt</u>) der beiden Vektoren $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$.

31. Es sei dim $\mathfrak{V}$=n und dim $\mathfrak{W}$=m. Dann gilt für den Vektorraum $\mathfrak{A}_p$ der p-alternierenden Abbildungen $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{p}\mathfrak{V}\to\mathfrak{W}$

$$\dim\mathfrak{A}_p=\binom{n}{p}\cdot m \qquad (p\leq n)$$

Symmetrische p-lineare Abbildungen

32. Definition: Eine p-lineare Abbildung

$$\sigma : \mathop{\times}_{i=1}^{p} \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$$

$$(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p) \mapsto \sigma(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p)$$

heißt p-symmetrisch, wenn für jede Permutation π der Indizes gilt

$$\sigma(\mathfrak{x}_{\pi(1)},\dots,\mathfrak{x}_{\pi(p)}) = \sigma(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p).$$

33. Es sei μ p-linear. Dann heißt die Abbildung

$$\mu_\sigma(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p) := \sum_{\pi} \mu(\mathfrak{x}_{\pi(1)},\dots,\mathfrak{x}_{\pi(p)})$$

die Symmetrisierte zu μ.

μ_σ ist symmetrisch.

Anmerkung: In den Anwendungen ($K=\mathbb{R}$ oder $K=\mathbb{C}$) wird häufig die Abbildung

$$\mu_\sigma(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p) := \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\pi} \mu(\mathfrak{x}_{\pi(1)},\dots,\mathfrak{x}_{\pi(p)})$$

als Symmetrisierte zu μ bezeichnet.

DAS TENSORPRODUKT VON VEKTORRÄUMEN

34. Definition: Ein Vektorraum $\mathfrak{V}$ heißt Tensorprodukt der Vektorräume $\mathfrak{V}_1,\dots,\mathfrak{V}_p$, wenn eine p-lineare Abbildung $\tau : \mathop{\times}_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i \to \mathfrak{V}$ existiert mit folgenden Eigenschaften:

T1. $\mathfrak{V} = H(\tau(\mathop{\times}_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i))$

T2. Zu jedem beliebigen Vektorraum $\mathfrak{W}$ und jeder beliebigen p-linearen Abbildung $\mu : \mathop{\times}_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i \to \mathfrak{W}$ gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$, sodaß gilt $\mu = f \circ \tau$.

Man schreibt dann:

$$\mathfrak{T} = \bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i = \mathfrak{V}_1 \otimes \mathfrak{V}_2 \otimes \dots \otimes \mathfrak{V}_p .$$

τ heißt die zum Tensorprodukt $\mathfrak{T}$ gehörige <u>kanonische Abbildung</u>. Gelegentlich nennt man $\mathfrak{T}$ auch p-stufigen Tensorraum.

Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen <u>Tensoren</u>. Die Tensoren der Form $\tau(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p)$ nennt man <u>zerfallende (zerlegbare, reine) Tensoren</u> und schreibt

$$\tau(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p) = \mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p . \quad \mathfrak{x}_i \in \mathfrak{V}_i$$

Das allgemeine Element von $\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i$ hat die Bauart

$$\overset{\otimes}{\mathfrak{x}} = \sum_{i_1,\dots,i_p} \lambda^{i_1 \dots i_p} \, \mathfrak{x}_{1i_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_{pi_p}, \quad \mathfrak{x}_{ji_k} \in \mathfrak{V}_j$$

35. Es gelten folgende Rechenregeln

$$\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes (\mathfrak{x}_i + \mathfrak{y}_i) \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p = \mathfrak{x}_1 \otimes \mathfrak{x}_i \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p + \mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{y}_i \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p$$

$$\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes (\lambda \mathfrak{x}_i) \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p = \lambda \cdot \mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_i \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p$$

36. Die Bedingungen T1 und T2 von 34. sind äquivalent der einzigen Bedingung:

T. Ist $\mu: \prod_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i \to \mathfrak{W}$ eine <u>beliebige</u> p-lineare Abbildung in den <u>beliebig</u> gewählten Vektorraum $\mathfrak{W}$, so existiert <u>genau eine</u> lineare Abbildung $f: \mathfrak{T} \to \mathfrak{W}$ mit $\mu = f \circ \tau$ (<u>Zerlegungseigenschaft</u>).

37. Es seien $\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i$ und $\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i$ zwei Tensorprodukte der Räume $\mathfrak{V}_1,\dots,\mathfrak{V}_p$. Dann existiert <u>genau ein</u> Isomorphismus

$$f: \bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i \to \tilde{\bigotimes_{i=1}^{p}} \mathfrak{V}_i$$

$$\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p \mapsto \mathfrak{x}_1 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} \mathfrak{x}_p$$

sodaß gilt $f \circ \tau = \tilde{\tau}$.

Das Tensorprodukt der $\mathfrak{V}_i$ ist also bis auf Isomorphismen eindeutig festgelegt.

Existenznachweis des Tensorproduktes von Vektorräumen

38. Sei $I := \bigtimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i$ Indexmenge (die Indizes sind also die p-tupel $(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_p)$). Die direkte Summe 2.

$$\mathfrak{S} = \bigoplus_{i \in I} K$$

ist definitionsgemäß die Menge aller Abbildungen $I \to K$, für welche fast alle Bilder 0_K sind.
Die natürliche Injektion 5.

$$\iota_i : K \to \mathfrak{S}$$

$$\lambda \mapsto \iota_i(\lambda) = \sigma_{\lambda_i} =: \sigma_{\lambda i}$$

ordnet (bei festgehaltenem i) jedem Körperlement λ jene Indikatorabbildung 3. zu, für die gilt

$$[\iota_i(\lambda)](j) = \sigma_{\lambda i}(j) = \lambda \delta_{ij} \qquad j \in I$$

39. Die speziellen Abbildungen $\iota_i(1_K) = \mathfrak{e}_i := \sigma_{1_K i}$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{e}_i(j) = \delta_{ij}$$

stellen eine Basis von $\mathfrak{S}$ dar. Wegen der Bedeutung der Indizes i können wir auch setzen

$$\mathfrak{e}_i = \mathfrak{e}(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_p) .$$

Da die Indizes i und die Abbildungen $\mathfrak{e}_i$ einander

40. Es sei $\mathfrak{U}$ jener Unterraum von $\mathfrak{S}$, der von den Vektoren der Form

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k + \mathfrak{y}_k, \ldots, \mathfrak{x}_p) - \mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k, \ldots, \mathfrak{x}_p) - \mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_k, \ldots, \mathfrak{x}_p)$$

und

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \lambda\mathfrak{x}_k, \ldots, \mathfrak{x}_p) - \lambda\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k, \ldots, \mathfrak{x}_p)$$

aufgespannt wird. Die Elemente des Quotientenraumes $\mathfrak{S}/\mathfrak{U}$ haben dann die Bauart

$$L(\sigma, \mathfrak{U}) \qquad \sigma \in \mathfrak{S}$$

41. Der Quotientenraum $\mathfrak{S}/\mathfrak{U}$ ist ein <u>Tensorprodukt</u> der Vektorräume $\mathfrak{V}_1, \ldots, \mathfrak{V}_p$. Zum Nachweis zeigen wir:

Ist τ die durch

$$\tau : \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i \to \mathfrak{S}/\mathfrak{U}$$

$$(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p) \mapsto L(\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p), \mathfrak{U})$$

festgelegte p-lineare Abbildung, ist ferner $\mathfrak{W}$ ein <u>beliebiger</u> Vektorraum und μ eine <u>beliebige p</u>-lineare Abbildung $\mu : \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i \to \mathfrak{W}$, dann gibt es <u>genau eine</u> lineare Abbildung $f : \mathfrak{S}/\mathfrak{U} \to \mathfrak{W}$ mit $\mu = f \circ \tau$. τ genügt also der Zerlegungseigenschaft T (36.), daher ist $\mathfrak{S}/\mathfrak{U}$ ein Tensorprodukt und man kann daher nach 37. identifizieren

$$\mathfrak{S}/\mathfrak{U} \equiv \bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i$$

$$L(\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p), \mathfrak{U}) \equiv \mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p$$

42. Durch

$$\vartheta : \mathrm{Hom}\left(\mathop{X}_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i, \mathfrak{W}\right) \to \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i, \mathfrak{W}\right)$$

$$\mu \mapsto \vartheta(\mu) = f$$

mit $\mu = f \circ \tau = \vartheta(\mu) \circ \tau$ wird ein <u>Isomorphismus</u> definiert.

43. Sind alle $\mathfrak{V}_i$ $(i=1,\dots,p)$ <u>endlichdimensional</u>, so gilt

$$\dim \bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i = \dim \mathfrak{V}_1 \dots \dim \mathfrak{V}_p$$

44. Ist $\mathfrak{V}_i = H[\mathfrak{b}_{i1},\dots,\mathfrak{b}_{in_i}]$ $(i=1,\dots,p)$, so stellen die zerfallenden Tensoren

$\mathfrak{b}_{1j_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}_{pj_p}$ $\quad j_i = 1,\dots,n_i, \ i=1,\dots,p$

eine Basis von $\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i$ dar.

45. Ist π eine Permutation von $\{1,\dots,p\}$, so gilt

$$\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i \cong \bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_{\pi(i)}$$

46. $\mathfrak{V}_1 \otimes \mathfrak{V}_2 \otimes \mathfrak{V}_3 \cong (\mathfrak{V}_1 \otimes \mathfrak{V}_2) \otimes \mathfrak{V}_3$

47. Für alle $i = 1,\dots,p$ und $\mathfrak{a}_i \in \mathfrak{V}_i$ gilt

$$\mathfrak{a}_i \neq \mathfrak{o}_i \Rightarrow \mathfrak{a}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{a}_p \neq \overset{\otimes}{\mathfrak{o}}$$

Umgekehrt gilt

$\mathfrak{a}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{a}_p = \overset{\otimes}{\mathfrak{o}} \Rightarrow$ für wenigstens ein i gilt: $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{o}_i$

48. Jeder Tensor $\overset{\otimes}{\mathfrak{r}} \neq \overset{\otimes}{\mathfrak{o}}$ aus $\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i$ kann in der Form

$$\overset{\otimes}{\mathfrak{r}} = \sum_{k=1}^{r} \mathfrak{r}_{1k} \otimes \dots \otimes \mathfrak{r}_{pk}$$

dargestellt werden, wobei die Vektoren $\mathfrak{r}_{ik} \in \mathfrak{V}_i$ innerhalb $\mathfrak{V}_i$ l.u. sind.

49. Die Vektoren $\mathfrak{a}_{1k} \in \mathfrak{V}_1$ seien <u>beliebig</u> gewählt, während die $\mathfrak{b}_{1k} \in \mathfrak{V}_i$ $(i \neq 1)$ <u>l.u.</u> seien. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{r} \mathfrak{a}_{1k} \otimes \mathfrak{b}_{2k} \dots \otimes \mathfrak{b}_{pk} = \overset{\otimes}{\mathfrak{o}} \Rightarrow \mathfrak{a}_{1k} = \mathfrak{o}_1 (k=1,\dots,r)$$

50. Es sei $\mathfrak{U}_i \subset| \mathfrak{V}_i$ $(i=1,\dots,p)$ und τ die zu $\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i$ gehörige kanonische Abbildung. Stellt dann τ_1 die Einschränkung von τ auf $\bigtimes_{i=1}^{p} \mathfrak{U}_i$ dar, so ist τ_1 die kanonische Abbildung zu $\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{U}_i := H(\tau_1(\bigtimes_{i=1}^{p} \mathfrak{U}_i))$. Ferner gilt

$$\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{U}_i \subset| \bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i$$

<u>DAS KRONECKER-PRODUKT LINEARER ABBILDUNGEN</u>

<u>LINEARE ABBILDUNGEN ZWISCHEN TENSORRÄUMEN</u>

51. Es sei $\mathfrak{H}_i = \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_i, \mathfrak{V}_i')(i=1,\dots,p)$, $\mathfrak{H} = \mathrm{Hom}(\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i, \bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i')$, ferner sei $f_i \in \mathfrak{H}_i$. Dann ist die durch

$$\mu : \bigtimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i \to \bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i$$

$$(\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_p) \mapsto f_1(\mathfrak{r}_1) \otimes \dots \otimes f_p(\mathfrak{r}_p)$$

definierte Abbildung p-linear. Ist τ die zu $\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i$

gehörende kanonische Abbildung, so ist nach der Zerlegungseigenschaft T (36.) die Abbildung $h \in \mathfrak{H}$ mit $\mu = h \circ \tau$ eindeutig bestimmt. h heißt das <u>KRONECKER-PRODUKT</u> der f_i und man schreibt:

$$h = f_1 \underline{\otimes}\, f_2 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes}\, f_p .$$

$$h(\mathfrak{r}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{r}_p) = (f_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} f_p)(\mathfrak{r}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{r}_p) = f_1(\mathfrak{r}_1) \otimes \ldots \otimes f_p(\mathfrak{r}_p)$$

Es gibt <u>genau eine</u> lineare Abbildung

$$g : \bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{H}_i \to \mathfrak{H}$$

$$f_1 \otimes \ldots \otimes f_p \mapsto f_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} f_p .$$

g ist <u>injektiv</u>. Sind alle Vektorräume $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_i'$ <u>endlich-dimensional</u>, ist g ein Isomorphismus.

kann $\mathfrak{H}$ mit $\bigotimes \mathfrak{H}_i$ i

52. Alle Vektorräume $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_i'$ $(i=1,\ldots,p)$ seien endlichdimensional und es gelte $\mathfrak{M}_i = H[\mathfrak{B}_i] = H[\mathfrak{b}_{i1}, \ldots, \mathfrak{b}_{in_i}]$, $\mathfrak{M}_i' = H[\mathfrak{B}_i'] = H[\mathfrak{b}_{i1}', \ldots, \mathfrak{b}_{in_i'}']$. Bezüglich der Basen $\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i'$ entspreche dem Homomorphismus $f_i : \mathfrak{M}_i \to \mathfrak{M}_i'$ die Matrix $A^i_{n_i' n_i} = \| a^i_{l_i l_i'} \|_{n_i' n_i}$. Ferner gilt:

$$\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{M}_i = H[\mathfrak{B}] = H[\{\mathfrak{b}_{1l_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{b}_{pl_p}\}], \quad (l_i = 1, \ldots, n_i).$$

$$\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{M}_i' = H[\mathfrak{B}'] = H[\{\mathfrak{b}_{1l_1'}' \otimes \ldots \otimes \mathfrak{b}_{pl_p'}'\}], \quad (l_i' = 1, \ldots, n_i')$$

Die Vektorräume

$$\mathfrak{H}_i = \mathrm{Hom}(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_i') = H[\Omega_i] = H[\{\omega_{\mathfrak{b}_{il_i}, \mathfrak{b}_{il_i'}'}\}],$$

$$\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{H}_i = H[\Omega] = H[\{\omega_{\mathfrak{b}_{1l_1}, \mathfrak{b}_{1l_1'}'} \otimes \ldots \otimes \omega_{\mathfrak{b}_{pl_p}, \mathfrak{b}_{pl_p'}'}\}],$$

$$\mathfrak{H} = \mathrm{Hom}\Big(\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{M}_i, \bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{M}_i\Big) = H[\Omega'] = H[\{\omega_{\mathfrak{b}_{1l_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{b}_{pl_p}, \mathfrak{b}_{1l_1'}' \otimes \ldots \otimes \mathfrak{b}_{pl_p'}'}\}]$$

werden auf

die (durch $\mathfrak{V}_i, \mathfrak{V}'_i, \mathfrak{V}, \mathfrak{V}'$ eindeutig bestimmten) kanonischen Basen $\Omega_i, \Omega, \Omega'$ (Lin.Alg.144,145) bezogen.

Dann gilt:

a) Der Isomorphismus g von 51. bildet Ω auf Ω' ab

b) Die Koordinaten von $f_1 \otimes \dots \otimes f_p$ bezüglich Ω sind die Größen

$$a^1_{l_1 l'_1}\, a^2_{l_2 l'_2} \dots a^p_{l_p l'_p} \quad l_i = 1,\dots,n_i;\ l'_i = 1,\dots,n'_i$$

c) Der Abbildung $h = f_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} f_p$

bezüglich Ω und Ω' die "mehrdimensionale" Matrix

$$A_{n_1,\dots,n_p;\, n'_1,\dots,n'_p} = \| a_{l_1,\dots l_p; l'_1,\dots l'_p} \|$$

mit

$$a_{l_1,\dots,l_p; l'_1,\dots,l'_p} = a^1_{l_1 l'_1} \cdots a^p_{l_p l'_p}$$

zugeordnet.

$A_{n_1,\dots,n_p; n'_1,\dots,n'_p}$ heißt das KRONECKER-Produkt der Matrizen

$$A^1_{n_1 n'_1}, \dots, A^p_{n_p n'_p}$$

53. Es sei $f_i \in \mathfrak{S}_i = \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_i, \mathfrak{V}'_i)$, $(i=1,\dots,p)$. Dann ist

$$\mathrm{kn}\,(f_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} f_p) = \mathfrak{K}.$$

Hier ist $\mathfrak{K}$ der durch

$$\mathfrak{K} := H(\{\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p \mid \text{mindestens ein } \mathfrak{x}_i \in \mathrm{kn}\, f_i,\ i=1,\dots,p\})$$

bestimmte Unterraum von $\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i$

54. Es sei $\mathfrak{U}_i \subset\!| \mathfrak{V}_i$ $(i=1,\dots,p)$. Dann gilt

$$\bigotimes_{i=1}^{p} (\mathfrak{V}_i / \mathfrak{U}_i) \cong \left(\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{V}_i\right) / \mathfrak{U},$$

worin $\mathfrak{U}$ der durch

$\mathfrak{U} := H(\{\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p \,|\, \text{mindestens ein } \mathfrak{x}_i \in \mathfrak{U}_i,\ i=1,\dots,p\})$

festgelegte Unterraum von $\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{B}_i$ ist.

55. Es sei $f_i \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i')$, $g_i \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{B}_i', \mathfrak{B}_i'')$ $(i=1,\dots,p)$

Dann gilt

$$(g_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes}\, g_p) \circ (f_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes}\, f_p) = (g_1 \circ f_1) \,\underline{\otimes} \dots \underline{\otimes}\, (g_p \circ f_p)$$

56. Die Abbildungen $f_i : \mathfrak{B}_i \to \mathfrak{B}_i'$ $(i=1,\dots,p)$ seien injektiv (surjektiv). Dann ist auch das KRONECKER-Produkt $f_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes}\, f_p$ injektiv (surjektiv).

<u>Achtung</u>: Die Umkehrung gilt <u>nicht</u> !

57. Es gibt <u>genau einen injektiven Homomorphismus</u>

$$\Phi : \bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{B}_i^* \to \Big(\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{B}_i\Big)^*$$

sodaß gilt $(\mathfrak{x}_i \in \mathfrak{B}_i,\ \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^i \in \mathfrak{B}_i^*)$:

$$<\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p, \Phi(\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1 \otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p)> \; = \; <\mathfrak{x}_1, \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1> \dots <\mathfrak{x}_p, \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p>$$

Sind alle Vektorräume <u>endlichdimensional</u>, so ist Φ ein <u>Isomorphismus</u>. Nur in diesem Falle kann man stets

$\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{B}_i^*$ mit $\Big(\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{B}_i\Big)^*$ identifizieren.

58. Definition: Es sei $\mathfrak{V}$ ein Vektorraum über dem Körper K. Dann heißt das aus p gleichen Faktoren bestehende Tensorprodukt

$$\textcircled{X}^p \mathfrak{V} := \mathfrak{V} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{V}$$

die p-te Tensorpotenz von $\mathfrak{V}$. Ferner sei per definitionem

$$\textcircled{X}^1 \mathfrak{V} := \mathfrak{V}, \quad \textcircled{X}^0 \mathfrak{V} := K.$$

Die Elemente $\mathfrak{x}(p) \in \textcircled{X}^p \mathfrak{V}$ heißen p-stufige Tensoren über $\mathfrak{V}$.

59. Ist $\mathfrak{V} = H[\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n]$ endlichdimensional, so stellen die n^p Tensoren $\mathfrak{b}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{b}_{i_p}$ $(i_j = 1, \ldots, n)$ eine Basis von $\textcircled{X}^p \mathfrak{V}$ dar. Die Größen $x^{i_1 \ldots i_p}$ heißen Koordinaten des Tensors

$$\mathfrak{x}(p) = \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{n} x^{i_1 \ldots i_p} \, \mathfrak{b}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{b}_{i_p}$$

bezüglich der Basis $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$.

Im endlichdimensionalen Fall wird ab nun stets die EINSTEIN-Konvention angewendet, sobald über den Wertebereich der Summations-Indizes kein Zweifel besteht. Dann gilt

$$\mathfrak{x}(p) = x^{i_1 \ldots i_p} \, \mathfrak{b}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{b}_{i_p}$$

60. Zu der bilinearen Abbildung

$$\mu : \textcircled{X}^p \mathfrak{V} \times \textcircled{X}^q \mathfrak{V} \to \textcircled{X}^{p+q} \mathfrak{V}$$
$$(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p ; \mathfrak{x}_{p+1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_{p+q}) \mapsto \mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_{p+q}$$

gehört nach der Zerlegungseigenschaft T^1(36.) genau eine lineare Abbildung

$$f : \textcircled{X}^p \mathfrak{V} \otimes \textcircled{X}^q \mathfrak{V} \to \textcircled{X}^{p+q} \mathfrak{V}$$

$$(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p) \otimes (\mathfrak{x}_{p+1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_{p+q}) \mapsto \mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_{p+q}$$

f heißt Tensormultiplikation. Der (p+q)-stufige Tensor $\mathfrak{z}(p+q) = \mathfrak{x}(p) \otimes \mathfrak{y}(q) \in \textcircled{X}^{p+q} \mathfrak{V}$ ist das Produkt der p-bzw. q-stufigen Tensoren $\mathfrak{x}(p) \in \textcircled{X}^p \mathfrak{V}$ bzw. $\mathfrak{y}(q) \in \textcircled{X}^q \mathfrak{V}$

61. <u>Definition</u>: Wird in einem Vektorraum über dem Körper K zwei Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ein dritter Vektor $\mathfrak{x} * \mathfrak{y}$ als Produkt so zugeordnet, daß $\mathfrak{V}$ bezüglich dieser Produktbildung und der Vektoraddition die Struktur eines (i.a. nicht kommutativen) Ringes erhält und gilt ferner

$$(\lambda \mathfrak{x}) * \mathfrak{y} = \mathfrak{x} * (\lambda \mathfrak{y}) = \lambda (\mathfrak{x} * \mathfrak{y}),$$

so heißt $\mathfrak{V}$ eine <u>Algebra</u> über K.

62. Die direkte Summe

$$\bigotimes \mathfrak{V} := \bigoplus_{p=o}^{\infty} \bigotimes^{p} \mathfrak{V} = K \oplus \mathfrak{V} \oplus \bigotimes^{2} \mathfrak{V} \oplus \bigotimes^{3} \mathfrak{V} \oplus \ldots$$

stellt eine Algebra über K dar. $\bigotimes \mathfrak{V}$ heißt <u>Tensoralgebra</u> über dem Vektorraum $\mathfrak{V}$.

63. $\bigotimes \mathfrak{V}$ und $\bigotimes \mathfrak{V}'$ seien zwei Tensoralgebren über $\mathfrak{V}$ bzw. $\mathfrak{V}'$. Eine lineare Abbildung

$$\varphi : \bigotimes \mathfrak{V} \to \bigotimes \mathfrak{V}'$$

heißt <u>Darstellung</u> von $\bigotimes \mathfrak{V}$ in $\bigotimes \mathfrak{V}'$, wenn für alle $\overset{\otimes}{\mathfrak{x}}, \overset{\otimes}{\mathfrak{y}} \in \bigotimes \mathfrak{V}$ gilt

$$\varphi (\overset{\otimes}{\mathfrak{x}} \otimes \overset{\otimes}{\mathfrak{y}}) = \varphi (\overset{\otimes}{\mathfrak{x}}) \otimes \varphi (\overset{\otimes}{\mathfrak{y}}).$$

64. Es sei $f \in Hom(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}')$. Dann gibt es <u>genau eine</u> Darstellung

$$f^{\otimes} : \bigotimes \mathfrak{V} \to \bigotimes \mathfrak{V}'$$

mit $f^{\otimes}(\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{x})$ für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{V}$

GEMISCHTE TENSORRÄUME

65. Die Elemente des <u>gemischten Tensorraumes</u>

$$\bigotimes{}^p_q\mathfrak{V} := \underbrace{\mathfrak{V}\otimes \dots \otimes \mathfrak{V}}_{p} \otimes \underbrace{\mathfrak{V}^* \otimes \dots \otimes \mathfrak{V}^*}_{q}$$

heißen <u>p-fach kontravariante</u> und <u>q-fach kovariante</u> Tensoren oder Tensoren der Stufe (p,q). Ferner werde definiert:

$$\bigotimes{}^p_0\mathfrak{V} := \bigotimes{}^p\mathfrak{V},\ \bigotimes{}^0_q\mathfrak{V} := \bigotimes{}^q\mathfrak{V}^*,\ \bigotimes{}^1_0\mathfrak{V} := \mathfrak{V},\ \bigotimes{}^0_1\mathfrak{V} := \mathfrak{V}^*,\ \bigotimes{}^0_0\mathfrak{V} := K.$$

66. Ist $\mathfrak{V} = H[\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n]$ und daher auch $\mathfrak{V}^* = H[\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1,\dots,\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^n]$

$(\langle\mathfrak{b}_i, \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^j\rangle = \delta_i^j)$ <u>endlichdimensional</u>, so gilt

$$\mathfrak{x}_i = x_i^{k_i}\ \mathfrak{b}_{k_i},\quad \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^j = \overset{*}{x}{}^j_{l_j}\ \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{l_j}$$

daher

$$\mathfrak{x}_1\otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p\otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1\otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^q =$$

$$= x_1^{\ k_1} \dots x_p^{k_p}\cdot\overset{*}{x}{}^1_{l_1} \dots \overset{*}{x}{}^q_{l_q}\cdot\mathfrak{b}_{k_1}\otimes \dots \otimes \mathfrak{b}_{k_p}\otimes\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{l_1}\otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{l_q}.$$

Die zerfallenden Tensoren

$$\mathfrak{b}_{i_1}\otimes \dots \otimes \mathfrak{b}_{i_p}\otimes \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{j_1}\otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{j_q}$$

bilden daher eine Basis von $\bigotimes{}^p_q\mathfrak{V}$. Ein allgemeiner Tensor hat die Gestalt

$$\mathfrak{x}(p,q) = \mu^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\,\mathfrak{b}_{i_1}\otimes \dots \otimes \mathfrak{b}_{i_p}\otimes \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{j_1}\otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{j_q}.$$

Die Skalare $\mu^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ heißen <u>Koordinaten</u>

von $\mathfrak{x}(p,q)$ bezüglich der gegebenen Basis.

67. Ist $\mathfrak{V}$ endlichdimensional, so gilt

$$(\otimes^p_q \mathfrak{V})^* \cong \otimes^p_q \mathfrak{V}^* \cong \otimes^q_p \mathfrak{V}.$$

Identifiziert man vermöge 57., so kann man setzen:

$$< \mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1 \otimes \ldots \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^q, \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1 \otimes \ldots \otimes \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p \otimes \mathfrak{y}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{y}_q > =$$

$$= < \mathfrak{x}_1, \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1 > \ldots < \mathfrak{x}_p, \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p > . < \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1, \mathfrak{y}_1 > \ldots < \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^q, \mathfrak{y}_q >.$$

68. Zu der bilinearen Abbildung

$$\mu : \otimes^p_q \mathfrak{V} \times \otimes^r_s \mathfrak{V} \to \otimes^{p+r}_{q+s} \mathfrak{V}$$
$$(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^q, \overset{*}{\mathfrak{y}}_1 \otimes \ldots \otimes \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^s) \mapsto \mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{y}_r \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1 \otimes \ldots \otimes \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^s$$

existiert wegen der Zerlegungseigenschaft genau eine lineare Abbildung

$$f : \otimes^p_q \mathfrak{V} \otimes \otimes^r_s \mathfrak{V} \to \otimes^{p+r}_{q+s} \mathfrak{V}$$

$$(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1 \otimes \ldots \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^q) \otimes (\mathfrak{y}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{y}_r \otimes \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1 \otimes \ldots \otimes \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^s) \mapsto$$

$$\mapsto \mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p \otimes \mathfrak{y}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{y}_r \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1 \otimes \ldots \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^q \otimes \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1 \otimes \ldots \otimes \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^s .$$

f heißt Tensormultiplikation.

69. Die direkte Summe

$$\otimes(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}^*) := \bigoplus_{p,q=0}^{\infty} \otimes^p_q \mathfrak{V}$$

stellt eine Algebra über K dar.

70. Sind $\mu^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q}$ die Koordinaten des p-fach kontravarianten und q-fach kovarianten Tensors $\mathfrak{r}(p,q)$ bezüglich der Basis $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ von $\mathfrak{V}$, so gilt für

den durch

$$\bar{\mathfrak{b}}_i = a_i^k \mathfrak{b}_k, \quad \mathfrak{b}_l = c_l^j \bar{\mathfrak{b}}_j, \quad a_i^k c_k^j = \delta_i^j$$

vermittelten Basiswechsel $\mathfrak{B} \to \bar{\mathfrak{B}} = \{\bar{\mathfrak{b}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{b}}_n\}$

für die neuen Koordinaten von $\mathfrak{r}(p,q)$

$$\mu^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} = a^{k_1}_{i_1} \ldots a^{k_p}_{i_p} \, c^{j_1}_{l_1} \ldots c^{j_q}_{l_q} \, \bar{\mu}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$$

bzw.

$$\bar{\mu}^{m_1 \ldots m_p}_{t_1 \ldots t_q} = c^{m_1}_{k_1} \ldots c^{m_p}_{k_p} \, a^{l_1}_{t_1} \ldots a^{l_q}_{t_q} \, \mu^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q}$$

71. <u>Klassische Tensordefinition</u>: Eine Größe, welche bezüglich einer Basis eines n-dimensionalen Vektorraumes durch die n^{p+q} Skalare

$\mu^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q}$ festgelegt wird, heißt p-fach kontravarianter und q-fach kovarianter Tensor, wenn sich die genannten Skalare bei Basiswechsel in der in 70. beschriebenen Weise transformieren.

72. Gegeben seien die Vektorräume $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}'$ und die zugehörigen Dualräume $\mathfrak{V}^*$, $\mathfrak{V}'^*$. Dann kann man jedem Tensor aus $\mathfrak{V}^* \otimes \mathfrak{V}'$, $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{V}'^*$, $\mathfrak{V}^* \otimes \mathfrak{V}'^*$ in eindeutiger Weise eine lineare Abbildung aus $\mathrm{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}')$, $\mathrm{Hom}(\mathfrak{V}', \mathfrak{V})$, $\mathrm{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}'^*)$ zuordnen:

$$\sum_i \sum_j \lambda^j_i \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^i \otimes \mathfrak{x}'_j \in \mathfrak{V}^* \otimes \mathfrak{V}' \quad \ldots \quad f: \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}'$$

$$\mathfrak{x} \mapsto f(\mathfrak{x}) = \sum_i \sum_j \lambda^j_i \mathfrak{x}'_j \langle \mathfrak{x}, \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^i \rangle$$

$$\sum_i \sum_j \mu^j_i \mathfrak{x}_j \otimes \overset{*}{\mathfrak{y}}{}'^i \in \mathfrak{V} \otimes \mathfrak{V}'^* \quad \ldots \quad g: \mathfrak{V}' \to \mathfrak{V}$$

$$\mathfrak{x}' \mapsto g(\mathfrak{x}') = \sum_i \sum_j \mu^j_i \mathfrak{x}_j \langle \mathfrak{x}', \overset{*}{\mathfrak{y}}{}'^i \rangle$$

$$\sum_i \sum_j \nu_{ij} \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^i \otimes \overset{*}{\mathfrak{y}}{}'^j \in \mathfrak{V}^* \otimes \mathfrak{V}'^* \quad \ldots \quad h: \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}'^*$$

$$\mathfrak{x} \mapsto h(\mathfrak{x}) = \sum_i \sum_j \nu_{ij} \overset{*}{\mathfrak{y}}{}'^j \langle \mathfrak{x}, \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^i \rangle$$

Alle Summen endlich !!

Sind alle Vektorräume <u>endlichdimensional</u>, so ist die Beziehung zwischen den Tensoren und den linearen Abbildungen bijektiv. Bezieht man die Dualräume auf die Kobasen der gegebenen Basen der Vektorräume, so sind die Koordinaten des Tensors jeweils identisch mit den Elementen der der linearen Abbildung zugeordneten Matrix:

$$f(\mathfrak{b}_i) = \lambda^j_i \, \mathfrak{b}'_j$$

$$g(\mathfrak{b}'_i) = \mu^j_i \, \mathfrak{b}_j$$

$$h(\mathfrak{b}_i) = \nu_{ij} \overset{*}{\mathfrak{b}}{}'^j$$

<u>Anmerkung</u>: Wegen dieses Sachverhaltes werden in den Anwendungen die Begriffe "(zweistufiger) Tensor" und "lineare Abbildung" oft gleichbedeutend gebraucht.

73. <u>Definition</u>: Der (bei vorgegebenen Indizes i,k) durch

$$\mu^i_k : \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{p} \mathfrak{V} \times \mathop{\mathsf{X}}_{j=1}^{q} \mathfrak{V}^* \to \bigotimes\nolimits^{p-1}_{q-1} \mathfrak{V}$$

$$(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p ; \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1, \ldots, \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^q) \mapsto$$

$$\mapsto \langle \mathfrak{x}_i, \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^k \rangle \mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_{i-1} \otimes \mathfrak{x}_{i+1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1 \ldots \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{k-1} \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{k+1} \otimes \ldots \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^q$$

definierten (p+q)-linearen Abbildung entspricht nach der Zerlegungseigenschaft T (36.) genau eine lineare Abbildung

$$v^i_k : \bigotimes\nolimits^p_q \mathfrak{V} \to \bigotimes\nolimits^{p-1}_{q-1} \mathfrak{V}$$

$$\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1 \otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^q \mapsto$$

$$\mapsto \langle \mathfrak{x}_i, \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^k \rangle \mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_{i-1} \otimes \mathfrak{x}_{i+1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1 \otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{k-1} \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{k+1} \otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^q .$$

v^i_k heißt <u>Verjüngung</u> über den kontravarianten Index i und den kovarianten Index k. Die Verjüngung ist nur für $p > 0$, $q > 0$ definiert. Sie vermindert die Stufe des Tensors um 2.

74. <u>Definition</u>: Statt von Verjüngung spricht man von der <u>Überschiebung</u> zweier Tensoren, wenn man ihr Produkt nach einem kontravarianten und einem kovarianten Index überschiebt, die verschiedenen Faktoren angehören.

75. Ist $\mathfrak{V} = H[\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n]$ <u>endlichdimensional</u>, so gilt für den Tensor

$$\mathfrak{x}(p,q) = \lambda^{l_1 \dots l_p}_{j_1 \dots j_q} \mathfrak{b}_{l_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}_{l_p} \otimes \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{j_1} \otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{j_q} :$$

$$v^i_k(\mathfrak{x}(p,q)) = \lambda^{l_1 \dots l_{i-1}, s, l_{i+1}, \dots, l_p}_{j_1 \dots j_{k-1}, s, j_{k+1}, \dots, j_q} \mathfrak{b}_{l_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}_{l_{i-1}}$$

$$\otimes\, \mathfrak{b}_{l_{i+1}} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}_{l_p} \otimes \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{j_1} \otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{j_{k-1}} \otimes \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{j_{k+1}} \otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{j_q} .$$

<u>Regel</u>: Die Verjüngung eines Tensors nach dem **i-ten kontravarianten und dem j-ten kovarianten Index führt man** durch, indem man die Vektoren $\mathfrak{b}_{l_i}$ und $\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{j_k}$ jedesmal wegläßt, wenn der i-te untere Index und der k-te obere Index gleich sind. Die anderen Faktoren schreibt man unverändert an. Sind der i-te untere und der k-te obere Index verschieden, so fällt dieser Summand überhaupt weg. Die stehenbleibenden Summanden werden dann noch aufsummiert.

76. <u>Definition</u>: $\mathfrak{V} = H[\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n]$ sei <u>endlichdimensional</u>.

Dann heißt der durch

$$\overset{\otimes}{\mathfrak{e}} = \mathfrak{b}_i \otimes \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^i$$

definierte Tensor $\overset{\otimes}{\mathfrak{e}} \in \mathfrak{V} \otimes \mathfrak{V}^* = \bigotimes_1^1 \mathfrak{V}$ <u>Einheitstensor</u> (bezüglich des Paares $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}^*$).

77. Der Einheitstensor ist von der Wahl der Basis unabhängig.

78. Es sei $\mathfrak{V} = H[\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n]$ <u>endlichdimensional</u> und

$\overset{\otimes}{\mathfrak{e}}{}^* = \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^i \otimes \mathfrak{b}_i$ der Einheitstensor bezüglich $\mathfrak{V}^*, \mathfrak{V}$.

Dann ist die durch

$$u : \bigotimes_{q-1}^{p-1} \mathfrak{V}^* \to \bigotimes_q^p \mathfrak{V}^*$$

$$\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^2 \otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p \otimes \mathfrak{y}_2 \otimes \dots \otimes \mathfrak{y}_q \mapsto \overset{\otimes}{\mathfrak{e}}{}^* \otimes \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^2 \otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p \otimes \mathfrak{y}_2 \otimes \dots \otimes \mathfrak{y}_q$$

festgelegte Abbildung die zur Verjüngung

$$v_1^1 : \bigotimes_q^p \mathfrak{V} \to \bigotimes_{q-1}^{p-1} \mathfrak{V}$$

<u>duale</u> Abbildung, d.h. es gilt

$$\langle v_1^1(\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1 \otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^q), \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^2 \otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p \otimes \mathfrak{y}_2 \otimes \dots \otimes \mathfrak{y}_q \rangle =$$

$$\langle \mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1 \otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^q, u(\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^2 \otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p \otimes \mathfrak{y}_2 \otimes \dots \otimes \mathfrak{y}_q) \rangle .$$

Tensorielle Abbildungen

79. Definition: Es sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{V})$. Dann sind auch die duale Abbildung f^D sowie ihre Inverse $f^* := (f^D)^{-1}$ Automorphismen. Es gilt für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{V}$ und alle $\overset{*}{\mathfrak{y}} \in \mathfrak{V}^*$:

$<f(\mathfrak{x}), f^*(\mathfrak{y}^*)> = <\mathfrak{x}, f^D \circ f^*(\mathfrak{y}^*)> = <\mathfrak{x}, \mathfrak{y}^*>$.

Nach 56. ist das KRONECKER-Produkt

$$f^p_q := f \otimes \ldots \otimes f \otimes f^* \otimes \ldots \otimes f^*$$

ein Automorphismus von $\bigotimes^p_q \mathfrak{V}$.

f^p_q heißt der von f induzierte Automorphismus von $\bigotimes^p_q \mathfrak{V}$. Man setzt $f^1_o := f$, $f^o_1 := f^*$, $f^o_o := \mathrm{id}_{\mathfrak{V}}$

80. Definition: Ein Unterraum $\mathfrak{U}$ von $\bigotimes^p_q \mathfrak{V}$ heißt tensorieller Unterraum, wenn $\mathfrak{U}$ unter jedem Automorphismus f von $\mathfrak{V}$ f^p_q – invariant ist, d.h. wenn gilt $f^p_q(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{U}$.

Eine lineare Abbildung $\varphi: \bigotimes^p_q \mathfrak{V} \to \bigotimes^r_s \mathfrak{V}$ heißt tensorielle Abbildung, wenn für alle $f \in \mathrm{Aut}\ (\mathfrak{V})$ gilt

$$\varphi \circ f^p_q = f^r_s \circ \varphi.$$

Eine m-lineare Abbildung $\mu: \overset{m}{\underset{i=1}{\times}} \bigotimes^{p_i}_{q_i} \mathfrak{V} \to \bigotimes^r_s \mathfrak{V}$ heißt tensoriell, wenn für alle $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{V})$ und alle $\mathfrak{x}(p_i, q_i) \in \bigotimes^{p_i}_{q_i} \mathfrak{V}$ gilt:

$$\mu(f^{p_1}_{q_1}(\mathfrak{x}(p_1, q_1)), \ldots, f^{p_m}_{q_m}(\mathfrak{x}(p_m, q_m)) = f^r_s(\mu(\mathfrak{x}(p_1, q_1), \ldots, \mathfrak{x}(p_m, q_m))).$$

81. Die m-lineare Abbildung $\mu: \mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} \otimes^{p_i}_{q_i} \mathfrak{V} \to \otimes^{r}_{s} \mathfrak{V}$ ist genau dann tensoriell, wenn die nach der Zerlegungseigenschaft T (36.) eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\varphi: \bigotimes_{i=1}^{m} \left(\otimes^{p_i}_{q_i} \mathfrak{V} \right) \cong \otimes^{p_1+\dots+p_m}_{q_1+\dots+q_m} \mathfrak{V} \to \otimes^{r}_{s} \mathfrak{V}$$

mit $\mu = \varphi \circ \tau$ tensoriell ist.

82. Es sei $\varphi : \otimes^{p}_{q} \mathfrak{V} \to \otimes^{r}_{s} \mathfrak{V}$ tensoriell. Sind dann $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{U}'$ tensorielle Unterräume von $\otimes^{p}_{q}\mathfrak{V}$ bzw. $\otimes^{r}_{s}\mathfrak{V}$, so sind auch $\varphi(\mathfrak{U})$ bzw. das Urbild $\varphi^{-}(\mathfrak{U}')$ tensorielle Unterräume.

83. Die Multiplikation von Tensoren und die Verjüngung 73. sind tensorielle Abbildungen.

84. <u>Definition</u>: Ein Tensor $\mathfrak{r}(p,q) \in \otimes^{p}_{q}\mathfrak{V}$ heißt <u>invarianter Tensor</u>, wenn für <u>alle</u> $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{V})$ gilt

$$f^{p}_{q}(\mathfrak{r}(p,q)) = \mathfrak{r}(p,q).$$

a) Der Nulltensor ist stets invarianter Tensor.

b) Hat $\mathfrak{V}$ unendliche Dimension, so ist der Nulltensor der einzige invariante Tensor.

c) Ist der Skalarkörper K von $\mathfrak{V}$ ein unendlicher Körper, so ist für $p \neq q$ der Nulltensor der einzige invariante Tensor von $\otimes^{p}_{q}\mathfrak{V}$.

85. <u>Beispiel</u>: Es sei $\mathfrak{V} = H[\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n]$ endlichdimensional. Ferner sei π eine vorgegebene Permutation von $\{1,\dots,p\}$. Dann ist

$$\mathfrak{e}_{\pi}(p,p) := \mathfrak{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}_{i_p} \otimes \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{i_{\pi(1)}} \otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{i_{\pi(p)}}$$

$i_j = 1,\dots,n; \quad j = 1,\dots,p$ (EINSTEIN-Konvention !)

ein invarianter Tensor von $\bigotimes^p_q \mathfrak{B}$.

Anmerkung: $e_\pi(p,p)$ stellt eine Verallgemeinerung des Einheitstensors von 76. dar.

Tensoren über metrischen Vektorräumen

Von 86-92 sind alle Vektorräume endlichdimensional

86. Den Vektorraum $\mathfrak{B}=H[\mathfrak{B}]=H[\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n]$ nennen wir metrisch, wenn in ihm eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform $\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ vorgegeben ist. Bezüglich $\mathfrak{B}$ entspricht ihr die reguläre Matrix

$$B_n=\|\beta_{ij}\|_n, \quad \beta_{ij}:= \beta(\mathfrak{b}_i,\mathfrak{b}_j), \quad \beta_{ij}=\beta_{ji}$$

$$B_n^{-1}=\|\beta^{jk}\|_n, \quad \beta_{ij}\beta^{jk} = \delta_i^k, \quad \beta^{jk} = \beta^{kj}.$$

Der Basis $\mathfrak{B}$ wird vermöge β die reziproke Basis $\mathfrak{B}'=\{\mathfrak{b}^1,\dots,\mathfrak{b}^n\}$ durch

$$\mathfrak{b}^i=\beta^{ik}\mathfrak{b}_k, \quad \mathfrak{b}_k=\beta_{kj}\mathfrak{b}^j, \quad \beta(\mathfrak{b}^i,\mathfrak{b}^k) = \beta^{ik} \tag{1}$$

zugeordnet. Jedem Vektor $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}$ entsprechen die n-tupel $(x^1,\dots,x^n),(x_1,\dots,x_n)$ seiner kontravarianten bzw. kovarianten Koordinaten bezüglich $\mathfrak{B}$, die durch

$$\mathfrak{x} = x^i\mathfrak{b}_i = x_j\mathfrak{b}^j \tag{2}$$

definiert sind und die in der Beziehung

$$x_i= \beta_{ij}x^j, \quad x^k= \beta^{kl}x_l \tag{3}$$

stehen. Für den Wert der Bilinearform gilt

$$\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y})=\beta_{ij}x^ix^j=x^ky_k= x_ly^l= \beta^{rs}x_ry_s. \tag{4}$$

87. Im Tensorraum $\textcircled{X}^p\mathfrak{B}$ seien die p Vektoren $\mathfrak{x}_i = x_i^{j_1}\mathfrak{b}_{j_1}$ $(i=1,\dots,p)$ durch ihre kontravarianten Koordinaten $x_i^{j_1}$ gegeben. Dann hat der zerfallende Tensor $\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p$ die Darstellung

$$\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p = x_1^{j_1} \dots x_p^{j_p}\, \mathfrak{b}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}_{j_p}.$$

Die Größen $x_1^{j_1} \dots x_p^{j_p}$ sind seine <u>kontravarianten Koordinaten</u>. Stellt man die $\mathfrak{x}_i = x_{k_1}^{i}\, \mathfrak{b}^{k_1}$ durch ihre kovarianten Koordinaten dar, so gilt

$$\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p = x_{k_1}^{1} \dots x_{k_p}^{p}\, \mathfrak{b}^{k_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}^{k_p}.$$

Die Größen $x_{k_1}^{1} \dots x_{k_p}^{p}$ sind die <u>kovarianten Koordinaten</u> desselben zerfallenden Tensors.

Wegen (3) von 86. gilt

$$x_{k_1}^{1} \dots x_{k_p}^{p} = \beta_{k_1 j_1} \dots \beta_{k_p j_p}\, x_1^{j_1} \dots x_p^{j_p}$$

bzw.

$$x_1^{j_1} \dots x_p^{j_p} = \beta^{j_1 k_1} \dots \beta^{j_p k_p}\, x_{k_1}^{1} \dots x_{k_p}^{p}.$$

Mit Hilfe der Größen β_{ij} bzw. β^{kl} kann man also die Indizes "hinaufziehen (heben)" bzw. "herunterziehen (senken)".

Für einen beliebigen Tensor $\mathfrak{x}(p) \in \textcircled{X}^p\mathfrak{B}$ gilt:

$$\mathfrak{x}(p) = \lambda^{i_1 \dots i_p}\, \mathfrak{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}_{i_p} = \lambda_{j_1 \dots j_p}\, \mathfrak{b}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}^{j_p}$$

Die Größen $\lambda^{i_1 \dots i_p}$ sind die <u>kontravarianten Koordinaten</u>, die Größen $\lambda_{j_1 \dots j_p}$ die <u>kovarianten Koordinaten</u> von $\mathfrak{r}(p)$. Sie hängen folgendermaßen zusammen

$$\lambda_{j_1 \dots j_p} = \beta_{j_1 i_1} \dots \beta_{j_p i_p} \cdot \lambda^{i_1 \dots i_p}$$

$$\lambda^{i_1 \dots i_p} = \beta^{i_1 j_1} \dots \beta^{i_p j_p} \cdot \lambda_{j_1 \dots j_p}.$$

In den bisherigen Fällen wurde $\textcircled{X}^p \mathfrak{B}$ auf die Basis $\{\mathfrak{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}_{i_p}\}$ bzw. $\{\mathfrak{b}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}^{j_p}\}$ bezogen. Wählt man als Basis von $\textcircled{X}^p \mathfrak{B}$ zerfallende Tensoren der Bauart

$$\mathfrak{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}_{i_r} \otimes \mathfrak{b}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}^{j_s} \qquad (r+s=p),$$

wobei die Vektoren $\mathfrak{b}_{i_k}$ der Basis $\mathfrak{B}$, die Vektoren $\mathfrak{b}^{j_l}$ der reziproken Basis $\mathfrak{B}'$ angehören, so erfolgt die Darstellung von $\mathfrak{r}(p)$ mit Hilfe von <u>gemischten</u> (r-fach kontravarianten, s-fach kovarianten) <u>Koordinaten</u>

$$\mathfrak{r}(p) = \lambda^{i_1 \dots i_r}{}_{j_1 \dots j_s} \mathfrak{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}_{i_r} \otimes \mathfrak{b}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}^{j_s}.$$

Es gilt

$$\lambda^{i_1 \dots i_r}{}_{j_1 \dots j_s} = \beta_{j_1 i_{r+1}} \dots \beta_{j_s i_p} \lambda^{i_1 \dots i_p} =$$

$$= \beta^{i_1 k_1} \dots \beta^{i_r k_r} \cdot \lambda_{k_1 \dots k_r, j_1 \dots j_s}.$$

Im Falle p=3 sind u.a. etwa folgende Fälle für das Heben bzw. Senken von Indizes möglich:

$$\lambda^{ijk} = \beta^{ir}\lambda^{\cdot jk}_{r\cdot\cdot} = \beta^{js}\lambda^{i\cdot k}_{\cdot s\cdot} = \beta^{kt}\lambda^{ij\cdot}_{\cdot\cdot t} =$$

$$= \beta^{ir}\beta^{js}\lambda^{\cdot\cdot k}_{rs\cdot} = \beta^{ir}\beta^{kt}\lambda^{\cdot j\cdot}_{r\cdot t} = \beta^{js}\beta^{kt}\lambda^{i\cdot\cdot}_{\cdot st} =$$

$$= \beta^{ir}\beta^{js}\beta^{kt}\lambda_{rst}$$

$$\lambda_{rst} = \beta_{ri}\lambda^{i\cdot\cdot}_{\cdot st} = \beta_{sj}\lambda^{\cdot j\cdot}_{r\cdot t} = \beta_{tk}\lambda^{\cdot\cdot k}_{rs\cdot} =$$

$$= \beta_{ri}\beta_{sj}\lambda^{ij\cdot}_{\cdot\cdot t} = \beta_{ri}\beta_{tk}\lambda^{i\cdot k}_{\cdot s\cdot} = \beta_{sj}\beta_{tk}\lambda^{\cdot jk}_{r\cdot\cdot} =$$

$$= \beta_{ri}\beta_{sj}\beta_{tk}\lambda^{ijk}$$

88. Durch

$$\bar{\mathfrak{b}}_i = a^j_i\mathfrak{b}_j, \quad \mathfrak{b}_j = c^k_j\bar{\mathfrak{b}}_k, \quad a^j_i c^k_j = \delta^k_i$$

werde ein Basiswechsel $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n\} \to \bar{\mathfrak{B}} = \{\bar{\mathfrak{b}}_1,\dots,\bar{\mathfrak{b}}_n\}$ vermittelt. Dann gelten folgende Transformationsformeln

$$x^j = a^j_i\,\bar{x}^i, \quad \bar{x}^k = c^k_j x^j$$

$$\bar{\beta}_{kl} = a^i_k a^j_l \beta_{ij}, \quad \bar{\beta}^{mk} = c^m_t c^k_r \beta^{rt} \qquad (1)$$

$$\mathfrak{b}^k = a^k_j\,\bar{\mathfrak{b}}^j, \quad \bar{\mathfrak{b}}^j = c^j_i\mathfrak{b}^i$$

89. Aus dem Transformationsverhalten (1) der Koordinaten β_{ij} bzw. β^{rt} der Bilinearform β ergibt sich nach 71., daß β ein Tensor 2.Stufe ist. β heißt Maßtensor. Die Größen β_{ij} bzw. β^{rt} sind seine kovarianten bzw. kontravarianten Koordinaten. Für seine gemischten Koordinaten gilt

$$\beta^{i\cdot}_{\cdot j} = \delta^{i\cdot}_{\cdot j}, \quad \beta^{\cdot j}_{i\cdot} = \delta^{\cdot j}_{i\cdot} .$$

β gestattet also die Darstellungen

$$\beta = \beta^{ij}\mathfrak{b}_i \otimes \mathfrak{b}_j = \beta_{kl}\mathfrak{b}^k \otimes \mathfrak{b}^l = \mathfrak{b}^i \otimes \mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_j \otimes \mathfrak{b}^j .$$

90. Durch die Bilinearform β wird vermöge $<\mathfrak{x}, f(\mathfrak{y})> = \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ein Isomorphismus $f: \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}^*$ festgelegt. Identifiziert man den Vektor $\mathfrak{y} \in \mathfrak{V}$ mit seinem Bild $f(\mathfrak{y}) \in \mathfrak{V}^*$, so kann man für zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{V}$ einen Klammerausdruck durch

$$<\mathfrak{x}, \mathfrak{y}> := <\mathfrak{x}, f(\mathfrak{y})> = \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

definieren, den man als skalares (inneres) Produkt von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bezeichnen kann.
Speziell gilt

$$<\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_j> = \beta_{ij}, \quad <\mathfrak{b}^i, \mathfrak{b}^j> = \beta^{ij}, \quad <\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}^j> = <\mathfrak{b}^j, \mathfrak{b}_i> = \delta^j_i \qquad (1)$$

Das so definierte Skalarprodukt ist kommutativ.

91. Der Begriff der Verjüngung 73. über zwei Indizes kann mit Hilfe des Klammerausdruckes 90. auf beliebige Tensoren aus der Algebra $\otimes\mathfrak{V}$ übertragen werden.

$$v_{ij}(\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_i \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_j \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p) :=$$

$$= <\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_j> \mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_{i-1} \otimes \mathfrak{x}_{i+1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_{j-1} \otimes \mathfrak{x}_{j+1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p$$

Bei Koordinantendarstellung kann das Ergebnis der Verjüngung je nach der Darstellung der beteiligten Vektoren durch kontravariante oder kovariante Koordinaten die mannigfachsten Formen annehmen.

92. Identifiziert man den Vektor $\mathfrak{y} \in \mathfrak{V}$ mit dem ihm entsprechenden Vektor $f(\mathfrak{y}) \in \mathfrak{V}^*$ nach 90. und umgekehrt $\mathfrak{y}^* \in \mathfrak{V}^*$ mit $f^{-1}(\mathfrak{y}^*) \in \mathfrak{V}$, so kann man im Tensorraum $\bigotimes_q^p \mathfrak{V}$ ein kommutatives Skalarprodukt auf folgende Weise definieren:

$$<\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p \otimes \mathfrak{x}^{*1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}^{*q}, \mathfrak{y}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{y}_p \otimes \mathfrak{y}^{*1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{y}^{*q}> :=$$

$$= <\mathfrak{x}_1, f(\mathfrak{y}_1)> \ldots <\mathfrak{x}_p, f(\mathfrak{y}_p)> . <\mathfrak{x}^{*1}, f^{-1}(\mathfrak{y}^{*1})> \ldots <\mathfrak{x}^{*q}, f^{-1}(\mathfrak{y}^{*q})>$$

Schiefe Symmetrie und Symmetrie in der Tensoralgebra

Im folgenden sei stets $K=\mathbb{C}$ bzw. $K=\mathbb{R}$. Alle Ergebnisse gelten aber auch für Körper mit der Charakteristik 0

Schiefsymmetrische Tensoren

93. Es seien π, ρ Permutationen von $\{1, \ldots, p\}$. Dann wird durch

$$\pi : \bigotimes^p \mathfrak{V} \to \bigotimes^p \mathfrak{V}$$

$$\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p \mapsto \pi(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p) := \mathfrak{x}_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_{\pi(p)}$$

ein Automorphismus von $\bigotimes^p \mathfrak{V}$ festgelegt, für den gilt:

$$(\rho \circ \pi)(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p) = \rho(\pi(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p))$$

$$\varepsilon(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p) = \mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p \quad (\varepsilon \ldots \text{ identische Permutation})$$

94. $\mathfrak{N}^p$ sei jener Unterraum von $\otimes^p \mathfrak{X}$, der von allen Tensoren $\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p$ erzeugt wird, für welche $\mathfrak{x}_i = \mathfrak{x}_j$ für mindestens ein Paar von Indizes $i \neq j$ ist. $\mathfrak{N}^p$ ist trivialerweise π-invariant.
Ist $\mathfrak{x}(p)$ beliebig aus $\otimes^p \mathfrak{X}$, so gilt für alle π

$$\mathfrak{x}(p) - \operatorname{sgn} \pi . \ \pi(\mathfrak{x}(p)) \in \mathfrak{N}^p$$

95. Definition: Der durch

$$A(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p) := \frac{1}{p!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi . \pi(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p)$$

definierte Endomorphismus A von $\otimes^p \mathfrak{X}$ heißt Alternator (Antisymmetrieoperator) von $\otimes^p \mathfrak{X}$.

96. Sind die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p$ in $\mathfrak{X}$ l.u., so gilt

$$A(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p) \neq \mathfrak{o}(p)$$

97. Für jede Permutation ρ von $\{1, \ldots, p\}$ und jeden Tensor $\mathfrak{x}(p) \in \otimes^p \mathfrak{X}$ gilt

$$(A \circ \rho)(\mathfrak{x}(p)) = \operatorname{sgn} \rho . \ A(\mathfrak{x}(p)),$$

daher

$$A \circ \rho = (\operatorname{sgn} \rho) . A$$

98. $\operatorname{kn} A = \mathfrak{N}^p$

99. A ist idempotent und daher Projektor

$$A^2 = A.$$

Mithin gilt

$$\otimes^p \mathfrak{X} = \mathfrak{N}^p \oplus A(\otimes^p \mathfrak{X})$$

100. Jeder Tensor $\mathfrak{x}(p) \in \bigotimes^p \mathfrak{V}$ läßt sich in eindeutiger Weise in der Form

$$\mathfrak{x}(p) = \mathfrak{x}'(p) + A(\mathfrak{x}(p)), \quad \mathfrak{x}'(p) \in \mathfrak{N}^p$$

darstellen.

Die Tensoren aus $A\,(\bigotimes^p \mathfrak{V})$ heißen <u>schiefsymmetrisch</u>.

$A(\mathfrak{x}(p))$ ist der eindeutig bestimmte <u>schiefsymmetrische Anteil</u> des Tensors $\mathfrak{x}(p)$.

101. Es seien $\bigotimes \mathfrak{V} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigotimes^p \mathfrak{V}$ die Tensoralgebra 62.

über $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{N}^p \subset \bigotimes^p \mathfrak{V}$ die in 94. definierten Unterräume, wobei diese Definition noch durch $\mathfrak{N}^0 := \{0\}$, $\mathfrak{N}^1 := \{\mathfrak{o}\}$ ergänzt werde. Ferner bedeute im Falle $p=0 \ldots A=id_K$ und im Falle $p=1 \ldots A=id_{\mathfrak{V}}$.

Dann gilt

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{N}^p \otimes \bigotimes^q \mathfrak{V} \subset \mathfrak{N}^{p+q} \\ \bigotimes^p \mathfrak{V} \otimes \mathfrak{N}^q \subset \mathfrak{N}^{p+q} \end{array}\right. \qquad p,q \geq 0$$

102. Es seien $\mathfrak{x}(p) \in \bigotimes^p \mathfrak{V}$, $\mathfrak{y}(q) \in \bigotimes^q \mathfrak{V}$, daher

$\mathfrak{x}(p) \otimes \mathfrak{x}(p) \in \bigotimes^{p+q} \mathfrak{V}$.

Dann gilt

$$A(\mathfrak{x}(p) \otimes \mathfrak{y}(q)) = A(A(\mathfrak{x}(p)) \otimes A(\mathfrak{y}(q)))$$

sowie

$$A(A(\mathfrak{x}(p)) \otimes \mathfrak{y}(q)) = A(\mathfrak{x}(p) \otimes \mathfrak{y}(q)) = A(\mathfrak{x}(p) \otimes A(\mathfrak{y}(q)))$$

<u>Hinweis</u>: Die in der Definition von A (95.) auftretenden Permutationen erstrecken sich jeweils auf die der Stufenzahl des abgebildeten Tensors entsprechenden Indizes, also in obigem Satz z.B. auf

$\{1,\ldots,p\}$, $\{p+1,\ldots,p+q\}$, $\{1,\ldots,p+q\}$ wenn gilt:

$\mathfrak{x}(p) = \mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p$, $\mathfrak{y}(q) = \mathfrak{x}_{p+1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_{p+q}$.

$\mathfrak{x}(p) \otimes \mathfrak{y}(q) = \mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_{p+q}$

103. Für $\mathfrak{x}(p) \in \textcircled{x}^p \mathfrak{V}$, $\mathfrak{y}(q) \in \textcircled{x}^q(\mathfrak{V})$ gilt:

$\mathfrak{x}(p) \otimes \mathfrak{y}(q) - (-1)^{pq} \cdot \mathfrak{y}(q) \otimes \mathfrak{x}(p) \in \mathfrak{N}^{p+q}$

104. Für $\mathfrak{x}(p) \in \textcircled{x}^p \mathfrak{V}$, $\mathfrak{y}(q) \in \textcircled{x}^q \mathfrak{V}$ gilt:

$A[\mathfrak{x}(p) \otimes \mathfrak{y}(q)] = (-1)^{pq} A[\mathfrak{y}(q) \otimes \mathfrak{x}(p)]$

105. Für zerfallende Tensoren gilt:

a) $A(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_i \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_j \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p) =$

$= - A(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_j \ldots \otimes \mathfrak{x}_i \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p)$

Diese Eigenschaft erklärt die Bezeichnung "schiefsymmetrischer Tensor"

b) Ist $\mathfrak{x}_i = \mathfrak{x}_j$ $(i \neq j)$, so gilt:

$A(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_i \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_i \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p) = \mathfrak{o}(p)$

c) $A(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p) = \mathfrak{o}(p) \Leftrightarrow \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p$ l.a.

d) Sind $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p$ l.u., so gilt

$A(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p) \neq \mathfrak{o}(p)$

106. Ist $\mathfrak{V} = H[\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n]$ <u>endlichdimensional</u>, so stellen im Falle $p \leq n$ die Tensoren

$A(\mathfrak{b}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{b}_{i_p}) \qquad 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$

eine Basis von $A(\textcircled{x}^p \mathfrak{V})$ dar. Daher ist

$$\dim A(\textcircled{x}^p \mathfrak{V}) = \binom{n}{p}.$$

Ist $p > n$, so gilt

$$\dim A(\textcircled{x}^p \mathfrak{V}) = 0.$$

107. Ist $\mathfrak{R} = H[\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n]$ endlichdimensional und ist

$$\mathfrak{x}_j = x_j^{i_j}\, \mathfrak{b}_{i_j} \quad j=1,\dots,p; \quad i_j=1,\dots,n,$$

so gilt:

$$A(\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \dots & x_1^{i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_p^{i_1} & \dots & x_p^{i_p} \end{vmatrix} A(\mathfrak{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}_{i_p})$$

108. Ist $\mathfrak{R}$ endlichdimensional ($\dim \mathfrak{R} = n$), so gibt es nach 57. einen kanonischen Isomorphismus

$\Phi : \otimes^p \mathfrak{R}^* \to (\otimes^p \mathfrak{R})^*$, der es gestattet, diese beiden Räume zu identifizieren. Dann gilt

$$<\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p, \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1 \otimes \dots \otimes \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p> = <\mathfrak{x}_1, \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1> \dots <\mathfrak{x}_p, \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p>.$$

Ist $A(\otimes^p \mathfrak{R}^*)$ der Unterraum aller schief-symmetrischen Tensoren von $\otimes^p \mathfrak{R}^*$, ferner $\mathrm{Alt}\,(\otimes^p \mathfrak{R})$ der Vektorraum der alternierenden Linearformen $\otimes^p \mathfrak{R} \to K$, so gilt:

$$A(\otimes^p \mathfrak{R}^*) \cong \mathrm{Alt}\,(\otimes^p \mathfrak{R}) = A[(\otimes^p \mathfrak{R})^*]$$

Auch diese Räume können daher im endlichdimensionalen Fall identifiziert werden.

Erklärung: Ist $\tau : \mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{R} \to \otimes^p \mathfrak{R}$ die kanonische Abbildung,

ferner $\alpha : \mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{R} \to K$ eine alternierende p-Linearform,

so nennt man die nach dem Zerlegungssatz eindeutig bestimmte Linearform $\varphi : \otimes^p \mathfrak{R} \to K$ gleichfalls eine alternierende Linearform.

Schiefsymmetrische Tensoren über metrischen Vektorräumen endlicher Dimension.

109. Die symmetrische Bilinearform $\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ über $\mathfrak{V}=H[\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_n]$, $K=R$, sei nicht ausgeartet. Ferner sei $B_n=\|\beta_{ij}\|_n$ und $\det B_n=\Delta$. Dann heißt der Tensor n-ter Stufe

$$\varepsilon := \frac{n!}{\sqrt{|\Delta|}}\,A(\mathfrak{b}_1\otimes\ldots\otimes\mathfrak{b}_n)$$

<u>ε-Tensor</u>. Seine Darstellung in der reziproken Basis lautet

$$\varepsilon=(\operatorname{sgn}\Delta).\sqrt{|\Delta|}\,n!.\,A(\mathfrak{b}^1\otimes\ldots\otimes\mathfrak{b}^n)$$

Geht man vermöge

$$\bar{\mathfrak{b}}_i=a_i^j\mathfrak{b}_j,\quad A_n=\|a_i^j\|_n,\quad \Gamma=\det A_n$$

zu einer neuen Basis $\bar{\mathfrak{B}}=\{\bar{\mathfrak{b}}_1,\ldots,\bar{\mathfrak{b}}_n\}$ über, so gilt für den durch $\bar{\mathfrak{B}}$ definierten ε-Tensor

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Gamma}{|\Gamma|}\,\varepsilon=(\operatorname{sgn}\Gamma).\varepsilon$$

Der ε-Tensor ist also von der Wahl der Basis abhängig. Nach Orientierung von $\mathfrak{V}$ gilt $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$.

110. Ist $\mathfrak{V}_3=H[\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3]$ ein euklidischer Vektorraum, $\{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3\}=\mathfrak{B}$ eine beliebige Basis, so ist $\Delta = \det\|\mathfrak{b}_i\mathfrak{b}_j\| = \det\|\beta_{ij}\|>0$. Die <u>kontravarianten Koordinaten</u> des ε-Tensors bezüglich $\mathfrak{B}$ lauten dann

$\varepsilon^{ijk}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$, wenn (i,j,k) eine gerade Permutation von $(1,2,3)$ ist

$\varepsilon^{ijk}=-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$, wenn (i,j,k) eine ungerade Permutation von $(1,2,3)$ ist

$\varepsilon^{ijk}=0$ wenn zwei Indizes gleich sind.

Die kovarianten Koordinaten lauten

$\epsilon_{ijk} = \sqrt{\Delta}$ (i,j,k) gerade Permutation

$\epsilon_{ijk} = -\sqrt{\Delta}$ (i,j,k) ungerade Permutation

$\epsilon_{ijk} = 0$ zwei gleiche Indizes.

Sind $\mathfrak{x} = x^i \mathfrak{b}_i = x_j \mathfrak{b}^j$, $\mathfrak{y} = y^i \mathfrak{b}_i = y_j \mathfrak{b}^j$ zwei beliebige Vektoren, so gilt für das Skalarprodukt

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = x^i y_i = \beta^{il} x_l y_i \quad \text{usw.}$$

und für das Vektorprodukt

$$\mathfrak{x} \times \mathfrak{y} = z^i \mathfrak{b}_i = z_l \mathfrak{b}^l \quad \text{mit}$$

$$z^i = \epsilon^{ijk} x_j y_k = \epsilon^{ijk} \beta_{jl} x^l y_k \quad \text{usw.}$$

$$z_l = \beta_{li} z^i = \beta_{li} \epsilon^{ijk} x_j y_k \quad \text{usw.}$$

Bezieht man $\mathfrak{B}_3$ auf eine ON-Basis, so gilt $\Delta = 1$ $(B_3 = E_3)$ und die Unterscheidung von kontravarianten und kovarianten Koordinaten wird hinfällig.

Symmetrische Tensoren

111. Definition: π stelle eine beliebige Permutation von $\{1,\dots,p\}$ dar. Gleichzeitig bedeute π den in 93. definierten Automorphismus von $\otimes^p \mathfrak{B}$. Ferner sei τ eine beliebige Transposition von $\{1,\dots,p\}$.

Ist dann $\mathfrak{M}^p$ jener Unterraum von $\otimes^p \mathfrak{B}$, der von allen Tensoren der Gestalt $\mathfrak{x}(p) - \tau(\mathfrak{x}(p))$ erzeugt wird, so gilt:

$$\mathfrak{M}^p \text{ ist } \pi\text{ - invariant.}$$

112. Allgemeiner gilt für alle $\mathfrak{x}(p) \in \otimes^p$ und alle Permutationen π

$$\mathfrak{x}(p) - \pi(\mathfrak{x}(p)) \in \mathfrak{M}^p$$

113. <u>Definition</u>: Der durch

$$S(\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p) := \frac{1}{p!}\sum_{\pi} \pi(\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p)$$

definierte Endomorphismus S von $\bigotimes^p \mathfrak{V}$ heißt <u>Symmetrisator</u> (<u>Symmetrieoperator</u>) von $\bigotimes^p \mathfrak{V}$.

114. $\operatorname{kn} S = \mathfrak{M}^p$

115. S ist nilpotent und daher Projektor

$$S^2 = S$$

Mithin gilt:

$$\bigotimes^p \mathfrak{V} = \mathfrak{M}^p \oplus S\left(\bigotimes^p \mathfrak{V}\right)$$

116. Jeder Tensor $\mathfrak{x}(p) \in \bigotimes^p \mathfrak{V}$ läßt sich in eindeutiger Weise in der Form

$$\mathfrak{x}(p) = \mathfrak{x}''(p) + S(\mathfrak{x}(p)), \quad \mathfrak{x}''(p) \in \mathfrak{M}^p$$

darstellen. Die Tensoren aus $S\left(\bigotimes^p \mathfrak{V}\right)$ heißen <u>symmetrisch</u>. $S(\mathfrak{x}(p))$ ist der eindeutig bestimmte <u>symmetrische Anteil</u> des Tensors $\mathfrak{x}(p)$.

117. $S(\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p) = \mathfrak{o}(p)$ genau dann, wenn mindestens ein $\mathfrak{x}_i = \mathfrak{o}$ ist.

118. Es seien $\bigotimes \mathfrak{V} = \bigoplus_{p=o}^{\infty} \bigotimes^p \mathfrak{V}$ die Tensoralgebra 62. über $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}^p \subset| \bigotimes^p \mathfrak{V}$ die in 111. definierten Unterräume, wobei diese Definition noch durch $\mathfrak{M}^1 := \{\mathfrak{o}\}$, $\mathfrak{M}^0 := \{0\}$ ergänzt werde. Ferner bedeute im Falle $p=0 \dots S=\mathrm{id}_K$ und im Falle $p=1 \dots S=\mathrm{id}_{\mathfrak{V}}$. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{M}^p \otimes \bigotimes^q \mathfrak{V} \subset \mathfrak{M}^{p+q} \\ \bigotimes^p \mathfrak{V} \otimes \mathfrak{M}^q \subset \mathfrak{M}^{p+q} \end{array}\right. \qquad p,q \geq o$$

119. Es seien $\mathfrak{x}(p) \in \bigotimes^p \mathfrak{V}$, $\mathfrak{y}(q) \in \bigotimes^q \mathfrak{V}$,

daher $\mathfrak{x}(p) \otimes \mathfrak{y}(q) \in \bigotimes^{p+q} \mathfrak{V}$.

Dann gilt

$$S(\mathfrak{x}(p) \otimes \mathfrak{y}(q)) = S(S(\mathfrak{x}(p)) \otimes S(\mathfrak{y}(q))) = S(\mathfrak{x}(p) \otimes S(\mathfrak{y}(q))) =$$
$$= S(S(\mathfrak{x}(p)) \otimes \mathfrak{y}(q))$$

120. Für $\mathfrak{x}(p) \in \bigotimes^p \mathfrak{V}$ und $\mathfrak{y}(q) \in \bigotimes^q \mathfrak{V}$ gilt

$$\mathfrak{x}(p) \otimes \mathfrak{y}(q) - \mathfrak{y}(q) \otimes \mathfrak{x}(p) \in \mathfrak{M}^{p+q}$$

daher

$$S(\mathfrak{x}(p) \otimes \mathfrak{y}(q)) = S(\mathfrak{y}(q) \otimes \mathfrak{x}(p))$$

121. Für zerfallende Tensoren gilt:

$$S(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_i \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_j \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p) =$$
$$= S(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_j \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_i \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p)$$

Diese Eigenschaft erklärt die Bezeichnung "symmetrischer Tensor".

122. Ist $\mathfrak{V} = H[\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n]$ <u>endlichdimensional</u>, so stellen die Tensoren

$$S(\mathfrak{b}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{b}_{i_p}), \quad 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_p \leq n$$

eine Basis von $S(\bigotimes^p \mathfrak{V})$ dar. Mithin gilt

$$\dim S(\bigotimes^p \mathfrak{V}) = \binom{n+p-1}{p}.$$

123. Der Skalar

$$\operatorname{perm} A_n := \sum_{\pi} a_1^{\pi(1)} \ldots a_n^{\pi(n)}$$

heißt die <u>Permanente</u> der Matrix $A_n = \|a_i^j\|_n$

124. Ist $\mathfrak{B} = H[\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n]$ endlichdimensional und ist

$$\mathfrak{x}_j = x_j^{i_j}\, \mathfrak{b}_{i_j} \qquad j=1,\dots,p, \quad i_j=1,\dots,n$$

so gilt

$$S(\mathfrak{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{x}_p) = \sum_{1 \le i_1 \dots \le i_p \le n} \operatorname{perm} \begin{Vmatrix} x_1^{i_1} & \dots & x_1^{i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_p^{i_1} & \dots & x_p^{i_p} \end{Vmatrix} S(\mathfrak{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{b}_{i_p})$$

125. a) $(A \circ S)(\bigotimes^p \mathfrak{B}) = (S \circ A)(\bigotimes^p \mathfrak{B}) = \{\mathfrak{o}(p)\}$

b) $A(S(\mathfrak{x}(p) \otimes \mathfrak{y}(q)) = S(A(\mathfrak{x}(p) \otimes \mathfrak{y}(q)) = \mathfrak{o}(p)$

Die Algebra symmetrischer bzw. schiefsymmetrischer Tensoren

126. Das Tensorprodukt (schief-)symmetrischer Tensoren ist i.a. nicht wieder ein (schief-)symmetrischer Tensor. Daher sind die direkten Summen

$$\bigoplus_{p=0}^{\infty} A(\bigotimes^p \mathfrak{B}) = K \oplus \mathfrak{B} \oplus A(\bigotimes^2 \mathfrak{B}) \oplus \dots$$

$$\bigoplus_{p=0}^{\infty} S(\bigotimes^p \mathfrak{B}) = K \oplus \mathfrak{B} \oplus S(\bigotimes^p \mathfrak{B}) \oplus \dots$$

wohl Untervektorräume, aber keine Unteralgebren der Tensoralgebra $\bigotimes \mathfrak{B}$ über $\mathfrak{B}$.
Es ist daher sinnvoll, neue Produktbildungen in der gegebenen Tensoralgebra zu definieren, welche zwei (schief-)symmetrischen Tensoren wieder einen (schief-) symmetrischen Tensor als Produkt zuordnen.

127. Es sei f eine positive Funktion der natürlichen Zahlen

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}.$$

Dann definieren wir für $\mathfrak{x}(p) \in \bigotimes^p \mathfrak{B}, \mathfrak{y}(q) \in \bigotimes^q \mathfrak{B}$

die Produkte

$$\mathfrak{x}(p) \owedge \mathfrak{y}(q) := \frac{f(p+q)}{f(p).f(q)} \; A(\mathfrak{x}(p) \otimes \mathfrak{y}(q))$$

$$\mathfrak{x}(p) \ovee \mathfrak{y}(q) := \frac{f(p+q)}{f(p).f(q)} \; S(\mathfrak{x}(p) \otimes \mathfrak{y}(q))$$

Dadurch wird zwei beliebigen Tensoren als Produkt ein (schief-)symmetrischer Tensor zugeordnet, speziell daher auch zwei (schief-)symmetrischen Tensoren wieder ein (schief-)symmetrischer.

128. Es gilt

$$\mathfrak{x}(p) \owedge \mathfrak{y}(q) = (-1)^{pq} \mathfrak{y}(q) \owedge \mathfrak{x}(p)$$

$$\mathfrak{x}(p) \ovee \mathfrak{y}(q) = \mathfrak{y}(q) \ovee \mathfrak{x}(p)$$

Beide Produktbildungen sind assoziativ.

$[\bigoplus_{p=o}^{\infty} A(\bigotimes^p \mathfrak{V}), \owedge]$ heißt "äußere Algebra, Algebra schiefsymmetrischer Tensoren oder GRASSMANNsche Algebra" über $\mathfrak{V}$.

$[\bigoplus_{p=o}^{\infty} S(\bigotimes^p \mathfrak{V}), \ovee]$ heißt "Algebra symmetrischer Tensoren" über $\mathfrak{V}$.

129. Üblicherweise wählt man $f(p) \equiv 1$. In den Anwendungen (Quantenmechanik) wird beim alternierenden Produkt oft $f(p) = \sqrt{p!}$ gesetzt.

ÄUSSERE ALGEBRA

Es sei wieder $K=\mathbb{C}$ bzw. $K=\mathbb{R}$

130. *Definitionen*: Ein Vektorraum $\mathfrak{W}$ heißt *p-te äußere Potenz* des Vektorraumes $\mathfrak{V}$, wenn eine *p-alternierende* Abbildung

$\varepsilon: \mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ existiert mit folgenden Eigenschaften:

E1. $\mathfrak{W} = H(\varepsilon(\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{V}))$

E2. Zu jedem *beliebigen* Vektorraum $\mathfrak{X}$ und jeder *beliebigen* p-alternierenden Abbildung

$\mu: \mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{V} \to \mathfrak{X}$ gibt es eine lineare Abbildung

$f: \mathfrak{W} \to \mathfrak{X}$, sodaß gilt $\mu = f \circ \varepsilon$. Man bezeichnet dann auch die lineare Abbildung f als *alternierend*. Man schreibt

$$\mathfrak{W} = \bigwedge{}^{p} \mathfrak{V} = \mathfrak{V} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{V}$$

und setzt per definitionem

$$\bigwedge{}^{0} \mathfrak{V} := K, \quad \bigwedge{}^{1} \mathfrak{V} := \mathfrak{V}.$$

ε heißt die zur p-ten äußeren Potenz von $\mathfrak{V}$ gehörige *kanonische Abbildung*.

Die Elemente $\hat{\mathfrak{x}}(p)$ von $\bigwedge^{p} \mathfrak{V}$ heißen *p-Vektoren*. Die p-Vektoren der Form $\varepsilon(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p)$ nennt man *zerfallend* und schreibt

$$\varepsilon(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p) = \mathfrak{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{x}_p.$$

Das allgemeine Element von $\bigwedge^{p} \mathfrak{V}$ hat die Bauart (alle Summen endlich):

$$\hat{\mathfrak{x}}(p) = \sum_{i_1} \ldots \sum_{i_p} \lambda^{i_1 \ldots i_p} \mathfrak{x}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{x}_{i_p}.$$

131. Aus der Linearität von ε folgt:

$$\mathfrak{x}_1\wedge\dots\wedge(\mathfrak{x}_i+\mathfrak{y}_i)\wedge\dots\wedge\mathfrak{x}_p=\mathfrak{x}_1\wedge\dots\wedge\mathfrak{x}_i\wedge\dots\wedge\mathfrak{x}_p+\mathfrak{x}_1\wedge\dots\wedge\mathfrak{y}_i\wedge\dots\wedge\mathfrak{x}_p$$

$$\mathfrak{x}_1\wedge\dots\wedge(\lambda\mathfrak{x}_i)\wedge\dots\wedge\mathfrak{x}_p=\lambda\cdot\mathfrak{x}_1\wedge\dots\wedge\mathfrak{x}_i\wedge\dots\wedge\mathfrak{x}_p$$

Aus der schiefen Symmetrie von ε folgt:

$$\mathfrak{x}_{\pi(1)}\wedge\dots\wedge\mathfrak{x}_{\pi(p)} = \operatorname{sgn}\pi\cdot\mathfrak{x}_1\wedge\dots\wedge\mathfrak{x}_p$$

$$\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p \text{ l.a} \Leftrightarrow \mathfrak{x}_1\wedge\dots\wedge\mathfrak{x}_p = \hat{\mathfrak{o}}(p)$$

132. Die Bedingungen E1. und E2. von 130. sind äquivalent der einzigen Bedingung: E. Ist $\mu: \mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{V} \to \mathfrak{X}$ eine <u>beliebige</u> p-alternierende Abbildung in den <u>beliebig</u> gewählten Vektorraum $\mathfrak{X}$, so existiert <u>genau eine</u> lineare Abbildung $f:\mathfrak{V} \to \mathfrak{X}$ mit $\mu=f\circ\varepsilon$(<u>Zerlegungseigenschaft</u>).

133. Es seien $\wedge^p\mathfrak{V}$ und $\tilde{\wedge}^p\mathfrak{V}$ zwei p-te äußere Potenzen über $\mathfrak{V}$. Dann existiert <u>genau ein Isomorphismus</u>

$$f: \wedge^p\mathfrak{V} \to \tilde{\wedge}^p\mathfrak{V}$$

$$\mathfrak{x}_1\wedge\dots\wedge\mathfrak{x}_p \mapsto \mathfrak{x}_1\tilde{\wedge}\dots\tilde{\wedge}\mathfrak{x}_p$$

sodaß gilt $f \circ \varepsilon = \tilde{\varepsilon}$.

Die p-te äußere Potenz über $\mathfrak{V}$ ist also bis auf Isomorphismen eindeutig festgelegt.

134. <u>Hilfssatz</u>: Es sei $\mu: \mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ eine p-lineare Abbildung in den beliebigen Vektorraum $\mathfrak{W}$ und f die durch T2.(34.) bestimmte Abbildung $f: \otimes^p \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ mit $\mu = f \circ \tau$. μ ist <u>genau dann</u> schiefsymmetrisch, wenn $\mathfrak{N}^p \subset \operatorname{kn} f$ ist (vgl.94.)

135. <u>Existenz der p-ten äußeren Potenz:</u> $\otimes^p \mathfrak{V}$ sei die p-te Tensorpotenz über $\mathfrak{V}$(58.) und ε die p-lineare Abbildung

$$\varepsilon: \underset{i=1}{\overset{p}{\times}} \mathfrak{V} \to (\otimes^p \mathfrak{V})/\mathfrak{N}^p$$

$$(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_p) \mapsto \varepsilon(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_p) := \omega(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p)$$

Hier ist $\omega: \otimes^p \mathfrak{V} \to (\otimes^p \mathfrak{V})/\mathfrak{N}^p$ die natürliche Surjektion. Dann ist ε schiefsymmetrisch und erfüllt die Eigenschaften von E1 und E2 von 130. Daher ist

$$(\otimes^p \mathfrak{V})/\mathfrak{N}^p \cong \wedge^p \mathfrak{V}$$

136. Die p-te äußere Potenz $\wedge^p \mathfrak{V}$ ist auf kanonische Weise zur Menge $A(\otimes^p \mathfrak{V})$ der schiefsymmetrischen Tensoren von $\otimes^p \mathfrak{V}$ isomorph. Für diesen Isomorphismus Ψ gilt

$$\Psi: \wedge^p \mathfrak{V} \to A(\otimes^p \mathfrak{V})$$

$$\mathfrak{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{x}_p \mapsto A(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p)$$

Demnach kann man die p-Vektoren mit den schiefsymmetrischen Tensoren identifizieren.

137. Ist $\mathfrak{V} = H[\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_n]$ <u>endlichdimensional</u>, so gilt

$$\dim \wedge^p \mathfrak{V} = \begin{cases} \binom{n}{p}, \text{wenn } p \leq n \\ 0, \text{wenn } p > n \end{cases}$$

138. $(\wedge^p \mathfrak{V})^* \cong \mathrm{Alt}(\otimes^p \mathfrak{V}, K) \equiv A((\otimes^p \mathfrak{V})^*)$

139. Im folgenden wird zur Bezeichnung der Menge der der Größe nach geordneten Indizes $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$ die <u>Abkürzung</u> I(p) verwendet. Analog J(q), K(r) für $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n$, $1 \leq k_1 < \ldots < k_r \leq n$ usw.

Ebenso bedeutet

$$\hat{\mathfrak{b}}_{I(p)} := \mathfrak{b}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{b}_{i_p}$$

140. Es sei $\mathfrak{V} = H[\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n]$ endlichdimensional und

$$\mathfrak{x}_k = x_k^{j_k}\,\mathfrak{b}_{j_k} \qquad k=1,\dots,p; \qquad j_k=1,\dots,n$$

Dann gilt

$$\mathfrak{x}_1\wedge\dots\wedge\mathfrak{x}_p = \sum_{I(p)} \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \dots & x_1^{i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_p^{i_1} & \dots & x_p^{i_p} \end{vmatrix} \cdot \hat{\mathfrak{b}}_{I(p)}$$

Daher stellen die p-Vektoren $\hat{\mathfrak{b}}_{I(p)}$ (139.) eine Basis von $\wedge^p\mathfrak{V}$ dar.

141. Es seien $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ zwei beliebige Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V},\mathfrak{W})$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\hat{f}^p: \wedge^p\mathfrak{V} \to \wedge^p\mathfrak{W}$$

$$\mathfrak{x}_1\wedge\dots\wedge\mathfrak{x}_p \mapsto f(\mathfrak{x}_1)\wedge\dots\wedge f(\mathfrak{x}_p).$$

$\hat{f}^p$ heißt die p-te äußere Potenz von f. Per definitionem sei $\hat{f}^o := \mathrm{id}_K$.

142. Es sei $\mu: \mathop{X}\limits_{i=1}^{p+q} \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ ($\mathfrak{W}$ beliebig) (p+q)-linear mit folgender Eigenschaft: hält man die Vektoren $\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_q$ bzw. $\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p$ fest, so seien die durch

$$\mu^p_{\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_q}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p) := \mu(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p,\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_q)$$

$$\mu^q_{\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p}(\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_q) := \mu(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p,\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_q)$$

definierten p- bzw. q-linearen Abbildungen <u>alternierend</u>. Dann gibt es <u>genau eine</u> bilineare Abbildung

$$\hat{\beta}: \bigwedge{}^p\mathfrak{B} \times \bigwedge{}^q\mathfrak{B} \to \mathfrak{W}$$

mit

$$\hat{\beta}(\mathfrak{x}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{x}_p,\mathfrak{y}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{y}_q)=\mu(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_p,\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_q)$$

143. Es gibt genau eine bilineare Abbildung

$$\hat{\beta}: \bigwedge{}^p\mathfrak{B} \times \bigwedge{}^q\mathfrak{B} \to \bigwedge{}^{p+q}\mathfrak{B}$$

mit

$$\hat{\beta}(\mathfrak{x}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{x}_p,\mathfrak{y}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{y}_q)=\mathfrak{x}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{x}_p\wedge\mathfrak{y}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{y}_q$$

Mann nennt $\hat{\beta}$ das <u>äußere Produkt</u> des p-Vektors $\hat{\mathfrak{x}}(p)$ mit dem q-Vektor $\hat{\mathfrak{y}}(q)$ und man schreibt

$$\hat{\beta}(\hat{\mathfrak{x}}(p),\hat{\mathfrak{y}}(q)) =: \hat{\mathfrak{x}}(p)\wedge\hat{\mathfrak{y}}(q)$$

144. Für das äußere Produkt gelten folgende Regeln:

a) $(\hat{\mathfrak{x}}(p)\wedge\hat{\mathfrak{y}}(q))\wedge\hat{\mathfrak{z}}(r)=\hat{\mathfrak{x}}(p)\wedge(\hat{\mathfrak{y}}(q)\wedge\hat{\mathfrak{z}}(r))$

b) $(\hat{\mathfrak{x}}_1(p)+\hat{\mathfrak{x}}_2(p))\wedge\hat{\mathfrak{y}}(q)=\hat{\mathfrak{x}}_1(p)\wedge\hat{\mathfrak{y}}(q)+\hat{\mathfrak{x}}_2(p)\wedge\hat{\mathfrak{y}}(q)$

c) $\hat{\mathfrak{x}}(p)\wedge(\hat{\mathfrak{y}}_1(q)+\hat{\mathfrak{y}}_2(q))=\hat{\mathfrak{x}}(p)\wedge\hat{\mathfrak{y}}_1(q)+\hat{\mathfrak{x}}(p)\wedge\hat{\mathfrak{y}}_2(q)$

d) $(\lambda\hat{\mathfrak{x}}(p))\wedge\hat{\mathfrak{y}}(q)=\hat{\mathfrak{x}}(p)\wedge(\lambda\hat{\mathfrak{y}}(q))=\lambda(\hat{\mathfrak{x}}(p)\wedge\hat{\mathfrak{y}}(q))$

e) $\hat{\mathfrak{x}}(p)\wedge\hat{\mathfrak{y}}(q)=(-1)^{pq}\hat{\mathfrak{y}}(q)\wedge\hat{\mathfrak{x}}(p)$

f) p ungerade $\Rightarrow$ $\hat{\mathfrak{x}}(p)\wedge\hat{\mathfrak{x}}(p)=\hat{\mathfrak{o}}(2p)$

145. $\mathfrak{B}$ sei <u>endlichdimensional</u>. Dann gibt es einen <u>kanonischen Isomorphismus</u>

$$\theta: \bigwedge{}^p\mathfrak{B}^* \to (\bigwedge{}^p\mathfrak{B})^*.$$

Daher kann man $\bigwedge{}^p\mathfrak{B}^*$ mit dem Dualraum $(\bigwedge{}^p\mathfrak{B})^*$ von $\bigwedge{}^p\mathfrak{B}$ identifizieren und es gilt für $\hat{\mathfrak{x}}(p)\in\bigwedge{}^p\mathfrak{B}$, $\hat{\mathfrak{y}}^*(p)\in\bigwedge{}^p\mathfrak{B}^*$:

$$\langle\hat{\mathfrak{x}}(p),\hat{\mathfrak{y}}^*(p)\rangle:=p!\ \langle\hat{\mathfrak{x}}(p),\ \theta(\hat{\mathfrak{y}}^*(p))\rangle\ .$$

Für zerfallende p-Vektoren gilt

$$<\mathfrak{x}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{x}_p,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1\wedge\ldots\wedge\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p> \;=\; \det\|<\mathfrak{x}_i,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^j>\| = \begin{vmatrix} <\mathfrak{x}_1,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1>\ldots<\mathfrak{x}_1,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p> \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ <\mathfrak{x}_p,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1>\ldots<\mathfrak{x}_p,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p> \end{vmatrix}$$

Wegen des kanonischen Isomorphismus θ nennt man die p-Vektoren aus $\wedge^p\mathfrak{V}^*$ auch <u>p-Formen.</u>

146\. <u>Verallgemeinertes KRONECKER-Symbol</u>. Es gilt

$$\delta^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_p} = \operatorname{sgn}\pi$$

wenn die Indizes $j_1,\ldots,j_p$ aus den Indizes $i_1,\ldots,i_p$ durch die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_p \\ j_1 \ldots j_p \end{pmatrix}$$

hervorgehen.
In allen an denen Fällen gilt

$$\delta^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_p} = 0$$

147\. Die p-Vektoren $\hat{\mathfrak{b}}_{I(p)}$ und die p-Formen $\hat{\mathfrak{b}}^{*J(p)}$ sind Elemente der Basis bzw. Kobasis von

$\wedge^p\mathfrak{V}$ und $(\wedge^p\mathfrak{V})^* \cong \wedge^p\mathfrak{V}^*$, wenn $\mathfrak{V}=H[\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_n]$ und

$\mathfrak{V}^*=H[\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1,\ldots,\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^n]$ <u>endlichdimensional</u> sind. Es gilt:

$$<\hat{\mathfrak{b}}_{I(p)},\ \hat{\mathfrak{b}}^{*J(p)}> = \delta^{J(p)}_{I(p)}$$

148\. Die Algebra

$$\wedge\mathfrak{V} := \bigoplus_{p=0}^{\infty}(\wedge^p\mathfrak{V}) = K\oplus\mathfrak{V}\oplus\wedge^2\mathfrak{V}\oplus\wedge^3\mathfrak{V}\oplus\ldots$$

heißt <u>äußere Algebra</u> über $\mathfrak{V}$.

Für den Dualraum der äußeren Algebra $\wedge\mathfrak{V}$ gilt (vgl.13.a.)

$$(\wedge\mathfrak{V})^* \cong \mathfrak{P}[(\wedge^p\mathfrak{V})^*,\ p = 0, 1,2,\ldots]$$

Ist $\mathfrak{V}$ <u>endlichdimensional</u> ($\dim\mathfrak{V} = n$), so gilt

$$\dim(\wedge\mathfrak{V}) = 2^n.$$

Für den Dualraum gilt im <u>endlichdimensionalen</u> Fall

$$(\wedge\mathfrak{V})^* \cong \bigoplus_{p=0}^{n}(\wedge^p\mathfrak{V})^* \cong \bigoplus_{p=0}^{n}(\wedge^p\mathfrak{V}^*) = \wedge\mathfrak{V}^*$$

149. $\wedge\mathfrak{V}$ und $\wedge\mathfrak{V}'$ seien zwei äußere Algebren über $\mathfrak{V}$ bzw. $\mathfrak{V}'$. Eine lineare Abbildung

$$\varphi: \wedge\mathfrak{V} \to \wedge\mathfrak{V}'$$

heißt <u>Darstellung</u> von $\wedge\mathfrak{V}$ in $\wedge\mathfrak{V}'$, wenn für alle

$\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{y}} \in \wedge\mathfrak{V}$ gilt

$$\varphi(\hat{\mathfrak{x}}\wedge\hat{\mathfrak{y}}) = \varphi(\hat{\mathfrak{x}})\wedge\varphi(\hat{\mathfrak{y}}).$$

150. Es sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V},\mathfrak{V}')$. Dann gibt es <u>genau eine</u> Darstellung

$$f^\wedge: \wedge\mathfrak{V} \to \wedge\mathfrak{V}'$$

$f^\wedge(\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{x})$ für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{V}$.

151. <u>Geometrische Anwendung</u>: Es seien $\mathfrak{U}_1 = H[\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_r]$, $\mathfrak{U}_2 = H[\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_s]$ Unterräume von $\mathfrak{V}$. Dann gilt

$$\mathfrak{U}_1\cap\mathfrak{U}_2 = \{\mathfrak{o}\} \Leftrightarrow (\mathfrak{a}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{a}_r)\wedge(\mathfrak{b}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{b}_s) \neq \hat{\mathfrak{o}}(r+s)$$

152. Es seien $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_r$ sowie $\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_r$ l.u. Vektoren aus $\mathfrak{V}$. Dann gilt:
Die r-Vektoren $\mathfrak{a}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{a}_r$ sowie $\mathfrak{b}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{b}_r$ sind <u>genau dann</u> l.a., wenn gilt $H[\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_r] = H[\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_r]$.

153. Es seien $\wedge\mathfrak{V}$ und $\wedge\mathfrak{V}^*$ die äußeren Algebren des <u>endlichdimensionalen</u> Vektorraumes $\mathfrak{V}$ und seines Dualraumes $\mathfrak{V}^*$.

Ferner sei $\hat{\mathfrak{x}} = \sum_{r=0}^{p} \hat{\mathfrak{x}}(r) \in \wedge\mathfrak{V}$, $\hat{\mathfrak{y}}^* = \sum_{r=0}^{p} \hat{\mathfrak{y}}^*(r) \in \wedge\mathfrak{V}^*$.

Dann gilt

$$< \hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{y}}^* > := \sum_{r=0}^{p} < \hat{\mathfrak{x}}(r), \hat{\mathfrak{y}}^*(r) > ,$$

wobei die letzte Summe gemäß 145. zu bilden ist.

<u>Duale innere Produkte</u>

Im folgenden ist $\mathfrak{V}$ stets endlichdimensional und $K=\mathbb{C}$ bzw. $K=\mathbb{R}$

154. Sei $\hat{\mathfrak{x}}^* \in \wedge\mathfrak{V}^*$ <u>fest</u> gewählt. Dann wird durch $f^D(\hat{\mathfrak{y}}^*) := \hat{\mathfrak{x}}^* \wedge \hat{\mathfrak{y}}^*$ ein Endomorphismus f^D von $\wedge\mathfrak{V}^*$ definiert. Ihm entspricht der duale Endomorphismus f von $\wedge\mathfrak{V}$, für den gilt

$$<f(\hat{\mathfrak{x}}), \hat{\mathfrak{y}}^*> = <\hat{\mathfrak{x}}, f^D(\hat{\mathfrak{y}}^*)> = <\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{x}}^* \wedge \hat{\mathfrak{y}}^*> \quad (\hat{\mathfrak{x}} \in \wedge\mathfrak{V}, \hat{\mathfrak{y}}^* \in \wedge\mathfrak{V}^*).$$

Das (außer von $\hat{\mathfrak{x}}$ auch von dem festgehaltenen Element $\hat{\mathfrak{x}}^*$ abhängige) Bild $f(\hat{\mathfrak{x}}) \in \wedge\mathfrak{V}$ bezeichnet man mit $\hat{\mathfrak{x}} \llcorner \hat{\mathfrak{x}}^* \in \wedge\mathfrak{V}$ und nennt es das <u>rechtsseitige duale Produkt</u> der Elemente $\hat{\mathfrak{x}}$ und $\hat{\mathfrak{x}}^*$. Es gilt also

$$< \hat{\mathfrak{x}} \llcorner \hat{\mathfrak{x}}^*, \hat{\mathfrak{y}}^*> = <\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{x}}^* \wedge \hat{\mathfrak{y}}^*> \quad \text{für alle } \hat{\mathfrak{y}}^* \in \mathfrak{V}^*.$$

Analog definiert man ein <u>linksseitiges duales Produkt</u> $\hat{\mathfrak{x}} \lrcorner \hat{\mathfrak{x}}^* \in \wedge\mathfrak{V}^*$:

$$<\hat{\mathfrak{y}}, \hat{\mathfrak{x}} \lrcorner \hat{\mathfrak{x}}^*> = <\hat{\mathfrak{y}} \wedge \hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{x}}^*> \quad \text{für alle } \hat{\mathfrak{y}} \in \wedge\mathfrak{V}.$$

Dadurch wird dem Element $\hat{\mathfrak{x}}^* \in \wedge\mathfrak{V}^*$ bei festgehaltenem $\hat{\mathfrak{x}} \in \wedge\mathfrak{V}$ wieder ein Element von $\wedge\mathfrak{V}^*$ zugeordnet.

155. Für die rechts-bzw. linksseitigen dualen Produkte gelten folgende Rechenregeln:

a) $(\hat{\mathfrak{x}}+\hat{\mathfrak{y}})\llcorner\hat{\mathfrak{x}}^* = (\hat{\mathfrak{x}}\llcorner\hat{\mathfrak{x}}^*)+(\hat{\mathfrak{y}}\llcorner\hat{\mathfrak{x}}^*)$

b) $\hat{\mathfrak{x}}\llcorner(\hat{\mathfrak{x}}^*+\hat{\mathfrak{y}}^*)=(\hat{\mathfrak{x}}\llcorner\hat{\mathfrak{x}}^*)+(\hat{\mathfrak{x}}\llcorner\hat{\mathfrak{y}}^*)$

c) $(\lambda\hat{\mathfrak{x}})\llcorner\hat{\mathfrak{x}}^* = \hat{\mathfrak{x}}\llcorner(\lambda\hat{\mathfrak{x}}^*) = \lambda(\hat{\mathfrak{x}}\llcorner\hat{\mathfrak{x}}^*)$

d) $\hat{\mathfrak{x}}\llcorner(\hat{\mathfrak{x}}^*\wedge\hat{\mathfrak{y}}^*)=(\hat{\mathfrak{x}}\llcorner\hat{\mathfrak{x}}^*)\llcorner\hat{\mathfrak{y}}^*$

a*) $(\hat{\mathfrak{x}}+\hat{\mathfrak{y}})\lrcorner\hat{\mathfrak{x}}^* = \hat{\mathfrak{x}}\lrcorner\hat{\mathfrak{x}}^*+\hat{\mathfrak{y}}\lrcorner\hat{\mathfrak{x}}^*$

b*) $\hat{\mathfrak{x}}\lrcorner(\hat{\mathfrak{x}}^*+\hat{\mathfrak{y}}^*) = \hat{\mathfrak{x}}\lrcorner\hat{\mathfrak{x}}^*+\hat{\mathfrak{x}}\lrcorner\hat{\mathfrak{y}}^*$

c*) $(\lambda\hat{\mathfrak{x}})\lrcorner\hat{\mathfrak{x}}^*=\hat{\mathfrak{x}}\lrcorner(\lambda\hat{\mathfrak{x}}^*)= \lambda(\hat{\mathfrak{x}}\lrcorner\hat{\mathfrak{x}}^*)$

d*) $(\hat{\mathfrak{x}}\wedge\hat{\mathfrak{y}})\lrcorner\hat{\mathfrak{x}}^*=\hat{\mathfrak{x}}\lrcorner(\hat{\mathfrak{y}}\lrcorner\hat{\mathfrak{x}}^*)$

156. Es sei $\hat{\mathfrak{x}}(p)$ ein p-Vektor und $\hat{\mathfrak{x}}^*(q)$ eine q-Form. Dann gilt

a) $p < q \Rightarrow \hat{\mathfrak{x}}(p)\llcorner\hat{\mathfrak{x}}^*(q)$ ist der Nullvektor $\hat{\mathfrak{o}}$

$p > q \Rightarrow \hat{\mathfrak{x}}(p)\llcorner\hat{\mathfrak{x}}^*(q)$ ist (p-q)-Vektor

b) $p > q \Rightarrow \hat{\mathfrak{x}}(p)\lrcorner\hat{\mathfrak{x}}^*(q)$ ist die Nullform $\hat{\mathfrak{o}}^*$

$p < q \Rightarrow \hat{\mathfrak{x}}(p)\lrcorner\hat{\mathfrak{x}}^*(q)$ ist (q-p)-Form

c) $p=q \Rightarrow \hat{\mathfrak{x}}(p)\llcorner\hat{\mathfrak{x}}^*(q) = \hat{\mathfrak{x}}(p)\lrcorner\hat{\mathfrak{x}}^*(q) = <\hat{\mathfrak{x}}(p),\hat{\mathfrak{x}}^*(q)>$ ist Skalar

157. a) Es sei p=q+r. Dann gilt (vgl.139)

$$\hat{\mathfrak{b}}_{I(p)}\llcorner\hat{\mathfrak{b}}^{*J(q)} = \delta^{J(q),K(r)}_{I(p)}\cdot\hat{\mathfrak{b}}_{K(r)}$$

b) Es sei q=p+r. Dann gilt

$$\hat{\mathfrak{b}}_{I(p)}\lrcorner\hat{\mathfrak{b}}^{*J(q)} = \delta^{J(q)}_{K(r),I(p)}\cdot\hat{\mathfrak{b}}^{*K(r)}$$

Ist allgemeiner

$$\hat{\mathfrak{x}}(p) = \lambda^{I(p)}\, \hat{\mathfrak{b}}_{I(p)} \in \wedge^{p}\mathfrak{V}$$

$$\hat{\mathfrak{x}}^*(q) = \mu_{J(q)}\, \hat{\mathfrak{b}}^{*J(q)} \in \wedge^{q}\mathfrak{V}^*$$

so gilt

c) $p=q+r \ldots \hat{\mathfrak{x}}(p) \llcorner \hat{\mathfrak{x}}^*(q) = \lambda^{I(p)} \mu_{J(q)}\, \delta^{J(q),K(r)}_{I(p)}\, \hat{\mathfrak{b}}_{K(r)}$

d) $q=p+r \ldots \mathfrak{x}(p) \lrcorner \mathfrak{x}^*(q) = \lambda^{I(p)} \mu_{J(q)}\, \delta^{J(q)}_{K(r),I(p)}\, \hat{\mathfrak{b}}^{*K(r)}$

158. Definition: Es sei dim $\mathfrak{V}=n$, ferner sei

$$\hat{\mathfrak{n}} := \mathfrak{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{b}_n \in \wedge^n \mathfrak{V}$$

ein n-Vektor und

$$\hat{\mathfrak{n}}^* := \mathfrak{b}^{*1} \wedge \ldots \wedge \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{n} \in \wedge^n \mathfrak{V}^*$$

eine n-Form.

Da dim $\wedge^n\mathfrak{V}$ = dim $\wedge^n\mathfrak{V}^*$ = 1 (vgl.137.), kann jeder andere n-Vektor bzw. jede andere n-Form als Vielfaches von $\hat{\mathfrak{n}}$ bzw. $\hat{\mathfrak{n}}^*$ dargestellt werden.

Es gilt $< \hat{\mathfrak{n}}, \hat{\mathfrak{n}}^* > = 1$ (wegen 147)

Dann heißt der (n-p)-Vektor

$$\text{erg}^*\ \hat{\mathfrak{x}}^*(p) := \hat{\mathfrak{n}} \llcorner \hat{\mathfrak{x}}^*(p)$$

die (duale) Ergänzung zu $\hat{\mathfrak{x}}^*(p)$ und die (n-p)-Form

$$\text{erg}\ \hat{\mathfrak{x}}(p) := \hat{\mathfrak{x}}(p) \lrcorner \hat{\mathfrak{n}}^*$$

die (duale) Ergänzung zu $\hat{\mathfrak{x}}(p)$

159. $\text{erg}\ \hat{\mathfrak{b}}_{I(p)} = \delta^{N(n)}_{K(r),I(p)}\ \hat{\mathfrak{b}}^{*K(r)}$

$r = n - p$

$\text{erg}^*\ \hat{\mathfrak{b}}^{*I(p)} = \delta^{I(p),K(r)}_{N(n)}\ \hat{\mathfrak{b}}_{K(r)}$

Allgemeiner gilt für $\hat{\mathfrak{x}}(p) = \lambda^{I(p)}\hat{\mathfrak{b}}_{I(p)}$ bzw.

$\hat{\mathfrak{x}}^*(p) = \lambda_{I(p)}\hat{\mathfrak{b}}_*^{I(p)}$:

$$\text{erg } \hat{\mathfrak{x}}(p) = \lambda^{I(p)} \delta^{N(n)}_{K(r),I(p)} \hat{\mathfrak{b}}_*^{K(r)}$$

$$r = n - p$$

$$\text{erg}^* \; \hat{\mathfrak{x}}^*(p) = \lambda_{I(p)} \delta^{I(p),K(r)}_{N(n)} \hat{\mathfrak{b}}_{K(r)}$$

160. Die Abbildung

$$\text{erg} : \Lambda^p \mathfrak{V} \to \Lambda^{n-p} \mathfrak{V}^*$$
$$\hat{\mathfrak{x}}(p) \mapsto \hat{\mathfrak{x}}(p) \lrcorner \hat{\mathfrak{n}}^*$$

ist ein <u>Isomorphismus</u> und es gilt

$$\text{erg}^{-1} : \Lambda^{n-p} \mathfrak{V}^* \to \Lambda^p \mathfrak{V}$$
$$\hat{\mathfrak{x}}^*(n-p) \mapsto \hat{\mathfrak{n}} \llcorner \hat{\mathfrak{x}}^*(n-p)$$

daher gilt weiter

$$\text{erg}^* = \text{erg}^{-1} \Leftrightarrow \text{erg}^* \circ \text{erg} = id_{\Lambda^p \mathfrak{V}}$$

und

$$\hat{\mathfrak{n}} \llcorner (\hat{\mathfrak{x}}(p) \lrcorner \hat{\mathfrak{n}}^*) = \hat{\mathfrak{x}}(p).$$

Analog gilt:

$$\text{erg}^* : \Lambda^p \mathfrak{V}^* \to \Lambda^{n-p} \mathfrak{V}$$
$$\hat{\mathfrak{x}}^*(p) \mapsto \hat{\mathfrak{n}} \llcorner \hat{\mathfrak{x}}^*(p)$$

$$\text{erg}^{*-1} : \Lambda^{n-p} \mathfrak{V} \to \Lambda^p \mathfrak{V}^*$$
$$\hat{\mathfrak{x}}(n-p) \mapsto \hat{\mathfrak{x}}(n-p) \lrcorner \hat{\mathfrak{n}}^*$$

$$\text{erg} = (\text{erg}^*)^{-1} \Leftrightarrow \text{erg} \circ \text{erg}^* = id_{\Lambda^p \mathfrak{V}^*}$$

$$(\hat{\mathfrak{n}} \llcorner \hat{\mathfrak{x}}^*(p)) \lrcorner \hat{\mathfrak{n}}^* = \hat{\mathfrak{x}}^*(p)$$

161. a) $\hat{\mathfrak{x}}(p) \llcorner \hat{\mathfrak{x}}^*(q) = \mathrm{erg}^*(\mathrm{erg}\, \hat{\mathfrak{x}}(p) \wedge \hat{\mathfrak{x}}^*(q))$ $\qquad p \geq q$

b) $\hat{\mathfrak{x}}(p) \lrcorner \hat{\mathfrak{x}}^*(q) = \mathrm{erg}(\hat{\mathfrak{x}}(p) \wedge \mathrm{erg}^*\, \hat{\mathfrak{x}}^*(q))$ $\qquad p \leq q$

c) $\hat{\mathfrak{x}}(p) \wedge \hat{\mathfrak{x}}(q) = \mathrm{erg}^*(\hat{\mathfrak{x}}(p) \lrcorner \mathrm{erg}\, \hat{\mathfrak{x}}(q))$ $\qquad p+q \leq n$

d) $\hat{\mathfrak{x}}^*(p) \wedge \hat{\mathfrak{x}}^*(q) = \mathrm{erg}(\mathrm{erg}^* \hat{\mathfrak{x}}^*(p) \llcorner \hat{\mathfrak{x}}^*(q))$ $\qquad p+q \leq n$

162. Ein p-Vektor zerfällt genau dann, wenn seine Ergänzung zerfällt.

163. Ist $\mathfrak{U} = H[\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_p] \subset \mathfrak{R} = H[\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_p, \mathfrak{x}_{p+i}, \dots, \mathfrak{x}_n]$, so ist $\mathrm{erg}(\mathfrak{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{x}_p) = \lambda \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{p+1} \wedge \dots \wedge \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{n}$, d.h. der von den Faktoren der zerfallenden (n-p)-Form $\mathrm{erg}(\mathfrak{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{x}_p)$ aufgespannte Unterraum $\mathfrak{U}^o = H[\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{p+1}, \dots, \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{n}]$ ist der <u>Annullatorraum</u> von $\mathfrak{U}$.

164. Da jede 1-Form trivialerweise zerfällt, ist jeder (n-1)-Vektor zerfallend.

165. Es sei $\hat{\mathfrak{x}}(p)$ ein vom Nullvektor verschiedener p-Vektor und $\mathfrak{U}$ der von allen Vektoren $\mathfrak{y} \in \mathfrak{R}$ mit $\hat{\mathfrak{x}}(p) \wedge \mathfrak{y} = \hat{\mathfrak{o}}(p+1)$ aufgespannte Unterraum von $\mathfrak{R}$.

Dann gilt:

a) $\dim \mathfrak{U} \leq p$

b) $\mathfrak{x}(p)$ zerfällt genau dann, wenn $\dim \mathfrak{U} = p$.
Ist $\mathfrak{U} = H[\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_p]$, so gilt $\hat{\mathfrak{x}}(p) = \lambda \mathfrak{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_p$

166. Es sei $\hat{\mathfrak{x}}(p)$ ein zerfallender p-Vektor. Läßt $\hat{\mathfrak{x}}(p)$ die beiden Darstellungen

$\hat{\mathfrak{x}}(p) = \mathfrak{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{x}_p = \mathfrak{y}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{y}_p$

zu, so gilt

$\mathfrak{y}_i = a_i^k\, \mathfrak{x}_k$ mit $\det \|a_i^k\| = 1$.

p-Vektoren über metrischen Vektorräumen

Alle Vektorräume seien wieder endlichdimensional und $K = \mathbb{C}$ bzw. $K = \mathbb{R}$

167. Nach 90. wird bei vorgegebener nichtausgearteter symmetrischer Bilinearform β für je zwei Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{V}$ das Skalarprodukt $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle = \langle \mathfrak{x}, f(\mathfrak{y}) \rangle = \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ definiert. Mit dessen Hilfe definieren wir das (kommutative) Skalarprodukt zweier zerfallenden p-Vektoren (vgl. 145):

$$\langle \mathfrak{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{x}_p, \mathfrak{y}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{y}_p \rangle := \langle \mathfrak{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{x}_p, f(\mathfrak{y}_1) \wedge \ldots \wedge f(\mathfrak{y}_p) \rangle =$$

$$= \det \| \langle \mathfrak{x}_i, f(\mathfrak{y}_j) \rangle \| = \det \| \langle \mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_j \rangle \| = \begin{vmatrix} \langle \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_p \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathfrak{x}_p, \mathfrak{y}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathfrak{x}_p, \mathfrak{y}_p \rangle \end{vmatrix}.$$

Die Verallgemeinerung auf beliebige p-Vektoren liegt auf der Hand.

168. Ist $\mathfrak{V}$ speziell unitär (euklidisch), so ist $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle = \mathfrak{x}\mathfrak{y}$ das unitäre (euklidische) Skalarprodukt. Ist speziell $\mathfrak{x}_i = \mathfrak{y}_i$, so stellt

$$(\mathfrak{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{x}_p)(\mathfrak{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{x}_p) = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_1 & \cdots & \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_p \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{x}_p \mathfrak{x}_1 & \cdots & \mathfrak{x}_p \mathfrak{x}_p \end{vmatrix}$$

als Wert der GRAM'schen Determinante das Quadrat des Volumens des von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p$ in $\mathfrak{V}$ aufgespannten <u>Parallelotops</u> dar.

169. Nach 140. bilden die Vektoren $\hat{\mathfrak{b}}_{I(p)}$ (vgl. 139) eine Basis von $\wedge^p \mathfrak{V}$. Geht man vermöge $\mathfrak{b}^j = \beta^{jk} \mathfrak{b}_k$,

$\mathfrak{b}_i = \beta_{ij}\mathfrak{b}^j$ (86.) zur reziproken Basis von $\mathfrak{B}$ über, so stellen die p-Vektoren

$$\hat{\mathfrak{b}}^{J(p)} := \mathfrak{b}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{b}^{j_p} \qquad 1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq n$$

die zu den $\hat{\mathfrak{b}}_{I(p)}$ reziproke Basis von $\wedge^p \mathfrak{B}$ dar.

Für die Umrechnung gilt

$$\hat{\mathfrak{b}}^{J(p)} = \Delta^{J(p),K(p)} \hat{\mathfrak{b}}_{K(p)}, \quad \hat{\mathfrak{b}}_{I(p)} = \Delta_{I(p),J(p)} \hat{\mathfrak{b}}^{J(p)}$$

Dabei bedeutet:

$$\Delta^{J(p),K(p)} := \begin{vmatrix} \beta^{j_1 k_1} & \ldots & \beta^{j_1 k_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta^{j_p k_1} & \ldots & \beta^{j_p k_p} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq n \\ \\ 1 \leq k_1 < \ldots < k_p \leq n \end{matrix}$$

$$\Delta_{I(p),J(p)} := \begin{vmatrix} \beta_{i_1 j_1} & \ldots & \beta_{i_1 j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{i_p j_1} & \ldots & \beta_{i_p j_p} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n \\ \\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq n \end{matrix}$$

170. $\langle \hat{\mathfrak{b}}_{I(p)}, \hat{\mathfrak{b}}_{K(p)} \rangle = \Delta_{I(p),K(p)}$

$$\langle \hat{\mathfrak{b}}^{I(p)}, \hat{\mathfrak{b}}^{K(p)} \rangle = \Delta^{I(p),K(p)}$$

$$\langle \hat{\mathfrak{b}}_{I(p)}, \hat{\mathfrak{b}}^{K(p)} \rangle = \delta_{I(p)}^{K(p)}$$

$$\langle \hat{\mathfrak{b}}^{I(p)}, \hat{\mathfrak{b}}_{K(p)} \rangle = \delta_{K(p)}^{I(p)}$$

171. Sind $\hat{\mathfrak{x}}(p) = \lambda^{I(p)}\hat{\mathfrak{b}}_{I(p)} = \lambda_{I(p)}\hat{\mathfrak{b}}^{I(p)}$ und

$\hat{\mathfrak{y}}(p) = \mu^{J(p)}\hat{\mathfrak{b}}_{J(p)} = \mu_{J(p)}\hat{\mathfrak{b}}^{J(p)}$ zwei beliebige p-Vektoren,

so kann ihr Skalarprodukt 167. durch Hinauf-bzw. Herunterziehen der Indizes I(p) bzw. J(p) vermöge 169. folgende Gestalt annehmen:

$$\langle\hat{\mathfrak{x}}(p), \hat{\mathfrak{y}}(p)\rangle = \lambda^{I(p)}\mu^{J(p)}\Delta_{I(p),J(p)} = \lambda^{I(p)}\mu_{I(p)} =$$
$$= \lambda_{I(p)}\mu^{I(p)} = \lambda_{I(p)}\mu_{J(p)}\Delta^{I(p),J(p)}.$$

<u>Rechtsseitiges bzw. linksseitiges inneres Produkt</u>

$\mathfrak{V}$ ist endlichdimensional, $K=\mathbb{C}(\mathbb{R})$

172. Identifiziert man mit Hilfe des Isomorphismus $f: \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}^*$ (vgl. 90) die Vektoren $\mathfrak{x} \in \mathfrak{V}$ und $f(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{V}^*$, so kann man aus den dualen Produkten 154. mit Hilfe von 141. je zwei Vektoren $\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{y}} \in \mathfrak{V}$ einen dritten Vektor $\in \bigwedge \mathfrak{V}$ als rechts-bzw. linksseitiges inneres Produkt zuordnen:

<u>Rechtsseitiges inneres Produkt</u>

$$\hat{\mathfrak{x}}(p) \llcorner \hat{\mathfrak{y}}(q) := \hat{\mathfrak{x}}(p) \llcorner \hat{f}^{q}(\hat{\mathfrak{y}}(q))$$

<u>Linksseitiges inneres Produkt</u>

$$\hat{\mathfrak{x}}(p) \lrcorner \hat{\mathfrak{y}}(q) := (\hat{f}^{q-p})^{-1}(\hat{\mathfrak{x}}(p) \lrcorner \hat{f}^{q}(\hat{\mathfrak{y}}(q)))$$

173. Rechtsseitiges inneres Produkt der Basisvektoren $(p=q+r)$

a) $\hat{\mathfrak{b}}_{I(p)} \llcorner \hat{\mathfrak{b}}_{J(q)} = \delta^{K(q),L(r)}_{I(p)} \Delta_{J(q),K(q)} \hat{\mathfrak{b}}_{L(r)}$

b) $\hat{\mathfrak{b}}_{I(p)} \llcorner \hat{\mathfrak{b}}^{J(q)} = \delta^{J(q),K(r)}_{I(p)} \hat{\mathfrak{b}}_{K(r)}$

c) $\hat{\mathfrak{b}}^{I(p)} \llcorner \hat{\mathfrak{b}}_{J(q)} = \delta^{I(p)}_{J(q),K(r)} \hat{\mathfrak{b}}^{K(r)}$

d) $\hat{\mathfrak{b}}^{I(p)} \llcorner \hat{\mathfrak{b}}^{J(q)} = \delta^{I(p)}_{K(q),L(r)} \Delta^{J(q),K(q)} \hat{\mathfrak{b}}^{L(r)}$

174. Für das rechtseitige innere Produkt eines p-Vektors und eines q-Vektors

$$\hat{\mathfrak{r}}(p) = \lambda^{I(p)} \hat{\mathfrak{b}}_{I(p)} = \lambda_{I(p)} \hat{\mathfrak{b}}^{I(p)}$$

$$p = q+r$$

$$\hat{\mathfrak{y}}(q) = \mu^{J(q)} \hat{\mathfrak{b}}_{J(q)} = \mu_{J(q)} \hat{\mathfrak{b}}^{J(q)}$$

erhält man durch Anheben bzw. Senken der Indizes

$$\hat{\mathfrak{r}}(p) \llcorner \hat{\mathfrak{y}}(q) = \lambda^{I(p)} \mu^{J(q)} \Delta_{J(q),K(q)} \delta^{K(q),L(r)}_{I(p)} \hat{\mathfrak{b}}_{L(r)} =$$

$$= \lambda^{I(p)} \mu_{J(q)} \delta^{J(q),K(r)}_{I(p)} \hat{\mathfrak{b}}_{K(r)} =$$

$$= \lambda_{I(p)} \mu^{J(q)} \delta^{I(p)}_{J(q),K(r)} \hat{\mathfrak{b}}^{K(r)} =$$

$$= \lambda_{I(p)} \mu_{J(q)} \Delta^{J(q),K(q)} \delta^{I(p)}_{K(q),L(r)} \hat{\mathfrak{b}}^{L(r)}$$

175. Linksseitiges inneres Produkt der Basisvektoren (q=p+r)

a) $\hat{\mathfrak{b}}_{I(p)} \lrcorner \hat{\mathfrak{b}}_{J(q)} = \Delta_{J(q),K(q)} \delta^{K(q)}_{L(r),I(p)} \hat{\mathfrak{b}}^{L(r)}$

b) $\hat{\mathfrak{b}}_{I(p)} \lrcorner \hat{\mathfrak{b}}^{J(q)} = \delta^{J(q)}_{L(r),I(p)} \hat{\mathfrak{b}}^{L(r)}$

c) $\hat{\mathfrak{b}}^{I(p)} \lrcorner \hat{\mathfrak{b}}_{J(q)} = \delta^{K(r),I(p)}_{J(q)} \hat{\mathfrak{b}}_{K(r)}$

d) $\hat{\mathfrak{b}}^{I(p)} \lrcorner \hat{\mathfrak{b}}^{J(q)} = \Delta^{J(q),K(q)} \delta^{L(r),I(p)}_{K(q)} \hat{\mathfrak{b}}_{L(r)}$

176. Für das linksseitige innere Produkt eines p-Vektors und eines q-Vektors 172. erhält man durch Anheben bzw. Senken der Indizes (q=p+r)

$$\hat{\mathfrak{x}}(p) \lrcorner \hat{\mathfrak{y}}(q) = \lambda^{I(p)} \mu^{J(q)} \Delta_{J(q),K(q)} \delta^{K(q)}_{L(r),I(p)} \hat{\mathfrak{b}}^{L(r)} =$$

$$= \lambda^{I(p)} \mu_{J(q)} \delta^{J(p)}_{L(r),I(p)} \hat{\mathfrak{b}}^{L(r)} =$$

$$= \lambda_{I(p)} \mu^{J(q)} \delta^{K(r),I(p)}_{J(q)} \hat{\mathfrak{b}}_{K(r)} =$$

$$= \lambda_{I(p)} \mu_{J(q)} \Delta^{J(q),K(q)} \delta^{L(r),I(p)}_{K(q)} \hat{\mathfrak{b}}_{L(r)}$$

177. $\hat{\mathfrak{x}}(p) \llcorner \hat{\mathfrak{y}}(q) = (-1)^{qr} \hat{\mathfrak{y}}(q) \lrcorner \hat{\mathfrak{x}}(p)$ (p=q+r)

178. Die Ergänzung eines p-Vektors ist ein (n-p)-Vektor.
Es gilt (n=p+r)

$$*\hat{\mathfrak{x}}(p) := \text{erg } \hat{\mathfrak{x}}(p) := \hat{\mathfrak{x}}(p) \lrcorner \hat{\mathfrak{n}} = \lambda^{I(p)} \delta^{N(n)}_{K(r),I(p)} \hat{\mathfrak{b}}^{K(r)} =$$

$$= \lambda_{I(p)} \delta^{K(r),I(p)}_{N(n)} \hat{\mathfrak{b}}_{K(r)}.$$

Der Endomorphismus "$*$" von $\wedge\mathfrak{B}$ heißt <u>GRASSMANNsche Ergänzung</u> von $\hat{\mathfrak{x}}(p)$.

179. Die GRASSMANNsche Ergänzung eines p-Vektors hängt von der Wahl der Basis ab. Im <u>euklidischen</u> Fall ist $\Delta > 0$ (vgl. 109). Der n-Vektor

$$\hat{\mathfrak{e}} := \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \cdot \hat{\mathfrak{n}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \hat{\mathfrak{b}}_{N(n)} = \sqrt{\Delta}\, \hat{\mathfrak{b}}^{N(n)}$$

ändert sich nicht bei Übergang zu einer gleich orientierten Basis. Man definiert dann

$$*\hat{\mathfrak{x}}(p) = \hat{\mathfrak{x}}(p) \lrcorner \hat{\mathfrak{e}} = \sqrt{\Delta}\, \lambda^{I(p)} \delta^{N(n)}_{K(r),I(p)} \hat{\mathfrak{b}}^{K(r)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \lambda_{I(p)} \delta^{K(r),I(p)}_{N(n)} \hat{\mathfrak{b}}_{K(r)} \qquad (n=p+r)$$

180. Es sei $\mathfrak{U} = H[\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_p] \subset \mathfrak{B} = H[\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_p,\mathfrak{b}_{p+1},\ldots,\mathfrak{b}_n]$.
Dann gilt

$$*(\mathfrak{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{b}_p) = (-1)^{p(n-p)} \sqrt{\Delta}\, \mathfrak{b}^{p+1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{b}^n$$

d.h.: Bildet man aus den Basisvektoren des p-dimensionalen Unterraumes $\mathfrak{U}$ einen p-Vektor, so spannen die n-p Faktoren seiner GRASSMANNschen Ergänzung dessen orthogonales Komplement $\mathfrak{U}^\perp$ auf.

181. Der <u>euklidische</u> Vektorraum $\mathfrak{B}$ habe die Dimension n=3.
Dann gilt für $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{B}$:

$$*(\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{y}) = \mathfrak{x} \times \mathfrak{y}$$

SYMMETRISCHE TENSORALGEBRA

Die Dimension von $\mathfrak{V}$ sei beliebig ($n \leq \infty$), $K=\mathbb{C}$ oder $K=\mathbb{R}$

182. Definitionen: Ein Vektorraum $\mathfrak{W}$ heißt p-te symmetrische Potenz des Vektorraumes $\mathfrak{V}$, wenn eine p-symmetrische Abbildung $\sigma\colon \mathop{X}\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ existiert mit folgenden Eigenschaften:

S1. $\mathfrak{W} = H(\sigma(\mathop{X}\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{V}))$

S2. Zu jedem beliebigen Vektorraum $\mathfrak{X}$ und jeder beliebigen p-symmetrischen Abbildung $\mu\colon \mathop{X}\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{V} \to \mathfrak{X}$ gibt es eine lineare Abbildung $f\colon \mathfrak{W} \to \mathfrak{X}$, sodaß gilt $\mu = f\circ\sigma$. Man bezeichnet auch die lineare Abbildung f als symmetrisch.

Man schreibt dann:

$$\mathfrak{W} = \bigvee{}^{p}\mathfrak{V} = \mathfrak{V}\vee\ldots\vee\mathfrak{V}$$

und setzt per definitionem: $\bigvee{}^{0}\mathfrak{V} = K$, $\bigvee{}^{1}\mathfrak{V} = \mathfrak{V}$.
σ heißt die zur p-ten symmetrischen Potenz von $\mathfrak{V}$ gehörige kanonische Abbildung. Die Elemente von $\bigvee{}^{p}\mathfrak{V}$ heißen p-symmetrische Vektoren. Die symmetrischen Vektoren der Form $\sigma(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_p)$ nennt man zerfallend und schreibt

$$\sigma(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_p) = \mathfrak{x}_1\vee\ldots\vee\mathfrak{x}_p.$$

Das allgemeine Element von $\bigvee{}^{p}\mathfrak{V}$ hat die Bauart (alle Summen endlich):

$$\sum_{i,\ldots,i_p} \lambda^{i_1\ldots i_p}\, \mathfrak{x}_{i_1}\vee\ldots\vee\mathfrak{x}_{i_p}.$$

183. Aus der Linearität von σ folgt:

$$\mathfrak{x}_1\vee\ldots\vee(\mathfrak{x}_i+\mathfrak{y}_i)\vee\ldots\vee\mathfrak{x}_p = \mathfrak{x}_1\vee\ldots\vee\mathfrak{x}_i\vee\ldots\vee\mathfrak{x}_p + \mathfrak{x}_1\vee\ldots\vee\mathfrak{y}_i\vee\ldots\vee\mathfrak{x}_p$$

$$\mathfrak{x}_1\vee\ldots\vee(\lambda\mathfrak{x}_i)\vee\ldots\vee\mathfrak{x}_p = \lambda\cdot\mathfrak{x}_1\vee\ldots\vee\mathfrak{x}_i\vee\ldots\vee\mathfrak{x}_p.$$

Aus der Symmetrie von σ folgt:

$$\mathfrak{x}_{\pi(1)} \vee \ldots \vee \mathfrak{x}_{\pi(p)} = \mathfrak{x}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{x}_p$$

184. Die Bedingungen S1. und S2. von 182. sind äquivalent der einzigen Bedingung

S. Ist $\mu: \overset{p}{\underset{i=1}{X}} \mathfrak{V} \to \mathfrak{X}$ eine <u>beliebige</u> p-symmetrische Abbildung in den <u>beliebig</u> gewählten Vektorraum $\mathfrak{X}$, so existiert <u>genau eine</u> lineare Abbildung $f: \mathfrak{W} \to \mathfrak{X}$ mit $\mu = f \circ \sigma$ (<u>Zerlegungseigenschaft</u>).

185. Es seien $\vee^p \mathfrak{V}$ und $\tilde{\vee}^p \mathfrak{V}$ zwei p-te symmetrische Potenzen über $\mathfrak{V}$. Dann existiert <u>genau ein Isomorphismus</u>

$$f: \vee^p \mathfrak{V} \to \tilde{\vee}^p \mathfrak{V}$$

$$\mathfrak{x}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{x}_p \mapsto \mathfrak{x}_1 \tilde{\vee} \ldots \tilde{\vee} \mathfrak{x}_p$$

sodaß gilt: $f \circ \sigma = \tilde{\sigma}$.

Die p-te symmetrische Potenz über $\mathfrak{V}$ ist also bis auf Isomorphismen eindeutig festgelegt.

186. <u>Hilfssatz</u>: Es sei $\mu: \overset{p}{\underset{i=1}{X}} \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ eine p-lineare Abbildung in den beliebigen Vektorraum $\mathfrak{W}$ und f die durch T2.(34.) bestimmte Abbildung $f: \otimes^p \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ mit $\mu = f \circ \tau . \mu$ ist genau dann <u>symmetrisch</u>, wenn $\mathfrak{M}^p \subset \operatorname{kn} f$ ist (vgl.111.)

187. <u>Existenz der p-ten symmetrischen Potenz.</u> $\otimes^p \mathfrak{V}$ sei die p-te Tensorpotenz über $\mathfrak{V}$ und σ die p-lineare Abbildung

$$\sigma: \overset{p}{\underset{i=1}{X}} \mathfrak{V} \to (\otimes^p \mathfrak{V})/\mathfrak{M}^p$$

$$(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p) \mapsto \sigma(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p) := \omega(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p).$$

Hier ist $\omega: \textcircled{X}^p\mathfrak{V} \to (\textcircled{X}^p\mathfrak{V})/\mathfrak{M}^p$ die natürliche Surjektion. Dann ist σ symmetrisch und erfüllt die Eigenschaften S1. und S2. von 182.
Daher ist

$$(\textcircled{X}^p\mathfrak{V})/\mathfrak{M}^p \cong \vee^p\mathfrak{V}$$

188. Die p-te symmetrische Potenz $\vee^p\mathfrak{V}$ ist auf kanonische Weise zur Menge $S(\textcircled{X}^p\mathfrak{V})$ der symmetrischen Tensoren von $\textcircled{X}^p\mathfrak{V}$ isomorph.
Für diesen Isomorphismus Ψ gilt

$$\Psi: \vee^p\mathfrak{V} \to S(\textcircled{X}^p\mathfrak{V})$$

$$\mathfrak{x}_1\vee\ldots\vee\mathfrak{x}_p \mapsto S(\mathfrak{x}_1\otimes\ldots\otimes\mathfrak{x}_p).$$

Demnach kann man die p-symmetrischen Vektoren mit den symmetrischen Tensoren identifizieren.

189. Ist $\mathfrak{V} = H[\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_n]$ <u>endlichdimensional</u>, so gilt

$$\dim \vee^p\mathfrak{V} = \binom{n+p-1}{p}$$

190. Es sei $\mathfrak{V} = H[\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_n]$ <u>endlichdimensional</u> und

$$\mathfrak{x}_k = x^{j_k}\mathfrak{b}_{j_k} \quad k=1,\ldots,p;\ j_k=1,\ldots,n$$

Dann gilt

$$\mathfrak{x}_1\vee\ldots\vee\mathfrak{x}_n = \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_p\le n} \operatorname{perm}\left\|\begin{matrix} x_1^{i_1} & \ldots & x_1^{i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_p^{i_1} & \ldots & x_p^{i_p}\end{matrix}\right\| \mathfrak{b}_{i_1}\vee\ldots\vee\mathfrak{b}_{i_p}$$

Daher stellen die p-symmetrischen Vektoren

$\mathfrak{b}_{i_1}\vee\ldots\vee\mathfrak{b}_{i_p}$ $(1\le i_1\le\ldots\le i_p\le n)$ wegen 189. eine Basis von

$\vee^p\mathfrak{V}$ dar.

191. Es seien $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ zwei beliebige Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{W})$. Dann gibt es <u>genau eine</u> lineare Abbildung

$$\overset{\vee}{f}{}^p : \vee^p \mathfrak{V} \to \vee^p \mathfrak{W}$$

$$\mathfrak{x}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{x}_p \mapsto f(\mathfrak{x}_1) \vee \ldots \vee f(\mathfrak{x}_p)$$

$\overset{\vee}{f}{}^p$ heißt die p-te <u>symmetrische Potenz</u> von f.

Per definitionem sei $\overset{\vee}{f}{}^o = id_K$

192. Es gibt genau eine bilineare Abbildung

$$\overset{\vee}{\beta} : \vee^p \mathfrak{V} \times \vee^q \mathfrak{V} \to \vee^{p+q} \mathfrak{V}$$

mit

$$\overset{\vee}{\beta}(\mathfrak{x}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{x}_p, \mathfrak{y}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{y}_q) = \mathfrak{x}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{x}_p \vee \mathfrak{y}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{y}_q$$

Man nennt $\overset{\vee}{\beta}$ das <u>symmetrische Produkt</u> des p-symmetrischen Vektors $\overset{\vee}{\mathfrak{x}}(p)$ mit dem q-symmetrischen Vektor $\overset{\vee}{\mathfrak{y}}(q)$ und schreibt

$$\overset{\vee}{\beta}(\overset{\vee}{\mathfrak{x}}(p), \overset{\vee}{\mathfrak{y}}(q)) =: \overset{\vee}{\mathfrak{x}}(p) \vee \overset{\vee}{\mathfrak{y}}(q).$$

Das symmetrische Produkt ist kommutativ, assoziativ und distributiv.

193. Die direkte Summe

$$\vee \mathfrak{V} := \bigoplus_{p=o}^{\infty} (\vee^p \mathfrak{V}) = K \oplus \mathfrak{V} \oplus \vee^2 \mathfrak{V} \oplus \vee^3 \mathfrak{V} \oplus \ldots$$

heißt <u>symmetrische Algebra</u> über $\mathfrak{V}$.

POLYNOMALGEBRA

194. Die Indexmenge I sei die Menge aller n-tupel $(k_1,\ldots,k_n)$ mit $k_i \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die direkte Summe

$$P_n := \bigoplus_{(k_1,\ldots,k_n)\in I} K = \{f \mid f: I \to K,\ \text{fast alle } f(k_1,\ldots,k_n) = 0_K\}$$

Die Indikatorabbildungen (3.)

$$f_{(i_1,\ldots,i_n)}(k_1,\ldots,k_n) = \delta_{i_1}^{k_1} \ldots \delta_{i_n}^{k_n}$$

bilden eine Basis von P_n(4.). Unter den Indikatorabbildungen betrachten wir speziell die Abbildungen

$$t_i := f_{(0,\ldots,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{i-te Stelle}}}{1},\ldots,0)}.$$

Wir definieren eine Multiplikation der Indikatorabbildungen

$$f_{(i_1,\ldots,i_n)} \cdot f_{(j_1,\ldots,j_n)} = f_{(i_1+j_1,\ldots,i_n+j_n)} \qquad (*)$$

wobei

$$e := f_{(0,\ldots,0)}$$

als Einselement fungiert. P_n erhält damit die Struktur einer assoziativen, kommutativen Algebra.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} K &\to P_n \\ \lambda &\mapsto \lambda e \end{aligned}$$

stellt einen injektiven Homomorphismus dar, sodaß wir K mit H[e] identifizieren können. Speziell gilt $e \equiv 1_K$.

Dann ist

$$f_{(0,\ldots,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{i-te Stelle}}}{k},\ldots,0)} = f_{(0,\ldots,\underbrace{1+\ldots+1}_{k},\ldots 0)} =$$

$$= \underbrace{f_{(0,\dots,1,\dots,0)} \cdots f_{(0,\dots,1,\dots,0)}}_{k} = t_i^k$$

daher

$$f_{(k_1,\dots,k_n)} = t_1^{k_1} \dots t_n^{k_n}$$

Dann nimmt (*) die Gestalt

$$(t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n}).(t_1^{j_1} \dots t_n^{j_n}) = t_1^{i_1+j_1} \dots t_n^{i_n+j_n}$$

an. P_n heißt <u>Polynomalgebra in den n Unbestimmten $t_1,\dots,t_n$ über K.</u>

Die Unbestimmten t_i bilden zusammen mit $e \equiv 1_K$ ein Erzeugendensystem von P_n. Zweckmäßigerweise definiert man noch $t_i^o := e \equiv 1_K$ $(i=1,\dots,n)$. Die Elemente $p(t_1,\dots,t_n) \in P_n$ heißen <u>Polynome</u> in den n Unbestimmten $t_1,\dots,t_n$.
Polynome der Form

$$t_1^{k_1} \dots t_n^{k_n}$$

heißen <u>Monome</u>. Der Exponent k_i heißt <u>Grad</u> der Unbestimmten t_i in dem Monom. $k := k_1 + \dots + k_n$ heißt der <u>(Gesamt-)Grad</u> des Monoms. Die Monome eines vorgegebenen Gesamtgrades k erzeugen einen Unterraum P_n^k von P_n. Die Elemente $p^{(k)}(t_1,\dots,t_n) \in P_n^k$ heißen <u>homogene Polynome</u> vom Grad k.
Jedes Polynom aus P_n kann in der Gestalt

$$p(t_1,\dots,t_n) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)} \lambda_{k_1 \dots k_n} t_1^{k_1} \dots t_n^{k_n} = \sum_{k=o}^{m} p^{(k)}(t_1,\dots,t_n)$$

(alle Summen endlich) dargestellt werden. m heißt der <u>Grad</u> des Polynoms $p(t_1,\dots,t_n)$.

195. Es sei $P_n(t_1,\dots,t_n)$ die Polynomalgebra in n Unbestimmten über K und $\mathfrak{V}$ ein n-dimensionaler Vektorraum über K.

Dann gilt

$$\vee\mathfrak{V} \cong P_n(t_1,\dots,t_n)$$

196. Ist P_n die Polynomalgebra in den n Unbestimmten $t_1,\dots,t_n$ über K und $\mathfrak{V}$ ein n-dimensionaler Vektorraum über K mit der vorgegebenen Basis $\mathfrak{B}=\{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n\}$, so gibt es <u>genau einen Isomorphismus</u>

$$\begin{aligned} g: \vee\mathfrak{V} &\to P_n \\ \mathfrak{b}_i &\mapsto t_i \qquad (i=1,\dots,n) \end{aligned}$$

Die Einschränkung von g auf $\vee^k\mathfrak{V}$ ist ein Isomorphismus von $\vee^k\mathfrak{V}$ auf den Vektorraum P_n^k der homogenen Polynome des Grades k.

LITERATUR ZUR MULTILINEAREN ALGEBRA

J.BETTEN: Elementare Tensorrechnung f. Ingenieure, 1977, Vieweg.

G.GERLICH: Vektor- und Tensorrechnung f.d.Physik, Vieweg, 1977.

W.H.GREUB: Lineare Algebra (Heidelberger Taschenbücher Bd. 179) Springer, 1976.

W.H.GREUB: Multilineare Algebra (Die Grundlehren der mathem. Wissenschaften Bd. 136). Springer, 1967.

H.J.KOWALSKI: Lineare Algebra. Göschen, Bd. 27 W.d.Greyter, 1967.

Reimo LEHTI: Tensorrechnung und projektive Geometrie: Erster Teil: Grundlagen der Multivektoralgebra und Inzidenzgeometrie. Societas Scientiarum Fennica, Commentationes Physico-Mathematicae XXI 6 (1958) 86 Seiten

H.REICHARDT: Vorlesungen über Vektor-und Tensorrechnung (Hochschulbücher f.Mathematik, Bd.34) VEB Deutscher Verlag d.Wiss.,Berlin, 1957

Die Vektorräume $\mathfrak{B}_i = H[b_{i1},\dots,b_{in_i}]$ $(i = 1,\dots,p)$ seien endlichdimensional. Der Tensor

$$\overset{\otimes}{t} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots\dots \sum_{i_p=1}^{n_p} \lambda^{i_1\dots i_k\dots i_p}\, b_{1i_1} \otimes\dots\otimes b_{ki_k} \otimes\dots\otimes b_{p\,i_p}$$

aus $\bigotimes_{i=1}^{p} \mathfrak{B}_i$ zerfällt genau dann, wenn für jedes $\lambda^{i_1\dots j_k\dots i_p} \neq 0$ bei festem k und festem j_k für jedes $\lambda^{i_1\dots\rho_k\dots i_p} \neq 0$ mit $i_l = 1,\dots,n_l$ und $l \neq k$ jeder Quotient

$$\frac{\lambda^{i_1\dots\rho_k\dots i_p}}{\lambda^{i_1\dots j_k\dots i_p}} = \lambda_k^{\rho_k} \qquad \rho_k = 1,\dots,n_k; \quad \rho_k \neq j_k$$

unabhängig von der Wahl der i_l ist.

Es sei

$$\mathfrak{B}_1 = H[b_{11}, b_{12}],\ \mathfrak{B}_2 = H[b_{21}, b_{22}, b_{23}],\ \mathfrak{B}_3 = H[b_{31}, b_{32}]$$

Ferner sei

$$\overset{\otimes}{t} = \in \mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2 \otimes \mathfrak{B}_3$$

Zerfallen folgende Tensoren?

1.Beispiel:

$$\overset{\otimes}{t} := 8b_{11}\otimes b_{21}\otimes b_{31} - 2b_{11}\otimes b_{21}\otimes b_{32} + 4b_{11}\otimes b_{23}\otimes b_{31} - b_{11}\otimes b_{23}\otimes b_{22} +$$

$$+ 24b_{12}\otimes b_{21}\otimes b_{31} - 6b_{12}\otimes b_{21}\otimes b_{32} + 12b_{12}\otimes b_{23}\otimes b_{31} - 3b_{12}\otimes b_{23}\otimes b_{22}$$

Es ist also

$$\lambda^{111} = 8,\ \lambda^{112} = -2,\ \lambda^{121} = \lambda^{122} = 0,\ \lambda^{131} = 4,\ \lambda^{132} = -1,$$

$$\lambda^{211} = 24,\ \lambda^{212} = -6,\ \lambda^{221} = \lambda^{222} = 0,\ \lambda^{231} = 12,\ \lambda^{232} = -3$$

$\underline{k = 1,\ j_1 = 1}$ $$\frac{\lambda^{2i_2i_3}}{\lambda^{1i_2i_3}} \quad \frac{\lambda^{211}}{\lambda^{111}} = \frac{\lambda^{212}}{\lambda^{112}} = \frac{\lambda^{231}}{\lambda^{131}} = \frac{\lambda^{232}}{\lambda^{132}} =$$

$$= \lambda_1^2 = \frac{x_1^2}{x_1^1} = 3 \Rightarrow \underline{\underline{x_1^2 = 3x_1^1}}$$

$\underline{k = 2,\ j_2 = 1}$ $$\frac{\lambda^{i_12i_3}}{\lambda^{i_11i_3}} \quad \frac{\lambda^{121}}{\lambda^{111}} = \frac{\lambda^{122}}{\lambda^{112}} = \frac{\lambda^{221}}{\lambda^{211}} = \frac{\lambda^{222}}{\lambda^{212}} =$$

$$= \lambda_2^2 = \frac{x_2^2}{x_2^1} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_2^2 = 0}}$$

$$\frac{\lambda^{i_13i_3}}{\lambda^{i_11i_3}} \quad \frac{\lambda^{131}}{\lambda^{111}} = \frac{\lambda^{132}}{\lambda^{112}} = \frac{\lambda^{231}}{\lambda^{211}} = \frac{\lambda^{232}}{\lambda^{212}} =$$

$$= \lambda_2^3 = \frac{x_2^3}{x_2^1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{x_2^3 = \frac{1}{2} x_2^1}}$$

$\underline{k = 3,\ j_3 = 1}$ $$\frac{\lambda^{i_1i_22}}{\lambda^{i_1i_21}} \quad \frac{\lambda^{112}}{\lambda^{111}} = \frac{\lambda^{132}}{\lambda^{131}} = \frac{\lambda^{212}}{\lambda^{211}} =$$

$$= \lambda_2^2 = \frac{x_3^2}{x_3^1} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{x_3^2 = -\frac{1}{4} x_3^1}}$$

Setzen wir

$$\underline{\underline{x_1^1 x_2^1 x_3^1 := \lambda^{111} = 8}}$$

Dann sind etwa folgende Zerlegungen möglich:

$$x_1^1 = 2,\ x_2^1 = 2,\ x_3^1 = 2 \Rightarrow x_1^2 = 6,\ x_2^3 = 1,\ x_3^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{d.h. } \overset{\otimes}{\mathfrak{t}} = \mathfrak{x}_1 \otimes \mathfrak{x}_2 \otimes \mathfrak{x}_3 \text{ zerfällt mit}$$

$$\mathfrak{x}_1 = 2b_{11} + 6b_{12},\ \mathfrak{x}_2 = 2b_{21} + b_{23},\ \mathfrak{x}_3 = 2b_{31} - \frac{1}{2} b_{32}$$ %

oder

$$x_1^1 = 1,\ x_2^1 = 2,\ x_3^1 = 4 \Rightarrow x_1^2 = 3,\ x_2^3 = 1,\ x_3^2 = -1$$

$$\text{d.h. } \overset{\otimes}{\mathfrak{t}} = \mathfrak{x}_1 \otimes \mathfrak{x}_2 \otimes \mathfrak{x}_3 \text{ zerfällt mit}$$

$$\mathfrak{x}_1 = b_{11} + 3b_{12},\ \mathfrak{x}_2 = 2b_{21} + b_{23},\ \mathfrak{x}_3 = 4b_{31} - b_{32}$$

$\overset{\otimes}{\mathfrak{t}}$ ist also ein zerfallender Tensor, die Zerlegung ist aber nicht eindeutig.

2.Beispiel

$$\overset{\otimes}{\mathfrak{t}} := b_{11} \otimes b_{21} \otimes b_{31} + b_{11} \otimes b_{21} \otimes b_{32} - 3b_{11} \otimes b_{23} \otimes b_{31}$$

$$\lambda^{111} = 1,\ \lambda^{112} = 1,\ \lambda^{132} = -3,\ \lambda^{121} = \lambda^{122} = \lambda^{131} = \lambda^{211} =$$
$$= \lambda^{212} = \lambda^{221} = \lambda^{222} = \lambda^{231} = \lambda^{232} = 0$$

$$\underline{k = 1,\ j_1 = 1} \quad \frac{\lambda^{2 i_2 i_3}}{\lambda^{1 i_2 i_3}} \quad \frac{\lambda^{211}}{\lambda^{111}} = \frac{\lambda^{212}}{\lambda^{112}} = \frac{\lambda^{232}}{\lambda^{132}} =$$

$$= \lambda_1^2 = \frac{x_1^2}{x_1^1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1^2 = 0}}$$

$$\underline{k = 2,\ j_2 = 1} \quad \frac{\lambda^{i_1 2 i_3}}{\lambda^{i_1 1 i_3}} \quad \frac{\lambda^{121}}{\lambda^{111}} = \frac{\lambda^{122}}{\lambda^{112}} =$$

$$= \lambda_2^2 = \frac{x_2^2}{x_2^1} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_2^2 = 0}}$$

$$\frac{\lambda^{i_1 3 i_3}}{\lambda^{i_1 1 i_3}} \quad \frac{\lambda^{131}}{\lambda^{111}} = 0 \neq \frac{\lambda^{132}}{\lambda^{112}} = -3$$

$$\overset{\otimes}{\mathfrak{t}} \text{ zerfällt nicht}$$

BEISPIEL ZUR TENSORALGEBRA

Die Tensoralgebra der Multilinearformen über einem endlichdimensionalen Vektorraum

Sei $\mathfrak{B} = [b_1,\dots,b_n]$ endlichdimensional und $\mathfrak{B}^* = [\overset{*}{b}{}^1,\dots,\overset{*}{b}{}^n]$ sein Dualraum. Wir betrachten für jedes $p \geq 1$ den Vektorraum der p-Linearformen $\mu(p) \in \mathfrak{M}_p = \mathrm{Hom}\,(\bigtimes_{i=1}^{p} \mathfrak{B}, K)$. Für $p = 1$ gilt dann $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{B}^*$ und $\mu(1)$ ist dann eine Linearform $\overset{*}{\mathfrak{x}}$. Für $p = 0$ gelte $\mathfrak{M}_0 := K$ und $\mu(0) := \mathrm{id}_K$. Ferner werde definiert: Das Produkt der p-Linearform $\mu(p)$ mit der q-Linearform $\mu(q)$ sei die $(p+q)$-Linearform .

$$\boxed{\mu(p).\mu(q) := \mu(p+q)}$$

für die gelte:

$[\mu(p).\mu(q)](\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p,\mathfrak{x}_{p+1},\dots,\mathfrak{x}_{p+q}) :=$

$$\mu(p+q)(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_{p+q}) := \mu(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p).\mu(\mathfrak{x}_{p+1},\dots,\mathfrak{x}_{p+q}).$$

Im Falle $p = 0$ oder $q = 0$ bedeutet die Multiplikation einfach die Multiplikation mit einem Skalar.
Das so def. Produkt ist *assoziativ* aber i.a. *nicht kommutativ.*

$$\boxed{\mu(p).[\mu(q).\mu(r)] = [\mu(p).\mu(q)].\mu(r)}$$

Beweis:

$$\{\mu(p).[\mu(q).\mu(r)]\}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p,\mathfrak{x}_{p+1},\dots,\mathfrak{x}_{p+q},\mathfrak{x}_{p+q+1},\dots,\mathfrak{x}_{p+q+r}) =$$
$$= \mu(p)(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p).[\mu(q).\mu(r)](\mathfrak{x}_{p+1},\dots,\mathfrak{x}_{p+q+r}) =$$
$$= \mu(p)(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p).[\mu(q)(\mathfrak{x}_{p+1},\dots,\mathfrak{x}_{p+q}).\mu(r)(\mathfrak{x}_{p+q+1},\dots,\mathfrak{x}_{p+q+r})] =$$
$$= [\mu(p)(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p).\mu(q)(\mathfrak{x}_{p+1},\dots,\mathfrak{x}_{p+q})].\mu(r)(\mathfrak{x}_{p+q+1},\dots,\mathfrak{x}_{p+q+r}) =$$
$$= \{[\mu(p).\mu(q)].\mu(r)\}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p,\mathfrak{x}_{p+1},\dots,\mathfrak{x}_{p+q},\mathfrak{x}_{p+q+1},\dots,\mathfrak{x}_{p+q+r})$$

Speziell ist für $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^2\dots\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^p \in \mathfrak{M}_p$:

$$(\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^2\dots\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^p)(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p) = \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1(\mathfrak{x}_1)\dots\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^p(\mathfrak{x}_p)$$

> Die n^p speziellen p-Linearformen $\overset{*}{b}{}^{k_1}\dots\overset{*}{b}{}^{k_p} \in \mathfrak{M}_p$ stellen eine Basis von $\mathfrak{M}_p$ dar. Daher ist $\dim \mathfrak{M}_p = n^p$.

Beweis:

Es sei $\mathfrak{x}_i = n_i^{j_i} b_{j_i}$, $i = 1,\dots,p$. Dann gilt für ein bel. $\mu \in \mathfrak{M}_p$

$$\mu(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p) = x_1^{j_1}\dots x_p^{j_p}.\mu(b_{j_1},\dots,b_{j_p}).$$

Setzt man zu Abkürzung

$$\mu(b_{j_1},\dots,b_{j_p}) = \lambda_{j_1\dots j_p}$$

so gilt

$$\mu(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p) = \lambda_{j1\dots jp}.x_1^{j1}\dots x_p^{jp} \qquad (\blacksquare)$$

1. <u>Die $\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{k1}\dots\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{kp}$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{M}_p$:</u>

Es werde definiert:

$$\nu := \lambda_{k1\dots kp}.\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{k1}\dots\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{kp} \in \mathfrak{M}_p$$

dabei wurden die $\lambda_{k1\dots kp}$ der gegebenen p-Linearform ($\blacksquare$) entnommen. Dann gilt:

$$\nu(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_p) = \lambda_{k1\dots kp}.x_1^{j1}\dots x_p^{jp}(\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{k1}\dots\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{kp})(\mathfrak{b}_{j1},\dots,\mathfrak{b}_{jp}) =$$

$$= \lambda_{k1\dots kp}.x_1^{j1}\dots x_p^{jp}.\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{k1}(\mathfrak{b}_{j1})\dots\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{kp}(\mathfrak{b}_{jp}) =$$

$$= \lambda_{k1\dots kp}.x_1^{j1}\dots x_p^{jp}.\delta_{j1}^{k1}\dots\delta_{jp}^{kp} = \lambda_{j1\dots jp}.x_1^{j1}\dots x_p^{jp}$$

Daher $\nu = \mu$.

2. <u>Die $\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{k1}\dots\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{kp}$ sind linear unabhängig:</u>

$$\sigma_{k1\dots kp}.\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{k1}\dots\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{kp} := zo \Rightarrow \sigma_{k1\dots kp}.\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{k1}\dots\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{kp}(\mathfrak{b}_{j1},\dots,\mathfrak{b}_{jp}) = 0_K \Rightarrow$$

$$\sigma_{k1\dots kp}.\ \delta_{j1}^{k1}\dots\delta_{jp}^{kp} = 0_K \Rightarrow \quad \sigma_{k1\dots kp} = 0_K$$

Wir betrachten die p-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \tau \ :\ \bigtimes_{i=1}^{p} \mathfrak{B}^* &\longrightarrow \mathfrak{M}_p \\ (\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1,\dots,\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^p) &\longmapsto \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^1\dots\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^p \end{aligned}$$

τ erfüllt die beiden Eigenschaften

T1: $H\left(\tau(\bigtimes_{i=1}^{p}\mathfrak{B}^*)\right) = \mathfrak{M}_p$, da die $\tau(\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{k1},\dots,\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{kp}) = \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{k1}\dots\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^{kp}$ eine Basis von $\mathfrak{M}_p$ sind.

T2: $\dim \mathfrak{M}_p = n^p$, da es gerade so viele Basiselemente gibt. Nach Sätzen 18 und 19 ist daher

$$\mathfrak{M}_p = \bigotimes^p \mathfrak{B}^*$$

das Tensorprodukt der $\mathfrak{B}^*$.

Man kann daher die p-Linearformen als Tensoren auffassen. Die Algebra

$$K \oplus \mathfrak{B}^* \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_3 \oplus \dots$$

nennt man die **Tensoralgebra der Multilinearformen in $\mathfrak{B}$** oder die **Algebra der kovarianten Tensoren über $\mathfrak{B}$**.

Die Größen $\lambda_{j1\ldots jp}$ aus (■) sind die Koordinaten des **kovarianten Tensors** $\mu(p)$.

Betrachtet man die Multilinearformen über $\mathfrak{B}^*$, so erhält man ganz analog die **Algebra der kontravarianten Tensoren** über $\mathfrak{B}$.

Anwendung des ε-Tensors und des Maßtensors β im euklidischen $\mathbb{B}_3$

Es sei $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine beliebige Basis und $\mathcal{B}' = \{b^1, b^2, b^3\}$ die reziproke Basis bezüglich β in einem euklidischen $\mathbb{B}_3$. Dann hat der Maßtensor β

<u>die kovarianten Koordinaten</u>	$\beta_{ij} = \beta_{ji} = b_i b_j$
<u>die kontravarianten Koordinaten</u>	$\beta^{ij} = \beta^{ji} = b^i b^j$
<u>die gemischten Koordinaten</u>	$\beta_j^i = \beta_j^i = \delta_j^i = b_i b^j$

Es gilt

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \frac{1}{\Delta} = \begin{vmatrix} \beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13} \\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23} \\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33} \end{vmatrix}, \quad 1 = \begin{vmatrix} \delta_1^1 & \delta_1^2 & \delta_1^3 \\ \delta_2^1 & \delta_2^2 & \delta_2^3 \\ \delta_3^1 & \delta_3^2 & \delta_3^3 \end{vmatrix}$$

Es sei nun $\pi = \begin{pmatrix} 123 \\ ijk \end{pmatrix}$ eine beliebige Permutation, die wir auf die Zeilen bzw. Spalten obiger Determinanten anwenden. Es ergibt sich

$$\Delta \operatorname{sgn} \pi = \begin{vmatrix} \beta_{i1} & \beta_{i2} & \beta_{i3} \\ \beta_{j1} & \beta_{j2} & \beta_{j3} \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \beta_{k3} \end{vmatrix} \qquad \text{Zeilenpermutation}$$

$$\frac{\operatorname{sgn} \pi}{\Delta} = \begin{vmatrix} \beta^{1i} & \beta^{1j} & \beta^{1k} \\ \beta^{2i} & \beta^{2j} & \beta^{2k} \\ \beta^{3i} & \beta^{3j} & \beta^{3k} \end{vmatrix} \qquad \text{Spaltenpermutation}$$

$$\operatorname{sgn} \pi = \begin{vmatrix} \delta_i^1 & \delta_i^2 & \delta_i^3 \\ \delta_j^1 & \delta_j^2 & \delta_j^3 \\ \delta_k^1 & \delta_k^2 & \delta_k^3 \end{vmatrix} \qquad \text{Zeilenpermutation}$$

Nach Satz 110 gilt

$$\varepsilon^{ijk} = \frac{\operatorname{sgn} \pi}{\sqrt{\Delta}} = \frac{\operatorname{sgn} \pi}{\Delta}\sqrt{\Delta} = \sqrt{\Delta} \begin{vmatrix} \beta^{1i} & \beta^{1j} & \beta^{1k} \\ \beta^{2i} & \beta^{2j} & \beta^{2k} \\ \beta^{3i} & \beta^{3j} & \beta^{3k} \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_{rst} = \operatorname{sgn} \pi . \sqrt{\Delta} = \Delta \operatorname{sgn} \pi \frac{1}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} \beta_{r1} & \beta_{r2} & \beta_{r3} \\ \beta_{s1} & \beta_{s2} & \beta_{s3} \\ \beta_{t1} & \beta_{t2} & \beta_{t3} \end{vmatrix}$$

Für den ε-Tensor gilt daher

$$\varepsilon = \varepsilon^{ijk}\, b_i \otimes b_j \otimes b_k = \varepsilon_{rst}\, b^r \otimes b^s \otimes b^t$$

Daraus folgt

$$\varepsilon\otimes\varepsilon = \varepsilon^{ijk}\ \varepsilon_{rst}\ b_i\otimes b_j\otimes b_k\otimes b^r\otimes b^s\otimes b^t$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_{r1} & \beta_{r2} & \beta_{r3} \\ \beta_{s1} & \beta_{s2} & \beta_{s3} \\ \beta_{t1} & \beta_{t2} & \beta_{t3} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \beta^{1i} & \beta^{1j} & \beta^{1k} \\ \beta^{2i} & \beta^{2j} & \beta^{2k} \\ \beta^{3i} & \beta^{3j} & \beta^{3k} \end{vmatrix}\ b_i\otimes b_j\otimes b_k\otimes b^r\otimes b^s\otimes b^t =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_{r1}\beta^{1i} & \beta_{r1}\beta^{1j} & \beta_{r1}\beta^{1k} \\ \beta_{s1}\beta^{1i} & \beta_{s1}\beta^{1j} & \beta_{s1}\beta^{1k} \\ \beta_{t1}\beta^{1i} & \beta_{t1}\beta^{1j} & \beta_{t1}\beta^{1k} \end{vmatrix}\ b_i\otimes b_j\otimes b_k\otimes b^r\otimes b^s\otimes b^t =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta^i_r & \delta^j_r & \delta^k_r \\ \delta^i_s & \delta^j_s & \delta^k_s \\ \delta^i_t & \delta^j_t & \delta^k_t \end{vmatrix}\ b_i\otimes b_j\otimes b_k\otimes b^r\otimes b^s\otimes b^t$$

Daher gilt

$$\boxed{\varepsilon^{ijk}\ \varepsilon_{rst} = \begin{vmatrix} \delta^i_r & \delta^j_r & \delta^k_r \\ \delta^i_s & \delta^j_s & \delta^k_s \\ \delta^i_t & \delta^j_t & \delta^k_t \end{vmatrix}}$$

Verjüngt man das Produkt $\varepsilon\otimes\varepsilon$ nach dem 3. unteren und nach dem 3. oberen Index, dh. bildet man

$$v^3_3(\varepsilon\otimes\varepsilon) = v^3_3(\varepsilon^{ijk}\ \varepsilon_{rst}\ b_i\otimes b_j\otimes b_k\otimes b^r\otimes b^s\otimes b^t) = \qquad (\#)$$
$$= \varepsilon^{ijk}\ \varepsilon_{rsk}\ b_i\otimes b_j\otimes b^r\otimes b^s$$

so folgt

$$\varepsilon^{ijk}\ \varepsilon_{rsk} = \begin{vmatrix} \delta^i_r & \delta^j_r & \delta^k_r \\ \delta^i_s & \delta^j_s & \delta^k_s \\ \delta^i_k & \delta^j_k & 3 \end{vmatrix} \quad \text{wegen } \delta^k_k = \delta^1_1 + \delta^2_2 + \delta^3_3 = 3$$

Entwicklung nach der 3.Zeile ergibt:

$$\varepsilon^{ijk}\ \varepsilon_{rsk} = \delta^i_k(\delta^j_r\delta^k_s - \delta^k_r\delta^j_s) - \delta^j_k(\delta^i_r\delta^k_s - \delta^k_r\delta^i_s) + 3(\delta^i_r\delta^j_s - \delta^j_r\delta^i_s) =$$

$$= (\delta^j_r\delta^i_s - \delta^i_r\delta^j_s) - (\delta^i_r\delta^j_s - \delta^j_r\delta^i_s) + 3(\delta^i_r\delta^j_s - \delta^j_r\delta^i_s) = \delta^i_r\delta^j_s - \delta^i_s\delta^j_r$$

also

$$\boxed{\varepsilon^{ijk}\ \varepsilon_{rsk} = \begin{vmatrix} \delta^i_r & \delta^j_r \\ \delta^i_s & \delta^j_s \end{vmatrix}}$$

Weitere Verjüngung von (#) ergibt

$$v_2^2(\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{rsk}\,\underline{b}_i\otimes\underline{b}_j\otimes\underline{b}^r\otimes\underline{b}^s) = \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{rjk}\,\underline{b}_i\otimes\underline{b}^r \qquad (\#\#)$$

Daraus folgt

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{rjk} = \begin{vmatrix} \delta^i_r & \delta^j_r \\ \delta^i_j & 3 \end{vmatrix} = 3\delta^i_r - \delta^i_j\delta^r_j = 3\delta^i_r - \delta^i_r = 2\delta^i_r$$

also

$$\boxed{\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{rjk} = 2\delta^i_r}$$

Eine letzte Verjüngung von (##) ergibt schließlich

$$v_1^1(\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{rjk}\,\underline{b}_i\otimes\underline{b}^r) = \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta^i_i = 6 \;\ldots\; \text{Konstante}$$

$$\boxed{\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6}$$

Ferner gilt

$$\boxed{\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{rsk} + \varepsilon^{jrk}\,\varepsilon_{isk} + \varepsilon^{rjk}\,\varepsilon_{jsk} = 0}$$

Denn es ist

$$(\delta^i_r\delta^j_s - \delta^i_s\delta^j_r) - (\delta^j_i\delta^r_s - \delta^j_s\delta^r_i) - (\delta^r_j\delta^i_s - \delta^r_s\delta^i_j) = 0$$

Formeln der Vektorrechnung in Tensorschreibweise

Es sei $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine beliebige Basis des euklidischen $\mathbb{R}_3$, β der zugehörige Maßtensor, $\mathcal{B}' = \{b^1, b^2, b^3\}$ die reziproke Basis. Dann gilt je nach Wahl von kovarianten oder kontravarianten Koordinaten

$$\beta = \beta_{ij}\; b^i\otimes b^j = \beta^{rs}\; b_r\otimes b_s = b_k\otimes b^k, \qquad \beta_{ij}\beta^{jk} = \delta^k_i$$

$$\mathfrak{x} = x^i b_i = x_k b^k, \qquad \mathfrak{y} = y^i b_i = y_j b^j$$

$$b^i = \beta^{ij}\; b_j,\; b_k = \beta_{kl}\; b^l,\; x^i = \beta^{il}\; x_l,\; x_l = \beta_{lk}\; x^k$$

Es sei nun

$$\mathfrak{x}\otimes\mathfrak{y} = x^i y_j\; b_i\otimes b^j$$

Verjüngung ergibt

$$\boxed{v_1^1(\mathfrak{x}\otimes\mathfrak{y}) = x^i y_i = \mathfrak{x}\mathfrak{y} \qquad \text{Skalarprodukt}}$$

Natürlich kann man auch auf andere Koordinatentypen umrechnen:

$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = x^i y_i = (\beta^{il} x_l) y_i = \beta^{li} x_l y_i$ usw.

Wir betrachten

$$\varepsilon \otimes \mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y} = \varepsilon^{ijk}\ x_r y_s\ \underline{b}_i \otimes \underline{b}_j \otimes \underline{b}_k \otimes \underline{b}^r \otimes \underline{b}^s$$

Verjüngung ergibt

$$V_2^3(\varepsilon \otimes \mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y}) = \varepsilon^{ijk}\ x_r y_k\ \underline{b}_i \otimes \underline{b}_j \otimes \underline{b}^r$$

Nochmalige Verjüngung liefert

$$V_1^2(\varepsilon^{ijk}\ x_r y_k\ \underline{b}_i \otimes \underline{b}_j \otimes \underline{b}^r) = \varepsilon^{ijk}\ x_j y_k\ \underline{b}_i = z^i \underline{b}_i =$$

$$= \sqrt{\Delta} \begin{vmatrix} \beta^{1i} & \beta^{1j} & \beta^{1k} \\ \beta^{2i} & \beta^{2j} & \beta^{2k} \\ \beta^{3i} & \beta^{3j} & \beta^{3k} \end{vmatrix} x_j y_k \underline{b}_i = \sqrt{\Delta} \begin{vmatrix} \beta^{1i} & \beta^{1j} x_j & \beta^{1k} y_k \\ \beta^{2i} & \beta^{2j} x_j & \beta^{2k} y_k \\ \beta^{3i} & \beta^{3j} x_j & \beta^{3k} y_k \end{vmatrix} \underline{b}_i =$$

$$= \sqrt{\Delta} \begin{vmatrix} \beta^{1i} & x^1 & y^1 \\ \beta^{2i} & x^2 & y^2 \\ \beta^{3i} & x^3 & y^3 \end{vmatrix} \underline{b}_i = \sqrt{\Delta} \Big[(x^2y^3 - x^3y^2)\beta^{1i}\underline{b}_i + (x^3y^1 - x^1y^3)\beta^{2i}\underline{b}_i + $$
$$+ (x^1y^2 - x^2y^1)\beta^{3i}\underline{b}_i \Big] =$$

$$= \sqrt{\Delta} \Big[\underbrace{(x^2y^3 - x^3y^2)}_{z_1}\underline{b}^1 + \underbrace{(x^3y^1 - x^1y^3)}_{z_2}\underline{b}^2 + \underbrace{(x^1x^2 - x^2y^1)}_{z_3}\underline{b}^3 \Big] = z_l \underline{b}^l$$

Der letzte Ausdruck stellt das Vektorprodukt $\mathfrak{z} = \mathfrak{x} \times \mathfrak{y}$ der beiden Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ durch seine kovarianten Koordinaten z_l dar, wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ beide durch ihre kontravarianten Koordinaten x^j, y^k gegeben sind.

Es gilt also

$$\boxed{\begin{gathered} \mathfrak{x} \times \mathfrak{y} = \varepsilon^{ijk}\ x_j y_k\ \underline{b}_i = z^i \underline{b}_i = \varepsilon^{ijk}\ x_j y_k\ \beta_{il} \underline{b}^l = z_l \underline{b}^l \\ z^i = \varepsilon^{ijk}\ x_j y_k, \quad z_l = \varepsilon^{ijk}\ x_j y_k \beta_{il} \end{gathered}}$$

Der Zusammenhang zwischen den kovarianten Koordinaten des Produktvektors $\mathfrak{z}$ und den kontravarianten Koordinaten der Faktoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ lautet

$$\boxed{\begin{gathered} z_i = \sqrt{\Delta}\ (x^j y^k - x^k y^j) \\ \text{Die Indizes } i, j, k \text{ durchlaufen den Zyklus } 1,2,3 \end{gathered}}$$

Die obigen Ausdrücke können durch Hinauf- oder Hinunterziehen von Indizes die verschiedenartigste Gestalt erhalten.

Der Entwicklungssatz von GRASSMANN

Wir untersuchen das Vektorprodukt $(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})\times\mathfrak{z}$

$$\mathfrak{u} := \mathfrak{x} \times \mathfrak{y} = \varepsilon^{ijk}\, x_j y_k\, \mathfrak{b}_i = u^i \mathfrak{b}_i = \varepsilon^{ijk}\, x_j y_k\, \beta_{is} \mathfrak{b}^s = u_s \mathfrak{b}^s$$

Daher

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})\times\mathfrak{z} = \mathfrak{u}\times\mathfrak{z} &= \varepsilon^{rst}\, u_s z_t\, \mathfrak{b}_r = \varepsilon^{rst}(\varepsilon^{ijk} x_j y_k\, \beta_{is}) z_t\, \mathfrak{b}_r = \\
&= \varepsilon^{rst}(\beta^{il}\beta^{jm}\beta^{kp}\varepsilon_{lmp}) x_j y_k \beta_{is} z_t = \\
&= \varepsilon^{rst}\varepsilon_{lmp}(\beta^{il}\beta_{is})(\beta^{jm}x_j)(\beta^{kp}y_k) z_t \mathfrak{b}_r = \\
&= \varepsilon^{rst}\varepsilon_{lmp}\delta^l_s\, x^m y^p z_t\, \mathfrak{b}_r = \varepsilon^{rlt}\varepsilon_{lmp} x^m y^p z_t\, \mathfrak{b}_r = \varepsilon^{trl}\varepsilon_{lmp} x^m y^p z_t\, \mathfrak{b}_r = \\
&= (\delta^t_m\delta^r_p - \delta^t_p\delta^r_m)\, x^m y^p z_t\, \mathfrak{b}_r = (\delta^t_m x^m)(\delta^r_p y^p) z_t \mathfrak{b}_r - (\delta^t_p y^p)(\delta^r_m x^m) z_t \mathfrak{b}_r = \\
&= x^t y^r z_t \mathfrak{b}_r - y^t x^r z_t \mathfrak{b}_r = (x^t z_t)(y^r \mathfrak{b}_r) - (y^t z_t)(x^r \mathfrak{b}_r) = \\
&= (\mathfrak{x}\mathfrak{z})\mathfrak{y} - (\mathfrak{y}\mathfrak{z})\mathfrak{x}
\end{aligned}$$

Dem Entwicklungssatz von GRASSMANN

$$(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})\times\mathfrak{z} = (\mathfrak{x}\mathfrak{z})\mathfrak{y} - (\mathfrak{y}\mathfrak{z})\mathfrak{x}$$

entspricht die Tensoridentität

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{rsk} = \delta^i_r\delta^j_s - \delta^i_s\delta^j_r$$

Dreifachverjüngung von

$$\varepsilon\otimes\mathfrak{x}\otimes\mathfrak{y}\otimes\mathfrak{z} = \varepsilon^{ijk} x_r y_s z_t\, \mathfrak{b}_i\otimes\mathfrak{b}_j\otimes\mathfrak{b}_k\otimes\mathfrak{b}^r\otimes\mathfrak{b}^s\otimes\mathfrak{b}^t$$

ergibt

$$\varepsilon^{ijk} x_i x_j z_k = \sum_{\pi} \frac{\operatorname{sgn}\pi}{\sqrt{\Delta}}\, x_{\pi(i)} y_{\pi(j)} z_{\pi(k)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = (\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})$$

Anwendung der Multivektoren auf die projektive Geometrie

Nach Satz 152 gilt:

$$H[\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_r] = H[\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_r] \Leftrightarrow \mathfrak{x}_1\wedge\dots\wedge\mathfrak{x}_r = \lambda\mathfrak{y}_1\wedge\dots\wedge\mathfrak{y}_r$$

Da ein UR als p-Raum interpretiert werden kann, kann jedem p-Raum ein zerfallender Multivektor zugeordnet werden. L.a. Multivektoren stellen denselben p-Raum dar.

Die Geometrie des $P_3 = P(H[\mathfrak{b}_0,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3])$

Projektive Punkte: $X = H[\mathfrak{x}]\ \dots\ \mathfrak{x} = X^i\mathfrak{b}_i = X^0\mathfrak{b}_0+X^1\mathfrak{b}_1+X^2\mathfrak{b}_2+X^3\mathfrak{b}_3$

$\hat{\mathfrak{x}}(1)$ und $\hat{\mathfrak{y}}(1)$ stellen denselben p-Punkt dar, wenn $\hat{\mathfrak{x}}(1) = \lambda\hat{\mathfrak{y}}(1)$ ist. Die Punktkoordinaten $X(X^0:X^1:X^2:X^3)$ sind daher homogen.

Projektive Geraden: $g = H[\mathfrak{x},\mathfrak{y}]$, $\mathfrak{x} = X^i\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{y} = Y^j\mathfrak{b}_j$

Nach Satz 140 gilt

$$\hat{g}(2) = \mathfrak{x}\wedge\mathfrak{y} = \sum_{0\le i_1<i_2\le 3}\begin{vmatrix} X^{i_1} & {}^{i_2} \\ Y^{i_1} & {}^{i_2}\end{vmatrix}\mathfrak{b}_{i_1}\wedge\mathfrak{b}_{i_2} =$$

$$= \begin{vmatrix} X^0 & X^1 \\ Y^0 & Y^1\end{vmatrix}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1 + \begin{vmatrix} X^0 & X^2 \\ Y^0 & Y^2\end{vmatrix}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2 + \begin{vmatrix} X^0 & X^3 \\ Y^0 & Y^3\end{vmatrix}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3 + \begin{vmatrix} X^1 & X^2 \\ Y^1 & Y^2\end{vmatrix}\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2 +$$

$$+\begin{vmatrix} X^1 & X^3 \\ Y^1 & Y^3\end{vmatrix}\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_3 + \begin{vmatrix} X^2 & X^3 \\ Y^2 & Y^3\end{vmatrix}\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 =$$

$$= \lambda^{01}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{02}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2 + \lambda^{03}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda^{23}\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda^{31}\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{12}\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2$$

Die homogenen Größen (Achtung auf die Reihenfolge der Indizes!)

$$\boxed{\lambda^{01} : \lambda^{02} : \lambda^{03} : \lambda^{23} : \lambda^{31} : \lambda^{12} \qquad \lambda^{ij} = -\lambda^{ji}}$$

sind die PLÜCKER - Koordinaten der p-Geraden.

Für den die p-Gerade g festlegenden zerfallenden Bivektor $\hat{g}(2)$ - gilt nach Satz 131 für den zerfallenden Produktvektor:

$$\hat{g}(2)\wedge\hat{g}(2) = \hat{o}(4)$$

d.h. es ist

$$(\lambda^{01}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{02}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2 + \lambda^{03}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda^{23}\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda^{31}\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{12}\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2)\wedge$$
$$(\lambda^{01}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{02}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2 + \lambda^{03}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda^{23}\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda^{31}\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{12}\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2) =$$

$$= (\lambda^{01}\lambda^{23} + \lambda^{02}\lambda^{31} + \lambda^{03}\lambda^{12})\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 = \hat{o}(4)$$

Die PLÜCKER-Koordinaten einer Geraden genügen daher der PLÜCKER-Bedingung:

$$\boxed{\lambda^{01}\lambda^{23} + \lambda^{02}\lambda^{31} + \lambda^{03}\lambda^{12} = 0}$$

ACHTUNG: I.a. wird das äußere Produkt eines nichtzerfallenden Bivektors $\hat{\mathfrak{g}}(2)$ mit sich selbst nicht verschwinden (gilt allgemein für Multivektoren, vgl. Satz 144.f)

Die Linearkombination zerfallender Bivektoren stellt wieder eine p-Gerade dar, wenn die den zerfallenden Bivektoren entsprechenden Geraden durch denselben Punkt gehen.

$$\hat{\mathfrak{g}}_i(2) = \mathfrak{s}\wedge\mathfrak{a}_i \qquad i = 1,\dots,r$$

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\hat{\mathfrak{g}}_i(2) = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i(\mathfrak{s}\wedge\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{s}\wedge\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\mathfrak{a}_i\right)}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{s}\wedge\mathfrak{a}$$

Die Linearkombination zerfallender Bivektoren, deren entsprechende p-Geraden in derselben p-Ebene liegen, stellt wieder eine Gerade derselben Ebene dar

Je zwei Geraden derselben p-Ebene schneiden einander in einem Punkt $\mathfrak{s}$. Die Linearkombination dieser Bivektoren stellt eine Gerade durch diesen Punkt in der Ebene dar

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\hat{\mathfrak{g}}_i(2) = \lambda_1\hat{\mathfrak{g}}_1(2) + \lambda_2\hat{\mathfrak{g}}_2(2) + \sum_{i=3}^{r}\lambda_i\hat{\mathfrak{g}}_i(2) = \mathfrak{s}\wedge(\lambda_1\mathfrak{a}_1+\lambda_2\mathfrak{a}_2) +$$

$$+ \mathfrak{s}\wedge\underbrace{(\lambda_1\mathfrak{a}_1+\lambda_2\mathfrak{a}_2)}_{\mathfrak{a}} + \sum_{i=3}^{r}\lambda_i\hat{\mathfrak{g}}_i(2) = \mathfrak{s}\wedge\mathfrak{a} + \sum_{i=3}^{r}\lambda_i\hat{\mathfrak{g}}_i(2)$$

Alles weitere durch Induktion

Schnittbedingung zweier Geraden: Es seien

$$\hat{\mathfrak{x}}(2) = \lambda^{01}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{02}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2 + \lambda^{03}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda^{23}\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda^{31}\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{12}\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2$$

$$\hat{\mathfrak{y}}(2) = \mu^{01}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1 + \mu^{02}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2 + \mu^{03}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3 + \mu^{23}\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + \mu^{31}\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_1 + \mu^{12}\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2$$

zwei zerfallende Bivektoren. Dann gilt $\hat{\mathfrak{x}}(2)\wedge\hat{\mathfrak{y}}(2) =$

$$(\lambda^{01}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{02}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2 + \lambda^{03}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda^{2}\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda^{31}\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{12}\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2)\wedge$$

$$\wedge(\mu^{01}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1 + \mu^{02}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2 + \mu^{03}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3 + \mu^{3}\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + \mu^{31}\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_1 + \mu^{12}\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2) =$$

$$= (\lambda^{01}\mu^{23} + \lambda^{02}\mu^{31} + \lambda^{03}\mu^{12} + \lambda^{23}\mu^{01} + \lambda^{31}\mu^{02} + \lambda^{12}\mu^{03})\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3$$

Haben die beiden g-Geraden $x = \mathfrak{U}_1[\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2]$ und $y = \mathfrak{U}_2 = H[\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2]$ einen leeren Schnitt, d.h. ist $\mathfrak{U}_1\cap\mathfrak{U}_2 = \{\mathfrak{o}\}$, so gilt nach Satz 151

$$\mathfrak{U}_1\cap\mathfrak{U}_2 = \{\mathfrak{o}\} \Leftrightarrow (\mathfrak{a}_1\wedge\mathfrak{a}_2)\wedge(\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2) = \hat{\mathfrak{x}}(2)\wedge\hat{\mathfrak{y}}(2) \neq \hat{\mathfrak{o}}(4)$$

Im Falle des nichtleeren Schnittes gilt daher

$$\boxed{\begin{array}{c}\lambda^{01}\mu^{23} + \lambda^{02}\mu^{31} + \lambda^{03}\mu^{12} + \lambda^{23}\mu^{01} + \lambda^{31}\mu^{02} + \lambda^{12}\mu^{03} = 0 \\ \text{Schnittbedingung zweier Geraden}\end{array}}$$

Sind die Geraden identisch ($\hat{\mathfrak{f}}(2) = \hat{\mathfrak{g}}(2)$), so reproduziert sich die PLÜCKER-Bedingung,

$$\boxed{\text{Ein beliebiger \underline{nichtzerfallender} Bivektor stellt keine p-Gerade dar}}$$

Es sei etwa

$$\hat{\mathfrak{f}}(2) = \lambda^{01}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{02}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2 + \lambda^{03}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda^{23}\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda^{31}\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{12}\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2$$

nichtzerfallend. Die (zerfallenden) Basisvektoren $\mathfrak{b}_i\wedge\mathfrak{b}_j$ stellen Gerade dar. So gehen die den Bivektoren $\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3$ entsprechenden Geraden durch den Punkt $B_0 = H[\mathfrak{b}_0]$. Deren Linearkombination

$$\hat{\mathfrak{g}}(2) = \lambda^{01}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{02}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2 + \lambda^{03}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3$$

geht daher auch durch B_0. Die den zerfallenden Bivektoren $\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2$ entsprechenden Geraden liegen in der dem Trivektor $\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3$ entsprechenden Ebene, welche durch die Punkte $B_1 = H[\mathfrak{b}_1]$, $B_2 = H[\mathfrak{b}_2]$, $B_3 = H[\mathfrak{b}_3)$ aufgespannt wird. Daher liegt die dem Bivektor

$$\hat{\mathfrak{h}}(2) = \lambda^{23}\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda^{31}\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{12}\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2$$

entsprechende Gerade in dieser Ebene. Für den oben definierten Bivektor $\hat{\mathfrak{f}}(2)$ gilt daher

$$\hat{\mathfrak{f}}(2) = \hat{\mathfrak{g}}(2) + \hat{\mathfrak{h}}(2) \quad \ldots \quad \hat{\mathfrak{g}}(2),\ \hat{\mathfrak{h}}(2) \text{ zerfallend}$$

Bilden wir nun

$$\hat{\mathfrak{f}}(2)\wedge\hat{\mathfrak{f}}(2) = (\hat{\mathfrak{g}}(2) + \hat{\mathfrak{h}}(2))\wedge(\hat{\mathfrak{g}}(2) + \hat{\mathfrak{h}}(2)) = \hat{\mathfrak{g}}(2)\wedge\hat{\mathfrak{g}}(2) + \hat{\mathfrak{h}}(2)\wedge\hat{\mathfrak{g}}(2) +$$
$$\hat{\mathfrak{g}}(2)\wedge\hat{\mathfrak{h}}(2) + \hat{\mathfrak{h}}(2)\wedge\hat{\mathfrak{h}}(2) = \hat{\mathfrak{g}}(2)\wedge\hat{\mathfrak{h}}(2) + (-1)^4\hat{\mathfrak{g}}(2)\wedge\hat{\mathfrak{h}}(2)$$

Also

$$\hat{\mathfrak{f}}(2)\wedge\hat{\mathfrak{f}}(2) = 2.\hat{\mathfrak{g}}(2)\wedge\hat{\mathfrak{h}}(2)$$

Da die Geraden g und h i.a. windschief sind, wird nach Satz 151 die rechte Seite $\neq \hat{\mathfrak{o}}(4)$ sein. Dann kann aber $\hat{\mathfrak{f}}(2)$ nicht zerfallen (Satz 131)

Schneiden aber g und h einander, so entspricht $\hat{\mathfrak{f}}(2)$ eine Gerade in der von g und h aufgespannten Ebene (s.o.) und es gilt

$$\hat{\mathfrak{g}}(2)\wedge\hat{\mathfrak{h}}(2) = (\lambda^{01}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{02}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2 + \lambda^{03}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3) =$$
$$= (\lambda^{01}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{02}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2 + \lambda^{03}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3)\wedge(\lambda^{23}\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda^{31}\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{12}\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2) =$$
$$= (\lambda^{01}\lambda^{23} + \lambda^{02}\lambda^{31} + \lambda^{03}\lambda^{12})\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 = \hat{\mathfrak{f}}(2)\wedge\hat{\mathfrak{f}}(2) = \hat{\mathfrak{o}}(4)$$

Die PLÜCKER-Bedingung

$$\lambda^{01}\lambda^{23} + \lambda^{02}\lambda^{31} + \lambda^{03}\lambda^{12} = 0$$

ist notwendig und hinreichend dafür, daß dem Bivektor

$$\hat{\mathfrak{x}}(2) = \lambda^{01}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1+\lambda^{02}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2+\lambda^{03}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3+\lambda^{23}\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3+\lambda^{31}\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_1+\lambda^{12}\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2$$

eine Gerade entspricht.

Inzidenz Punkt-Gerade: $\hat{\mathfrak{g}}(2)\wedge\hat{\mathfrak{x}}(1) = \hat{\mathfrak{d}}(3)$

$$(\lambda^{01}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1+\lambda^{02}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2+\lambda^{03}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3+\lambda^{23}\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3+\lambda^{31}\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_1+\lambda^{12}\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2)\wedge$$

$$\wedge(X^0\mathfrak{b}_0+X^1\mathfrak{b}_1+X^2\mathfrak{b}_2+X^3\mathfrak{b}_3) = \ldots =$$

$$= (\lambda^{01}X^2-\lambda^{02}X^1+\lambda^{12}X^0)\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2 + (\lambda^{01}X^3-\lambda^{03}X^1-\lambda^{31}X^0)\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_3 +$$

$$+ (\lambda^{02}X^3-\lambda^{03}X^2+\lambda^{23}X^0)\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + (\lambda^{23}X^1+\lambda^{31}X^2+\lambda^{12}X^3)\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 = \hat{\mathfrak{d}}(3)$$

Inzidenzbedingung Punkt- Gerade

$$\begin{array}{rrrrl}
\lambda^{12}X^0 & -\lambda^{02}X^1 & +\lambda^{01}X^2 & & =0\\
\lambda^{23}X^0 & & -\lambda^{03}X^2 & +\lambda^{02}X^3 & =0\\
-\lambda^{31}X^0 & -\lambda^{03}X^1 & & +\lambda^{01}X^3 & =0\\
 & \lambda^{23}X^1 & +\lambda^{31}X^2 & +\lambda^{12}X^3 & =0
\end{array}$$

Das System ist für die X^i nur nichttrivial lösbar, wenn die Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} \lambda^{12} & -\lambda^{02} & \lambda^{01} & 0 \\ \lambda^{23} & 0 & -\lambda^{03} & \lambda^{01} \\ -\lambda^{31} & -\lambda^{03} & 0 & \lambda^{01} \\ 0 & \lambda^{23} & \lambda^{31} & \lambda^{12} \end{vmatrix} = -[\lambda^{01}\lambda^{23} + \lambda^{02}\lambda^{31} + \lambda^{03}\lambda^{12}]^2$$

Es reproduziert sich also die PLÜCKER-Bedingung.

Die projektive Ebene: $\alpha = H[\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}]$ ... $\alpha(3) = \mathfrak{x}\wedge\mathfrak{y}\wedge\mathfrak{z}$

Ist

$$\left\|\begin{matrix} X^0 & X^1 & X^2 & X^3 \\ Y^0 & Y^1 & Y^2 & Y^3 \\ Z^0 & Z^1 & Z^2 & Z^3 \end{matrix}\right\|$$

die Koordinatenmatrix der 3 Punkte $\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}$, so gilt nach Satz 140:

$$\hat{\mathfrak{a}}(3) = \sum_{i_1<i_2<i_3} \begin{vmatrix} X^{i_1} & X^{i_2} & X^{i_3} \\ Y^{i_1} & Y^{i_2} & Y^{i_3} \\ Z^{i_1} & Z^{i_2} & Z^{i_3} \end{vmatrix} \mathfrak{b}_{i_1}\wedge\mathfrak{b}_{i_2}\wedge\mathfrak{b}_{i_3} = \sum_{i_1<i_2<i_3} \lambda^{i_1 i_2 i_3} \mathfrak{b}_{i_1}\wedge\mathfrak{b}_{i_2}\wedge\mathfrak{b}_{i_3} =$$

$$= \begin{vmatrix} X^0 & X^1 & X^2 \\ Y^0 & Y^1 & Y^2 \\ Z^0 & Z^1 & Z^2 \end{vmatrix} b_0 \wedge b_1 \wedge b_2 + \begin{vmatrix} X^0 & X^1 & X^3 \\ Y^0 & Y^1 & Y^3 \\ Z^0 & Z^1 & Z^3 \end{vmatrix} b_0 \wedge b_1 \wedge b_3 + \begin{vmatrix} X^0 & X^2 & X^3 \\ Y^0 & Y^2 & Y^3 \\ Z^0 & Z^2 & Z^3 \end{vmatrix} b_0 \wedge b_2 \wedge b_3 +$$

$$+ \begin{vmatrix} X^1 & X^2 & X^3 \\ Y^1 & Y^2 & Y^3 \\ Z^1 & Z^2 & Z^3 \end{vmatrix} b_1 \wedge b_2 \wedge b_3 = \lambda^{012} b_0 \wedge b_1 \wedge b_2 + \lambda^{013} b_0 \wedge b_1 \wedge b_3 + \lambda^{023} b_0 \wedge b_2 \wedge b_3 + + \lambda^{123} b_1 \wedge b_2 \wedge b_3$$

Als Koordinaten einer Ebene ergibt sich daher das homogene Quadrupel

$$\boxed{\begin{array}{c} \lambda^{012} : \lambda^{013} : \lambda^{023} : \lambda^{123} \ \ldots \ \text{Ebenenkoordinaten} \\ \lambda^{i_1 i_2 i_3} = \lambda^{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} i_{\pi(3)}} \end{array}}$$

<u>Inzidenz Punkt-Ebene:</u> $\hat{\alpha}(3) \wedge \hat{\xi}(1) = \hat{o}(4)$

$$(\lambda^{012} b_0 \wedge b_1 \wedge b_2 + \lambda^{013} b_0 \wedge b_1 \wedge b_3 + \lambda^{023} b_0 \wedge b_2 \wedge b_3 + \lambda^{123} b_1 \wedge b_2 \wedge b_3) \wedge$$

$$\wedge (X^0 b_0 + X^1 b_1 + X^2 b_2 + X^3 b_3) =$$

$$= (\lambda^{012} X^3 - \lambda^{012} X^3 + \lambda^{012} X^3 - \lambda^{012} X^3) b_0 \wedge b_1 \wedge b_2 \wedge b_3 = \hat{o}(4)$$

Inzidenzbedingung Punkt-Ebene:

$$\boxed{\lambda^{123} X^0 - \lambda^{023} X^1 + \lambda^{013} X^2 - \lambda^{012} X^3 = 0}$$

Anwendungen in der projektiven Geometrie

Bei festem $\overset{*}{\mathfrak{y}} \in \mathfrak{V}^*$ erfüllen alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{V}$, für die gilt

$$\langle \mathfrak{x}, \overset{*}{\mathfrak{y}} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{x} \in \{\overset{*}{\mathfrak{y}}\}^0$$

einen Unterraum der Dimension n-1 (den Annullatorraum des $\overset{*}{\mathfrak{y}}$). Ist $\mathfrak{x} = x^i \mathfrak{b}_i$ und $\overset{*}{\mathfrak{y}} = y_j \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^j$, so stellt

$$\langle \mathfrak{x}, \overset{*}{\mathfrak{y}} \rangle = x^i y_j \langle \mathfrak{b}_i, \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^j \rangle = x^i y_j \delta_i^j = x^i y_j = 0$$

die Gleichung dieses Unterraumes dar. Die Koordinaten von $\overset{*}{\mathfrak{y}}$ bezüglich der Kobasis stellen die Koeffizienten der Gleichung dar. Man kann daher den Vektor $\lambda \overset{*}{\mathfrak{y}}$ als Koordinatenvektor dieses Unterraumes betrachten. Ein p-dimensionaler Unterraum $\mathfrak{U}_p$ wird dann durch n-p Beziehungen

$$\langle \mathfrak{x}, \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^j \rangle = 0 \qquad j = 1, \ldots, n-p$$

festgelegt. Der (n-p)-Vektor

$$\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1 \wedge \ldots \wedge \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^{n-p} \in \Lambda^{n-p} \mathfrak{V}^*$$

bestimmt den Annullatorraum $\mathfrak{U}_p^o = H[\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1 \wedge \ldots \wedge \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^{n-p}]$ von $\mathfrak{U}_p$.
Spannt man $\mathfrak{U}_p = H[\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p]$ durch die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p$ auf, so ist $\mathfrak{U}_p$ durch den p-Vektor

$$\hat{\mathfrak{x}}(p) = \mathfrak{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{x}_p$$

nach den Sätzen 152, 165b eindeutig festgelegt.
Nach Satz 163 entspricht erg $\mathfrak{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{x}_p$ der Annullatorraum $\mathfrak{U}_p^o$. Nach Satz 163 gilt daher

$$\operatorname{erg} \mathfrak{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{x}_p = \lambda \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1 \wedge \ldots \wedge \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^{n-p}$$

Die Koordinaten der $\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^j$ stellen daher die Koeffizienten der Gleichungen von $\mathfrak{U}_p$ dar. Nach Satz 161a gilt nun

$$\hat{\mathfrak{x}}(p) \llcorner \hat{\mathfrak{y}}^*(q) = \operatorname{erg}^*(\operatorname{erg} \hat{\mathfrak{x}}(p) \wedge \hat{\mathfrak{y}}^*(q)) \qquad p > q$$

Wir betrachten nun den Fall, daß alle beteiligten Multivektoren zerfallen. Dann stellt $\hat{\mathfrak{x}}(p) = \mathfrak{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{x}_p$ den Unterraum

$$\mathfrak{U}_p = H[\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p]$$

und $\mathfrak{y}^*(q) = \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1 \wedge \ldots \wedge \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^q$ den Annullatorraum

$$\mathfrak{U}_{n-q}^o = H[\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1 \wedge \ldots \wedge \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^q] = \mathfrak{U}_q^*$$

eines (n-q)-dimensionalen $\mathfrak{U}_{n-q}$ dar.

erg $\hat{\mathfrak{x}}(p)$ legt den Annullatorraum $\mathfrak{U}_p^o$ fest.

Es sei nun

$$(\mathrm{erg}\ \mathfrak{x}(p)) \wedge \mathfrak{y}^*(q) \neq \mathfrak{o}^*(n-p+q) \qquad (*)$$

Dann stellt nach Satz 151 $(\mathrm{erg}\ \mathfrak{x}(p)) \wedge \mathfrak{y}^*(q)$ den Unterraum $\mathfrak{U}_p^o \oplus \mathfrak{U}_{n-q}^o$ von $\mathfrak{B}^*$ dar.

> Ist die Bedingung (*) erfüllt, so stellt
> $\hat{\mathfrak{x}}(p) \llcorner \hat{\mathfrak{y}}^*(q) = \mathrm{erg}^*[(\mathrm{erg}\ \mathfrak{x}(p)) \wedge \mathfrak{y}^*(q)]$
> den Unterraum $(\mathfrak{U}_p^o \oplus \mathfrak{U}_{n-q}^o)^o = \mathfrak{U}_p \cap \mathfrak{U}_{n-q} =: \mathfrak{U}_{p-q}$ dar

Was bedeutet die Einschränkung (*)? Nach Satz 151 gilt

$$\underline{(\mathrm{erg}\ \hat{\mathfrak{x}}(p)) \wedge \hat{\mathfrak{y}}^*(q) \neq \hat{\mathfrak{o}}^*(n-p+q)} \Leftrightarrow \mathfrak{U}_p^o \cap \mathfrak{U}_{n-q}^o = \{\mathfrak{o}^*\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mathfrak{U}_p^o \cap \mathfrak{U}_{n-q}^o)^o = \{\mathfrak{o}^*\}^o \Leftrightarrow \underline{\mathfrak{U}_p + \mathfrak{U}_{n-q} = \mathfrak{B}_n}$$

$\mathfrak{U}_p + \mathfrak{U}_{n-q} = \mathfrak{B}_n$ ist also die geometrische Voraussetzung für die Anwendbarkeit obigen Satzes auf Unterräume. Der Satz ist demnach nicht anwendbar, wenn gilt

$\mathfrak{U}_p + \mathfrak{U}_{n-q} \subsetneqq \mathfrak{B}_n \Leftrightarrow \dim(\mathfrak{U}_p + \mathfrak{U}_{n-q}) = \dim \mathfrak{U}_p + \dim \mathfrak{U}_{n-q} - \dim(\mathfrak{U}_p \cap \mathfrak{U}_{n-q}) =$
$= p + (n-q) - \dim(\mathfrak{U}_p \cap \mathfrak{U}_{n-q}) < n$ daher: $\underline{\dim(\mathfrak{U}_p \cap \mathfrak{U}_{n-q}) > p-q}$

Es gilt demnach

> Es seien $\mathfrak{x}(p) = \mathfrak{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{x}_p$ und $\mathfrak{y}^*(q) = \overset{*1}{\mathfrak{y}} \wedge \ldots \wedge \overset{*q}{\mathfrak{y}}$ $(p>q)$ zerfallende Multivektoren und $\mathfrak{U}_p = H[\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p]$ sowie $\mathfrak{U}_q^* = H[\overset{*1}{\mathfrak{y}} \wedge \ldots \wedge \overset{*q}{\mathfrak{y}}]$ die durch $\mathfrak{x}(p)$ und $\mathfrak{y}^*(q)$ bestimmten Unterräume. Ist $\hat{\mathfrak{x}}(p) \llcorner \hat{\mathfrak{y}}^*(q) = \hat{\mathfrak{z}}(p-q) \neq \hat{\mathfrak{o}}(p-q)$, so ist $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{U}_p + \mathfrak{U}_q^{*o}$ und für den durch $\hat{\mathfrak{z}}(p-q)$ festgelegten UR $\mathfrak{U}_{p-q}$ gilt $\mathfrak{U}_{p-q} = \mathfrak{U}_p \cap \mathfrak{U}_q^{*o}$.
> $\hat{\mathfrak{x}}(p) \llcorner \hat{\mathfrak{y}}^*(q) = \hat{\mathfrak{z}}(p-q) = \hat{\mathfrak{o}}(p-q)$ gilt genau dann, wenn $\dim(\mathfrak{U}_p \cap \mathfrak{U}_q^{*o}) > p-q$, dh. wenn $\mathfrak{U}_p + \mathfrak{U}_q^{*o} \neq \mathfrak{B}_n$ ist.

Dual dazu gilt der Satz

> Es seien $\mathfrak{x}(p) = \mathfrak{x}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{x}_p$ und $\mathfrak{y}^*(q) = \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1\wedge\ldots\wedge\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^q$ $(p<q)$ zerfallende Multivektoren und $\mathfrak{U}_p = H[\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_p]$ sowie $\mathfrak{U}^*_q = H[\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1\wedge\ldots\wedge\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^q]$ die durch $\mathfrak{x}(p)$ und $\mathfrak{y}^*(q)$ bestimmten Unterräume. Ist $\hat{\mathfrak{x}}(p)\lrcorner\hat{\mathfrak{y}}^*(q) = \hat{\mathfrak{z}}(q-p) \neq \hat{\mathfrak{o}}(q-p)$, so ist $\mathfrak{B}^*_n = \mathfrak{U}^o_p+\mathfrak{U}^*_q$ und für den durch $\hat{\mathfrak{z}}^*(q-p)$ festgelegten UR $\mathfrak{U}^*_{q-p}$ gilt $\mathfrak{U}^*_{q-p} = \mathfrak{U}^o_p\cap\mathfrak{U}^*_q$.
>
> $\hat{\mathfrak{x}}(p)\lrcorner\hat{\mathfrak{y}}^*(q) = \hat{\mathfrak{z}}(q-p) = \hat{\mathfrak{o}}(q-p)$ gilt genau dann, wenn $\dim(\mathfrak{U}^o_p\cap\mathfrak{U}^*_q) > q-p$, dh. wenn $\mathfrak{U}^o_p+\mathfrak{U}^*_q \neq \mathfrak{B}^*_n$ ist.

Es bleibt noch der bisher ausgeschlossene Fall $p = q$ zu erledigen. In diesem Falle werden durch $\hat{\mathfrak{x}}(p)$ die beiden Unterräume

$\mathfrak{U}_p = H[\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_p]$ und $\mathfrak{U}^o_p = \mathfrak{U}^*_{n-p} = (H[\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_p])^o$, durch $\hat{\mathfrak{y}}^*(p)$ die beiden Unterräume $\mathfrak{U}^*_p = H[\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1\wedge\ldots\wedge\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p]$ und $\mathfrak{U}^{*o}_p = \mathfrak{U}_{n-p} = (H[\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1\wedge\ldots\wedge\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^q])^o$ festgelegt. Dann gilt nach 161a,b und 156c

$$\hat{\mathfrak{x}}(p)\llcorner\hat{\mathfrak{y}}^*(p) = \operatorname{erg}^*(\operatorname{erg}\hat{\mathfrak{x}}(p)\wedge\hat{\mathfrak{y}}^*(p)) =$$
$$= \hat{\mathfrak{x}}(p)\lrcorner\hat{\mathfrak{y}}^*(p) = \operatorname{erg}(\hat{\mathfrak{x}}(p)\wedge\operatorname{erg}^*\hat{\mathfrak{y}}^*(p)) = \langle\hat{\mathfrak{x}}(p),\hat{\mathfrak{y}}^*(p)\rangle = \lambda \in K$$

Es sei $\mathfrak{U}_p\cap\mathfrak{U}^{*o}_p = \mathfrak{U}_r \neq \{\mathfrak{o}\}$. Ist $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_r$ eine Basis von $\mathfrak{U}_r$, so kann sie zu einer Basis $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_r,\mathfrak{a}_{r+1},\ldots,\mathfrak{a}_p$ von $\mathfrak{U}_p$ erweitert werden. Dann gilt

$$\mathfrak{x}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{x}_p = \rho\,\mathfrak{a}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{a}_p \quad\ldots\quad \hat{\mathfrak{x}}(p) = \rho\,\hat{\mathfrak{a}}(p)$$

Da definitionsgemäß $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_r \subset \mathfrak{U}^{*o}_p$ ist, gilt

$$\langle\mathfrak{a}_i,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^j\rangle = 0 \qquad i = 1,\ldots r;\ j = 1,\ldots p$$

Nach 156c und 145 folgt dann

$$\hat{\mathfrak{x}}(p)\llcorner\hat{\mathfrak{y}}^*(p) = \langle\hat{\mathfrak{x}}(p),\hat{\mathfrak{y}}^*(p)\rangle = \rho\,\langle\hat{\mathfrak{a}}(p),\hat{\mathfrak{y}}^*(p)\rangle = \rho\det\|\langle\mathfrak{a}_i,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^j\rangle\|_p =$$

$$= \rho\begin{vmatrix}\langle\mathfrak{a}_1,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1\rangle, & \ldots & ,\langle\mathfrak{a}_1,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \langle\mathfrak{a}_r,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1\rangle, & \ldots & ,\langle\mathfrak{a}_r,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p\rangle\\ \langle\mathfrak{a}_{r+1},\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1\rangle, & \ldots & ,\langle\mathfrak{a}_{r+1},\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p\rangle\\ \vdots & & \\ \langle\mathfrak{a}_p,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1\rangle, & \ldots & ,\langle\mathfrak{a}_p,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p\rangle\end{vmatrix} = \rho\begin{vmatrix}\left.\begin{matrix}0 & \ldots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \ldots & 0\end{matrix}\right\} r\\ \begin{matrix}\langle\mathfrak{a}_{r+1},\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1\rangle, & \ldots & ,\langle\mathfrak{a}_{r+1},\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p\rangle\\ \vdots & & \\ \langle\mathfrak{a}_p,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1\rangle, & \ldots & ,\langle\mathfrak{a}_p,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p\rangle\end{matrix}\end{vmatrix} = 0$$

Ist hingegen $\mathfrak{U}_p \cap \mathfrak{U}^{*o}_p = \{\mathfrak{o}\}$, so gilt

$$\langle \mathfrak{r}_i, \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^j\rangle \neq 0 \qquad i = 1,\dots,p;\ j = 1,\dots,p$$

Daher muß in diesem Falle

$$\hat{\mathfrak{r}}(p) \llcorner \hat{\mathfrak{y}}^*(p) = \det\|\langle \mathfrak{r}_i, \mathfrak{y}^j\rangle\| = \lambda \neq 0$$

sein. Wäre nämlich $\lambda = 0$, so müßte eine Zeile der Determinante von den anderen linear abhängig sein; man könnte also diese Zeile durch Linearkombination der anderen zum Verschwinden bringen. Dann gäbe es aber entgegen der Voraussetzung Vektoren $\mathfrak{z} = \mu^i \mathfrak{r}_i$ mit $\langle \mathfrak{z}, \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^j\rangle = 0$. Daraus folgt

$$\mathfrak{U}_p \cap \mathfrak{U}^{*o}_p = \mathfrak{U}_r \neq \{\mathfrak{o}\} \Leftrightarrow \hat{\mathfrak{r}}(p) \llcorner \hat{\mathfrak{y}}^*(p) = 0$$

$$\mathfrak{U}_p \cap \mathfrak{U}^{*o}_p = \{\mathfrak{o}\} \qquad \Leftrightarrow \hat{\mathfrak{r}}(p) \llcorner \hat{\mathfrak{y}}^*(p) \neq 0$$

Analog findet man

$$\mathfrak{U}^o_p \cap \mathfrak{U}^*_p = \mathfrak{U}_s \neq \{\mathfrak{o}^*\} \Leftrightarrow \hat{\mathfrak{r}}(p) \lrcorner \hat{\mathfrak{y}}^*(p) = 0$$

$$\mathfrak{U}^o_p \cap \mathfrak{U}^*_p = \{\mathfrak{o}^*\} \qquad \Leftrightarrow \hat{\mathfrak{r}}(p) \lrcorner \hat{\mathfrak{y}}^*(p) = 0$$

Ferner gilt:

$$\mathfrak{U}_p \cap \mathfrak{U}^{*o}_p = \mathfrak{U}_r \Rightarrow \mathfrak{U}^o_r = (\mathfrak{U}_p \cap \mathfrak{U}^{*o}_p)^o = \mathfrak{U}^o_p + \mathfrak{U}^*_p$$

$$\mathfrak{U}^o_p \cap \mathfrak{U}^*_p = \overset{*}{\mathfrak{U}}_s \Rightarrow \mathfrak{U}^{*o}_s = (\mathfrak{U}^o_p \cap \mathfrak{U}^*_p)^o = \mathfrak{U}_p + \mathfrak{U}^{*o}_p$$

Daher

$$\underline{\dim \mathfrak{U}_r} = \dim(\mathfrak{U}_p \cap \mathfrak{U}^{*o}_p) = \dim \mathfrak{U}_p + \dim \mathfrak{U}^{*o}_p - \dim(\mathfrak{U}_p + \mathfrak{U}^{*o}_p) =$$

$$= p + (n-p) - \dim \mathfrak{U}^{*o}_s = n-(n-s) = s = \underline{\dim \mathfrak{U}^*_s}$$

> Es seien $\hat{\mathfrak{r}}(p) = \mathfrak{r}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{r}_p$ und $\hat{\mathfrak{y}}^*(p) = \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1 \wedge \dots \wedge \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p$ zwei zerfallende Multivektoren gleicher Stufenzahl und $\mathfrak{U}_p = H[\mathfrak{r}_1,\dots,\mathfrak{r}_p]$, $\mathfrak{U}^*_p = H[\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1,\dots,\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^p]$ die durch $\hat{\mathfrak{r}}(p)$ und $\hat{\mathfrak{y}}^*(p)$ bestimmten Unterräume. Ist dann
>
> $$\hat{\mathfrak{r}}(p) \llcorner \hat{\mathfrak{y}}^*(p) = \hat{\mathfrak{r}}(p) \lrcorner \hat{\mathfrak{y}}^*(p) = 0$$
>
> so existieren die beiden gleichdimensionalen Unterräume von $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}^*$
>
> $$\mathfrak{U}_r = \mathfrak{U}_p \cap \mathfrak{U}^{*o}_p \quad \text{und} \quad \mathfrak{U}^*_r = \mathfrak{U}^o_p \cap \mathfrak{U}^*_p\ .$$
>
> Die Beziehung
>
> $$\hat{\mathfrak{r}}(p) \llcorner \hat{\mathfrak{y}}^*(p) = \hat{\mathfrak{r}}(p) \lrcorner \hat{\mathfrak{y}}^*(p) = \lambda \neq 0$$
>
> gilt genau dann, wenn
>
> $$\mathfrak{U}_p \cap \mathfrak{U}^{*o}_p = \{\mathfrak{o}\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{U}^o_p \cap \mathfrak{U}^*_p = \{\mathfrak{o}^*\}$$
>
> ist.

BEISPIELE

1. Untersuchung eines Multivektors auf Zerfallen:

Drei Vektoren des $\mathfrak{B}_5$ seien gegeben

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_3 + \mathfrak{b}_5$$
$$\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{b}_4 \qquad X = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$
$$\mathfrak{x}_3 = \mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_5$$

Direktes Ausmultiplizieren oder Verwendung von Satz 140 ergibt:

$$\hat{\mathfrak{x}}(3) = \mathfrak{x}_1 \wedge \mathfrak{x}_2 \wedge \mathfrak{x}_3 =$$
$$= - \mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3 - 2\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_5 - \mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_4 + 2\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_4 \wedge \mathfrak{b}_5 + \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_5 + \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_4 \mathfrak{b}_5$$

Untersuchung von $\hat{\mathfrak{x}}(3)$ auf Zerfallen nach Satz 165b

$$\mathfrak{N} := \{\mathfrak{y} \mid \hat{\mathfrak{x}}(3) \wedge \mathfrak{y} = \hat{\mathfrak{o}}(4)\}, \qquad \mathfrak{y} = y^i \mathfrak{b}_i$$

$$\hat{\mathfrak{x}}(3) \wedge \mathfrak{y} = -(y^2+y^4)\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_4 - (y^1-2y^3+y^5)\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_5 +$$
$$+ 2(y^2+y^4)\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_4 \wedge \mathfrak{b}_5 - (y^1-2y^3+y^5)\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_4 \wedge \mathfrak{b}_5 -$$
$$- (y^2+y^4)\mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_4 \wedge \mathfrak{b}_5 = \hat{\mathfrak{o}}(4)$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y^2 \qquad + y^4 \qquad &= 0 \\ y^1 \qquad + 2y^3 \qquad - y^5 &= 0 \end{aligned}$$

hat die von den Parametern λ, μ und ν abhängige Lösungsmenge

$$y^1 = 2\lambda - \nu, \quad y^2 = -\mu, \quad y^3 = \lambda, \quad y^4 = \mu, \quad y^5 = \nu$$

$$\lambda = 1, \ \mu = \nu = 0 \Rightarrow \qquad \mathfrak{y}^1 = 2\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_3$$
$$\mu = 1, \ \lambda = \nu = 0 \Rightarrow \qquad \mathfrak{y}^2 = -\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_4$$
$$\nu = 1, \ \lambda = \mu = 0 \Rightarrow \qquad \mathfrak{y}^3 = -\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_5$$

$\hat{\mathfrak{x}}(3)$ zerfällt also und läßt sich etwa in der Gestalt

$$\hat{\mathfrak{x}}(3) = \mathfrak{y}_1 \wedge \mathfrak{y}_2 \wedge \mathfrak{y}_3$$

darstellen.

2. Bedingung für das Zerfallen eines Bivektors:

Es sei $\mathfrak{B} = H[\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3]$ und $\hat{\mathfrak{f}}(2) \in \Lambda^2\mathfrak{B}$

$$\hat{\mathfrak{f}}(2) = \lambda^{01}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{02}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2 + \lambda^{03}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda^{23}\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda^{31}\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda^{12}\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2$$

Welche Bedingungen müssen die λ^{ij} erfüllen, daß $\hat{\mathfrak{f}}(2)$ zerfällt, d.h. daß $\hat{\mathfrak{f}}(2)$ eine Gerade darstellt? Es sei wieder:

$\mathfrak{N} := \{\mathfrak{y} \mid \hat{\mathfrak{f}}(2)\wedge\mathfrak{y} = \hat{\mathfrak{o}}(3)\}$, $\quad \mathfrak{y} = y^i\mathfrak{b}_i$

$\hat{\mathfrak{f}}(2)$ = zerfällt nach Satz 165b genau dann, wenn $\dim \mathfrak{N} = 2$.

$$\hat{\mathfrak{f}}(2)\wedge\mathfrak{y} = (\lambda^{12}y^0 - \lambda^{02}y^1 + \lambda^{01}y^2)\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2 + (-\lambda^{31}y^0 - \lambda^{03}y^1 + \lambda^{01}y^3)\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_3 +$$
$$+ (\lambda^{23}y^0 - \lambda^{03}y^2 + \lambda^{02}y^3)\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + (\lambda^{23}y^1 + \lambda^{31}y^2 + \lambda^{12}y^3)\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 = \hat{\mathfrak{o}}(3)$$

Das durch Nullsetzen der Koeffizienten gewonnene Gleichungssystem für die y^i muß eine zweidimensionale Lösungsmenge besitzen.

y^0	y^1	y^2	y^3		
λ^{12}	$-\lambda^{02}$	λ^{01}	0	λ^{31} +	$-\lambda^{23}$
$-\lambda^{31}$	$-\lambda^{03}$	0	λ^{01}	λ^{12}	+
λ^{23}	0	$-\lambda^{03}$	λ^{02}		λ^{12}
0	λ^{23}	λ^{31}	λ^{12}		
0	$-\lambda^{31}\lambda^{02}-\lambda^{12}\lambda^{03}$	$\lambda^{31}\lambda^{01}$	$\lambda^{12}\lambda^{01}$		1
0	$\lambda^{23}\lambda^{02}$	$-\lambda^{23}\lambda^{02}-\lambda^{12}\lambda^{03}$	$\lambda^{12}\lambda^{23}$	1 −	−
0	λ^{23}	λ^{31}	λ^{12}	λ^{02}	λ^{02}
0	0	$\lambda^{01}\lambda^{23}+\lambda^{02}\lambda^{31}+\lambda^{03}\lambda^{12}$	0		
0	$\lambda^{01}\lambda^{23}+\lambda^{02}\lambda^{31}+\lambda^{03}\lambda^{12}$	0	0		

Das reduzierte Gleichungssystem lautet demnach

$$\begin{aligned}
\lambda^{12}y^0 + \lambda^{02}y^1 + \lambda^{01}y^2 &= 0\\
\lambda^{23}y^1 + \lambda^{31}y^2 + \lambda^{12}y^3 &= 0\\
(\lambda^{01}\lambda^{23}+\lambda^{02}\lambda^{31}+\lambda^{03}\lambda^{12})y^1 &= 0\\
(\lambda^{01}\lambda^{23}+\lambda^{02}\lambda^{31}+\lambda^{03}\lambda^{12})y^2 &= 0
\end{aligned}$$

Damit $\dim \mathfrak{N} = 2$ wird, muß gelten:

$$\lambda^{01}\lambda^{23}+\lambda^{02}\lambda^{31}+\lambda^{03}\lambda^{12} = 0 \quad \text{(PLÜCKER-Bedingung)}$$

3. Ergänzung eines Multivektors:

Es sei $\mathfrak{B} = H[\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_4, \mathfrak{b}_5]$ und $\hat{\mathfrak{r}}(3) \in \Lambda^3\mathfrak{B}$ mit

$\hat{\mathfrak{r}}(3) = \lambda^{I(3)}.\hat{\mathfrak{b}}_{I(3)} =$

$$= -\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 - 2\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_5 - \mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_4 + 2\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_4\wedge\mathfrak{b}_5 + \mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_5 + \mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_5$$

Nach Satz 159 gilt

$$\text{erg}\,\hat{\mathfrak{r}} = \lambda^{I(3)}\delta^{12345}_{K(2)I(3)}\ \hat{\mathfrak{b}}_*^{K(2)}$$

Möglichkeiten für K(2) und I(3)

$$K(2)\ \left\{\begin{array}{ll} 12 & 24 \\ 13 & 25 \\ 14 & 34 \\ 15 & 35 \\ 23 & 45 \end{array}\right. \qquad I(3)\ \left\{\begin{array}{ll} \underline{123} & \underline{145} \\ 124 & \underline{234} \\ \underline{125} & 235 \\ \underline{134} & \underline{245} \\ 134 & \underline{345} \end{array}\right.$$

1. Summation über I(3):

$$\text{erg}\,\hat{\mathfrak{r}}(3) = \left\{-\delta^{12345}_{K123} - 2\delta^{12345}_{K125} - \delta^{12345}_{K134} + 2\delta^{12345}_{K145} + \delta^{12345}_{K235} + \delta^{12345}_{K345}\right\}\hat{\mathfrak{b}}_*^{K}$$

2. Summation über K(2)

$$\text{erg}\,\hat{\mathfrak{r}}(3) = \left\{\delta^{12345}_{12345}\right\}\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2 + \left\{\delta^{12345}_{14235}\right\}\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^4 + \left\{-\delta^{12345}_{25134}\right\}\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^5 +$$

$$+ \left\{-2\delta^{12345}_{34125}\right\}\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^3\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^4 + \left\{-\delta^{12345}_{45123}\right\}\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^4\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^5$$

Berücksichigung der Signatur der einzelnen Permutationen ergibt

$$\underline{\underline{\text{erg}\,\hat{\mathfrak{r}}(3) = \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2 + \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^4 + 2\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^3 - \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^5 - 2\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^3\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^4 - \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^4\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^5}}$$

Da $\hat{\mathfrak{r}}(3)$ zerfällt (Beispiel 1), zerfällt auch erg $\hat{\mathfrak{r}}(3)$ (Satz 162)
Die Faktoren von erg $\hat{\mathfrak{r}}(3)$ spannen den Annullatorraum zu dem von $\hat{\mathfrak{r}}(3)$ bestimmten Unterraum auf

Faktorenzerlegung von erg $\hat{\mathfrak{r}}(3)$ $\quad (\mathfrak{y}^* = y^i\overset{*}{\mathfrak{b}}_i)$

$$\text{erg}\,\hat{\mathfrak{r}}(3)\wedge\overset{*}{\mathfrak{y}} = \ldots =$$

$$= (2y_1+y_3)\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^3 - (y_2-y_4)\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^4 - (y_1-y_5)\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^5 -$$

$$- (2y_1+y_3)\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^3\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^4 - (y_1-y_5)\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^4\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^5 - 2(y_2-y_4)\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^3\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^4 +$$

$$+ (y_3+2y_5)\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^3\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^5 - (y_2-y_4)\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^4\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^5 - (y_3+2y_5)\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^3\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^4\wedge\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^5 =$$

$$= \hat{\mathfrak{b}}^*(3)$$

Das duch Nullsetzen der Koeffizienten sich ergebende Gleichungssystem für die y^i lautet

$$\begin{array}{lllllll} 2y_1 & & +y_3 & & & = 0 \\ & y_2 & & -y_4 & & = 0 \\ y_1 & & & & -y_5 & = 0 \\ & & y_3 & & +2y_5 & = 0 \end{array}$$

Als Lösung ergibt sich die zweiparametrige Menge

$y_1 = \lambda,\ y_2 = \mu,\ y_3 = -2\lambda,\ y_4 = \mu,\ y_5 = \lambda$

Daraus

$$\lambda = 1,\ \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1 = \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1 - 2\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2 + \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^5$$

$$\lambda = 0,\ \mu = 1 \quad \Rightarrow \quad \overset{*}{\mathfrak{y}}{}^2 = \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2 + \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^4$$

Die Koordinaten der Vektoren $\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^1$ und $\overset{*}{\mathfrak{y}}{}^2$ sind die Koeffizienten der Gleichungen des von den Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ aus Beispiel 1 aufgespannten Unterraumes $\mathfrak{U} = H[\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3]$:

$$\left.\begin{array}{l} x^1 - 2x^3 + x^5 = 0 \\ x^2 + x^4 = 0 \end{array}\right\} \text{Gleichungen von } \mathfrak{U}$$

4. <u>Duales inneres Produkt:</u> $\mathfrak{B} = H[\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_4, \mathfrak{b}_5]$

$$\hat{\mathfrak{x}}(3) = -\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3 - 2\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_5 - \mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_4 + 2\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_4 \wedge \mathfrak{b}_5 + \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_5 + \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_4 \wedge \mathfrak{b}_5 = \lambda^{I(3)} \hat{\mathfrak{b}}_{I(3)}$$

$$\mathfrak{y}^* = -\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1 + \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2 + \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^4 - \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^5 = \mu_j \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^j$$

Nach 157c gilt

$$\hat{\mathfrak{x}}(3) \llcorner \mathfrak{y}^* = \lambda^{I(3)} \mu_j \, \delta^{jK(2)}_{I(3)} \, \hat{\mathfrak{b}}_{K(2)}$$

$$j \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \right. \qquad K(2) \left\{ \begin{array}{ll} 12 & 24 \\ 13 & 25 \\ 14 & 34 \\ 15 & 35 \\ 23 & 45 \end{array} \right. \qquad I(3) \left\{ \begin{array}{ll} 123 & 145 \\ 124 & 234 \\ 125 & 235 \\ 134 & 245 \\ 135 & 345 \end{array} \right.$$

Summation über j

$$\hat{\mathfrak{x}}(3) \llcorner \mathfrak{y}^* = \lambda^{I(3)} [-\delta^{1K}_I + \delta^{2K}_I + \delta^{4K}_I - \delta^{5K}_I] \, \hat{\mathfrak{b}}_{K(2)}$$

Summation über K(2)

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{x}}(3) \llcorner \mathfrak{y}^* = \lambda^{I(3)} \{ & [\delta^{412}_I - \delta^{512}_I] \mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2 + [\delta^{213}_I + \delta^{413}_I - \delta^{513}_I] \mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_3 + \\ & + [\delta^{214}_I - \delta^{514}_I] \mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_4 + [\delta^{215}_I + \delta^{415}_I] \mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_5 + \\ & + [-\delta^{123}_I + \delta^{423}_I - \delta^{523}_I] \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3 + [-\delta^{124}_I - \delta^{524}_I] \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_4 + \\ & + [-\delta^{125}_I \ \delta_I{}^{425}] \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_5 + [-\delta^{134}_I + \delta^{234}_I - \delta^{534}] \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_4 + \\ & + [-\delta^{135}_I + \delta^{235}_I + \delta^{435}] \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_5 + [-\delta^{145}_I + \delta^{245}_I] \mathfrak{b}_4 \wedge \mathfrak{b}_5 \} \end{aligned}$$

Summation über I(3)

$$\hat{\mathfrak{x}}(3) \llcorner \mathfrak{y}^* = -\{\delta^{213}_{123}\, \mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_3 - \delta^{123}_{123}\, \mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3\} -$$

$$-2\{-\delta^{512}_{125}\, \mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2 + \delta^{215}_{125}\, \mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_5 - \delta^{125}_{125}\, \mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_5\} -$$

$$-\{\delta^{413}_{134}\, \mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_3 - \delta^{134}_{134}\, \mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_4\} +$$

$$+2\{-\delta^{514}_{145}\, \mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_4 + \delta^{415}_{145}\, \mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_5 - \delta^{145}_{145}\, \mathfrak{b}_4\wedge\mathfrak{b}_5\} +$$

$$+\{-\delta^{523}_{235}\, \mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + \delta^{235}_{235}\, \mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_5\} +$$

$$+\{-\delta^{534}_{345}\, \mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_4 + \delta^{435}_{345}\, \mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_5\} =$$

$$= 2\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2 + (1-1)\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_3 - 2\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_4 + (2-2)\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_5 + (1-1)\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 +$$
$$+ 2\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_5 + (1-1)\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_4 + (1-1)\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_5 - 2\mathfrak{b}_4\wedge\mathfrak{b}_5$$

Daher

$$\hat{\mathfrak{x}}(3) \llcorner \mathfrak{y}^* = 2\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2 - 2\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_4 + 2\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_5 - 2\mathfrak{b}_4\wedge\mathfrak{b}_5$$

$\hat{\mathfrak{x}}(3) \llcorner \mathfrak{y}^*$ legt den Schnittraum des von $\hat{\mathfrak{x}}(3)$ festgelegten 3-dim Unterraumes und des 4-dim Unterraumes mit der Gleichung

$-x^1 + x^2 + x^4 - x^5 = 0$ fest (Satz 173c)

5. <u>Schnitt Gerade-Ebene im $\mathfrak{P}_3$</u>: $(\mathfrak{B}_4 = H[\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3])$

$$g \;\ldots\; \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \varepsilon \;\ldots\; \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$$

$$\hat{\mathfrak{x}}(2) = \lambda^{I(2)}\, \hat{\mathfrak{b}}_{I(2)} = \mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2 - \mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3$$

$$\hat{\mathfrak{y}}(3) = \mu^{J(3)}\, \hat{\mathfrak{b}}_{J(3)} = -\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2 - \mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_3 + 2\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 - 2\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3$$

Mit $\mathfrak{y}^*(1) := \operatorname{erg} \mathfrak{y}(3)$ ergibt sich nach Seite 2 (s.o) der Schnitt als $\hat{\mathfrak{x}}(2) \llcorner \mathfrak{y}^*(1)$ (Satz 159):

$$\operatorname{erg} \hat{\mathfrak{y}}(3) = \mu^{J(3)}\, \delta^{0123}_{kJ(3)}\, \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^k = [-\delta^{0123}_{k012} - \delta^{0123}_{k013} + 2\delta^{0123}_{k023} - 2\delta^{0123}_{k123}]\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^k$$

$$= -\delta^{0123}_{3012}\, \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^3 - \delta^{0123}_{2013}\, \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2 + 2\delta^{0123}_{1023}\, \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1 - 2\delta^{0123}_{0123}\, \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^0$$

$$\underline{\overset{*}{\mathfrak{y}}(1) = \operatorname{erg} \hat{\mathfrak{y}}(3) = -2\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^0 - 2\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1 - \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2 + \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^3 = y_l\overset{*}{\mathfrak{b}}{}^l}$$

Daher nach Satz 157c:

$$\hat{\mathfrak{r}}(2) \llcorner \overset{*}{\mathfrak{y}}(1) = \lambda^{I(2)} y_l \, \delta^{lm}_{I(2)} \, \mathfrak{b}_m = [\delta^{lm}_{01} + \delta^{lm}_{02} + \delta^{lm}_{12} - \delta^{lm}_{13} - \delta^{lm}_{23}] y_l \mathfrak{b}_m =$$

$$= [-2(\delta^{0m}_{01}+\delta^{0m}_{02}) - 2(\delta^{1m}_{01}+\delta^{1m}_{12}-\delta^{1m}_{13}) - (\delta^{2m}_{02}+\delta^{2m}_{12}-\delta^{2m}_{23}) + (-\delta^{3m}_{13}-\delta^{3m}_{23})] \, \mathfrak{b}_m =$$

$$= (-2\delta^{10}_{01}-\delta^{20}_{02})\mathfrak{b}_0 + (-2\delta^{01}_{01}-\delta^{21}_{12}-\delta^{31}_{13})\mathfrak{b}_1 + (-2\delta^{02}_{02}-2\delta^{12}_{12}-\delta^{32}_{23})\mathfrak{b}_2 +$$

$$+ (2\delta^{13}_{13}+\delta^{23}_{23})\mathfrak{b}_3$$

Der Schnittpunkt wird daher vom Vektor

$$\underline{\underline{\mathfrak{r} = \hat{\mathfrak{r}}(2) \llcorner \mathrm{erg}\, \hat{\mathfrak{y}}(3) = 3\mathfrak{b}_0 - 3\mathfrak{b}_2 + 3\mathfrak{b}_3}}$$

aufgespannt.

6. Schnitt Gerade-Ebene im $\mathfrak{P}_3$ $\quad (B_4 = H[\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3])$

Gerade ... $\hat{\mathfrak{g}}(2) = \lambda^{01}\mathfrak{b}_0 \wedge \mathfrak{b}_1 + \lambda^{02}\mathfrak{b}_0 \wedge \mathfrak{b}_2 + \lambda^{03}\mathfrak{b}_0 \wedge \mathfrak{b}_3 +$

$$+ \lambda^{23}\mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3 + \lambda^{31}\mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_1 + \lambda^{12}\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2$$

$$(\lambda^{01}\lambda^{23} + \lambda^{02}\lambda^{31} + \lambda^{03}\lambda^{12} = 0)$$

Ebene ... $\mu_0 X^0 + \mu_1 X^1 + \mu_2 X^2 + \mu_3 X^3 = 0$. Das ist äquivalent zu:

$$\overset{*}{\mathfrak{y}}(1) = \mu_0 \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^0 + \mu_1 \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1 + \mu_2 \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2 + \mu_3 \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^3$$

Hier ist $p = 2$, $q = 1$ und der Schnitt wird festgelegt durch (s.o. Seite 2 und Satz 157c):

$$\hat{\mathfrak{g}}(2) \llcorner \overset{*}{\mathfrak{y}}(1) = \lambda^{I(2)} \mu_j \, \delta^{jk}_{I(2)} \, \mathfrak{b}_k =$$

$$= (\lambda^{01}\delta^{jk}_{01} + \lambda^{02}\delta^{jk}_{02} + \lambda^{03}\delta^{jk}_{03} + \lambda^{23}\delta^{jk}_{23} + \lambda^{31}\delta^{jk}_{31} + \lambda^{12}\delta^{jk}_{12})\mu_j \mathfrak{b}_k =$$

$$= [(\lambda^{01}\delta^{0k}_{01} + \lambda^{02}\delta^{0k}_{02} + \lambda^{03}\delta^{0k}_{03})\mu_0 + (\lambda^{01}\delta^{1k}_{01} + \lambda^{31}\delta^{1k}_{31} + \lambda^{12}\delta^{1k}_{12})\mu_1 +$$

$$+ (\lambda^{02}\delta^{2k}_{02} + \lambda^{23}\delta^{2k}_{23} + \lambda^{12}\delta^{2k}_{12})\mu_2 + (\lambda^{03}\delta^{3k}_{03} + \lambda^{23}\delta^{3k}_{23} + \lambda^{31}\delta^{3k}_{31})\mu_3] \, \mathfrak{b}_k =$$

$$= (\lambda^{01}\delta^{10}_{01}\mu_1 + \lambda^{02}\delta^{20}_{02}\mu_2 + \lambda^{03}\delta^{30}_{03}\mu_3)\mathfrak{b}_0 + (\lambda^{01}\delta^{01}_{01}\mu_0 + \lambda^{12}\delta^{21}_{12}\mu_2 + \lambda^{31}\delta^{31}_{31}\mu_3)\mathfrak{b}_1 +$$

$$+ (\lambda^{02}\delta^{02}_{02}\mu_0 + \lambda^{12}\delta^{12}_{12}\mu_1 + \lambda^{23}\delta^{32}_{23}\mu_3)\mathfrak{b}_2 + (\lambda^{03}\delta^{03}_{03}\mu_0 + \lambda^{31}\delta^{13}_{31}\mu_2 + \lambda^{23}\delta^{23}_{23}\mu_2)\mathfrak{b}_3$$

Der Schnittpunkt $\hat{\mathfrak{r}}(1) = \hat{\mathfrak{g}}(2) \llcorner \overset{*}{\mathfrak{y}}(1)$ wird daher aufgespannt vom Vektor

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{r} = (-\lambda^{01}\mu_1 - \lambda^{02}\mu_2 - \lambda^{03}\mu_3)\mathfrak{b}_0 + (\lambda^{01}\mu_0 - \lambda^{12}\mu_2 + \lambda^{31}\mu_3)\mathfrak{b}_0 + \\ + (\lambda^{02}\mu_0 + \lambda^{12}\mu_1 - \lambda^{23}\mu_3)\mathfrak{b}_2 + (\lambda^{03}\mu_0 - \lambda^{31}\mu_2 + \lambda^{23}\mu_2)\mathfrak{b}_3 \end{aligned}}$$

Wäre $\hat{\mathfrak{x}}(1) = \hat{\mathfrak{g}}(2) \llcorner \overset{*}{\mathfrak{y}}(1) = \hat{\mathfrak{o}}(1)$, würden die Gerade und die Ebene nicht den gesamten Raum aufspannen, d.h. sie inzidieren: Das Verschwinden der Koeffizienten stellt daher die <u>Inzidenzbedingung</u> von Gerade und Ebene dar:

$$\boxed{\begin{array}{lllll} & \lambda^{01}\mu_1 & + \lambda^{02}\mu_2 & + \lambda^{03}\mu_3 & = 0 \\ \lambda^{01}\mu_0 & & - \lambda^{12}\mu_2 & + \lambda^{31}\mu_3 & = 0 \\ \lambda^{02}\mu_0 & + \lambda^{12}\mu_2 & & - \lambda^{23}\mu_3 & = 0 \\ \lambda^{03}\mu_0 & - \lambda^{31}\mu_2 & + \lambda^{23}\mu_2 & & = 0 \end{array}}$$

7. <u>Schnitt zweier Ebenen des $\mathcal{P}_3$</u> $\quad (\mathfrak{B}_4 = H[\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3])$

Den Ebenen

$$\alpha \ldots a_0 X^0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + a_3 X^3 = 0 \ldots \mathfrak{U}_1$$

$$\beta \ldots b_0 X^0 + b_1 X^1 + b_2 X^2 + b_3 X^3 = 0 \ldots \mathfrak{U}_2$$

entsprechen die Kovektoren

$$\overset{*}{\mathfrak{a}} = a_i \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^i, \quad \overset{*}{\mathfrak{b}} = b_i \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^i \quad \mathfrak{U}_1 = H[\overset{*}{\mathfrak{a}}], \quad \mathfrak{U}_2 = H[\overset{*}{\mathfrak{b}}]$$

Dem dualen Bivektor $\hat{\mathfrak{g}}^*(2) = \overset{*}{\mathfrak{a}} \wedge \overset{*}{\mathfrak{b}}$ entspricht der Unterraum $\mathfrak{U}_1^\circ + \mathfrak{U}_2^\circ$

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| \qquad \lambda_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$$

$$\hat{\mathfrak{g}}^*(2) = \lambda_{01} \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^0 \wedge \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1 + \lambda_{02} \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^0 \wedge \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2 + \lambda_{03} \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^0 \wedge \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2 +$$

$$+ \lambda_{23} \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2 \wedge \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^3 + \underline{\lambda_{31} \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^3 \wedge \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1} + \lambda_{12} \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^1 \wedge \overset{*}{\mathfrak{b}}{}^2$$

Der Ergänzung $\hat{\mathfrak{g}}(2) := \mathrm{erg}^* \, \hat{\mathfrak{g}}^*(2)$ entspricht der Unterraum

$$(\mathfrak{U}_1^\circ + \mathfrak{U}_2^\circ)^\circ = \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 \ldots \text{ Schnitt von } \alpha, \beta \quad (\text{Satz } 163).$$

Nach Satz 159 gilt:

$$\mathrm{erg}^* \, \hat{\mathfrak{g}}^*(2) = \lambda_{I(2)} \delta^{I(2)K(2)}_{N(4)} \, \hat{\mathfrak{b}}_{K(2)} =$$

$$= [\lambda_{01} \delta^{01K(2)}_{0123} + \lambda_{02} \delta^{02K(2)}_{0123} + \lambda_{03} \delta^{03K(2)}_{0123} +$$

$$+ \lambda_{23} \delta^{23K(2)}_{0123} + \lambda_{31} \delta^{31K(2)}_{0123} + \lambda_{12} \delta^{12K(2)}_{0123}] \, \hat{\mathfrak{b}}_{K(2)} =$$

$$= \lambda_{23} \delta^{2301}_{0123} \, \mathfrak{b}_0 \wedge \mathfrak{b}_1 + \lambda_{31} \delta^{3101}_{0123} \, \mathfrak{b}_0 \wedge \mathfrak{b}_2 + \lambda_{12} \delta^{1203}_{0123} \, \mathfrak{b}_0 \wedge \mathfrak{b}_3 +$$

$$+ \lambda_{01} \delta^{0123}_{0123} \, \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3 + \lambda_{02} \delta^{0231}_{0123} \, \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_1 + \lambda_{03} \delta^{0312}_{0123} \, \mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2$$

$$\hat{\mathfrak{g}}(2) = \lambda_{23}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda_{31}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2 + \lambda_{12}\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_3 +$$
$$+ \lambda_{01}\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + \lambda_{02}\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_1 + \lambda_{03}\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2$$

Die homogenen "Ebenenkoordinaten" λ_{ij} und die homogenen PLÜCKER-Koordinaten λ^{ij} der Geraden $\hat{\mathfrak{g}}(2)$ hängen folgendermaßen zusammen

$$\boxed{\lambda_{23}:\lambda_{31}:\lambda_{12}:\lambda_{01}:\lambda_{01}:\lambda_{03}: \;=\; \lambda^{01}:\lambda^{02}:\lambda^{03}:\lambda^{23}:\lambda^{31}:\lambda^{12}}$$

8. Schnitt zweier Unterräume des $\mathfrak{B}_5$ mit $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 \subsetneqq \mathfrak{B}_5$ (s.o.Seite 2)

$$\mathfrak{U}_1 \ldots \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \dim \mathfrak{U}_1 = 3 \qquad \dim(\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2) = 2$$

$$\mathfrak{U}_2 \ldots \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \dim \mathfrak{U}_2 = 3 \qquad \dim(\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2) = 4$$

Nach Satz 140 ergeben sich die Koordinaten der den Unterräumen $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ zugeordneten zerfallenden 3-Vektoren zu

$\mathfrak{U}_1 \ldots \hat{\mathfrak{x}}(3) \ldots x^{012} = 1,\ x^{013} = 1,\ x^{023} = 1,\ x^{123} = 1$

$$\hat{\mathfrak{x}}(3) = x^{I(3)}\,\hat{\mathfrak{b}}_{I(3)}$$

$\mathfrak{U}_2 \ldots \hat{\mathfrak{y}}(3) \ldots y^{012} = 2$

$$\hat{\mathfrak{y}}(3) = y^{J(3)}\,\hat{\mathfrak{b}}_{J(3)}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{erg}\ \hat{\mathfrak{y}}(3) =: \hat{\mathfrak{y}}^*(2)}} = y^{J(3)}\delta^{N(5)}_{K(2),J(3)}\hat{\mathfrak{b}}^{*K(2)} = 2\delta^{01234}_{K(2)012}\hat{\mathfrak{b}}^{*K(2)} =$$
$$2\delta^{01234}_{34012}\,\mathfrak{b}^{*3}\wedge\mathfrak{b}^{*4} = \underline{\underline{2\,\mathfrak{b}^{*3}\wedge\mathfrak{b}^{*4}}} \qquad y_{34} = 2$$

Gesucht wird

$$\hat{\mathfrak{x}}(3) \llcorner \hat{\mathfrak{y}}^*(2) = x^{I(3)}y_{L(2)}\delta^{L(2)k}_{I(3)}\,\mathfrak{b}_k =$$
$$= [1.\delta^{L(2)k}_{012} + 1.\delta^{L(2)k}_{013} + 1.\delta^{L(2)k}_{023} + 1.\delta^{L(2)k}_{123}]\,y_{L(2)}y_k = \hat{\mathfrak{o}}(1)$$

Aus $\hat{\mathfrak{x}}(3) \llcorner \hat{\mathfrak{y}}^* = \hat{\mathfrak{o}}(1)$ folgt, (s.o.Seite 2), daß die durch $\hat{\mathfrak{x}}(3)$ und $\mathrm{erg}^*\hat{\mathfrak{y}}^*(2)$ bestimmten Unterräume den Gesamtraum $\mathfrak{B}_5$ <u>nicht aufspannen.</u>

Dies wäre dann der Fall, wenn erg $\hat{\mathfrak{x}}(3)\wedge\hat{\mathfrak{y}}^*(2) \neq \hat{\mathfrak{o}}(4)$ ist. Wir zen daher z.B. $\mathfrak{U}_1$ duch eine Anzahl von Vektoren, die nicht in $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ liegen, welche aber die Dimension von $\mathfrak{U}_1$ so erhöhen, daß gilt

$$H(\mathfrak{U}_1 \cup \{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s\}) + \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{B}_5$$

Dann folgt mit $\hat{\mathfrak{a}}(s) := \mathfrak{a}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{a}_s$:

$$\hat{\mathfrak{x}}(p+s) \llcorner \hat{\mathfrak{y}}^*(q) = \hat{\mathfrak{z}}(p+s-q) \neq \hat{\mathfrak{o}}(p+s-q)$$

In unserem Fall kann wegen $p = 3$ nur $s = 1$ sein ($s = 2$ würde mit

$\mathfrak{U}_1$ zusammen bereits den ganzen Raum aufspannen).

Sei also $\mathfrak{a} := a^i \mathfrak{b}_1$. Dann gilt

$$\hat{\mathfrak{r}}(4) := \hat{\mathfrak{r}}(3)\wedge\mathfrak{a} = (\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_3 + \mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + \mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3)\wedge$$
$$\wedge(a^0\mathfrak{b}_0 + a^1\mathfrak{b}_1 + a^2\mathfrak{b}_2 + a^3\mathfrak{b}_3 + a^4\mathfrak{b}_4) = \ldots =$$

$$\hat{\mathfrak{r}}(4) = (a^3-a^2+a^1-a^0)\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + a^4\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_4 + a^4\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_4 +$$
$$+ a^4\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_4 + a^4\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3\wedge\mathfrak{b}_4$$

also

$$x^{0123} = a^3-a^2+a^1-a^0,\ x^{0124} = x^{0134} = x^{0234} = x^{1234} = a^4$$

Nicht alle $x^{I(4)}$ dürfen verschwinden, ferner darf $\mathfrak{a}$ nicht in $\mathfrak{U}_2$ liegen. Daher muß gelten:

$\hat{\mathfrak{y}}(4)\wedge\mathfrak{a} \neq \hat{\mathfrak{o}}(4) \Rightarrow$

$$(2\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2)\wedge(a^0\mathfrak{b}_0 + a^1\mathfrak{b}_1 + a^2\mathfrak{b}_2 + a^3\mathfrak{b}_3 + a^4\mathfrak{b}_4) =$$
$$= 2a^3\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 + 2a^3\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_4 \neq \hat{\mathfrak{o}}(4) = \underline{a^3 \vee a^4 \neq 0}$$

Dann folgt für $a^1 = a^2 = a^3 = 0,\ a^4 \neq 0$

$$\hat{\mathfrak{r}}(4) \llcorner \hat{\mathfrak{y}}^*(2) = x^{I(4)} y_{34} \delta^{34K(2)}_{I(4)} \mathfrak{b}_{K(2)} =$$
$$= 2a^4[\delta^{34K(2)}_{0134} + \delta^{34K(2)}_{0234} + \delta^{34K(2)}_{1234}]\,\hat{\mathfrak{b}}_{K(2)} =$$
$$= 2a^4[\delta^{3401}_{0134}\,\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1 + \delta^{3402}_{0134}\,\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_2 + \delta^{3412}_{0134}\,\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2] \ldots \mathfrak{U}_1\cap\mathfrak{U}_2$$

Daher

$$\underline{\underline{\dim \mathfrak{U}_1\cap\mathfrak{U}_2 = 2}}$$

Für die Dimension des Summenraums $\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2$ folgt daher

$$\dim(\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2) = \dim\mathfrak{U}_1 + \dim\mathfrak{U}_2 - \dim(\mathfrak{U}_1\cap\mathfrak{U}_2) = 4$$

Wir werden daher einen Hilfsvektor so wählen, daß er den gegebenen dreidimensionalen Unterraum $\mathfrak{U}_1$ zum vierdimensionalen Summenraum erweitert. Dieser Hilfsvektor darf nicht in $\mathfrak{U}_1$ liegen, seine Lage wird aber zweckmäßigerweise in $\mathfrak{U}_2$ gewählt.

Wir werden also den oben verwendeten Vektor $\mathfrak{a}$ neu wählen, jedoch so, daß er diesmal in $\mathfrak{U}_2$ liegt. Dies ist aber der Fall, wenn $a^3 = a^4 = 0$ ist. Dann gilt in diesem Falle

$$\hat{\mathfrak{r}}(4) := \hat{\mathfrak{r}}(3)\wedge\mathfrak{a} = (-a^2+a^1-a^0)\,\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{b}_1\wedge\mathfrak{b}_2\wedge\mathfrak{b}_3 \ldots \mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2$$

Damit ist auch eine Basis des Summenraumes ermittelt.