Die Praxis der geometrischen Konstruktionen

Wolfgang STRÖHER

AKGEO Praxis der geometrischen Konstruktionen

Die Vorlesung soll einen Überblick über die Methoden gewähren, die bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben erfolgversprechend angewendet werden können. Neben der Darlegung der sich bietenden Möglichkeiten wird deren Anwendung an zahlreichen charakteristischen Beispielen erläutert. Die Vorlesung wendet sich in erster Linie an Studierende des Lehramtes Geometrie, kann aber natürlich von allen Interessenten besucht werden. Vorkenntnisse spezieller Art sind nicht erforderlich.
Die folgende Zusammenstellung gibt einen Überblick über den geplanten Stoff, der im Bedarfsfalle auch abgeändert und ergänzt werden kann.

Ausführung geometrischer Konstruktionen

Hilfssätze

Beweismittel in der Geometrie

Kongruenzzätze

Proportionenlehre nach HILBERT - BERNAYS

Ähnlichkeitssätze

Anwendungen: Rechtwinkeliges Dreieck
Potenzsätze am Kreis
Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal
Harmonische Elemente

Methoden zur Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben

Schnitte von Punkt - undGeradenmengen

Transformation von Figuren

Kongruenztransformationen

Spiegelung
Drehung
Gleitspiegelung

Ähnlichkeitstransformationen

Zentrische Ähnlicheit
Drehstreckung
Spiegelstreckung
Prinzip der ähnlichen Hilfsfigur

Inversion und Antiinversion

Regelmäßige Vielecke

Konstruktionen von MASCHERONI

Inhaltsangabe

Die folgende Zusammenstellung gibt einen Überblick über den geplanten Stoff, der im Bedarfsfalle auch abgeändert und ergänzt werden kann.

Ausführung geometrischer Konstruktionen: Hilfssätze. Beweismittel in der Geometrie. Kongruenzzätze. Proportionenlehre nach Hilbert - Bernays. Ähnlichkeitssätze. Anwendungen: Rechtwinkeliges Dreieck, Potenzsätze am Kreis Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal, Harmonische Elemente

Methoden zur Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben: Schnitte von Punkt - und Geradenmengen. Transformation von Figuren. Kongruenztransformationen: Spiegelung, Drehung, Gleitspiegelung. Ähnlichkeitstransformationen: Zentrische Ähnlicheit, Drehstreckung, Spiegelstreckung, Prinzip der ähnlichen Hilfsfigur. Inversion und Antiinversion, Regelmäßige Vielecke. Konstruktionen von Mascheroni.

Lehrziel

Die Vorlesung soll einen Überblick über die Methoden gewähren, die bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben erfolgversprechend angewendet werden können. Neben der Darlegung der sich bietenden Möglichkeiten wird deren Anwendung an zahlreichen charakteristischen Beispielen erläutert. Die Vorlesung wendet sich in erster Linie an Studierende des Lehramtes Geometrie, kann aber natürlich von allen Interessenten besucht werden. Vorkenntnisse spezieller Art sind nicht erforderlich.

Diese Vorlesung wird im Sommersemester durch die Vorlesung „Theorie der geometrischen Konstruktionen" ergänzt. Beide Vorlesungen sind aber *unabhängig voneinander belegbar*

Die Praxis der geometrischen Konstruktionen

Definitionen

Unter einer *geometrischen Konstruktion* versteht man eine zeichnerische Darstellung eines geometrischen Objektes aus vorliegenden Angaben unter Einhaltung gegebener Bedingungen mit Hilfe vorgeschriebener Zeicheninstrumente.

Die *Ausführung* einer geometrischen Konstruktion erfordert folgende Schritte:

1. Analyse der Aufgabe (Aufsuchung der notwendigen Bedingungen für die Lösbarkeit).
2. Ausführung der Konstruktion.
3. Beweis der Richtigkeit der Konstruktion (Nachweis des Hinreichens der zu erfüllenden Bedingungen).
4. Determination (Anzahl der möglichen Lösungen und Sonderfälle).

Unter einer *klassischen geometrischen Konstruktion* versteht man eine Konstruktion, bei der *nur Zirkel und Lineal* als Zeicheninstrumente zugelassen sind. Zirkel und Lineal dürfen *ausschließlich* auf folgende Weise verwendet werden:

1. a. Anlegen des Lineals an zwei gegebene oder bereits konstruierte Punkte, um deren Verbindungsgerade zu ziehen.
   b. Zeichnen einer beliebigen (Hilfs-)Geraden.
2. a. Einsetzen der beiden Zirkelspitzen in zwei gegebene oder schon konstruierte Punkte.
   b. Zeichnen eines Kreises um einen gegebenen oder bereits konstruierten Punkt als Mittelpunkt mit einem durch zwei schon vorhandene Punkte bestimmten Radius.
   c. Zeichnen eines beliebigen (Hilfs-)Kreises mit beliebigem Mittelpunkt und Radius.
3. Erzeugung neuer Punkte durch Schnitte von Geraden und Kreisen, die gemäß 1. und 2. gewonnen wurden.
4. Gerade und Kreise treten nur in endlicher Anzahl auf.

Beispiel für die Ausführung einer Konstruktion

Man konstruiere ein Quadrat PQRS, dessen Seiten (oder deren Verlängerungen) durch vier gegebene Punkte A, B, C, D gehen. Die folgende Lösung ist von M.BIANDSUTTER 1881

1. Analyse: Man denke sich das Problem gelöst

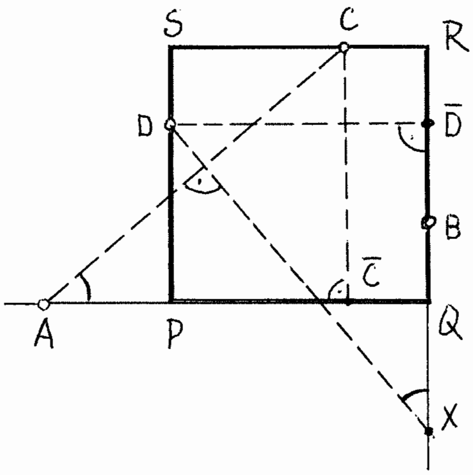
Man zeichne $DX \perp AC$

Wegen $\angle A = \angle X$ und $C\bar{C} = D\bar{D}$ folgt

$\Delta AC\bar{C} = \Delta XD\bar{D}$

daher $AC = DX$

als notwendige Bedingung



2. Ausführung der Konstruktion

Konstruktion gemäß der Analyse

3.Beweis der Richtigkeit der Konstruktion

In Schritt 2. wurde das Rechteck □PQRS gezeichnet. Es ist nachzuweisen, daß es sich um ein Quadrat handelt. Wir ziehen

$$\left.\begin{array}{l} PY \parallel AC \Rightarrow \text{Im Parallelogramm \# APYC gilt dann } PY = AC \\ SZ \parallel DX \Rightarrow \text{Im Parallelogramm \# DXZS gilt dann } SZ = DX \end{array}\right\} \Rightarrow PY = SZ \text{ (wegen } AC = DX\text{)}$$

Aus $\angle P = \angle S$ und $PY = PS$ folgt

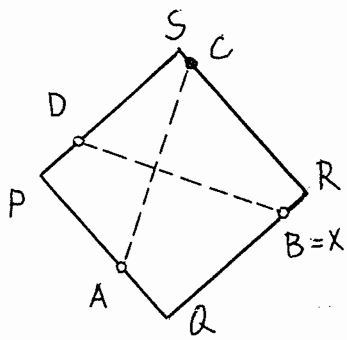
$\Delta PYS = \Delta SZR \Rightarrow PS = RS$ ... PQRS ist ein Quadrat (die Bedingung $AC = DX$ ist also auch hinreichend)

4.Determination: Die Übertragung der Strecke AC auf DX ist auf zwei Arten möglich: X bzw.X_1. Durch diese Punkte ist jeweils ein Quadrat festgelegt. Daher hat die Aufgabe, wenn man vom Punktepaar AC ausgeht, zwei Lösungen.
Durch ander Wahl der Reihenfolge sind folgende Paarungen möglich:

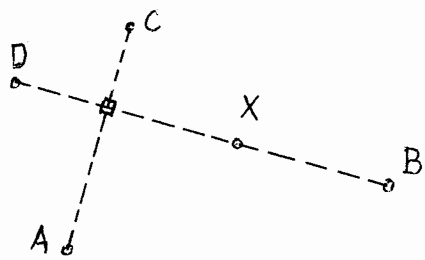
$$\left.\begin{array}{ll} AC;\ BD \ldots & \text{Zwei Lösungen} \\ AB;\ CD & \text{"} \\ AD;\ BC & \text{"} \end{array}\right\} \text{insgesamt 6 Lösungen}$$

Sonderfälle: Die obigen Konstruktionen sind nur dann eindeutig ausführbar, wenn nach Ausführung der Streckenübertragung $DX = AC$ gilt $X \neq B$

1. $X = B$. Die Verbindung XB wird dann unbestimmt. Es gibt unendlich viele Lösungen



2. $DB \perp AC,\ X \neq B$ Im eigentlichen Sinne existiert keine Lösung.



Hilfsmittel zur Durchführung eines Beweises

Im Folgenden werden kurz die wichtigsten Hilfsmittel und Sätze aufgezählt, die für die Fühung eines Beweises unentbehrlich sind.:

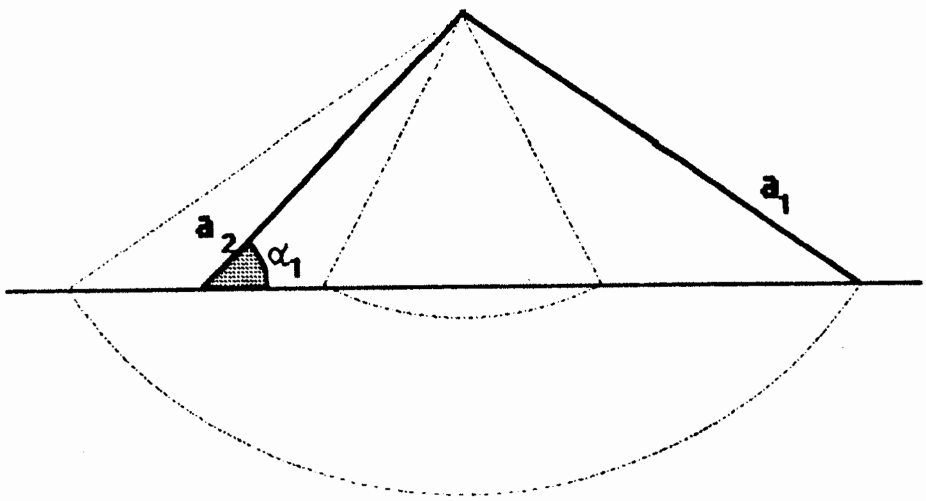
1. Die Kongruenzsätze
2. Wichtige Sätze der Kreislehre
3. Die Sätze über die Ähnlichkeit von Dreiecken
4. Die Proportionenlehre

Die Kongruenzsätze

Zwei Dreiecke nennt man kongruent (=, ≅), wenn sie in allen drei Seiten und in allen drei Winkeln übereinstimmen.

Es gibt folgende Kongruenzfälle:

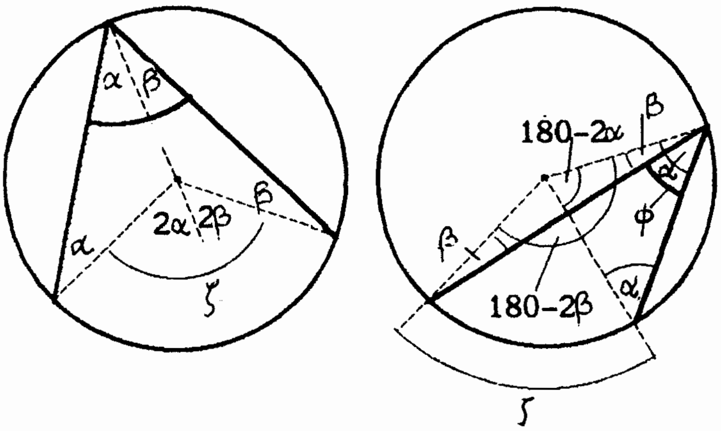
1. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einem Winkel und dessen anliegenden Seiten übereinstimmen (SWS-Satz)
2. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen drei Seiten übereinstimmen (SSS-Satz)
3. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden dieser Seite anliegenden Winkeln übereinstimmen (WSW-Satz)
4. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite, einem dieser Seite anliegenden Winkel und dem dieser Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen (SWW-Satz)
5. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der *größeren Seite* gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen (WSS-Satz).
   Liegt dem gegebenen Winkel die kleinere der beiden Seiten gegenüber so gibt es zwei Dreiecke mit den gegebenen Eigenschaften („casus ambiguus“).
   Nur der Grenzfall eines sich ergebenden rechtwinkeligen Dreieckes wäre eindeutig.



Hilfssätze über Kreise

Der Peripheriewinkelsatz

Der Zentriwinkel über einem Bogen ist stets doppelt so groß wie jeder Peripheriewinkel über demselben Bogen



$\zeta = 2(\alpha + \beta)$ $\quad\quad$ $\zeta = 180 - 2\beta - (180 - 2\alpha) = 2(\alpha - \beta)$ $\quad\quad$ $\zeta = 2(\alpha + \beta) = 180$

$\phi = \alpha + \beta = /2$ $\quad\quad$ $\phi = \alpha - \beta = \zeta/2$ $\quad\quad$ $\phi = \alpha + \beta = \zeta/2 = 90$

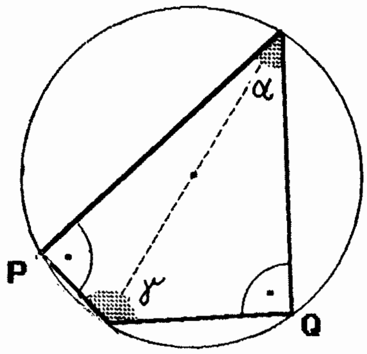
Alle Peripheriewinkel über demselben Bogen sind gleich

Speziell gilt: Alle Winkel im Halbkreis sind Rechte (Satz von THALES[1]).

Supplementäre Peripheriewinkel

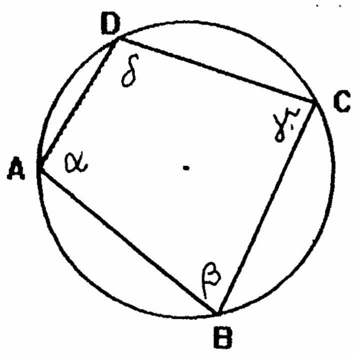
Peripheriewinkel über supplementären Bögen sind supplementär

$\alpha + \beta = 180°$



Das Sehnenviereck

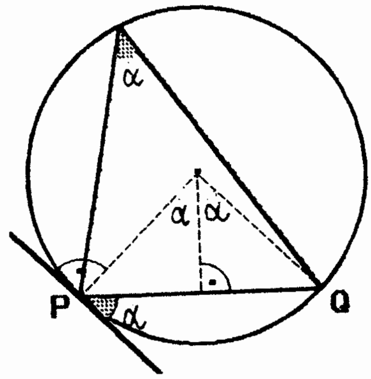
Gegenüberliegende Winkel des Sehnenvierecks sind supplementär



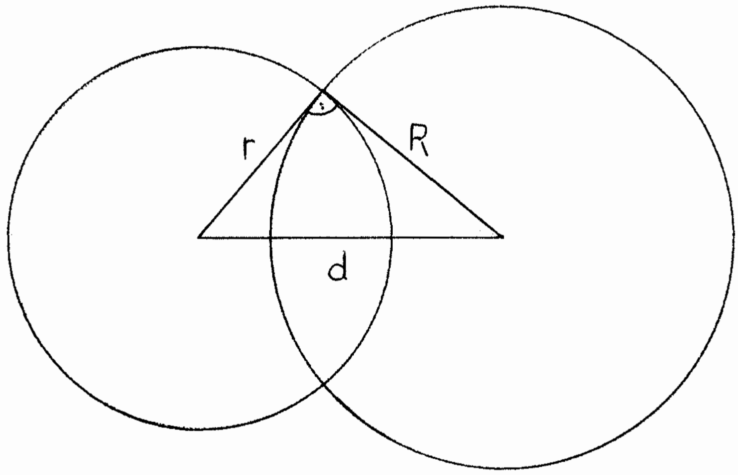
[1] THALES von Milet um 585 v.Chr.

Der Sehnen-Tangentenwinkel

Der Sehnen-Tangentenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel über demselben Bogen



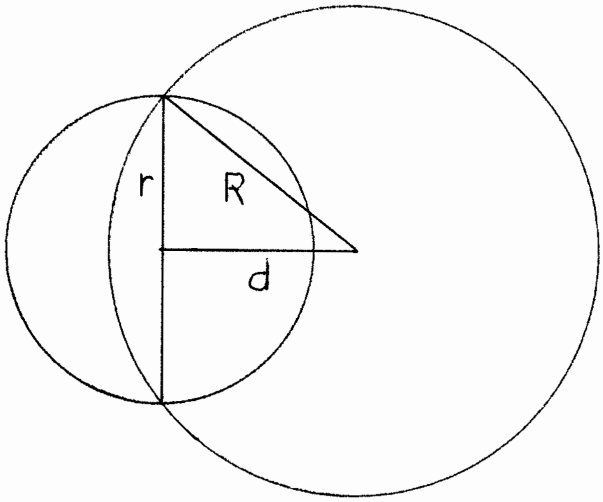
Orthogonal schneidende Kreise



Zwei Kreise mit den Radien r und R und dem Mittelpunktsabstand d schneiden einander orthogonal, wenn gilt:

$r^2 + R^2 = d^2$

Nach Gegenpunkten schneidender Kreis



Der Kreis mit dem Radius R und dem Mittelpunktsabstand d schneidet den Kreis mit dem Radius r nach Gegenpunkten, wenn gilt

$R^2 - r^2 = d^2$

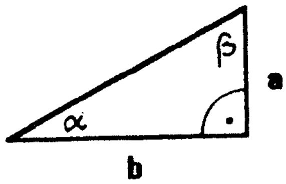
Die Proportionenlehre nach HILBERT - BERNAYS[2]

Definition des Verhälnisses zweier Strecken:

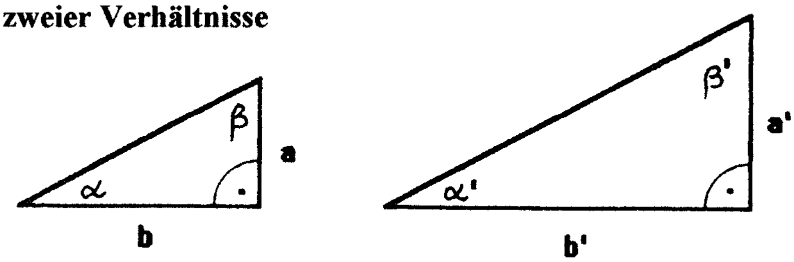
Ein rechtwinkeliges Dreieck ist durch Angabe seiner beiden Katheten a und b nach dem SWS-Satz eindeutig bestimmt.

Wir nennen den der Kathete a gegenüberliegenden Winkel α des rechtwinkeligen Dreiecks mit den Katheten a und b das *Verhältnis* a:b der beiden Strecken a,b.

Analog ist der Winkel β gleich dem Verhältnis b:a.



Gleichheit zweier Verhältnisse



Wir nennen das Verhältnis a:b der Strecken a,b gleich dem Verhältnis a':b' der Strecken a', b', wenn die Winkel α und α' in den der Definition entsprechend gebildeten rechtwinkeligen Dreiecken gleich sind:

$$\boxed{a:b = a':b' \Leftrightarrow \alpha = \alpha'} \qquad (1)$$

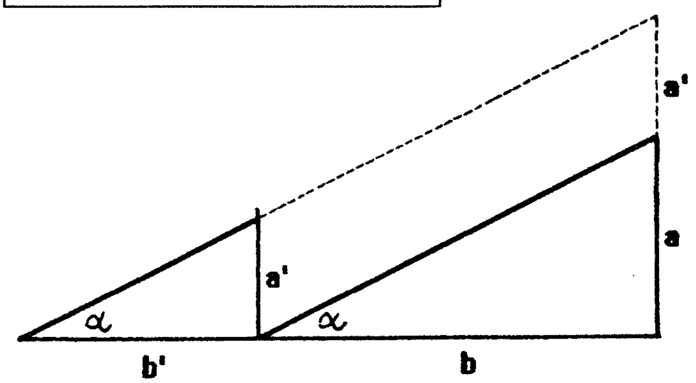
Wegen $\alpha = \alpha' \Leftrightarrow \beta = \beta'$ gilt gleichwertig mit (1)

$$\boxed{a:b = a':b' \Leftrightarrow b:a = b':a'} \qquad (2)$$

Der Korrespondenzsatz

$$\boxed{a:b = a':b' \Leftrightarrow a:b = a + a' : b + b'} \qquad (3)$$

Beweis $\Rightarrow$



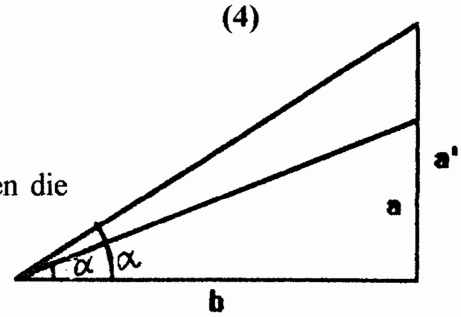
Beweis $\Leftarrow$ *indirekt*

[2] David HILBERT 1862-1943, Paul BERNAYS 1888-1977

Die Kürzungsregel

$$\boxed{a:b = a':b \Rightarrow a = a'}$$

(4)



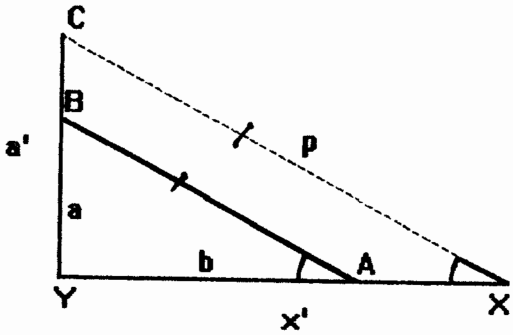
Der Beweis erfolgt indirekt. Es sei $a \neq a'$

In diesem Falle ergäbe sich ein Widerspruch gegen die Eindeutigkeitder Winkelabtragung

Existenz und Eindeutigkeit der vierten Proportionalen

$$\boxed{a:b = a':x'}$$

(5)



1. Existenz: Wir ziehen durch C die Parallele p zu (AB). Würde der Schnittpunkt X nicht existieren, gäbe es durch A zwei p nichtschneidende Gerade, nämlich YX und AB im Widerspruch zum Parallelenaxiom.

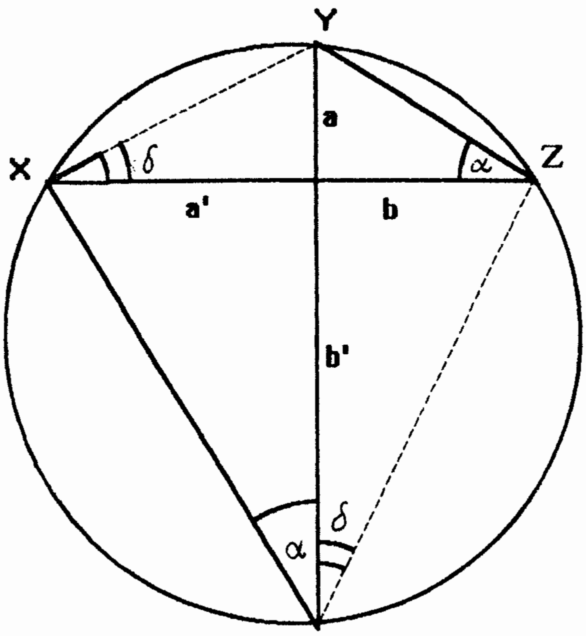
2. Eindeutigkeit: Es gelte gleichzeitig

$$\left.\begin{array}{l} a:b = a':x \\ a:b = a':x' \end{array}\right\} \Rightarrow a':x = a':x' \overset{(2)}{\Rightarrow} x:a' = x':a' \overset{(4)}{\Rightarrow} x = x'$$

Vertauschbarkeit der Innenglieder

$$\boxed{a:b=a':b' \Rightarrow a:a'= b:b'}$$

(6)



Beweis: Nach dem Peripheriewinkelsatz läßt sich über der Sehne XY der Peripheriewinkelkreis zum Peripheriewinkel α errichten. Wegen der Gleichheit der Peripheriewinkel δ gilt nach Definition

$a:a' = b:b'$

Zusammensetzungsregeln

$\boxed{\textbf{1. } a{:}b = a'{:}b' \wedge b{:}c = b'{:}c' \Rightarrow a{:}c = a'{:}c'}$ **(7)**

$\boxed{\textbf{2. } a{:}b = b'{:}a' \wedge b{:}c = c'{:}b' \Rightarrow a{:}c = c'{:}a'}$ **(8)**

Merkregeln

1. $\left.\begin{cases} a{:}b = a'{:}b' \\ b{:}c = b'{:}c' \end{cases}\right\} \ldots a{:}c = a'{:}c'$

2. $\left.\begin{cases} a{:}b = b'{:}a' \\ b{:}c = c'{:}b' \end{cases}\right\} \ldots a{:}c = c'{:}a'$

1. $\left.\begin{array}{l} a{:}b = a'{:}b' \overset{(6)}{\Rightarrow} a{:}a' = b{:}b' \\ b{:}c = b'{:}c' \overset{(6)}{\Rightarrow} b{:}b' = c{:}c' \end{array}\right\} \Rightarrow a{:}a' = c{:}c' \overset{(6)}{\Rightarrow} \underline{a{:}c = a'{:}c'}$

2. Die Voraussetzung lautet $a{:}b = b'{:}a' \wedge b{:}c = c'{:}b'$
   Ist x die 4. Proportionale zu a, b und c', so gilt

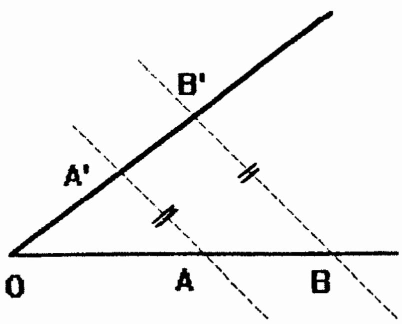
$\underline{a{:}b = c'{:}x} \overset{(VS)}{\Rightarrow} c'{:}x = b'{:}a' \overset{(6)}{\Rightarrow} c'{:}b' = x{:}a' \overset{(VS)}{\Rightarrow} \underline{b{:}c = x{:}a'}$

Es gilt also $a{:}b = c'{:}x \wedge b{:}c = x{:}a'$, daher wegen (7)

$a{:}c = c'{:}a'$

Der Strahlensatz

Seien $OA = a$, $OB = b$
$OA' = a'$, $OB' = b'$



Dann gilt

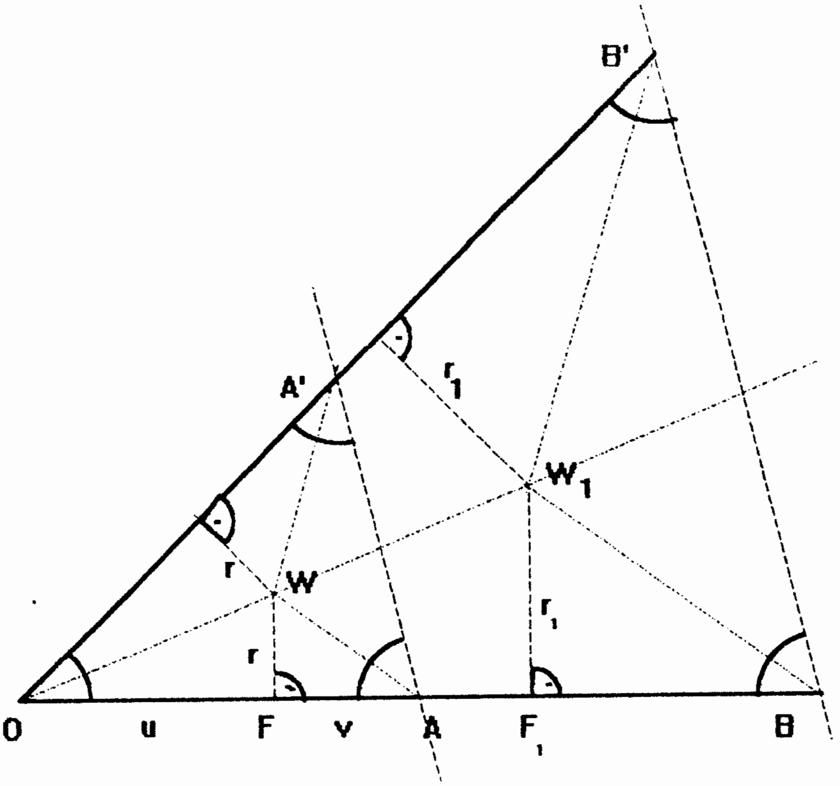
$\boxed{(AA') \parallel (BB') \Leftrightarrow a{:}b = a'{:}b'}$ **(9)**

Beweis $\Rightarrow$

Wir bestimmen den Schnittpunkt W bzw. W_1 der Winkelsymmetralen der Dreiecke Δ OAA' bzw. Δ OBB' und setzen

$OF = u$, $FA = v$
$OF_1 = u_1$, $F_1B = v_1$
$a = u+v$
$b = u_1+v_1$

Dann gilt definitionsgemäß

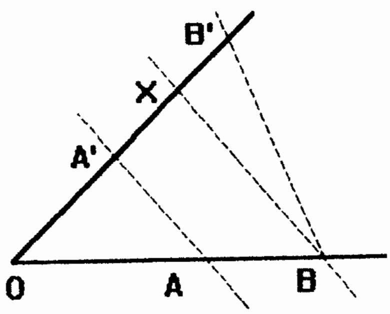


$$\left.\begin{aligned} r:u &= r_1:u_1 \overset{(6)}{\Rightarrow} r:r_1 = u:u_1 \\ r:v &= r_1:v_1 \Rightarrow r:r_1 = v:v_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{u:u_1} = v:v_1 \overset{(3)}{\Rightarrow} (u+v):(u_1+v_1) = \underline{r:r_1} \Rightarrow a:b = r:r_1$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{also} \quad a:b = r:r_1 \\ &\text{analog} \quad a':b' = r:r_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{a:b = a':b'}$$

$\Leftarrow$ Der *Beweis der Umkehrung* erfolgt indirekt
Es sei OA = a, OB = b
OA' = a', OB' = b'
Ferner sei a:b = a':b', aber (AA') *nicht parallel* zu (BB'). Ziehen wir $(BX)\parallel(AA')$, so folgt mit OX = x nach dem Strahlensatz

a:b = a':x



Aus der Eindeutigkeit der 4.Proportionalen folgt x' = b', daher X = B. Da es zu (AA') nur eine einzige Parallele durch B geben kann, muß $(AA')\parallel(BB')$ sein.

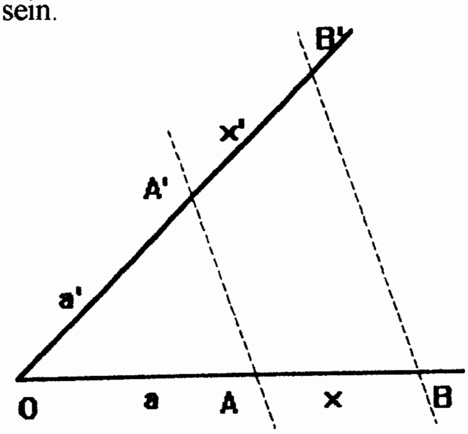
Andere Versionen des Strahlensatzes

Sei OA = a, AB = x
OA' = a', A'B' = x'
Nach dem Strahlensatz (9) gilt

$$a:(a+x) = a':(a'+x') \overset{(6)}{\Rightarrow} a:a' = (a+x):(a'+x') \overset{(3)}{\Rightarrow} a:a' = x:x'$$

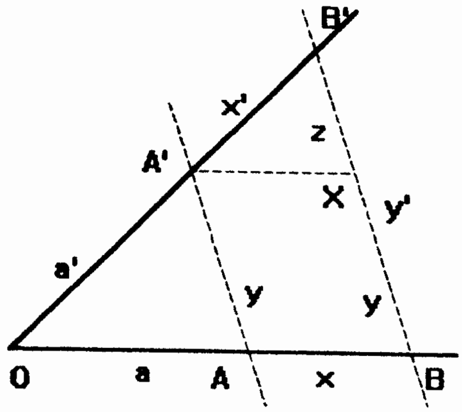
Beweis der Umkehrung indirekt

$$\boxed{(AA')\parallel(BB') \Leftrightarrow a:a' = x:x'} \qquad (10)$$



Sei

OA = a, AB = x, OB = a+x =: b
OA' = a', A'B' = x'
OB' = a'+x' =: b'
AA' = y, BB' = y', XB' = z
BB' = z+y =: y'



Anwendung des Strahlensatzes (9) auf die Geraden (B'O) und (B'B) ergibt nach (10)

$$z:x' = y:a' \overset{(3)}{\Rightarrow} (z+y):(x'+a') = y:a' \Rightarrow y':b' = y:a' \overset{(6)}{\Rightarrow} y':y = b':a'$$

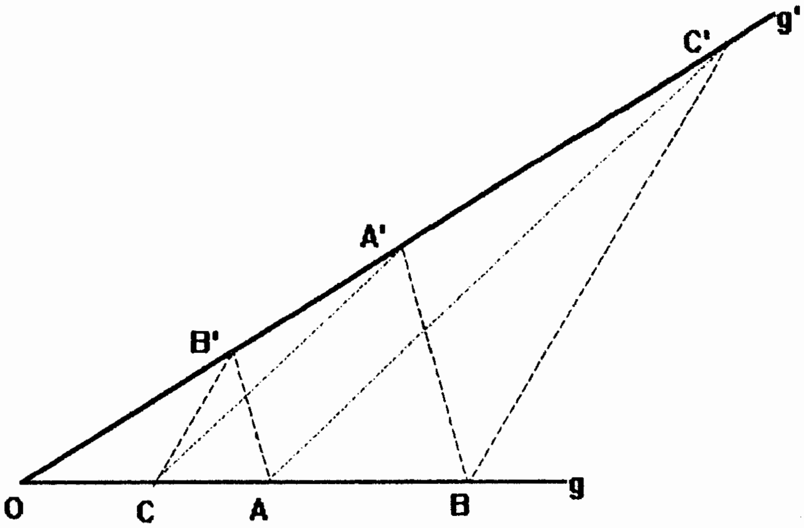
$$y':y = b:a \overset{(2)}{\Rightarrow} \underline{a:b = y:y'}$$

Beweis der Umkehrung indirekt

$$\boxed{(AA') \parallel (BB') \Leftrightarrow a:b = y:y'} \qquad \textbf{(11)}$$

Der Satz von PAPPOS[3]

Wählt man auf einer Geraden g die Punkte A, B, C und auf der Geraden g' die Punkte A', B', C' und gilt (AB')‖(A'B) und (B'C)‖(BC'), so gilt auch (CA')‖(C'A)



Beweis: Es sei OA = a, OB = b, OA' = a', OB' = b'. Dann folgt aus der Voraussetzung auf grund des Strahlensatzes (9)

$(AB') \parallel (A'B) \Leftrightarrow a:b = b':a'$

$(BC') \parallel (CB') \Leftrightarrow b:c = c':b'$

Daraus folgt wegen der Zusammensetzungsregel (8)

$a:c = c':a' \Leftrightarrow (CA') \parallel (C'A)$

---

[3] PAPPOS von Alexandrien (ca.. 300 n.Chr.)

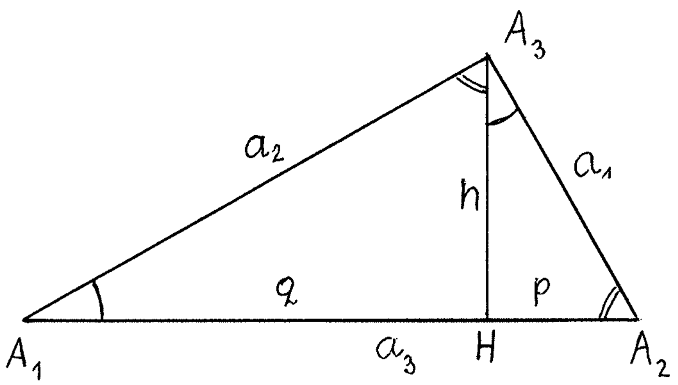
Ähnliche Dreiecke

Zwei Dreiecke nennt man *ähnlich* (~), wenn sie in allen drei Winkeln übereinstimmen. Es gibt folgende Ähnlichkeitsfälle:

1. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.
2. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ensprechende Seiten dasselbe Verhältnis aufweisen.
3. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel und dem Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen.
4. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel übereinstimmen, die anliegenden Seiten eines weiteren Winkels gleiches Verhältnis besitzen und die dritten Winkel gleichzeitig spitz, stumpf oder Rechte sind (entspricht dem „casus ambiguus" der Kongruenzsätze)

Anwendung der Ähnlichkeitssätze und der Sätze über Kreise

Sätze über das rechtwinkelige Dreieck



Höhensatz und Kathetensätze, Satz von PYTHAGORAS

$\Delta A_1HA_3 \sim \Delta A_3HA_2 \Rightarrow \frac{q}{h} = \frac{h}{p} \Rightarrow$ $\boxed{h^2 = pq}$ **Höhensatz**

$\Delta A_1A_2A_3 \sim \Delta A_3A_2H \Rightarrow \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1}{p}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\left.\begin{array}{l} a_1^2 = pa_3 \\ a_2^2 = qa_3 \end{array}\right\}}$ **Kathetensätze**

$\Delta A_1A_2A_3 \sim \Delta A_1A_3H \Rightarrow \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{q}$

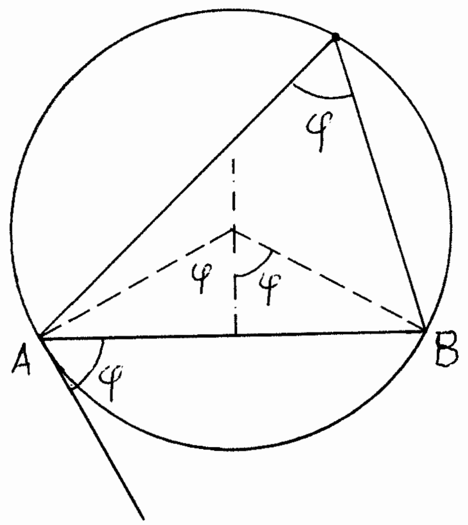
$$\boxed{a_1^2 + a_2^2 = (p+q)a_3 = a_3^2}$$

Lehrsatz des PYTHAGORAS[4]

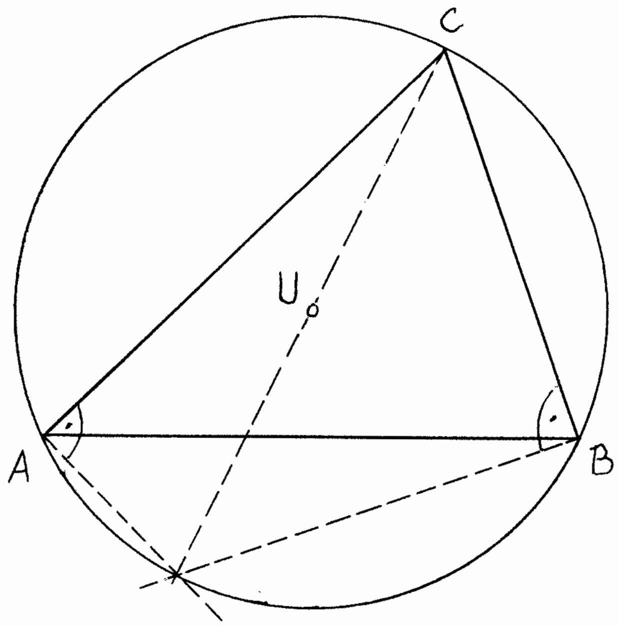
[4] PYTHAGORAS von Samos um 500 v.Chr.

Konstruktion des Peripheriewinkelkreises zu einem gegebenen Winkel φ über einer gegebenen Strecke

Anwendung des Sehnen-Tangentensatzes

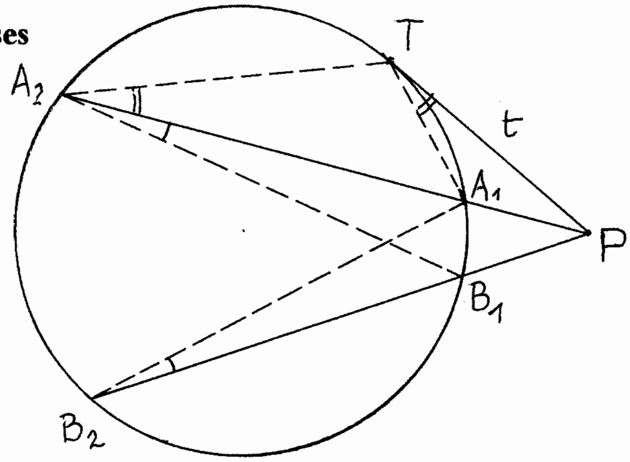


Konstruktion des Umkreises eines gegebenen Dreieckes



Potenzsätze am Kreis

Der Punkt P liegt im Außengebiet des Kreises



$\Delta PB_1A_2 \sim \Delta PA_1B_2$

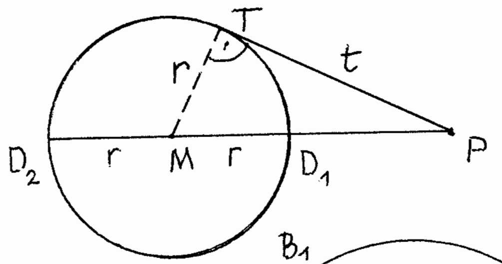
$$\frac{PB_1}{PA_2} = \frac{PA_1}{PB_2} \Rightarrow PB_1.PB_2 = \underline{PA_1.PA_2}$$

$\Delta PA_2T = \Delta PTA_1$

$$\frac{PA_2}{PT} = \frac{PT}{PA_1} \Rightarrow PA_1.PA_2 = PT^2 = t^2$$

$\boxed{PA_1.PA_2 = PB_1.PB_2 = PT^2 = t}$

Sonderfall

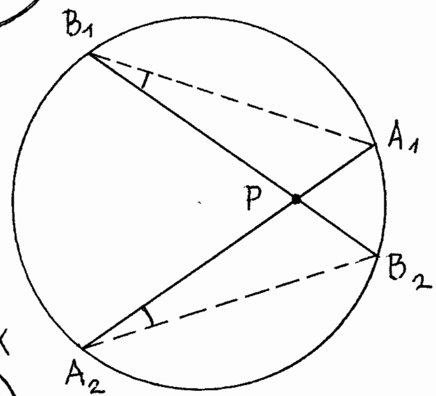


$PD_1 \bullet PD_2 = t^2$

$(PM - r)(PM + r) = PM^2 - r^2 = t^2$

$\boxed{PT^2 = t^2 = PM^2 - r^2}$

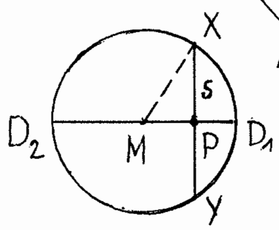
Der Punkt liegt im Inneren des Kreises



$\Delta PA_1B_1 \sim \Delta PB_2A_2$

$$\frac{PA_1}{PB_1} = \frac{PB_2}{PA_2} \Rightarrow \underline{PA_1.PA_2 = PB_1.PB_2}$$

Sonderfall



$PD_1.PD_2 = PX.PY = PX^2$

$PD_1.PD_2 = (r + PM)(r - PM) = r^2 - MP^2 = PX^2$

$\boxed{PD_1.PD_2 = r^2 - MP^2 = PX^2}$

Man nennt den *Zahlenwert* der Größe $PM^2 - r^2$ die *Potenz*[5] des Punktes P in bezug auf den Kreis k und schreibt

$\boxed{\Pi(k,P) := PM^2 - r^2}$ **Potenz von P bezüglich k**

Die Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises ist positiv, wenn der Punkt im Außengebiet des Kreises liegt, sie ist negativ, wenn der Punkt im Innern des Kreises liegt.

Es gilt

$\boxed{|\Pi(k,P)| = |PA_1.PA_2|}$

[5] Der Begriff „Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis" wurde von Jakob STEINER 1796-1863 geprägt

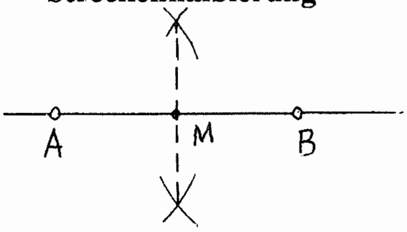
Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal

Viele wichtige Grundkonstruktionen lassen sich zwar leicht mit Zirkel und Lineal ausführen, erfordern aber doch einen verhältnismäßig großen Aufwand, der auf Kosten der Genauigkeit geht. In vielen Fällen verwendet man daher zusätzlich Zeicheninstrumente, mit deren Hilfe die Grundkonstruktionen rascher und genauer ausgeführt werden können (Zeichendreiecke, Geo-Dreieck, Parallelenlineal etc.) In manchen Fällen ist sogar „Probieren“ zulässig.

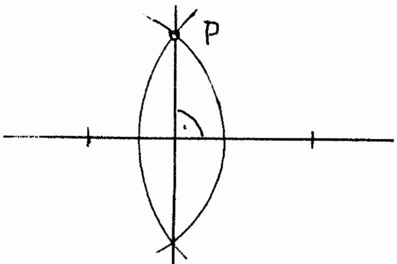
In der folgenden Übersicht werden einige dieser Fälle darsgestellt

Exakte Konstruktion

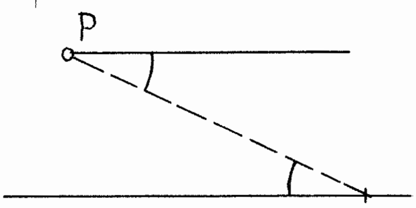
Streckenhalbierung



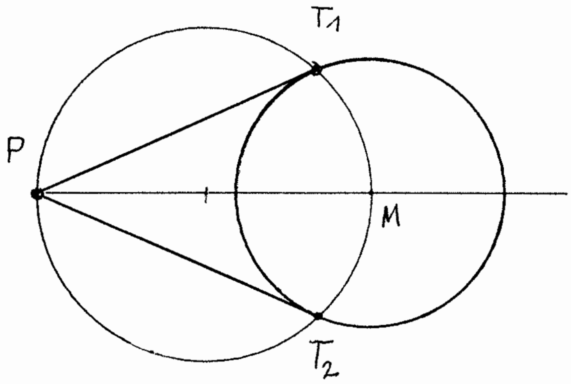
Normalefällen



Parallelenziehen

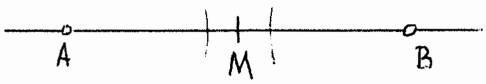


Tangenten an einen Kreis

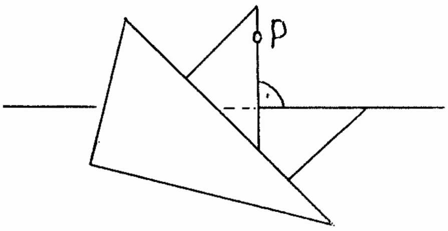


Praktische Ausführung

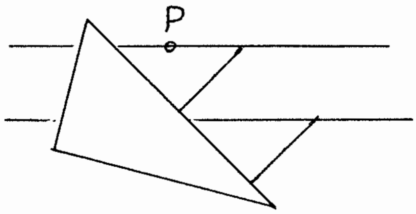
Fehlerteilung



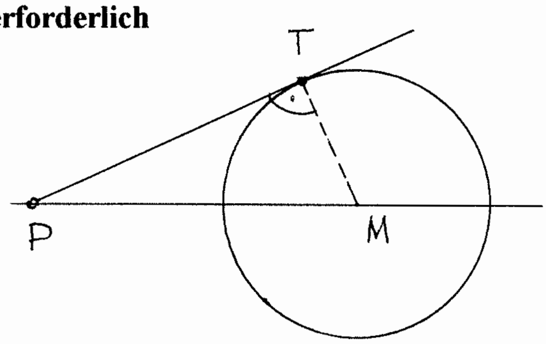
Zeichendreiecke, Geodreieck



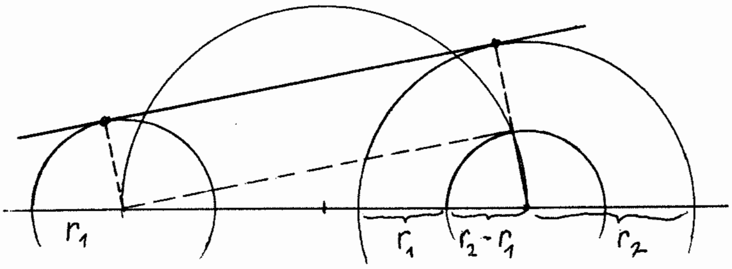
Zeichendreiecke, Parallelenlineal



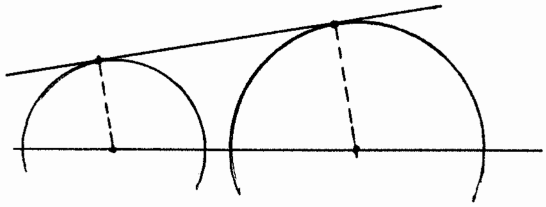
„Anlegen“ der Tangenten zulässig, aber Konstruktion des Berührungspunktes erforderlich



Gemeinsame Tangente zweier Kreise

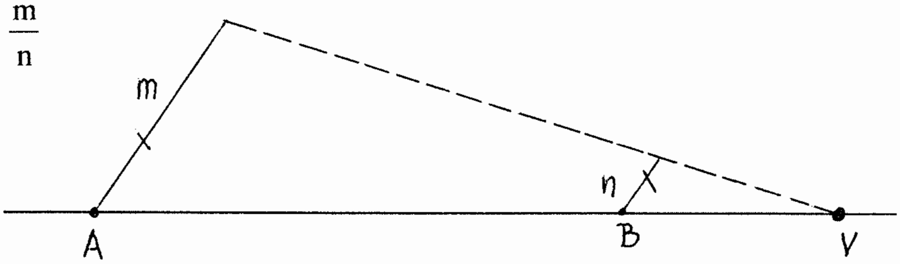


„Anlegen", Berührungspunkte konstruieren

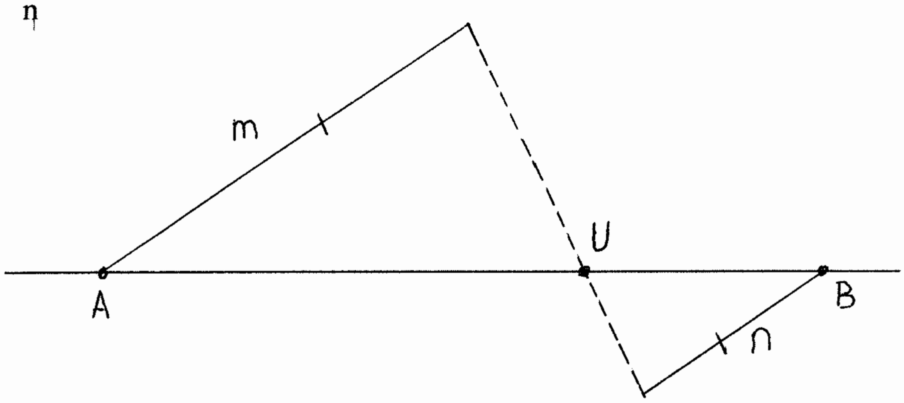


Äußere und innereTeilung einer Strecke

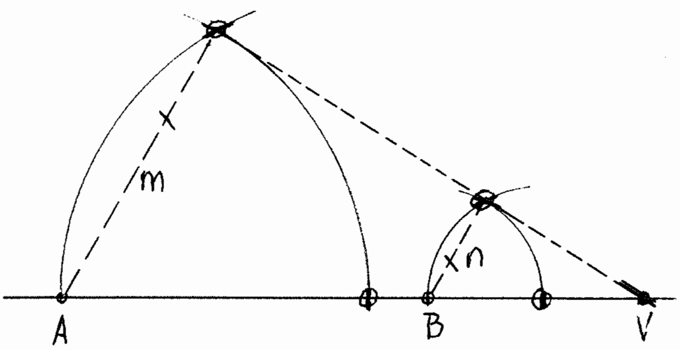
$$\frac{AV}{BV} = \frac{m}{n}$$

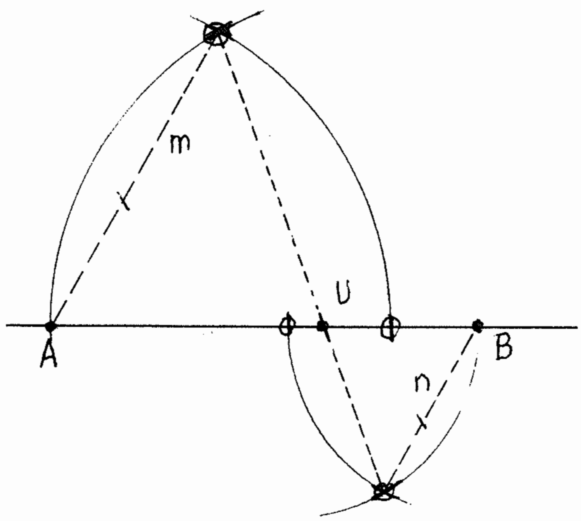


$$\frac{AU}{BU} = \frac{m}{n}$$



Liniensparende Konstruktion





Teilverhältnis dreier Punkte

Um äußere und innere Teilung einer Strecke auch numerisch unterscheiden zu können, ordnet man drei Punkten A, B ,C einer Geraden eine reelle Zahl zu, das *Teilverhältnis* T(A,B,C) der drei Punkte. Sein Betrag wird definiert durch $|T(A,B,C)| = \frac{AC}{BC}$. Ferner trifft man folgende *Vorzeichenfestsetzung*:

T(A,B,C) < 0 ⇔ C liegt in Innern der Strecke AB.

Dem *Mittelpunkt* der Strecke AB entspricht demnach das Teilverhältnis T(A,B,M) = -1

T(A,B,C) > 0 ⇔ C liegt im Äußern der Strecke AB. Speziell gilt

T(A,B,C) > 1⇒ C liegt rechts von B

T(A,B,C) < 1⇒C liegt links von A

Dem Teilverhältnis T(A,B,C) = 1 entspräche der „Fernpunkt" der Geraden (AB)

Doppelverhältnis von vier Punkten

Vier Punkten einer Geraden A, B, C, D wird die reelle Zahl

$$\mathfrak{D}(A,B,C,D) := \frac{T(A,B,C)}{T(A,B,D)}$$

das *Doppelverhältnis der vier Punkte,* zugeordnet. Es gilt:

$\mathfrak{D}$ (A,B,C,D) < 0 ⇒ Die Punktepaare A, B bzw. C,D trennen einander

$\mathfrak{D}$(A,B,C,D) > 0 ⇒ Die Punktepaare A, B bzw. C,D trennen einander nicht.

Harmonische Punktequadrupel

Das Punktepaar A, B wird durch die Punkte C, D *harmonisch getrennt*, wenn die Strecke AB durch C und D innen bzw. außen in demselben Verhältnis geteilt werden:

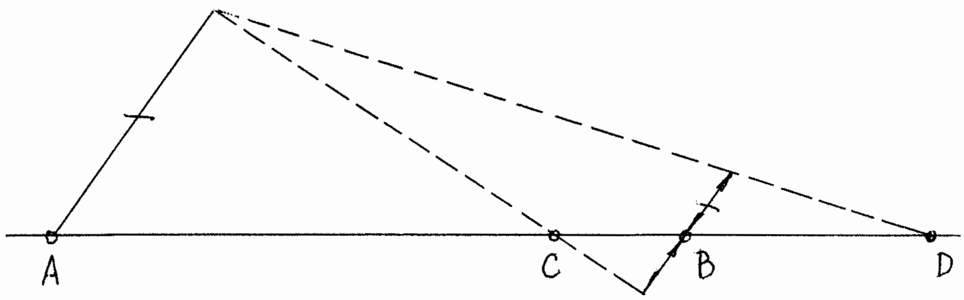
$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{m}{n}$$

oder wenn gilt

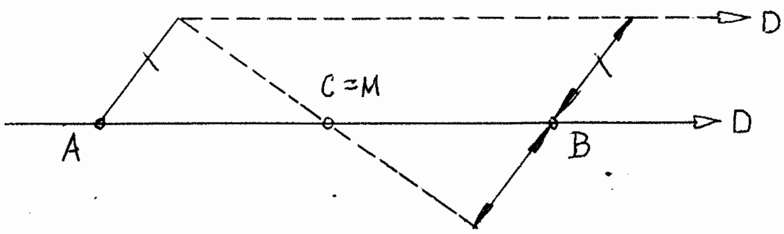
T(A,B,C) = -T(A,B,D) ⇔ $\mathfrak{D}$(A,B,CD) = -1

4.harmonischer Punkt D zu C bezüglich A,B

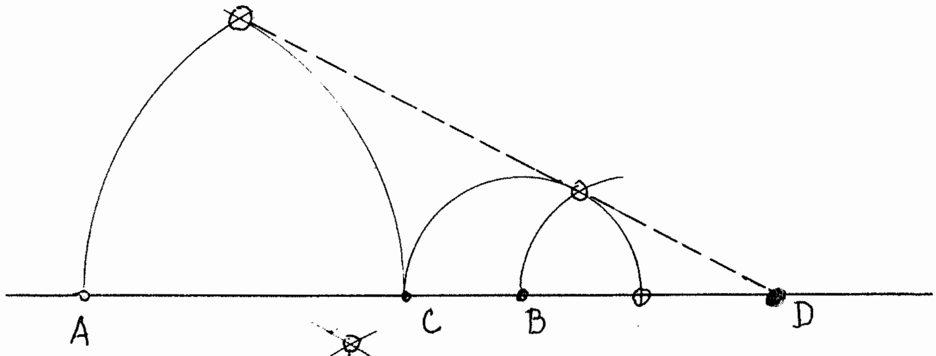
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

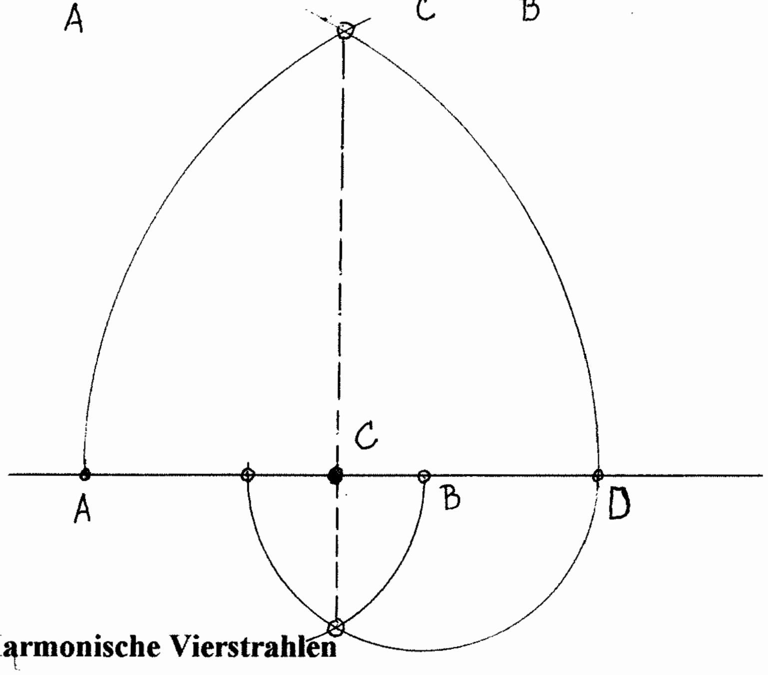


Sonderfall C = M



Liniensparende Konstruktion





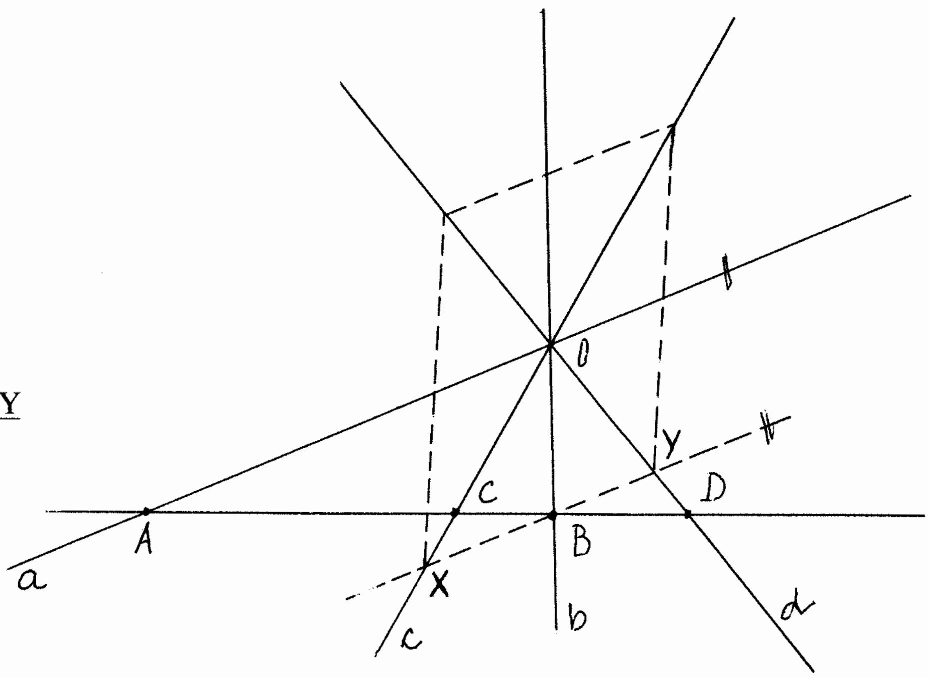
Harmonische Vierstrahlen

Die vom Punkt O ausstrahlenden Geraden a, b, c, d haben harmonische Lage, wenn sie durch das harmonische Punktequadrupel ABCD gehen (O nicht auf der Geraden ABCD)

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{m}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AO}{BY} = \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{m}{n} \\ \dfrac{AO}{BX} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{m}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{AO}{BY} = \frac{AO}{BX} \Rightarrow \underline{BX = BY}$$

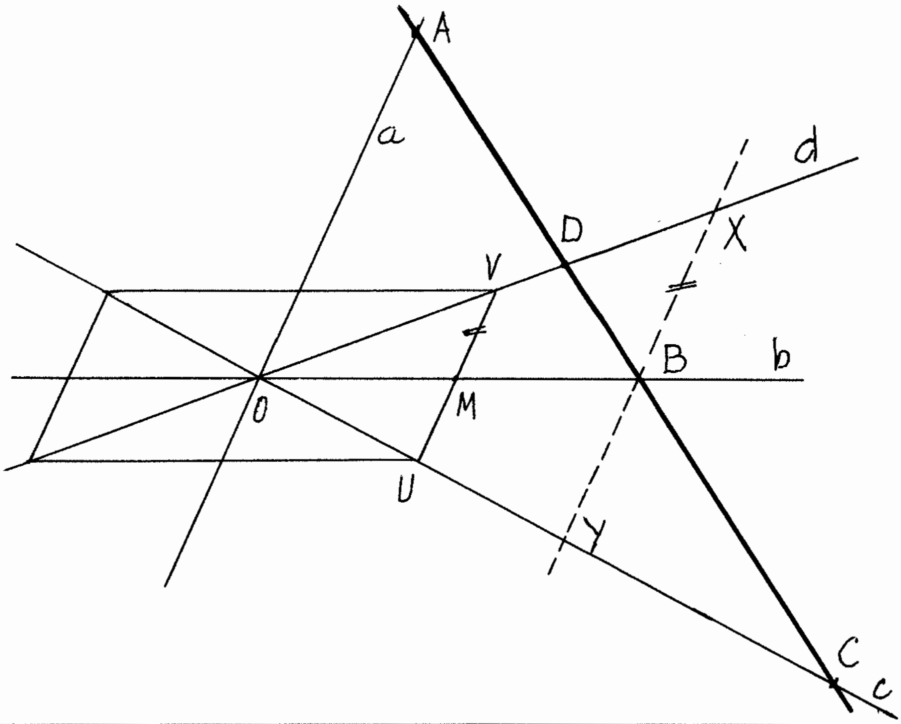


Vier Strahlen a,b,c,d haben harmonische Lage, wenn sie die Mittellinien und Diagonalen eines Parallelogramms sind

$$\frac{AO}{BY} = \frac{AC}{BC}$$

$MU = MV \Rightarrow BY = BX$

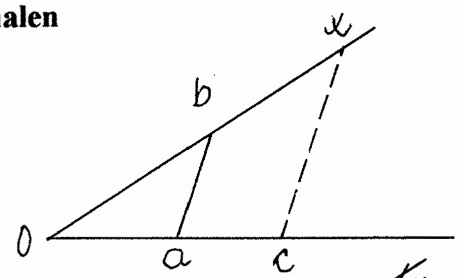
$$\frac{AO}{BX} = \frac{AD}{BD} = \frac{AO}{BY} = \frac{AC}{BC}$$



Ein harmonischer Vierstrahl durch O schneidet aus jeder nicht durch O gehenden Geraden ein harmonisches Punktequadrupel aus.

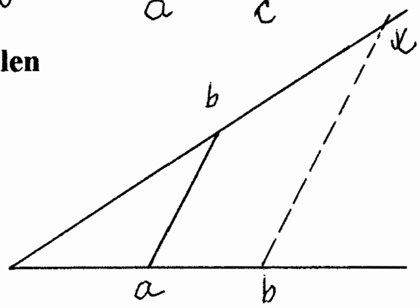
Konstruktion der 4.Proportionalen

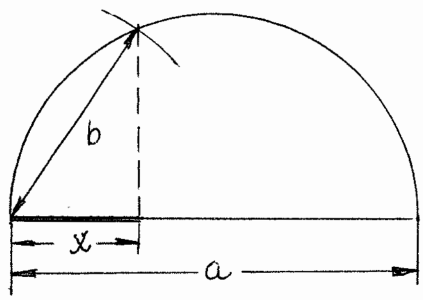
$a/b = c/x \Leftrightarrow ax = bc$



Konstruktion der 3.Proportionalen

$a/b = b/x \Leftrightarrow b^2 = ax$

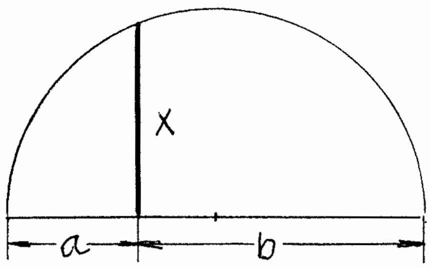


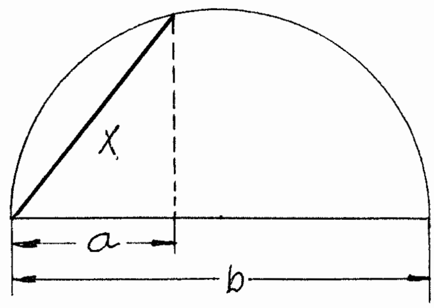


Das geometrische Mittel

$a/x = x/b$

$x^2 = a.b$





Die drei klassischen Mittelbildungen

Das arithmetisches Mittel

$$m = \frac{1}{2}(a+b) \Leftrightarrow m - a = b - m \Leftrightarrow \frac{m-a}{b-m} = \frac{a}{a}$$

Das geometrische Mittel

$$g^2 = ab \Leftrightarrow \frac{g}{a} = \frac{b}{g} \Leftrightarrow \frac{g-a}{b-g} = \frac{a}{g}$$

Das harmonische Mittel

$$g^2 = hm \Rightarrow ab = \frac{1}{2}(a+b)h$$

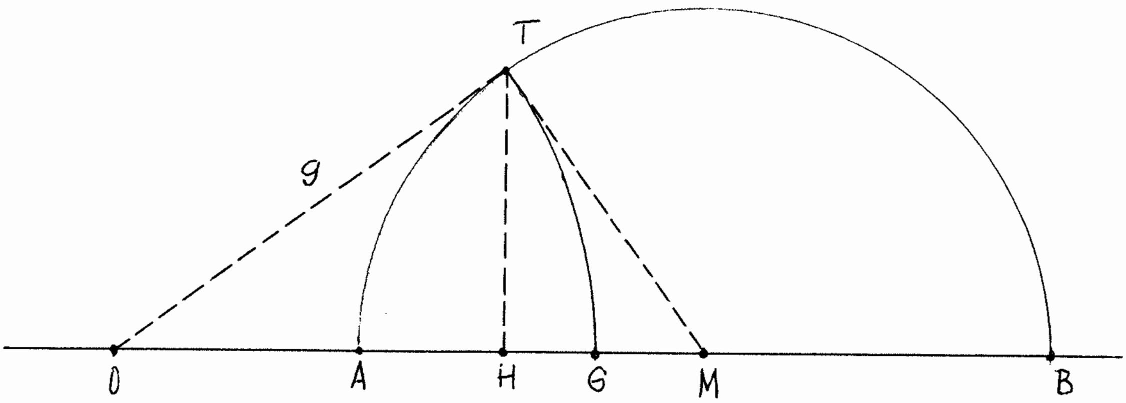
$$h = 2\frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow \frac{h-a}{b-h} = \frac{a}{b}$$

Konstruktion der drei Mittel

Gegeben seien die Strecken OA = a, OB = b

Konstruktion von

OM = m, OG = g, OH = h



Aus obiger Figur erkennt man für $a < b$ unmittelbar

$$a < h < g < m < b$$

Zahlenfolgen auf Grund der Mittelbildungen

Für drei aufeinander folgende Glieder a_1, a_2, a_3 einer Folge von reellen Zahlen gelte

1. Arithmetische Folge

$$\boxed{\frac{a_1-a_2}{a_2-a_3}=\frac{a_1}{a_1}} \Rightarrow \frac{a_1-a_2}{a_2-a_3}=1 \Rightarrow \underline{\underline{a_1-a_2=a_2-a_3=d=\text{const.}}}$$

Die Glieder a_i bilden eine *arithmetischeFolge*:

a_1, $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$, ... Ist a_1 das erste Glied der Folge, so gilt für das n-te Glied

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d}$$

$$a_{n-1}+a_{n+1}=[a_1+(n-2)d]+[a_1+n.d]=2a_1+2(n-1)d=2.a_n$$

$\boxed{a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n+1})}$ . . . a_n ist das *arithmetische Mittel* von a_{n-1} und a_{n+1}

2. Geometrische Folge

$$\boxed{\frac{a_1-a_2}{a_2-a_3}=\frac{a_1}{a_2}} \Rightarrow a_1a_2-a_2^2=a_1a_2-a_1a_3 \Rightarrow a_1a_3=a_2^2 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=q=\text{const.}}}$$

Die Glieder a_i bilden eine *geometrische Folge*:

a_1, $a_2 = a_1.q$, $a_3 = a_1.q^2$, ... Ist a_1 das erste Glied der Folge, so gilt für das n-te Glied

$$\boxed{a_n=q^{n-1}.a_1} \Rightarrow a_{n-1}a_{n+1}=q^{n-2}a_1.q^na_1=q^{2n-2}a_1^2=q^{2(n-1)}a_1^2=a_n^2$$

$\boxed{a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}}$ a_n ist das *geometrische Mittel* von a_{n-1} und a_{n+1}

3. Harmonische Folge

$$\boxed{\frac{a_1-a_2}{a_2-a_3}=\frac{a_1}{a_3}} \Rightarrow \frac{a_1-a_2}{a_1}=\frac{a_2-a_3}{a_3}\cdots \textbf{nicht konstant.} \Rightarrow a_1a_3 - a_2a_3 = a_1a_2 - a_1a_3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2a_1a_3 = a_1a_2 + a_2a_3 \mid :2a_1a_2a_3$

$\boxed{\frac{1}{a_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}\right)}$ a_2 ist das *harmonische Mittel* von a_1 und a_3

Die für die Folge a_1, a_2, a_3, gilt:

$$a_1,\ a_2,\ \frac{1}{a_3}=\frac{2}{a_2}-\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_4}=\frac{2}{a_3}-\frac{1}{a_2}=2\left(\frac{2}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)-\frac{1}{a_2}=\frac{3}{a_2}-\frac{2}{a_1}\ \ldots$$

Sind a_1 und a_2 die beiden ersten Glieder der Folge, so gilt für das n-te Glied der harmonischen Folge

$$\boxed{\frac{1}{a_n}=\frac{n-1}{a_2}-\frac{n-2}{a_1}}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_{n+1}}\right]=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n-2}{a_2}-\frac{n-3}{a_1}\right)+\left(\frac{n}{a_2}-\frac{n-1}{a_1}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2a_1a_2}\left[(n-2)a_1-(n-3)a_2+n.a_1-(n-1)a_2\right]=\frac{1}{2a_1a_2}\left[(2n-2)a_1-(2n-4)a_2\right]$$

$$=\frac{n-1}{a_2}-\frac{n-2}{a_1}=\frac{1}{a_n}$$

$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_{n+1}}\right]$ ... a_n ist das *harmonische Mittel* von a_{n-1} unn a_{n+1}

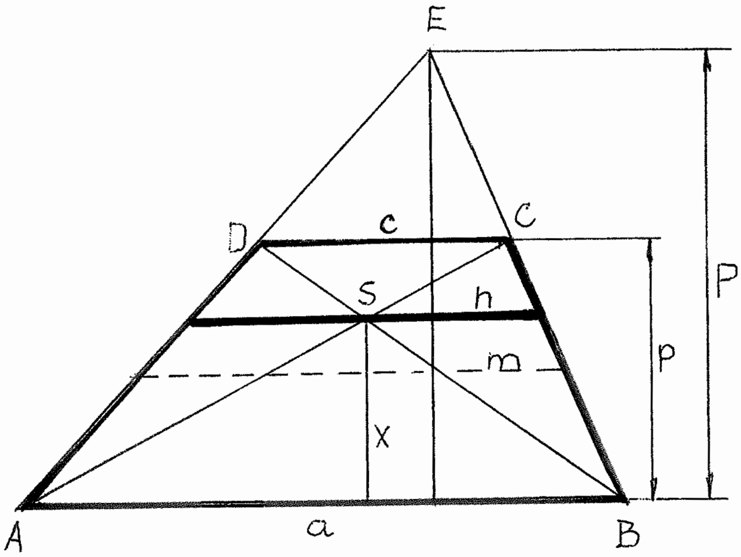
Spezialfall: Setzt man speziell

$a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},$ so folgt $\frac{1}{a_n}=2(n-1)-(n-2)=n$

Man erhält also die Folge

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$, die man als *harmonische Folge* im engeren Sinn bezeichnet

Zusammenhang zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel



$$\frac{P}{a}=\frac{P-p}{c}\Rightarrow Pc=Pa-pa\Rightarrow pa=P(a-c)\Rightarrow \underline{P=\frac{a}{a-c}\cdot p}$$

$$\frac{x}{a}=\frac{p-x}{c}\Rightarrow cx=ap-ax\Rightarrow x(c+a)=ap\Rightarrow \underline{x=\frac{a}{a+c}\cdot p}$$

$$\frac{P}{a}=\frac{P-x}{h}\Rightarrow\frac{1}{h}=\frac{1}{a}\cdot\frac{P}{P-x}=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{a}{a-c}\cdot p\right)\cdot\frac{1}{\frac{ap}{a-c}-\frac{ap}{a+c}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-c}{a+c}}=$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{a+c}{2c}=\underline{\frac{a+c}{2ac}=\frac{1}{h}} \qquad (*)$$

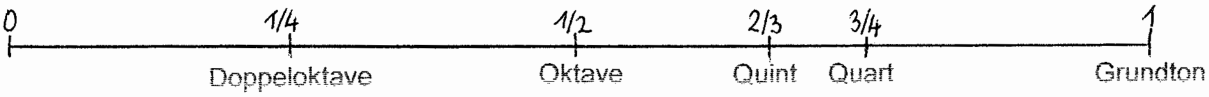
Daher $\boxed{\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)}$

Wegen $m=\frac{a+c}{2}$ folgt mit (*) $\frac{m}{ac}=\frac{1}{h}\Rightarrow\frac{m}{a}=\frac{c}{h}$

demnach $\boxed{a:m=h:c}$

Bedeutung der Mittelbildungen in der griechischen Musiktheorie.

Es war eine der fundamentalen Erkenntnisse der Pythagoreer, daß sich die musikalischen Intervalle durch Zahlenverhältnisse wiedergeben ließen, die durch die *Seitenlängen* am Monochord gemessen wurden. Bei den Griechen hieß das Monochord Kanon (Κανών): Rohrstab, Stab; Richtschnur, Regel, Muster, Vorbild. Das Wort kommt aus dem vorbaylonischen Akkadisch „qanu“: Rohrstab, Maßstab usw.
(Hermann PFROGNER: Lebendige Tonwelt. Zum Phänomen der Musik. Langen Müller, 1976)



Die griechischen Skalen - die von oben nach unten gezählt wurden - hatten einen Quinten- bzw.Quartenaufbau, nicht, wie in unserem Musiksystem, einen Terzenaufbau. Die Terz - die natürlich auch auftrat - galt aber bis ins späte Mittelalter nicht als konstituierendes Intervall..

Die arithmethische Folge

$m=\frac{1}{2}(a+b)\Leftrightarrow m-a=b-m$

Dies gilt etwa für die Seitenlängen 1, 2, 3, 4:

$2-1=3-2$

Dem entspricht die absteigende Folge Oktave - Quint - Quart

Die geometrische Folge

$g^2=ab\Leftrightarrow\frac{g}{a}=\frac{b}{g}\Leftrightarrow\frac{g-a}{b-g}=\frac{a}{g}$

Dies entspricht etwa den Seitenlängen

1, 2, 4

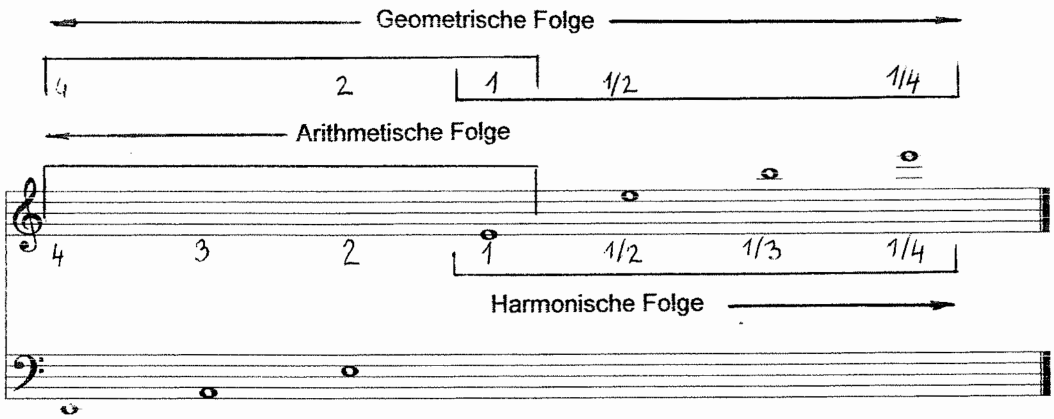
Dem entspricht also eine Folge von Oktaven

Die harmonische Folge

$h=2\frac{ab}{a+b}\Leftrightarrow\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\Leftrightarrow\frac{h-a}{b-h}=\frac{a}{b}$

Der „harmonischen Folge“ $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ entspricht die aufsteigende Folge Oktav - Quint - Quart

Darstellung in moderner Schreibweise



Die große und die kleine Terz

Die theoretische Verankerung der großen und kleinen Terz in der Musiktheorie der Neuzeit erfolgte durch Gioseffe ZARLINO (1517-1590) in seinem Werk „Istitutioni harmoniche“, in welchem er zwischen Quint und Grundton das arithmetische bzw. das harmonische Mittel einschaltete

Da die Seitenlänge des Grundtons 1 und die der Quint $\frac{2}{3}$ beträgt, ergibt sich für das arithmetische Mittel

$m = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{3}\right) = \underline{\frac{5}{6}}$ Seitenläge für die kleine Terz

und für das harmonische Mittel

$h = 2 \cdot \frac{1 \cdot \frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = 2 \cdot \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \underline{\frac{4}{5}}$ Seitenlänge für die großen Terz

Harmonische Lage

Betrachtet man die Seitenlängen, welche der Oktave, der Quint, der Quart und dem Grundton entsprechen und bildet das Doppelverhältnis dieser vier Seitenlängen nach Seite 19c, so ergibt sich

$$D\,(\text{Oktav, Quart, Quint, Grundton}) = \frac{T\,(\text{Oktav, Quart, Quint})}{T\,(\text{Oktav,Quart, Grundton})} = \frac{-\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}}{\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{4}}} = -\frac{\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}}}{\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}} = -\frac{2}{2} = -1$$

Die vier Punkte haben also *harmonische Lage*

Streckenrechnung

Streckenaddition

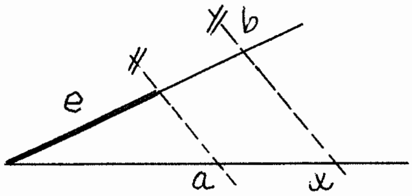
Die Regeln für die Streckenaddition (Addierbarkeit, Kommutativität, Assoziativität etc.) sollen hier nicht behandelt werden, da sie zum Teil axiomatisch festgelegt, zum Teil unmittelbar einsichtig sind.

Streckenmultiplikation

Definition

Wir wählen ein- für allemal eine feste *Einheitsstrecke* e. Dann nennen wir die durch

$x:a = b:e$

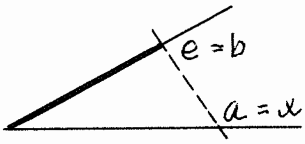


festgelegte Strecke x das *Produkt der Strecken* a, b und definieren

$ab := x.$

Speziell gilt für b = e auf Grund der Konstruktion

$x:a = e:e \Leftrightarrow ae = a = x$



<u>Anmerkung</u>: Gewöhnlich teilt man dem Produkt zweier Strecken die Dimension einer *Fläche* zu. Bei der HILBERTschen Streckenrechnung ist das Produkt zweier Strecken aber wieder eine *Strecke*.

Kommutativität des Streckenproduktes

$x:a = b:e \Leftrightarrow x = ab$

Vertauschung der Innenglieder nach (6) (s.S.7) ergibt

$x:b = a:e \Leftrightarrow x = ba$, daher $\underline{ab = ba}$

Assoziatives Gesetz des Streckenproduktes

$u: a = b:e \Leftrightarrow u = ab$ (§)

$v:b = c:e \Leftrightarrow v = bc$ (%)

$w:u = c:e \Leftrightarrow w = uc$ (&)

Wir bilden

$$\left.\begin{array}{l} w:u = c:e \overset{(\%)}{\Rightarrow} w:u = v:b \\ \quad (\S) \quad u:a = b:e \end{array}\right\}$$

Die erste Zusammensetzungsregel (7) (s.S.8) ergibt

$$w:a = v:e \Leftrightarrow w = av \overset{(\&)}{\Rightarrow} uc = av \overset{(\S)(\%)}{\Rightarrow} \underline{(ab)c = (a)bc}$$

Distributives Gesetz

$u:a = c:e \Leftrightarrow u = ac$

$\underline{v:b = c:e \Leftrightarrow v = bc}$

$u:a = v:b = c:e$ Der Korrespondenzsatz (3) (s.S.6) ergibt

$u + v : a + b = c:e \Leftrightarrow u + v = (a + b)c \Rightarrow \underline{ac + bc = (a+b)c}$

Produkt der Innenglieder = Produkt der Außenglieder

$\underline{a:b = c:d \Leftrightarrow ad = bc}$

Beweis $\Rightarrow$
$$\left.\begin{array}{r} \text{Es sei}\quad u = ad \Leftrightarrow u:a = d:e \\ \text{Nach Voraussetzung gilt}\quad a:b = c:d \end{array}\right\}$$
Die zweite Zusammensetzungregel (8) (s.S.8) ergibt daraus $u:b = c:e \Rightarrow u = bc \Rightarrow \underline{ad = bc}$

Beweis $\Leftarrow$ Es sei $u = ad = bc$, das ist definitionsgemäß

$$\left.\begin{array}{l} u:a = d:e \\ u:b = c:e \end{array}\right\} \overset{(2)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} a:u = e:d \\ u:b = c:e \end{array}\right\}$$
die 2.Zusammensetzungsregel (8) (s.S.8) ergibt daraus

$\underline{a:b = c:d}$

Kürzungsregel

$\underline{ab = bc \Rightarrow a = c}$

Es war $a:b = c:b \Rightarrow a = c$ (nach der Kürzungsregel (4) von Seite 7). In Produktschreibweise (s. oben) lautet dieser Sachverhalt: $ab = cb \Rightarrow a = c$

Bezeichnungweisen

1. Stehen zwei Reihen von Strecken $\left\{\begin{array}{l} a, b, c, d, \ldots \\ a', b', c', d' \ldots \end{array}\right.$ in der Beziehung

$a:b = a':b'$, $b:c = b':c'$, $c:d = c':d', \ldots$, so schreibt man diese Beziehung als *fortlaufende Proportion*

$a:b:c:d: \ldots = a':b':c':d': \ldots$

und nennt die Strecken *direkt proportional.*

2. Stehen zwei Reihen von Strecken $\left\{\begin{array}{l} a, b, c, d, \ldots \\ a', b', c', d' \ldots \end{array}\right.$ in der Beziehung

$a:b = b':a'$, $b:c = c':b'$, $c:d = d':c', \ldots$ so schreibt man

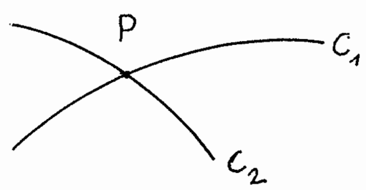
$aa' = bb' = cc' = dd' = \ldots$

und nennt die Strecken *verkehrt proportional.*

Methoden zur Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben

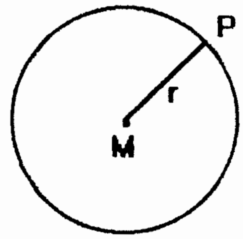
Festlegung eines Punktes als Schnitt von Punktmengen (Methode der geometrischen Örter)

Viele geometrische Konstruktionsaufgaben gipfeln in der Aufsuchung eines einzigen Punktes P. Ein Punkt ist aber durch Angabe zweier Bedingungen festgelegt, i.a.also als Schnittpunkt zweier Kurven.

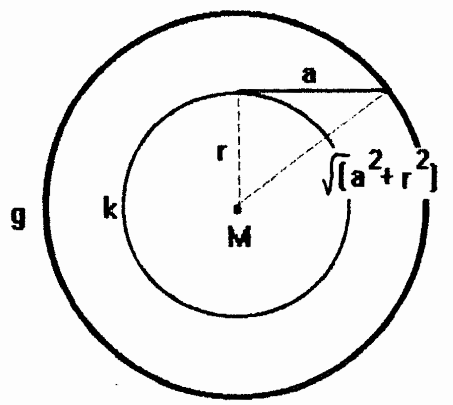


Läßt man eine der beiden Bedingungen weg, so variiert P nur mehr auf einer Kurve, dem *geometrischen Ort* von P

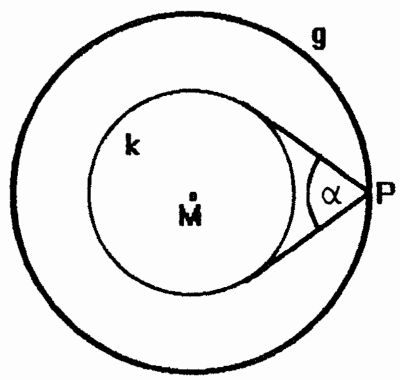
1. Der *Kreis* ist der Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt M vorgegebenen Abstand r haben



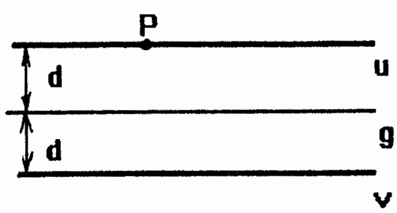
2. Der Ort der Endpunkte gleichlanger Tangenten an einen Kreis k ist ein zu k *konzentrischer Kreis* g ≡ Ort der Punkte vorgegebener Potenz bezüglich k ≡ Ort der Mittelpunkte aller k orthogonal schneidenden Kreise von gegebenem Radius a ≡ *Äquitangentialkurve* von k mit der Tangentenstrecke a.



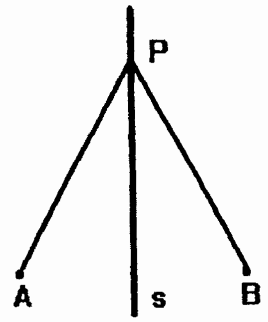
3. Der Ort der Punkte, von denen aus ein Kreis k unter konstantem Winkel α erschent, ist ein zu k *konzentrischer Kreis* g (*isoptische Kurve zu* k *bezüglich des Winkels* α).



4. Der Ort aller Punkte, welche von einer gegebenen Geraden g konstanten Abstand d besitzen, ist ein *Parallelenpaar* u, v zu g im Abstand d.



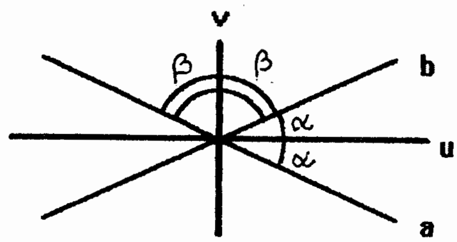
5. Der Ort aller Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten A, B gleiche Abstände besitzen, ist die *Streckensymmetrale* der von den Punkten A, B gebildeten Strecke.



6. Der Ort aller Punkte, welche von zwei einander schneidenden Geraden a,b gleiche Abstände besitzen, ist das *Paar* u; v *der Winkelhalbierenden* der gegebenen Geraden. Sind a,b parallel, so ergibt sich deren Mittellinie (siehe **4.**) Es gilt

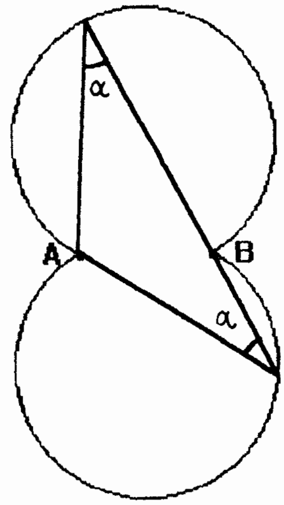
$2\alpha+2\beta = 2R \Rightarrow \alpha+\beta = R \Rightarrow u \perp v$

Die Geraden a, b, u, v bilden einen *harmonischen Vierstrahl.*



7. Der Ort aller Punkte, von denen aus man eine gegeene Strecke unter einem gegebenen konstanten Winkel α sieht, ist ein bezüglich der Strecke symmetrisches *Paar von Kreisbogen.*

<u>Sonderfall</u>: *Kreis von THALES*



8. Der Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei gegebenen Punkten A, B ein konstantes Abstandsverhältnis m:n besitzen, ist der *Kreis von APOLLONIOS*[6]:

Es sei PA/PB = m/n. Konstruiert man die Punkte A' und B' vermöge PA':= PA und PB':= PB, dann sind die Geraden PC⊥BB' und PD⊥AA' die Halbierenden von Innen- und Außenwinkel des Winkels ∠APB im ΔABP. Daher ist AA' ∥ PD. Aus dem Strahlensatz folgt

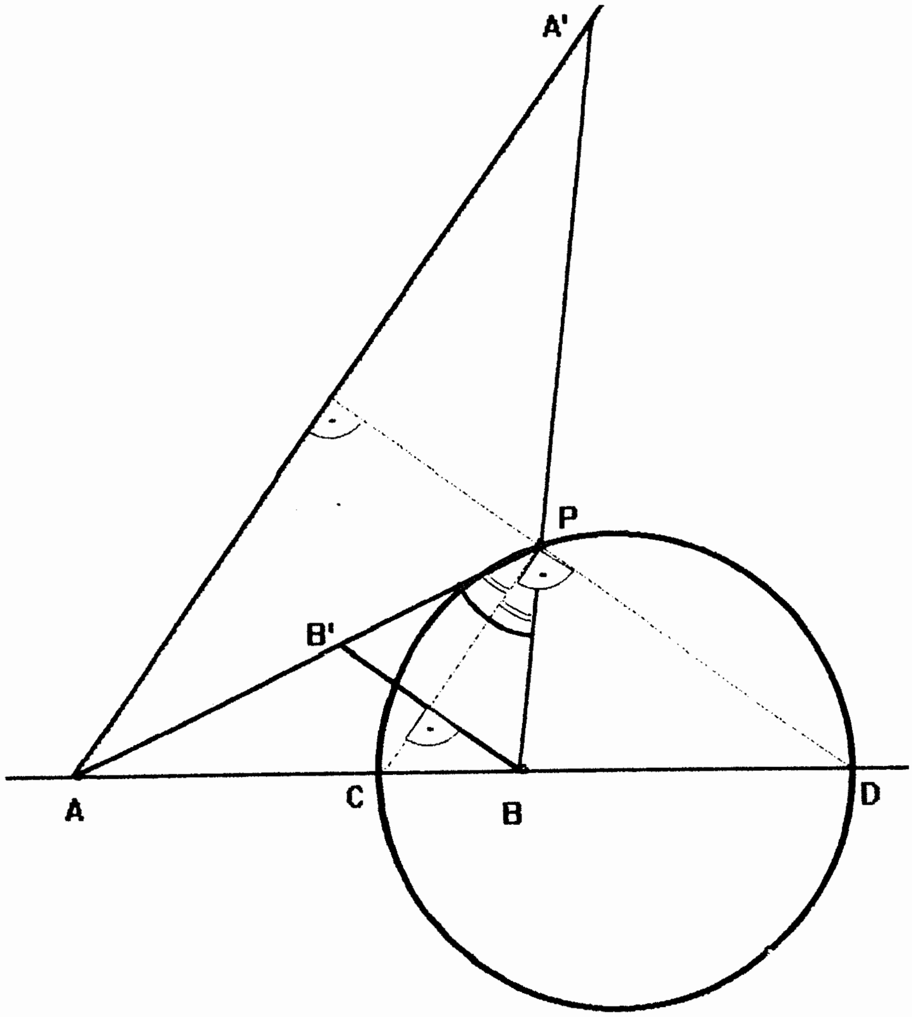
AC/CB = PA'/PB = PA/PB = m/n

AD/BD = AP/PB' = AP/PB = m/n

Die Punkte C bzw. D teilen daher die Strecke AB innen und außen in demselben Verhältnis, dh. die Punkte C, D teilen die Strecke AB *harmonisch*. Daraus folgen die Sätze:

Die Winkelhalbierende eines Dreieckswinkels teilt die gegenüberliegende Dreiecksseite *innen* im Verhältnis der anliegenden Seiten.

[6] APOLLONIOS von Perge 262?-190? v.Chr.

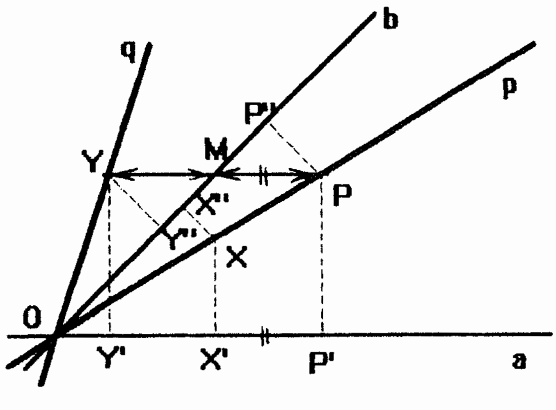


Die Winkelhalbierende des Außenwinkels eines Dreiecks teilt die gegenüberliegende Dreiecksseite *außen* im Verhältnis der anlegenden Seiten.

Da die Lage der Punkte C und D durch die Strecke AB und das Verhältnis m:n eindeutig bestimmt ist und $\angle CPD = R$ ist (siehe **6.**), ist der Ort von P der THALESkreis über der Strecke CD. **5.** Ist daher ein Sonderfall des vorliegenden Satzes für $m/n = 1/1$. Aus dem soeben bewiesenen Satze folgt sofort

9. Der Ort aller Punkte, von denen aus man die auf derselben Geraden liegenden , aneinander anschließenden Strecken AC, CB unter gleichem Winkel sieht, ist der *Kreis von APOLLONIOS.*

10. Der Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei einander in O schneidenden Geraden a, b konstant gleich m:n ist, ist ein *Paar von Geraden* p, q durch O.



Sei nämlich PP'/PP" = m/n, so gilt auf der Geraden p:= (OP) für jeden Punkt X OX/OP= XX'/PP' = XX"/PP" $\Rightarrow$ (Vertauschung der Innenglieder) XX'/XX" = PP'/PP" = m/n

Konstruiert man Y wie angegeben, so gilt

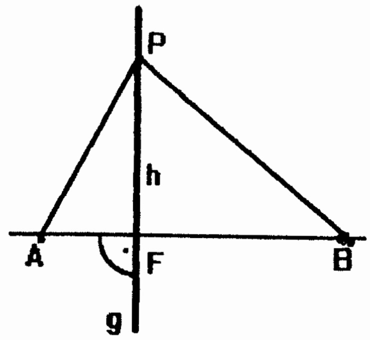
$$\Delta PP''M = \Delta YY''M \Rightarrow YY'' = PP''$$

Ferner gilt

$$YY' = PP' \Rightarrow YY'/YY'' = PP'/PP'' = m/n$$

p,q trennt daher a,b harmonisch.

11. Der Ort aller Punkte, für welche die Differenz der Quadrate der Abstände zu zwei festen Punkten A, B einen konstanten Wert a^2 hat, ist *eine Gerade normal zu* (AB).



$$PB^2 - PA^2 := a^2$$

$$\left.\begin{array}{l} PB^2 = h^2 + FB^2 \\ PA^2 = h^2 + FA^2 \end{array}\right\} \Rightarrow PB^2 - PA^2 = FB^2 - FA^2 = a^2$$

Mit AB = d folgt AB = FB + FA = d

daher

(FB + FA)(FB - FA) = d(FB - FA) = a^2

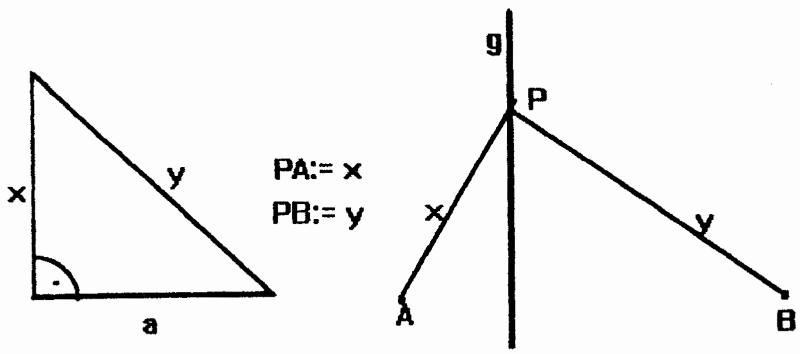
daraus

$$FB - FA = \frac{a^2}{d}$$

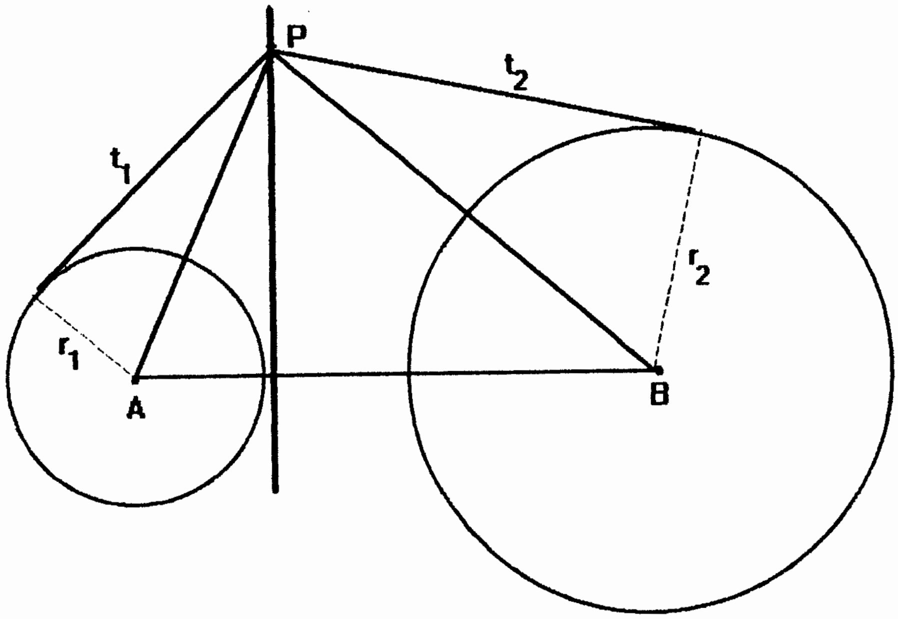
$$FB + FA = d$$

$$\left.\begin{array}{l} FB = \frac{1}{2d}(d^2 + a^2) \\ FA = \frac{1}{2d}(d^2 - a^2) \end{array}\right\} \text{unabhängig von P}$$

Konstruktion von g bei gegebenen Punkten A, B und gegebenem a



12. Der Ort allerPunkte, von denen aus die Differenz der Quadrate der Tangentenstrecken an zwei gegebene Kreise einen konstanten Wert a^2 hat, ist eine *Gerade normal zur Verbin-dung der beiden Kreismittelpunkte.*



$t_2^2 - t_1^2 = a^2$

$PA^2 = t_1^2 + r_1^2$

$\underline{PB^2 = t_2^2 + r_2^2}$

$PB^2 - PA^2 = t_2^2 - t_1^2 + (r_2^2 - r_1^2) = a^2 + (r_2^2 - r_1^2) = \text{const.}$

Der gesuchte Ort ist daher nach **11.** eine Gerade.

1. Sonderfall: $t_1 = t_2 \Rightarrow a^2 = 0$. Die Punkte der Geraden haben bezüglich beider Kreise dieselben Tangentenstrecken, d.h. alle Punkte der Geraden haben jeweils die gleiche Potenz bezüglich beider Kreise. DieGerade heißt daher *Potenzlinie der beiden Kreise.*

2.Sonderfall:

$a^2 = 2(r_1^2 - r_2^2) \Rightarrow \underline{PB^2 - PA^2} = a^2 + (r_2^2 - r_1^2) = 2(r_1^2 - r_2^2) + (r_2^2 - r_1^2) = \underline{(r_1^2 - r_2^2)}$

Die sich ergebende Gerade heißt *Antipotenzlinie der beiden Kreise.*

Beispiel 1: Man zeichne die Potenzlinie zweier Kreise k_1, k_2 ≡ Ort aller Punkte, von denen aus man gleichlange Tangenten an zwei gegebene Kreise legen kann ≡ Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Kreise orthogonal schneiden.

$AB = d,\ t_1^2 = PA^2 - r_1^2 \quad t_2^2 = PB^2 - r_2^2$

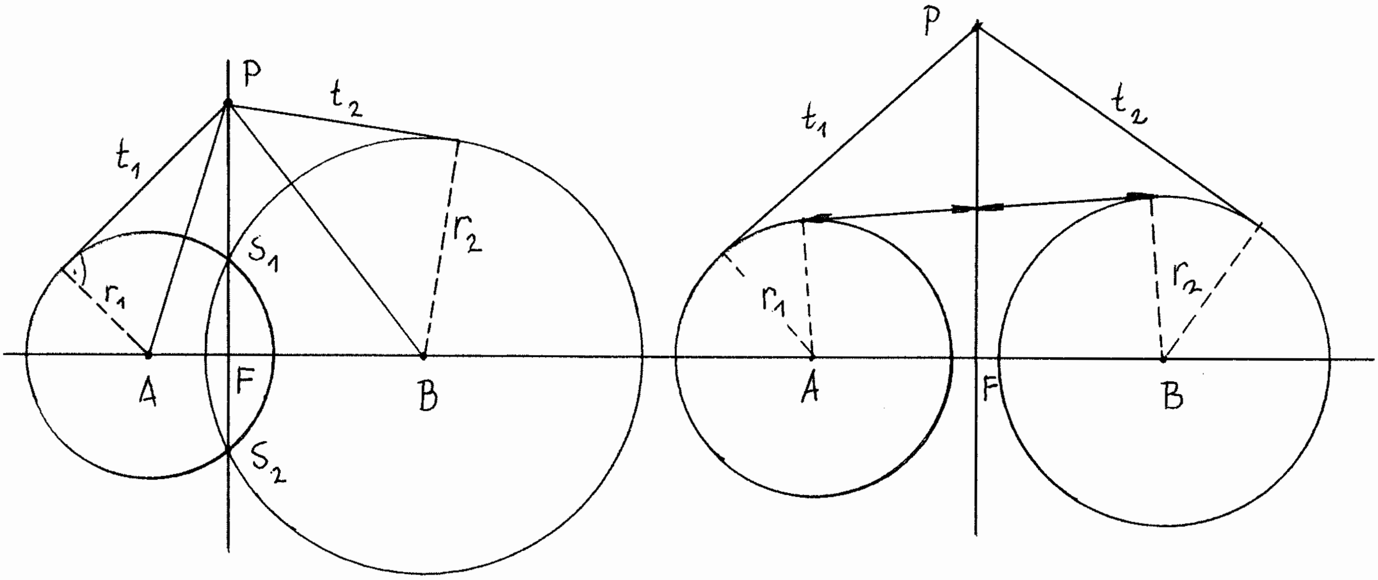
Diese Beziehung stellt nach Seite 5 die Bedingung für den orthogonalen Schnitt von k_1 mit dem Kreis $k(P,t_1)$ dar

$PB^2 - PA^2 = (t_2^2 - t_1^2) + (r_2^2 - r_1^2) = a^2 + (r_2^2 - r_1^2)$

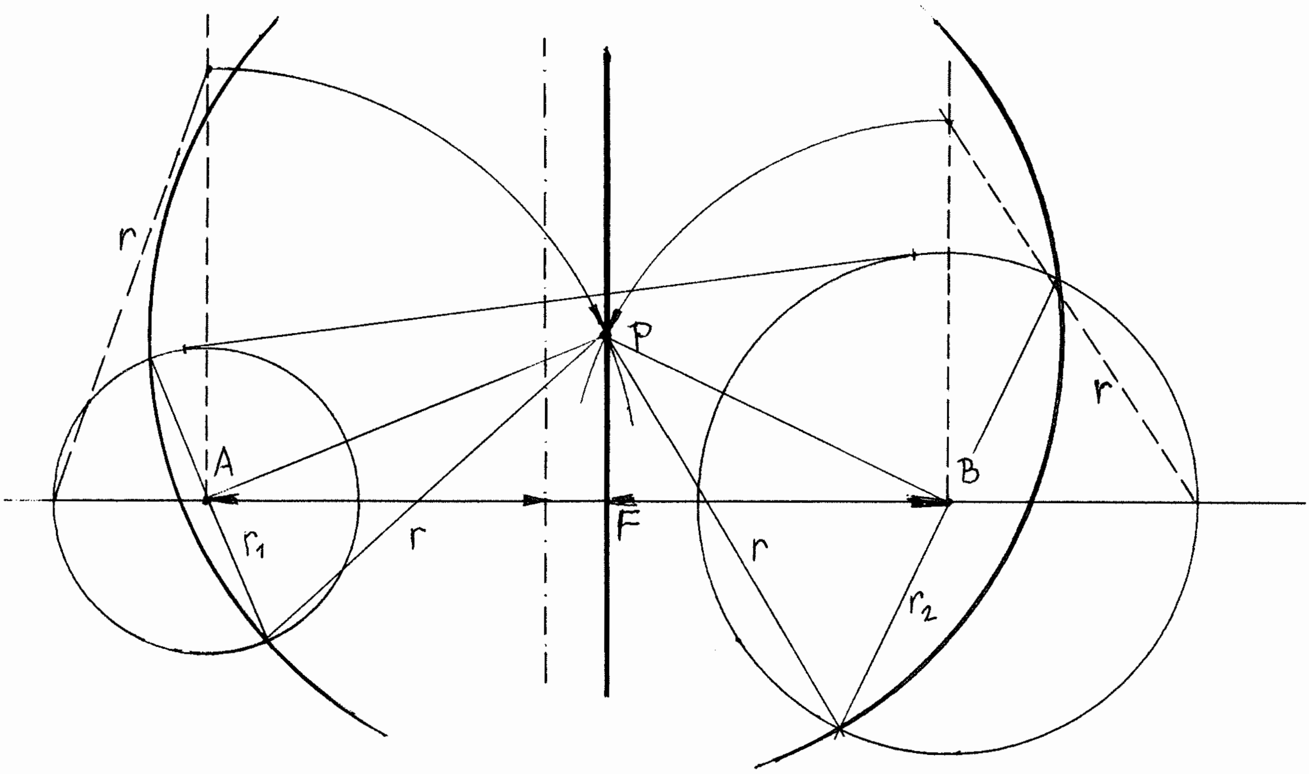
$a^2 = 0 \Rightarrow \underline{PB^2 - PA^2 = (r_2^2 - r_1^2)} = \text{ const.}$

Nach **11.** 1.Sonderfall ist also der Ort der Punkte P eine Gerade und es gilt für deren Fußpunkt F

$$FB = \frac{1}{2d}\left(\left(r_2^2 - r_1^2\right) + d^2\right) \quad FA = \frac{1}{2d}\left(d^2 - \left(r_2^2 - r_1^2\right)\right)$$



Beispiel 2: Man suche den Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Kreise nach Gegenpunkten schneiden.



Soll der Kreis $k(P,r)$ die beiden Kreise $k_1(A,r_1)$, $k_2(B,r_2)$ nach Gegenpunkten schneiden, so muß nach Seite 5 gelten

$AB = d \qquad r^2 = r_1^2 + PA^2 \qquad r^2 = r_2^2 + PB^2 \Rightarrow \underline{PB^2 - PA^2 = r_1^2 - r_2^2}$

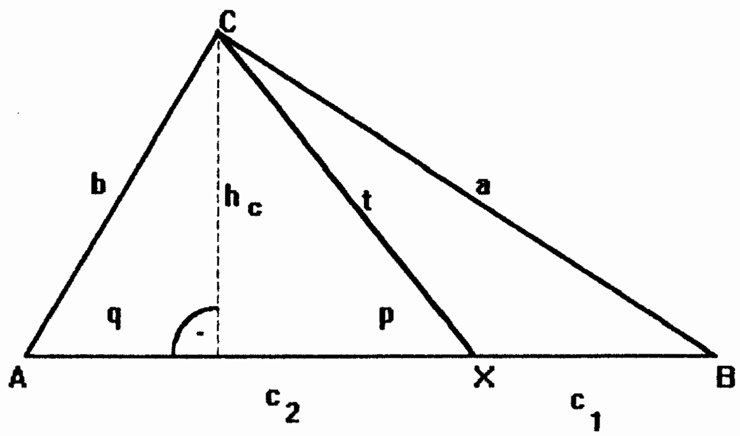
Dies ist aber die Bedingung für die Antipotenzlinie.
Für deren Fußpunkt F gilt

$FB = \frac{1}{2d}\left(r_1^2 - r_2^2 + d^2\right)$ ... Strecke FA bei der Potenzlinie

$FA = \frac{1}{2d}\left(d^2 - r_1^2 + r_2^2\right)$ ... Strecke FB bei der Potenzlinie

Die Konstruktion der Antipotenzlinie erfolgt also zweckmäßig nach der Konstruktion der Potenzlinie der beiden Kreise.

Hilfssatz: Der Transversalensatz von Stewart[7]



Es gilt

$c = c_1 + c_2 = p + q$

$h_c^2 = b^2 - q^2 = a^2 - (c-q)^2 = t^2 - (c_2 - q)^2$ (1)

$b^2 - q^2 = a^2 - c^2 + 2qc - q^2 \quad \Big| -c_2$ (2)

$\underline{b^2 - q^2 = t^2 - c_2^2 + 2c_2q - q^2 \quad \Big| \; c}$

$b^2\underbrace{(c - c_2)}_{c_1} = -a^2c_2 + c^2c_2 - cc_2^2 + t^2c$

$b^2c_1 = t^2c - a^2c_2 + cc_2(c - c_2) = t^2c - a^2c_2 + cc_1c_2$

Also

$$\boxed{t^2c = a^2c_2 + b^2c_1 - cc_1c_2}$$

[7] Matthiew STEWART 1717-1785. Professor in Edinburgh. Schüler von Robert SIMSON und MACLAURIN

Anwendungen des Satzes von STEWART

Länge der Höhe h_c

$$\left.\begin{array}{l}(1) \Rightarrow h_c^2 = b^2 - q^2 \\ (2) \Rightarrow 2cq = b^2 - a^2 + c^2 \Rightarrow q = \dfrac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$h_c^2 = b^2 - \frac{1}{4c^2}[b^2 - a^2 + c^2]^2 = \frac{1}{4c^2}[2bc + b^2 - a^2 + c^2].[2bc - b^2 + a^2 - c^2] =$$

$$= \frac{1}{4c^2}[(b+c)^2 - a^2].[a^2 - (b-c)^2] = \frac{1}{4c^2}[b+c+a].[b+c-a].[a+b-c].[a-b+c]$$

Setzt man

$$\boxed{s = \frac{1}{2}(a+b+c)}$$

so folgt

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2}[2s].[2(s-a)].[2(s-b)].[2(s-c)]$$

Also

$$\boxed{h_c^2 = \frac{4}{c^2}s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ und zyklisch

Daraus ergibt sich für die Fläche F = ½ h_c.c

$$\boxed{F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ Formel von HERON[8]

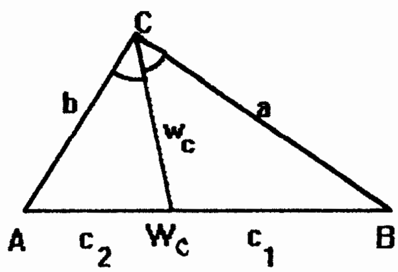
Länge der Winkelhalbierenden w_c

Es gilt

$$c_1/c_2 = a/b \Rightarrow c_2 = \frac{b}{a}.c_1$$

$$c_1 + c_2 = c \Rightarrow c_1 + \frac{b}{a}.c_1 = c \Rightarrow c_1.\frac{a+b}{a} = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 \frac{ac}{a+b}, \quad c_2 = \frac{bc}{a+b}$$



Daher nach STEWART

$$w_c^2.c = a^2.\frac{bc}{a+b} + b^2.\frac{ac}{a+b} - c.\frac{abc^2}{(a+b)^2} \Rightarrow w_c^2 = \frac{ab(a+b)}{a+b} - \frac{(ac).(bc)}{(a+b)^2}$$

Demnach

$$\boxed{w_c^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab - c_1c_2}$$ und zyklisch

[8] HERON von Alexandrien ca. 100 v.Chr.

Länge der Schwerlinie m_c

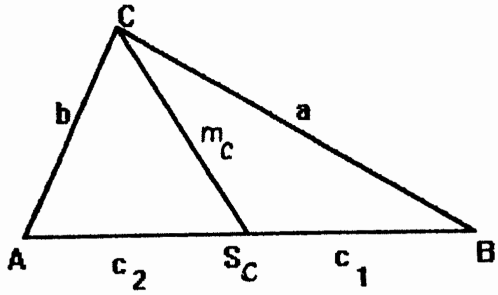
Aus

$$c_1 = c_2 = \frac{c}{2}$$

folgt

$$m_c^2 . c = a^2 . \frac{c}{2} + b^2 . \frac{c}{2} - c . \frac{c}{2} . \frac{c}{2}$$

daraus



$$\boxed{m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$$

und zyklisch

13. Der Ort aller Punkte, deren Abstandsquadrate von zwei festen Punkten A, B konstante Summe a^2 haben, ist ein *Kreis*, dessen Mittelpunkt die Strecke AB halbiert.

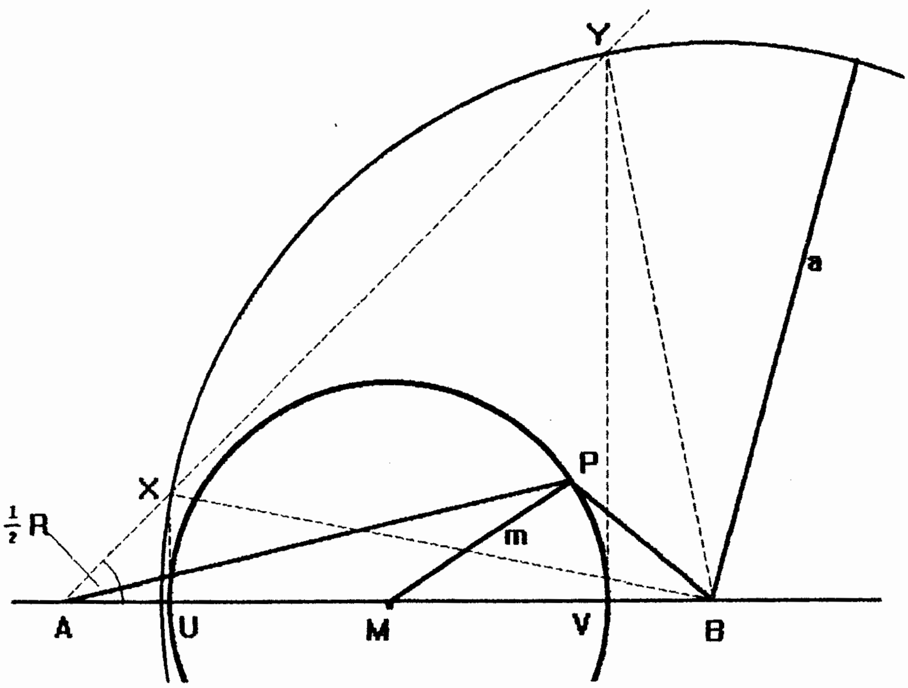
Für den Punkt P gelte

$PA^2 + PB^2 = a^2 = \text{const.}$

Im ΔABP gilt daher für die Schwerlinie m

$$m^2 = \frac{1}{2}\left(PA^2 + PB^2\right) - \frac{1}{4}AB^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}AB^2 = \text{const.}$$

d.h. der Ort von P ist der Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius m.



Daher gilt auch für die Schnittpunkte U, V dieses Kreises mit der Geraden (AB)

$UA^2 + UB^2 = a^2$

$VA^2 + VB^2 = a^2$

Zeichnet man eine Gerade durch A unter ½R gegen (AB), so gilt

AU = UX, AV = VY

daher

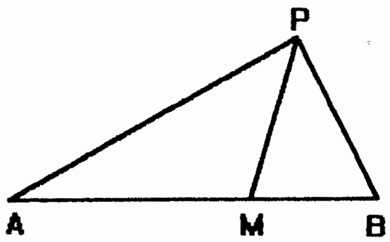
$UA^2 + UB^2 = \underline{UX^2 + UB^2 = a^2}$, $VA^2 + VB^2 = \underline{VY^2 + VB^2 = a^2}$

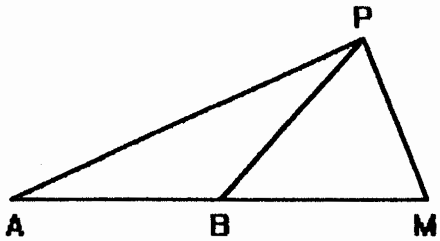
d.h. X und Y liegen auf einem Kreis mit dem Radius a, woraus man entweder die Strecke a entnehmen, oder bei gegebenem a die Punkte U, V konstruieren kann.

14. Der Ort aller Punkte P, für deren Abstand von zwei festen Punkten A,B gilt

$$m.AP^2 \pm n.BP^2 = a^2 = \text{const.}$$

ist ein *Kreis*. Dessen Mittelpunkt M teilt bei der *Summe* die StreckeAB *innen*, bei der *Differenz* die Strecke AB *außen* im Verhältnis AM:BM = n:m.





Es sei P ein Punkt, für den gilt

$m.AP^2 + n.BP^2 = a^2$	$m.AP^2 - n.BP^2 = a^2$

Ferner teile M die Strecke AB im Verhältnis AM:BM = n:m

innen	außen

Anwendung des Transversalensatzes von STEWART

innen:

auf ΔABP und die Transversale PM ergibt

$$PM^2.AB = BP^2.AM + AP^2.BM - AB.AM.BM$$

Nun gilt

$$\frac{AM}{MB} = \frac{n}{m} \Rightarrow AM = \frac{n}{m}.BM$$

$$AB = AM + BM = \frac{n+m}{m}.BM$$

außen:

auf ΔAMP und die Transversale BP ergibt

$$BP^2.AM = PM^2.AB + AP^2.BM - AM.AB.BM$$

Nun gilt

$$\frac{AM}{MB} = \frac{n}{m} \Rightarrow AM = \frac{n}{m}.BM$$

$$AB = AM - BM = \frac{n-m}{m}.BM$$

daher

$$PM^2.\frac{n+m}{m}.MB = BP^2.\frac{n}{m}.BM + AP^2.BM - \frac{n+m}{m}.BM.\frac{n}{m}.BM.BM$$

$$BP^2.\frac{n}{m}.BM = PM^2.\frac{n-m}{m}.BM + AP^2.BM - \frac{n}{m}.BM.\frac{n-m}{m}.BM.BM$$

Kürzen durch BM und Multiplikation mit m ergibt

$$PM^2.(n+m) = (n.BP^2 + m.AP^2) - n.BM^2 - m.\left(\frac{n}{m}.BM\right)^2$$

$$BP^2.n = PM^2(n-m) + m.AP^2 + n.BM^2 - m.\left(\frac{n}{m}.BM\right)^2$$

daraus

$\underline{(n + m).PM^2 = a^2 - (n.BM^2 + m.AM^2)}$ (•)

$\underline{(n - m).PM^2 = (m.AM^2 - n.BM^2) - a^2}$ (•)

PM ist daher konstant.

Für m = n = 1 folgt **13.** als Sonderfall

Für = n = 1 folgt m **12.** als Sonderfall

Zur *konstruktiven Behandlung* des Ausdrucks

$m.AP^2 + n.BP^2 = a^2$ | $m.AP^2 - n.BP^2 = a^2$

ist es zweckmäßig, beide Seiten der Beziehung durch n zu divieren. Dann gilt mit

$$q := \frac{m}{n}, \quad c^2 := \frac{a^2}{n} \qquad (1)$$

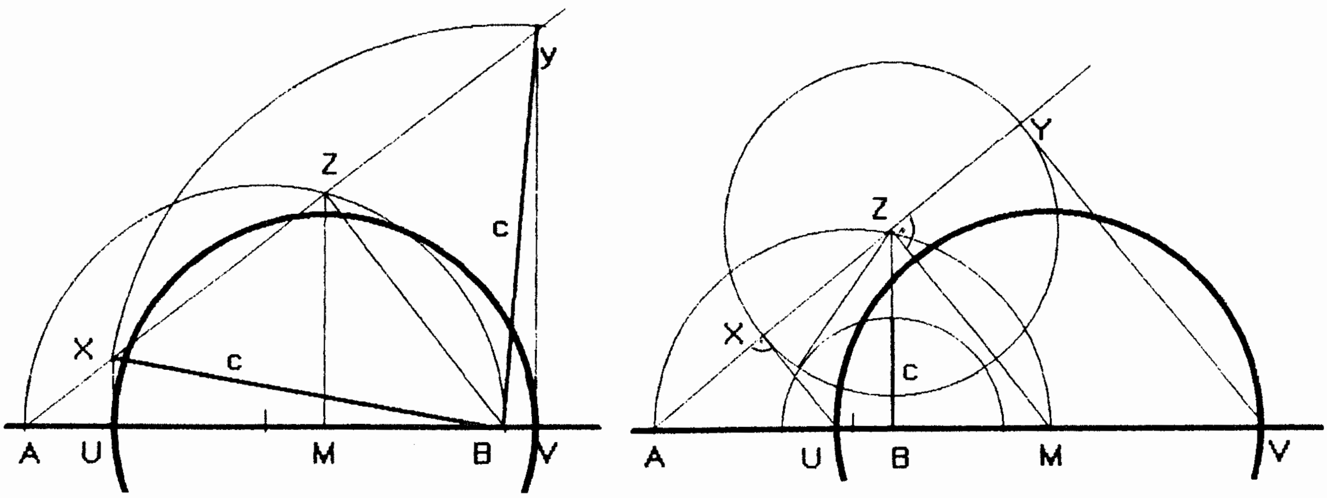
$$\frac{BM}{AM} = q, \quad BM = q.AM \qquad (2)$$

$AB = AM + MB = (1+q).AM$ (3)

$q.AP^2 + BP^2 = c^2$ (4)

$AB = AM - MB = (1-q).AM$ (3)

$q.AP^2 - BP^2 = c^2$ (4)



Für die auf der Geraden (AB) liegenden Punkte U, V, welche den Bedingungen (4) entsprechen, gilt dann

$q.AU^2 + BU^2 = c^2$ (5)

$q.AV^2 + BV^2 = c^2$ (6)

$q.AU^2 - BU^2 = c^2$ (5)

$q.AV^2 - BV^2 = c^2$ (6)

Der gesuchte Ort ist dann der *Kreis* über dem Durchmesser UV. Für dessen Radius MU = MV folgt aus (•) wegen (2)

$(1 + q).UM^2 = c^2 - (BM^2 + q.AM^2) =$
$= c^2 - (q^2.AM^2 + q.AM^2) = c^2 - q(1+q).AM^2$

Also

$$UM^2 = \frac{c^2}{1+q} - q.AM^2 \qquad (7)$$

Als Hilfslinie zeichnen wir den Kreis über dem Durchmesser AB. Dann gilt im rechtwinkeligen ΔABZ (siehe Figur)

$AZ^2 = AB.AM$ (Kathetensatz)
$BZ^2 = AB.BM$ (Kathetensatz)

Daraus wegen (2) und (3)

$AZ^2 = (1 + q).AM^2 \qquad (8)$
$BZ^2 = q(1 + q).AM^2 \qquad (9)$

Der Strahlensatz ergibt

$$\frac{AM}{AZ} = \frac{UM}{XZ} \Rightarrow \frac{AM^2}{AZ^2} = \frac{UM^2}{XZ^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XZ^2 = UM^2.\frac{AZ^2}{AM^2} \overset{(7),(8)}{=}$$

$$= \left(\frac{c^2}{1+q} - q.AM^2\right).\frac{(1+q).AM^2}{AM^2} =$$

$$= c^2 - q(1+q).AM^2 \overset{(9)}{\Rightarrow}$$

$$\underline{XZ^2 = c^2 - BZ^2}$$

Der Kreis mit dem Mittelpunkt Z *und dem Radius* ZX = ZY *wird vom Kreis mit dem Mittelpunkt* B *und dem bekannten Radius* c *nach Gegenpunkten geschnitten.*

$(1-q).UM^2 = (q.AM^2 - BM^2) - c^2 =$
$= (q.AM^2 - q^2 AM^2) - c^2 = q(1-q).AM^2 - c^2$

Also

$$UM^2 = q.AM^2 - \frac{c^2}{1-q} \qquad (7)$$

Als Hilfslinie zeichnen wir den Kreis über dem Durchmesser AM. Dann gilt im rechtwinkeligen ΔAMZ (siehe Figur)

$AZ^2 = AB.AM$ (Kathetensatz)
$BZ^2 = AB.BM$ (Höhensatz)

Daraus wegen (2) und (3)

$AZ^2 = (1 - q).AM^2 \qquad (8)$
$BZ^2 = q(1 - q).AM^2 \qquad (9)$

Der Strahlensatz ergibt

$$\frac{AM}{AZ} = \frac{UM}{XZ} \Rightarrow \frac{AM^2}{AZ^2} = \frac{UM^2}{XZ^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XZ^2 = UM^2.\frac{AZ^2}{AM^2} \overset{(7),(8)}{=}$$

$$= \left(q.AM^2 - \frac{c^2}{1-q}\right).\frac{(1-q).AM^2}{AM^2} =$$

$$= q(1-q).AM^2 - c^2 \overset{(9)}{\Rightarrow}$$

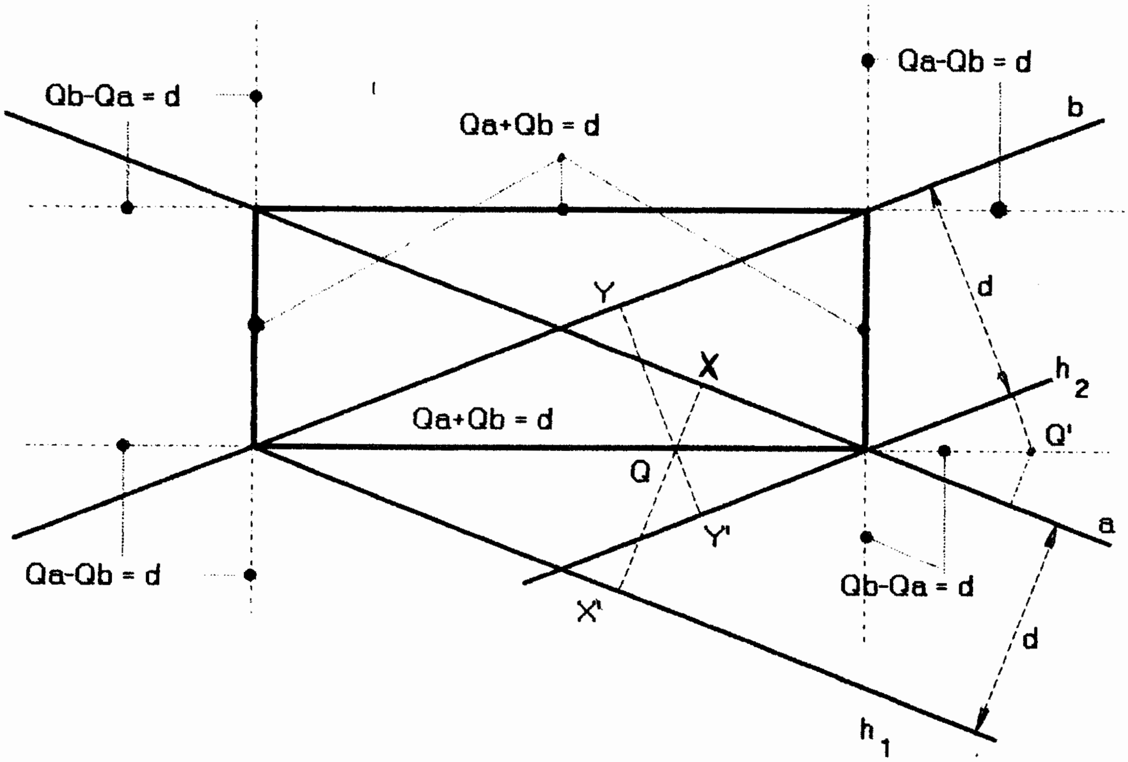
$$\underline{XZ^2 = BZ^2 - c^2}$$

Der Kreis mit dem Mittelpunkt Z *und dem Radius* ZX = ZY *wird vom Kreis mit dem Mittelpunkt* B *und dem bekannten Radius* c *orthogonal geschnitten.*

15. Der Ort aller Punkte Q, deren Abstandssumme bzw. Abstandsdifferenz von zwei schneidenden Geraden a, b konstant gleich d ist, ist ein *System von zwei zueinander orthogonalen Paaren paralleler Geraden.*

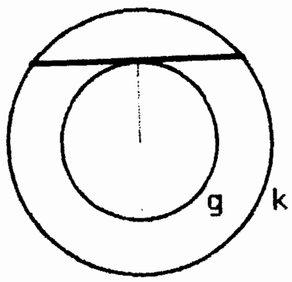
Es sei QX + QY = d = const. Ferner sei QX':= QY und QY':= QX. Dann ist XX' = d = YY' und die Punkte X' bzw. Y' beschreiben je eine Parallele h_1 bzw. h_2 zu den gegebenen Geraden a bzw. b im Abstand d. Der Ort der Punkte Q ist daher die Winkelhalbierende von $\angle bh_1$ bzw. $\angle ah_2$ (siehe Figur). Hat der Punkt die Lage Q', so gilt Q'b - Q'a = d.

Ähnliche Überlegungen gelten, wenn man Q im spitzen Winkel der Geraden a, b wählt oder die zweite Winkelhalbierende der genannten Winkel betrachtet. Die sich ergebenden Abstandsverhältnisse sind in der Figur angegeben.



Geradenmengen

1. Die Menge aller gleichlangen Sehnen eines Kreises k umhüllt einen zu k *konzentrischen Kreis* g



2. Die Menge aller Geraden, deren Abstandsverhältnis von zwei festen Punkten A, B einen konstanten Wert λ hat, bildet ein *Punktepaar* U, V, welches die Strecke AB innen und außen in dem gegebenen Verhältnis λ teilt.

Für die Punkte V bzw. U gelte

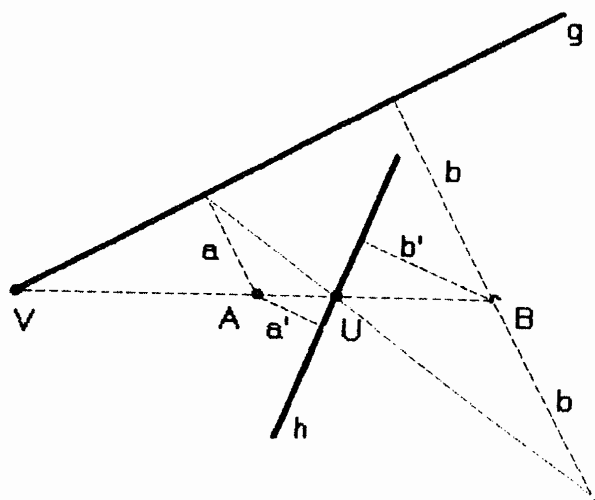
AU:BU = a:b = λ

AV:BV = a:b = λ

Dann gilt für jede Gerade g durch V bzw. jede Gerade h durch U

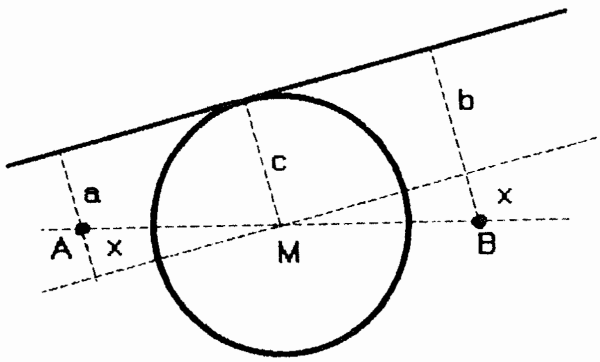
Ag:Bg = a:b = λ

Ah:Bh = a':b' = λ



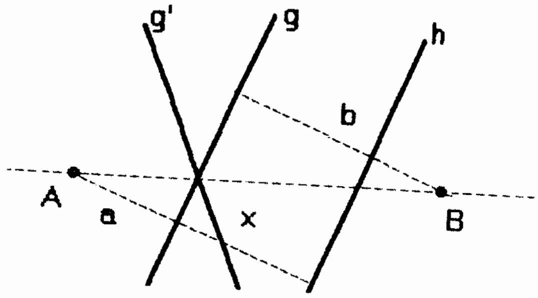
3. a. Alle Geraden, die von zwei festen Punkten A, B konstante Abstandssumme d haben, berühren einen *Kreis* vom Radius c = ½d, dessen Mittelpunkt M mit dem Mittelpunkt der Strecke A, B zusammenfällt, soferne die Geraden g die Strecke AB *nicht* treffen.

Es gilt nämlich für Ag + Bg = a + b = const.:
$x = c - a = b - c \Rightarrow 2c = a + b = d \Rightarrow c = ½d$.



b. Alle Geraden welche die Strecke AB treffen und konstante Abstandssumme haben, bilden zwei zur Geraden (AB) symmetrische *Parallelenbüschel*

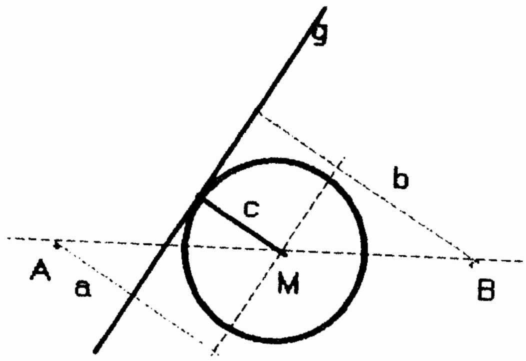
Es gelte für die Gerade g
Ag + Bg = a + b = d
Für die zu g parallele Gerade h gilt dann
Ah + Bh = (a + x) + (b - x) = d



Analoge Überlegungen gelten für das zu (AB) symmetrische Geradenbüschel g'.

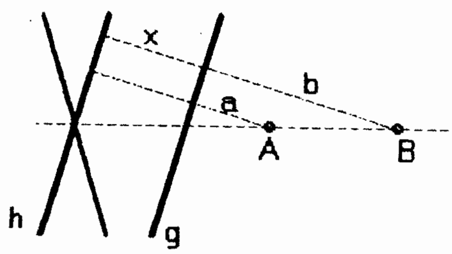
4. a. Alle Geraden, die von zwei festen Punkten A, B konstante Abstandsdifferenz d haben, berühren einen *Kreis* vom Radius c = ½d, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Strecke AB zusammenfällt, soferne die Geraden die Strecke AB *treffen*.

Bg - Ag = b - a = const.
$a + c = b - c \Rightarrow 2c = b - a = d \Rightarrow c = ½d$

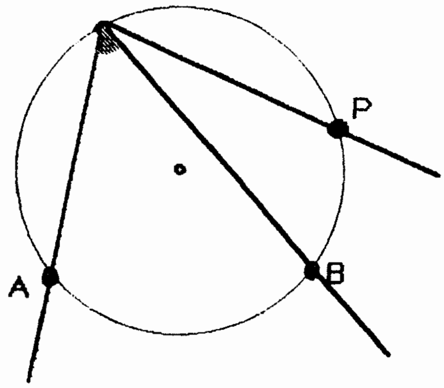


b. Alle Geraden, welche die Strecke AB *nicht* treffen und konstante Abstandsdifferen zu den Punkten A, B haben, bilden zwei zur Geraden(AB) symmetrische *Parallelenbüschel*

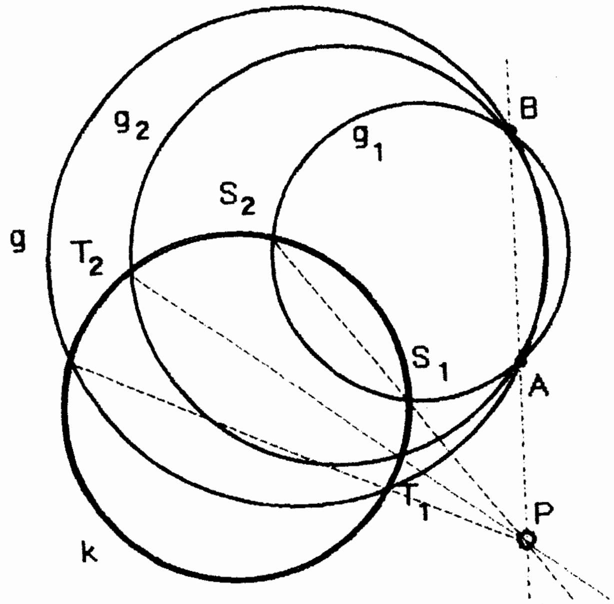
Bg - Ag = b - a = d
Bh - Ah = (b + x) -(a + x) = b - a = d



5. Bewegt man einen starren Winkel so, daß seine beiden Schenkel stets durch zwei feste Punkte A,B gehen, so geht eine mit dem Winkel starr verbundene Gerade durch den Winkelscheitel stets durch einen festen *Punkt* P (Peripheriewinkelsatz).



6.



Die gemeinsamen Sehnen eines festen Kreises k und der Kreise g_1, g_2, ... eines Kreisbüschels gehen durch ein- und denselben Punkt P.

<u>*Definition*</u>: Die Menge aller Kreise durch zwei feste Punkte A,B heißt *Kreisbüschel*.

P ist das *Potenzzentrum* der drei Kreise k, g_1, g_2. P hat bezüglich dieser drei Kreise dieselbe Potenz

$PS_1.PS_2 = PT_1.PT_2 = PA.PB = \text{const.}$

Ersetzt man g_2 durch einen beliebigen Kreis g des Büschels, so haben die Kreise k, g_1 und g wieder das durch $(AB)\cap(S_1S_2) = P$ bestimmte Potenzzentrum.

Transformation der Figur oder ihrer Teile

Gelingt es nicht, bei unmittelbarer Betrachtung der Figur einen Lösungsweg (etwa mittels geometrischer Örter) zu finden, so wird man trachten, die Figur so umzuformen, daß eine *Hilfsfigur* entsteht, deren Konstruktion einfacher ist, als die der ursprünglich gesuchten Figur. Es kommen vorzüglich folgende Umformungen in Frage:

Kongruenztransformationen

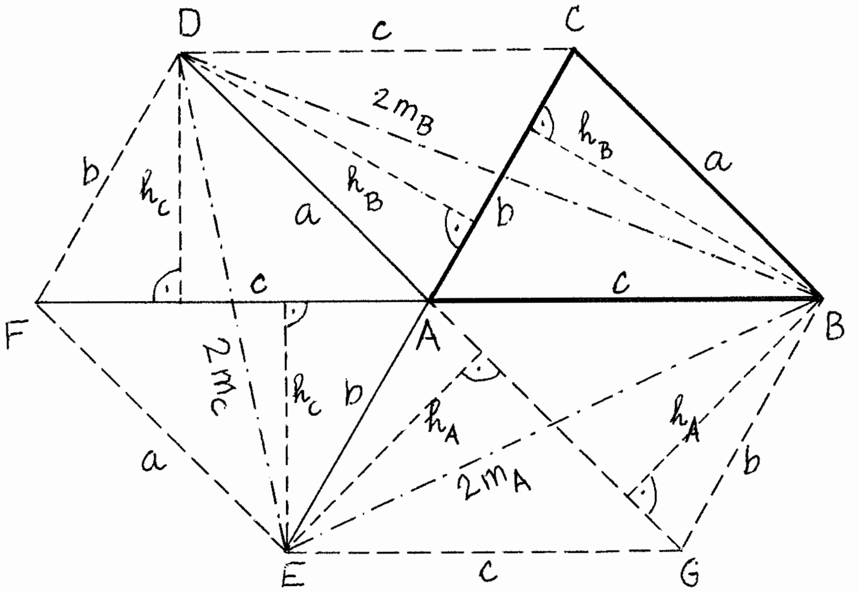
Parallelverschiebung

Man verwendet sie, um getrennte Angabestücke in Beziehung zu bringen, indem man einige Elemente der Figur durch Parallelverschiebung in neue Lagen bringt.Die Anwendung der Parallelverschiebung empfiehlt sich besonders bei jenen Aufgaben, bei denen Vektoren eine Rolle spielen.

Dreieck

Die Parallelverschiebung aller Dreiecksseiten durch denselben Punkt (etwa A) und eine oder mehrere der folgenden Parallelverschiebungen können zu brauchbaren Hilfsfiguren führen:

AD‖BC (‖AG‖EF), AE‖AC (‖BG‖DF)



Sobald eines der Dreiecke ΔADE, ΔDAB, ,... bekannt ist, läßt sich das gesuchte Dreieck ΔABC konstruieren.

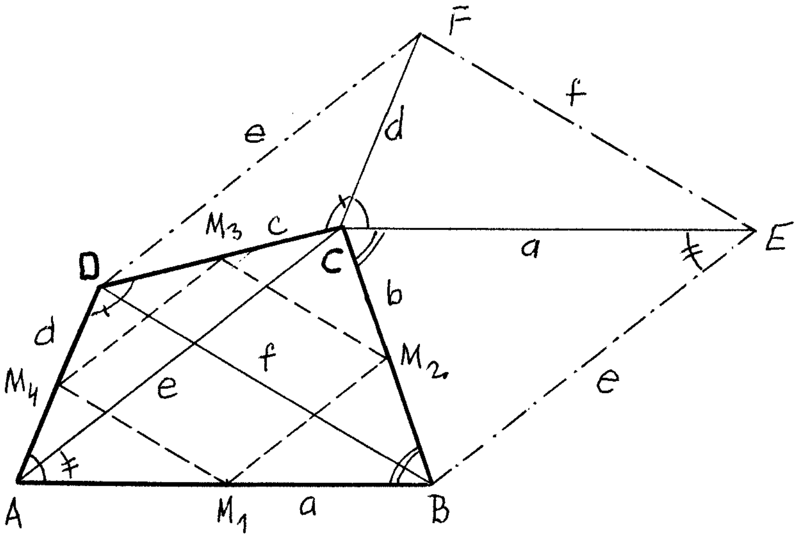
Der Punkt A ist Schwerpunkt des Dreiecks ΔBDE.

Viereck

Parallelverschiebung aller Vierecksseiten durch denselben Punkt (etwa C) ergibt das Parallelogramm #BEFD, welches auch durch geeignete Parallelverschiebung der Diagonalen entsteht. Ferner beachte man auch das von den Seitenmitten gebildete Parallelogramm #$M_1M_2M_3M_4$

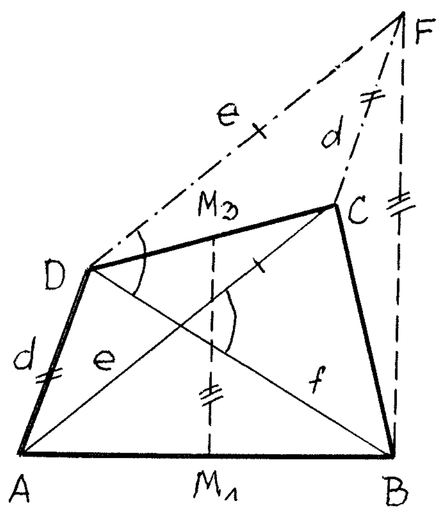
Im #BEFD gilt

- Die von C ausgehenden Strecken sind die Seiten des Vierecks
- Die Winkel um C sind die Winkel des Vierecks



- Die Seiten des Parallelogramms sind die Diagonalen, seine Winkel die Winkel zwischen den Diagonalen des gegebenen Vierecks
- Die Winkel zwischen den von C ausgehenden Strecken und den Parallelogrammseiten sind die Winkel zwischen den Diagonalen und den Seiten des Vierecks
- Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist der doppelte Flächeninhalt des Vierecks
- Die Seiten des von den Seitenmitten $M_1M_2M_3M_4$ gebildeten Parallelogramms sind gleich den halben Vierecksdiagonalen. Das Mittenparallelogramm ist halb so groß wie #BEFD. Beide Parallelogramme sind bezüglich A zentrisch ähnlich. Die Diagonalen FB bzw. DE von #BEFD sind daher doppelt so lang wie die Mittellinien M_1M_3 bzw. M_2M_4 von Viereck □ABCD.

Es empfiehlt sich, gelegentlich folgende Detailfigur zu betrachten:



- In einem Viereck kann man auch die Diagonalen als Seiten und zwei gegenüberliegende Seiten als Diagonalen betrachten („überschlagenes Viereck")

Spiegelung an einer Geraden s

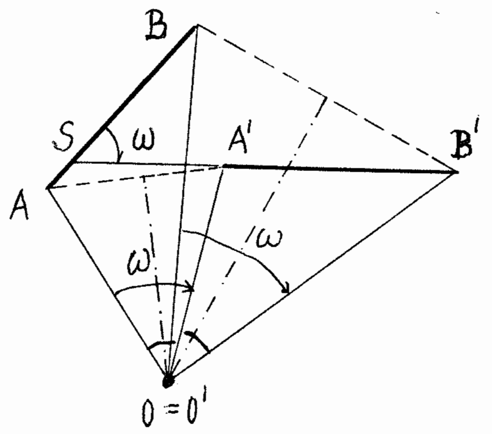
Dies ungleichsinnige Kongruenztransformation wird man anwenden, wenn die Figur an sich axialsymmetrisch ist, oder wenn gewisse Symmetrielinien auftreten (Strecken- oder Winkelsymmetralen usw.)

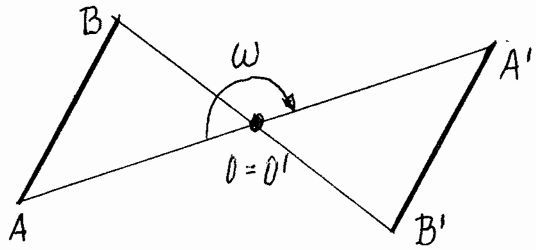
Drehung um einen Punkt O

Diese gleichsinnig kongruente Transformation wird bevorzugt verwendet, wenn bei einem Objekt gleichgroße Winkel oder gleichlange Strecken auftreten, welche durch eine Drehung zur Deckung gebracht werden können.

Bestimmung des Drehzentrums:

Eine Drehung ist durch Angabe zweier kongruenter Strecken AB und A'B' bestimmt. Da entsprechende Punkte von Drehzentrum gleiche Abstände haben, muß O im Schnittpunkt der Streckensymmetralen von AA' bzw. BB' liegen.





1. Allgemeiner Fall: Die Streckensymmetralen schneiden einander

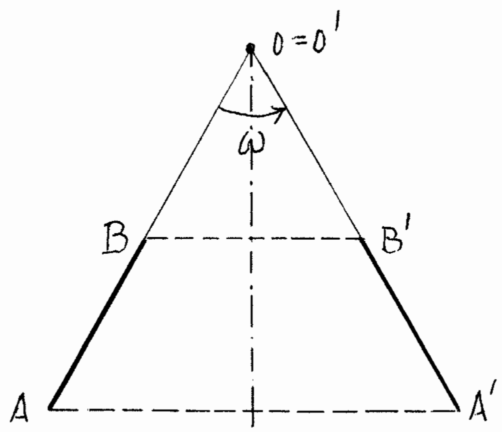
$\Delta AOB = \Delta A'OB'$

$\angle AOB = \angle A'OB'$

$\angle BSB' = \omega$

Sonderfall: Der Drehungswinkel $\omega = 2R$. Die Drehung ist mit einer *Punktspiegelung* identisch. Während im Falle $\omega \neq 2R$ *keine Fixgeraden* auftreten, ist hier *jede Gerade durch* O *Fixgerade*.

2.Fall: Die Streckensymmetralen fallen zusammen. Trotzdem ist das Drehzentrum eindeutig bestimmt



Ähnlichkeitstransformationen

Zentrische Ähnlichkeit

Da zwei Kreise stets auf doppelte Weise zentrisch ähnlich sind, wird die zentrische Ähnlichkeit vorzugsweise bei Kreisaufgaben angewendet

Drehstreckung

Eine Ähnlichkeitstransformation mit genau einem Fixpunkt, aber keiner Fixgeraden heißt *Drehstreckung*. Sie stellt eine Kombination von Drehung und zentrischer Ähnlichkeit dar.

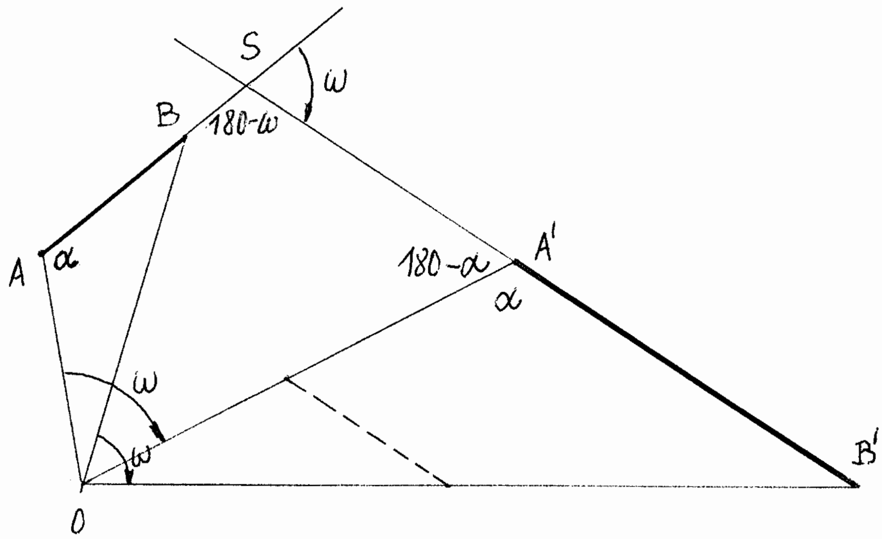
$\Delta ABO \sim \Delta A'B'O \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOB = \angle A'OB'$

$\angle ASA' = 180 - \omega$

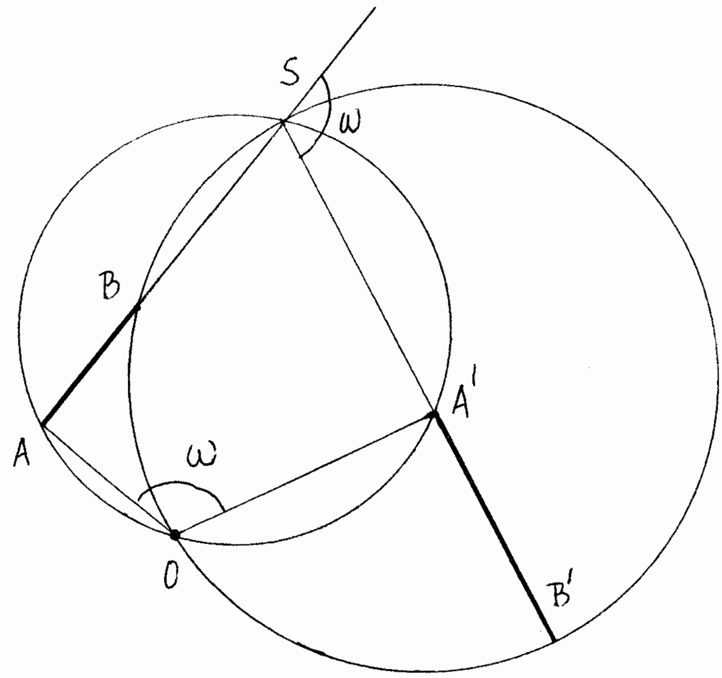
Das Viereck AOA'S ist daher Sehnenviereck im Umkreis des Dreiecks $\Delta AA'S$.

Analog ist BOB'S Sehnenviereck im Umkreis von $\Delta BB'S$



<u>*Konstruktion des Zentrums der Drehstreckung*</u>

O liegt auf den Peripheriewinkelkreisen über A,A' und B,B' zum Peripheriewinkel ω. Beide Peripheriewinkelkreise müssen daher auch durch S gehen. O ergibt sich daher als zweiter Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke $\Delta ASA'$ und $\Delta BSB'$.



Prinzip der ähnlichen Hilfsfigur

Wird angewendet, wenn von einer Figur wohl die Gestalt, aber nicht ihre Größe bekannt ist.

Inversion und Antiinversion

Die *Inversion* | Die *Antiinversion*

ist eine Abbildung der Ebene in sich, bei der die Verbindungsgerade entsprechender Punkte A,A' stets durch einen festen Punkt O, das *Inversionszentrum,* geht.Dabei gilt stets

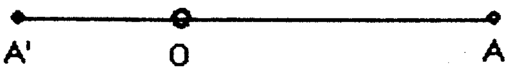
$$OA.OA' = r^2 = \text{const.}$$

Bei der Inversion liegen die Paare A, A' entsprechender Punkte stets auf derselben Seite des Inversionszentrums.

$T(AA'O) > 0$

Bei der Antiinversionwerden die Paare entsprechender Punkte A, A'durch das Inversionszentrum getrennt.

$T(AA'O) < 0$

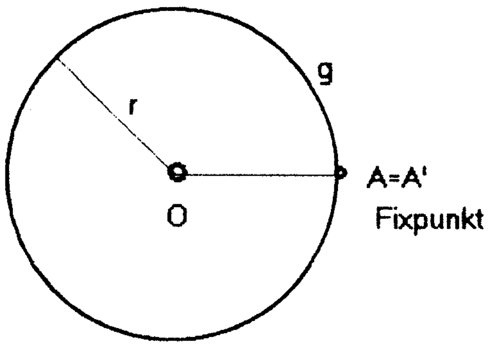


Das Inversionszentrum hat als *Ausnahmepunkt* keinen entsprechenden Bildpunkt.

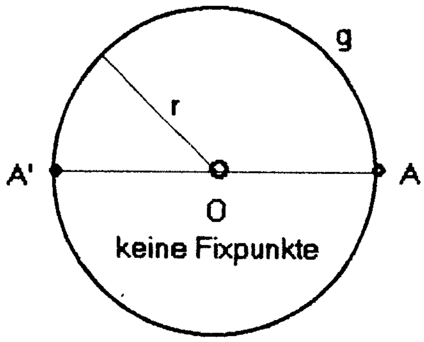
Da die zweimalige Anwendung der Inversion bzw. Der Antiinversion die identische Abbildung ergibt, sind diese beiden Abbildungen *involutorisch*.

Der Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r heißt *Grunkreis* oder *Inversionskreis*.

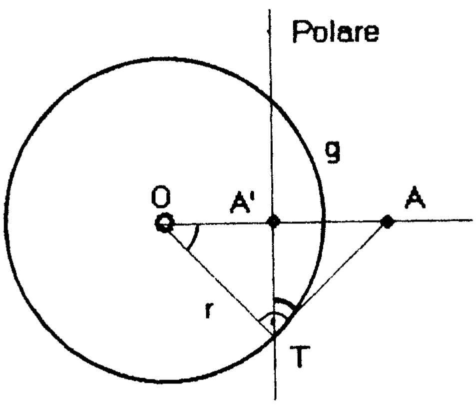
Bei der Inversion stellt der Grundkreis die *Menge aller Fixpunkte* dar.



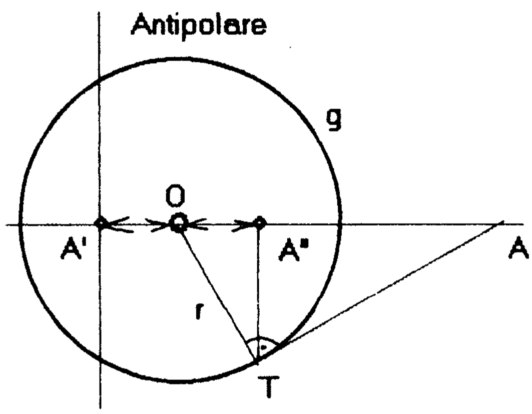
Bei der Antiinversion treten *keine Fixpunkte* auf



Konstruktion entsprechender Punkte



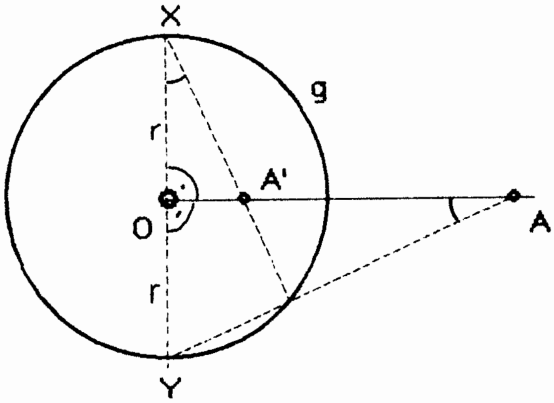
$r^2 = OA.OA'$
(Kathetensatz im ΔOAT)



$r^2 = AO.OA^*$ (Inversion)
$OA' = OA$ (Spiegelung an O)

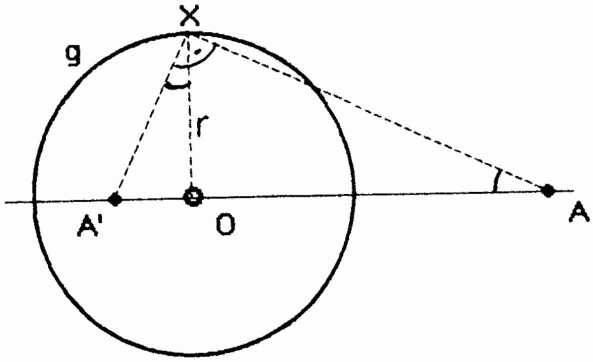
Die Antiinversion setzt sich daher aus einer Inversion und der Spiegelung am Inversionszentrum zusammen

Die folgenden Konstruktionen erweisen sich als besonders zweckmäßig



$$\Delta OAY \sim \Delta OA'X \Rightarrow \frac{OA}{r} = \frac{r}{OA'}$$

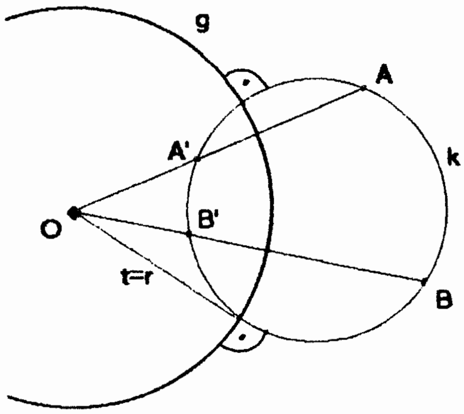
$$OA.OA' = r^2$$

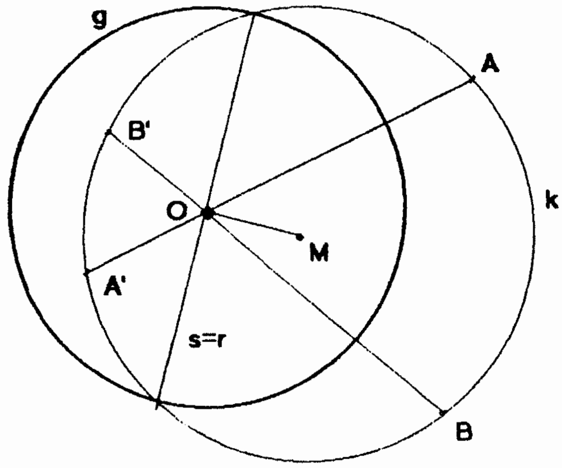


$$\Delta OAX \sim \Delta OXA' \Rightarrow \frac{OA}{r} = \frac{r}{OA}$$

$$OA.OA' = r^2$$

Sind A, A'; B, B' zwei inverse (antiinverse) Punktepaare, so sind A, A'; B, B' konzyklisch.





Sind A, A' invers (antiinvers), so gilt OA.OA' = r^2. Sei B ein weiterer Punkt und k der Umkreis von ΔAA'B. Dann gilt nach dem Potenzsatz OB.OB' = OA.OA' = r^2, d.h. B' ist zu B invers (antiinvers).

Daher gilt für die Tangentenstrecke t

$$t^2 = r^2$$

Sind A, A'; B, B' zwei inverse Punktepaare, so schneidet ihr Umkreis den Grundkreis orthogonal.

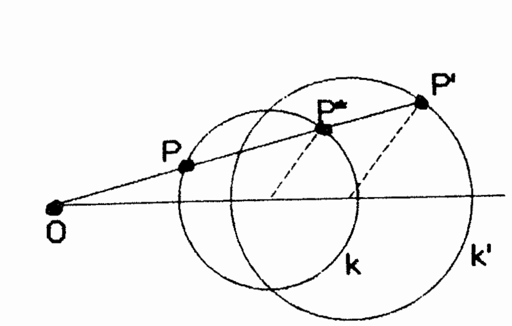
Daher gilt für die auf OM normale Sehne s

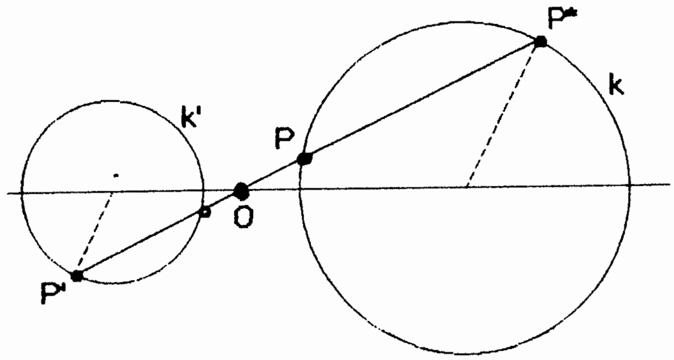
$$s^2 = r^2$$

Sind A, A'; B, B' zwei antiinverse Punktepaare, so schneidet ihr Umkreis den Grundkreis nach Gegenpunkten.

Ferner gilt

Jeder nicht durch O gehende Kreis geht durch eine Inversion (Antiinversion) wieder in einen Kreis über





Der Punkt P des nicht durch O gehenden Kreises k gehe durch die Inversion (Antiinversion) in die Lage P' über, d.h. es gilt

$$OP.OP' = r^2$$

Für die Potenz von O bezüglich k gilt

$$OP.OP^* = t^2$$

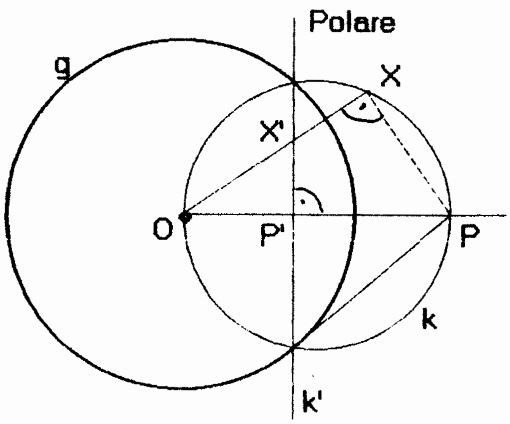
daher

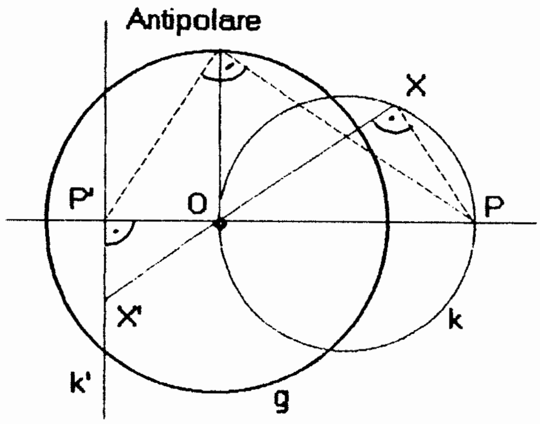
$$\frac{OP.OP'}{OP.OP^*} = \frac{r^2}{t^2} = \text{const.} \Rightarrow OP' = \frac{r^2}{t^2}.OP^*$$

d.h. die Punkte P' gehen aus den Punkten P* des Kreises durch eine *zentrische Ähnlichkeit* hervor. Das inverse (antinverse) Bild des Kreises k ist daher wieder ein Kreis.

Wenn der Kreis k das Inversionszentrum umschließt, verläuft der Beweis völlig analog. O ist stets inneres oder äußeres Ähnlichkeitszentrum der beiden Kreise

Jeder Kreis durch O geht durch eine Inversion(Antiinversion) in eine Gerade über.
Umgekehrt entspricht jeder Geraden nicht durch O ein Kreis durch das Inversionszentrum.





Es sei OP die gemeinsame Symmetrieachse des Grundkreises g und des durch O gehenden Kreises k. Dann entspricht dem Punkt P der Punkt P' auf der Polaren (Antipolaren) von P bezüglich g. Sei nun X ein Punkt auf k und X' sein inverser (antiinverser) Punkt. Dann müssen P, P'; X, X' konzyklisch sein. X' muß daher auf dem Umkreis von ΔP'PX liegen. Wegen der Rechten Winkel bei X und P' mu PX' ein Durchmesser dieses Umkreises sein. X' beschreibt also die Polare (Antipolare) von P.

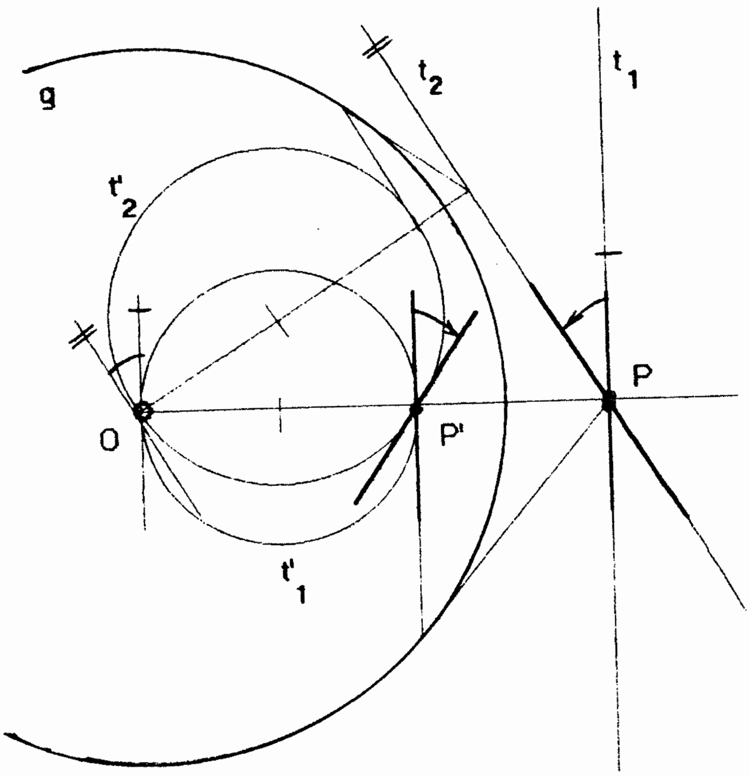
Umgekehrt muß bei gegebener Geraden k' wegen der konzyklischen Lage von P, P'; X, X' auf dem Umkreis von ΔX'P'P der Winkel $\angle$X'XP ein Rechter sein. X liegt daher auf dem THALESkreis über OP.

Die Inversion (Antiinversion) ist ungleichsinnig winkeltreu.

Das bedeutet, daß der Schnittwinkel zweier Kurven nach Ausübung einer Inversion (Antiinversion) erhalten bleibt.

Durch die Inversion (Antiinversion) werden die Tangenten t_1 und t_2 im Schnittpunkt der beiden Kurven c_1 und c_2 in zwei Kreise t_1', t_2' durch O übergeführt, die ihrerseits die Bildkurven c_1', c_2' berühren. Die Tangenten der Bildkreise stellen dann die Tangenten an die Bildkurve dar

Wie haben zu zeigen, daß der Bildwinkel der Kurventangenten gleich dem Schnittwinkel ihrer Bildkreise, nur mit entgegengesetztem Drehsinn, gleich ist.



Die Tangenten t_1 und t_2 gehen über in die beiden Kreise t_1', t_2' durch O. Die Kreistangenten in O sind parallel zu den Kurventangenten, schließen daher gleichsinnig denselben Winkel ein. Da die Schnittwinkel zweier Kreise in ihren beiden Schnittpunkten entgegengesetzt gleich sind, folgt die Behauptung.

Der Beweis für die Antiinversion ist völlig analog.

Regelmäßige Vielecke

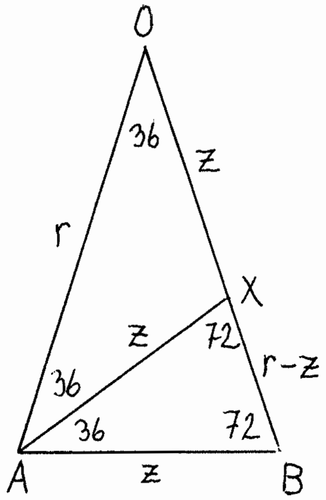
Das regelmäßige Zehneck

Wir betrachten ein gleichschenkeliges Teildreieck ΔOAB des dem Kreis mit dem Radius r eingeschriebenen Zehnecks mit der Seitenlänge AB = z. Der Scheitelwinkel beträgt 36° und die beiden Basiswinkel je 72°. Halbiert man den Basiswinkel bei A, so ergibt sich wegen $\angle AXB$ = 72° wieder ein gleichschenkeliges Dreieck ΔABX mit AB = AX und wegen der Winkelgleichheiten $\angle OAX = \angle AOX = 36°$ ist auch ΔXAO gleichschenkelig und es gilt AB = AX = OX. Aus den ähnlichen gleichschenkeligen Dreiecken $\Delta OAB \sim \Delta ABX$ folgt

$$OB:AB = AX:XB \Rightarrow OB:OX = OX:XB$$

Der Kreisradius OB = r wird also durch den Punkt X nach dem „goldenen Schnitt" geteilt[9], dh. Kreisradius r und Zehnecksseite z stehen im Verhältnis des goldenen Schnittes.Es gilt

$$\frac{r}{z} = \frac{z}{r-z} \Rightarrow r(r-z) = z^2 \Rightarrow z^2 + rz - r^2 = 0 \qquad (1)$$



Daraus

$$z = \frac{-r + \sqrt{r^2 + 4r^2}}{2} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

Für das Verhältnis von Kreisradius und Zehnecksseite ergibt sich daraus:

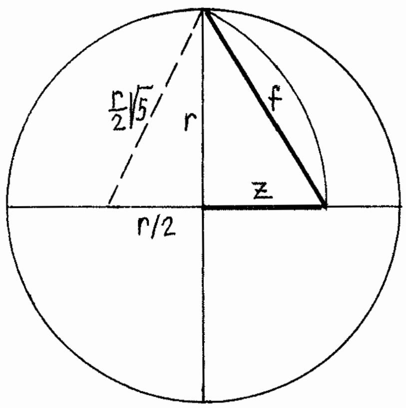
$$\frac{r}{z} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4} = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$$

Das Verhältnis

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$$

heißt auch „goldene Zahl"[10]. Sie genügt der Gleichung $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ bzw. $\Phi(\Phi - 1) = 1$.

Die Konstruktion von z ergibt sich auf Grund der Rechnung:



[9] Eine Strecke wird im „goldenen Schnitt" geteilt, wenn sich die ganze Strecke zum größeren Abschnitt verhält wie der größere Abschnitt zum kleiner Abschnitt. Aus obiger Proportion entnimmt man, daß der größere Abschnitt das geometrische Mittel aus dem kleineren Abschnitt und der ganzen Strecke ist (Siehe Seite 18)

[10] Die Bezeichnung Φ soll auf den Namen des berühmten griechischen Bildhauers PHEIDIAS (ca. 490 ?-430 ? v.Chr) zurückgehen. Siehe. Marius CLEYET-MICHAND: Le nombre d'or. Sammlung „Que sais-je?" Presses Universitaires de France, 1974[4].

Das regelmäßige Fünfeck

Das regelmäßige Fünfeck ergibt sich aus dem regelmäßigen Zehneck durch Überspringen jeder zweiten Ecke. Aus der Figur entnimmt man

$$z^2 = x^2 + \frac{f^2}{4} \Rightarrow \underline{4z^2 = 4x^2 + f^2} \qquad (2)$$

$$z^2 = 2rx \overset{(1)}{\Rightarrow} r^2 - rz = 2xr \Rightarrow 2x = r - z \qquad (3)$$

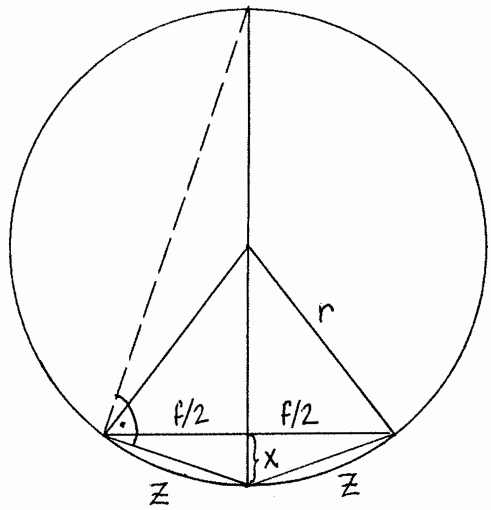
Einsetzen von (3) in (2) ergibt

$$4z^2 = (r-z)^2 + f^2 = r^2 + z^2 - 2rz + f^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z^2 = r^2 - 2rz + f^2 + (r^2 - r^2) = 2r^2 - 2rz + f^2 - r^2 =$$

$$= 2r(r-z) + f^2 - r^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} 3z^2 = 2z^2 + f^2 - r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{z^2 + r^2 = f^2}$$



Die Konstruktion der Fünfeckseite ergibt sich daher aus obiger Figur.

Das regelmäßige Fünfzehneck

Sind p_1 und p_2 zwei *verschiedene* Primzahlen und kann man das das regelmäßige p_1-Eck und p_2-Eck konstruieren[11], so läßt sich auch das regelmäßige $p_1.p_2$-Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren. Die Gleichung

$$xp_1 + yp_2 = 1$$

läßt sich nämlich stets in *ganzen Zahlen* x bzw. y auflösen[12]. Multipliziert man obige Beziehung mit $\frac{360}{p_1 p_2}$, so ergibt sich

$$x.\frac{360}{p_2} + y.\frac{360}{p_1} = \frac{360}{p_1 p_2}$$

Nun stellen

$$\alpha_{p_1} = \frac{360}{p_1}, \quad \alpha_{p_2} = \frac{360}{p_2}, \quad \alpha = \frac{360}{p_1 p_2}$$

die Zentriwinkel des p_1-, p_2-, p_1p_2-Ecks dar und es ergibt sich die Beziehung

$$x.\alpha_{p_2} + y.\alpha_{p_1} = \alpha$$

zur Konstruktion des Zentriwinkels des p_1p_2-Ecks.

Da die Konstruktion des regelmäßigten Drei- und Fünfecks bekannt ist, und die Beziehung

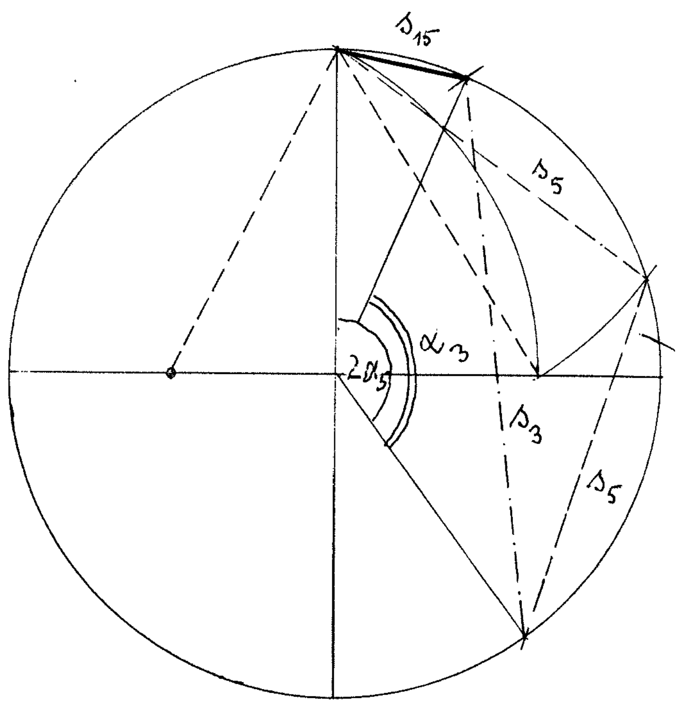
$$3x+5y = 1$$

x = 2 und y = -1 als ganzzahlige Lösungen besitzt, folgt für die Konstruktion des Zentriwinkels des regelmäßigen 15-Ecks die Beziehung

[11] Die derzeit bekannten Primzahlen, welche als Eckenzahlen von mit Zirkel und Lineal konstriuerbarer Vielecke auftreten, werden in der Vorlesung „Theorie der geometrischen Konstruktionen" hergeleitet.

[12] Beweis in der Vorlesung „Theorie der geometrischen Konstruktionen"

$2\alpha_5 - \alpha_3 = \alpha_{15}$



Wir sind also derzeit in der Lage, Vielecke mit folgenden Eckenzahlen mit Zirkel und Lineal zu konstruieren

$$2^n,\ 3.2^n,\ 5.2^n,\ 15.\,2^n \quad (n = 0,1,2,3\ldots)$$

Die Konstruierbarkeit dieser Vielecke war bereits den Pythagoreern bekannt und findet sich in den „Elementen“ des EUKLID[13]

Daß es noch andere konstruierbare Vielecke mit einer Primzahl als Eckenzahl (z.B das Siebzehneck) gibt, erkannte erst der achtzehnjährige GAUSS[14] am 30 März 1796[15].

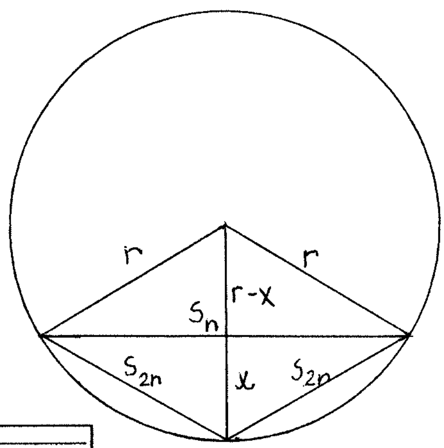
Zusammenhang zwischen den Seiten des n-Ecks und des 2n-Ecks

$$r^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + (r-x)^2 = \frac{s_n^2}{4} + r^2 - 2rx + x^2 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow 2rx &= x^2 + \frac{s_n^2}{4} \\ s_{2n}^2 &= x^2 + \frac{s_n^2}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2rx = s_{2n}^2 \Rightarrow x = \frac{s_{2n}^2}{2r}$$

$$s_{2n}^2 = \frac{s_n^2}{4} + \frac{s_{2n}^4}{4r^2} \Rightarrow s_n^2 = \frac{s_{2n}^2(4r^2 - s_{2n}^2)}{4r^2}$$

Daher



$$\boxed{s_n = \frac{s_{2n}}{r}\sqrt{4r^2 - s_{2n}^2}}$$

[13] EUKLEIDES von Alexandrien ca.300 v.Chr.

[14] Carl Friedrich GAUSS 1777-1855

[15] Genaueres in der Vorlesung „Theorie der geometrischen Konstruktionen“

Zirkelgeometrie

Alle geometrischen Konstuktionen, die mit Zirkel und Lineal ausführbar sind, lassen sich auch unter alleiniger Verwendung des Zirkels bewältigen.

Diese Tatsache wurde zuerst von Georg MOHR[16] in seinem Werk „Euclides Danicus“ 1672 festgestellt, in welchem er nachwies, daß alle von EUKLID in den "Elementen" angegebenen Konstruktionen mit dem Zirkel allein ausführbar sind.

Völlig unabhängig von MOHR befaßte sich der italienische Mathematiker MASCHERONI[17] mit dieser Fragestellung, die er erschöpfend in seinem 1797 erschienenen Werk "La geometria del compasso" behandelte. Man spricht daher statt von „Zirkelgeometrie“ häufig von den „Konstruktionen von MASCHERONI“.

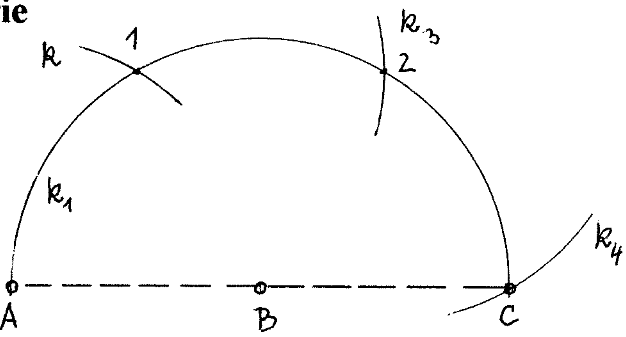
Bei Verwendung bloß des Zirkels können die Geraden nur durch zwei ihrer Punkte festgelegt werden. Der Nachweis, daß alle klassischen Konstruktionen unter ausschließlicher Verwendung des Zirkel zu bewältigen sind, erfordert also den Nachweis der Ausführbarkeit folgender Konstruktionen mit dem Zirkel allein:

A. Schnitt eines Kreises mit einer durch zwei ihrer Punkte gegebenen Geraden

B. Schnitt zweier durch je zwei ihrer Punkte gegebenen Geraden

Grundkonstruktionen der Zirkelgeometrie

1. Verdopplung einer Strecke



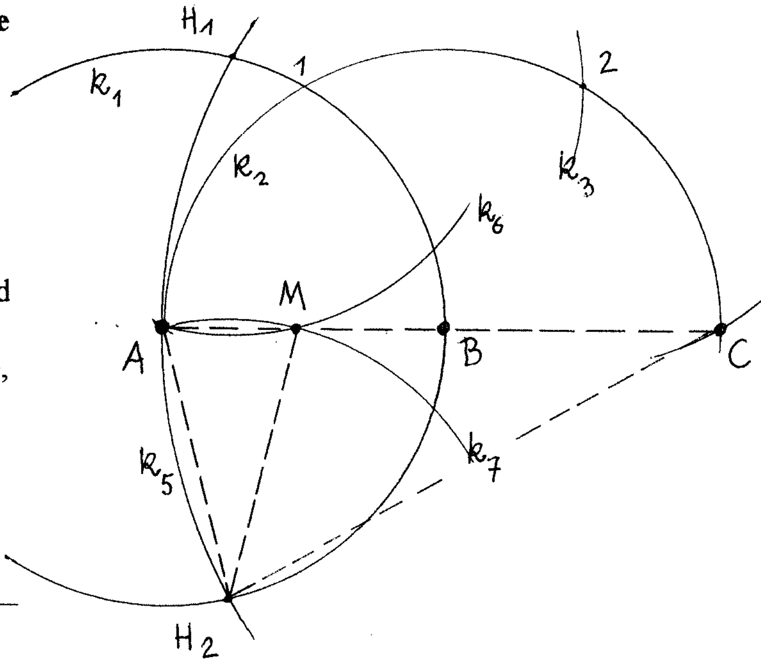
4 Kreise

$k_1(B, a = AB)$, $k_2(A, a)$, $k_3(1, a)$, $k_4(2, a)$

$AC = 2a$

2. Halbierung einer Strecke

(7 Kreise)



$k_1(A, AB = a)$, $k_2(B, a)$, $k_3(1, a)$, $k_4(2, a)$, $k_5(C, CA)$, $k_6(H_1, H_1A)$, $k_7(H_2, H_2A)$

Die ΔACH_2 und ΔAH_2M sind ähnlich (beide gleichsch. gemeinsamer Basiswinkel A),

daher $AC : a = a : AM \Rightarrow$

$$AM = \frac{a^2}{AC} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$$

---

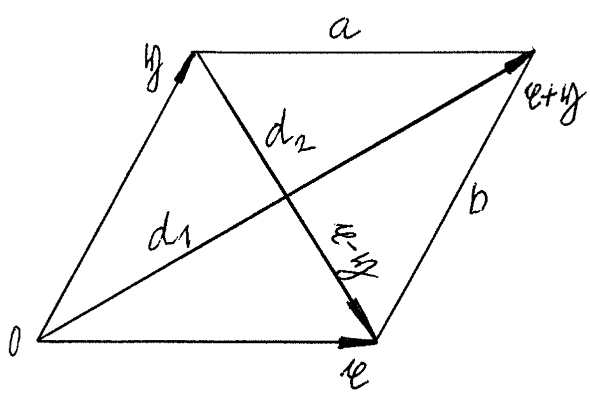
[16] Georg MOHR 1640-?.

[17] Lorenzo MASCHERONI wurde geboren 1750 in Castagneta bei Bergamo, Priesterweihe 1774 in Bergamo, unterrichtete am dortigen Seminar Rhetorik, Logik, Metaphysik und Physik. Er erlangte einen Lehrstuhl an der Universität Pavia. Er starb 1800an Tuberkulose.

3. Halbierung eines Kreisbogens

(7 Kreise, ev.6 Kreise)

<u>Vorbemerkung über das Parallelogramm</u>



$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=|\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2+2\mathbf{xy}+|\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2-2\mathbf{xy}$$

$$=2\left(|\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2\right)\ \Rightarrow \underline{d_1^2+d_2^2=2\left(a^2+b^2\right)}$$

Wir konstruieren zunächst die Parallelogramme #ABOC und #AOBD:

$k_1(O,AB)$, $k_2(A,AO)$, $k_3(B,BO)$

$k_4(C,CB)$, $k_5(D,DA)$, $k_6(C,OH)$

$[k_7(D,OH)]$

z.z.: <u>M ist Mittelpunkt von Bogen (AB)</u>

Anwendung des Hilfssatzes auf #ABOC:

$OA^2 + BC^2 = 2[OC^2 + OB^2]$.

Wegen OB = OA folgt

$OA^2 + BC^2 = 2[OC^2 + OA^2] \Rightarrow$

$BC^2 = 2OC^2 + OA^2$. Im ΔOCH gilt:

$CH^2 = OC^2 + OH^2 = BC^2$.

Daher gilt $OC^2 + OH^2 = BC^2 =$

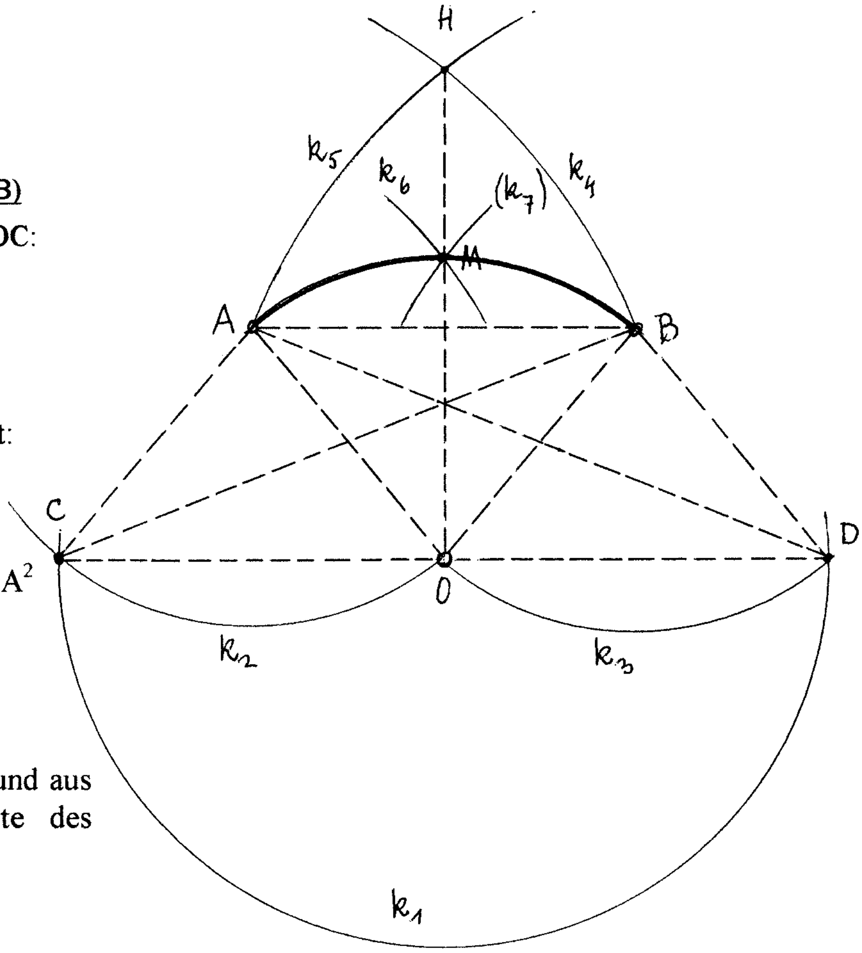
$= 2OC^2 + OA^2 \Rightarrow OH^2 = OC^2 + OA^2$

Ferner gilt im Dreieck ΔCOM

$CM^2 = OC^2 + OM^2 = OH^2 =$

$= OC^2 + OA^2 \Rightarrow \underline{OM^2 = OA^2}$

d.h. M liegt auf dem Kreisbogen und aus Syxmmetriegründen in der Mitte des Bogens AB



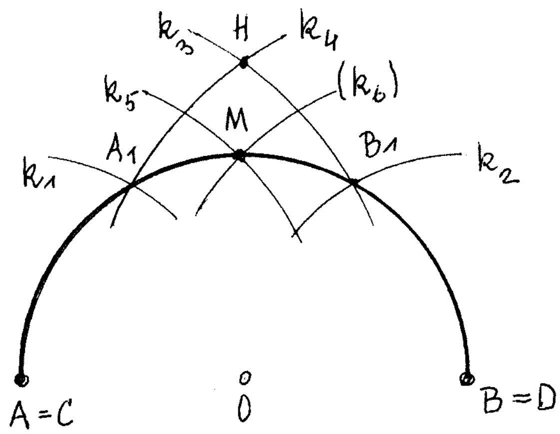
4. Halbierung eines Halbkreises

(5 Kreise, ev.6 Kreise)

Konstruktion des rgm. Sechseckes über dem Durchmesser AB. Die Halbierung des Bogens A_1, B_1 liefert den gesuchten Mittelpunkt M.

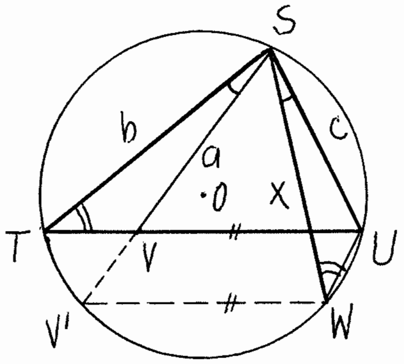
$k_1(A,OA)$, $k_2(B,OA)$, $k_3(A,AB_1)$,

$k_4(B,BA_1)$, $k_5(A,OH)$, $[k_6(,OH)]$



5. Vierte Proportionale zu drei gegebenen Strecken a:b = c:x

(11 Kreise)

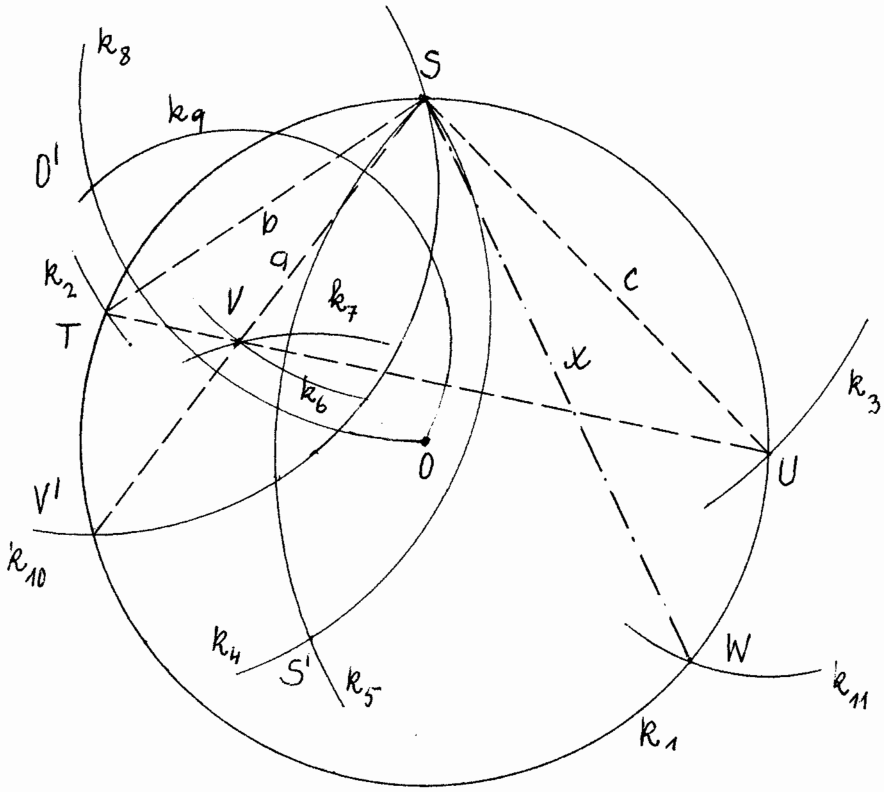


Hilfssatz über Dreieckstransversalen

Im Dreieck ΔSTU (ST = b, SU = c) sei SV = a eine Transversale. Ferner zeichen wir die Sehne SW = x des Umkreises durch Abtragung des Winkels ∠WSU = ∠TSV = ∠TSV'. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔSTV ~ ΔSWU (Peripheriewinkelsatz) folgt

a:b = c:x

Der Satz gilt auch, wenn V nicht zwischen U und T liegt.



Sind die Strecken a, b, c gegeben (jeweils durch Anfangs- und Endpunkt), so zeichnen wir zunächst den Hilfskreis[18]

$$k_1(O,r),\ \ 2r > \max\{b,c\}.$$

In diesem Kreis als Umkreis rekonstruieren wir obige Hilfsfigur ΔSTU. Nach beliebiger Wahl von S ergeben sich die Punkte T, U durch die Kreise

$$k_2(S,b),\ k_3(S,c)$$

Auf die Verbindungsgerade (TU) haben wir von S aus die Strecke a abzuschlagen. Dazu spiegeln wir S an (TU) nach S':

$$k_4(T,b),\ k_5(U,c)$$

[18] Diese Konstruktion, sowie die folgende der Aufgabe 6, sind bei entsprechender Wahl des Hilfsradius r stets ausführbar. Es gibt allerdings viel einfachere Konstruktionen, die jedoch bei beliebiger Wahl von a, b, c nicht immer funktionieren. Siehe die angegebene Literatur über Zirkelgeometrie.

Den Punkt V erhalten wir im Schnittpunkt der Kreise

$k_6(S,a)$, $k_7(S',a)$

k_6 und k_7 schneiden einander stets, wenn der Radius r von k_1 genügend groß gewählt wird. Zur Konstruktion von V' spiegeln wir zunächst O an (VS) nach O':

$k_8(S,r)$, $k_9(V,VO)$

Spiegelung von S an (OO') ergibt V':

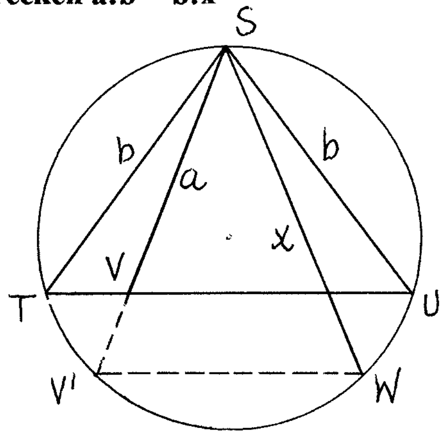
$k_{10}(O',O'S)$

Zuletzt findet man den gesuchten Punkt W durch

$k_{11}(U,TV')$ somit $\underline{x = SW}$

6. Dritte Proportionale zu zwei gegebenen Strecken a:b = b:x

9 Kreise



Da die Hilfsfigur symmetrisch ist, genügt die Bestimmung des Punktes V', da bereits SV = x gilt

Wir wählen wieder den Hilfskreis

$k_1(O,r)$, $2r > b$

Wahl von S auf k_1 beliebig

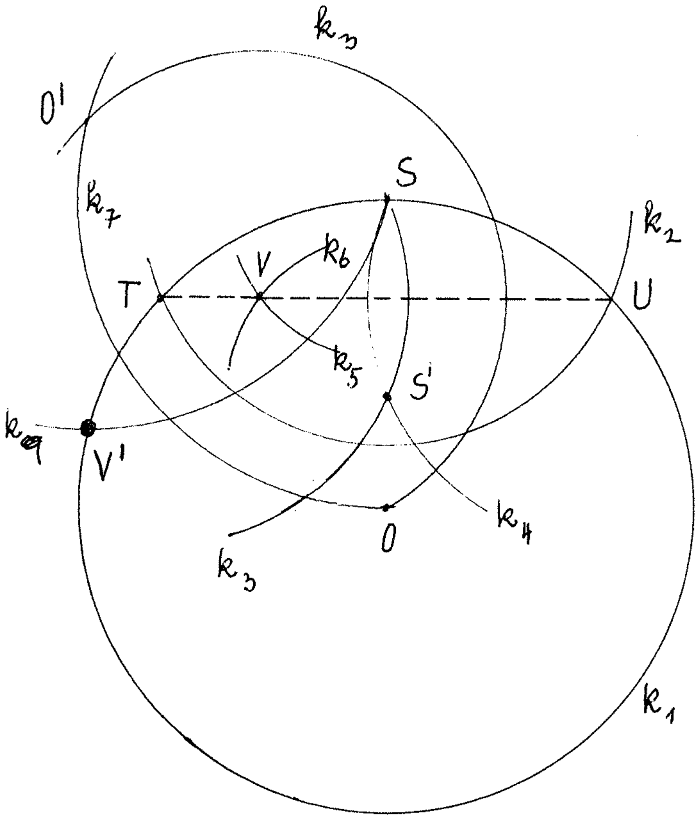
$k_2(S,b)$, $k_3(T,b)$,

$k_4(U,b)$, $k_5(S,a)$,

$k_6(S',a)$, $k_7(S,SO)$, $k_8(V,VO)$,

$k_9(O',O'S) \Rightarrow \underline{SV' = x}$

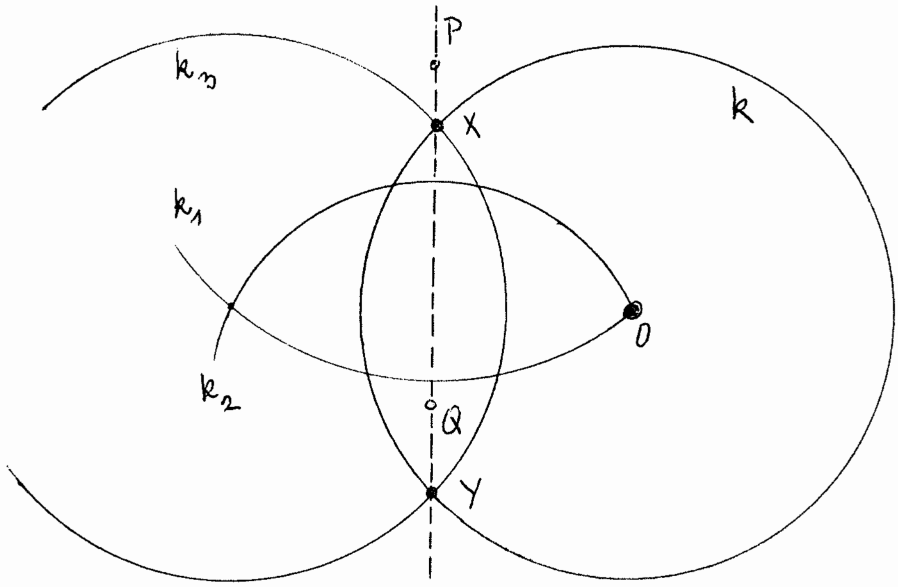
(Vgl. die Konstruktion auf S.53)



7. Schnitt einer Geraden mit einem Kreis

a) die Gerade PQ geht nicht durch den Kreismittelpunkt

3 Kreise



Spiegelung des gegebenen Kreises k(O,r) an der gegebenen Geraden (PQ)

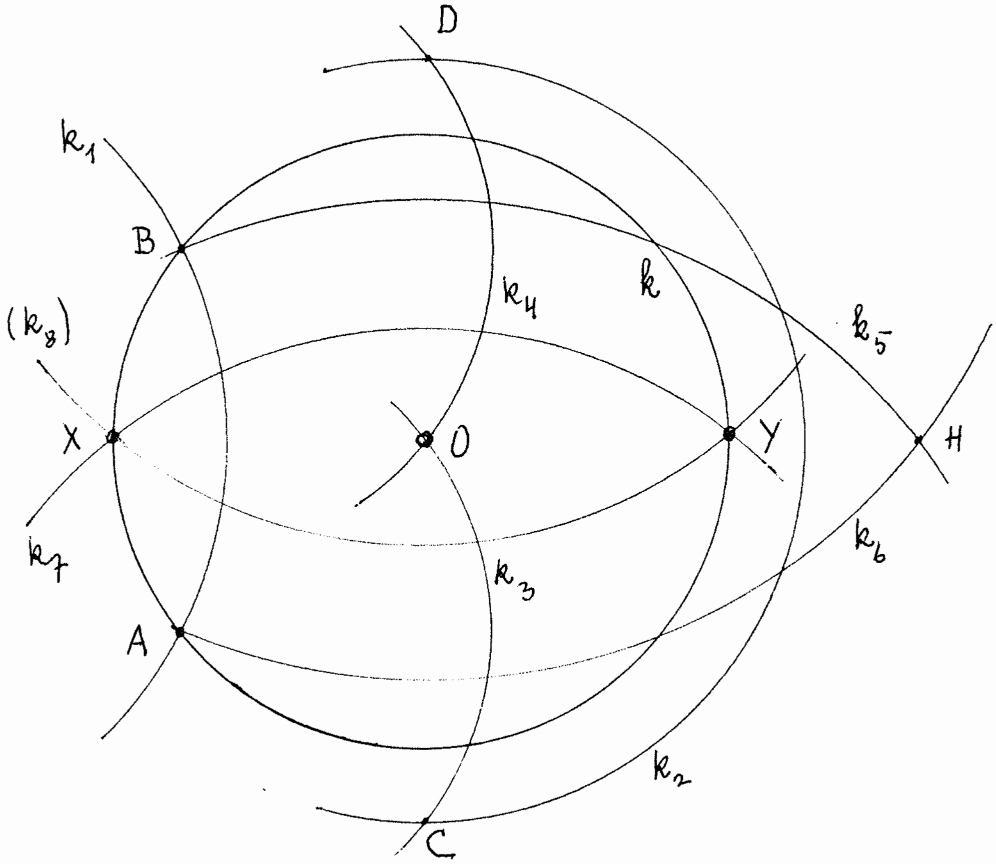
$k_1(P,PQ)$,

$k_2(Q,QO)$

$k_3(O',r)$

b) Die Gerade PO ist ein Kreisdurchmesser

7 Kreise, ev. 8 Kreise



Der Radius ρ des Hilfskreises $k_1(P,\rho)$ ist so zu wählen, daß er den gegebenen Kreis k in zwei Punkten A, B schneidet. Anschlie-ßend ist der Bogen (AB) zu halbieren (Siehe Nr. 3)

$k_2(O,AB)$, $k_3(A, AO)$, $k_4(B,BO)$, $k_5(C,CB)$, $k_6(D,AD)$, $k_7(C,OH)$, $[k_8(D,OH)]$

8. Abtragen einer Strecke r von einem geg. Punkt O auf einer geg. Geraden (OP)

Die Aufgabe reduziert sich auf die Aufgabe 7b), wenn man O als Anfangspunkt der Strecke r wählt und die Schnittpunkte X, Y der Geraden (OP) mit dem Kreis k(O,r) bestimmt

9. Schnitt zweier Geraden (AB), (CD)

a) Die Geraden sind nicht orthogonal

9 Kreise

Spiegelung von A an (CD)

$k_1(C;CA)$, $k_2(D,DA)$

Spiegelung von A_1 an (AB)

$k_3(A,AA_1)$, $k_4(B,BA_1)$

Spiegelung von A an (A_1A_2)

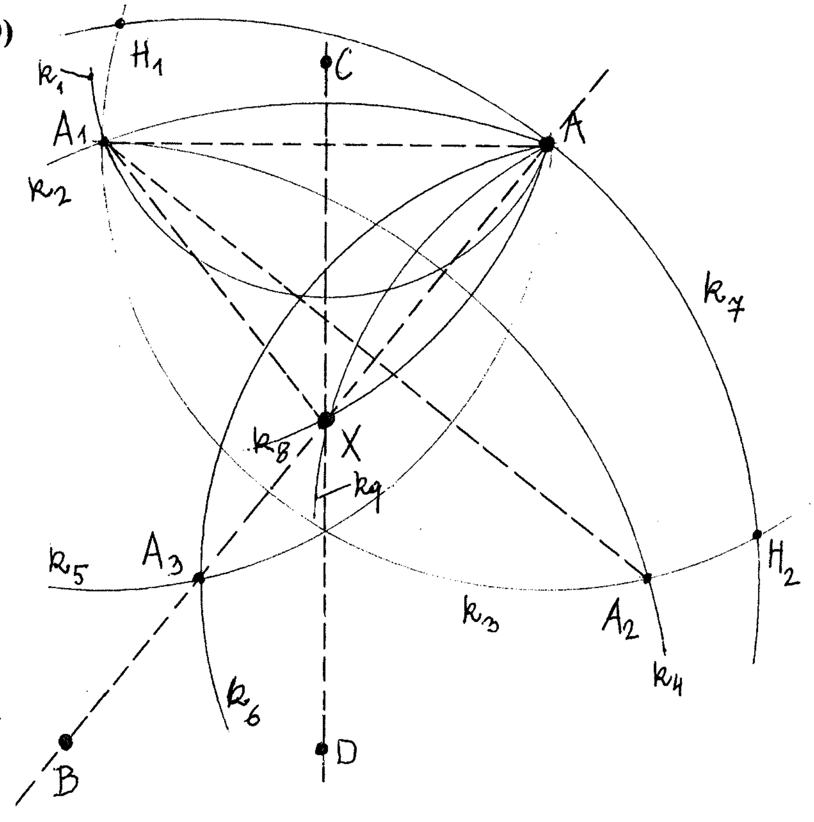
$k_5(A_1, A_1A)$, $k_6(A_2,A_2A)$

Die gleichschenkeligen Dreiecke ΔA_1AA_3 und ΔXAA_1 sind ähnlich, da sie bei A denselben Basiswinkel haben. Daher gilt

$AA_3:AA_1 = AA_1:AX$

AX ist demnach die 3.Proportionale zu AA_3 und AA_1. Wir konstruieren sie auf folgendem Wege

$k_7(A_3,A_3A)$, $k_8(H_1,H_1A)$, $k_9(H_2,H_2A)$



Erklärung dieser Konstruktion[19]:

wir setzen $a = AA_3$, $b = AA_1$, $x = AX$.

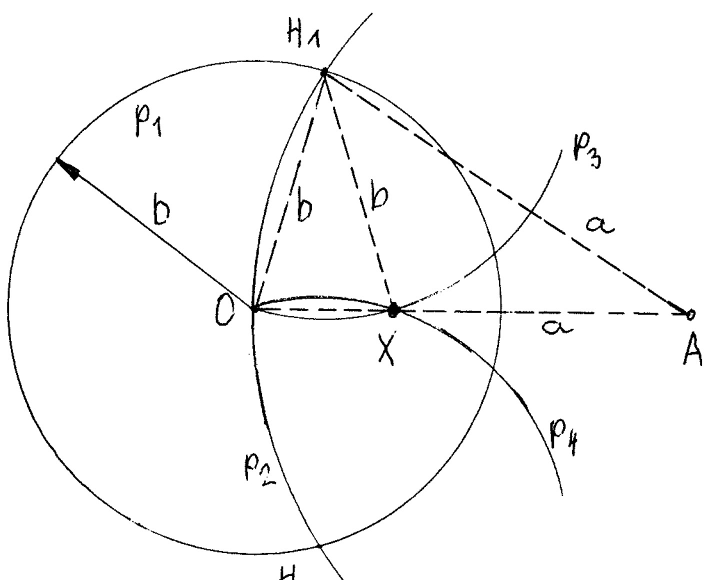
Dann gilt

$a:b = b:x$

$p_1(O,b)$, $p_2(A,a)$

$p_3(H_1,b)$, $p_4(H_2,b)$

Wie oben ergeben sich ähnliche gleichschenkelige Dreiecke, für die obige Proportion gilt.



[19] Diese Konstruktion funktioniert allerdings nur, wenn $a > \frac{1}{2}b$ ist. Vgl. Fußnote 18, Seite 50

b) die Geraden sind orthogonal

9 Kreise

Spiegelung von C an (AB)

$k_1(A,AC)$, $k_2(B,BC)$

Es ist nunmehr die Strecke CC_1 zu halbieren (siehe Konstruktion 2)

Verdopplung von CC_1

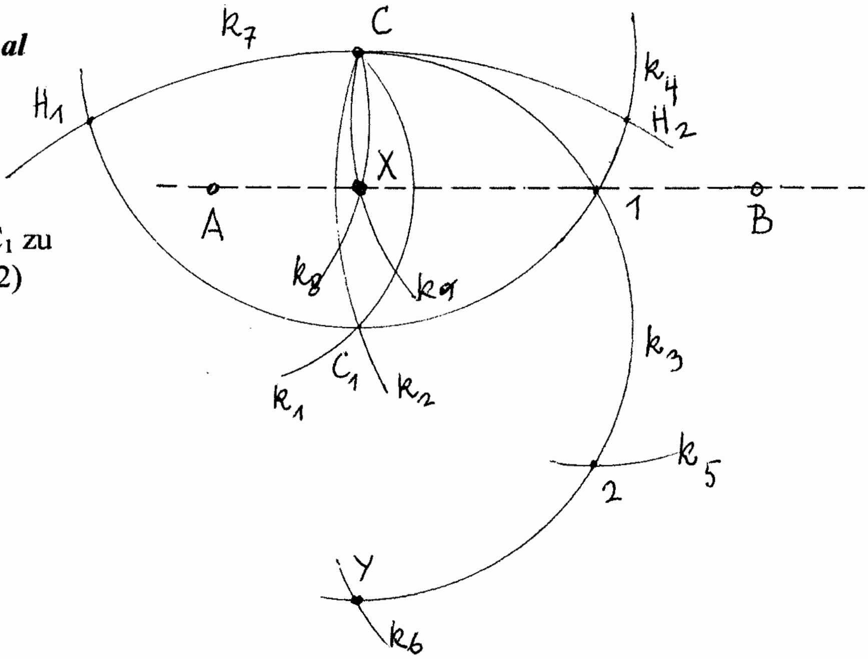
$k_3(C_1,C_1C)$,$k_4(C,C_1C)$

$k_5(1,C_1C)$, $k_6(2C_1,C)$

$k_7(Y,YC)$

$k_8(H_1,H_1C)$

$k_9(H_2,H_2C)$



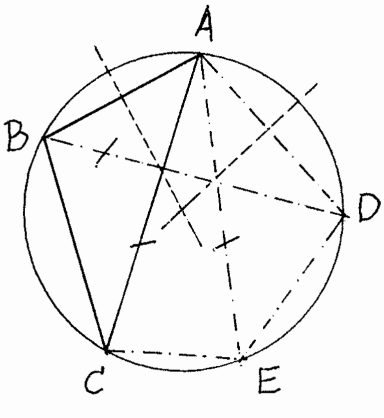
Konstruktionsbeispiel: „Das Napoleon-Problem"[20]

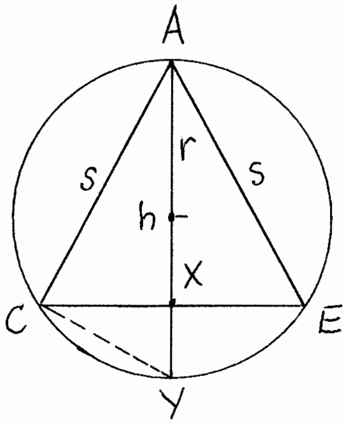
Gegeben seien drei Punkte. Mit dem Zirkel allein soll der Mittelpunkt des Umkreises gefunden werden.

Man verlagert das Problem zunächst auf den Umkreis eines gleichschenkeligen Dreiecks mit demselben Umkreis.

Spiegelung des Dreiecks ΔABC an der Symmetralen von AB ergibt das ungleichsinnig kongruente Dreieck $\Delta BAD \Rightarrow AC = BD$. Spieglung von ΔBAD an der Symmetralen von AD liefert das Dreieck $\Delta EDA \Rightarrow BD = AE$. Daher $AC = AE$. Das Dreieck ΔACE ist mithin gleichschenkelig und hat denselben Umkreis wie ΔABC.

Für Dreieck ΔACE gilt (wegen $\Delta ACX \sim \Delta AYC$) $h:s = s:2r \Rightarrow 2h:s = s:r \Rightarrow 2h:AE = AE:r$



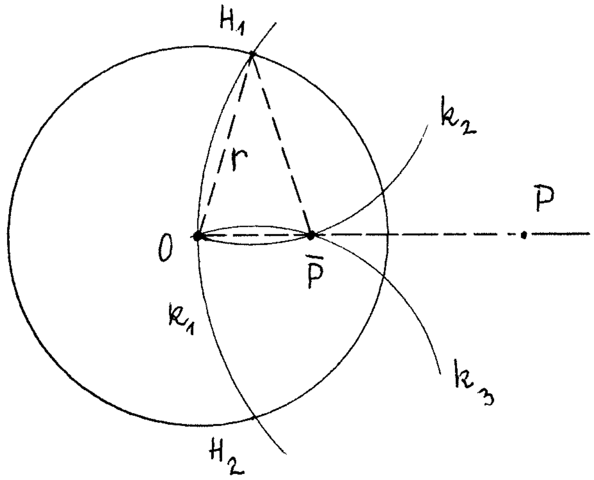


[20] Mit Napoleon ist MASCHERONI durch folgende Anekdote verbunden:
Am 11.Dezember 1797, am Tage nach der Siegesfeier über die italienische Armee, nahm Napoleon (damals noch General) an einer Versammlung von Schriftstellern und Wissenschaftlern in Paris teil, unter denen sich auch LAGRANGE und LAPLACE befanden. Dabei führte er diesen Konstruktionen vor, derer Lösung mit dem Zirkel allein ihm zuvor MASCHERONI mitgeteilt hatte, darunter die Aufgabe, den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks mit dem Zirkel allein zu finden, eine Aufgabe die seither völlig zu Unrecht auch "Napoleon-Aufgabe"heißt. Die beiden Mathe-matiker kannten natürlich diese Lösungen nicht und LAPLACE soll verärgert gesagt haben: "Herr General, wir erwarten alles von Ihnen, nur keine Nachhilfe in Mathematik".

Die Behandlung der Inversion nach MASCHERONI

1. Aufsuchen des inversen Punktes zu einem gegebenen Punkt P

a) OP > r/2



$k_1(P,PO)$

$k_2(H_1,H_1O)$

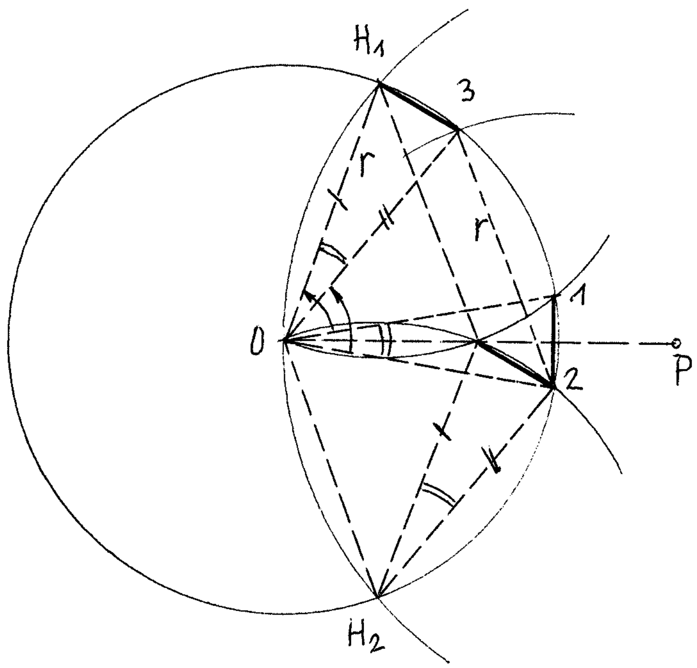
$k_3(H_2,H_2O)$

Die beiden gleichschkeligen Dreiecke ΔPOH und $\Delta H_1O\overline{P}$ sind ähnlich, da sie im Basiswinkel bei O übereinstimmen. Daher

$OP:OH_1 = OH_1:O\overline{P} \Rightarrow OP:r = r:O\overline{P} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{OP.O\overline{P} = r^2}$

b) OP < r/2



Hier versagt obige Konstruk-tion[21]. In diesem Falle wird man die Strecke OP mit einem geeignet gewählten Faktor n vervielfachen:

$OP_1 := n.OP \Rightarrow OP_1.O\overline{P}_1 = r^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow O\overline{P}_1 = \frac{r^2}{OP_1} = \frac{r^2}{n.OP} = \frac{1}{n}\overline{OP}$$

also

$\underline{O\overline{P} = n.O\overline{P}_1}$

d.h. man hat auch $O\overline{P}_1$ zu ver-n-fachen um zum gewünschten $O\overline{P}$ zu gelangen. Die Konstruktion des Punktes $\overline{P}$ kann recht ungenau werden, wenn die Strecke OP sehr lang ist. Diesem Übelstand kann man auf folgende Weise abhelfen:

Bei der Konstruktion von $\overline{P}$ entsteht der Rhombus $\#OH_1\overline{P}H_2$ mit der Seitenlänge r. Daher gilt

$OH_1 \parallel H_2\overline{P}$

Ferner sind entsprechend der Konstruktion die Dreiecke ΔOH_22 und ΔOH_11 gleichseitig $\Rightarrow$ $\angle H_1O1 = 60°$. Schlagen wir von 2 den Radius r zum Punkt 3 ab so ist auch $\Delta O23$ gleichseitig und es ist: $\angle H_1O3 = \angle 1O2$, da beide Schenkel des letzten Winkels um 60° verdreht wurden. Da die Punkte O, H_2, 2, 3 nach Konstruktion ein Rhombus $\#OH_223$ mit der Seitenlänge r bilden, gilt $O3 \parallel H_22$. Daher ist (parallele Winkelschenkel)

---

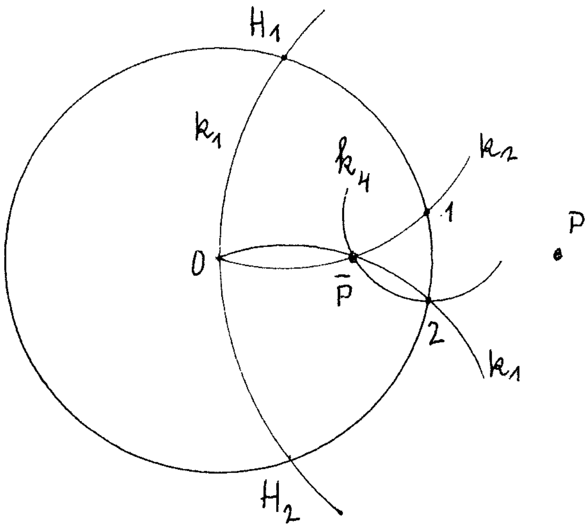
[21] Vgl. Fußnote 18 (Seite 50) und Fußnote 19 (Seite 53)

$$\angle H_1O3 = \angle \overline{P}H_2 2 = \angle 1O2$$

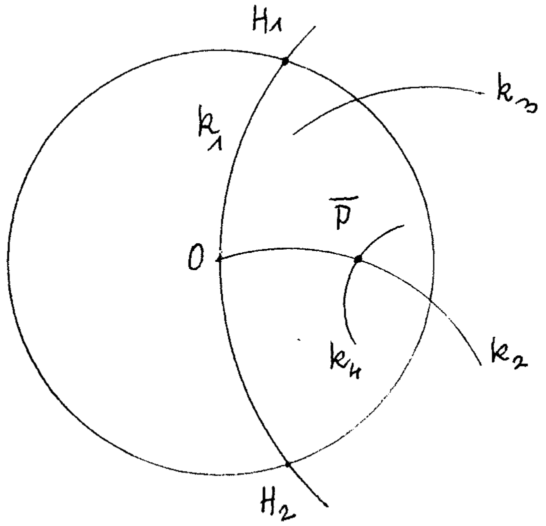
Aus der Kongruenz der gleichschenkeligen Dreiecke $\Delta 1O2 = \angle \overline{P}H_2 2$ folgt

$$\underline{2\overline{P} = 12}$$

Es gibt daher folgende Möglichkeiten, die Konstruktion von $\overline{P}$ genauer zu gestalten



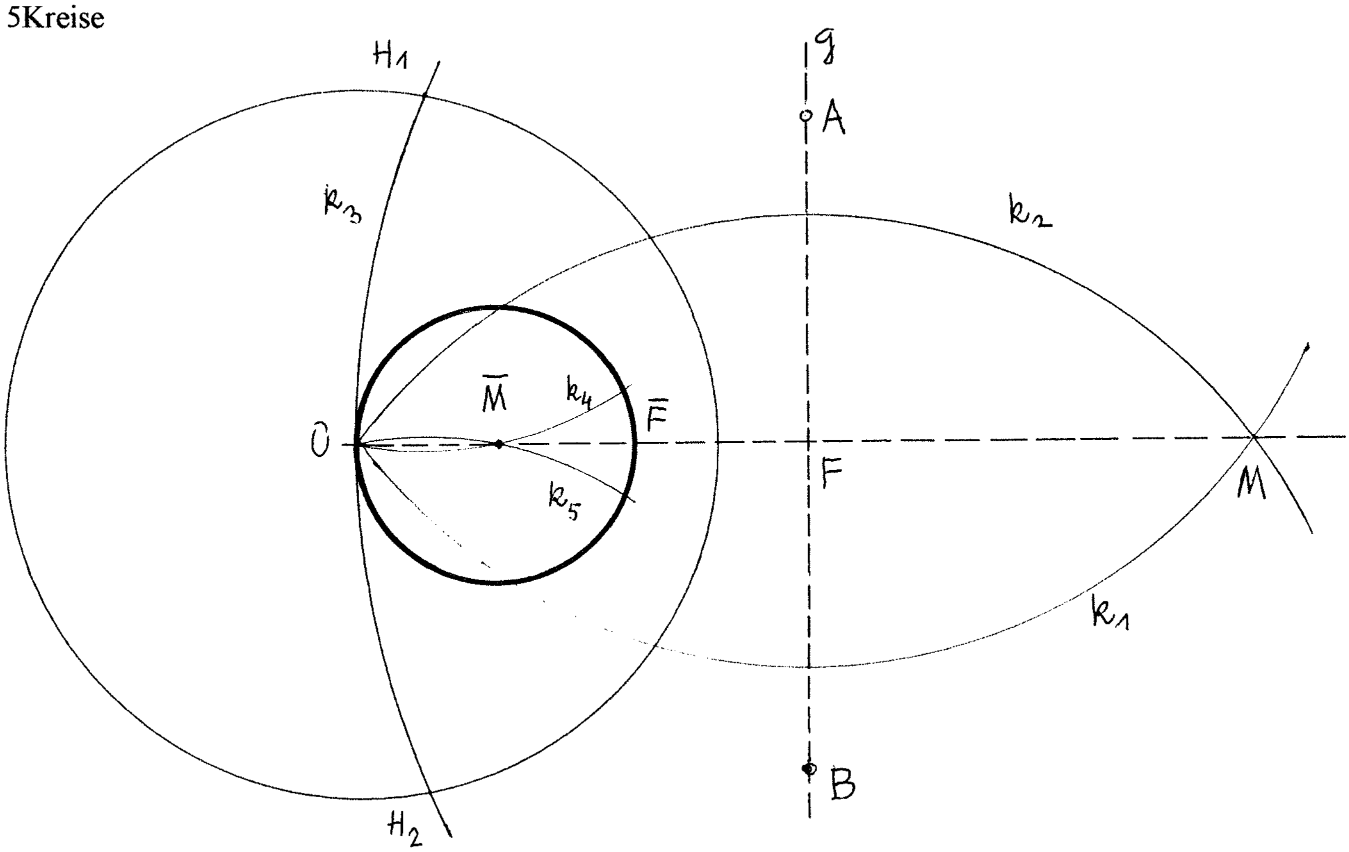
$k_1(P,PO)$, $k_2\ (H_1,r)$, $k_3(H_2,r)$, $k_4(1,12)$



$k_1(P,PO)$, $k_2\ (H_2,r)$, $k_3(2,r)$, $k_4(2,3H_1)$

Inversion einer Geraden

5Kreise



$k_1(A,AO)$, $k_2(B,BO)$, $k_3(M,MO)$, $k_4(H_1,H_1O)$, $k_5(H_2,\ H_2O)$

Sei F der Fußpunkt des Lotes aus O auf die Gerade g. Dann ist $\overline{F}$ der Durchmesserendpunkt des Durchmessers $O\overline{F}$ des Bildkreises $\overline{g}$. Es gilt dann

$$OF.O\overline{F} = r^2 \qquad (*)$$

Für den Mittelpunkt des Bildkreises gilt dann

$$O\overline{M} = \frac{1}{2} O\overline{F}$$

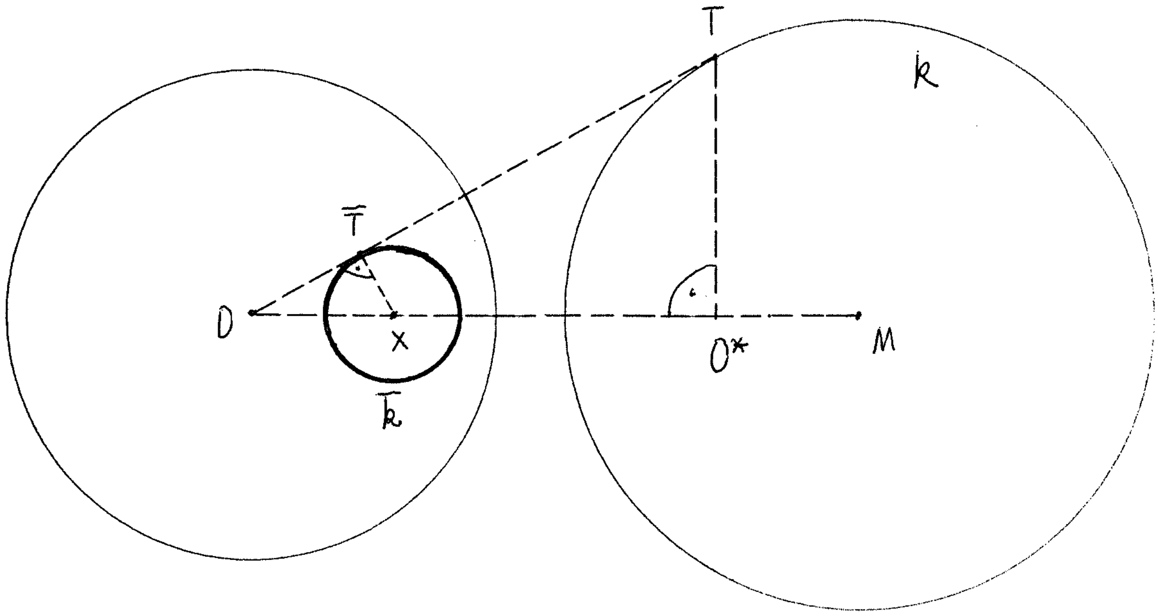
Wegen (*) folgt daraus

$$OF.\left(2.\,O\overline{M}\right) = (2.\,OF).\,O\overline{M} = r^2 = OM.\,O\overline{M}$$

d.h. der Mittelpunkt $\overline{M}$ des Bildkreises ist das Bild des Spiegelbildes M von O bezüglich g.

Inversion des Kreises

Vorbereitende Figur: Wird denken uns $\overline{k}$ bereits gefunden



Die gemeinsame Tangente an k und $\overline{k}$ ist ein Inversionsstrahl und die Berührungspunkte T und $\overline{T}$ sind inverse Punkte

$$OT.\,O\overline{T} = r^2$$

Der Punkt O* ist der inverse Punkt von O *bezüglich des zu invertierenden Kreises* k.

Aus der Ähnichketi der rechtwinkeligen Dreiecke ergibt sich

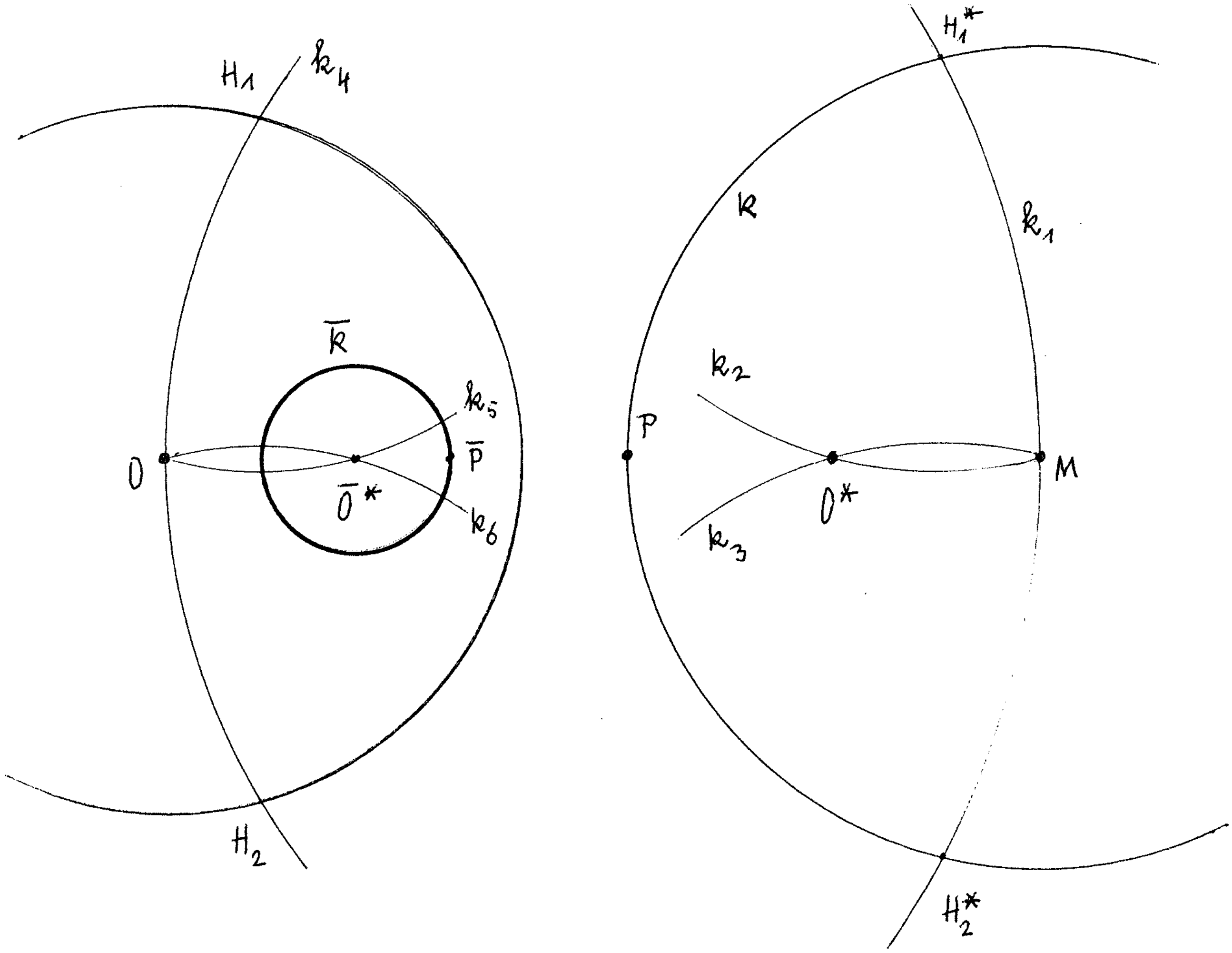
$$\Delta\, O{*}TO \sim \Delta\overline{T}XO \Rightarrow OX{:}\,O\overline{T} = OT{:}\,OO{*} \Rightarrow OX.\,OO{*} = OT.\,O\overline{T} = r^2$$

Daher sind X und O* invers bezüglich des Inversionskreises.

Mit Hilfe eines beliebigen Punktes $\overline{P}$ kann man $\overline{k}$ zeichnen, sobald dessen Mittelpunkt $\overline{O}{*}$ bekannt ist

$$k_1(O,OM), k_2\left(H_1^*, H_1^*M\right), k_3\left(H_2^*, H_2^*M\right), k_4\left(O^*, O{*}O\right), k_5\left(H_1, H_1O\right), k_6\left(H_2, H_2O\right)$$

+ 3 Kreise zur Konstruktion des Punktes $\overline{P}$


H1
k4
k̄
k5
P̄
O
Ō*
k6
H2
H1*
k
k1
k2
P
O*
M
k3
H2*

Vorlesungsbeispiele 2005/2006

27. Man konstruiere eine Dreieck aus c, h_a, m_c (10)
28. Man konstruiere eine Dreieck aus a, b, m_c (23)
29. Man konstruiere eine Dreieck aus c, m_a, γ (24)
30. Man konstruiere ein Quadrat aus der Summe seiner Diagonalen und einer Seite (51/1)
31. Man konstruiere ein Tangentenviereck aus a, d, β, δ (69)
32. Man konstriuere ein Trapez aus der Länge der Diagonalen e, f und den Winkeln des Trapezes (57)

Literatur

F.G.-M. [Frère Gabriel - Marie]: Exercices de géométrie. J de Gigord, Paris 1920[6]

HERTERICH K.: Dreieckskonstruktionen, Klett, Stuttgart, 1961

LEBESGUE H.: Leçons sur les constructions géométriques, Gauthier-Villars, Paris 1950

MASCHERONI L.: Gebrauch des Zirkels [Übers. ins Deutsche], Schlesinger, Berlin 1825

MASCHERONI L.: Geometria des compasso, Pavia 1797

MOHR G.: Euclides Danicus, Amsterdam, 1672, Hgg. von J.HJELMSLEV, Kopenhagen 1928

MOLENBROEK P.: Leerboek der vlakke meetkunde, Noordhoff, Groningen, 1955

PETERSEN L. [= J.HJELMSLEV]: Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Construktionsaufgaben, Host, Kopenhagen, 1879

QUEMPER DES LANASCOL A.: Géométrie du compas, Beauchard, Paris 1925

VEEN van S.: Passermeetkunde, Noorduijn, Groningen, 1951

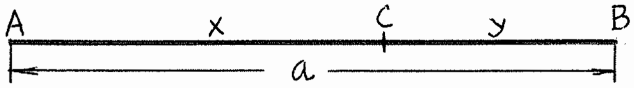
BESKIN N.M. - BOLTJANSKI W.G. - MASLOWA G.G. - TSCHETWERUCHIN N.F. - JAGLOM I.G.: Allgemeine Prinzipien geometrischer Konstruktionen in „Enzyklopädie deer Elementarmatjematik", Bd.IV: Geometrie, VEB D.Verl.d.Wiss., Berlin, 1969

Inhalt

Ergänzungen

Der goldene Schnitt[1]

Eine Strecke ist nach dem goldenen Schnitt geteilt, wenn sich die ganze Strecke zum größeren Abschnitt verhält, wie der größere zum kleineren Abschnitt



Das Verhältnis

$$\Phi = \frac{a}{x} = \frac{x}{y} \tag{1}$$

heißt *goldene Zahl*[2]. Es gilt

$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow ay = x^2$ ... Der größere Abschnitt ist das *geometrische Mittel* aus der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitt.

$$\Phi = \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} = \frac{1}{\frac{a}{x}-1} = \frac{1}{\Phi-1} \Rightarrow \Phi(\Phi-1) = 1 \tag{2}$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Leftrightarrow \Phi^2 = \Phi + 1 \tag{3}$$

Daraus

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) = 1{,}618034\ldots \tag{4}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) = 0{,}61803\ldots \tag{5}$$

Demnnach

$$x = \frac{a}{\Phi}, \quad y = a - x = a - \frac{a}{\Phi} = a\left(1 - \frac{1}{\Phi}\right) \overset{(2)}{=} a(1-(\Phi-1)) = a(2-\Phi) \tag{6}$$

Äußere harmonische Teilung

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{a} = \Phi \Rightarrow \underline{AD = a.\Phi} \Rightarrow (a+z) = a.\Phi \Rightarrow \underline{z} = a(\Phi-1) \overset{(2)}{=} \underline{a.\frac{1}{\Phi}}$$

Eigenschaften der goldenen Zahl

Aus (3) ergibt sich durch fortlaufende Multiplikation mit Φ

$\Phi^2 = \Phi + 1$

$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$

$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2$

$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$

---

[1] Aus der ungeheuer umfangreichen Literatur sei empfohlen: Marius CLEYET - MICHAND: Le nombre d'or, Sammlung „Que sais-je?“, Presses Universitaires de France, 1975

[2] Der griechische Buchstabe Φ (Phi) soll an den griechischen Bildhauer Pheidias (480/490? -430/420? v.Chr.) erinnern, der maßgeblich am Bau der Akropolis in Athen beteiligt war.

Betrachtet man demnach die mit dem Faktor Φ gebildete geometrische Folge $1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \ldots$, so erkennt man, daß jedes Glied die Summe aus den vorhergehenden beiden Gliedern der Folge ist.

Wegen (3) kann man auch jede Potenz von Φ durch Φ linear ausdrücken:

$\Phi^2 = 1+\Phi$	$\Phi^2 = 1+\Phi$
$\Phi^3 = \Phi^2.\ \Phi = (1+\Phi).\ \Phi = \Phi+\Phi^2 = 1+2\Phi$	$\Phi^3 = 1+2\Phi$
$\Phi^4 = \Phi^3.\ \Phi = (1+2\Phi).\ \Phi = \Phi+2\Phi^2 = 2+3\Phi$	$\Phi^4 = 2+3\Phi$
$\Phi^5 = \Phi^4.\ \Phi = (2+3\Phi).\ \Phi = 2\Phi+3\Phi 2 = 3+5\Phi$	$\Phi^5 = 3+5\Phi$
$\Phi^6 = \Phi^5.\ \Phi = (3+5\Phi).\ \Phi = 3\Phi+5\Phi 2 = 5+8\Phi$	$\Phi^6 = 5+8\Phi$
$\vdots$	$\vdots$

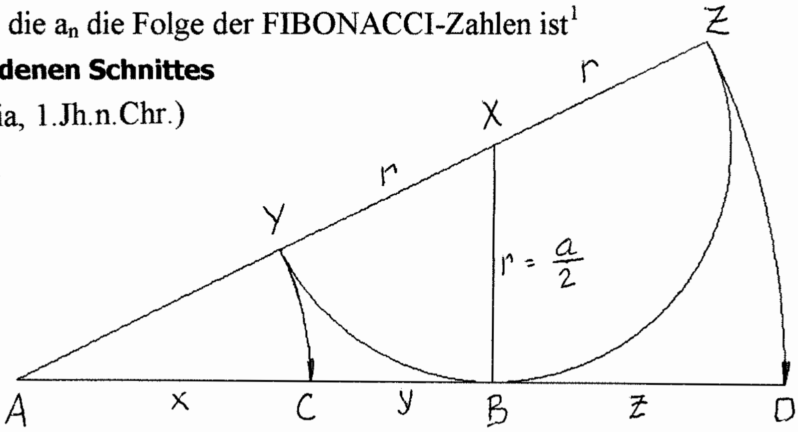
Man ersieht, daß man die Potenzen von Φ in der Gestalt

$$\Phi^n = a_{n-1} + a_n.\Phi$$

darstellen kann, worin die a_n die Folge der FIBONACCI-Zahlen ist[1]

Konstruktion des goldenen Schnittes

(Heron von Alexandria, 1.Jh.n.Chr.)



$$AB = a, \quad BX = \frac{a}{2} = r$$

$$AX = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$XY = BX = \frac{a}{2}$$

$$AY = \frac{a}{2}.\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \overset{(5)}{=} a.\frac{1}{\Phi} = AC \Rightarrow \underline{\frac{AB}{AC} = \Phi}$$

$$BC = a - AC = a - a.\frac{1}{\Phi} = a\left(1-\frac{1}{\Phi}\right) = a\left(\frac{\Phi-1}{v}\right) \overset{(2)}{=} a.\frac{1}{\Phi^2}$$

$$\frac{AC}{BC} = a.\frac{1}{\Phi} - \frac{\Phi^2}{a} = \Phi \Rightarrow \underline{\frac{AC}{BC} = \Phi}$$

Das regelmäßige Fünfeck

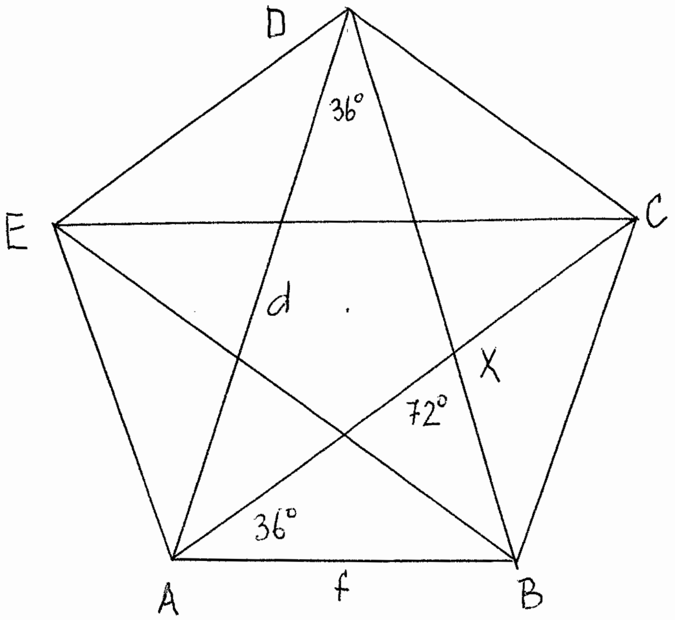
Vermutlich sind die Pytagoreer[2] bei der Untersuchung des regelmäßigen Fünfecks auf den Begriff des goldenen Schnittes gestoßen. Da der Zentriwinkel einer Seite des regelmäßigen Fünfecks 72° beträgt, ist der Winkels zwischen zwei von einer Ecke ausgehenden Diagonalen 36°. Daher sind die Dreiecke ABD und BXA ähnlich und es gilt

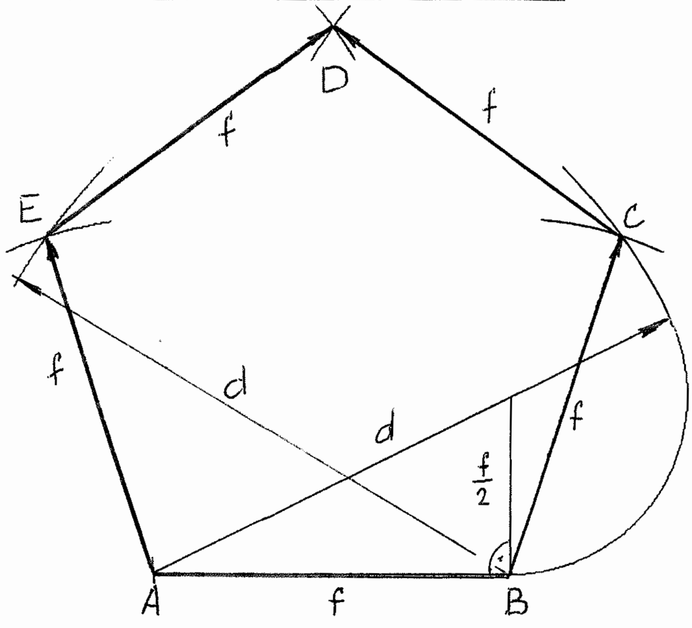
$\frac{d}{f} = \frac{f}{BX} = \Phi$ .Hieraus ergibt sich eine mögliche Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks

---

[1] Die Folge der FIBONACCI-Zahlen erhält man (LEONARDO von PISA, genannt FIBONACCI, ca.1180 - ca.1250), wenn man nach Wahl zweier beliebigen Anfangselemente $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, die weiteren Elemente durch Addition der jeweils beiden vorhergehenden erzeugt: $a_3 = a_1+a_2 = 2$, $a_4 = a_3+a_2 = 3$, $a_5 = a_4+a_3 = 5$ usw.

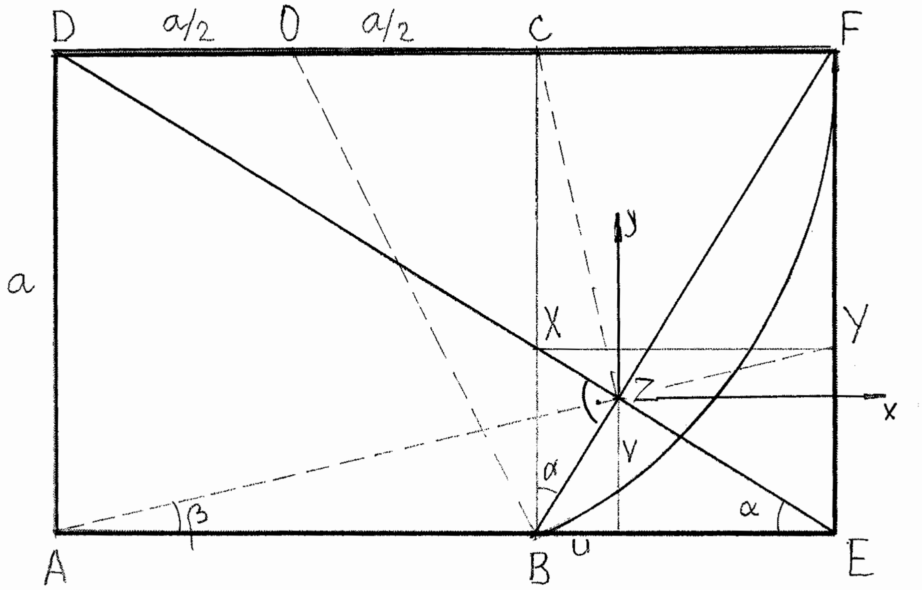
[2] PYTHAGORAS (ca.580-500 v.Chr.)





Die Tatsache, daß Φ eine Irrationalzahl ist, dürfte von HIPPASOS[1] entdeckt worden sein.

Das goldene Rechteck



AB = BC = a,

$$OD = OC = \frac{a}{2}, OB = \frac{a}{2}.\sqrt{5} = OF, \underline{CF} = BE = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \overset{(5)}{=} a.\underline{\frac{1}{\Phi}} \tag{7}$$

$$AE = a + BE = a + \frac{a}{\Phi} = a\left(1 + \frac{1}{\Phi}\right) \overset{(5)}{=} a.\Phi \tag{8}$$

Daher

[1] HIPPASOS von Metapont (ca.450 v.Chr.)

$\frac{AE}{EF} = \Phi$, $\frac{EF}{BE} = \Phi$ Die beiden Rechtecke AEFD und BEFC sind *goldene Rechtecke*. Sie sind daher ähnlich mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\frac{AE}{EF} = \Phi$. Für den Winkel α gilt

$$\underline{\boldsymbol{tan}}\,\alpha := \frac{AD}{AE} = \frac{a}{a.\Phi} = \frac{1}{\underline{\Phi}}$$
$$\boldsymbol{cos}\,\alpha = \frac{\Phi}{\sqrt{1+\Phi^2}}, \quad \boldsymbol{sin}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\Phi^2}} \tag{9}$$

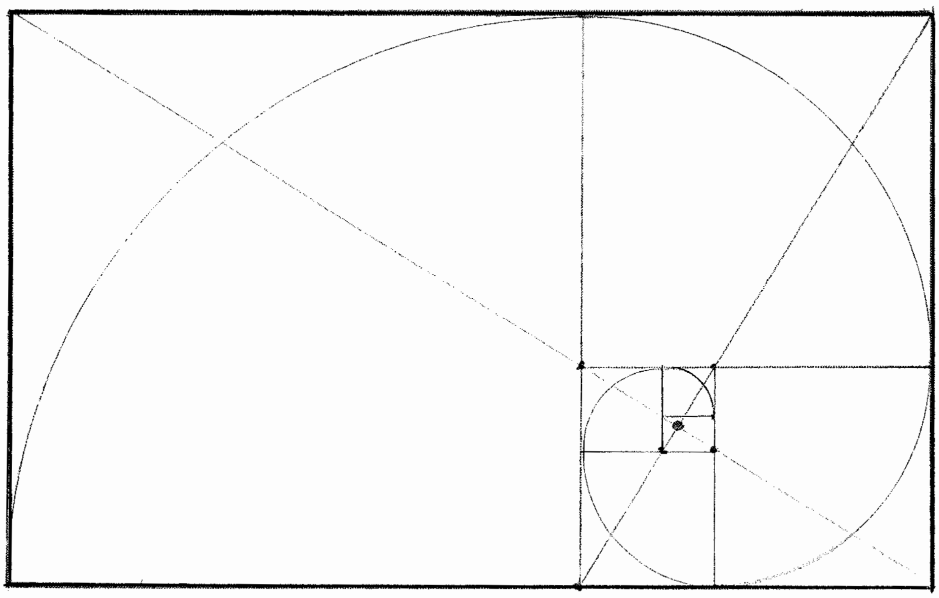
$CX = DC.\boldsymbol{tan}\,\alpha = a.\frac{1}{\Phi} \overset{(7)}{=} CF$. XYFC ist daher ein *Quadrat*.

Das Rechteck BEFC wurde somit ebenfalls in ein Quadrat und ein Rechteck zerlegt. Aus Ähnlichkeitsgründen gilt $\angle$ AED = $\angle$ CBF = α. Daher ist $\angle$ FZE ein *rechter Winkel*.

Der Punkt Z spielt in den beiden Rechtecken AEFD und BEFC dieselbe Rolle. Er ist daher das Zentrum jener *rechtwinkeligen Drehstreckung* mit dem Faktor $\frac{1}{\Phi}$, welche AEFD nach CBFE überführt.

Die goldene Spirale (Spirale von FIBONACCI)

Durch sukzessive Konstruktion goldenenerVielecke, erhält man durch Einzeichnen von Kreisbögen in die Quadrate die *goldene Spirale*



Die logarithmische Spirale

Die Gleichung einer logarithmischen Spirale in Polarkoordinaten lautet bekanntlich $r(\varphi) = c.\hat{e}^{k.\varphi}$. Wählt man eine Folge von Radien für äquidistante Polarwinkel $\varphi_i = i.\varepsilon,\ i = 0,\ldots,n$, so bilden die entsprechenden Radien eine geometrische Folge $r_i = c.\hat{e}^{k.i.\varepsilon}$, $r_{i+1} = c.\hat{e}^{k.(i+1).\varepsilon}$ mit dem Faktor $\lambda = \frac{r_{i+1}}{r_i} = \hat{e}^{k.\varepsilon}$. Nun bilden die jeweils untereinander um einen rechten Winkel verdrehten Strecken ZA, ZC, ... eine geometrische Folge mit dem Faktor $\frac{1}{\Phi}$. Sie können also als Radien einer logarithmischen Spirale aufgefaßt werden.

Wir wollen ihre Polargleichung im System mit dem Zentrum Z und der Standlinie $\vec{x}$ bestimmen.

Um die Ausgangslage $\vec{ZA}$ festzulegen, benötigen wir die Strecken u, v. Es gilt

$$BX = BE.\tan\alpha = \frac{a}{\Phi}.\frac{1}{\Phi} = \frac{a}{\Phi^2} \Rightarrow v = BX.\cos^2\alpha = \frac{\alpha}{\Phi^2}.\frac{\Phi^2}{1+\Phi^2} = \frac{a}{1+\Phi^2} = v$$

$$u = BX.\cos\alpha.\sin\alpha = \frac{a}{\Phi^2}.\frac{\Phi}{\sqrt{1+\Phi^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+\Phi^2}} = \frac{a}{\Phi.(1+\Phi^2)} = u$$

Der erste Radiusvektor $r_0 = \vec{ZA}$ hat die Länge

$$ZA^2 = (u+a)^2 + v^2$$

Zunächst berechnen wir

$$u + a = \frac{a}{\Phi(1+\Phi^2)} + a = \frac{a}{\Phi(1+\Phi^2)}\left(\underbrace{1+\Phi}_{\Phi^2}+\Phi^3\right) = \frac{a}{\Phi(1+\Phi^2)}.\Phi^2.\left(\underbrace{1+\Phi}_{\Phi^2}\right) = a.\frac{\Phi^3}{1+\Phi^2}$$

Daher

$$(u+a)^2 + v^2 = a^2.\frac{\Phi^6}{(1+\Phi^2)^2} + \frac{a^2}{(1+\Phi^2)} = \frac{a^2}{(1+\Phi^2)}.(1+\Phi^6)$$

Somit

$$ZA = r_0 = \frac{a}{1+\Phi^2}.\sqrt{1+\Phi^6}$$

Der zweite, dazu normale Radiusvektor r_1 geht aus r_0 durch orthogonale Drehstreckung mit dem Faktor $\frac{1}{\Phi}$ hervor. Daher gilt

$$ZC = r_1 = \frac{ZA}{\Phi} = \frac{a}{\Phi(1+\Phi^2)}.\sqrt{1+\Phi^2}$$

Für den Winkel β gilt

$$\tan\beta = \frac{v}{a+u} = \frac{a}{1+\Phi^2}.\frac{1}{a}.\frac{1+\Phi^2}{\Phi^3} = \frac{1}{\Phi^3} = \tan\beta$$

Daher ist der positiv gezählte Polarwinkel der Grundlinie gegen den ersten Radiusvektor

$$\angle\vec{x}\left(\vec{ZA}\right) = \varphi_0 = \pi + \beta = \pi + \operatorname{atan}\frac{1}{\Phi^3}$$

Daher ist

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{atan}\frac{1}{\Phi^3}$$

Die Parameter c und k der gesuchten logarithmischen Spirale berechnen sich aus

$$\left.\begin{array}{l} r_0 = c.\hat{e}^{k.\varphi_0} \\ r_1 = c.\hat{e}^{k.\varphi_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{r_0}{r_1} = \Phi = \hat{e}^{k.(\varphi_0-\varphi_1)} = \hat{e}^{k.\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boldsymbol{ln}\,\Phi = k.\frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{k = \frac{2}{\pi}.\boldsymbol{ln}\,\Phi}$$

$$c = r_0.\hat{e}^{-k.\varphi_0} = r_0.\hat{e}^{-\boldsymbol{ln}\,\Phi.\frac{2}{\pi}.\varphi_0} = r_o.\Phi^{-\frac{2}{\pi}.\varphi_0} = \frac{a}{1+\Phi^2}.\sqrt{1+\Phi^6}.\Phi^{-\frac{2}{\pi}.\left(\pi+\boldsymbol{atan}\left(\frac{1}{\Phi^3}\right)\right)}$$

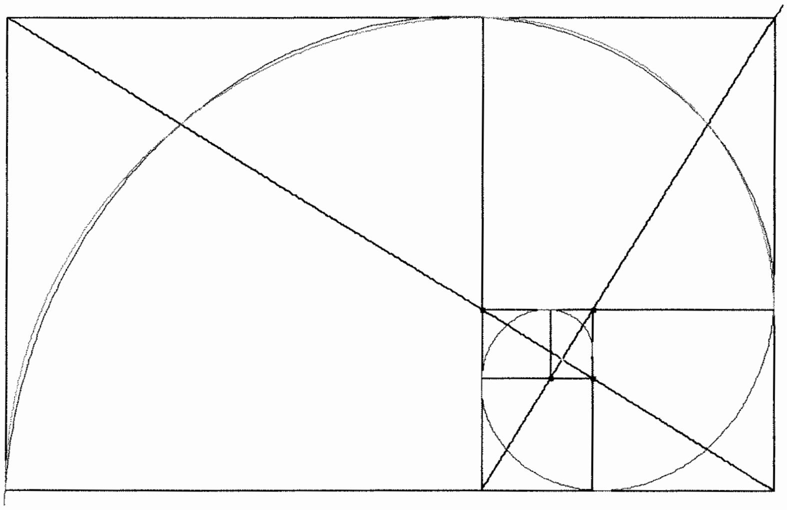
$$r(\varphi) = c.\hat{e}^{\boldsymbol{ln}\,\Phi.\frac{2}{\pi}.\varphi} = c.\Phi^{\frac{2}{\pi}.\varphi}$$

Daher lautet die Gleichung der gesuchten logarithmischen Spirale

$$r(\varphi) = \frac{a}{1+\Phi^2}.\sqrt{1+\Phi^6}.\Phi^{-\frac{2}{\pi}.\left(\pi+\boldsymbol{atan}\left(\frac{1}{\Phi^3}\right)\right)}.\Phi^{\frac{2}{\pi}.\varphi} \qquad \varphi_0 > \varphi > 0$$

Für den *Schränkungswinkel* der Spirale (Winkel der Tangente gegen den Radiusvektor) gilt

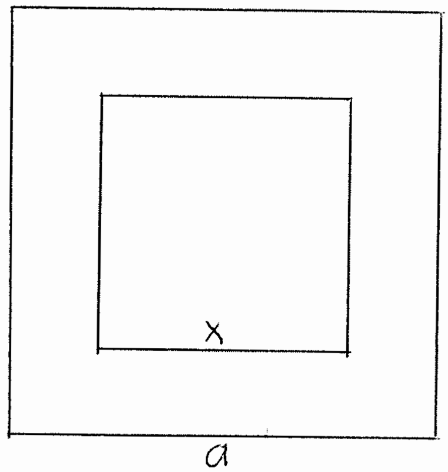
$$\boldsymbol{tan}\,\tau = \frac{r(\varphi)}{\dot{r}(\varphi)} = \frac{c.\Phi^{\frac{2}{\pi}.\varphi}}{c.\frac{2}{\pi}.\boldsymbol{ln}\,\Phi.\Phi^{\frac{2}{\pi}.\varphi}} = \frac{\pi}{2.\boldsymbol{ln}\,\Phi} = 1.274 \Rightarrow \underline{\alpha = 72{,}968°}$$



Der „goldene Rahmen"

Bildet man zwei konzentrische Quadrate mit den Seitenlängen a und x, wobei x der größere Abschnitt der nach dem goldenen Schnitt geteilten Streck a ist (d.h. a = x.Φ), so ergibt sich für das Verhältnis der Fläche des entstehenden „Rahmens" zur „Bildfläche"

$$\underline{\frac{a^2-x^2}{x^2}} = \frac{x^2.\Phi^2-x^2}{x^2} = \Phi^2 - 1 \stackrel{(3)}{=} \underline{\Phi}$$



Algebraische Eigenschaften

Nach Fußnote 1) auf Seite 2 gilt für FIBONACCI-Zahlen $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Für das Verhältnis

$$v_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{10}$$

aufeinander folgender FIBONACCI-Zahlen folgt daraus

$$v_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{v_{n-1}} \tag{11}$$

Wegen (3) gilt

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \tag{12}$$

Zusammen mit (11) folgt daraus

$$v_{n-1} < \Phi \Rightarrow v_n > \Phi$$

$$v_{n-1} > \Phi \Rightarrow v_n < \Phi$$

Für $n \to \infty$ wird daher Φ durch die v_n eingeschachtelt, sodaß gilt

$$\lim_{n \mapsto \infty} v_n = \Phi \tag{13}$$

Folgende Tabelle liefert ein Beipiel

n	a_n	v_n
1	1	1
2	1	2
3	2	1.5
4	3	1.66666...
5	5	1.6
6	8	1.625
7	13	1.61538...
8	21	1.61904...
9	34	1.61764...
10	55	1.61818...
11	89	1.61797...
12	144	1.61805...
13	233	1.61802...
14	377	1.61803...

Ausgehend von der Formel **(11)** ergibt sich

$$\mathbf{v}_1 = 1$$

$$\mathbf{v}_2 = 1 + \frac{1}{1}$$

$$\mathbf{v}_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}$$

$$\mathbf{v}_4 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}$$

… … …

Daher ergibt sich wegen (13) in der Grenze der Kettenbruch

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}$$

Aus der Beziehung (3) folgt

$$\Phi = \sqrt{1 + \Phi}$$

und weiter

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}}$$

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}}}$$

………

Schließlich in der Grenze

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$$

Vorlesungsbeispiele

1. Eine Strecke AB sei der Länge und der Lage nach gegeben. Auf einem gleichfalls gegebenen Kreis suche man jenen Peripheriepunkt C, sodaß die Projektionen D,E der Punkte A,B aus C eine zu AB parallele Kreissehne DE ergeben (135)

2. Auf der Geraden g sei der Punkt M gegeben, außerhalb der Geraden ein Punkt C. Man bestimme auf g eine Strecke AB so, daß M ihr Mittelpunkt ist und AB von C aus unter dem vorgegebenen Winkel γ gesehen wird (109)

3. Man konstruiere ein Dreieck aus c, γ, ρ (5)

4. Gegeben sei ein Kreis k. Man schreibe k ein Sehenviereck ABCD ein, von dem die Länge der Diagonale AC sowie der Winkel ε der beiden Diagonalen gegeben sind. Ferner sei das gesuchte Viereck einem (nicht bekannten) Kreis umschrieben (66).

5. Gegeben seien zwei einander schneidende Kreise. Duch einen der beiden Schnittpunkte S lege man eine Sekante, die
   a) durch S in dem gebenene Verhältnis m:n geteilt wird
   b) eine vorgegebene Länge l har (115)

6. Einem gegebenen Dreieck ~~Δ ABC~~ schreibe man ein Dreieck ein, welches einem weiteren Dreieck ~~Δ EFG~~ kongruent ist (Man beachte Beispiel 5) (116)
   von Trägern der Seiten eines

7. Einem gegebenen Parallelogramm ist ein Quadrat einzuschreiben (46)

8. Gegeben sei ein Kreis k und ein Punkt P. Man lege durch P eine Gerade g derart, daß die Schnittpunkte mit k von einer gegebenen Gerade h Abstände haben, deren Summe gleich einer gegebenen Strecke d ist (100)

9. Man konstruiere einen Kreis, der durch zwei gegebenen Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt (85/2)

10. Man zeige: in einem Sehenviereck ABCD liegen die Schwerpunkte der Dreiecke Δ ABC, Δ BCD, Δ CDA, Δ DAB auf einem Kreis (65)

11. Man konstriere ein Trapez aus den Diagonalen und den nichtparallelen Seiten (61)

12. Man konstruiere ein Dreieck aus h_c, m_c, m_a (37)

13. Man konstruiere ein Sehnenviereck aus den Diagonalen, deren Winkel und dem Radius des Umkreises (64)

14. Einem gegebenen Kreis schreibe man ein Sehnenviereck ein, von dem die Seiten a und c sowie das Verehältnis b:d bekannt sind (68)

15. Man konstruiere ein Sehnenviereck aus den vier Seiten (70)

16. Man konstruiere einen Kreis, der zwei gegebene Gerade g,h sowie einen gegebenen Kreis k berührt (86)

17. Man konstruiere einen Kreis k, der durch einen gegebenen Punkt P geht und zwei gegebene Kreise k und l berührt (89)

18. Man konstruiere einen Kreis, der durch einen gegebenen Punkt P geht und zwei gegebene Kreise unter vorgegebenen Winkeln α_1 und α_2 schneidet (91)

19. Man konstruiere einen Kreis, der durch einen gegebenen Punkt P geht und eine gegebene Gerade a sowie einen gegebenen Kreis k berührt (88)

20. Gegeben sie ein Sehnenviereck ABCD. Man beweise den Satz von PTOLEMAIOS: AB.CD + AD.BC = AC.BD (F.G.-M 226)

21. Gegeben sei ein Kreis k und vier Punkte O_1, O_2, O_3, O_4. Man schreibe dem Kreis ein Viereck ABCD ein, dessen Seiten der Reiche nach durch O_1, O_2, O_3, O_4 gehen (71)

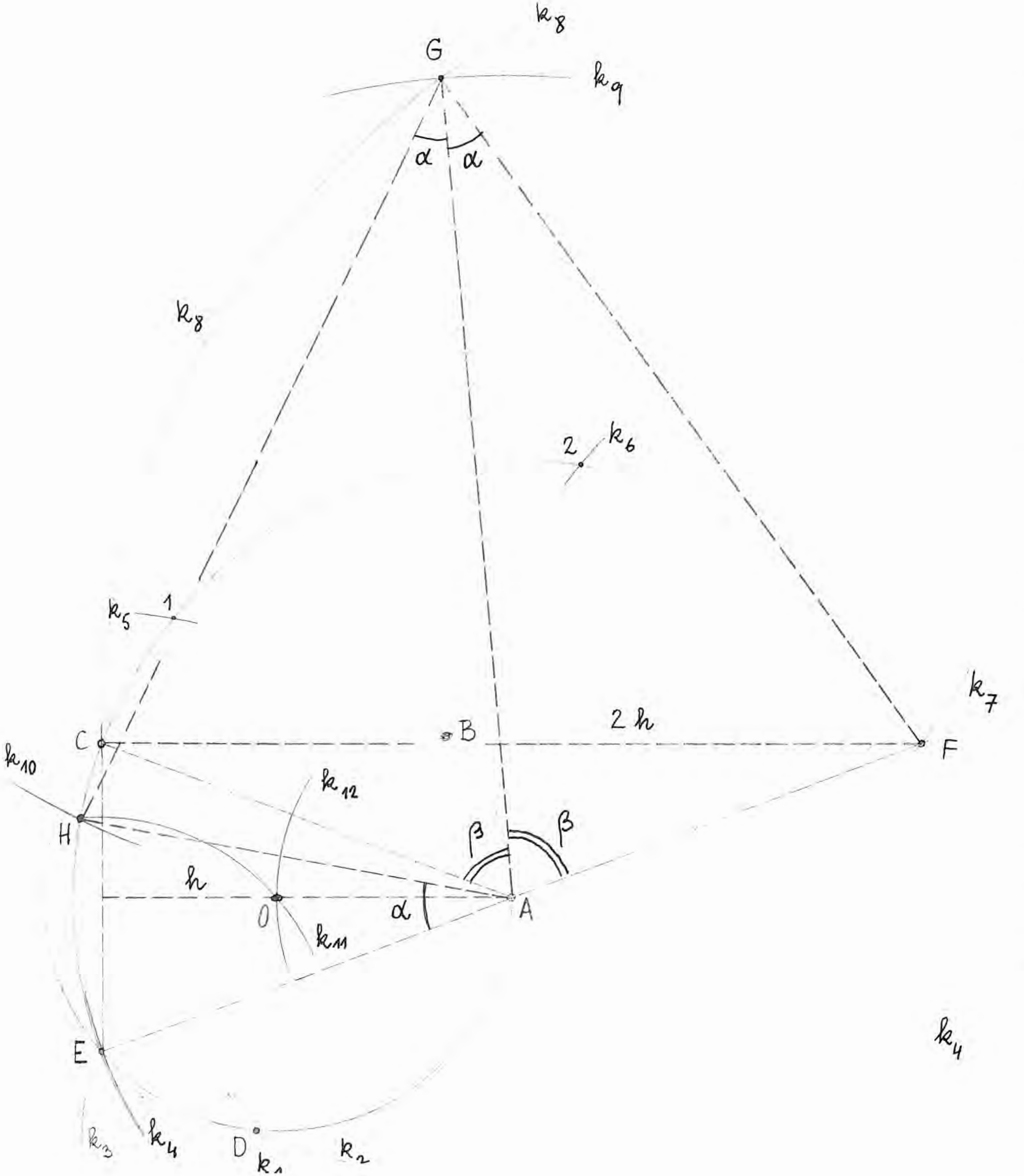
22. Gegeben sei ein Kreis und drei Punkte O_1, O_2, O_3. Man schreibe dem Kreis ein Dreieck ein, dessen Seiten der Reihe nach durch O_1, O_2, O_3 gehen (34)

23. Extremwertsaufgaben

a) Gegeben seien die beiden Schenkel eines Winkels mit dem Scheitela und in seinem Inneren ein Punkt Q. Man lege durch Q eine Gerade, sodaß das entstehende Dreieck Δ ABC minimalen Flächeninhalt hat.

b) Einem Dreieck Δ ABC schreibe man ein Paralleogramm #APQR maximalen Flächeninhalt s so ein, daß zwei Seiten AP und AR des Parallelogramms auf den Seiten c,d des Dreiecks liegen und der Eckpunkt Q auf der Dreiecksseite a zu liegen kommt. / b

c) Gegeben sei ein Winkel mit den Schenkeln b,c und dem Scheitel A. Ferner sei eine Kurve gegeben, die innerhalb des Winkels ihre konkave Seite dem Punkt A zuwendet. Gesuch ist ein dem Winkel eingeschriebenes Parallelogramm maximalen Flächeninhalts, von dem ein Eckpunkt auf der gegebenen Kurve liegt (F.G.-M, 351,360)



Angabe: $r = 4$, $AB = 3$, $BC = 6$ (O v.l. 6 cm, v.u. 5 cm)

Spiegelungen:

$k_1(A,BC)$, $k_2(B,AC)$,

$k_3(D,AB)$, $k_4(A,BD = AC)$ ...durchzeichnen!

Das ΔACE ist gleichschenkelig

Verdopplung der Strecke EA: $EF = 2EA$

$k_5(E,AC)$, $k_6(1,AC)$, $k_7((2,AC)$

$CE \perp CF$ (Thales), h sei die Höhe durch A im ΔACE

Dann gilt

$CF = 2h$ (1)

$k_8(F,FC)$, $k_9(A,FC) \Rightarrow \Delta GAF$ glsch.,

$k_{10}(G,FC) \Rightarrow \Delta GAH$ glsch.

Es istalso

$$\left.\begin{array}{l} FC=FG = AG = GH \\ AF = AC = AE \end{array}\right\} \quad (2)$$

Daher sind die gleichschenkeligen Dreiecke ΔGAF = ΔGAH kongruent (SSS-Satz). Wegen der Winkelsumme in diesen gleichschenkeligen Dreiecken $2\beta+\alpha =180$ ist

$\angle HAE = \alpha$.

Daher

$\Delta GAF \sim \Delta AEH \Rightarrow GF{:}AF = AE{:}EH \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$FC{:}AE = AE{:}EH \Rightarrow$

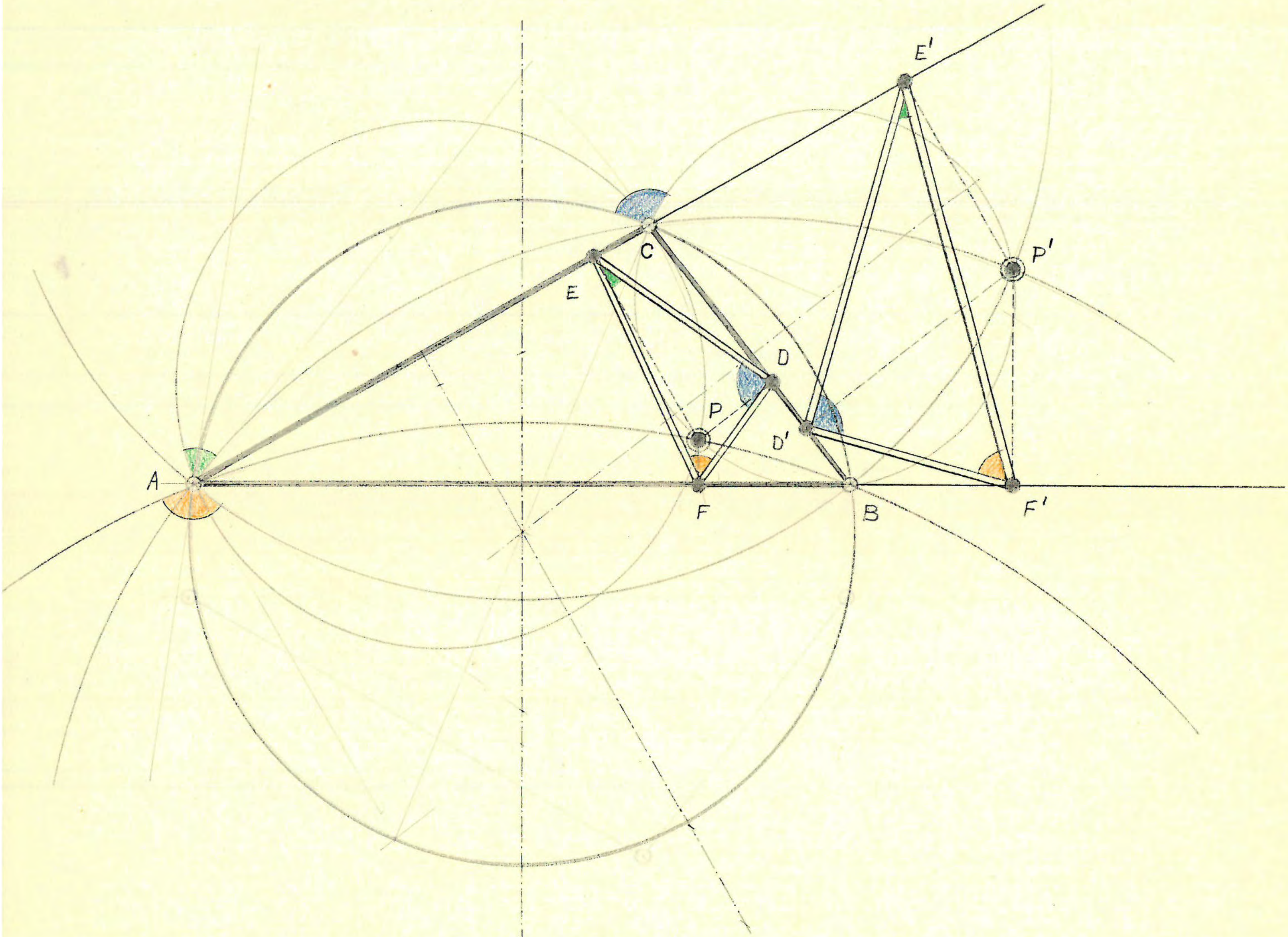
$2h{:}AE = AE{:}EH$

Daher ist $EH = r$ der Umkreisradius von ΔACE

$k_{11}(E,EH)$, $k_{12}(A,EH)$

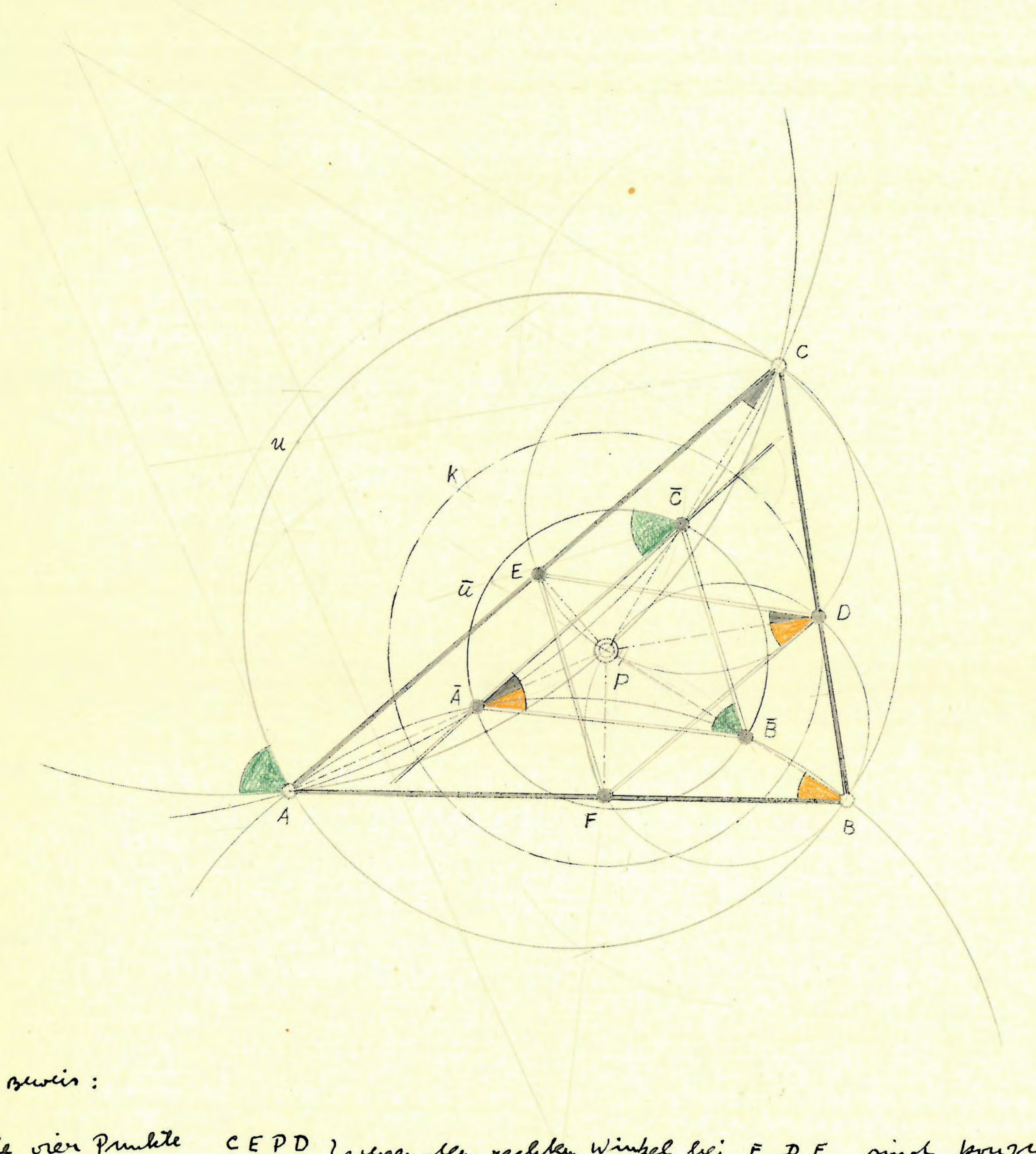
Man suche einen Punkt P, dessen Fußpunktsdreieck in bez. auf das geg. Dreieck ABC einem geg. Dreieck ähnlich ist.

$AB = 10\,cm$
$BC = 5\,cm$
$AC = 8\,cm$
$\sphericalangle EDF = 90^\circ$
$\sphericalangle DEF = 30^\circ$
$\sphericalangle EFD = 60^\circ$



Lösung: Siehe Hilfssatz.

Hilfssatz: Das Fußpunktsdreieck ΔDEF des Punktes P in bezug auf das Dreieck ΔABC ist ähnlich ~~in bezug~~ zum $\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, das gebildet wird von drei Punkten $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ die durch Inversion von A, B, C ~~aus dem Raum~~ mit P als Inversionszentrum hervorgehen.



Beweis:

Die vier Punkte $CEPD$ } wegen der rechten Winkel bei E, D, F sind konzyklisch
" $DPFB$

Ebenso sind konzyklisch die vier Punkte

$A\bar{A}\ C\bar{C}$ } weil zwei Punktepaare, die einander in einer Inversion
$A\bar{A}\ B\bar{B}$ } entsprechen immer konzyklisch sind.

Daher folgt aus Sätzen über Peripheriewinkel:

$\sphericalangle EDF = \sphericalangle EDP + \sphericalangle PDF =$

$= \sphericalangle ECP + \sphericalangle PBF =$

$= \sphericalangle AC\bar{C} + \sphericalangle \bar{B}BA =$ (nach dem Satz über gegenüberliegende Winkel im Sehnenviereck, angewendet auf die Punkte $C\bar{A}$ bzw $B\bar{A}$)

$= \sphericalangle \bar{C}\bar{A}P + \sphericalangle P\bar{A}\bar{B}$

$= \sphericalangle \bar{C}\bar{A}\bar{B}$

genau dieselben Schlüsse kann man für die anderen Winkel anstellen und findet demnach

$$\Delta DEF \sim \Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C} \quad \text{q.e.d}$$

Bei der Inversion mit dem Zentrum P geht der Umkreis von ABC in den Umkreis von $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ über. Der Kreis durch ACP geht (als Kreis durch das Inversionszentrum P) über in ~~die~~ Gerade $\bar{A}\bar{B}$. Wegen der Winkeltreue ist der Winkel zwischen den Kreisen ABC und APC (entgegengesetzt) gleich dem Winkel zwischen der Geraden $\bar{A}\bar{B}$ und dem Kreis $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Dieser Winkel ist aber (nach dem Sehnentangentensatz) dem ~~[illegible]~~ gl. Winkel $\sphericalangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Um daher P zu finden, hat man bloß drei Kreise zu schneiden, die den Umkreis von ΔABC unter vorgeg. Winkeln schneiden.

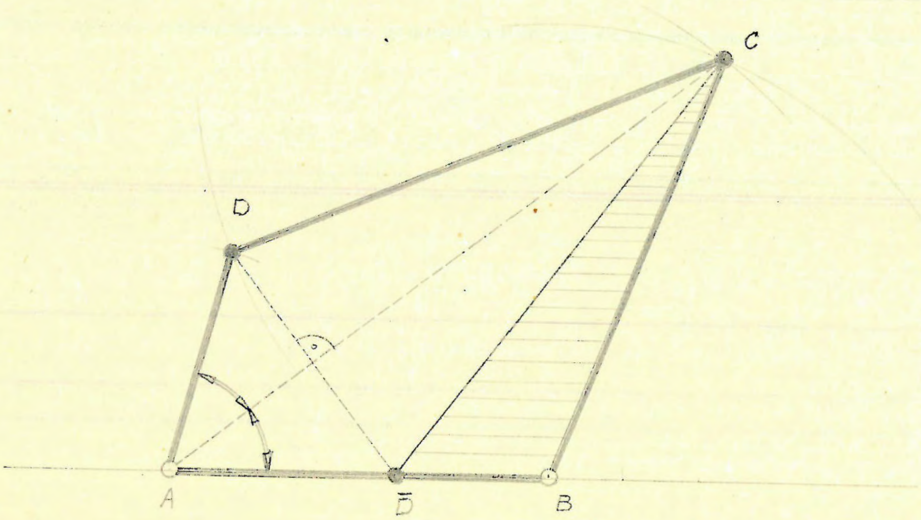
Konstruiere ein Viereck ABCD, von dem die vier Seiten gegeben sind und dessen Diagonale AC den Winkel α hälftet

$a = 5$ cm

$b = 6$ cm

$c = 7$ cm

$d = 3$ cm



spiegelt man D an AC, so kommt dessen Spiegelbild $\bar{D}$ auf AB zu liegen und es ist

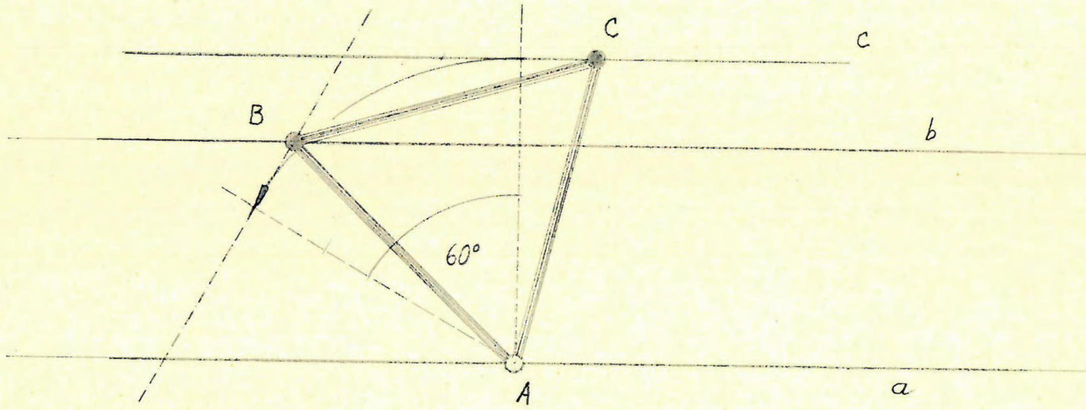
$$A\bar{D} = AD = d$$
$$C\bar{D} = CD = c$$
$$B\bar{D} = a - d$$

Man kann daher das Dreieck $BC\bar{D}$ konstruieren und findet, durch Rückspiegelung von $\bar{D}$ an AC den 4. Eckpunkt D.

Es ist ein gleichseitiges Dreieck so zu konstruieren, daß seine drei Ecken auf drei vorgegebene parallele Geraden a, b, c fallen (Petersen 349)

Dreht man die Seite AC um A um einen Winkel von 60 Graden, so muß C mit B zur Deckung gelangen. Nimmt man dabei die Gerade c mit, so muß die um A um 60° verdrehte Gerade c aus b den Punkt B ausschneiden.

A kann auf a bel. gewählt werden.



subtrahiert man die obere von der unteren Gleichung so ist wegen

$$\sphericalangle P(O,Q) = -\sphericalangle P(Q,O), \quad \sphericalangle \bar{P}(O\bar{Q}) = -\sphericalangle \bar{P}(\bar{Q}O)$$

$$\sphericalangle P(OR) + \sphericalangle P(QO) + \sphericalangle \bar{P}(\bar{Q}O) + \bar{P}(O\bar{R}) = 0$$

oder

$$\sphericalangle P(QR) + \sphericalangle \bar{P}(\bar{Q},\bar{R}) = 0$$

oder bei Vorzeichenwechsel

$$\sphericalangle P(RQ) + \sphericalangle \bar{P}(\bar{R}\bar{Q}) = 0$$

läßt man nun α gegen Null konvergieren, so bleibt diese Beziehung erhalten. Nur geht der Winkel der Sehnen gegen den Winkel der Tangenten. Das ist aber der Schnittwinkel der Kurven. Sodaß gilt

$$\sphericalangle P(kl) + \sphericalangle \bar{P}(\bar{k}\bar{l}) = 0 \quad \text{gegensinnige Winkelgleichheit.}$$

6. Algebraische Analyse

Man trachtet, aus den gegebenen Größen durch Anwendung geometrischer Sätze, Verwendung von Winkelfunktionen, Einsatz der Analytischen Geometrie für die gesuchten Größen (Strecken, Winkeln, Koordinaten) Ausdrücke zu erhalten, die man mit Zirkel und Lineal zu konstruieren trachtet.