

# **Sphärische und räumliche Kinematik**

**Wolfgang STRÖHER**



# I. Teil: Grundlagen

## Analytische Grundlagen

### 1 Grundzüge und Anwendungen der Vektorrechnung

#### 1.1 Vektoren

##### 1.1.1 Definition

Als *Vektor* bezeichnet man die Menge aller parallelen, gleich langen und gleich orientierten Strecken des Raumes. Ein Vektor  $\mathbf{a}^1$  wird demnach durch eine dieser Strecken repräsentiert.

Haben Anfangs- und Endpunkt dieses *Repräsentanten*  $\overrightarrow{P_1P_2}$  in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten  $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ , so wird der Vektor durch die Koordinatendifferenzen

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad \# 1.1$$

festgelegt. Die drei Zahlen  $a_1, a_2, a_3$  heißen *Koordinaten des Vektors*. Wir werden auch die den Vektor  $\mathbf{a}$  repräsentierende Strecke  $\overrightarrow{P_1P_2}$  (Fig. 1.1) mit  $\mathbf{a}$  bezeichnen. Figur 1.1, Figur 1.2

Hat der Repräsentant eines Vektors den Ursprung  $O$  des Koordinatensystems zum Anfangspunkt, so bezeichnen wir die Strecke  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$  als *Ortsvektor* (Fig. 1.2). Der Endpunkt  $A$  hat dann als kartesische Koordinaten die Koordinaten des Vektors  $\mathbf{a}$ .

##### 1.1.2 Summe von Vektoren

Unter der *Summe* oder *Resultierenden* zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  versteht man den Vektor (Fig. 1.3) Figur 1.3, Figur 1.4

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{Bmatrix} \quad \# 1.2$$

Die Vektorsumme ist *kommutativ* und *assoziativ* (Fig. 1.4)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad \# 1.3$$

##### 1.1.3 Nullvektor

Einen Vektor mit lauter verschwindenden Koordinaten bezeichnen wir als *Nullvektor*  $\mathbf{o}$ . Dann gilt für jeden beliebigen Vektor  $\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}$ . Ist  $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{o}$ , so setzen wir  $\mathbf{x} = -\mathbf{a}$  und nennen  $-\mathbf{a}$  den zu  $\mathbf{a}$  *entgegengesetzten Vektor*. Wir bezeichnen  $\mathbf{c} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$  als *Differenz* der beiden Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  (Fig. 1.5) Figur 1.5, Figur 1.6

<sup>1</sup> Einen Vektor bezeichnen wir i. a. durch kleine fette Arial-Buchstaben, spezielle Vektoren auch durch überstrichene griechische Kleinbuchstaben (z.B.  $\overline{\omega}, \overline{\beta}$ ).

### 1.1.4 Betrag eines Vektor

Als Betrag  $|\mathbf{a}|$  eines Vektors bezeichnen wir die Länge

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \geq 0 \quad \# 1.4$$

der ihn repräsentierenden Strecken, die wir auch mit dem der Benennung des Vektors entsprechenden lateinischen Kleinbuchstaben bezeichnen. Bei Bezeichnung von Vektoren mit griechischen Lettern bleibt der Querstrich weg (z.B.  $|\overline{\omega}| = \omega$ ).

### 1.1.5 Produkt eines Vektors mit einer reellen Zahl

Als Produkt des Vektors  $\mathbf{a}$  mit der reellen Zahl  $\lambda$  verstehen wir den Vektor (Fig. 1.6)

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} = \lambda \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{Bmatrix} \quad \# 1.5$$

Aus dieser Definition folgt

$$|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot a \quad \# 1.6$$

Ferner gelten die Regeln

$$\lambda \mathbf{a} = \mathbf{a} \lambda, \quad \mu(\lambda \mathbf{a}) = (\mu \lambda) \mathbf{a}, \quad (\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}, \quad \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} \quad \# 1.7$$

### 1.1.6 Normierung eines Vektors. Einheitsvektoren

Wählt man den Faktor  $\lambda$  so, daß  $|\lambda \mathbf{a}| = 1$  ist, so hat man den Vektor  $\mathbf{a}$  *normiert*. Ein normierter Vektor heißt auch *Einheitsvektor*. Wir bezeichnen ihn durch das Zeichen  $\mathbf{a}^\circ$ :

$$\mathbf{a}^\circ = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{a} \quad \# 1.8$$

oder durch den für Einheitsvektoren reservierten Buchstaben  $\mathbf{e}$ .

### 1.1.7 Kollineare Vektoren

Alle Vektoren der Form #1.5 bezeichnen wir als *kollinear*, da ihre Ortsvektoren dieselbe Trägergerade gemeinsam haben (Fig. 1.6). Kollinearen Vektoren schreiben wir dieselbe *Richtung* zu.

### 1.1.8 Komplanare Vektoren

Bilden wir mit Hilfe der nicht kollinearen Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  alle Vektoren  $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$ , so gehören die Ortsvektoren  $\mathbf{c}$  der von den Ortsvektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  aufgespannten Ebene durch O an (Fig. 1.7). Man nennt  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  daher *komplanar* und schreibt ihnen dieselbe *Stellung* zu. Man sagt auch,  $\mathbf{c}$  ist mit  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  *gleich gestellt*.

Der Nullvektor ist mit jedem Vektor kollinear bzw. mit zwei beliebigen Vektoren komplanar.

### 1.1.9 Lineare Abhängigkeit

$r$  Vektoren  $\mathbf{a}_i$  heißen *linear abhängig*, wenn man  $r$  reelle Zahlen  $\lambda_i$ , die nicht alle verschwinden, angeben kann, sodaß gilt

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_r \mathbf{a}_r = \mathbf{0}$$

# 1.9

Lassen sich solche  $\lambda_i$  nicht finden, so nennt man die gegebenen Vektoren *linear unabhängig*. Kollineare und komplanare Vektoren sind demnach immer linear abhängig.

**Satz 1.1.9.1:** *Im dreidimensionalen Raum sind vier und mehr Vektoren immer linear abhängig*

Der Satz ist richtig, wenn zwei der gegebenen Vektoren kollinear oder drei komplanar sind. Sind nämlich etwa  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  kollinear, so gilt  $\mathbf{a}_2 = \lambda_1 \mathbf{a}_1$  und man kann #1.9 in der Form  $\lambda_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 0 \cdot \mathbf{a}_3 + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{0}$  anschreiben. Ebenso verfährt man bei komplanaren Vektoren.

Es seien  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  vier Vektoren des dreidimensionalen Raumes, wobei  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  linear unabhängig vorausgesetzt werden. Der vierte Vektor  $\mathbf{d}$  sei mit keinem der gegebenen Vektoren kollinear und mit keinen zweien von ihnen komplanar. Wir repräsentieren die gegebenen Vektoren durch die Ortsvektoren  $\mathbf{a} = \vec{OA}, \mathbf{b} = \vec{OB}, \mathbf{c} = \vec{OC}, \mathbf{d} = \vec{OD}$  (Abb. 1.8). Die Parallele zu (OC) durch D schneidet die Ebene (OAB) in einem Punkt S und die Vektoren  $\vec{OC}$  und  $\vec{SD}$  sind kollinear.

Es gibt demnach eine reelle Zahl  $v$ , sodaß  $\vec{SD} = v\mathbf{c}$  ist. Zieht man durch S die Parallele zu  $\mathbf{b}$ , so wird sie die Gerade (OA) in einem Punkt  $S_1$  schneiden und es gibt Zahlen  $\lambda$  und  $\mu$ , für welche  $\vec{OS}_1 = \lambda\mathbf{a}$  und  $\vec{SS}_1 = \mu\mathbf{b}$  wird. Daraus und aus  $\vec{OD} = \vec{OS}_1 + \vec{S_1S} + \vec{SD}$  folgt die Behauptung:

$$\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + v\mathbf{c}$$

# 1.10

Die drei Zahlen  $\lambda, \mu, v$  nennen wir die (*affinen*) *Koordinaten* des Vektors  $\mathbf{d}$  in Bezug auf das von den drei Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  als *Basis* gebildete Dreibein. Die Vektoren  $\vec{OS}_1, \vec{S_1S}, \vec{SD}$  bezeichnen wir als die *Komponenten* des Vektors  $\mathbf{d}$  in bezug auf die Vektorbasis  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ .

**Figur 1.7, Figur 1.8**

### 1.1.10 Basis aus Einheitsvektoren

Es ist zweckmäßig, als Basisvektoren mit den Koordinatenachsen gleichorientierten Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

# 1.11

zu wählen (Fig. 1.9). Man spricht dann von einer *orthonormierten Basis*. Für die drei Komponenten  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  eines Vektors #1.1 in bezug auf dieses Dreibein gilt

$$\mathbf{a} = \sum \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{a}_i = a_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{a} = \sum a_i \mathbf{e}_i$$

# 1.12

Faßt man, wie in der Darstellenden Geometrie, die  $xy$ -,  $yz$ -,  $zx$ -Ebene als Grund-, Auf-, und Kreuzrißebene auf, dann nennt man die Vektoren

$\mathbf{a}' = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$  den *Grundriß*,  $\mathbf{a}'' = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$  den *Aufriß*,

$\mathbf{a}''' = \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1$  den *Kreuzriß* des Vektors  $\mathbf{a}$  (Fig. 1.10).

**Figur 1.9, Figur 1.10, Figur 1.11**

Zwei Vektoren  $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}'' + \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}'' + \mathbf{b}_1$  haben den Summenvektor

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}' + \mathbf{c}_3 = \mathbf{c}'' + \mathbf{c}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{a}' + \mathbf{b}') + (\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3) = (\mathbf{a}'' + \mathbf{b}'') + (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1)$$

**Satz 1.1.10.1:** *Bei der Addition von Vektoren addieren sich deren Auf- und Grundrisse (Fig. 1.11)*

Eine andere Methode, Vektorsummen auf graphischem Wege zu bilden, wird in Kapitel 5 dargestellt.

## 1.2 Vektorprodukte

### 1.2.1 Skalares (inneres) Produkt

$$\text{Dieses Produkt bildet das Vektorpaar } \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

auf die reelle Zahl

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \# 1.13$$

ab. Die geometrische Bedeutung des Skalarproduktes erhellt aus

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi = |\mathbf{a}| \cdot p_b = |\mathbf{b}| \cdot p_a \quad \# 1.14$$

**Figur 1.12** Hier ist (Fig. 1.12)  $\varphi$  der Winkel der Vektoren,  $p_a$  und  $p_b$  sind die Längen der Projektionen der Vektoren  $\mathbf{a}$  bzw.  $\mathbf{b}$  auf den jeweils anderen Vektor. Speziell gilt

**Satz 1.2.1.1 (Projektionssatz):** *Ist  $\mathbf{b} = \mathbf{e}$  ein Einheitsvektor, so stellt  $\mathbf{ae} = p_a$  die Länge der Projektion von  $\mathbf{a}$  auf die Richtung von  $\mathbf{e}$  dar.*

Das Skalarprodukt ist kommutativ und bezüglich der Vektoraddition distributiv:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc} \quad \# 1.15$$

Ferner gilt

$$(\lambda \mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{ab}) \quad \# 1.16$$

Auf Grund der Definitionen #1.4 und #1.13 ist

$$\mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^2, \quad |\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\mathbf{aa}} \quad \# 1.17$$

### 1.2.2 Winkel zweier Vektoren

Aus #1.14 folgt für den Winkel  $\varphi$  zweier Vektoren

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \mathbf{a}^\circ \mathbf{b}^\circ \quad \# 1.18$$

**Satz 1.2.2.1:** *Das skalare Produkt zweier Einheitsvektoren stellt den Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels dar.*

Speziell ist bei orthogonalen Vektoren

$$\mathbf{ab} = 0 \quad \# 1.19$$

<sup>2</sup> Der Punkt zwischen den Faktoren a.b des Skalarproduktes wird gelegentlich zur Erhöhung der Deutlichkeit gesetzt, i.a. aber weggelassen.

**Satz 1.2.2.2:** *Das Verschwinden des skalaren Produktes ist notwendig und hinreichend für die Orthogonalität zweier Vektoren<sup>3</sup>*

Für die Basisvektoren gilt

$$\mathbf{e}_i^2 = 1 \quad (i = 1,2,3), \quad \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = 0, \quad (j \neq k, \quad j,k = 1,2,3) \quad \# 1.20$$

Sind  $\alpha_i$  die Winkel, die ein Vektor  $\mathbf{a}$  mit den Koordinatenachsen einschließt, so nennen wir die Größen  $\cos \alpha_i = \frac{a_i}{a}$  seine *Richtungskosinus*. Die Koordinaten eines *Einheitsvektors* sind daher seine Richtungskosinus. Ein beliebiger Vektor von Betrag  $a$  läßt sich mit Hilfe eines gleichorientierten Einheitsvektors  $\mathbf{a}^\circ$  immer auf die Gestalt bringen

$$\mathbf{a} = a \mathbf{a}^\circ = a \begin{Bmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad \# 1.21$$

### 1.2.3 Vektoriell (äußeres) Produkt

Dieses Produkt ordnet dem geordneten Paar  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  zweier Vektoren einen dritten Vektor

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \# 1.22$$

mit folgenden Eigenschaften zu (Fig. 1.13)

1.  $\mathbf{c}$  steht auf  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  normal

2. Der Betrag von  $\mathbf{c}$  ist gleich dem Flächeninhalt des von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogrammes **Figur 1.13, Figur 1.14**

3. Die Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  bilden in dieser Reihenfolge die Schenkel eines Rechtsdreieines, weisen also in dieselbe Richtung wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand (*Rechte-Hand-Regel*)

Demzufolge ist das Vektorprodukt *alternierend*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad \# 1.23$$

und sein Betrag ist

$$c = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| h_a = |\mathbf{b}| h_b = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi \quad \# 1.24$$

(Bezeichnung siehe Fig. 1.14). Bei kollinearen Vektoren ist  $\varphi = 0$  bzw  $\varphi = \pi$ , daher gilt

**Satz 1.2.3.1:** *Das Verschwinden des vektoriellen Produktes zweier Vektoren ist notwendig und hinreichend für deren Kollinearität<sup>4</sup>*

Speziell gilt:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \# 1.25$$

Für die Vektorprodukte der Basiseinheitsvektoren  $\mathbf{e}_i$  gilt

<sup>3</sup> Dieser Satz erlangt uneingeschränkte Gültigkeit, wenn man den Nullvektor als orthogonal zu jedem anderen Vektor ansieht.

<sup>4</sup> Die Kollinearität des Nullvektors mit jedem anderen Vektor wurde bereits in Abschnitt 1.1.8 postuliert

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{0}, & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{0}, & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad \# 1.26$$

Das Vektorprodukt genügt der Regel

$$(\lambda \mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\mathbf{b}) \quad \# 1.27$$

und ist distributiv bezüglich der Vektoraddition

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b} \quad \# 1.28$$

Aus den Eigenschaften #1.26,27,28 folgert man für das Vektorprodukt zweier Vektoren

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad \# 1.29$$

Methoden zur konstruktiven Ermittlung des Vektorproduktes werden in den Kapiteln 4 und 5 dargelegt.

#### 1.2.4 Das gemischte Produkt (Spatprodukt, skalares Tripelprodukt) dreier Vektoren

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \# 1.30$$

stellt geometrisch das Volumen des von den Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  aufgespannten Parallelepipeds dar. Es ist positiv, wenn die drei Vektoren ein Rechtsdreiein bilden und ändert sein Vorzeichen bei Vertauschung zweier Vektoren

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) \quad \# 1.31$$

Es verschwindet, wenn zwei Vektoren kollinear oder alle drei komplanar sind

$$(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = 0 \quad \# 1.32$$

Ferner gelten die Regeln

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b} + \lambda \mathbf{a}, \mathbf{c}) &= (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & (\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) &= (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \end{aligned} \quad \# 1.33$$

Das Spatprodukt genügt dem wichtigen

**Satz 1.2.4.1 (Vertauschungssatz):** *Das Spatprodukt ändert sich nicht bei zyklischer Vertauschung seiner Faktoren:*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \# 1.34$$

Stellt man drei Vektoren  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  in der Basis  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  dar:

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{a} + \mu_1 \mathbf{b} + \nu_1 \mathbf{c}, \quad \mathbf{v} = \lambda_2 \mathbf{a} + \mu_2 \mathbf{b} + \nu_2 \mathbf{c}, \quad \mathbf{w} = \lambda_3 \mathbf{a} + \mu_3 \mathbf{b} + \nu_3 \mathbf{c} \quad \# 1.35$$

so ist

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad \# 1.36$$

**1.2.5 Entwicklungssatz von GRASSMANN (Vektorielltes Tripelprodukt)<sup>5</sup>**

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad \# 1.37$$

Das Vektorprodukt ist also *nicht assoziativ*.

**1.2.6 Die Identität von JACOBI (Vektorielltes Quadrupelprodukt)<sup>6</sup>**

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad \# 1.38$$

Die Identität von JACOBI ersetzt das assoziative Gesetz der Vektormultiplikation.

**1.2.7 Die Identität von LAGRANGE (Skalares Quadrupelprodukt)<sup>7</sup>**

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad \# 1.39$$

Speziell gilt

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \quad \# 1.40$$

**1.2.8 Das vektorielle Quadrupelprodukt**

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad \# 1.41$$

Hieraus ergibt sich für  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$  in

$$\mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + \mathbf{b}(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}) + \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) \quad \# 1.42$$

eine Darstellung des Vektors  $\mathbf{d}$  im Dreibein  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  (Fig. 1.8). Ersetzt man in #1.42 die Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  durch  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , so erhält man die Darstellung

$$\mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \quad \# 1.43$$

**1.2.9 Das skalare Sechserprodukt**

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{w} \cdot \mathbf{c} \end{vmatrix} \quad \# 1.44$$

---

<sup>5</sup> Hermann GRASSMANN 1809-1877

<sup>6</sup> Carl Gustav JACOBI 1804-1851

<sup>7</sup> Joseph Louis LAGRANGE 1736-1813

**1.2.10 Differentiation (Ableitung) von Vektoren**

Sind die Koordinaten eines Vektors  $\mathbf{a}(t) = \begin{Bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{Bmatrix}$  Funktionen einer Variablen  $t$ , so bezeichnet

man als Ableitung dieses Vektors nach  $t$  den Vektor  $\dot{\mathbf{a}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_2(t) \\ \dot{a}_3(t) \end{Bmatrix}$ . Man erkennt leicht, daß

folgende Regeln gelten<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \pm \mathbf{b})' &= \dot{\mathbf{a}} \pm \dot{\mathbf{b}}, & (\mathbf{a}b)' &= \dot{\mathbf{a}}b + \mathbf{a}\dot{b}, & (\mathbf{a} \times \mathbf{b})' &= \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{b}} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})' &= (\dot{\mathbf{a}}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{c}}) \end{aligned} \quad \# 1.45$$

$$|\mathbf{a}|' = (\sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}})' = \frac{\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{a}}}{\sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|} \quad \# 1.46$$

Bei einem Einheitsvektor ( $\mathbf{a}^\circ \cdot \mathbf{a}^\circ = 1$ ) gilt

$$\mathbf{a}^\circ \cdot \dot{\mathbf{a}} = 0, \quad |\dot{\mathbf{a}}|^2 + \mathbf{a}^\circ \cdot \ddot{\mathbf{a}} = 0 \quad (|\mathbf{a}^\circ|^2 = 1) \quad \# 1.47$$

Ein Einheitsvektor steht also auf seine erste Ableitung normal.

**1.3 Anwendung der Vektorrechnung auf die Grundelemente des Raumes**

**1.3.1 Darstellung des Punktes**

Wir legen den Punkt  $X(x,y,z)$  durch den Ortsvektor  $\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$  fest. Wir drücken dies durch die

Schreibweise  $X(\mathbf{x})$  aus. Noch kürzer sprechen wir vom Punkt  $\mathbf{x}$ .

**1.3.2 Parameterdarstellung einer Geraden.**

**Figur 1.15** Sind zwei Punkte A,B einer Geraden durch ihre Ortsvektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  gegeben (Fig. 1.15), dann ist  $\mathbf{g} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$  ein *Richtungsvektor* der Geraden. Der Ortsvektor  $\mathbf{x}$  eines beliebigen Punktes X der Geraden ergibt sich dann mit Hilfe des reellen Parameters  $\mu$  durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mu \mathbf{g} \quad \# 1.48$$

Ersetzt man  $\mathbf{g}$  durch die gegebenen Vektoren, so findet man

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \quad \lambda + \mu = 1 \quad \# 1.49$$

In #1.49 sind alle Vektoren Ortsvektoren

<sup>8</sup> Befindet sich der Ableitungspunkt rechts oben von einem Klammerausdruck, so bezieht er sich auf den gesamten eingeklammerten Ausdruck

### 1.3.3 Parameterdarstellung der Ebene.

Ist eine Ebene durch drei Punkte  $\mathbf{A}(\mathbf{a}), \mathbf{B}(\mathbf{b}), \mathbf{C}(\mathbf{c})$  gegeben (Fig. 1.16), so erhält man den Ortsvektor  $\mathbf{x}$  eines ihrer Punkte durch

**Figur 1.16, Figur 1.17**

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \nu(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \quad \# 1.50$$

oder

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}, \quad \lambda + \mu + \nu = 1 \quad \# 1.51$$

### 1.3.4 Homogene Ebenenkoordinaten

Man kann eine Ebene durch einen ihrer Punkte  $\mathbf{A}(\mathbf{a})$  und einen Normalenvektor  $\mathbf{n}$  festlegen (Fig. 1.17). Für jeden Punkt  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  der Ebene verschwindet dann wegen der Orthogonalität von  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{x} - \mathbf{a}$  das Skalarprodukt  $\mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$ . Setzt man

$$\mathbf{n}\mathbf{a} = d \quad \# 1.52$$

so erfüllen alle Punkte  $\mathbf{x}$  der Ebene die Bedingung

$$\mathbf{n}\mathbf{x} = d \quad \# 1.53$$

Ersetzt man den Normalenvektor  $\mathbf{n}$  der Ebene durch einen kollinearen Vektor  $\lambda\mathbf{n}$ , so wird wegen #1.52 auch die skalare Größe  $d$  mit demselben Faktor  $\lambda$  multipliziert. Wir bezeichnen

$$\lambda\mathbf{n}, \quad \lambda d, \quad (\lambda \neq 0) \quad \# 1.54$$

als die *homogenen Koordinaten einer Ebene*. Den Skalarfaktor  $\lambda$  werden wir i.a. nicht in Evidenz setzen.

Die Beziehung #1.53 ist die *Inzidenzbedingung* des Punktes  $\mathbf{x}$  und der Ebene  $\varepsilon(\mathbf{n}, d)$

### 1.3.5 Stäbe

Als *Stab* bezeichnet man nach H. GRASSMANN alle gleich langen und gleich orientierten Strecken *derselben Trägergeraden*. Ein Stab ist festgelegt durch Angabe des Stabvektors  $\mathbf{s}$  und eines beliebigen Punktes  $\mathbf{a}$  seiner Trägergeraden  $\mathfrak{g}$  (Fig. 1.18). Man bezeichnet den Vektor

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{a} \times \mathbf{s} \quad \# 1.55$$

als *Moment des Stabes* um den Ursprung  $O$ . Wegen ihrer Orthogonalität genügen die Vektoren  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{s}^*$  der Bedingung

$$\mathbf{s}\mathbf{s}^* = 0 \quad \# 1.56$$

Der Momentenvektor  $\mathbf{s}^*$  ist von der speziellen Wahl des Punktes  $\mathbf{a}$  auf der Trägergeraden unabhängig. Wählt man nämlich einen anderen Punkt #1.48 der Trägergeraden, so ist

$$\mathbf{x} \times \mathbf{s} = (\mathbf{a} + \mu\mathbf{s}) \times \mathbf{s} = \mathbf{a} \times \mathbf{s} = \mathbf{s}^* \quad \# 1.57$$

Die Beziehung

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{s} \quad \# 1.58$$

stellt die *Inzidenzbedingung* des Punktes  $\mathbf{x}$  und des Stabes  $(\mathbf{s}, \mathbf{s}^*)$  dar.  $\mathbf{s}^*$  ist der Normalenvektor der Ebene  $\varepsilon$ , welche die Trägergerade  $\mathfrak{g}$  mit dem Ursprung verbindet und ist so orientiert, daß  $\mathbf{s}$  im positiven Sinne (dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt) zu drehen trachtet, wenn man von der Spitze von  $\mathbf{s}^*$  auf  $\varepsilon$  herabblickt.

**Figur 1.18, Figur 1.19**

Der Betrag von  $\mathbf{s}^*$  ist

$$|\mathbf{s}^*| = |\mathbf{s}| \cdot l \quad \# 1.59$$

worin  $l$  den Abstand der Trägergeraden vom Ursprung bedeutet. Durch Angabe eines geordneten Paares von orthogonalen Vektoren  $\mathbf{s}, \mathbf{s}^*$  ist ein Stab eindeutig bestimmt.  $\mathbf{s}^*$  legt seine Verbindungsebene mit  $O$  fest, #1.59 den Abstand  $l$  der Trägergeraden von  $O$ . Die noch mögliche Zweideutigkeit wird durch die Orientierung von  $\mathbf{s}^*$  behoben, welche den Drehsinn von  $\mathbf{s}$  um  $O$  festlegt. Man bezeichnet daher  $(\mathbf{s}, \mathbf{s}^*)$  als *Koordinaten des Stabes*

### 1.3.6 Moment eines Stabes um einen Punkt

Als Moment eines Stabes um einen beliebigen Punkt  $\mathbf{x}$  bezeichnet man (Fig. 1.19) den Vektor

$$\mathbf{m} = (\mathbf{a} - \mathbf{x}) \times \mathbf{s} = \mathbf{a} \times \mathbf{s} - \mathbf{x} \times \mathbf{s} = \mathbf{a}^* + \mathbf{s} \times \mathbf{x} \quad \# 1.60$$

Für den Betrag des Momentes  $\mathbf{m}$  gilt

$$|\mathbf{m}| = r |\mathbf{s}| \quad \# 1.61$$

wobei  $r$  den Abstand des Punktes  $\mathbf{x}$  vom Stabträger bedeutet.  $\mathbf{m}$  verschwindet also für alle Punkte des Stabes.

Man erkennt leicht die Richtigkeit von

**Satz 1.3.6.1:** *Ein Stab hat bezüglich aller Punkte  $\mathbf{x}$  einer zu seinem Träger parallelen Geraden  $\mathbf{x}$  dasselbe Moment (Fig. 1.19)*

Die konstruktive Ermittlung des Momentes eines Stabes bezüglich eines Punktes wird in den Kapiteln 4 und 5 behandelt.

### 1.3.7 Geradenkoordinaten

Ist eine Raumgerade  $\mathbf{g}$  gegeben, so kann man sie durch Hinzufügen eines mit ihr gleichgerichteten Vektors  $\mathbf{g}$  zu einem Stab ergänzen und diesen dann durch seine Koordinaten  $(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$  festlegen, wobei

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{g} \quad \# 1.62$$

mit Hilfe eines beliebigen Punktes  $\mathbf{x}$  der Trägergeraden berechnet wird. Ersetzt man den Vektor  $\mathbf{g}$  durch einen kollinearen  $\mathbf{g}_1 = \lambda \mathbf{g}$ , so folgt aus #1.62:  $\mathbf{g}_1^* = \lambda \mathbf{g}^*$ . Die Stäbe  $(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$  und  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1^*)$  haben dieselbe Trägergerade. Die bis auf einen Skalarfaktor  $\lambda \neq 0$  festgelegten Vektoren

$$\lambda \mathbf{g}, \lambda \mathbf{g}^* \quad \lambda \neq 0 \quad \# 1.63$$

welche der Bedingung

$$\mathbf{g} \mathbf{g}^* = 0 \quad \# 1.64$$

genügen, stellen also *homogene Koordinaten* einer Geraden dar. Man nennt  $(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$  die *PLÜCKER-Vektoren* der Geraden  $\mathbf{g}$ , #1.64 die *PLÜCKER-Bedingung*<sup>9</sup>,  $\mathbf{g}$  heißt *Richtungsvektor*,  $\mathbf{g}^*$  *Momentenvektor* der Geraden.

<sup>9</sup> Julius PLÜCKER 1801-1868

### 1.3.8 Speerkoordinaten

Den Richtungsvektor einer Geraden kann man auf zwei Arten als Einheitsvektor  $\mathbf{g}^\circ$  wählen. Auf diese Weise wird eine der beiden Orientierungen der Geraden festgelegt. Da man eine orientierte Gerade nach Eduard STUDY<sup>10</sup>) als *Speer* bezeichnet, werden die Vektoren

$$\mathbf{g}^\circ, \mathbf{g}^+ \quad \mathbf{g}^\circ \mathbf{g}^+ = 0 \quad \# 1.65$$

*Speerkoordinaten* genannt. Sie sind *inhomogen* und stellen spezielle Stäbe dar.

### 1.3.9 Ferngerade

Um eine *Ferngerade* darzustellen, lassen wir eine zunächst im endlichen verlaufende Gerade in ihrer Verbindungsebene mit dem Ursprung ins Unendliche rücken. Soll dabei der Betrag des Momentenvektors  $\mathbf{g}^*$  konstant bleiben, so muß der Betrag des Richtungsvektors  $\mathbf{g}$  mit zunehmender Entfernung vom Ursprung abnehmen. Wir werden daher

$$\mathbf{g} = 0, \quad \mathbf{g}^* = \text{const.} \quad \# 1.66$$

als PLÜCKER-Vektoren der Ferngeraden der zu  $\mathbf{g}^*$  normalen Ebenenstellung ansehen.

## 1.4 Die Grundaufgaben der Geometrie des Raumes in vektorieller Behandlung

### 1.4.1 Elemente der Raumgeometrie

Wir werden im folgenden *Punkte* durch ihre Ortsvektoren  $\mathbf{x}$ , *Gerade* durch ihre *homogenen PLÜCKER-Vektoren* ( $\lambda \mathbf{g}, \lambda \mathbf{g}^*$ ;  $\mathbf{g} \mathbf{g}^* = 0$ ) und *Ebenen* durch die *homogenen Ebenenkoordinaten* ( $\lambda \mathbf{n}, \lambda \mathbf{d}$ ) festlegen, wobei wir bei homogenen Koordinaten den Figur 1.20 homogenisierenden Faktor  $\lambda \neq 0$  nicht in Evidenz setzen. In den Formeln #1.53 und #1.62 wurden bereits die Bedingungen für die Inzidenz von Punkt und Ebene und die Inzidenz von Punkt und Gerade angegeben.

Um Punkte der Geraden  $\mathbf{g}(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$  zu finden, beachte man (Fig. 1.20), daß  $\mathbf{g} \times \mathbf{g}^*$  die Richtung des Lotes aus dem Ursprung O auf die Gerade  $\mathbf{g}$  hat. Der Ortsvektor  $\mathbf{f}$  bis zum Fußpunkt F dieses Lotes ist mit dem genannten Vektor kollinear:  $\mathbf{f} = \lambda(\mathbf{g} \times \mathbf{g}^*)$ .  $\mathbf{f}$  muß die Inzidenzbedingung #1.62 erfüllen. Anwendung des Entwicklungssatzes #37 und Beachtung der PLÜCKER-Bedingung ergibt

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{f} \times \mathbf{g} = \lambda(\mathbf{g} \times \mathbf{g}^*) \times \mathbf{g} = \lambda |\mathbf{g}|^2 \mathbf{g}^* - \lambda(\mathbf{g} \mathbf{g}^*) \mathbf{g} = \lambda |\mathbf{g}|^2 \mathbf{g}^* \quad \# 1.67$$

Daher ist  $\lambda = \frac{1}{|\mathbf{g}|^2}$ , und

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{g}^*}{|\mathbf{g}|^2} \quad \# 1.68$$

stellt den Ortsvektor des Lotfußpunktes aus O auf die Gerade dar. Somit ist

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{g}^*}{|\mathbf{g}|^2} + \mu \mathbf{g} \quad \# 1.69$$

eine *Parameterdarstellung der Geraden*

<sup>10</sup>Eduard STUDY 1862-1930

### 1.4.2 Lotfußpunkt auf eine Ebene

Der Ortsvektor  $\mathbf{f} = \lambda \mathbf{n}$  des Lotfußpunktes aus O auf die Ebene  $\varepsilon(\mathbf{n}, d)$  muß die Inzidenzbedingung #1.53 erfüllen. Aus  $\mathbf{n}\mathbf{f} = \lambda |\mathbf{n}|^2 = d$ ,  $\lambda = \frac{d}{|\mathbf{n}|^2}$  ergibt sich daher

$$\mathbf{f} = \frac{d}{|\mathbf{n}|^2} \cdot \mathbf{n} \quad \# 1.70$$

### 1.4.3 Gerade durch zwei Punkte.

Ist eine Gerade durch die Ortsvektoren  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  zweier ihrer Punkte festgelegt, so kann man

$$\mathbf{g} = \mathbf{y} - \mathbf{x} \quad \# 1.71$$

als Richtungsvektor wählen. Für den Momentenvektor ergibt sich dann

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{g} = \mathbf{x} \times (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} \quad \# 1.72$$

### 1.4.4 Schnittpunkt Gerade-Ebene

Der Schnittpunkt einer Geraden  $g(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$  mit einer Ebene  $\varepsilon(\mathbf{n}, d)$  muß die beiden Inzidenzbedingungen #1.53 und #1.62 erfüllen

$$\mathbf{n}\mathbf{x} = d, \quad \mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{g} \quad \# 1.73$$

Vektorielle Multiplikation der zweiten Gleichung von rechts mit  $\mathbf{n}$  ergibt

$$\mathbf{g}^* \times \mathbf{n} = (\mathbf{x} \times \mathbf{g}) \times \mathbf{n} = \mathbf{g}(\mathbf{n}\mathbf{x}) - \mathbf{x}(\mathbf{n}\mathbf{g}) = d\mathbf{g} - \mathbf{x}(\mathbf{n}\mathbf{g}) \quad \# 1.74$$

Hieraus findet man den Ortsvektor des Schnittpunktes

$$\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{g} + \mathbf{n} \times \mathbf{g}^*}{\mathbf{n}\mathbf{g}} \quad \# 1.75$$

### 1.4.5 Inzidenz Gerade-Ebene

Liegt eine Gerade  $g(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$  zur Gänze in einer Ebene  $\varepsilon(\mathbf{n}, d)$ , so wird der Schnittpunkt unbestimmt. Es tritt dies, wie aus #1.74 folgt, für  $\mathbf{n}\mathbf{g} = 0$  ein. Aus #1.74 ergibt sich dann die *Inzidenzbedingung*

$$\mathbf{g}^* \times \mathbf{n} = d\mathbf{g}, \quad \mathbf{n}\mathbf{g} = 0 \quad \# 1.76$$

### 1.4.6 Verbindungsebene Punkt-Gerade

Sind ein Punkt  $A(\mathbf{a})$  und eine Gerade  $g(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$  gegeben, so muß die dadurch festgelegte Ebene den Inzidenzbedingungen #1.53 und #1.76 genügen:  $\mathbf{n}\mathbf{a} = d$ ,  $\mathbf{g}^* \times \mathbf{n} = d\mathbf{g}$ . Vektormultiplikation der zweiten Gleichung von rechts mit  $\mathbf{a}$  ergibt

$$(\mathbf{g}^* \times \mathbf{n}) \times \mathbf{a} = \mathbf{n}(\mathbf{a}\mathbf{g}^*) - \mathbf{g}^*(\mathbf{n}\mathbf{a}) = \mathbf{n}(\mathbf{a}\mathbf{g}^*) - d\mathbf{g}^* = d(\mathbf{g} \times \mathbf{a}) \quad \# 1.77$$

Die daraus folgende Beziehung

$$\mathbf{n}(\mathbf{a}\mathbf{g}^*) = d(\mathbf{g}^* + \mathbf{g} \times \mathbf{a}) \quad \# 1.78$$

wird wegen der Homogenität der Ebenenkoordinaten von

$$\mathbf{n} = \mathbf{g}^* + \mathbf{g} \times \mathbf{a}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{a} \mathbf{g}^* \quad \# 1.79$$

erfüllt. Diese Ausdrücke sind daher die *Koordinaten der Verbindungsebene*  $\varepsilon$  von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{g}$

#### 1.4.7 Schnittgerade zweier Ebenen

Sind zwei Ebenen  $\varepsilon_1(\mathbf{n}_1, \mathbf{d}_1)$  und  $\varepsilon_2(\mathbf{n}_2, \mathbf{d}_2)$  gegeben, so muß deren Schnittgerade  $\mathbf{g}(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$  die Inzidenz bedingung #1.76 für beide Ebenen erfüllen

$$\mathbf{g}^* \times \mathbf{n}_1 = \mathbf{d}_1 \mathbf{g}, \quad \mathbf{g}^* \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{d}_2 \mathbf{g} \quad \# 1.80$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit  $\mathbf{d}_2$ , die zweite mit  $\mathbf{d}_1$  und bildet die Differenz, so ergibt sich  $\mathbf{g}^* \times (\mathbf{d}_2 \mathbf{n}_1 - \mathbf{d}_1 \mathbf{n}_2) = \mathbf{o}$ . Wegen des Verschwindens ihres Vektorproduktes sind diese beiden Vektoren kollinear und wegen der Homogenität der PLÜCKER-Vektoren kann man sie identifizieren. Einsetzen in #1.80 ergibt mit

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{d}_2 \mathbf{n}_1 - \mathbf{d}_1 \mathbf{n}_2, \quad \mathbf{g} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \quad \# 1.81$$

die PLÜCKER-Vektoren der *Schnittgeraden* der beiden Ebenen

#### 1.4.8 Schnittbedingung zweier Geraden

Haben zwei Raumgerade  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*), (\mathbf{b}, \mathbf{b}^*)$  einen Schnittpunkt  $\mathbf{x}$ , so muß dieser die Inzidenzbedingung #1.62 für beide Geraden erfüllen:

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{b} \quad \# 1.82$$

Skalare Multiplikation der ersten Gleichung mit  $\mathbf{b}$ , der zweite mit  $\mathbf{a}$  ergibt

$$\mathbf{a}^* \mathbf{b} = (\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad \mathbf{b}^* \mathbf{a} = (\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) \quad \# 1.83$$

Addition beider Gleichungen liefert wegen #1.31 die *Schnittbedingung zweier Geraden*<sup>11</sup>

$$\mathbf{a} \mathbf{b}^* + \mathbf{a}^* \mathbf{b} = 0 \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o}) \quad \# 1.84$$

#### 1.4.9 Schnittpunkt schneidender Geraden

Den Ortsvektor  $\mathbf{x}$  des *Schnittpunktes schneidender Geraden*  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*), (\mathbf{b}, \mathbf{b}^*)$  setzen wir als Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  an. Dann folgt aus #1.42

$$\mathbf{x}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{x}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}) \quad \# 1.85$$

Mit Hilfe des Vertauschungssatzes #1.34 und Beachtung der Inzidenzbedingungen #1.82 ergibt sich

$$\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}^*) \mathbf{a} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}^*) \mathbf{b} + (\mathbf{a}^* \mathbf{b})(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2} \quad \# 1.86$$

Da die Schnittbedingung #1.84 erfüllt sein muß, könnte man in obiger Formel auch  $\mathbf{a}^* \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}) = -\mathbf{a} \mathbf{b}^*$  setzen.

<sup>11</sup> Der erste Teil der Formel #1.84 ist genau genommen eine notwendige und hinreichende Bedingung für die *komplanare Lage* zweier Geraden. Die dieser Bedingung genügenden Geraden können auch parallel sein. Damit ein echter Schnittpunkt auftritt, muß auch die zweite Bedingung #1.84 erfüllt sein, daß nämlich das Vektorprodukt der Richtungsvektoren der gegebenen Geraden nicht verschwindet

### 1.4.10 Winkel zweier Geraden

Der *Winkel zweier Geraden* kann durch den Kosinus der Winkel ihrer Richtungsvektoren gemäß #1.18 festgelegt werden:  $\cos \varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$ . Da sich das Vorzeichen der rechten Seite ändert,

wenn man einen der beiden Richtungsvektoren umorientiert, erhielte man als Winkel zweier Geraden entweder den von ihnen eingeschlossenen spitzen Winkel  $\varphi$  oder dessen stumpfen Nebenwinkel  $\pi - \varphi$ . Ebenso könnte man nach #1.24 mit Hilfe des Vektorproduktes den Sinus der Richtungsvektoren zu Bestimmung des Winkels der Geraden heranziehen. Auch hier liefert  $\sin \varphi = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$  ein zweideutiges Resultat.

Üblicherweise versteht man unter dem Winkel zweier Geraden den von ihnen eingeschlossenen *spitzen Winkel*.

**Figur 1.21** Um immer den spitzen Winkel zu erhalten (sofern  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  nicht orthogonal sind), kann man den Winkel zwischen den Geraden definieren als den Winkel des Richtungsvektors  $\mathbf{a}$  der einen Geraden mit seiner Normalprojektion auf die andere Gerade. Sei  $\mathbf{a}'$  die Normalprojektion von  $\mathbf{a}$ , so gilt (Fig. 1.21).

$$\mathbf{a}' = \lambda \mathbf{b}, \quad (\mathbf{a} - \mathbf{a}') \perp \mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{a} - \lambda \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \mathbf{ab} - \lambda |\mathbf{b}|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|^2} \Rightarrow \mathbf{a}' = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|^2} \cdot \mathbf{b}, \quad |\mathbf{a}'| = \frac{|\mathbf{ab}|}{|\mathbf{b}|^2} \cdot |\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{ab}|}{|\mathbf{b}|}$$

daher

$$\cos(\varphi) = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}')}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}'|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \cdot \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{ab}|} \cdot \frac{(\mathbf{ab})}{|\mathbf{b}|^2} (\mathbf{ab}) = \frac{|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{ab}|^2}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|^2 \cdot |\mathbf{ab}|} = \frac{|\mathbf{ab}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

Zur Berechnung des Winkels zweier Geraden kann daher nach Bedarf einer der folgenden Ausdrücke herangezogen werden

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}, \quad \sin \varphi = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}, \quad \tan \varphi = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{\mathbf{ab}} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \# 1.87$$

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{ab}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}, \quad \tan \varphi = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{ab}|} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

### 1.4.11 Abstand windschiefer Geraden

**Figur 1.22** Der *Abstand zweier windschiefer Geraden*  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  wird auf dem beide Geraden orthogonal treffenden *Gemeinlot* gemessen. (Fig. 1.22). Die Richtung des Gemeinlotes ist durch den Einheitsvektor

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{ab}} \cdot \cot \varphi \quad \# 1.88$$

festgelegt. Die Länge  $\hat{\varphi}$  des Gemeinlotes ergibt sich, wenn man eine von zwei beliebigen, auf  $\mathbf{a}$  bzw.  $\mathbf{b}$  liegenden Punkten gebildete Strecke auf das Gemeinlot #1.88 projiziert. Nach dem Projektionssatz 1.2.2.1 ist daher

$$\hat{\varphi} = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^\circ = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{y}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - \mathbf{x}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \quad \# 1.89$$

Wenden wir den Vertauschungssatz an und beachten die Inzidenzbedingung #1.62, so ergibt sich weiter

$$\hat{\phi} = \frac{-\mathbf{a}(\mathbf{y} \times \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{x} \times \mathbf{a})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi} = -\frac{\mathbf{a}\mathbf{b}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi} = -\frac{\mathbf{a}\mathbf{b}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b}}{\mathbf{a}\mathbf{b}} \cdot \cot \varphi \quad \# 1.90$$

als Ausdruck für den Abstand  $\hat{\phi}$  der beiden Geraden.

### 1.4.12 Gemeinlot zweier Geraden

Das Gemeinlot  $n(\mathbf{n}, \mathbf{n}^*)$  zweier Geraden  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  hat den Richtungsvektor

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \# 1.91$$

$\mathbf{n}, \mathbf{n}^*$  müssen außer der PLÜCKER-Bedingung #1.64 noch die Schnittbedingungen #1.84 mit den beiden Geraden  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  erfüllen

$$\mathbf{n}\mathbf{n}^* = 0, \quad \mathbf{a}\mathbf{n}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{b}\mathbf{n}^* + \mathbf{b}^*\mathbf{n} = 0 \quad \# 1.92$$

Setzt man  $\mathbf{n}^*$  als Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{n}, \mathbf{n} \times \mathbf{a}$  an, so erhält man nach #1.43 bei Beachtung von #1.92

$$\mathbf{n}^* = \frac{(\mathbf{n}\mathbf{a}^*)(\mathbf{n} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{n}\mathbf{b}^*)(\mathbf{n} \times \mathbf{a})}{|\mathbf{n}|^2} \quad \# 1.93$$

Eine andere Darstellung des Gemeinlotes zweier Geraden findet man in Kap.3.3

### 1.4.13 Abstand Punkt-Gerade

Um den *Abstand eines Punktes  $\mathbf{x}$  von einer Geraden* zu berechnen, ermitteln wir zunächst das Moment  $\mathbf{m}$  des die Gerade repräsentierenden Stabes  $\mathbf{g}, \mathbf{g}^*$  um  $\mathbf{x}$ . Nach #1.60 ist

$$\mathbf{m} = \mathbf{g}^* + \mathbf{g} \times \mathbf{x} \quad \# 1.94$$

Da der Betrag des Momentes gleich dem Produkt des Betrages von  $\mathbf{g}$  und der Länge  $l$  des gesuchten Abstandes ist, ergibt sich

$$l = \frac{|\mathbf{m}|}{|\mathbf{g}|} \quad \# 1.95$$

## 1.5 Geradenmannigfaltigkeiten

### 1.5.1 Netze

Die Menge aller Geraden  $g(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$  welche zwei vorgegebene *Achsen*  $\mathbf{a}(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*), \mathbf{b}(\mathbf{b}, \mathbf{b}^*)$  treffen, bilden ein *Geradennetz*. Alle Strahlen des Netzes müssen beide Schnittbedingungen  $\mathbf{g}\mathbf{a}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{g} = 0, \quad \mathbf{g}\mathbf{b}^* + \mathbf{g}^*\mathbf{b} = 0$  erfüllen. Durch jeden Punkt  $\mathbf{x}$  des Raumes geht eine einzige Netzgerade. Man findet sie als Schnittgerade der Verbindungsebenen des Punktes  $\mathbf{x}$  mit den beiden Achsen des Netzes. Nur wenn  $\mathbf{x}$  auf einer der beiden Achsen liegt, wird die Netzgerade in der Verbindungsebene mit der anderen Achse unbestimmt.

Ebenso erkennt man, daß in jeder die Achsen nicht enthaltenden Ebene des Raumes eine einzige Netzgerade liegt. Man spricht von einem *Normalennetz*, wenn die zweite Achse die Ferngerade der zur ersten Achse normalen Ebenenstellung ist. Alle Netzstrahlen schneiden die im Endlichen liegende Achse unter rechtem Winkel.

**1.5.2 Treffgeraden dreier gegebenen Geraden**

Seien drei paarweise windschiefe Gerade  $a(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*)$ ,  $b(\mathbf{b}, \mathbf{b}^*)$ ,  $c(\mathbf{c}, \mathbf{c}^*)$  gegeben, so muß jede Gerade  $t(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$ , welche alle drei trifft, die Bedingungen

$$\mathbf{t}\mathbf{a}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{t} = 0, \quad \mathbf{t}\mathbf{b}^* + \mathbf{b}^*\mathbf{t} = 0, \quad \mathbf{t}\mathbf{c}^* + \mathbf{c}^*\mathbf{t} = 0 \quad \# 1.96$$

erfüllen. Bildet man mit den Skalarfaktoren  $\alpha, \beta, \gamma$  eine Linearkombination dieser drei Gleichungen, so erhält man

$$\mathbf{t}(\alpha\mathbf{a}^* + \beta\mathbf{b}^* + \gamma\mathbf{c}^*) + \mathbf{t}^*(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = 0 \quad \# 1.97$$

Wählen wir die Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$  derart, daß

$$\mathbf{s} = (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}), \quad \mathbf{s}^* = (\alpha\mathbf{a}^* + \beta\mathbf{b}^* + \gamma\mathbf{c}^*) \quad \# 1.98$$

wieder die PLÜCKERvektoren einer Geraden  $\mathbf{s}$  sind, so schneidet nach #1.84 auch diese Gerade die Transversale  $t$ . Da  $\mathbf{s}, \mathbf{s}^*$  die PLÜCKER-Bedingungen erfüllen sollen, haben wir  $\alpha, \beta, \gamma$  so zu wählen, daß sie der Beziehung

$$\alpha\beta s_{12} + \beta\gamma s_{23} + \gamma\alpha s_{31} = 0 \quad \# 1.99$$

genügen. Hier wurde

$$s_{12} = \mathbf{a}\mathbf{b}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b}, \quad s_{23} = \mathbf{b}\mathbf{c}^* + \mathbf{b}^*\mathbf{c}, \quad s_{31} = \mathbf{c}\mathbf{a}^* + \mathbf{c}^*\mathbf{a} \quad \# 1.100$$

gesetzt. Da es nur auf das Verhältnis

$$\alpha : \beta : \gamma = \lambda : \mu : 1 \quad \# 1.101$$

ankommt, folgt aus #1.99 nach Division durch  $\gamma^2$

$$\mu = -\frac{\lambda s_{31}}{\lambda s_{12} + s_{23}} \quad \# 1.102$$

Wegen der Homogenität der PLÜCKER-Vektoren kann man daher #1.98 in der Gestalt

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \lambda(\lambda s_{12} + s_{23})\mathbf{a} - \lambda s_{31}\mathbf{b} + (\lambda s_{12} + s_{23})\mathbf{c} \\ \mathbf{s}^* &= \lambda(\lambda s_{12} + s_{23})\mathbf{a}^* - \lambda s_{31}\mathbf{b}^* + (\lambda s_{12} + s_{23})\mathbf{c}^* \end{aligned} \quad \# 1.103$$

anschreiben, wobei in der Schar der Geraden  $\mathbf{s}$  auch die Geraden  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  für die Parameterwerte  $\lambda = \infty, -\frac{s_{23}}{s_{12}}, 0$  enthalten sind.

**Satz 1.5.2.1:** *Alle Transversalen  $t$  der drei Geraden  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  werden auch von allen Geraden  $\mathbf{s}$  der Schar #1.103 getroffen*

Die Geraden  $\mathbf{s}$  sind die Erzeugenden einer *Strahlfläche*. Schneidet man die Fläche #1.102 mit einer beliebigen Geraden  $m(\mathbf{m}, \mathbf{m}^*)$  des Raumes, so liefert die Schnittbedingung  $\mathbf{s}\mathbf{m}^* + \mathbf{s}^*\mathbf{m} = 0$  für  $\lambda$  die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} \lambda^2 s_{12}(\mathbf{a}\mathbf{m}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{m}) + \lambda[s_{23}(\mathbf{a}\mathbf{m}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{m}) - s_{31}(\mathbf{b}\mathbf{m}^* + \mathbf{b}^*\mathbf{m}) + s_{12}(\mathbf{c}\mathbf{m}^* + \mathbf{c}^*\mathbf{m})] + \\ + s_{23}(\mathbf{c}\mathbf{m}^* + \mathbf{c}^*\mathbf{m}) = 0 \end{aligned} \quad \# 1.104$$

Eine Raumgerade schneidet also i. a die Fläche in zwei Punkten. Es liegt mithin eine Strahlfläche 2. Ordnung vor (einschaliges Hyperboloid, als Sonderfall hyperbolisches Paraboloid).

Der Schnittpunkt wird nach #1.104 nur unbestimmt, wenn die Gerade  $\mathbf{m}$

1. die Bedingung  $\mathbf{m}\mathbf{a}^* + \mathbf{m}^*\mathbf{a} = 0$ ,  $\mathbf{m}\mathbf{b}^* + \mathbf{m}^*\mathbf{b} = 0$ ,  $\mathbf{m}\mathbf{c} + \mathbf{m}^*\mathbf{c} = 0$  erfüllt, also der Schar der Transversalen  $\mathbf{t}$  angehört, somit zur Gänze auf der Strahlfläche 2. Ordnung liegt.

2. eine Gerade der Schar #1.103 ist. Wählt man nämlich  $\mathbf{m} = \mathbf{s}_1$ ,  $\mathbf{m}^* = \mathbf{s}_1^*$  als die zum Parameter  $\lambda_1$  gehörige Gerade, so reduziert sich die linke Seite von #1.104 auf

$(\lambda - \lambda_1)^2 \mathbf{s}_{12} \mathbf{s}_{23} \mathbf{s}_{31}$ . Wegen der allgemeinen Lage von  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  kann dieser Ausdruck nur verschwinden, wenn  $\lambda = \lambda_1$  ist. Daraus folgt, daß zwei Erzeugende der Schar  $\mathbf{s}$  windschief sind oder zusammenfallen.

Ähnliche Überlegungen wie für die Schar  $\mathbf{s}$  lassen sich auch für die Transversalen  $\mathbf{t}$  anstellen, sodaß gilt

**Satz 1.5.2.2:** *Eine Strahlfläche 2. Ordnung ist durch drei zu je zweien windschiefe Gerade  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  bestimmt. Alle Transversalen  $\mathbf{t}$  von  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  bilden die eine Erzeugendenschar, die Geraden  $\mathbf{s}$  #1.103 die zweite Erzeugendenschar. Je zwei Erzeugende derselben Schar sind windschief, jede Erzeugende der einen Schar schneidet alle Erzeugenden der anderen Schar.*

### 1.5.3 Treffgeraden von vier gegebenen Geraden

Um die Treffgeraden von vier zu je zweien windschiefen Geraden  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{m}$  zu bestimmen, ermitteln wir zuerst die Strahlfläche zweiter Ordnung, die von allen Treffgeraden  $\mathbf{t}$  von  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  gebildet wird. Diese Fläche wird von  $\mathbf{m}$  in zwei Punkten  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$  geschnitten. Die durch  $\mathbf{S}_1$  und  $\mathbf{S}_2$  gehenden Treffgeraden  $\mathbf{t}_1$  und  $\mathbf{t}_2$  schneiden alle vier gegebenen Geraden.

**Satz 1.5.3.1:** *Vier windschiefe Gerade haben i.a. zwei Treffgeraden*

Man beachte, daß diese Treffgeraden, entsprechend der aufzulösenden quadratischen Gleichung reell, imaginär oder zusammenfallend sein können

Gehört  $\mathbf{m}$  der durch  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  bestimmten Erzeugendenschar an, so werden  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  nach Satz 1.5.2.2 von sämtlichen Erzeugenden der anderen Schar geschnitten. Man sagt in diesem Falle, die vier Geraden  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{m}$  haben *hyperbolische Lage*

## 1.6 Raumkurven

### 1.6.1 Tangente. Bahngeschwindigkeit

Eine Raumkurve sei durch die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \quad \# 1.105$$

der Ortsvektoren ihrer Punkte gegeben, wobei der Parameter  $t$  als *Zeit* gedeutet werde. Nach einem gewissen Zeitintervall  $\Delta t$  gelangt der Punkt  $\mathbf{x}$  in die Lage (Fig. 1.23)

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t + \Delta t) \quad \# 1.106$$

Der Vektor

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x} = \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t) \quad \# 1.107$$

stellt die orientierte Verbindungssehne der beiden Kurvenpunkte dar. Der mit #1.107 kollineare Vektor

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \quad \# 1.108$$

hat als Betrag den Quotienten aus der Sehnenlänge durch das zugehörige Zeitintervall. Man kann daher  $\mathbf{s}$  als Vektor der *mittleren Geschwindigkeit* auffassen, mit der sich ein Punkt bewegen müßte, wenn er geradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit von  $\mathbf{x}(t)$  nach  $\mathbf{x}(t+\Delta t)$  wanderte. Beim Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  geht der mit der Sehne kollineare Vektor  $\mathbf{s}$  in den Vektor

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \dot{\mathbf{x}} \quad \# 1.109$$

über. Man nennt  $\mathbf{v}$  den *Vektor der momentanen Bahngeschwindigkeit* des Punktes  $\mathbf{x}$ , seinen Betrag  $v = |\dot{\mathbf{x}}|$  die *Momentangeschwindigkeit* oder kurz *Geschwindigkeit* des Punktes  $\mathbf{x}$  zum

**Figur 1.23, Figur 11.24**

Zeitpunkt  $t$ . Wird dieselbe Kurve nach einem anderen Zeitgesetz durchlaufen, so befindet sich der Kurvenpunkt  $\mathbf{x}$  zu einem anderen Zeitpunkt  $t_1$  an derselben Stelle. Ist

$$t = \chi(t_1) \quad \# 1.110$$

so ist der neue Geschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t_1} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial t_1} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \chi' = \mathbf{v} \cdot \chi' \quad \left( \chi' = \frac{\partial \chi}{\partial t_1} \right) \quad \# 1.111$$

$\mathbf{v}$  und  $\mathbf{v}_1$  sind also kollinear. Ihre gemeinsame Trägergerade ist die *Tangente* an die Bahnkurve im Punkte  $\mathbf{x}$ . Die Tangente ist also vom gewählten Zeitgesetz unabhängig.

### 1.6.2 Krümmung einer Bahnkurve. Beschleunigung

Unter der *Normalebene* einer Kurve in einem ihrer Punkte  $\mathbf{x}$  versteht man die durch  $\mathbf{x}$  gehende, auf die Kurventangente dieses Punktes normale Ebene. Betrachten wir zwei Kurvenpunkte  $\mathbf{x}(t)$  und  $\mathbf{x}(t+\Delta t)$  (Fig. 1.24), so sind nach #1.52 und #1.53

$$\dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) \mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{x}(t+\Delta t) \quad \# 1.112$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{x}(t) \quad \# 1.113$$

die Gleichungen ihrer Normalebene, wobei  $\mathbf{y}$  einen beliebigen Punkt dieser Ebene bezeichnet. Durch die Schnittgerade dieser Ebenen geht auch jede andere Ebene, deren Gleichung eine Linearkombination der gegebenen Gleichungen ist. Speziell also deren durch  $\Delta t$  dividierte Differenz

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) - \dot{\mathbf{x}}(t)}{\Delta t} \cdot \mathbf{y} &= \frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}{\Delta t} = \\ &= \frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) - \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{x}(t+\Delta t) + \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}{\Delta t} = \quad \# 1.114 \\ &= \mathbf{x}(t+\Delta t) \cdot \frac{\dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) - \dot{\mathbf{x}}(t)}{\Delta t} + \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Geht man zur Grenze  $\Delta t \rightarrow 0$  über, so wird die Schnittgerade der benachbarten Normalebene #1.112 und #1.113, oder, was dasselbe ist, der Ebenen #1.113 und #1.114 einer in #1.113 liegenden Grenzlage zustreben, der *Krümmungssachse*  $\mathbf{k}$  des Punktes  $\mathbf{x}$ .

Durch den besagten Grenzübergang geht #1.114 in die Ebene

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) \mathbf{y} = \mathbf{x}(t) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t) + |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 \quad \# 1.115$$

über. Die Schnittgerade der Ebenen #1.113 und #1.115 hat dann nach #1.81 die PLÜCKER-Vektoren

$$\mathbf{k} = \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{k}^* = (\mathbf{x}\ddot{\mathbf{x}} + |\dot{\mathbf{x}}|^2)\mathbf{x} - (\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}})\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) + |\dot{\mathbf{x}}|^2 \dot{\mathbf{x}} \quad \# 1.116, \# 1.117$$

Bezeichnet man den Vektor  $\mathbf{b} = \ddot{\mathbf{x}}$  als *Beschleunigungsvektor* des Punktes  $\mathbf{x}$ , seinen Betrag  $|\mathbf{b}| = b$  als *Beschleunigung*, so kann man die PLÜCKER-Vektoren der Krümmungsachse  $\mathbf{k}$  auch in der Form schreiben

$$\mathbf{k} = \mathbf{v} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{k}^* = (\mathbf{x}\mathbf{b} + |\mathbf{v}|^2)\mathbf{v} - (\mathbf{x}\mathbf{v})\mathbf{b} = \mathbf{x} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) + |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \quad \# 1.118$$

schreiben. Die vom Geschwindigkeitvektor  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$  und dem Beschleunigungsvektor  $\mathbf{b} = \ddot{\mathbf{x}}$  aufgespannte Ebene durch  $\mathbf{x}$  nennt man *Schmiegeebene*  $\sigma$  dieses Punktes (Fig. 1.25). Sie ist nach #1.118 zur Krümmungsachse normal. Der Schnittpunkt  $\mathbf{K}$  der Krümmungsachse  $\mathbf{k}$  mit der Schmiegeebene  $\sigma$  heißt *Krümmungsmittelpunkt*  $\mathbf{r}$  der Raumkurve im Punkte  $\mathbf{x}$ , der Abstand  $\rho$  des Kurvenpunktes von  $\mathbf{K}$  der *Krümmungsradius* der Raumkurve in  $\mathbf{x}$ , der in  $\sigma$  liegende Kreis mit dem Mittelpunkt  $\mathbf{K}$  und dem Radius  $\rho$  der *Krümmungskreis* der Raumkurve in  $\mathbf{x}$ . Zur Aufsuchung der Krümmungsmittelpunkte  $\mathbf{r}$  schneiden wir die Krümmungsachse #1.118 mit der Schmiegeebene  $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{d} = \mathbf{n}\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b})$ . Nach #1.75 ist

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + |\mathbf{v}|^2 \cdot \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{v}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{b}|^2} \quad \# 1.119$$

der Ortsvektor des Krümmungsmittelpunktes. Der Betrag des Krümmungsradius ergibt sich aus  $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{x}|$  mit

$$\rho = \frac{|\mathbf{v}|^3}{|\mathbf{v} \times \mathbf{b}|} \quad \# 1.120$$

Den reziproken Wert des Krümmungsradius nennt man die *Krümmung*  $\kappa$  der Kurve im Punkte  $\mathbf{x}$ .

Ändert man vermöge #1.110 den zeitlichen Ablauf, so folgt aus #1.111 durch Differentiation nach  $t_1$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t_1} = \mathbf{b} \cdot \dot{\chi}^2 + \mathbf{v} \cdot \ddot{\chi} \quad \left( \ddot{\chi} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \quad \# 1.121$$

Man erkennt, daß sich der neue Beschleunigungsvektor  $\mathbf{b}_1$  mit dem Zeitgesetz *in der Schmiegeebene* verändert. Letztere hat also eine vom Zeitgesetz unabhängige geometrische Bedeutung

### 1.6.3 Beschleunigung. Normal- und Tangentialbeschleunigung

Wir zerlegen den *Beschleunigungsvektor*  $\mathbf{b}$  in der Schmiegeebene in zwei Komponenten, von denen die *Tangentialbeschleunigung*  $\mathbf{b}_t$  in Richtung der Kurventangente  $\mathbf{v}$ , die *Normalbeschleunigung*  $\mathbf{b}_n$  normal auf  $\mathbf{b}$  in Richtung der *Hauptnormalen* der Kurve verläuft:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_t + \mathbf{b}_n \quad \# 1.122$$

Wegen der Kollinearität von  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{b}_t$  ist  $\mathbf{v} \times \mathbf{b}_t = \mathbf{o}$ , wegen der Orthogonalität von  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{b}_n$  ist  $|\mathbf{v} \times \mathbf{b}_n| = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{b}_n|$ . Aus #1.120 folgt daher

$$|\mathbf{b}_n| = \frac{|\mathbf{v}|^2}{\rho} \quad \# 1.123$$

$\mathbf{b}_n$  ist zum Krümmungsmittelpunkt hin orientiert. Die Formel #1.123 stellt ein wichtiges Bindeglied zwischen Kinematik und Geometrie dar.

## 1.7 Flächen

### 1.7.1 Parameterdarstellung einer Fläche

Eine *Fläche des Raumes* sei durch die von den Parametern  $u$  und  $v$  abhängigen Ortsvektoren  $\mathbf{x}(u,v)$  ihrer Punkte festgelegt. Hält man  $u$  bzw.  $v$  fest, so erhält man auf der Fläche ein Netz von *Parameterlinien*. Wir setzen voraus, daß in dem von uns betrachteten Flächenstück zwei Parameterlinien derselben Schar einander nicht schneiden bzw. Parameterlinien verschiedener Scharen einander nicht berühren. Die Tangentenvektoren an die Parameterlinien werden durch die partiellen Ableitungen nach dem jeweils variablen Parameter dargestellt:

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \quad \mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \quad \# 1.124$$

In jedem Flächenpunkt ist dann die Existenz einer eindeutig bestimmten *Flächennormalen*

$$\mathbf{n} = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \quad \# 1.125$$

sichergestellt.

Wählt man  $u$  und  $v$  als Funktionen eines Parameters  $t$ , so wird durch

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{x}[u(t), v(t)] \quad \# 1.126$$

eine *Flächenkurve* festgelegt, deren Tangentenvektor

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_u \dot{u} + \mathbf{x}_v \dot{v} \quad \# 1.127$$

sich als Linearkombination der Tangentenvektoren der Parameterlinien erweist.

**Satz 1.7.1.1:** *Die Tangenten an alle Flächenkurven durch einen Flächenpunkt liegen in derselben Ebene, der Tangentialebene*

Die Richtung der Flächentangente wird, bei gegebenen Vektoren #1.124, durch das Verhältnis  $\dot{u}(t) : \dot{v}(t)$  festgelegt.

### 1.7.2 Krümmungsachse einer Flächenkurve

Um die *Krümmungsachse einer Flächenkurve* #1.126 zu ermitteln, benötigen wir die zweite Ableitung

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{uu} \dot{u}^2 + 2\mathbf{x}_{uv} \dot{u}\dot{v} + \mathbf{x}_{vv} \dot{v}^2 + \mathbf{x}_u \ddot{u} + \mathbf{x}_v \ddot{v} \quad \# 1.128$$

Durch #1.127 und #1.128 wird die Schmiegeebene der Flächenkurve festgelegt. Führen wir eine

**Figur 1.25. Figur 1.26** Bildebene ein, in welcher die Tangente der Flächenkurve projizierend erscheint, so sind auch die Tangentialebene  $\tau$  und die Schmiegeebene  $\sigma$  projizierend (Fig. 1.26). Die Krümmungsachse  $k$  der Flächenkurve schneidet die Flächennormale in einem Punkt  $K_n$ , dessen Abstand  $R$  vom Flächenpunkt  $\mathbf{x}$  die Größe

$$R = \frac{\rho}{\cos \theta} \quad \# 1.129$$

hat; hierin bedeutet  $\rho$  de Krümmungsradius der Raumkurve und  $\theta$  den Winkel ihrer Schmiegeebene  $\sigma$  mit der Flächennormalen  $\mathbf{n}$ . Der Ortsvektor  $\mathbf{y}$  des Punktes  $K_n$  kann durch  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{n}$

dargestellt werden. Da  $\mathbf{y}$  auch auf der Krümmungsachse liegen soll, muß die Inzidenzbedingung  $\mathbf{k}^* = \mathbf{y} \times \mathbf{k}$  erfüllt sein, woraus mit #1.117 und #1.116

$$\mathbf{k}^* = (\mathbf{x} + \lambda \mathbf{n}) \times \mathbf{k} = \mathbf{x} \times (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) + \lambda \mathbf{n} \times (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{x} \times (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) + |\dot{\mathbf{x}}|^2 \dot{\mathbf{x}}$$

daher

$$|\dot{\mathbf{x}}|^2 \dot{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{n} \times (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) = \lambda [\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{x}}) - \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{x}})] \quad \# 1.130$$

folgt. Da die Flächennormale  $\mathbf{n}$  auf jede Flächentangente  $\dot{\mathbf{x}}$  normal steht, ist  $\dot{\mathbf{x}} \mathbf{n} = 0$  und aus #1.130 ergibt sich  $\lambda = \frac{|\dot{\mathbf{x}}|^2}{\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{x}}}$ . Trifft man den Ansatz  $R = \lambda |\mathbf{n}|$ , so folgt aus #1.129

$$R = \frac{\rho}{\cos \theta} = \frac{|\dot{\mathbf{x}}|^2}{\mathbf{n}^\circ \ddot{\mathbf{x}}} \quad \# 1.131$$

worin  $\mathbf{n}^\circ$  der Einheitsvektor in Richtung der Flächennormalen ist. Wegen  $\mathbf{n}^\circ \mathbf{x}_u = \mathbf{n}^\circ \mathbf{x}_v = 0$  nimmt #1.130 die Gestalt

$$R = \frac{\rho}{\cos \theta} = \frac{|\mathbf{x}_u|^2 \dot{u}^2 + 2(\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v) \dot{u} \dot{v} + |\mathbf{x}_v|^2 \dot{v}^2}{(\mathbf{n}^\circ \mathbf{x}_{uu}) \dot{u}^2 + 2(\mathbf{n}^\circ \mathbf{x}_{uv}) \dot{u} \dot{v} + (\mathbf{n}^\circ \mathbf{x}_{vv}) \dot{v}^2} \quad \# 1.132$$

an. Da hier die zweiten Ableitungen  $\ddot{u}, \ddot{v}$  nicht mehr auftreten, hängt  $R$  nur von der Tangentenrichtung  $\dot{u} : \dot{v}$ , nicht aber von der durch #1.128 bestimmten Schmiegeebene der Kurve ab.

**Satz 1.7.2.1:** Die Krümmungsachsen aller einander in einem Flächenpunkt berührenden Flächenkurven gehen durch denselben Punkt  $K_n$  der Flächennormalen.

Aus Fig. 1.26 erkennt man

**Satz 1.7.2.2:** Die Krümmungskreise aller einander in einem Flächenpunkt berührenden Kurven liegen auf der selben Kugel (Kugel von MEUSNIER)<sup>12</sup>

Die Sätze 1.7.2.1 und 1.7.2.2 gelten speziell für die ebenen Schnitte einer Fläche durch dieselbe Flächentangente. Daraus folgt

**Satz 1.7.2.3:** Der Mittelpunkt  $K_n$  MEUSNIER-schen Kugel ist der Krümmungsmittelpunkt des durch die gegebenen Flächentangente geführten Normalschnittes der Fläche

### 1.7.3 Flächenkurven

Ist der Parameter  $t$  der Flächenkurve #1.126 die Zeit, so stellen #1.127 und #1.128 Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  und Beschleunigungsvektor  $\mathbf{b}$  eines sich auf der Kurve bewegenden Punktes dar. Nach dem Vorbild von Kap. 1.6.3 zerlegen wir  $\mathbf{b}$  in zwei Komponenten, von denen die eine,  $\mathbf{b}_T$ , in der Tangentialebene liegt und die andere,  $\mathbf{b}_N$ , in die Flächennormale fällt (Fig. 1.27):

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_T + \mathbf{b}_N \quad \# 1.133$$

Ist  $\mathbf{b}_n$  der Normalbeschleunigungsvektor der Flächenkurve, so ist

$$|\mathbf{b}_N| = |\mathbf{b}_n| \cos \theta \quad \# 1.134$$

**Figur 1.27**

<sup>12</sup> Jean-Baptiste-Marie-Charles MEUSNIER DE LA PLACE 1754-1793

## Kapitel 1

---

Eliminiert man mit Hilfe von #1.131 und #1.123  $|\mathbf{b}_n|$  und  $\theta$  und führt statt dessen den Krümmungsradius  $R$  des Normalschnittes der Fläche durch  $\mathbf{v}$  ein, so erhält man die zu #1.123 analoge Beziehung

$$|\mathbf{b}_N| = \frac{|\mathbf{v}|^2}{R}$$

# 1.135

$\mathbf{b}_N$  ist zum Krümmungsradius des Normalschnittes hin orientiert.

## 2 Quaternionen

### 2.1 Rechenregeln

#### 2.1.1 Definitionen

Unter einer Quaternion<sup>1</sup> **A** versteht man die additiv geschriebene Verknüpfung eines Skalars **a** und eines Vektors **a**

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix} \quad \# 2.1$$

Man nennt **a** den *Skalarteil*, **a** den *Vektorteil* oder die *Achse* der Quaternion. Als Skalare **a** und Koordinaten  $a_i$  des Vektors fungieren zunächst nur die reellen Zahlen. Erst später werden andere Zahlssysteme herangezogen. Reduziert sich **a** auf den Nullvektor **o**, bzw. ist  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , so bestehen keine Bedenken, die speziellen Quaternionen

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{o} \equiv \mathbf{a}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{0} + \mathbf{a} \equiv \mathbf{a} \quad \# 2.2$$

mit der reellen Zahl **a** bzw. dem Vektor **a** zu identifizieren. Man spricht in diesem Falle von einer *skalaren* bzw. *vektoriellen Quaternion*. Insbesondere sei

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{o} \quad \# 2.3$$

die *Nullquaternion*, die wir nach Zweckmäßigkeit mit der Zahl 0 bzw. dem Nullvektor **o** identifizieren.

#### 2.1.2 Rechenregeln und Bezeichnungen

##### 2.1.2.1 Gleichheit zweier Quaternionen

Es sei  $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \mathbf{b}$ . Es ist  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  dann und nur dann wenn  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  und  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  ist

##### 2.1.2.2 Summe und Differenz zweier Quaternionen

Unter der Summe (Differenz)  $\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C}$  der Quaternionen  $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \mathbf{b}$  versteht man die Quaternion

$$\mathbf{C} = (\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \mathbf{c} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b}, \mathbf{c} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b} \quad \# 2.4$$

Speziell ist  $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0} + \mathbf{o} = \mathbf{0}$  die Nullquaternion.

##### 2.1.2.3 Konjugierte Quaternionen

Man nennt

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{a} - \mathbf{a} \quad \# 2.5$$

die zu #2.1 *konjugierte Quaternion*. Aus dieser Definition ergibt sich sofort

$$\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}} = 2\mathbf{a} \quad \# 2.6$$

---

<sup>1</sup> Die Quaternionen wurden 1840 von William Rowan HAMILTON (1805-1865) eingeführt (siehe etwa HAMILTON [1]), finden sich aber im wesentlichen bereits bei L.EULER 1748. Quaternionen werden im Folgenden durch fette Arial-Lettern bezeichnet.

$$\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}} = 2\mathbf{a} \quad \# 2.7$$

Reduziert sich eine Quaternion auf einen Vektor bzw. einen Skalar, so ist

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{a}} = -\mathbf{a}, \quad \mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{O} \quad \# 2.8$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{O} \quad \# 2.9$$

Daraus folgen die Sätze

**Satz 2.1.2.3.1:** *Eine Quaternion reduziert sich genau dann auf einen reinen Vektor, wenn die Summe der Quaternion und ihrer Konjugierten die Nullquaternion ist*

**Satz 2.1.2.3.2:** *Eine Quaternion reduziert sich genau dann auf einen Skalar, wenn die Differenz der Quaternion und ihrer Konjugierten die Nullquaternion ist*

#### 2.1.2.4 Das Quaternionenprodukt

Für das Produkt zweier Quaternionen verwenden wir das Verknüpfungszeichen „ $\circ$ “. Das Produkt zweier Quaternionen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  ergibt wieder eine Quaternion  $\mathbf{C}$ .

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad \# 2.10$$

Vor der Behandlung des allgemeinen Quaternionenproduktes definieren wir jenen Sonderfall, bei dem beide Quaternionen rein vektoriell sind:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} := -\mathbf{ab} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}^2 \quad \# 2.11$$

Aus #2.11 ergibt sich sofort

$$\mathbf{b} \circ \mathbf{a} = -\mathbf{ba} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{ab} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \# 2.12$$

Durch #2.11 und #2.12 kann man umgekehrt das Skalar- und das Vektorprodukt zweier Vektoren durch ihr Quaternionenprodukt ausdrücken

$$\mathbf{ab} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} \circ \mathbf{b} + \mathbf{b} \circ \mathbf{a}) \quad \# 2.13$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} \circ \mathbf{b} - \mathbf{b} \circ \mathbf{a}) \quad \# 2.14$$

Das Produkt zweier allgemeinen Quaternionen wird in folgender Weise definiert.

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (\mathbf{a} + \mathbf{a}) \circ (\mathbf{b} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} + \mathbf{a} \circ \mathbf{b} + \mathbf{a} \circ \mathbf{b} + \mathbf{a} \circ \mathbf{b} \quad \# 2.15$$

Diese Definition wird durch folgende Festsetzungen ergänzt:

1. Das Quaternionenprodukt  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$  zweier reellen Zahlen ist gleich ihrem gewöhnlichen Produkt  $\mathbf{ab}$ , d.h. es ist kommutativ, assoziativ und bezüglich der Addition distributiv.

2. Das Quaternionenprodukt  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$  einer reellen Zahl mit einem Vektor identifizieren wir als das in Kap. 1.1.5 definierte Produkt  $\mathbf{ab}$  der reellen Zahl mit dem Vektor.

Zusammen mit #2.11 nimmt #2.15 daher die Form

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (\mathbf{ab} - \mathbf{ab}) + (\mathbf{ab} + \mathbf{ba} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad \# 2.16$$

<sup>2</sup> Das negative Vorzeichen des Skalarproduktes in dieser Definition ist erforderlich, damit das Quaternionenprodukt assoziativ ist.

## Quaternionen

an. Aus dieser Definition ersieht man, daß das Quaternionenprodukt i.a. nicht kommutativ ist. Es ist aber, wie man sich leicht überzeugt, *distributiv* und *assoziativ*.

$$(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) \circ \mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{C} \pm \mathbf{B} \circ \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} \circ (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \mathbf{C} \circ \mathbf{A} \pm \mathbf{C} \circ \mathbf{B} \quad \# 2.17$$

$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) \circ \mathbf{C} = \mathbf{A} \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{C}) = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{C} \quad \# 2.18$$

Speziell ist das Quaternionenprodukt dreier Vektoren assoziativ:

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = \mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \circ \mathbf{c}) = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} \circ \mathbf{c} \quad \# 2.19$$

### 2.1.2.5 Koaxiale Quaternionen

Quaternionen, deren Vektorteile kollinear sind, heißen *koaxial*.

**Satz 2.1.2.5.1:** *Das Produkt zweier Quaternionen ist genau dann kommutativ, wenn die Quaternionen koaxial sind.*

Beweis: 1. Es seien  $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \alpha \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \beta \mathbf{v}$  ( $\alpha, \beta$  reell) koaxiale Quaternionen. Dann gilt

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} - \alpha\beta |\mathbf{v}|^2 + (\alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{a}) \circ \mathbf{v} = \mathbf{B} \circ \mathbf{A} \quad \# 2.20$$

2. Seien umgekehrt  $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \alpha \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \beta \mathbf{v}$  zwei Quaternionen, deren Produkt kommutativ ist, dann hat  $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$  wegen #2.16  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$  zur Folge, d.h.  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  sind kollinear. Speziell ist das Produkt einer Quaternion mit ihrer Konjugierten kommutativ.

### 2.1.2.6 Norm einer Quaternion

Man nennt die reelle, nichtnegative Zahl

$$A^2 = \mathbf{A} \circ \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \circ \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{a}^2 + |\mathbf{a}|^2 \quad \# 2.21$$

die *Norm* der Quaternion  $\mathbf{A}$ . Sie verschwindet nur bei der Nullquaternion. Eine Quaternion  $\mathbf{A}^\circ$ , deren Norm den Wert 1 hat, nennt man *Einheitsquaternion* oder *normierte Quaternion*<sup>3</sup>. Jede Quaternion  $\mathbf{A}$  kann man auf zwei Arten normieren<sup>4</sup>:

$$\mathbf{A}^\circ = \pm \frac{\mathbf{A}}{A}, \quad A = \sqrt{\mathbf{A} \circ \tilde{\mathbf{A}}} = \sqrt{A^2}, \quad (\mathbf{A}^\circ)^\sim = (\tilde{\mathbf{A}})^\circ, \quad \mathbf{A}^\circ \circ \tilde{\mathbf{A}}^\circ = 1 \quad \# 2.22$$

Reduziert sich eine Quaternion auf einen reinen Vektor  $\mathbf{a}$ , so ist nach #2.8 und #2.9

$$\mathbf{a} \circ \tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}} \circ \mathbf{a} = -\mathbf{a} \circ \mathbf{a} = \mathbf{a} \circ \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \quad \# 2.23$$

### 2.1.2.7 Die Konjugierte eines Quaternionenprodukts

Man überzeugt sich leicht, daß gilt

$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})^\sim = \tilde{\mathbf{B}} \circ \tilde{\mathbf{A}} \quad \# 2.24$$

### 2.1.2.8 Inverse einer Quaternion

Man nennt  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$  die zu  $\mathbf{A}$  *inverse Quaternion*, wenn

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{X} = 1 \quad \# 2.25$$

<sup>3</sup> Eine hochgestellte Null deutet wie bei den Vektoren eine Einheitsquaternion an.

<sup>4</sup> Die Tilde neben einem Klammersymbol erstreckt sich jeweils auf den Gesamtinhalt der Klammer

gilt. Multipliziert man #2.25 von links mit  $\tilde{\mathbf{A}}$ , so ist wegen der Assoziativität des Quaternionenproduktes

$$\tilde{\mathbf{A}} \circ (\mathbf{A} \circ \mathbf{X}) = (\tilde{\mathbf{A}} \circ \mathbf{A}) \circ \mathbf{X} = \mathbf{A}^2 \mathbf{X} = \tilde{\mathbf{A}} \quad \# 2.26$$

Hieraus folgt

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\mathbf{A}^2} \quad \# 2.27$$

Da nach #2.27  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{A}^{-1}$  koaxial sind, ist ihr Produkt kommutativ

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{A} = 1 \quad \# 2.28$$

Reduziert sich eine Quaternion auf einen reinen Vektor  $\mathbf{a}$ , so gilt für dessen im Sinne der Quaternionenrechnung inversen Vektor  $\mathbf{a}^{-1}$  wegen #2.8, #2.23, #2.27 und #2.28

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}^{-1} \circ \mathbf{a} = 1, \quad \mathbf{a}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|^2} = -\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \quad \# 2.29$$

Die Inverse  $\mathbf{C}^{-1}$  eines Quaternionenproduktes  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$  ist

$$\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{A} \circ \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \circ \mathbf{A}^{-1} \quad \# 2.30$$

denn es ist  $\mathbf{C} \circ \mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) \circ (\mathbf{B}^{-1} \circ \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A} \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{B}^{-1}) \circ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{-1} = 1$

### 2.1.2.9 Der Normensatz

Formt man #2.30 mit Hilfe von #2.27 um, so findet man mit  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$  bei Beachtung von #2.24

$$\frac{\tilde{\mathbf{C}}}{\mathbf{C}^2} = \frac{\tilde{\mathbf{B}} \circ \tilde{\mathbf{A}}}{\mathbf{B}^2 \mathbf{A}^2} = \frac{(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})^\sim}{\mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{\mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2}$$

woraus man

$$\mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 = \mathbf{C}^2 \quad \# 2.31$$

ablesen kann.

**Normensatz 2.1.2.9.1:** Die Norm eines Quaternionenproduktes ist gleich dem Produkt der Normen der einzelnen Faktoren.

### 2.1.2.10 Differentiation von Quaternionen

Sei  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{a}(t)$  eine Quaternion, welche von einem reellen Parameter  $t$  abhängt. Dann definieren wir als Ableitung der Quaternion  $\mathbf{A}(t)$  nach dem Parameter  $t$  die Quaternion  $\dot{\mathbf{A}}(t) = \dot{\mathbf{a}}(t) + \dot{\mathbf{a}}(t)$ . Man überzeugt sich leicht, daß folgende Ableitungsregeln gelten

$$(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^\cdot = \dot{\mathbf{A}} \pm \dot{\mathbf{B}}, \quad (\mathbf{A} \circ \mathbf{B})^\cdot = \dot{\mathbf{A}} \circ \mathbf{B} + \mathbf{A} \circ \dot{\mathbf{B}}, \quad \dot{\tilde{\mathbf{A}}} = \tilde{\dot{\mathbf{A}}} \quad \# 2.32$$

## 2.2 Geometrische Deutung der Quaternionen

**Satz 2.2.1:** Jede Quaternion  $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{a}$  läßt sich auf unendlich viele Arten als Quaternionenprodukt

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \circ \mathbf{u}^{-1} \quad \# 2.33$$

## Quaternionen

zweier Vektoren darstellen. Beide Vektoren stehen auf der Achse  $\mathbf{a}$  der Quaternion  $\mathbf{A}$  normal. Einer von beiden, etwa  $\mathbf{u}$ , kann (orthogonal zu  $\mathbf{a}$ ) beliebig gewählt werden. Der zweite Vektor  $\mathbf{v}$  ist dann durch

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}\mathbf{u} + \mathbf{a} \times \mathbf{u} \quad \# 2.34$$

eindeutig bestimmt. Das Verhältnis der Beträge der Vektoren  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  ist unabhängig von der Wahl von  $\mathbf{u}$  konstant

$$|\mathbf{v}| = A|\mathbf{u}| \quad \# 2.35$$

ebenso der von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  eingeschlossene Winkel  $\varphi$

$$\cos \varphi = \frac{a}{A} \quad \# 2.36$$

Beweis: Aus dem Ansatz #2.33 ergibt sich wegen #2.11 und #2.29

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{a} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2} \quad \# 2.37$$

Daher ist

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2}, \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2} \quad \# 2.38, \# 2.39$$

Aus #2.39 folgt die behauptete Orthogonalität von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  zu  $\mathbf{a}$ . Denken wir uns ein der Orthogonalitätsbedingung

$$\mathbf{a}\mathbf{u} = 0 \quad \# 2.40$$

genügendes  $\mathbf{u}$  gewählt und #2.39 mit diesem Vektor von rechts vektoriell multipliziert, so folgt aus

$$\mathbf{a} \times \mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} = \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{u}\mathbf{v})}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} \quad \# 2.41$$

zusammen mit #2.38 die Behauptung #2.34. Quadriert man #2.34 skalar, so folgt aus #2.40 und #2.21

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{a}^2 |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{a} \times \mathbf{u}|^2 = \mathbf{a}^2 |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{u}|^2 - (\mathbf{a}\mathbf{u})^2 = |\mathbf{u}|^2 (\mathbf{a}^2 + |\mathbf{a}|^2) = A^2 |\mathbf{u}|^2 \quad \# 2.42$$

wodurch die Behauptung #2.35 erwiesen ist. Schließlich wird der von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  eingeschlossene

Winkel durch  $\cos \varphi = \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2 \cdot |\mathbf{v}|^2}$  festgelegt, wobei wegen #2.35 und #2.38 auch #2.36 bestätigt

ist. Eine Ergänzung zu #2.36 erhält man, indem man in #2.39 die Beträge bildet und #2.35 beachtet. Dann wird

$$|\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin \varphi}{|\mathbf{u}|^2} = A \cdot \sin \varphi \quad \# 2.43$$

Schreibt man #2.33 in der Form

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \# 2.44$$

so kann man die Quaternion  $\mathbf{A}$  als *Operator* auffassen, welcher einen beliebigen, auf die Achse von  $\mathbf{A}$  normalen Vektor  $\mathbf{u}$  in den Vektor  $\mathbf{v}$  überführt, der gleichfalls auf die Achse von  $\mathbf{A}$  normal steht (Fig.2.1). Der Übergang von  $\mathbf{u}$  nach  $\mathbf{v}$  ist einer *Drehstreckung*, welche die Länge jedes auf  $\mathbf{a}$  normalen Vektors  $\mathbf{u}$  mit dem Faktor  $A$  multipliziert und  $\mathbf{u}$  um den durch #2.36 definierten Winkel  $\varphi$  dreht, wobei wegen #2.39 das von den drei Vektoren  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}$  gebildete Dreiein ein Rechtsdreiein ist.

**Figur 2.1** **Satz 2.2.2** Jede Quaternion  $\mathbf{A}$  bewirkt in der zu ihrer Achse normalen Ebenenstellung eine Drehstreckung, wobei jeder dieser Ebenenstellung angehörige Vektor  $\mathbf{u}$  vermöge  $\mathbf{A} \circ \mathbf{u} = \mathbf{v}$  in einen gleichfalls dieser Ebenenstellung angehörigen Vektor  $\mathbf{v}$  übergeht. Der Streckungsfaktor ist  $A$ , der Drehwinkel ist durch  $\cos \varphi = \frac{a}{A}$ ,  $\sin \varphi = \frac{|\mathbf{a}|}{A}$  festgelegt. Umgekehrt ist jeder Drehstreckung, welche den gegebenen Vektor  $\mathbf{u}$  in den gegebenen Vektor  $\mathbf{v}$  überführt, die Quaternion  $\mathbf{A} = \mathbf{v} \circ \mathbf{u}^{-1}$  zugeordnet.

Zum Beweis des zweiten Teils dieses Satzes sei eine Drehstreckung, welche in der zum Einheitsvektor  $\mathbf{e}$  normalen Ebenenstellung wirke, durch den Streckungsfaktor  $A$  und den Drehwinkel  $\varphi$  gegeben. Dann kann man vermöge #2.36 und #2.43 die Quaternion, welche diese Drehstreckung leistet, sofort angeben:

$$\mathbf{A} = a + \mathbf{a} = A(\cos \varphi + \mathbf{e} \sin \varphi) = \mathbf{A}\mathbf{A}^\circ \quad \# 2.45$$

Daraus ersieht man, daß sich jede Quaternion  $\mathbf{A}$  zerlegen läßt in einen Skalarfaktor  $A = \sqrt{\mathbf{A} \circ \tilde{\mathbf{A}}}$  (in der klassischen Quaternionenliteratur „Tensor“ von  $\mathbf{A}$  genannt), welcher den Streckungsanteil von  $\mathbf{A}$  darstellt und eine Einheitsquaternion („Versor“ von  $\mathbf{A}$ )

$$\mathbf{A}^\circ = \cos \varphi + \mathbf{e} \sin \varphi \quad \# 2.46$$

welche in der auf ihre Achse  $\mathbf{e}$  normalen Ebenenstellung eine reine *Drehung* um den Winkel  $\varphi$  bewirkt.

**Satz 2.2.3:** Die Einheitsquaternion #2.46 bewirkt in der zu ihrer Achse normalen Ebenenstellung eine Drehung um den Winkel  $\varphi$

Die zu  $\mathbf{A}$  konjugierte Quaternion  $\tilde{\mathbf{A}}$  unterscheidet sich nach #2.46 von  $\mathbf{A}$  durch das Vorzeichen des Winkels  $\varphi$ , sie bewirkt also in der zu  $\mathbf{e}$  normalen Ebenenstellung eine Drehstreckung mit demselben Streckungsfaktor, aber entgegengesetzten Drehsinn. Der durch

$$\tilde{\mathbf{A}} \circ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{v}} \quad \# 2.47$$

bestimmte Vektor  $\bar{\mathbf{v}}$  ist also zu  $\mathbf{v}$  bezüglich  $\mathbf{u}$  spiegelbildlich (Fig.2.1)

### 3 Duale Zahlen. Übertragungsprinzip von STUDY. Strahlflächen

#### 3.1 Duale Zahlen

##### 3.1.1 Definitionen, Rechenregeln

Oft erweist es sich als zweckmäßig, zur Behandlung kinematischer Aufgaben ein spezielles System höherer komplexer Zahlen heranzuziehen. Diese von CLIFFORD<sup>1</sup> eingeführten *dualen Zahlen*<sup>2</sup> haben die Bauart

$$\underline{a} = a + \varepsilon \hat{a} \quad \# 3.1$$

worin  $a$  und  $\hat{a}$  reelle Zahlen sind, während die *duale Einheit*  $\varepsilon$  der Rechenregel

$$\varepsilon^2 = 0 \quad \# 3.2$$

genügt<sup>3</sup>. Man nennt  $a$  den *Realteil*,  $\hat{a}$  den *Dualteil* der dualen Zahl  $\underline{a}$ . Zwei duale Zahlen

$$\underline{a} = a + \varepsilon \hat{a}, \quad \underline{b} = b + \varepsilon \hat{b} \quad \# 3.3, \# 3.4$$

sind dann und nur dann gleich, wenn

$$a = b, \quad \hat{a} = \hat{b} \quad \# 3.5$$

ist. In der Menge der dualen Zahlen definieren wir die *Addition*(*Subtraktion*) und *Multiplikation* folgendermaßen

$$\underline{a} \pm \underline{b} = \underline{b} \pm \underline{a} = (a \pm b) + \varepsilon(\hat{a} \pm \hat{b}) = \underline{c} = c + \varepsilon \hat{c}; \quad c = a \pm b, \quad \hat{c} = \hat{a} \pm \hat{b} \quad \# 3.6$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a} = (a + \varepsilon \hat{a}) \cdot (b + \varepsilon \hat{b}) = ab + \varepsilon(\hat{a}b + \hat{a}b) = \underline{c} = c + \varepsilon \hat{c} \quad \# 3.7$$

$$c = ab, \quad \hat{c} = \hat{a}b + \hat{a}b$$

Ferner ist

$$\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}; \quad \underline{a}(\underline{bc}) = (\underline{ab})\underline{c} = \underline{abc}; \quad \# 3.8 \# 3.9 \# 3.10$$

$$\underline{a}(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{ab} + \underline{ac}$$

Wir definieren das *Nullelement*

$$\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}, \quad \underline{0} = 0 + \varepsilon 0 \equiv 0 \quad \# 3.11$$

und *Einselement*

$$\underline{1} \cdot \underline{a} = \underline{a}, \quad \underline{1} = 1 + \varepsilon 0 \equiv 1 \quad \# 3.12$$

die wir mit den reellen Zahlen 0 bzw. 1 identifizieren. Die Menge der dualen Zahlen bildet demnach einen *kommutativen Ring*, dessen *Nullteiler* die rein dualen Zahlen sind. Sind nämlich  $\underline{a} = \varepsilon \hat{a}, \underline{b} = \varepsilon \hat{b}$  ( $\hat{a} \neq 0, \hat{b} \neq 0 \Rightarrow \underline{a} \neq 0, \underline{b} \neq 0$ ) rein dual, so ist  $\underline{ab} = \varepsilon^2 \hat{a}\hat{b} = 0$ . Aus

$$\underline{ax} = \underline{b} \quad \# 3.13$$

läßt sich das  $x$  nur dann eindeutig bestimmen, wenn  $\underline{a}$  kein Nullteiler ist. In diesem Falle wird

<sup>1</sup> William Kingdon CLIFFORD 1845-1879

<sup>2</sup> Im Folgenden werden duale Zahlen, Vektoren,... durch Unterstreichung gekennzeichnet, der Koeffizient von  $\varepsilon$  trägt ein Dach

<sup>3</sup> CLIFFORD [1], STUDY [1] S 195ff, FABER [1],[2]

$$(a + \varepsilon \hat{a})(x + \varepsilon \hat{x}) = ax + \varepsilon(\hat{a}x + a\hat{x}) = b + \varepsilon \hat{b} \quad \# 3.14$$

und wegen #3.5 ergibt sich

$$x = \frac{b}{a}, \quad \hat{x} = \frac{a\hat{b} - \hat{a}b}{a^2}, \quad \underline{x} = \frac{b}{a} + \varepsilon \frac{a\hat{b} - \hat{a}b}{a^2} \quad \# 3.15$$

Einfacher erhält man #3.15 aus #3.13 durch folgende formale Rechnung

$$\underline{x} = \frac{\underline{b}}{\underline{a}} = \frac{b + \varepsilon \hat{b}}{a + \varepsilon \hat{a}} = \frac{(b + \varepsilon \hat{b})(a - \varepsilon \hat{a})}{(a + \varepsilon \hat{a})(a - \varepsilon \hat{a})} = \frac{ab + \varepsilon(a\hat{b} - \hat{a}b)}{a^2} \quad \# 3.16$$

Speziell gibt es zu einer nicht rein dualen Zahl eine reziproke

$$\frac{1}{\underline{a}} = \frac{1}{a} - \varepsilon \frac{\hat{a}}{a^2} \quad \# 3.17$$

Die Menge der Brüche  $\frac{\underline{b}}{\underline{a}}$ , wobei  $\underline{b}$  eine beliebige,  $\underline{a}$  jedoch keine rein duale Zahl und auch nicht 0 darstellt, bildet den *Quotientenring des Ringes der dualen Zahlen* bezüglich der nullteilerfreien Menge der nicht rein dualen Zahlen.

Die Zahl

$$\underline{a}_\varepsilon = a - \varepsilon \hat{a} \quad \# 3.18$$

nennt man die  $\varepsilon$ -Konjugierte von #3.1 und spricht von einem  $\varepsilon$ -Konjugium. Das  $\varepsilon$ -Konjugium ist mit den rationalen Operationen (sofern diese ausführbar sind) vertauschbar.

$$(\underline{a} \pm \underline{b})_\varepsilon = \underline{a}_\varepsilon \pm \underline{b}_\varepsilon, \quad (\underline{ab})_\varepsilon = \underline{a}_\varepsilon \cdot \underline{b}_\varepsilon, \quad \left(\frac{\underline{a}}{\underline{b}}\right)_\varepsilon = \frac{\underline{a}_\varepsilon}{\underline{b}_\varepsilon} \quad \# 3.19$$

### 3.1.2 Synektische Funktionen

Wir wollen den Begriff einer durch eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1} \quad \# 3.20$$

darstellbaren, beliebig oft differenzierbaren reellen Funktion durch den Ansatz

$$\underline{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{a}_n \underline{x}^n \quad \# 3.21$$

ins Duale übertragen, wobei

$$\underline{a}_n = a_n + \varepsilon \hat{a}_n, \quad \underline{x}_n = x_n + \varepsilon \hat{x}_n \quad \# 3.22$$

ist. Anwendung des binomischen Lehrsatzes und Beachtung von  $\varepsilon^2 = \varepsilon^3 = \dots = 0$  ergibt

$$\underline{x}^n = (x + \varepsilon \hat{x})^n = x^n + \varepsilon \hat{x} \cdot n x^{n-1} \quad \# 3.23$$

Aus #3.21 findet man daher

$$\underline{f}(\underline{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \varepsilon \hat{a}_n)(x^n + \varepsilon \hat{x} \cdot n x^{n-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \varepsilon \left[ \hat{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n x^n \right] \quad \# 3.24$$

Wir nennen die duale Potenzreihe #3.21 konvergent, wenn die reellen Potenzreihen in #3.24 konvergieren. Die durch #3.24 definierten Funktionen nennt man nach E.STUDY<sup>4</sup> *synektische Funktionen* der dualen Variablen  $\underline{x}$ . Mit der Bezeichnung #3.20 und mit

<sup>4</sup>STUDY[1] S.199

$$\phi(x) = \sum_0^{\infty} \hat{a}_n x^n \quad \# 3.25$$

kann man #3.24 in der Form

$$\underline{f}(x) = f(x) + \varepsilon [\hat{x} f'(x) + \phi(x)] \quad \# 3.26$$

schreiben. Aus der Bauart der Gleichung #3.26 folgt

**Regel 3.1.2.1:** *Trennt man bei einer synektischen Funktion Real- und Dualteil, so hat der Realteil formal genau dieselbe Bauart wie die gegebene Funktion*

Geht man von einer *reellen Funktion* #3.20 aus, die man durch Zulassung dualer Argumente ins Duale fortsetzt, so wird aus #3.20

$$\underline{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \# 3.27$$

d.h. wir haben in #3.21 und #3.22  $\hat{a}_n \equiv 0$  zu setzen, daher wird nach #3.25  $\phi(x) = 0$ . Eine ins Duale erweiterte reelle Funktion läßt nach #3.26 die Darstellung

$$\underline{f}(x + \varepsilon \hat{x}) = f(x) + \varepsilon \hat{x} \cdot f'(x) \quad \# 3.28$$

zu. Wir stellen einige für das Folgende wichtige Ergebnisse zusammen

$$\frac{1}{\underline{x}} = \frac{1}{x + \varepsilon \hat{x}} = \frac{1}{x} - \varepsilon \frac{\hat{x}}{x^2} \quad \# 3.29$$

$$\sqrt{\underline{x}} = \sqrt{(x + \varepsilon \hat{x})} = \sqrt{x} + \varepsilon \frac{\hat{x}}{2\sqrt{x}} \quad \# 3.30$$

$$\underline{\sin x} = \sin(x + \varepsilon \hat{x}) = \sin x + \varepsilon \hat{x} \cdot \cos x \quad \# 3.31$$

$$\underline{\cos x} = \cos(x + \varepsilon \hat{x}) = \cos x - \varepsilon \hat{x} \cdot \sin x \quad \# 3.32$$

$$\underline{\tan x} = \tan(x + \varepsilon \hat{x}) = \tan x + \varepsilon \frac{\hat{x}}{\cos^2 x} \quad \# 3.33$$

$$\underline{\cot x} = \cot(x + \varepsilon \hat{x}) = \cot x - \varepsilon \frac{\hat{x}}{\sin^2 x} \quad \# 3.34$$

Man beachte bei diesen Beispielen das Zutreffen von Regel 3.1.2.1. Ferner sei darauf hingewiesen, daß die einzelnen Formeln für die Winkelfunktionen (Additionstheoreme etc.) auch für duales Argument gültig bleiben.

Zuletzt zeigen wir, daß auch für einen dualen Winkel gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \hat{x} \rightarrow 0}} \frac{\underline{\sin x}}{\underline{x}} = 1 \quad \# 3.35$$

allerdings unter der Voraussetzung, daß  $\lim \frac{\hat{x}}{x}$  existiert.. Trennt man nämlich Real- und Dualteil, so ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \hat{x} \rightarrow 0}} \frac{\sin x + \varepsilon \hat{x} \cdot \cos x}{x + \varepsilon \hat{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \hat{x} \rightarrow 0}} \left[ \frac{\sin x}{x} + \varepsilon \frac{\hat{x}}{x} \left( \cos x - \frac{\sin x}{x} \right) \right] = 1 \quad \# 3.36$$

## 3.2 Duale Vektoren

### 3.2.1 Duale Vektoren. Gerade. Speere

Es erweist sich als zweckmäßig, die PLÜCKER-Vektoren  $\underline{\mathbf{g}}, \underline{\mathbf{g}}^*$  ( $\underline{\mathbf{g}}\underline{\mathbf{g}}^* = 0$ ) einer Geraden zu einem *dualen Vektor* zusammenzufassen<sup>5</sup>. Bildet man dessen skalares Quadrat, so verschwindet wegen der PLÜCKER-Bedingung dessen Dualteil und der Betrag des Vektors erweist sich als reell:

$$\underline{\mathbf{g}}^* = \underline{\mathbf{g}} + \varepsilon \underline{\mathbf{g}}^*, \quad |\underline{\mathbf{g}}|^2 = |\underline{\mathbf{g}}|^2, \quad |\underline{\mathbf{g}}| = |\underline{\mathbf{g}}| \quad \# 3.37$$

Wegen der Homogenität der PLÜCKER-Vektoren darf #3.37 mit einem *reellen* Faktor  $\lambda$  multipliziert werden. Wir wollen in Zukunft *duale Vektoren mit reellem Betrag* wie in #3.37 durch einen hochgestellten Stern kennzeichnen.

**Satz 3.2.1.1:** *Durch einen bis auf einen reellen Faktor vorgegebenen dualen Vektor von reellem Betrag ist eine Raumgerade eindeutig bestimmt und umgekehrt*

Wählt man  $\lambda = \pm \frac{1}{|\underline{\mathbf{g}}^*|}$  als Faktor, so läßt sich #3.37 auf zwei Arten normieren, sodaß für den normierten Vektor  $\underline{\mathbf{g}}^\circ$  gilt

$$|\underline{\mathbf{g}}^\circ|^2 = 1 \quad \# 3.38$$

**Satz 3.2.1.2:** *Einem dualen Einheitsvektor entspricht in eineindeutiger Weise ein Speer des Raumes*

### 3.2.2 Dualer Winkel zweier Speere

Den beiden Speeren  $\underline{\mathbf{a}}^\circ, \underline{\mathbf{a}}^+$  ( $\underline{\mathbf{a}}^\circ \underline{\mathbf{a}}^+ = 0$ );  $\underline{\mathbf{b}}^\circ, \underline{\mathbf{b}}^+$  ( $\underline{\mathbf{b}}^\circ \underline{\mathbf{b}}^+ = 0$ ) entsprechen die dualen Einheitsvektoren  $\underline{\mathbf{a}}^\circ = \underline{\mathbf{a}}^\circ + \varepsilon \underline{\mathbf{a}}^+$ ,  $\underline{\mathbf{b}}^\circ = \underline{\mathbf{b}}^\circ + \varepsilon \underline{\mathbf{b}}^+$ . Deren Skalarprodukt

$$\underline{\mathbf{a}}^\circ \underline{\mathbf{b}}^\circ = (\underline{\mathbf{a}}^\circ + \varepsilon \underline{\mathbf{a}}^+)(\underline{\mathbf{b}}^\circ + \varepsilon \underline{\mathbf{b}}^+) = \underline{\mathbf{a}}^\circ \underline{\mathbf{b}}^\circ + \varepsilon (\underline{\mathbf{a}}^\circ \underline{\mathbf{b}}^+ + \underline{\mathbf{a}}^+ \underline{\mathbf{b}}^\circ) \quad \# 3.39$$

kann man wegen #1.18 und #1.90 auch in der Form

$$\underline{\mathbf{a}}^\circ \underline{\mathbf{b}}^\circ = \cos \varphi - \varepsilon \hat{\varphi} \sin \varphi \quad \# 3.40$$

schreiben. Faßt man den Winkel  $\varphi$  und die Länge  $\hat{\varphi}$  des Gemeinlotes der beiden Speere zu deren *dualen Winkel*<sup>6</sup>

$$\underline{\varphi} = \varphi + \varepsilon \hat{\varphi} \quad \# 3.41$$

zusammen, so erhält #3.40 wegen #3.41 und #3.32 die Gestalt

$$\underline{\mathbf{a}}^\circ \underline{\mathbf{b}}^\circ = \cos \underline{\varphi} \quad \# 3.42$$

womit volle Analogie zum Reellen hergestellt ist. Aus #3.40 folgt unmittelbar

**Satz 3.2.2.1:**  *$\underline{\mathbf{a}}^\circ \underline{\mathbf{b}}^\circ = 0$  ist notwendig und hinreichend für orthogonales Schneiden der beiden zugeordneten Speere*

Allgemeiner gilt

**Satz 3.2.2.2:** *Ist  $\underline{\mathbf{a}}^\circ \underline{\mathbf{b}}^\circ = c$  eine reelle Zahl, so schneiden die zugeordneten Speere einander*

<sup>5</sup> STUDY[1] S.205

<sup>6</sup> STUDY [2] S.41

### 3.2.3 Gemeinlot zweier Speere

Der Produktvektor

$$\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}}^\circ \times \underline{\mathbf{b}}^\circ = \mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ + \varepsilon (\mathbf{a}^+ \times \mathbf{b}^\circ + \mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^+) \quad \# 3.43$$

der beiden dualen Einheitsvektoren  $\underline{\mathbf{a}}^\circ, \underline{\mathbf{b}}^\circ$  wird i.a. keinen reellen Betrag haben, daher wird #3.43 i.a. nicht das Bild einer Raumgeraden sein. Nach #1.89 und #1.18 ist

$$\begin{aligned} |\underline{\mathbf{c}}|^2 &= [\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ + \varepsilon (\mathbf{a}^+ \times \mathbf{b}^\circ + \mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^+)]^2 = |\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|^2 + 2\varepsilon (\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ) [(\mathbf{a}^+ \times \mathbf{b}^\circ) + (\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^+)] = \\ &= \sin^2 \varphi + 2\varepsilon [(\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ)(\mathbf{a}^+ \times \mathbf{b}^\circ) + (\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ)(\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^+)] = \\ &= \sin^2 \varphi + 2\varepsilon \left[ \underbrace{(\mathbf{a}^\circ \mathbf{a}^+)}_0 |\mathbf{b}^\circ|^2 - (\mathbf{a}^\circ \mathbf{b}^\circ)(\mathbf{a}^+ \mathbf{b}^\circ) + |\mathbf{a}^\circ|^2 \underbrace{(\mathbf{b}^\circ \mathbf{b}^+)}_0 - (\mathbf{a}^\circ \mathbf{b}^+)(\mathbf{a}^\circ \mathbf{b}^\circ) \right] = \quad \# 3.44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sin^2 \varphi - 2\varepsilon (\mathbf{a}^\circ \mathbf{b}^\circ)(\mathbf{a}^\circ \mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^+ \mathbf{b}^\circ) = \sin^2 \varphi - 2\varepsilon \cos \varphi (-\hat{\varphi} \sin \varphi) = \\ &= \sin^2 \varphi + 2\varepsilon \hat{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi = (\sin \varphi + \varepsilon \hat{\varphi} \cos \varphi)^2 = \sin^2 (\varphi + \varepsilon \hat{\varphi}) \end{aligned}$$

also

$$|\underline{\mathbf{c}}|^2 = \sin^2 \varphi \quad \# 3.45$$

Normierung von #3.43 ergibt

$$\underline{\mathbf{c}}^\circ = \frac{\underline{\mathbf{a}}^\circ \times \underline{\mathbf{b}}^\circ}{|\underline{\mathbf{a}}^\circ \times \underline{\mathbf{b}}^\circ|} = \frac{\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ}{\sin \varphi} \quad \# 3.46$$

wieder einen Speer. Wegen  $\underline{\mathbf{a}}^\circ \underline{\mathbf{c}}^\circ = 0$  und  $\underline{\mathbf{b}}^\circ \underline{\mathbf{c}}^\circ = 0$  folgt aus Satz 3.2.2.1 der

**Satz 3.2.3.1:** Der durch #3.46 dargestellte Speer ist das Gemeinlot der durch  $\underline{\mathbf{a}}^\circ$  und  $\underline{\mathbf{b}}^\circ$  bestimmten Speere

Aus #3.44 folgt wegen #3.30

$$|\underline{\mathbf{c}}| = |\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ| - \varepsilon \frac{(\mathbf{a}^\circ \mathbf{b}^\circ)(\mathbf{a}^+ \mathbf{b}^\circ + \mathbf{a}^\circ \mathbf{b}^+)}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|}$$

daher wegen #3.29

$$\frac{1}{|\underline{\mathbf{c}}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|} + \varepsilon \frac{(\mathbf{a}^\circ \mathbf{b}^\circ)(\mathbf{a}^+ \mathbf{b}^\circ + \mathbf{a}^\circ \mathbf{b}^+)}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{c}}^\circ &= \frac{1}{|\underline{\mathbf{c}}|} \cdot \underline{\mathbf{c}} = \left[ \frac{1}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|} + \varepsilon \frac{(\mathbf{a}^\circ \mathbf{b}^\circ)(\mathbf{a}^+ \mathbf{b}^\circ + \mathbf{a}^\circ \mathbf{b}^+)}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|} \right] \cdot [\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ + \varepsilon (\mathbf{a}^+ \times \mathbf{b}^\circ + \mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^+)] = \\ &= \frac{\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|} + \varepsilon \left[ \frac{\mathbf{a}^+ \times \mathbf{b}^\circ + \mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^+}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|} + \frac{(\mathbf{a}^\circ \mathbf{b}^\circ)(\mathbf{a}^+ \mathbf{b}^\circ + \mathbf{a}^\circ \mathbf{b}^+)}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|} \cdot \frac{\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|^2} \right] = \mathbf{c}^\circ + \varepsilon \mathbf{c}^+ \end{aligned}$$

Trennt man in obigem Ausdruck Real- und Dualteil und verzichtet auf die Normierung der PLÜCKER-Koordinaten, so wird das Gemeinlot  $(\mathbf{c}, \mathbf{c}^*)$  der Geraden  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*)$ ,  $(\mathbf{b}, \mathbf{b}^*)$  festgelegt durch

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}^* = \mathbf{a}^* \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}^* + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \frac{(\mathbf{a}\mathbf{b})(\mathbf{a}\mathbf{b}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2} \quad \# 3.47$$

Für jeden beliebigen Speer  $\underline{g}^\circ$ , der  $\underline{c}^\circ$  #3.46 orthogonal schneidet, ist nach Satz 3.2.2.1  $\underline{g}^\circ \underline{c}^\circ = 0$ , daher gilt

**Satz 3.2.3.2:** *Verschwindet die Determinante  $(\underline{a}^\circ, \underline{b}^\circ, \underline{c}^\circ) = 0$  der dualen Einheitsvektoren dreier Speere, so haben die Speere dieselbe Gerade als Gemeinlot*

Das Verschwinden der Determinante kann man auch folgendermaßen interpretieren

**Satz 3.2.3.3:** *Alle Geraden, deren Speerkoordinaten*

$$\underline{g}^\circ = \alpha \underline{a}^\circ + \beta \underline{b}^\circ \quad \# 3.48$$

*Linearkombinationen der Speerkoordinaten zweier Raumgeraden sind, treffen das Gemeinlot von  $\underline{a}^\circ$  und  $\underline{b}^\circ$  unter rechtem Winkel. Sie bilden das Normalennetz dieses Gemeinlotes.*

Selbstverständlich hat man die Skalare  $\alpha$  und  $\beta$  so zu wählen, daß  $\underline{g}^\circ$  wieder ein Einheitsvektor wird.

**Satz 3.2.3.4:** *Alle Geraden des Raumes, deren Speerkoordinaten*

$$\underline{g}^\circ = \alpha \underline{a}^\circ + \beta \underline{b}^\circ + \gamma \underline{c}^\circ \quad \# 3.49$$

*Linearkombinationen mit reellen Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$  der Speerkoordinaten dreier gegebener Geraden sind, gehören der durch  $\underline{a}^\circ, \underline{b}^\circ, \underline{c}^\circ$  bestimmten Erzeugendenschar einer Strahlfläche 2. Ordnung an*

Beweis: Jede Treffgerade  $\underline{t}^\circ$  von  $\underline{a}^\circ, \underline{b}^\circ, \underline{c}^\circ$  muß nach Satz 3.2.2.2 die Bedingung  $\underline{a}^\circ \underline{t}^\circ = c_1$ ,  $\underline{b}^\circ \underline{t}^\circ = c_2$ ,  $\underline{c}^\circ \underline{t}^\circ = c_3$  erfüllen. Wegen #3.49 trifft dann auch jedes  $\underline{t}^\circ$  jedes  $\underline{g}^\circ$ . Da alle  $\underline{t}^\circ$  nach Kap. 1.5.2 eine Erzeugendenschar einer Fläche 2. Ordnung erfüllen, gehört  $\underline{g}^\circ$  der anderen Schar an.

**Satz 3.2.3.5:** *Alle Geraden des Raumes, deren Speerkordinaten*

$$\underline{g}^\circ = \alpha \underline{a}^\circ + \beta \underline{b}^\circ + \gamma \underline{c}^\circ + \delta \underline{d}^\circ \quad \# 3.50$$

*Linearkombinationen mit reellen Koeffizienten der Speerkoordinaten von vier gegebenen Geraden sind, gehören dem durch  $\underline{a}^\circ, \underline{b}^\circ, \underline{c}^\circ, \underline{d}^\circ$  bestimmten Strahlnetz an*

Beweis. Nach Satz 1.5.3.1 haben die vier gegebenen Geraden zwei Treffgerade. Wie oben erkennt man, daß alle Geraden  $\underline{g}^\circ$  diese Treffgeraden schneiden.

### 3.3 Das Übertragungsprinzip von STUDY<sup>7</sup>

Wir interpretieren die dualen Einheitsvektoren als Ortsvektoren eines *dualen Raumes*. Ihre Endpunkte erfüllen die Oberfläche der *dualen Einheitskugel*, deren Punkte demnach als Bilder der Speere des euklidischen Raumes aufgefaßt werden können. Den beiden Speeren derselben Trägergeraden entsprechen diametral gegenüberliegende Punkte der dualen Einheitskugel.

Der beschriebene Zusammenhang ist Gegenstand des STUDYschen Übertragungsprinzips, welches die Geometrie des Speerraumes auf die sphärische Geometrie der dualen Einheitskugel abbildet.

Es gelten folgende Sätze<sup>8</sup>

**Satz 3.3.1:** *Jedem Speer  $(\underline{a}^\circ, \underline{a}^\circ)$  des Raumes entspricht in umkehrbar eindeutiger Weise ein Punkt  $\underline{a}^\circ$  der dualen Einheitskugel*

<sup>7</sup> Eduard STUDY 1862-1930

<sup>8</sup> Konsequente Anwendung dieses Übertragungsprinzips bei STUDY [1]. Siehe auch WEISS [1]

**Satz 3.3.2:** Dem Winkel  $\varphi$  und dem Abstand  $\hat{\varphi}$  zweier Speere entspricht die Länge #3.41 des durch deren Bilder bestimmten Großkreisbogens auf der dualen Einheitskugel

Insbesondere folgt aus Satz 3.2.2.1

**Satz 3.3.3:** Den Speeren, welche den durch  $\underline{\mathbf{a}}^\circ$  repräsentierten Speer orthogonal schneiden, entsprechen die Punkte des dualen Kugelgroßkreises mit dem reellen Radius  $\pi/2$  und dem Pol  $\underline{\mathbf{a}}^\circ$

### 3.4 Duale Quaternionen (Biquaternionen)

#### 3.4.1 Definitionen. Rechenregeln

Es sei

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \hat{\mathbf{a}}, \quad \hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a}, \quad \underline{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \varepsilon \hat{\mathbf{a}}, \quad \underline{\hat{\mathbf{a}}} = \hat{\mathbf{a}} + \varepsilon \mathbf{a} \quad \# 3.51$$

Dann können wir die *duale Quaternion (Biquaternion)*

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \varepsilon \hat{\mathbf{A}} \quad \# 3.52$$

bilden<sup>9</sup>. Durch Übergang zur konjugierten Quaternion #2.5 und Bildung des  $\varepsilon$ -Konjugiums #3.18 lassen sich aus #3.52 folgende weiteren Quaternionen ableiten:

$$\tilde{\underline{\mathbf{A}}} = \tilde{\underline{\mathbf{A}}} + \varepsilon \tilde{\underline{\hat{\mathbf{A}}}} = \underline{\mathbf{a}} - \underline{\hat{\mathbf{a}}}, \quad \underline{\mathbf{A}}_\varepsilon = \mathbf{A} - \varepsilon \hat{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{a}}_\varepsilon + \underline{\hat{\mathbf{a}}}_\varepsilon, \quad \tilde{\underline{\hat{\mathbf{A}}}}_\varepsilon = \tilde{\underline{\hat{\mathbf{A}}}} - \varepsilon \tilde{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\hat{\mathbf{a}}}_\varepsilon - \underline{\mathbf{a}}_\varepsilon \quad \# 3.53$$

Man erkennt leicht die Gültigkeit der Regeln

$$(\underline{\mathbf{A}} \pm \underline{\mathbf{B}})_\varepsilon = \underline{\mathbf{A}}_\varepsilon \pm \underline{\mathbf{B}}_\varepsilon, \quad (\underline{\mathbf{A}} \circ \underline{\mathbf{B}})_\varepsilon = \underline{\mathbf{A}}_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{B}}_\varepsilon \quad \# 3.54$$

Alle für reelle Quaternionen gültigen Rechenregeln übertragen wir auch auf die dualen Quaternionen.

#### 3.4.2 Darstellung der Raumelemente durch Biquaternionen

Nach Satz 3.2.1.1 werden den *Raumgeraden* gewisse duale Vektoren als spezielle Biquaternionen zugeordnet

$$\underline{\mathbf{G}} = \underline{\mathbf{g}}^* = \mathbf{g} + \varepsilon \hat{\mathbf{g}}^*, \quad \underline{\mathbf{G}} + \underline{\tilde{\mathbf{G}}} = 0, \quad \underline{\mathbf{G}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{G}}} = \lambda^2 \quad \lambda^2 \text{ reell } > 0 \quad \# 3.55$$

Ebenso kann man den Punkten  $\mathbf{x}$  die Quaternionen<sup>10</sup>

$$\underline{\mathbf{X}} = 1 + \varepsilon \mathbf{x}, \quad \underline{\mathbf{X}} = \underline{\tilde{\mathbf{X}}}_\varepsilon, \quad \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{X}}_\varepsilon = 2 \quad \# 3.56$$

den Ebenen  $(\mathbf{n}, \mathbf{d})$  die Quaternionen<sup>11</sup>

$$\underline{\mathbf{N}} = \mathbf{n} + \varepsilon \mathbf{d}, \quad \underline{\tilde{\mathbf{N}}} + \underline{\mathbf{N}}_\varepsilon = 0 \quad \# 3.57$$

zuordnen, wobei #3.55, #356, #357 beigefügten Bedingungen notwendig und hinreichend sind, um eine Quaternion als *Geradenquaternion*, *Punktquaternion* bzw. *Ebenenquaternion* zu charakterisieren. #3.55 und #3.57 sind homogen, d.h. sie lassen Multiplikationen mit *reellen* Faktoren zu. Setzt man in #3.55 jedoch  $\lambda^2 = 1$ , so geht man zu den *inhomogenen Speerkoordinaten* über.

Die Inzidenzbedingungen #1.53, #1.62, #1.76 nehmen mit obigen Bezeichnungen folgende Formen an

<sup>9</sup> CLIFFORD [1]

<sup>10</sup> STUDY [2] S.41

<sup>11</sup> STUDY [2] S.42

$$\text{Punkt - Ebene} \quad \underline{\mathbf{N}} \circ \underline{\mathbf{X}} - \underline{\mathbf{X}}_{\underline{\mathbf{e}}} \circ \underline{\mathbf{N}}_{\underline{\mathbf{e}}} \quad \# 3.58$$

$$\text{Punkt - Gerade} \quad \underline{\mathbf{N}} \circ \underline{\mathbf{g}}_{\underline{\mathbf{e}}}^* - \underline{\mathbf{g}}^* \circ \underline{\mathbf{X}} = 0 \quad \# 3.59$$

$$\text{Ebene - Gerade} \quad \underline{\mathbf{N}} \circ \underline{\mathbf{g}}^* + \underline{\mathbf{g}}_{\underline{\mathbf{e}}}^* \circ \underline{\mathbf{N}} = 0 \quad \# 3.60$$

### 3.5 Strahlflächen

#### 3.5.1 Abbildung auf die duale Einheitskugel

Unterwirft man eine Gerade einer Bewegung, so überstreicht sie eine *Strahlfläche*. Die einzelnen Lagen der *Erzeugenden* der Strahlfläche legen wir durch ihre Speerkoordinaten

$$\underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t), \underline{\mathbf{g}}^+(t), |\underline{\mathbf{g}}^{\circ}|^2 = 1, \underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t)\underline{\mathbf{g}}^+(t) = 0 \quad \# 3.61$$

fest. Eine besonders elegante Behandlung der Strahlflächen wird durch Anwendung des *Übertragungsprinzips von STUDY* ermöglicht<sup>12</sup>, indem wir jedem Speer den dualen Einheitsvektor

$$\underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t), |\underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t)|^2 = 1 \quad \# 3.62$$

zuordnen. Der Menge der Erzeugenden der Strahlfläche entspricht dann eine Kurve auf der dualen Einheitskugel.

Betrachten wir zwei zu den Parameterwerten  $t$  und  $t+\Delta t$  gehörende Erzeugende der Fläche. Der duale Winkel  $\Delta\varphi$  #3.41 der beiden Erzeugenden wird nach #3.42 durch

$$\cos \Delta\varphi = \underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t)\underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t+\Delta t) = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \quad \# 3.63$$

festgelegt. Aus #3.63 folgt wegen #3.62

$$\begin{aligned} 4 \cdot \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} &= 2 - 2 \cdot \underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t)\underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t+\Delta t) = |\underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t+\Delta t)|^2 - 2 \cdot \underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t)\underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t+\Delta t) + |\underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t)|^2 = \\ &= |\underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t+\Delta t) - \underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t)|^2 \end{aligned} \quad \# 3.64$$

Dividiert man beide Seiten von #3.64 durch  $\Delta t^2$ , so erhält man

$$\left( \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right)^2 = \left| \frac{\underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t+\Delta t) - \underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t)}{\Delta t} \right|^2 \quad \# 3.65$$

Der Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  sowie Trennung von Real- und Dualteil ergibt wegen #3.35

$$\left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 = |\underline{\dot{\mathbf{g}}}|^2 \Rightarrow \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 = |\underline{\dot{\mathbf{g}}}|^2, \frac{\partial\varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial t} = \underline{\dot{\mathbf{g}}}\underline{\dot{\mathbf{g}}}^+ \quad \# 3.66$$

Die mit Hilfe von #3.66 berechnete Größe

$$\mathbf{d} = \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi} = \frac{\underline{\dot{\mathbf{g}}}\underline{\dot{\mathbf{g}}}^+}{|\underline{\dot{\mathbf{g}}}|^2} \quad \# 3.67$$

nennt man nach BLASCHKE<sup>13</sup> den *Drall* der Fläche entlang der betrachteten Erzeugenden<sup>14</sup>. Er stellt den Grenzwert des Verhältnisses von Abstand und Winkel zweier Erzeugenden der Strahlfläche dar.

<sup>12</sup> BLASCHKE [2] S.191 ff

Betrachtet man (siehe später Kap.16.1.3)  $\underline{a}^\circ(t)$  als Achse,  $\underline{a}^\circ(t + \Delta t)$  als Schraubtangente einer Schraubung, so erhält man wegen #1.18 und #1.89 den Grenzwert des Schraubparameters für  $\Delta t \rightarrow 0$  nach #16.32

$$p = -d \quad \# 3.68$$

**Satz 3.5.1.1:** *Der Drall einer Strahlfläche und der Parameter der durch benachbarte Erzeugende bestimmten Schraubung sind entgegengesetzt gleich. Rechtsgewundene Erzeugende haben negativen, linksgewundene positiven Drall<sup>15</sup>*

Für die Grenzlage des Gemeinlotes zweier Erzeugenden gilt nach #3.46 wegen #3.66

$$\underline{g}_1^\circ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{g}^\circ(t) \times \underline{g}^\circ(t + \Delta t)}{\sin \Delta \varphi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \underline{g}^\circ(t) \times \frac{\underline{g}^\circ(t + \Delta t) - \underline{g}^\circ(t)}{\sin \Delta \varphi} = \frac{\underline{g}^\circ \times \dot{\underline{g}}}{|\dot{\underline{g}}|} \quad \# 3.69$$

Man nennt  $\underline{g}_1^\circ$  die *Zentraltangente* der betrachteten Erzeugenden  $\underline{g}^\circ$ , die von  $\underline{g}^\circ$  und  $\underline{g}_1^\circ$  aufgespannte Tangentialebene die *Zentraltangentialebene*, deren Berührungspunkt  $\underline{s}$  den *Zentralpunkt*, *Striktionspunkt* oder *Kehlpunkt* der Erzeugenden.

Mit Hilfe der durch

$$\underline{g}_2^\circ = \frac{\dot{\underline{g}}}{|\dot{\underline{g}}|} \quad \# 3.70$$

definierten *Zentralnormalen* kann man #3.69 in der Form

$$\underline{g}_1^\circ = \underline{g}^\circ \times \underline{g}_2^\circ \quad \# 3.71$$

schreiben. Aus #3.62 folgt durch Differentiation

$$\underline{g}^\circ \underline{g}_2^\circ = 0 \Rightarrow \underline{g}^\circ \dot{\underline{g}} = 0, \quad \underline{g}^\circ \dot{\underline{g}}^+ + \dot{\underline{g}} \underline{g}^+ = 0 \quad \# 3.72$$

$\underline{g}^\circ, \underline{g}_1^\circ, \underline{g}_2^\circ$  bilden daher die Schenkel des *begleitenden Dreibeins* der Erzeugenden der Strahlfläche. Die von  $\underline{g}^\circ$  und  $\underline{g}_2^\circ$  aufgespannte Ebene heißt *asymptotische Ebene*.

Mit Hilfe der Größe

$$\underline{d} = 1 + \varepsilon d \quad \# 3.73$$

wird

$$|\dot{\underline{g}}|^2 = |\underline{g}^\circ|^2 \left( 1 + 2\varepsilon \frac{\dot{\underline{g}} \underline{g}^+}{|\dot{\underline{g}}|^2} \right) = |\underline{g}^\circ|^2 d^2, \quad |\dot{\underline{g}}| = |\underline{g}^\circ| d \quad \# 3.74$$

Daher kann man

$$\underline{g}_2^\circ = \frac{1}{|\dot{\underline{g}}|} (1 - \varepsilon d) \dot{\underline{g}} = \frac{1}{|\dot{\underline{g}}|} \underline{d}_\varepsilon \dot{\underline{g}} \quad \# 3.75$$

setzen. Trennung von Real- und Dualteil in #3.75 und #3.71 ergibt

$$\underline{g}_2^\circ = \frac{\dot{\underline{g}}}{|\dot{\underline{g}}|}, \quad \underline{g}_1^\circ = \frac{\dot{\underline{g}}^+ - d \dot{\underline{g}}}{|\dot{\underline{g}}|} = \frac{(\dot{\underline{g}} \times \dot{\underline{g}}^+) \times \dot{\underline{g}}}{|\dot{\underline{g}}|^3} \quad \# 3.76$$

<sup>13</sup> Wilhelm BLASCHKE 1885-1862

<sup>14</sup> BLASCHKE [2] S.195

<sup>15</sup> In der Literatur ist die Vorzeichenfestsetzung nicht einheitlich. So wird der Drall auch gleich dem Parameter der genannten Schraubung gesetzt, z.B. bei MÜLLER-KRAMES [1] S.9 ff

und

$$\mathbf{g}_1^{\circ} = \frac{\mathbf{g}^{\circ} \times \dot{\mathbf{g}}}{|\dot{\mathbf{g}}|}, \quad \mathbf{g}_1^{+} = \frac{\mathbf{g}^{+} \times \dot{\mathbf{g}} + \mathbf{g}^{\circ} \times \dot{\mathbf{g}}^{+} - d\mathbf{g}^{\circ} \times \dot{\mathbf{g}}}{|\dot{\mathbf{g}}|} \quad \# 3.77$$

Da  $\mathbf{g}_1^{+} \perp \mathbf{g}_1^{\circ}$  ist, muß sich  $\mathbf{g}_1^{+}$  als Linearkombination von  $\mathbf{g}^{\circ}$  und  $\dot{\mathbf{g}}$  darstellen lassen. Aus dem Ansatz  $\mathbf{g}^{+} \times \dot{\mathbf{g}} + \mathbf{g}^{\circ} \times \dot{\mathbf{g}}^{+} - d\mathbf{g}^{\circ} \times \dot{\mathbf{g}} = \lambda \mathbf{g}^{\circ} + \mu \dot{\mathbf{g}}$  erhält man durch sukzessive skalare Multiplikation mit  $\mathbf{g}^{\circ}$  und  $\dot{\mathbf{g}}$  wegen #3.72  $\lambda$  und  $\mu$ . Dann kann man #3.77 durch

$$\mathbf{g}_1^{\circ} = \frac{\mathbf{g}^{\circ} \times \dot{\mathbf{g}}}{|\dot{\mathbf{g}}|}, \quad \mathbf{g}_1^{+} = -\frac{(\mathbf{g}^{\circ}, \dot{\mathbf{g}}, \mathbf{g}^{+})}{|\dot{\mathbf{g}}|} \cdot \mathbf{g}^{\circ} - \frac{(\mathbf{g}^{\circ}, \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}}^{+})}{|\dot{\mathbf{g}}|^3} \cdot \dot{\mathbf{g}} \quad \# 3.78$$

ersetzen.

Der Zentralpunkt  $\mathbf{s}$  ist der Schnittpunkt der Erzeugenden #3.61 und der Zentralnormalen #3.76. Daher folgt aus #1.86

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{g}^{\circ}(\mathbf{g}^{\circ}, \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}}^{+}) - \dot{\mathbf{g}}(\mathbf{g}^{\circ}, \dot{\mathbf{g}}, \mathbf{g}^{+}) + (\mathbf{g}^{\circ} \times \dot{\mathbf{g}})(\dot{\mathbf{g}}\mathbf{g}^{+})}{|\dot{\mathbf{g}}|^2} \quad \# 3.79$$

Als Punkt der Erzeugenden #3.61 kann man  $\mathbf{s}$  nach #1.69 in der Form  $\mathbf{s} = \mathbf{g}^{\circ} \times \mathbf{g}^{+} + \rho \mathbf{g}^{\circ}$  ansetzen. Identifiziert man dies mit #3.79 und multipliziert diese Beziehung mit  $\mathbf{g}^{\circ}$ , so ergibt sich  $\rho$ . Dann wird

$$\mathbf{s} = \mathbf{g}^{\circ} \times \mathbf{g}^{+} + \mathbf{g}^{\circ} \frac{(\mathbf{g}^{\circ}, \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}}^{+})}{|\dot{\mathbf{g}}|^2} \quad \# 3.80$$

Der Ort der Zentralpunkte  $\mathbf{s}$  heißt *Striktionslinie*. Für deren Tangente (*Striktionstangente*) folgt aus #3.80

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{g}} \times \mathbf{g}^{+} + \mathbf{g}^{\circ} \times \dot{\mathbf{g}}^{+} + \dot{\mathbf{g}} \frac{(\mathbf{g}^{\circ}, \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}}^{+})}{|\dot{\mathbf{g}}|^2} + \mathbf{g}^{\circ} \left[ \frac{(\mathbf{g}^{\circ}, \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}}^{+})}{|\dot{\mathbf{g}}|^2} \right]^{\cdot} \quad \# 3.81$$

Da die Striktionstangente in der Zentraltangentialebene liegt, ist #3.81 eine Linearkombination von  $\mathbf{g}^{\circ}$  und  $\mathbf{g}_1^{\circ}$ :

$$\dot{\mathbf{s}} = u\mathbf{g}^{\circ} + v\mathbf{g}^{\circ} \times \dot{\mathbf{g}} = u\mathbf{g}^{\circ} + v|\dot{\mathbf{g}}|\mathbf{g}_1^{\circ} \quad \# 3.82$$

Setzt man #3.81 gleich #3.82 und multipliziert die sich ergebende Gleichung sukzessive skalar mit  $\mathbf{g}^{\circ}$  und  $\mathbf{g}^{\circ} \times \dot{\mathbf{g}}$ , so findet man

$$u = (\mathbf{g}^{\circ}, \dot{\mathbf{g}}, \mathbf{g}^{+}) + \left[ \frac{(\mathbf{g}^{\circ}, \dot{\mathbf{g}}, \mathbf{g}^{+})}{|\dot{\mathbf{g}}|^2} \right]^{\cdot}, \quad v = \frac{\dot{\mathbf{g}}\dot{\mathbf{g}}^{+}}{|\dot{\mathbf{g}}|^2} = d \quad \# 3.83$$

Für den Schnittwinkel  $\sigma$  der Striktionslinie mit der Erzeugenden (*Striktionswinkel*) ergibt sich daher

$$\tan \sigma = \frac{d|\dot{\mathbf{g}}|}{u} \quad \# 3.84$$

Aus #3.82 erkennt man, daß die Zentraltangente  $\mathbf{g}_1^{\circ}$  i.a. nicht Striktionstangente ist. Die Striktionslinie ist i.a. also keine Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden.

### 3.5.2 Differentialgeometrische Eigenschaften von Strahlflächen

Es ist naheliegend, die Strahlfläche mit Hilfe der Parameter  $t$  und  $s$  durch

$$\mathbf{x}(t, s) = \mathbf{s}(t) + s\mathbf{g}^\circ(t) \quad \# 3.85$$

darzustellen. Dabei bedeutet  $s$  den Abstand eines Flächenpunktes vom Striktionspunkt der durch ihn gehenden Erzeugenden. Eine durch  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(t)$  gegebene Flächenkurve hat wegen #3.82 und #3.83 die Tangentenrichtung

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{s}} + \dot{s}\mathbf{g}^\circ + s\dot{\mathbf{g}} = (\dot{s} + u)\mathbf{g}^\circ + s\dot{\mathbf{g}} + d\mathbf{g}^\circ \times \dot{\mathbf{g}} \quad \# 3.86$$

Die Flächennormale in einem Kurvenpunkt ist

$$\mathbf{n} = \mathbf{g}^\circ \times \dot{\mathbf{x}} = s\mathbf{g}^\circ \times \dot{\mathbf{g}} + d\mathbf{g}^\circ \times (\mathbf{g}^\circ \times \dot{\mathbf{g}}) = -d\dot{\mathbf{g}} + s\mathbf{g}^\circ \times \dot{\mathbf{g}} \quad \# 3.87$$

Für den Winkel  $\nu$  von  $\mathbf{n}$  gegen die Zentralnormale folgt aus #1.87

$$\mathbf{g}^\circ \tan \nu = \frac{\dot{\mathbf{g}} \times \mathbf{n}}{\dot{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}} = \frac{s\dot{\mathbf{g}} \times (\mathbf{g}^\circ \times \dot{\mathbf{g}})}{-d|\dot{\mathbf{g}}|^2} = -\frac{s}{d} \cdot \mathbf{g}^\circ \quad \# 3.88$$

Daher ist

$$\mathbf{s} = -d \cdot \tan \nu \quad \# 3.89$$

Da #3.89 jedem Punkt einer Erzeugenden mit der Flächennormalen auch die Tangentialebene zuordnet, nennt man diese Beziehung die *Berührungskorrelation* dieser Erzeugenden<sup>16</sup>. Daraus folgt

**Satz 3.5.2.1:** *Haben zwei Strahlflächen eine Erzeugende gemeinsam und stimmen sie in Zentralpunkt, Zentraltangente und Drall überein, so berühren sie einander längs dieser Erzeugenden.*

Läßt man in #3.88  $s$  über alle Grenzen wachsen, so nimmt  $\nu$  den Wert  $\pi/2$  an. Die Tangentialebene fällt dann mit der asymptotischen Eben zusammen, deren Berührungspunkt der Fernpunkt der Erzeugenden ist.

**Satz 3.5.2.2:** *Die asymptotische Ebene ist die Tangentialebene an die Fläche im Fernpunkt der betrachteten Erzeugenden*

### 3.5.3 Torsen

Wir betrachten jene Strahlflächen, deren Drall #3.67 verschwindet. Dann muß

$$\dot{\mathbf{g}}\dot{\mathbf{g}}^+ = 0 \quad \#3.90$$

sein. Aus #3.90 und #3.72 folgt, daß  $\dot{\mathbf{g}}$  sowohl auf  $\dot{\mathbf{g}}^+$  als  $\mathbf{g}^\circ$  normal steht, sich daher durch

$$\lambda \dot{\mathbf{g}} = \dot{\mathbf{g}}^+ \times \mathbf{g}^\circ \quad \# 3.91$$

ausdrücken läßt. Die Striktionslinie #3.80 wird dann wegen  $(\mathbf{g}^\circ, \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}}^+) = \dot{\mathbf{g}}(\dot{\mathbf{g}}^+ \times \mathbf{g}^\circ) = \lambda|\dot{\mathbf{g}}|^2$  durch  $\mathbf{s} = \mathbf{g}^\circ \times \dot{\mathbf{g}}^+ + \lambda\mathbf{g}^\circ$  dargestellt. Die Tangente an die Striktionslinie hat bei Beachtung von #3.91 und von  $\mathbf{g}^\circ \dot{\mathbf{g}}^+ = 0$  die Richtung

$$\dot{\mathbf{s}} = \left( \dot{\lambda} + \frac{\mathbf{g}^+ \dot{\mathbf{g}}^+}{\lambda} \right) \mathbf{g}^\circ \quad \# 3.92$$

sie fällt also mit der Erzeugenden der Strahlfläche zusammen, letztere ist demnach die Tangentialebene der Striktionslinie. Wie man umgekehrt leicht überprüft, hat jede Tangentialebene einer Raumkurve verschwindenden Drall.

<sup>16</sup> Vgl. Etwa MÜLLER-KRAMES [1] S.68 ff

**Satz 3.5.3.1:** Die Tangentenfläche einer Raumkurve (*Torse*) ist durch verschwindenden Drall gekennzeichnet.

Man nennt die Raumkurve die *Gratlinie* der Torse, den Berührungspunkt der Erzeugenden deren *Gratpunkt*.

Aus #3.89 ergibt sich für  $d = 0$ , daß  $\sigma = \pi/2$  für beliebiges  $s$  ist.

**Satz 3.5.3.2:** Eine Torse wird längs ihrer Erzeugenden von derselben Tangentialebene berührt.

### 3.5.4 Zylinder

Die *Zylinderflächen* sind durch konstante Richtung  $\mathbf{g}^\circ(t) \equiv \mathbf{c}^\circ$  ihrer Erzeugenden gekennzeichnet. Daher ist

$$\dot{\mathbf{g}}(t) = 0 \qquad \qquad \qquad \# 3.93$$

Der Begriff des Dralls läßt sich hier nicht anwenden.

### 3.5.5 Richtkegel, Krümmungskegel

Trägt man den Richtungsvektor  $\mathbf{g}^\circ(t)$  jeder Erzeugenden einer Strahlfläche von von einem Punkt  $O$  aus ab, so wird dadurch der *Richtkegel* der betrachteten Strahlfläche, dessen Erzeugenden zu denen der Strahlfläche parallel sind, festgelegt. Die Endpunkte der Einheitsvektoren  $\mathbf{g}^\circ(t)$  beschreiben auf der Einheitskugel um  $O$  das *sphärische Bild* der Strahlfläche. Der Tangentenvektor  $\dot{\mathbf{g}}(t)$  des sphärischen Bildes spannt zusammen mit  $\mathbf{g}^\circ(t)$  die Tangentialebene des Richtkegels auf. Wegen #3.76 ist diese Tangentialebene parallel zur asymptotischen Ebene.

**Satz 3.5.5.1:** Die asymptotische Ebene einer Strahlfläche und die Tangentialebene des Richtkegels entlang entsprechender Erzeugenden sind parallel.

Die den Richtkegel darstellende Beziehung hat, vom Fettdruck abgesehen, formal genau dieselbe Bauart wie die die Strahlfläche darstellende duale Beziehung #3.62. Projiziert man den Krümmungskreis des sphärischen Bildes aus dem Kugelmittelpunkt, so nennt man den so erhaltenen Kegel den *Krümmungskegel* des Richtkegels. Seine Achse ist die Krümmungsachse des sphärischen Bildes.

# Konstruktive Grundlagen

## 4 Normalprojektion

### 4.1 Momentenvektor eines Stabes

#### 4.1.1 Vektor der Winkelgeschwindigkeit

Dreht sich ein Punkt  $X(\mathbf{x})$  um eine durch den Ursprung  $O$  gehende Achse  $\mathbf{a}$  mit dem *Winkelgeschwindigkeitsvektor*  $\bar{\omega}$ , so ist die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  des Punktes das Moment des durch  $\mathbf{a}$  und  $\bar{\omega}$  festgelegten Stabes um den Punkt  $\mathbf{x}$  (Siehe später Kap.10 1):

$$\mathbf{v} = \bar{\omega} \times \mathbf{x} \quad \# 4.1$$

Die Drehachse  $\mathbf{a}$  habe die in Fig.4.1 durch Auf und Grundriß festgelegte Raumlage. Die Drehung erfolge mit einer Tourenzahl von 300 U/min. Der Punkt  $X$  habe in bezug auf ein mit dem Gestell verknüpftes Koordinatensystem die Koordinaten  $x(0,8 \text{ m}|1,2 \text{ m}|0,2 \text{ m})$ .

### 4.2 Maßstabsfragen

Um allen gegebenen bzw. ermittelten Größen in der Zeichnung Strecken zuzuordnen, muß man sich geeigneter *Maßstäbe* bedienen.

Durch den *Längenmaßstab* wird der in Metern gemessenen Strecke der Länge  $l$  in der Zeichnung eine Strecke von  $l_z$  Zeicheneinheiten  $E$  zugeordnet. Weist man einem Meter eine Strecke von  $\lambda$  Einheiten  $E$  zu, so ist

$$l_z = \lambda \cdot l \quad \# 4.2$$

Die Abtragung von  $\lambda$  Einheiten  $E$  pro Meter pflegt man durch Angabe des Längenmaßstabes  $M_l$  in folgender Form auszudrücken

$$M_l = \lambda \frac{E}{\text{m}} \quad \# 4.3$$

Ordnen wir der pro Sekunde überstrichenen Winkeleinheit (gemessen im Bogenmaß) eine Strecke von  $\delta$  Zeicheneinheiten  $E$  zu, so entspricht der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  die Strecke

$$\omega_z = \delta \omega \quad \# 4.4$$

Der *Winkelgeschwindigkeitsmaßstab* ist daher

$$M_\omega = \delta \frac{E}{\text{s}^{-1}} \quad \# 4.5$$

Hat ein der Drehung unterworfenen Punkt den Abstand  $l$  von der Drehachse, so ist der Betrag  $v$  der (in  $\text{ms}^{-1}$  gemessenen) Geschwindigkeit

$$v = \omega l \quad \# 4.6$$

Ihr entspreche in der Zeichnung eine Strecke der Länge  $v_z$ . Bildet man das der rechten Seite von #4.6 entsprechende Produkt  $\omega_z l_z$ , so hat dieses die Dimension einer Fläche. Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen, setzen wir

$$v_z c = \omega_z l_z \quad \# 4.7$$

wobei die beliebig gewählte *Momentenkonstante*  $c$  die Dimension einer Länge hat. Mit #4.2, #4.4 und #4.6 folgt aus #4.7

$$v_z = \frac{\delta\lambda}{c} v = \gamma v \quad \# 4.8$$

woraus sich für den *Geschwindigkeitsmaßstab* ergibt

$$M_v = \frac{M_l M_\omega}{c} = \gamma \frac{E}{\text{ms}^{-1}} = \frac{\delta\lambda}{c} \cdot \frac{E}{\text{ms}^{-1}}, \quad \gamma = \frac{\delta\lambda}{c} \quad \# 4.9$$

**Figur 4.1** Rein formal erhält man #4.9 durch Multiplikation der Maßstäbe #4.3 und #4.5 für Länge und Winkelgeschwindigkeit, wobei sich im Nenner des Bruches von selbst die Dimension einer Geschwindigkeit einstellt. Da jedoch im Zähler die Flächeneinheit  $E^2$  auftritt, hat man durch die Größe  $c$  von der Dimension einer Länge zu dividieren.

Ganz ähnlich bestimmt man die Maßstäbe  $M_\beta$  und  $M_b$  für *Winkelbeschleunigung*  $\beta$  und die *Beschleunigung*  $b$

$$M_\beta = \rho \frac{E}{\text{s}^{-2}} = \frac{M_\omega^2}{c} = \frac{M_v^2}{M_l^2} c, \quad \rho = \frac{\delta^2}{c} = \frac{c\gamma^2}{\lambda^2} \quad \# 4.10$$

$$M_b = \sigma \frac{E}{\text{ms}^{-2}} = \frac{M_l M_\beta}{c} = \frac{M_v M_\omega}{c}, \quad \sigma = \frac{\lambda\rho}{c} = \frac{\gamma\delta}{c} \quad \# 4.11$$

### 4.3 Konstruktionsbeispiel

#### 4.3.1 Wahl der Maßstäbe

Um die in Kap.4.1 gestellte Aufgabe zeichnerisch zu lösen, haben wir #4.1 konstruktiv auszuwerten. Wir wählen folgende Maßstäbe:  $M_l = 5 \frac{E}{\text{m}}$ ,  $M_\omega = \frac{1}{5} \frac{E}{\text{s}^{-1}}$ ,  $c = 6E$ ,  $M_v = \frac{1}{6} \frac{E}{\text{ms}^{-1}}$ . Der gegebene Punkt X wird dann auf den Punkt  $X_z(4E|6E|1E)$  abgebildet (Fig.4.1). Der gegebenen Tourenzahl von  $300 \text{ U.min}^{-1}$  entspricht eine Winkelgeschwindigkeit der Größe

$\omega = 300 \cdot \frac{2\pi}{60} \text{ s}^{-1} = 10\pi \text{ s}^{-1}$ , die in der Zeichnung durch eine Strecke der Länge  $w_z = 2\pi E$  dargestellt wird. Selbstverständlich werden wir in der Zeichnung selbst überall den Index  $z$  weglassen.

Von der von  $a$  und  $X$  aufgespannten Ebene  $\varepsilon$  beschaffen wir und die erste Spur  $e_1^1$ , um die wir  $\varepsilon$  mit Hilfe eines Seitenrisses (Rißachse 13) nach  $\pi_1$  drehen<sup>2</sup>. Auf der gedrehten Lage  $a_0$  von  $a$  kann man die gedreht Lage  $\bar{\omega}_{0z}$  des Vektors der Winkelgeschwindigkeit in wahrer Größe auftragen. Der Abstand  $l_z$  des gedrehten Punktes  $X_0$  von  $a_0$  kann gleichfalls unmittelbar entnommen werden. Nach #4.7 kann dann  $v_z$  aus der Proportion

$$\omega_z : c = v_z : l_z \quad \# 4.12$$

mit Hilfe einer Nebenfigur gewonnen werden.  $v_z$  erscheint im 3.Riß in wahrer Größe und hat die aus #4.1 mit Hilfe der Rechten-Hand-Regel bestimmte Orientierung.

<sup>1</sup> WUNDERLICH [3] S.24 Abb.13

<sup>2</sup> WUNDERLICH [3] S.31 ff

### 4.3.2 Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit

Ist die Drehachse  $\mathbf{a}$  gegeben und der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  eines Punktes  $X$  bekannt (natürlich muß  $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$  sein), so läßt sich der Vektor der Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}$  in naheliegender Weisedurch Umkehrung der in Fig.4.1 ausgeführten Konstruktion ermitteln.

### 4.3.3 Lage der Drehachse

Häufig ist der Vektor  $\bar{\omega}$  der momentanen Winkelgeschwindigkeit sowie die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  eines Punktes  $X$  bekannt ( $\bar{\omega}$  und  $\mathbf{v}$  müssen orthogonale Vektoren sein), und die Raumlage der Drehachse ist gesucht. Auch hier liegt eine Umkehrung der Konstruktion von Fig.4.1 vor.

## 4.4 Momentenvektor eines Stabes

Um den Momentenvektor des Stabes  $(\mathbf{a}, \bar{\omega})$  bezüglich des Punkte  $X$  zu bestimmen, kann man nach #1.57 einen beliebigen, von einem Punkt der Trägergeraden des Stabes ausgehenden, in  $X$  endigenden Vektor wählen. Es empfiehlt sich, einen zu einer Bildebene, **Figur 4.2** etwa  $\pi_1$ , parallelen Vektor  $\mathbf{y}$  zu wählen (Fig.4.2)<sup>3</sup>. Wegen der speziellen Wahl von  $\mathbf{y}$  ist  $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$  und nach Kap.1.1.10 kann man #4.1 in der Gestalt

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_3 = \bar{\omega} \times \mathbf{y} = (\bar{\omega}' + \bar{\omega}_3) \times \mathbf{y}' = \bar{\omega}' \times \mathbf{y}' + \bar{\omega}_3 \times \mathbf{y}' \quad \# 4.13$$

schreiben. Beachtet man die Richtungen der Komponentenauf beiden Seiten von #4.13, so ergibt sich

$$\mathbf{v}' = \bar{\omega}_3 \times \mathbf{y}', \quad \mathbf{v}_3 = \bar{\omega}' \times \mathbf{y}' \quad \# 4.14, \# 4.15$$

Die zur Konstruktion dieser Ausdrücke erforderlichen Stücke lassen sich unmittelbar aus Grund- und Aufriß abgreifen. Für #4.14 ergibt sich der Ausdruck

$$|\mathbf{v}'_z|c = \omega_{3z}|\mathbf{y}'_z| \Rightarrow c:\omega_{3z} = |\mathbf{y}'_z|:|\mathbf{v}'_z| \quad \# 4.16$$

auswerten, wozu wir uns einer Hilfsfigur bedienen. #4.15 führt auf die Beziehung

$$|\mathbf{v}_{3z}|c = \omega'_z p \Rightarrow c:\omega'_z = p:|\mathbf{v}_{3z}| \quad \# 4.17$$

worin nach Definition #1.24  $p$  der Abstand des Grundrisses  $X'$  des Punktes  $X$  vom Grundriß  $\mathbf{a}'$  der Drehachse ist. Die Orientierung der Vektoren  $\mathbf{v}'$  bzw.  $\mathbf{v}_3$  ergibt sich leicht aus der Rechten-Handregel. Man erspart sich die Konstruktion der Komponente  $\mathbf{v}_3$ , wenn man beachtet, daß  $\mathbf{v}'$  auf dem Aufriß  $h'_2$  einer zweiten Hauptlinie der Verbindungsebene von  $X$  und  $\mathbf{a}$  normal steht. Der Fig. 4.2 liegt dieselbe Annahme wie der Fig.4.1 zugrunde.

## 4.5 Momente bezüglich mehrerer Punkte

Hat man die Momente  $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \dots$  desselben Stabes bezüglich zahlreicher Punkte  $A, B, \dots$  zu ermitteln, so ist es zweckmäßig, den Stabträger durch Einführung eines geeigneten Seitenrisses projizierend zu machen (Punkt  $O$  der Fig.4.3). Dann erscheinen die Momentenvektoren orthogonal zu Projektion  $\mathbf{a}'$  des Ortsvektors  $\mathbf{a}$  des Punktes  $A$ . Für den Betrag gilt in der zeichnerischen Darstellung

$$|\mathbf{v}_{Az}|c = \omega_z \mathbf{a}'_z \quad \# 4.18$$

wobei  $\mathbf{a}'_z$  den Abstand der Projektion  $A'$  des Punktes  $A$  von  $O$  bedeutet. Führt man den orientierten Winkel  $\theta$  durch  $\tan\theta = \omega \sin^4$ , für dessen zeichnerische Darstellung

<sup>3</sup> BEYER [2] S.51 ff

<sup>4</sup> Einführung des Winkels  $\theta$  von HARTMANN [1] S.17

$$\tan\theta_z = \frac{\omega_z}{c} = \frac{\delta}{c} \cdot \omega = \frac{\delta}{c} \tan\theta \quad \# 4.19$$

gilt, so läßt sich mit dessen Hilfe #4.18 in der Form

$$|\mathbf{v}_{Az}| = a'_z \tan\theta_z \quad \# 4.20$$

schreiben. Um die Geschwindigkeit eines Punktes zu erhalten, muß man nicht den ersten Schenkel von  $\theta$  (wie beim Punkt A' der Fig.4.3) in die Verbindungslinie OA' legen. Will man etwa den Geschwindigkeitsvektor des Punktes B ermitteln, so fällt man aus seiner Projektion B' die Lote auf die Schenkel des Winkels  $\theta$  und findet auf diese Weise die Punkte  $V_1, \bar{V}_1$  bzw.  $V_2, \bar{V}_2$ . Es ist dann  $\vec{V}_1\bar{V}_2 = \mathbf{v}_{Bz}$

Beweis: Im Dreieck  $\Delta OV_1B'$  ist  $V_2$  der Höhenschnittpunkt, daher steht  $\vec{V}_1\bar{V}_2$  auf OB' wie erforderlich normal. Der Ähnlichkeit der Dreiecke  $\Delta OB'\bar{V}_1 \sim \Delta V_1V_2\bar{V}_1$  entnimmt man

$$OB' : O\bar{V}_1 = V_1V_2 : V_1\bar{V}_1 \quad \# 4.21$$

Nun ist  $OB' = b'_z$ ,  $V_1\bar{V}_1 = O\bar{V}_1 \tan\theta_z$ , daher folgt aus #4.21  $V_1V_2 = b'_z \tan\theta_z$ , w.z.b.w. Man erkennt, daß die Strecke  $V_1V_2$  weder Richtung noch Betrag ändert, wenn sich der Winkel  $\theta_z$  um seinen Scheitel O verdreht.

Trägt man den Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_{Az} = \vec{OA}_1$  von O aus ab, so geht dessen Endpunkt  $A_1$  aus dem Punkt A' durch eine *Drehstreckung* um O hervor, deren Drehwinkel  $\pi/2$  beträgt und deren Streckungsfaktor nach #4.20 die Größe  $\tan\theta_z$  aufweist. Ist diese Drehstreckung durch ein Punktepaar A',  $A_1$  festgelegt, so findet man zum Punkt B' den entsprechenden  $B_1$  auf folgende Weise: Man errichte in O die Normale auf OB'. Ihr Schnittpunkt mit dem Lot aus  $A_1$  auf A'B' ergibt den gesuchten Punkt  $B_1$ . Die Richtigkeit der Konstruktion erhellt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $\Delta OA'B' \sim \Delta OA_1B_1$

## 5 Die Abbildung von MAYOR und MISES

### 5.1 Beschreibung des Verfahrens

Dieses Verfahren<sup>1</sup> besteht darin, die Vektoren des Raumes auf die Stäbe einer Bildebene abzubilden, sodaß Aufgaben über Vektoren des Raumes auf die Untersuchung eines Systems von Stäben der Grundrißebene zurückgeführt werden. Da ein solches Stabwerk als ebenes Kräftesystem aufgefaßt werden kann, können die dem Techniker wohlbekannten, von der Mechanik ausgebildeten Verfahren zur Behandlung derartiger Systeme (Seilpolygon etc.) angewendet werden.

Die genannte Zuordnung erfolgt derart, daß dem Raumvektor

$$\mathbf{a} = (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2) + a_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{a}' + a_3 \mathbf{e}_3 \quad \# 5.1$$

jener in der Grundrißebene, durch seine PLÜCKER-Vektoren  $\mathbf{a}^m$ ,  $\mathbf{a}^{m*}$  festgelegte Stab

$$\mathbf{a}^m = \mathbf{a}' = \mathbf{a} - a_3 \mathbf{e}_3, \quad |\mathbf{a}^m| = |\mathbf{a}'| = a' \quad \# 5.2$$

$$\mathbf{a}^{m*} = ca_3 \mathbf{e}_3 \quad \# 5.3$$

zugeordnet wird, dessen Vektor gleich dem Grundriß des gegebenen Raumvektors, dessen Moment um den Ursprung proportional zu dessen dritter Komponente ist. Die zur Bildebene normalen Vektoren entziehen sich also zunächst der Darstellung nach MAYOR - MISES (vgl. aber später Kap. 5.2). Den Proportionalitätsfaktor  $c$  bezeichnet man als *Abbildungskonstante* oder *Momentenkonstante*. Er hat die Dimension einer Länge. Die Abbildungskonstante wird durch den in  $\pi_1$  liegenden Abbildungskreis mit dem Mittelpunkt  $O^m$  und dem Radius  $c$  repräsentiert (Fig. 5.1). Die Trägergerade des Bildstabes heiße  $\mathbf{a}^m$ . Der Ortsvektor des Fußpunktes des Lotes aus  $O^m$  auf  $\mathbf{a}^m$  ist nach #1.68 und wegen #5.2 und #5.3

**Figur 5.1**

$$l_a = \frac{\mathbf{a}^m \times \mathbf{a}^{m*}}{|\mathbf{a}^m|^2} = \left( \frac{\mathbf{a}'}{a'} \times \mathbf{e}_3 \right) \frac{ca_3}{a'} \quad \# 5.4$$

Daher ist der Abstand  $l_a$  der Trägergeraden  $\mathbf{a}^m$  von  $O$

$$l_a = \frac{ca_3}{a'} \Rightarrow l_a : a_3 = c : a' \quad \# 5.5, \# 5.6$$

**Satz 5.1.1:** Man erhält die Strecke  $l_a$ , indem man die Abbildungskonstante  $c$  auf dem Grundriß des gegebenen Vektors abträgt und die zugeordnete Strecke  $l_a$  auf dem Aufriß des Vektors abgreift (Fig. 5.1)

Aus #5.5 folgt sofort

**Satz 5.1.2:** Die Bildträger aller gegen  $\pi_1$  gleich geneigten (aber nicht normalen) Vektoren umhüllen einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $O^m$  und dem Radius  $l_a$ .

Um die Trägergerade  $\mathbf{a}^m$  zu zeichnen, kann man sich auch des Schnittpunktes  $H_{12}$  des Bildstabes mit der  $x$ -Achse bedienen. Dieser Punkt mit dem Ortsvektor  $\vec{O^m H_{12}} = h_a \mathbf{e}_1$  muß die Inzidenzbedingung #1.62 mit dem Bildstab #5.2,3 erfüllen. Hieraus ergibt sich

$$h_a : c = a_3 : a_2 \quad \# 5.7$$

<sup>1</sup> MAYOR [1], MISES [1] (Richard von MISES 1883-1953). Über den Einbau der Abbildung von MAYOR und MISES in das Lehrgebäude der Darstellenden Geometrie vgl. KRUPPA [1]

**Satz 5.1.3:** Der Schnittpunkt  $H_{12}$  von  $\mathbf{a}^m$  mit der  $x$ -Achse liegt auf der Parallelen zu  $\mathbf{a}^m$  durch den Punkt  $U_{12}(O|c|O)$

Aus #5.6 bzw. #5.7 erkennt man, daß die Trägergerade  $\mathbf{a}^m$  nur von der Richtung des Vektors  $\mathbf{a}$  abhängt.

**Satz 5.1.4:** Die Fernpunkte (Richtungen) des Raumes (mit Ausnahme des Fernpunktes der  $z$ -Achse) werden durch die Abbildung von MAYOR-MISES in eineindeutiger Weise auf die Geraden  $\mathbf{a}^m$  der Bildebene abgebildet.

Aus #5.7 folgt

**Satz 5.1.5:** Die Bildträger horizontaler Vektoren gehen durch  $O^m$ .

Wegen #5.2,3 ist ein Vektor  $\mathbf{a}$  durch Angabe seines Bildstabes eindeutig bestimmt, denn es ist

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^m + \frac{1}{c} \mathbf{a}^{m*} \quad \# 5.8$$

Im Folgenden werden wir die Stäbe durch ihre Träger  $\mathbf{a}^m$  sowie durch ihre in  $O^m$  angehängten Richtungsvektoren  $\mathbf{a}^{m*}$  zeichnerisch festlegen.

Häufig ist es zweckmäßig, an Stelle der Aufrißebene  $\pi_2$  eine neue Bildebene  $\pi_3$  durch Wahl einer neuen Rißachse (13) einzuführen. Der den Projektionsebenen  $\pi_1$  und  $\pi_3$  zugeordnete Punkt  $U_{13}$  des Abbildungskreises geht aus  $U_{12}$  durch Drehung um jenen Winkel hervor, den die orientierten Rißachsen (12) und (13) einschließen (Fig.5.1).

I.a. wird man den Bildträger  $\mathbf{b}^m$  eines Vektors  $\mathbf{b}$  mit Hilfe des Punktes  $H_{12}$  ermitteln. Diese Konstruktion versagt, wenn  $H_{12}$  außerhalb der Zeichenfläche zu liegen kommt. In diesem Fall wird man das Bild unter Zuhilfenahme der Strecke  $l_b$  aufsuchen. In Fig.5.1 wurde dies an dem in Profillage befindlichen Vektor  $\mathbf{b}$  demonstriert. Der Aufriß  $3''$  des durch Abtragen der Strecke  $c = 1'3'$  bestimmten Punktes  $3'$  wurde unter Ausnutzung der Teilverhältnistreue von Grund und Aufriß konstruiert und so die Strecke  $l_b = 1''3''$  ermittelt.

## 5.2 Abbildung komplanarer Vektoren

**Satz 5.2.1:** Die Bildstäbe aller mit zwei gegebenen Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  komplanaren Vektoren gehen durch den Schnittpunkt  $\varepsilon^m$  von  $\mathbf{a}^m$  und  $\mathbf{b}^m$ .

Beweis: Die Bildstäbe von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  seien durch ihre Plückervektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^m &= a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2, & \mathbf{a}^{m*} &= ca_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b}^m &= b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2, & \mathbf{b}^{m*} &= cb_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad \# 5.9$$

gegeben. Jeder mit  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  komplanare Vektor  $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$  hat dann einen Bildstab, für den

$$\mathbf{c}^m = \lambda \mathbf{a}^m + \mu \mathbf{b}^m, \quad \mathbf{c}^{m*} = \lambda \mathbf{a}^{m*} + \mu \mathbf{b}^{m*} \quad \# 5.10$$

ist. Der Ortsvektor  $\mathbf{x}$  des Schnittpunktes  $\varepsilon^m$  der beiden Träger #5.9 erfüllt die Inzidenzbedingung  $\mathbf{a}^{m*} = \mathbf{x} \times \mathbf{a}^m$ ,  $\mathbf{b}^{m*} = \mathbf{x} \times \mathbf{b}^m$ , aus denen sich durch Linearkombination wegen #5.10  $\mathbf{c}^{m*} = \mathbf{x} \times \mathbf{c}^m$  ergibt, w.z.b.w. Speziell gilt für  $\lambda = \mu = 1$

**Figur 5.2**

**Satz 5.2.2:** Der Summe der Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  entspricht die Resultierende ihrer Bildstäbe.

Hat man die Summe mehrerer Vektoren zu bilden, so wird man mit Vorteil die von C.CULMANN ausgearbeitete Methode des Seilpolygons verwenden, die sich bereits bei zwei Vektoren empfiehlt, wenn der Schnittpunkt ihrer Bildträger unzugänglich ist.

Satz 5.2.2 ermöglicht die Darstellung von Vektoren normal zur Bildebene. Zerlegt man einen solchen Vektor in zwei Vektorsummanden allgemeiner Lage, so bilden deren Bilder Stäbe mit parallelen Trägern, also ein sogenanntes *Stabpaar*. Jedem zur Bildebene normalen Vektor entspricht also die Menge aller zu dem so konstruierten Stabpaare äquivalenten Stabpaare und umgekehrt.

### 5.3 Abbildung paralleler Ebenen

Da nach Satz 5.2.1 die Bildträger aller Vektoren derselben Ebenenstellung durch denselben Punkt gehen, kann man  $\varepsilon^m$  als *Bildpunkt dieser Ebenenstellung* ansehen und ihn kurz *Stellungspunkt* nennen. Nach Satz 5.1.5 ist die Verbindungslinie von  $\varepsilon^m$  und  $O^m$  die Bildgerade aller in Hauptlinien (Schichtenlinien) dieser Stellung liegenden Vektoren; speziell gilt

**Satz 5.5.1:** ( $O^m \varepsilon^m$ ) ist die Spur der durch  $O^m$  gehende Ebene der Stellung  $\varepsilon^m$ .

Eine Ebenenstellung sei durch ihre Normalenrichtung  $\mathbf{n}$  gegeben, der nach Satz 5.1.4 die Bildgerade  $\mathbf{n}^m$  entspricht (Fig. 5.3). Gesucht sei der zugehörige Stellungspunkt  $v^m$  der Ebene.

Repräsentieren wir die Ebenenstellung durch die auf  $\mathbf{n}$  normale, durch  $O^m$  gehende Ebene, so wird deren Spur auf  $\mathbf{n}^m$  normal stehen und nach Satz 5.3.1  $v^m$  enthalten. Figur 5.3

Sei  $\mathbf{a}$  eine zu  $\mathbf{n}$  normale Richtung, so gehört sie der genannten Ebenenstellung an, ihr Bildträger  $\mathbf{a}^m$  geht nach Satz 5.2.1 durch  $v^m$ . Beachtet man, daß die Bildstäbe von  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{a}$  die Schnittbedingung #1.84 erfüllen, so folgt aus #5.8

$$\mathbf{a}\mathbf{n} = \mathbf{a}^m\mathbf{n}^m + \frac{1}{c^2}\mathbf{a}^m * \mathbf{n}^m = 0 \quad \# 5.11$$

Sind  $\mathbf{l}_v$  und  $\mathbf{l}_n$  die Ortsvektoren von  $v^m$  und des Lotfußpunktes aus  $O^m$  auf  $\mathbf{n}^m$ , so erfüllen sie die Inzidenzbedingungen

$$\mathbf{n}^{m*} = \mathbf{l}_n \times \mathbf{n}^m, \quad \mathbf{a}^{m*} = \mathbf{l}_v \times \mathbf{a}^m \quad \# 5.12$$

Führt man dies in #5.11 ein, so ergibt sich mit #1.39 und Beachtung der Orthogonalität von  $\mathbf{n}^m$  und  $\mathbf{l}_v$

$$c^2 \mathbf{a}^m \mathbf{n}^m + (\mathbf{l}_v \times \mathbf{a}^m)(\mathbf{l}_n \times \mathbf{n}^m) = (c^2 + \mathbf{l}_v \mathbf{l}_n)(\mathbf{a}^m \mathbf{n}^m) = 0 \quad \# 5.13$$

woraus

$$\mathbf{l}_v \mathbf{l}_n = -c^2 \quad \# 5.14$$

folgt. Wegen der Kollinearität von  $\mathbf{l}_v$  und  $\mathbf{l}_n$  gilt auch für ihre Beträge

$$|\mathbf{l}_v| |\mathbf{l}_n| = c^2 \quad \# 5.15$$

Mit Hilfe des Ansatzes  $\mathbf{l}_v = \lambda \mathbf{l}_n$  folgt mit #5.4,5 aus #5.14

$$\mathbf{l}_v = \frac{c}{n_3} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{n}') \quad \# 5.16$$

Hier bedeuten  $\mathbf{n}'$  und  $n_3$  den Grundriß und die dritte Koordinate des (in Fig. 5.3 nicht eingezeichneten) Vektors  $\mathbf{n}$ .

Ist  $\mathbf{n}^m$  gegeben, so liefert der Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck mit Hilfe des in Fig. 5.3 eingezeichneten Rechtwinkelhakens den Punkt  $v^m$ . Man nennt  $v^m$  den *Antipol* von  $\mathbf{n}^m$ ,  $\mathbf{n}^m$  die *Antipolare* von  $v^m$  bezüglich des Abbildungskreises.

Man überlegt sich leicht die Gültigkeit folgender Sätze:

**Satz 5.3.2:** Der Stellungspunkt  $v^m$  der zu einer Richtung  $n$  normalen Ebenenstellung ist der Antipol des Bildes  $n^m$  bezüglich des Abbildungskreises

**Satz 5.3.3:** Der Stellungspunkt einer erstprojizierenden Ebene ist der Fernpunkt der Richtung ihrer Spur

**Satz 5.3.4:** Das Bild  $n^m$  der Normalenrichtung einer durch ihren Stellungspunkt  $v^m$  gegebenen Ebenenstellung ist die Antipolare von  $v^m$  bezüglich des Abbildungskreises

**Satz 5.3.5:** Dreht sich eine feste Gerade  $a^m$  um einen festen Punkt  $v^m$ , so beschreibt deren Antipol  $\alpha^m$  die Antipolare  $n^m$  von  $v^m$

**Satz 5.3.6:** Durchläuft ein Punkt  $\alpha^m$  eine Gerade  $n^m$ , so dreht sich dessen Antipolare  $a^m$  um den Antipol  $v^m$  von  $n^m$

## 5.4 Konstruktion des Momentenvektors

Es soll nun nach MAYOR-MISES das Bild des Momentenvektors eines Stabes ( $a, a$ ) des Raumes um  $O^m$  konstruiert werden. Ist  $S_A(s_A)$  der Schnittpunkt der Trägergeraden  $a$  des Stabes mit der Bildebene, so ist dessen Ursprungsmoment nach #1.55

$$\mathbf{b} = \mathbf{s}_A \times \mathbf{a}^2 \quad \# 5.17$$

Um der Dimension von  $\mathbf{b}$  Rechnung zu tragen, definieren wir analog zu #5.2,3

$$\mathbf{b}^m = \frac{1}{c} \mathbf{b}', \quad \mathbf{b}^{m*} = b_3 \mathbf{e}_3 \quad \# 5.18, \# 5.19$$

Die Abbildungskonstante  $c$  übernimmt also die Rolle der Momentenkonstante von Kap.4.2. Da **Figur 5.4**  $\mathbf{b}$  normal auf die von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{s}_A$  aufgespannte Ebenenstellung ist, muß  $\mathbf{b}^m$  durch den Antipol  $\alpha^m$  von  $\mathbf{a}^m$  gehen und auf der Spur( $O^m S_A$ ) der durch  $O^m$  gehenden Ebene dieser Stellung normal stehen. (Fig.5.4). Aus #5.17 folgt wegen #5.1

$$\mathbf{b}' + b_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{s}_A \times (\mathbf{a}' + a_3 \mathbf{e}_3) = \mathbf{s}_A \times \mathbf{a}' + a_3 \mathbf{s}_A \times \mathbf{e}_3 \quad \# 5.20$$

Vergleich der Richtung der Komponenten auf beiden Seiten von #5.20 ergibt  $\mathbf{b}' = a_3 \mathbf{s}_A \times \mathbf{e}_3$ . Daher folgt aus #5.18

$$\mathbf{b}^m = \frac{a_3}{c} \mathbf{s}_A \times \mathbf{e}_3 \quad \# 5.21$$

**Satz 5.4.1:**  $\mathbf{b}^m$  geht aus  $\mathbf{s}_A$  durch jene Drehstreckung um  $O^m$  hervor, welche den Vektor  $\mathbf{l}_\alpha$  in den Vektor  $\mathbf{a}^m$  überführt

Setzt man nämlich in #5.21 an Stelle von  $\mathbf{s}_A$  den Ortsvektor  $\mathbf{l}_\alpha$  #5.16 des Antipols von  $\mathbf{a}^m$  ein, so ergibt sich  $\mathbf{a}^m$  w.z.b.w.

Demnach findet man den dem Vektor  $\mathbf{s}_A$  entsprechenden Vektor  $\mathbf{b}^m$  in Fig.5.4 nach dem Vorbild der Fig.4.3.

<sup>2</sup>Nach der Bezeichnungsweise von Kap.1.5.5 hätten wir  $\mathbf{b} = \mathbf{a}^*$  zu setzen. Um jedoch die Häufung von hochgestellten Indizes zu vermeiden, vereinfachen wir die Schreibweise in der oben angegebenen Art.

### 5.5 Zusammenhang zwischen Normalprojektion und Projektion von MAYOR-MISES

Es sei ein Stab des Raumes durch den Spurpunkt  $S_A(\mathbf{s}_A)$  seines Trägers sowie durch das Bild  $(\mathbf{a}^m, \mathbf{a}^m)$  seines Richtungsvektors  $\mathbf{a}$  gegeben (Fig. 5.5). Soll man den Momentenvektor  $\mathbf{m}$  dieses Stabes um einen beliebigen, durch Auf- und Grundriß gegebenen Punkt  $X$  ermitteln, Figur 55 so kann man folgendermaßen vorgehen: Legt man durch  $X$  eine Parallele zum Träger des gegebenen Stabes, so weist jeder Punkt dieser Parallelen denselben Momentenvektor auf (Satz 1.3.6.1). Wählen wir speziell den Spurpunkt  $S_X(\mathbf{s}_X)$  dieser Parallelen, so ist das gesuchte Moment

$$\mathbf{m} = (\mathbf{s}_A - \mathbf{s}_X) \times \mathbf{a} \quad \# 5.22$$

Da nach Fig. 5.1 die Richtung des Trägergeraden im Raum durch  $\mathbf{a}^m$  bestimmt ist, läßt sich die Parallele durch  $X$  und deren Spurpunkt  $S_X$  leicht zeichnen. Trägt man den Vektor

$\mathbf{s}_A - \mathbf{s}_X = \overrightarrow{S_X S_A}$  von  $O^m$  aus ab, so reduziert sich die Konstruktion des Bildvektors

$\mathbf{m}^m = \frac{a_3}{c} \cdot \overrightarrow{S_X S_A} \times \mathbf{e}_3$  (#5.22) nach Satz 5.4.1 auf die Anwendung der Drehstreckung, welche

$\alpha^m$  in den Endpunkt von  $\mathbf{a}^m$  überführt, auf den Endpunkt des von  $O^m$  abgetragenen Vektors

$\overrightarrow{S_X S_A}$ . Da  $\mathbf{m}$  der zu  $\mathbf{a}$  normalen Ebenenstellung angehört, muß  $\mathbf{m}^m$  durch  $\alpha^m$  gehen und zu  $\mathbf{m}^m$  parallel sein. Löst man auf der rechten Seite von #5.22 die Klammer auf, so ergibt sich der Momentenvektor  $\mathbf{m}$  aus  $\mathbf{m} = \mathbf{s}_A \times \mathbf{a} - \mathbf{s}_X \times \mathbf{a}$ . Das Bild  $(\mathbf{s}_A \times \mathbf{a})^m$  von  $\mathbf{s}_A \times \mathbf{a}$  ergibt sich nach

Fig. 5.4. Da der gesuchte Vektor  $\mathbf{m}^m$  normal zu  $\overrightarrow{S_X S_A}$  ist und die Richtung von  $-(\mathbf{s}_X \times \mathbf{a})^m$  normal zu  $\mathbf{s}_X$  sein muß, läßt sich  $\mathbf{m}^m = (\mathbf{s}_A \times \mathbf{a})^m - (\mathbf{s}_X \times \mathbf{a})^m$  aus dem bekannten Vektor  $(\mathbf{s}_X \times \mathbf{a})^m$  und de Richtungen der beiden anderen ermitteln<sup>3</sup>.

### 5.6 Momente mehrerer Punkte

Hat man bezüglich mehrerer Punkte  $X, Y, Z, \dots$  die Momente  $\mathbf{m}_X, \mathbf{m}_Y, \mathbf{m}_Z, \dots$  desselben Stabes zu ermitteln, so findet man deren Bilder  $\mathbf{m}_X^m, \mathbf{m}_Y^m, \mathbf{m}_Z^m, \dots$ , indem man die in Satz 5.4.1 genannte Drehstreckung mehrfach auf die von  $O^m$  aus abgetragenen Vektoren anwendet. Daus folgt sofort

**Satz 5.6.1:** Die von den Endpunkten der von  $O^m$  ausstrahlenden Vektoren  $\mathbf{m}_X^m, \mathbf{m}_Y^m, \mathbf{m}_Z^m, \dots$  gebildete Figur ist zu der von den Spurpunkten  $S_X, S_Y, S_Z, \dots$  gebildeten Figur ähnlich<sup>4</sup>

Dieser Satz gestattet eine rasche Konstruktion der Bilder der gesuchten Momentenvektoren. Die Trägergeraden  $m_X^m, m_Y^m, m_Z^m, \dots$  müssen alle durch  $\alpha^m$  hindurchgehen.

### 5.7 Umkehrung obiger Konstruktion

Die in Fig. 5.5 beschriebene Konstruktion hat man umzukehren, wenn das Bild  $(\mathbf{m}^m, \mathbf{m}^m)$  des Momentes  $\mathbf{m}$  einer Raumstabes  $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$  um den Punkt  $X$  gegeben, vom Raumstab aber nur das Bild  $(\mathbf{a}^m, \mathbf{a}^m)$  des Stabvektors, nicht jedoch der Spurpunkt  $S_A$  des Stabträgers bekannt ist. Da  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{a}$  orthogonale Vektoren sind, muß  $\mathbf{m}^m$  durch den Antipol  $\alpha^m$  von  $\mathbf{a}^m$  gehen.

<sup>3</sup> FEDERHOFER [1] S.6 f

<sup>4</sup> FEDERHOFER [1] S.13

## Kapitel 5

---

Um  $S_A$  zu bestimmen, ermittle man zunächst den Punkt  $S_X$ . Fig. 5.5 lehrt ferner, wie man den Endpunkt des in  $O^m$  angehängten, auf  $\mathbf{m}^m$  normalen Vektors  $\overrightarrow{S_X S_A}$  erhält. Dessen Abtragung von  $s_X$  aus liefert den gewünschten Punkt  $S_A$ .

## 6 Die gnomonische Projektion

Die gnomonische Projektion ist eine Zentralprojektion der Punkte der Oberfläche einer Kugel aus deren Mittelpunkt  $O$  als Projektionszentrum  $U^g$  auf eine Bildebene  $\pi$  (Fig. 6.1). Den Abstand  $c$  des Projektionszentrums  $U^g = O$  von der Bildebene bezeichnen wir als *Distanz*, den Fußpunkt des Lotes aus  $U^g$  auf  $\pi$  mit  $O^g$ . Der Kreis in  $\pi$  mit dem Mittelpunkt  $O^g$  und dem Radius  $c$  heiße *Distanzkreis*. Fig. 6.1 zeigt die Ermittlung der gnomonischen Projektion  $A^g$  des Kugelpunktes  $A$  auf die als Grundrißebene gewählte Bildebene  $\pi$ . Je zwei diametral gegenüberliegende Punkte  $A$  und  $\hat{A}$  der Kugeloberfläche haben dieselbe gnomonische Projektion.

**Figur 6.1**

**Satz 6.1:** *Die gnomonische Projektion bildet alle Großkreise der Kugel auf Gerade ab.*

Dieser evidente Satz wurde in Fig. 6.1.1 durch den Großkreis  $k$  und sein Bild  $k^g$  illustriert.

Kleinkreise der Kugel bilden sich als Kegelschnitte ab.

Betrachtet man den zum Großkreis  $k$  gehörigen Pol  $K$ , so ergibt sich aus dem bei  $U^g$  rechtwinkeligem Dreieck  $\Delta L^g U^g K^g$  im Aufriß der Figur 6.1.1 nach dem Hehensatz für die Strecken  $O^g K^g$  und  $O^g L^g$

$$O^g K^g \cdot O^g L^g = c^2$$

# 6.1

**Satz 6.2:** *Die Bildgerade  $k^g$  eines Großkreises  $k$  und das Bild  $K^g$  seines Poles entsprechen einander in der Antipolaritt am Distanzkreis*

In Fig. 6.1.1 wurde auch die gnomonische Projektion  $A_1^g$  des Kugelpunktes  $A$  auf die Kugeltangentialebene  $\pi_1$  im Umripunkt  $P$  ermittelt und  $\pi_1$  um ihre 2.Hauptlinie (Schichtenlinie)  $h_2$  parallel zur Aufrißebene gedreht. Hier ist die Distanz  $c_1$  gleich dem Kugelradius  $r$  und es ist  $P = O_1^g$ .

Häufig ist es zweckmäßig, zur Entlastung der Hauptfigur die gnomonische Projektion in einer Nebenfigur durchzuführen (Fig. 6.1.2). Zu diesem Zweck ersetzt man den Kugelmittelpunkt  $O$  durch das Projektionszentrum  $U_2^g$ , welches von der Projektionsebene  $\pi_2$  die Distanz  $c_2$  habe. Um die gnomonische Projektion  $A_2^g$  des Kugelpunktes  $A$  auf  $\pi_2$  zu ermitteln, hat man die Parallele zum Kugelradius ( $OA$ ) durch  $U_2^g$  mit  $\pi_2$  zu schneiden. Das Bild  $q_2^g$  des (in Fig. 6.1.1 nicht eingezeichneten) Großkreises  $q$  mit dem Pol  $A$  ist nach Satz 6.2 die Antipolare von  $A_2^g$  bezüglich des Distanzkreises. Einem Punkt der Bildebene  $\pi_2$  entsprechen zwei Kugelgegenpunkte  $B, \hat{B}$ . In der Praxis wird man meist nur einen der beiden, etwa  $B$ , benötigen. Wir sprechen dann von dem  $B_2^g$  entsprechenden Kugelpunkt  $B$ . Um ihn aufzusuchen, hat man jenen Kugeldurchmesser, dessen Grundriß parallel zu  $(O_2^g B_2^g)$ , dessen Aufriß parallel zu  $(U_2^g B_2^{g''})$  ist, mit der Kugel zu schneiden. Um den Schnittpunkt  $B$  zu ermitteln, beachten wir, daß der im Grundriß abgetragenen Strecke  $O'H' = (O_2^g B_2^g)$  die Distanz  $c_2$  als Hehendifferenz entspricht. Klappt man die den Durchmesser ( $OH$ ) enthaltende erstprojizierende Ebene in die horizontale Durchmessersebene der Kugel, so ist  $H'H'' = c_2$  und  $B''$  läßt sich sofort auf dem Kugelumriß angeben. Mit Hilfe des gekennzeichneten Abstandes findet sich der Aufriß  $B''$ , der zur Kontrolle auf dem vorbereiteten Aufriß des Kugeldurchmessers liegen muß.

Ordnet man jedem Kugelpunkt  $A$  die Richtung des durch ihn gehenden Kugelradius zu, so stellt  $A^g$  das Bild dieser Richtung dar. Nach Satz 5.1.4 würde dieselbe Richtung durch die Abbildung von MAYOR-MISES auf die Bildgerade  $a^m$  abgebildet werden. Der Zusammenhang zwischen den beiden Bildern ist folgender: Wählt man den Distanzkreis gleich dem Abbildungskreis und verdreht man  $A^g$  um  $O^g$  im negativen Sinne um einen rechten Winkel. nach  $\bar{A}^g$ , so sind  $\bar{A}^g$  und  $a^m$  bezüglich des Abbildungskreises antipolar. Die genannten Abbildungen der

Richtungen sind also äquivalent und ergänzen einander in dem Sinne, daß unerreichbare Bilder der einen Abbildung bei der anderen eine bequemere Lage in der Bildebene haben. Nach diesem Gesichtspunkt wird in folgenden die eine oder andere Abbildung bevorzugt.

# 7 Die stereographische Projektion

## 7.1 Definition

Die stereographische Projektion stellt eine Zentralprojektion der Kugelpunkte aus dem Südpol  $S$  auf die Äquatorebene  $\pi$  dar. Dadurch wird jedem von  $S$  verschiedenen Punkt  $P$  der Kugeloberfläche in umkehrbar eindeutiger Weise ein Punkt  $P^s$  der Bildebene zugeordnet, speziell dem Nordpol  $N$  der Kugel deren in der Bildebene liegende Mittelpunkt  $N^s = O^s$  (Fig. 7.1). Der in  $\pi$  liegende Äquatorkreis  $g$  (*Grundkreis*) entspricht sich selbst. Die Punkte der oberen Halbkugel haben ihre Bilder im Inneren des Grundkreises, die der unteren Halbkugel in dessen Außengebiet. Die charakteristische Eigenschaft der stereographischen Projektion ist deren *Winkeltreue*.

**Figur 7.1**

**Satz 7.1.1:** *Weisen zwei sphärische Kurven den Schnittwinkel  $\varphi$  auf, so schneiden deren stereographische Bilder einander unter demselben Winkel*

**Beweis:** Der Winkel der beiden sphärischen Kurven mit dem Schnittpunkt  $P$  ist definitionsgemäß der Winkel der beiden Kurventangenten  $t_1$  und  $t_2$ , welche die Kugeltangentialebene von  $P$  aufspannen (Fig. 7.1.1). Klappt man die Tangentialebenen um ihre Spur  $e$  nach  $\pi$ , so gelangen die gedrehten Lagen von  $P$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  mit ihren stereographischen Bildern  $P^s$ ,  $t_1^c$ ,  $t_2^c$  zur Deckung<sup>1</sup>. Dies erkennt man aus Fig. 7.1.2, in welcher  $P$  auf dem Kugelumriß, seine Tangentialebene daher projizierend erscheint. Aus den gekennzeichneten Winkelgleichheiten ergibt sich zunächst, daß sich  $P$  um die Spur  $e$  der Tangentialebene nach  $P^s$  drehen läßt. Da die Spurpunkte  $T_1$  und  $T_2$  der Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  sowohl bei dieser Drehung als auch bei der Projektion aus  $S$  festbleiben, kommen die Tangenten mit ihren Projektionen zur Deckung, schließen also, wie behauptet, denselben Winkel ein. Ordnet man dem Winkel auf der Kugel einen Drehsinn zu, der positiv gezählt werde, wenn er bei Betrachtung von Außengebiet der Kugel her entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn dreht, so bleibt durch die stereographische Projektion der Drehsinn erhalten, wenn man die Projektionsebene  $\pi$  von der Seite, auf der sich der Kugelnordpol befindet, betrachtet.

**Satz 7.1.2:** *Jeder Kreis der Kugeloberfläche bildet sich in  $\pi$  wieder als Kreis ab.*

**Beweis:** Schreibt man (Fig. 7.2.1) der Kugel längs  $k$  den berührenden Kegel mit der Spitze  $S$  an, so schneiden dessen Erzeugende den Kreis alle unter rechtem Winkel. Das Kreisbild  $k^s$  wird daher alle Strahlen des Büschels  $Z^c$ , als welches sich die Kegelerzeugenden abbilden, ebenfalls unter rechtem Winkel schneiden, demnach wieder ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $Z^c$  sein. Man beachte, daß das Bild  $M^s$  des sphärischen Mittelpunktes  $M$  von  $k$  nicht mit  $Z^c$  übereinstimmt. Ist  $k$  ein Großkreis der Kugel, so ist der Mittelpunkt  $Z^c$  seines Bildes  $k^s$  das Bild des Fernpunktes  $Z_\infty$  der Erzeugenden des der Kugel längs  $k$  umschriebenen Zylinders (Fig. 7.2.2). Da die Schnittpunkte des Großkreises mit dem Grundkreis ihre eigenen Projektionen sind, schneidet das Bild eines Großkreises den Grundkreis in Gegenpunkten (*Gegenpunktekreis*). Die in Fig. 7.2.2 gekennzeichnete Winkelgleichheit läßt sich gelegentlich ausnützen.

**Figur 7.2**

Um Satz 7.1.2 uneingeschränkt aussprechen zu können, muß man auch die Geraden der Bildebene  $\pi$  als Kreise (sozusagen mit unendlich großem Radius) auffassen, da sich, wie aus Fig. 7.2.1 ersichtlich, alle Kreise  $l$ , deren Ebenen durch  $S$  gehen, in gerade Linien  $l^s$  projizieren.

<sup>1</sup> Die stereographischen Projektionen der auf der Kugeloberfläche liegenden Punkte, Kreise usw. werden durch den rechts oben befindlichen Index  $s$  gekennzeichnet, die nicht auf der Kugeloberfläche liegenden Raumelemente erhalten bei der Zentralprojektion aus  $S$  auf  $\pi$  ein rechts oben stehendes  $c$  als Projektionszeiger

## 7.2 Grundkonstruktionen des stereographischen Projektion

Wir denken uns die Zeichenebene als Projektionsebene  $\pi$ . Die Kugel sei durch den Grundkreis  $g$  festgelegt, der Südpol  $S$  als Projektionszentrum werde unterhalb des Mittelpunktes  $O$  des Grundkreises im Abstand von dessen Radius gedacht.

### 7.2.1 Gegenpunkte der Kugeloberfläche

**Figur 7.3** Es sei die Projektion  $P^s$  eines Kugelpunktes gegeben und die Projektion  $\hat{P}^s$  von dessen Gegenpunkt  $\hat{P}$  gesucht (Fig. 7.3). Die erstprojizierende Ebene durch  $(P^sO)$  schneidet aus der Kugel einen Großkreis, der  $S, P$  und  $\hat{P}$  enthält. Bei der *Umklappung* (*Rückschlag*) dieser Ebene um Ihre Spur  $(P^sO)$  nach  $\pi$  überdeckt sich dieser Großkreis mit  $g$ , sodaß die Rückschläge  $S_0, P_0, \hat{P}_0$  auf  $g$  zu liegen kommen. Man findet daher den gesuchten Punkt  $\hat{P}^s$  auf dem Grundkreisdurchmesser durch  $P^s$  mit Hilfe des zu  $(P^sS_0)$  normalen Projektionsstrahles. Wendet man den Höhensatz auf das rechtwinkelige Dreieck  $\Delta P^sS_0\hat{P}^s$  an, so gilt

$$OP^s \cdot O\hat{P}^s = r^2 \quad \# 7.1$$

Punktepaare, die in dieser Relation stehen und von  $O$  getrennt werden, nennt man bezüglich des Grundkreises *antiinvers*. Eine Punkttransformation der Ebene, welche jedem Punkt  $P^s$  vermöge #7.1 seinen antiinversen  $\hat{P}^s$  bezüglich des Grundkreises zuordnet, heißt *Antiinversion*. Ihr entspricht im Raum die Spiegelung der Kugel an ihrem Mittelpunkt.

### 7.2.2 Stereographische Projektion von Kugelgroßkreisen

Jeder Kugelgroßkreis  $k$  schneidet den Grundkreis  $g$  in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten, die mit ihrer Projektion zusammenfallen, daher muß auch  $k^s$  den Grundkreis in diesen

**Figur 7.4** Gegenpunkten schneiden (*Gegenpunktekreis*). Da ein Kugelgroßkreis mit jedem seiner Punkte auch seinen Gegenpunkt enthält, enthält  $k^s$  mit jedem seiner Punkte auch den bezüglich  $g$  antiinversen. Die durch  $O$  und den Mittelpunkt  $Z^c$  von  $k^s$  gehende, auf  $\pi$  normal stehende gemeinsame Symmetrieebene von  $g$  und  $k^s$  enthält  $S$  und  $N$  sowie den höchsten bzw tiefsten Punkt  $A$  und  $B$  von  $k$ . Der Rückschlag dieser Ebene führt  $N$  und  $S$  in die Punkte  $S_0$  und  $N_0$  über, in denen  $g$  von  $k^s$  geschnitten wird (Fig. 7.4). Die Projektion von  $k$  auf diese Ebene ist die Strecke  $A_0B_0$ . Die zum Großkreis  $k$  gehörigen spärischen Mittelpunkte  $P, \hat{P}$  (die beiden Pole von  $k$ ) erscheinen in der Umklappung als Endpunkte des zu  $(A_0B_0)$  orthogonalen Durchmessers  $(P_0\hat{P}_0)$

#### 7.2.2.1 Kugelgroßkreis mit gegebenem Pol.

Gegeben sei die Projektion  $P^s$  eines Kugelpoles, dessen Rückschlag nach Fig. 7.4 ermittelt wird. Die Parallele durch  $S_0$  zu  $(P_0O)$  schneidet aus  $(P^sO)$  den Mittelpunkt  $Z^c$  von  $k^s$  heraus, dessen Peripherie durch  $S^0$  gehen muß.

#### 7.2.2.2 Kugelgroßkreis durch zwei gegebene Punkte

Zwei Kugelpunkte  $A, B$ , welche aber keine Gegenpunkte sein dürfen, bestimmen einen Kugelgroßkreis eindeutig. Es seien die Projektionen  $A^s, B^s$  dieser Kugelpunkte gegeben

**Figur 7.5** (Fig. 7.5). Der Großkreis durch  $A, B$  muß auch die Gegenpunkte  $\hat{A}, \hat{B}$  enthalten, sodaß, wenn man  $\hat{A}^s$  nach Fig. 7.3 ermittelt hat,  $k^s$  als Umkreis des Dreiecks  $\Delta A^sB^s\hat{A}^s$  ermittelt werden kann. Es empfiehlt sich, den Umkreismittelpunkt nicht mit Hilfe der Streckensymmetralen zu ermitteln, sondern nach Fig. 7.5 den Durchmesser  $B^sC^s$  mit Hilfe des Satzes von THALES zu konstruieren. Zur Kontrolle muß  $k^s$  den Grundkreis in Gegenpunkten  $S_0N_0$  schneiden.  $(S_0N_0)$  kann man auch unmittelbar durch folgende Überlegung ermitteln: Die Gerade  $(S_0N_0)$  ist die Spur der Ebene von  $k$ . Nun gehen durch die Verbindungsgerade der beiden

Kugelpunkte  $A, B$  unendlich viele Ebenen. Deren Spuren jedoch alle den Spurpunkt  $E$  dieser Geraden enthalten. Legen wir also eine Ebene beliebig durch  $(A, B)$ , so schneidet sie einen Kreis  $h$  aus der Kugel. Wählen wir dessen stereographische Projektion  $h^s$  beliebig durch die Punkte  $A^s, B^s$ , so ist die Spur seiner Ebene die gemeinsame Sehne von  $h^s$  und  $g$ , welche im Schnitt mit  $(A^s B^s)$  den Spurpunkt  $E$  von  $(AB)$  festlegt.  $(OE)$  stellt demnach die Spur des Großkreises durch  $A, B$  dar.

### 7.2.2.3 Sphärischer Abstand zweier Punkte.

Unter dem *sphärischen Abstand* zweier durch ihre Projektionen  $A^s, B^s$  gegebenen Kugelpunkte  $A, B$  versteht man die Länge des sie verbindenden Großkreises. Man kann sie in wahrer Größe messen, wenn man den  $A, B$  verbindenden Großkreis durch Drehung um seine Spur  $e$  mit  $g$  zur Deckung bringt. Dann beschreiben die Punkte  $A, B$  in erstprojizierenden Ebenen liegende Kugelkleinkreise, deren stereographische Projektionen wegen der Winkeltreue  $g$  orthogonal schneiden (Fig. 7.6.1). Da die Spitzen der der Kugel längs der Drehkreise angeschriebenen Kegel auf der Drehachse  $e$  liegen, kann man die Mittelpunkte  $Z = Z^c$  Figur 7.6 der Projektionen der Drehkreise sofort finden, indem man das Bild der durch  $A$  gehenden, den Großkreis berührenden Kegelerzeugenden mit  $e$  in  $Z^c$  schneidet. Eine andere Methode folgt aus der Bemerkung (Fig. 7.6.2), daß die sphärische Verbindungslinie von  $S$  mit dem Pol  $P$  der Großkreisebene normal auf die Symmetrieebene  $\sigma$  von  $k$  und  $g$  steht. Jeder Kugelkreis, dessen Ebene durch  $S$  und  $P$  geht, schneidet daher bezüglich  $\sigma$  symmetrisch gelegene Punkte  $A$  und  $A_0$  aus  $k$  bzw.  $g$ , daher haben die von zweien dieser Kreise aus  $k$  bzw.  $g$  ausgeschnittenen Punktepaare  $A, B$ , bzw.  $A_0, B_0$  gleiche sphärische Abstände. In der stereographischen Projektion erscheinen die Kreise durch  $P, S$ , da sie durch das Projektionszentrum gehen, als gerade Linien durch  $P^s$ , sodaß man die Punkte  $A_0, B_0$  auch als Schnittpunkte von  $(P^s A^s)$  bzw.  $(P^s B^s)$  mit  $g$  erhält. Man beachte, daß  $P^s$  immer außerhalb der Strecken  $A^s A_0, B^s B_0, \dots$  liegt.

### **7.2.3 Kleinkreise der Kugel**

#### 7.2.3.1 Kugelkleinkreis aus gegebenem sphärischen Mittelpunkt und sphärischen Radius.

Es sei  $M^s$  die Projektion des sphärischen Mittelpunktes sowie  $\rho$  die Größe des sphärischen Radius eines Kugelkleinkreises (Fig. 7.7). Rückschlag der Ebene  $(SOM^s)$  bringt  $S$  nach  $S_0$ . Dann kann durch Projektion aus  $S_0$  der Rückschlag  $M_0$  des sphärischen Figur 7.7 Mittelpunktes gefunden werden. Durch Antragen des sphärischen Radius  $\rho$  findet man den höchsten und tiefsten Punkt  $A_0$  bzw.  $B_0$  des Kleinkreises  $k$  und die Spitze  $Z$  des der Kugel längs  $k$  angeschriebenen Kegels. Die stereographischen Projektionen  $A^s, B^s, Z^c$  liefern die Endpunkte eines Durchmessers sowie den Mittelpunkt der Projektion  $k^s$ .

#### 7.2.3.2 Ermittlung des sphärischen Radius eines Kugelkleinkreises

Sind von einem Kugelkleinkreis die Projektionen  $M^s$  und  $C^s$  des sphärischen Mittelpunktes sowie eines Punktes der Peripherie gegeben, so bestimmt man den sphärischen Radius folgendermaßen: Der durch  $M$  und  $C$  bestimmte Großkreis kann nach einer der in Fig. 7.5 dargelegten Methoden gefunden werden. Die wahre Länge des Bogens  $MC$  stellt den gesuchten sphärischen Radius dar. Nach Fig. 7.7 kann der Kleinkreis gezeichnet werden.

## II. Teil: Kinematik des Raumes

### 8 Elemente der Raumkinematik

#### 8.1 Grundbegriffe

Unter einer *Bewegung* versteht man jene Lagenänderung eines Körpers, bei der je zwei seiner Punkte ihren gegenseitigen Abstand beibehalten. Eine Bewegung liegt also bei der Ortsveränderung eines *starrten Körpers* vor. Da man sich den bewegten Körper den gesamten Raum erfüllend denken kann, spricht man auch von einer *Bewegung des Raumes*. Jenen Teil der *Bewegungslehre*, der von den Ursachen der Bewegung (die auf den Körper einwirkenden Kräfte) absieht, nennt man *Kinematik*. Ausschließlich diese soll der Gegenstand der folgenden Untersuchungen sein.

Um die Raumlage eines Körpers festzulegen, muß man seine Position bezüglich eines anderen, als raumfest betrachteten Körpers angeben. Dazu ist es zweckmäßig, sich sowohl den festen als den bewegten Körper mit einem orthonormierten Rechtsdreibein verbunden zu denken und deren relative Lage anzugeben. Bezeichnen wir das mit dem festen System  $\Sigma$  verbundene Koordinatensystem mit  $O(x,y,z)$ , das mit dem bewegten System  $\Sigma'$  verbundene Koordinatensystem mit  $O'(x',y',z')$ , dann hängt die Lage von  $\Sigma'$  gegenüber  $\Sigma$  von sechs Parametern ab: 3 Parameter für die Lage von  $O'$ , 2 Parameter für den in Richtung von  $z'$  weisenden Einheitsvektor  $\mathbf{e}_3$  und noch ein Parameter für die Festlegung der  $x'$ -Achse durch  $O'$ .

Der frei bewegliche starre Körper besitzt demnach sechs *Freiheitsgrade*. Schränkt man die freie Beweglichkeit eines Körpers ein, indem man etwa fordert, daß sich bestimmte Punkte nur auf gegebenen Kurven oder Flächen bewegen können, so mindert sich die Anzahl der Freiheitsgrade. Ein System, dessen Raumlage nur mehr von einem Parameter abhängt, das also nur mehr einen Freiheitsgrad aufweist, nennt man *zwangsläufig*. Jeder Folge der Parameterwerte entspricht eine Folge von Raumlagen des bewegten Körpers. Jeder Punkt des bewegten Körpers durchläuft dabei eine bestimmte Punktfolge, die *Bahn* dieses Punktes. Im Folgenden setzen wir voraus, daß die auf das feste System bezogenen Koordinaten eines Punktes stetige und mindestens zweimal differenzierbare Funktionen dieses Parameters sind. Als der den *Zwangslauf* des Körpers dienende Parameter dient häufig die *Zeit*  $t$ .

Auch jene Verlagerung des Körpers, die alle Punkte an Ort und Stelle beläßt, bezeichnen wir als *Bewegung* und zwar als *identische Bewegung* oder kurz *Identität*.

Oft interessiert an einer Bewegung nur die Anfangs- und die Endlage des bewegten Körpers. Wir betrachten dann jede andere Bewegung, welche ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit der Zwischenlagen den Körper aus derselben Anfangslage in dieselbe Endlage überführt, als *Ersatzbewegung* (*äquivalente Bewegung*) für die ursprünglich gegebene Verlagerung. Wir werden häufig bestrebt sein, komplizierte Bewegungen durch möglichst einfache zu ersetzen.

Es wird daher zweckmäßig sein, vor Behandlung der allgemeinen Bewegung gewisse einfache Spezialfälle zu betrachten.

#### 8.2 Drehung um eine Achse

Hier bleibt eine Gerade  $\mathfrak{a}$  des Raumes, die *Drehachse*, punktweise fest (Fig. 8.1), während jeder nicht auf der Achse liegende Punkt des Raumes einen Kreisbogen Bogen  $(\overline{P'P})$  beschreibt. Dieser liegt in der Normalebene  $\nu$  durch  $P$  auf  $\mathfrak{a}$ , sein Mittelpunkt  $M$  ist der Schnittpunkt von  $\nu$  und  $\mathfrak{a}$ .  $\delta = \angle PMP'$  heißt der *Drehwinkel* der gegebenen Drehung. Ist  $\delta = \pi$ , so spricht man von einer *Umwendung* um die Umwendungsache  $u$  (Fig. 8.1.2). Die Umwendung des Punktes  $P$  um die Achse  $u$  ergibt dasselbe Resultat wie die Spiegelung von  $P$  an

a. Zweimalige Umwendung um dieselbe Achse führt jeden Punkt in seine ursprüngliche Lage zurück, ergibt also die Identität.

**Satz 8.2.1:** Die Aufeinanderfolge zweier Umwendungen um zwei einander in einem Punkt  $O$  schneidenden Achsen  $u_1$  und  $u_2$  läßt sich ersetzen durch eine Drehung um eine durch  $O$  gehende Achse  $a$ , welche auf die von  $u_1$  und  $u_2$  aufgespannte Ebene normal steht. Der Drehwinkel  $\delta$  ist gleich dem doppelten, von den Umwendungsachsen eingeschlossenen Winkel

**Beweis:** Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir die von  $u_1$  und  $u_2$  aufgespannte Ebene parallel zur Grundrißebene wählen. Der von  $u_1$  und  $u_2$  gebildete Winkel  $\varphi$  erscheint dann im Grundriß in wahrer Größe. Die Umwendung eines beliebigen Raumpunktes  $P$  um  $u_1$  führt  $P$  in den bez.  $u_1$  spiegelbildliche Punkt  $P_1$  über, dessen Grundriß  $P'_1$  daher zu  $P'$  bezüglich  $u'_1$  symmetrisch ist. Im Raum besitzen  $P$  und  $P_1$  entgegengesetzt gleiche Abstände von der Ebene  $(u_1u_2)$ . Die anschließende Umwendung um die Achse  $u_2$  spiegelt  $P_1$  an  $u_2$  nach  $\bar{P}$ .  $\bar{P}'$  ist im Grundriß symmetrisch zu  $u'_1$  bezüglich  $P'_1$ , sodaß  $O'$  der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks  $\Delta P'_1P'_1\bar{P}'$  ist.  $\bar{P}$  befindet sich auf derselben Seite und im gleichen Abstand von der Ebene  $(u_1u_2)$  wie  $P$ .  $\bar{P}$  geht daher aus  $P$  durch Drehung um jene Achse  $a$  hervor, welche in  $O$  auf der Ebene  $(u_1u_2)$  normal steht. Dem Grundriß entnimmt man, daß der Drehwinkel  $\delta = \varphi = 2\angle u_1u_2$  ist.

**Figur 8.2**

Dieser Satz läßt sich umkehren:

**Satz 8.2.2:** Jede Drehung um eine gegebene Achse  $a$  läßt sich auf  $\infty^2$  Arten durch zwei Umwendungen ersetzen. Die Umwendungsachsen schneiden einander in einem Punkt  $O$  der Drehachse  $a$ , stehen auf diese normal und schließen miteinander den halben Drehwinkel ein

**Beweis:** Man wähle  $O$  beliebig auf der Drehachse  $a$ . In  $O$  wähle man  $u_1$  (oder  $u_2$ ) beliebig, aber normal auf  $a$ . Dann läßt sich  $u_2$  (oder  $u_1$ ) gleichfalls normal auf  $a$  eindeutig rekonstruieren, da der orientierte Winkel  $\angle u_1u_2$  gleich dem halben Drehwinkel ist.

**Satz 8.2.3:** Die Aufeinanderfolge zweier Drehungen um zwei einander in einem Punkt  $O$  schneidenden Achsen  $a_1, a_2$  ist äquivalent einer Drehung um eine durch  $O$  gehende Achse  $a$ .

**Beweis:** Wir zerlegen zunächst die Drehung um  $a_1$  in die beiden Umwendungen mit den Achsen  $u_{11}$  und  $u_{12}$ . Dabei stehe  $u_{12}$  in  $O$  auf die von den gegebenen Achsen aufgespannte Ebene  $(a_1a_2)$  normal.  $u_{11}$  ist eindeutig bestimmt, da  $\angle u_{11}u_{12} = \frac{1}{2} \delta_1$  gleich der Hälfte des orientierten ersten Drehungswinkels  $\delta_1$  sein muß. Ebenso zerlegen wir die anschließende Drehung um  $a_2$  in die beiden Umwendungen mit den Achsen  $u_{21}, u_{22}$ , wobei wir  $u_{21} = u_{12}$  wählen.  $u_{22}$  ist dann eindeutig bestimmt und schließt mit  $u_{21}$  in der Normalebene zu  $a_2$  den halben Drehwinkel  $\frac{1}{2} \delta_2$  der zweiten Drehung ein. Ersetzen wir die erste Drehung durch die Umwendungen um  $u_{11}$  und  $u_{12}$ , so gelangt ein beliebiger Raumpunkt  $P$  über die Zwischenlage  $P_1$  (nach der ersten Umwendung) nach  $\bar{P}$ . Die anschließend vorgenommene zweite Drehung führt  $\bar{P}$  über die Zwischenlage  $\bar{P}_1$  (nach Umwendung um  $u_{21}$ ) in die Endlage  $\bar{\bar{P}}$  über. Wegen  $u_{12} = u_{21}$  fällt  $\bar{P}_1$  mit  $P_1$  zusammen, sodaß man  $\bar{\bar{P}}$  erhält, indem man  $P_1$  gleich an  $u_{22}$  umwendet. Der Übergang von  $P$  nach  $\bar{\bar{P}}$  läßt sich demnach auch durch Aufeinanderfolge der beiden Umwendungen mit den Achsen  $u_{11}$  und  $u_{22}$  herstellen. Dies ist aber äquivalent einer Drehung mit dem Drehwinkel  $\delta = 2\angle u_{11}u_{22}$  um eine auf die Ebene  $(u_{11}u_{22})$  normale Achse  $a^1$ . Man beachte, daß die Ersatzdrehung um  $a$  von der Reihenfolge der beiden gegebenen Drehungen abhängt.

**Figur 8.3**

<sup>1</sup> Die Zusammensetzung zweier Drehungen mit Hilfe von Umwendungen findet sich bereits bei GAUSS

### 8.3 Spärische Bewegung

Bei der in Satz 8.2.3 beschriebenen Aufeinanderfolge zweier Drehungen mit einander in  $O$  schneidenden Achsen bleibt  $O$  selbst fest. Jeder der Bewegung unterworfenen Punkt behält seinen Abstand von  $O$  bei, bewegt sich mithin auf einer Kugeloberfläche mit dem Mittelpunkt  $O$ . Man nennt daher eine Bewegung des Raumes, bei der ein Punkt  $O$  festbleibt, eine *sphärische Bewegung*.

Schneidet man die Achsen  $a_1, a_2$  der Fig. 8.3 mit einer Kugeloberfläche um  $O$  in den Paaren  $A_1, \hat{A}_1; A_2, \hat{A}_2$  von Gegenpunkten, so ist die Zusammensetzung der *Kugeldrehungen* um die sphärische Drehzentren  $A_1, \hat{A}_1$  bzw.  $A_2, \hat{A}_2$  äquivalent der Kugeldrehung um das von der resultierenden Drehachse  $a$  aus der Kugeloberfläche ausgeschnittene Paar von Gegenpunkten  $A, \hat{A}$ .

Da durch jeden Kugelpunkt  $A$  sein Gegenpunkt  $\hat{A}$  eindeutig bestimmt ist, genügt es, von dem **Figur 8.4** sphärischen Drehzentrum  $A$  zu sprechen und den Gegenpunkt nicht jedesmal gesondert zu erwähnen. Es ist naheliegend, bei einer sphärischen Bewegung festes und bewegtes System durch Dreibeine  $O(x, y, z)$  und  $O(x', y', z')$  zu repräsentieren, welche im Ursprung  $O$  als dem Fixpunkt der Bewegung zusammenhängen (Fig. 8.4).

**Satz 8.3.1:** *Jede Bewegung, bei der ein Punkt  $O$  des bewegten Systems festbleibt, läßt sich durch eine Drehung um eine Achse durch  $O$  ersetzen*

Beweis: Schneiden wir die  $x'y'$ -Ebene der Endlage mit der  $xy$ -Ebene der Ausgangslage des Koordinatensystems, so erhalten wir die *Knotenlinie*  $k$ . Dann kann man das System  $O(x, y, z)$  durch drei Hilfsdrehungen in die Lage  $O(x', y', z')$  überführen:

1. Drehung: Drehachse ist die  $z$ -Achse, Drehwinkel jener Winkel  $\varphi$ , der die  $x$ -Achse in die Knotenlinie überführt. Nach der ersten Drehung hat das Koordinatensystem die Lage  $O(x_1, y_1, z_1)$  erreicht

2. Drehung: Drehachse ist die  $x_1$ -Achse. Der Drehwinkel  $\theta$  werde so gewählt, daß die  $x_1y_1$ -Ebene in die  $x'y'$ -Ebene übergeht. Nach Ausführung der 2. Drehung nimmt das System die Lage  $O(x_2, y_2, z_2)$  ein

3. Drehung: Drehachse ist die  $z_2$ -Achse. Durch Drehung um den Winkel  $\psi$  geht  $O(x_2, y_2, z_2)$  in die Endlage  $O(x', y', z')$  über. Alle ausgeführten Drehungen haben Drehachsen durch  $O$ . Je zwei von ihnen lassen sich nach Satz 8.2.3 zu einer resultierenden Drehung zusammensetzen. Die Abfolge der drei beschriebenen Drehungen liefert daher eine Ersatzdrehung, welche  $O(x, y, z)$  unmittelbar nach  $O(x', y', z')$  überführt. Die beschriebene Zerlegung der Bewegung stammt von L. EULER. Man nennt  $\varphi, \theta, \psi$  daher die *EULERSchen Winkel* der Drehung.

### 8.4 Parallelverschiebung

Wählt man zwei parallele Umwendungsachsen  $u_1, u_2$ , welche man o.B.d.A. zweitprojizierend annehmen kann, so erkennt man aus Fig. 8.5 unmittelbar, daß die Strecken  $P\bar{P}$ , welche die Ausgangslage mit der Endlage eines Punktes verbinden, alle parallel, gleichlang und gleich orientiert sind, daher alle denselben Vektor  $\mathbf{v}$  repräsentieren. Der Übergang von  $P$  nach  $\bar{P}$  wird daher durch eine *Parallelverschiebung* (oder kurz *Schiebung*) vermittelt, deren Richtung und Orientierung mit der eines von  $u_1$  nach  $u_2$  weisenden Gemeinlotes dieser Geraden übereinstimmt und deren Betrag gleich dem Doppelten des Abstandes  $u_1u_2$  ist.

Man erkennt leicht, daß man umgekehrt jede Parallelverschiebung auf  $\infty^3$  Arten durch die Aufeinanderfolge zweier Umwendungen um parallele Achsen ersetzen kann.

### 8.5 Ebene Bewegung

Um zwei Drehungen um parallele Achsen  $a_1$  und  $a_2$  zusammensetzen (Fig. 8.6), zerlegen wir jede der beiden Drehungen in je zwei Umwendungen um die Achsen  $u_{11}, u_{12}$  bzw.  $u_{21}, u_{22}$ . Die Umwendungsachse  $u_{12} = u_{21}$  legen wir in eines der Gemeinlote von  $a_1$  und  $a_2$ . Die Umwendungsachsen  $u_{11}, u_{12} = u_{21}, u_{22}$  gehören dann derselben, auf  $a_1$  und  $a_2$  normal stehenden Ebene an, sodaß  $u_{11}$  und  $u_{22}$  einander schneiden. Die Abfolge der Umwendungen um  $u_{11}$  und  $u_{22}$  ergibt die Ersatzdrehung um eine Achse  $a$ , die gleichfalls zu  $a_1$  und  $a_2$  parallel ist. Da die Bahnkreise sowohl der gegebenen Drehungen um  $a_1$  und  $a_2$  als auch der Ersatzdrehung um  $a$  zu derselben (auf  $a_1, a_2$  und  $a$  normalen) Ebenenstellung parallel sind, spricht man von einer *ebenen Bewegung*. Man überblickt die Bewegungsverhältnisse des gesamten Raumes, wenn man jene in einer zu den Drehachsen normalen Ebene kennt. Es läßt sich dann die Abfolge der beiden ebenen Drehungen um die Schnittpunkte  $O_1$  und  $O_2$  von  $a_1$  und  $a_2$  mit der Eben ersetzen durch eine Drehung um den Punkt  $O$ , wobei sich die Konstruktion von  $O$  sowie des resultierenden Drehwinkels  $\delta$  aus Fig. 8.6 ergibt.

**Figur 8.5, Figur 8.6**

Denkt man sich eine beliebige ebene Bewegung dadurch festgelegt, daß man die Anfangslage  $O(x,y)$  und die Endlage  $O'(x',y')$  eines mit der bewegten Ebene verknüpften Koordinatensystems angibt, so erkennt man aus Fig. 8.7, daß man den Übergang von  $O(x,y)$  nach  $O'(x',y')$  zerlegen kann in eine Drehung um  $O = O_1$  durch den Winkel  $\delta$ , welche  $O(x,y)$  in die zu

$O'(x',y')$  parallele Lage  $O_1(x_1,y_1)$  überführt und eine anschließende, durch den Vektor  $\vec{v} = \vec{OO'}$  festgelegte Parallelverschiebung. Die Drehung um die durch  $O_1$  gehende, zur Ebene normale und in Fig. 8.7 projizierende Achse zerlegen wir in die beiden Umwendungen um  $u_{11}$  und  $u_{12}$ , die Parallelverschiebung um den Vektor  $\vec{v}$  in die beiden Umwendungen um die parallelen Achsen  $u_{21}, u_{22}$ , wobei wir  $u_{22}$  in die Streckensymmetrale von  $O_1O'$ ,  $u_{21}$  daher durch  $O_1$  legen. Wählen wir  $u_{12} = u_{21}$ , so reduziert sich die Abfolge der Umwendungen auf die Zusammensetzung der einander in  $Z$  schneidenden Umwendungsachsen  $u_{11}, u_{22}$ . Die gegebene ebene Bewegung läßt sich also nach Satz 8.2.1 durch eine Drehung um  $Z$  durch den Winkel  $\delta = 2\angle u_{11}u_{22} = 2\angle u_{11}u_{12}$  ersetzen.

**Figur 8.7**

**Satz 8.5.1:** *Jede ebene Bewegung ist einer Drehung (oder Parallelverschiebung) äquivalent.*

### 8.6 Schraubung

Unter *Schraubung* versteht man jene Bewegung des Raumes, welche sich zusammensetzt aus einer Drehung um eine Achse  $a$  (der Drehwinkel  $\delta$  heißt dann auch *Schraubwinkel*) mit einer Schiebung in Richtung dieser Achse, wobei  $s$  die Länge der *Schiebstrecke* sei (Fig. 8.8).

**Satz 8.6.1:** *Die Aufeinanderfolge zweier Umwendungen um windschiefe Achsen  $u_1, u_2$  ist äquivalent einer Schraubung. Die Schraubachse  $a$  fällt in das Gemeinlot von  $u_1, u_2$ , die Schiebstrecke ist gleich dem doppelten Abstand von  $u_1, u_2$ , der Schraubwinkel  $\delta = 2\angle u_1u_2$  ist gleich dem doppelten Winkel der Umwendungsachsen*

**Beweis:** O.B.d.A. kann man das Gemeinlot  $a$  von  $u_1$  und  $u_2$  erstprojizierend annehmen.. Die Umwendungsachsen  $u_1, u_2$  sind dann parallel zur Grundrißebene, der Winkel  $\angle u_1u_2$  erscheint im Grundriß, der Abstand von  $u_1, u_2$  im Aufriß in wahrer Größe. Aus dem Grundriß der Fig. 8.9 erhellt, daß sich  $P$  um  $a$  um den doppelten Winkel  $\angle u_1u_2$  in die Endlage  $\bar{P}$  verdreht. Dem Aufriß entnimmt man, daß  $P$  in Richtung von  $a$  um den doppelten Abstand von  $u_1, u_2$  verschoben wird<sup>2</sup>.

**Figur 8.8, Figur 8.9**

<sup>2</sup> Die Behandlung der räumlichen Bewegungen mit Hilfe der Umwendungen bei WIENER [1]-[3]

**Satz 8.6.2:** Jede durch Achse  $\mathbf{a}$ , Schiebstrecke  $\mathbf{s}$  und Schraubwinkel  $\delta$  gegebene Schraubung läßt sich auf  $\infty^2$  viele Arten durch die Abfolge zweier Umwendungen mit den Achsen  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  ersetzen. Die gegebene Schraubachse  $\mathbf{a}$  ist das Gemeinlot von  $\mathbf{u}_1$  und  $\mathbf{u}_2$ , die halbe Schieb-  
strecke  $\frac{1}{2}\mathbf{s}$  der Abstand von  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  und der halbe Schraubwinkel  $\frac{1}{2}\delta$  gleich dem Winkel  $\angle \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2$

**Beweis:** Man wähle eine beliebige Normale in einem Punkt von  $\mathbf{a}$  als Umwendungsachse  $\mathbf{u}_1$  ( $\mathbf{u}_2$ ). Dann ist bei Beachtung des Schieb- und Drehsinnes  $\mathbf{u}_2$  ( $\mathbf{u}_1$ ) eindeutig bestimmt. Nach Satz 8.6.1 ist dann die Schraubung festgelegt.

**Satz 8.6.3:** Die Aufeinanderfolge zweier Schraubungen ergibt wieder eine Schraubung

**Beweis:** Nach Satz 8.6.2 zerlegen wir die 1. Schraubung mit der Achse  $\mathbf{a}_1$  in die beiden Umwendungen  $\mathbf{u}_{11}$  und  $\mathbf{u}_{12}$ , wobei wir  $\mathbf{u}_{12}$  als Gemeinlot der beiden gegebenen Schraubachsen  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  wählen (Fig. 8.10). Die 2. Schraubung mit der Achse  $\mathbf{a}_2$  zerlegen wir in die beiden Umwendungen um  $\mathbf{u}_{21}$  und  $\mathbf{u}_{22}$ , wobei  $\mathbf{u}_{12} = \mathbf{u}_{21}$  ist. Da die Abfolge der Umwendungen an  $\mathbf{u}_{12} = \mathbf{u}_{21}$  die Identität ergibt, erhält man den Übergang von  $P$  nach  $\bar{P}$  durch Abfolge der Umwendungen an  $\mathbf{u}_{11}$  und  $\mathbf{u}_{22}$ . Dies ist aber äquivalent einer Schraubung mit dem Gemeinlot  $\mathbf{a}$  von  $\mathbf{u}_{11}\mathbf{u}_{22}$  als Achse, dem doppelten Abstand von  $\mathbf{u}_{11}\mathbf{u}_{22}$  als Schieb-  
strecke  $\mathbf{s}$  und dem doppelten Winkel  $\angle \mathbf{u}_{11}\mathbf{u}_{22}$  als Schraubwinkel  $\delta$ .

Die Drehung um eine Achse kann man als Schraubung mit verschwindender Schieb-  
strecke  $\mathbf{s} = 0$  auffassen. In diesem Sonderfall ergibt sich aus Satz 8.6.3 der

**Satz 8.6.4:** Die Aufeinanderfolge zweier Drehungen um windschiefe Achsen ist äquivalent einer Schraubung (Fig. 8.11)

Die resultierende Schraubung reduziert sich nur dann auf eine reine Drehung, wenn  $\mathbf{u}_{11}$  und  $\mathbf{u}_{22}$  einander schneiden. Dies tritt ein, wenn

1.  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  einander in einem Punkt schneiden. Es ist dies der in Fig. 8.3 illustrierte Fall der *sphärischen Bewegung*.
2.  $\mathbf{u}_{11}, \mathbf{u}_{12} = \mathbf{u}_{21}, \mathbf{u}_{22}$  in derselben Ebene liegen. In diesem Falle liegt (Fig. 8.6) eine *ebene Bewegung* vor

**Satz 8.6.5 (Fundamentalsatz der räumliche Kinematik):** Jede Bewegung des Raumes läßt sich durch eine Schraubung ersetzen

**Beweis:** Die gegebene Bewegung führe das Koordinatensystem  $O(x,y,z)$  in die Lage  $O'(x',y',z')$  über (Fig. 8.12). Den Übergang von  $O(x,y,z)$  nach  $O'(x',y',z')$  kann man sich so

**Figur 8.12, Figur 8.13**

vorgenommen denken, daß man  $O(x,y,z)$  zuerst nach Satz 8.3.1 um eine Achse  $\mathbf{a}_1$  durch  $O$  in die Lage  $O(x_1,y_1,z_1)$  verdreht, aus welcher dann die Endlage  $O'(x',y',z')$  durch Parallelverschiebung um den

Vektor  $\mathbf{v}$  hervorgeht. Um die Drehung mit der Parallelverschiebung zusammensetzen, zerlegen wir  $\mathbf{v}$  in eine Komponente  $\mathbf{s}$  parallel zu  $\mathbf{a}_1$  und eine Komponente  $\mathbf{u}$  normal zu  $\mathbf{a}_1$  (Fig. 8.13). In der zu  $\mathbf{a}_1$  normalen Ebenenstellung liegt dann eine ebene Bewegung vor, welche sich aus einer Drehung um den Winkel  $\delta$  um  $\mathbf{a}_1$  mit anschließender Parallelverschiebung um den Vektor  $\mathbf{u}$  zusammensetzt. Diese ebene Bewegung ist aber nach Satz 8.5.1 äquivalent einer reinen Drehung um die durch das Zentrum  $Z$  gehende Achse  $\mathbf{a}$ . Die Bewegung von  $O(x,y,z)$  nach  $O'(x',y',z')$  läßt sich daher als Schraubung um die Achse  $\mathbf{a}$  mit dem Schraubwinkel  $\delta$  und der durch den Vektor  $\mathbf{s}$  repräsentierten Schieb-  
strecke darstellen.

Durch Vorgabe des Schiebvektors  $\mathbf{s}$  wird die Schraubachse orientiert. Blickt man von der Spitze des Schiebvektors auf eine achsennormale Ebene, so spricht man von einer *Rechts-*

*schraubung*, wenn der Schraubwinkel  $\delta$  in dieser Ebene positiv (entgegen dem Uhrzeiger), hingegen von einer *Linksschraubung*, wenn der Schraubwinkel negativ dreht (Fig. 8.14,1,2)

**Figur 8.14**

### 8.7 Konstruktive Zusammensetzung zweier Schraubungen

Es seien zwei durch ihre Achsen  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ , Schraubwinkel  $\delta_1, \delta_2$  und Schiebstrecken  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  bestimmte Linksschraubungen gegeben (Fig. 8.15.1). Die der Abfolge der gegebenen Schraubungen äquivalente Schraubung sei auf zeichnerischem Wege zu ermitteln. Bei der konstruktiven Behandlung der Schraubung ist es zweckmäßig, den Dreh- und Schiebungsanteil gesondert zu behandeln. Wir werden daher durch einen beliebig gewählten Hilfspunkt O Parallele  $\bar{\mathbf{a}}_1$  und  $\bar{\mathbf{a}}_2$  zu  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  ziehen und zunächst die Drehungen durch die Winkel  $\delta_1$  und  $\delta_2$  wie in Fig. 8.3 zusammensetzen. Legen wir auf den gegebenen Schraubachsen einen positiven Schiebsinn fest - in Fig. 8.15.1 wurde er so gewählt, daß die orientierten Achsen  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  nach „oben“ weisen - so bestimmen die gleichorientierten Parallelen  $\bar{\mathbf{a}}_1$  und  $\bar{\mathbf{a}}_2$  durch O auf einer Kugeloberfläche um O in eindeutiger Weise zwei Drehzentren  $A_1$  und  $A_2$ . Den Umwendungsachsen der Fig. 8.3 entsprechen auf der Kugeloberfläche die Zentren  $U_{11}, U_{12} = U_{21}, U_{22}$ , von denen  $U_{11}, U_{12}$  dem Großkreis mit dem Pol  $A_1, U_{21}, U_{22}$  dem Großkreis mit dem Pol  $A_2$  angehören. Ferner ist  $\angle U_{11}OU_{12} = \frac{1}{2}\delta_1, \angle U_{21}OU_{22} = \frac{1}{2}\delta_2$ . Die resultierende Drehung erfolgt um den Pol A des  $U_{11}$  mit  $U_{22}$  verbindenden Großkreises, wobei der Drehwinkel  $\delta$  der resultierenden Drehung durch  $\frac{1}{2}\delta = \angle U_{11}OU_{22}$  festgelegt wird.

**Figur 8.15**

#### 8.7.1 Zusammensetzung der Drehungsanteile

Um die genannten Kugeldrehungen zusammensetzen, bedient man sich mit Vorteil der stereographischen Projektion. Auf der durch den Grundkreis  $g$  festgelegten Hilfskugel haben wir zunächst die Punkte  $A_1$  und  $A_2$  aufzusuchen und deren stereographische Projektionen  $A_1^s$  und  $A_2^s$  zu ermitteln (Fig. 8.15.2). Die stereographischen Projektionen (Mittelpunkt  $Z_1^c$ ) und  $k_2^s$  (Mittelpunkt  $Z_2^s$ ) der Großkreise  $k_1$  und  $k_2$  mit den Polen  $A_1$  und  $A_2$  legen wir nach dem Vorbild der Fig. 7.4 fest. Als  $U_{12}^s = U_{21}^s$  können wir einen der beiden Schnittpunkte von  $k_1^s$  und  $k_2^s$  wählen. Um auf  $k_1^s$  den Punkt  $U_{11}^s$  festzulegen, projizieren wir nach Fig. 7.6.1 den Punkt  $U_{12}^s$  aus  $A_1^s$  in den Punkt  $U_{11}^o$  auf  $g$ . Da voraussetzungsgemäß um  $\mathbf{a}_1$  eine Linksschraubung vorliegt, ist der Drehsinn um  $A_1$  auf der Kugeloberfläche bei Betrachtung von außen negativ. Nach Kap. 7.1 ist daher auch der Drehsinn um  $A_1^s$  negativ. Wir haben demnach den Punkt  $U_{11}^o$  auf  $g$  so zu bestimmen, daß  $\angle U_{11}^oOU_{12}^o = \frac{1}{2}\delta_1$  ist und daß der Übergang von  $U_{11}^o$  nach  $U_{12}^o$  auf  $g$  im negativen Sinn erfolgt. Ganz analog hat man  $U_{22}^s$  auf  $k_2^s$  so zu bestimmen, daß  $U_{12}^o$  im negativen Sinn auf  $g$  nach  $U_{22}^o$  übergeht und  $\angle U_{21}^oOU_{22}^o = \frac{1}{2}\delta_2$  ist. Der nach Fig. 7.5 ermittelte,  $U_{11}^s$  und  $U_{22}^s$  verbindende Gegenpunktekreis  $k^s$  hat  $A^s$  als Bild des zugehörigen Kugelpoles (Konstruktion nach Fig. 7.4). Der entsprechende Kugelpunkt A ist das Zentrum der resultierenden sphärischen Drehung. Projiziert man  $U_{11}^s$  und  $U_{22}^s$  aus  $A^s$  in die Punkte  $U_{11}^{oo}$  und  $U_{22}^{oo}$  des Grundkreises, so stellt der Winkel  $\angle U_{11}^{oo}OU_{22}^{oo} = \frac{1}{2}\delta < \pi$  die Hälfte des Drehwinkels der resultierenden Kugeldrehung dar, welche für einen Betrachter von außen positiv erscheint. Damit sind die Drehungsanteile der gestellten Aufgabe ausgewertet und somit auch die Aufgabe gelöst, zwei Drehungen mit schneidenden Achsen zusammensetzen.

#### 8.7.2 Zusammensetzung der Schiebungsanteile

Nun haben wir noch die Schiebungsanteile nach dem Vorbild von Fig. 8.10 zu berücksichtigen. Die Raumgerade  $u_{12} = u_{21}$  ist das Gemeinlot von  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$ . Da  $\mathbf{a}_1$  parallel zur Aufrißebene verläuft, ist  $u_{12}'$  normal auf den Aufriß  $\mathbf{a}_1'$  dieser Geraden,  $u_{12}''$  ist parallel zur Geraden ( $OU_{12}^s$ )

der Fig. 8.15.2. Wir haben also an  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  eine Treffgerade dieser Richtung zu ermitteln. Dazu spannen wir mit  $\mathbf{a}_1$  und einer durch den beliebigen Hilfspunkt  $l$  auf  $\mathbf{a}_1$  gehenden Hilfsgeraden der bekannten Richtung eine Ebene auf, und schneiden diese mit  $\mathbf{a}_2$  in  $D_2$ . Die durch  $D_2$  gehende Gerade der gegebenen Richtung trifft  $\mathbf{a}_1$  in  $D_1$ , stellt demnach die gesuchte Gerade  $u_{12} = u_{21}$  dar.

Auf  $\mathbf{a}_1$  haben wir einen Punkt  $E_1$  so zu wählen, daß der Betrag des gemäß der auf  $\mathbf{a}_1$  gewählten Schiebrichtung orientierten Vektors  $\vec{E_1 D_1}$  gleich der halben gegebenen Schiebstrecke  $s_1$  ist. Durch  $E_1$  ist die Umwendungsachse  $u_{11}$  zu legen, deren Aufriß  $u_{11}^*$  normal zu  $\mathbf{a}_1^*$  verläuft und deren Grundriß  $u_{11}^s$  parallel zur Strecke  $OU_{11}^s$  der Fig. 8.15.2 ist.

Ebenso ist auf  $\mathbf{a}_2$  der Punkt  $F_2$  so zu wählen, daß der gewählten Orientierung auf  $\mathbf{a}_2$  entsprechend, der Betrag des Vektors  $\vec{D_2 F_2}$  gleich der Hälfte der Schiebstrecke  $s_2$  ist. Durch  $F_2$  geht die Gerade  $u_{22}$ , deren Grundriß parallel zur Strecke  $OU_{22}^s$ , deren Aufriß parallel zur Strecke  $OU_{22}^*$  ist. Die Ermittlung von  $U_{22}^*$  ist aus Fig. 8.15.2 ersichtlich.

Von der Achse der resultierenden Schraubung ist aus Fig. 8.15.2 die Richtung des Grundrisses  $\vec{a}' = (OA') = (OA^s)$ , sowie die Richtung des Aufrisses  $\vec{a}'' = (OA'')$  bekannt. Die Treffgerade dieser Richtung an  $u_{11}$  und  $u_{22}$  stellt die gesuchte Schraubachse dar. Legen wir also durch  $l$  auf  $u_{11}$  eine Hilfsgerade mit der Richtung von  $\mathbf{a}$ , so spannt sie zusammen mit  $u_{11}$  eine Ebene auf, deren Schnittpunkt  $F$  mit  $u_{22}$  einen Punkt von  $\mathbf{a}$  ergibt.  $\mathbf{a}$  trifft dann  $u_{11}$  in  $E$ .

Durch die Lage von  $A$  auf der oberen Halbkugel der Fig. 8.15.2 wird der Achse  $\mathbf{a}$  eine gewisse Orientierung erteilt, welche mit der von  $\vec{EF}$  übereinstimmt. Zusammen mit der positiven Orientierung des Drehwinkels ergibt sich demnach, daß die resultierende Schraubung eine Rechtsschraubung mit der Schiebstrecke  $s = 2EF$  und dem Drehwinkel  $\delta = 2\angle U_{11}^{00} OU_{22}^{00}$  ist.

# Sphärische Kinematik

## 9 Analytische Behandlungen der Drehungen um O

### 9.1 Umwendungen

Nach Satz 8.2.2 läßt sich jede Drehung um eine Achse durch O in zwei Umwendungen zerlegen, deren Achsen gleichfalls durch O gehen. Wir werden daher zuerst Umwendungen dieser Art betrachten. Die Achse u einer Umwendung legen wir durch einen in ihr liegenden Einheitsvektor  $\mathbf{e}$  fest, der auf zwei Arten gewählt werden kann. Die Umwendung an u führe einen durch seinen Ortsvektor  $\mathbf{x}$  festgelegten Punkt in den Punkt  $\bar{\mathbf{x}}$  über. Die Drehstreckung, welche  $\mathbf{e}$  nach  $\mathbf{x}$  überführt, wird nach #2.33 und #2.29 durch die Quaternion

$$\mathbf{A} = \mathbf{x} \circ \mathbf{e}^{-1} = -\mathbf{x} \circ \mathbf{e} \quad \# 9.1$$

vermittelt. Da  $\bar{\mathbf{x}}$  zu  $\mathbf{x}$  bezüglich u symmetrisch ist, führt die zu  $\mathbf{A}$  konjugierte Quaternion  $\tilde{\mathbf{A}}$  nach #2.47  $\mathbf{e}$  nach  $\bar{\mathbf{x}}$  über und es ist analog zu #9.1

$$\tilde{\mathbf{A}} = -\bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{e} \quad \# 9.2$$

Aus #9.1 folgt wegen #2.24 und #2.8

$$\tilde{\mathbf{A}} = -\tilde{\mathbf{e}} \circ \tilde{\mathbf{x}} = -\mathbf{e} \circ \mathbf{x} \quad \# 9.3$$

Vergleicht man #9.3 mit #9.2, so ist  $\bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{e} = \mathbf{e} \circ \mathbf{x}$ . Daraus folgt durch Quaternionenmultiplikation von rechts mit  $\mathbf{e}^{-1} = \tilde{\mathbf{e}}$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{e} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{e}} \quad \# 9.4$$

**Satz 9.1.1:** *Einer Umwendung um eine durch O gehende Achse lassen sich zwei Einheitsvektoren  $\pm \mathbf{e}$  zuordnen. Durch jeden dieser Einheitsvektoren ist die Umwendung vermöge #9.4 eindeutig bestimmt*

### 9.2 Zusammensetzung von Umwendungen

Nach Satz 8.2.1 ergibt die Zusammensetzung zweier Umwendungen mit einander in O schneidenden Achsen  $u_1$  und  $u_2$  eine Drehung. Die erste Umwendung, festgelegt durch  $\mathbf{e}_1$  führe  $\mathbf{x}$  nach  $\mathbf{x}_1$ , die anschließend ausgeführte Umwendung, bestimmt durch  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{x}_1$  nach  $\bar{\mathbf{x}}$  über. Die Zusammensetzung der Umwendungen  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{e}}_1$  und  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{x}_1 \circ \tilde{\mathbf{e}}_2$  ergibt

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_2 \circ (\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{e}}_1) \circ \tilde{\mathbf{e}}_2 = (\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1) \circ \mathbf{x} \circ (\tilde{\mathbf{e}}_1 \circ \tilde{\mathbf{e}}_2) \quad \# 9.5$$

Setzt man

$$\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1 = -\mathbf{D} \quad \# 9.6$$

so kann man #9.5 mit Hilfe der *Drehquaternion*  $\mathbf{D}$  in der Gestalt

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}} \quad \# 9.7$$

schreiben<sup>1</sup>. Nach #2.11 folgt aus #9.6

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \quad \# 9.8$$

Bezeichnet man den Winkel der beiden Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  mit  $\frac{1}{2} \delta$ , so nimmt die Quaternion #9.8 die Form

$$\mathbf{D} = \cos \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\delta}{2} \cdot \mathbf{e} \quad \# 9.9$$

<sup>1</sup> BLASCHKE [4] S.3

an, worin  $\mathbf{e}$  jener auf  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  normalstehende, die Achse der resultierenden Drehung festlegende Einheitsvektor ist, der mit  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  (in dieser Reihenfolge) ein Rechtsdreibein bildet. Anders ausgedrückt: von der Spitze von  $\mathbf{e}$  aus betrachtet, ist der Drehsinn des Winkels  $\delta$  positiv. Bezeichnet man

$$\mathbf{v} = \mathbf{e} \sin \frac{\delta}{2} \quad \# 9.10$$

als *Drehvektor*, so erhält #9.9 die Form

$$\mathbf{D} = \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{v} \quad \# 9.11$$

Aus #9.9 folgt wegen #2.21

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{D} \circ \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \quad \# 9.12$$

$\mathbf{D}$  ist also eine *Einheitsquaternion*. Da in #9.6 jeder der beiden Vektoren  $\mathbf{e}_i$  umorientiert werden kann, ist die Einheitsquaternion  $\pm \mathbf{D}$  nur bis auf das Vorzeichen bestimmt. Jede Einheitsquaternion  $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{a}^\circ$  ( $\mathbf{a}^2 + |\mathbf{a}|^2 = 1$ ) kann man als Drehquaternion #9.9 darstellen. Indem man

$\mathbf{a} = \cos \frac{\alpha}{2}$ ,  $\mathbf{a}^\circ = \mathbf{a}^\circ \sin \frac{\alpha}{2}$  setzt, wobei  $\mathbf{a}^\circ$  der mit  $\mathbf{a}$  gleichorientierte Einheitsvektor ist.

Umgekehrt läßt sich jede Drehquaternion auch als Quaternionenprodukt zweier je eine Umwendung repräsentierenden Einheitsvektoren darstellen, von denen einer, etwa  $\mathbf{e}_1$ , normal auf die Achse  $\mathbf{e}$  der Quaternion, aber sonst beliebig vorgegeben werden kann. Dann folgt aus  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e} = 0$ , #9.6 und #9.9

$$\mathbf{e}_2 = -\mathbf{D} \circ \mathbf{e}_1^{-1} = \mathbf{D} \circ \mathbf{e}_1 = \cos \frac{\delta}{2} \cdot \mathbf{e}_1 + \sin \frac{\delta}{2} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{e}_1) \quad \# 9.13$$

**Satz 9.2.1:** *Jeder durch ihre Drehachse, Drehwinkel  $\delta$  und Drehsinn gegebenen Drehung lassen sich zwei Einheitsquaternionen gemäß #9.9 zuordnen. Jeder Einheitsquaternion ist umgekehrt durch #9.7 in eindeutiger Weise eine Drehung zugeordnet.*

Setzt man in #9.9  $\delta = \pi$ , so reduziert sich #9.7 auf die Gleichung #9.4 für die Umwendung. Setzt man #9.9 in #9.7 ein und geht zum doppelten Winkel über, so gilt

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}} = \left( \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{e} \sin \frac{\delta}{2} \right) \circ \mathbf{x} \circ \left( \cos \frac{\delta}{2} - \mathbf{e} \sin \frac{\delta}{2} \right) = \\ &= \left[ \left( -(\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \sin \frac{\delta}{2} \right) + \left( \mathbf{x} \cos \frac{\delta}{2} + (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \sin \frac{\delta}{2} \right) \right] \circ \left( \cos \frac{\delta}{2} - \mathbf{e} \sin \frac{\delta}{2} \right) = \\ &= \left[ -(\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \cos \frac{\delta}{2} \cdot \sin \frac{\delta}{2} + (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \cos \frac{\delta}{2} \cdot \sin \frac{\delta}{2} + \underbrace{(\mathbf{e}, \mathbf{e}, \mathbf{x})}_{0} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right] + \\ &+ \left[ \mathbf{x} \cos^2 \frac{\delta}{2} + (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \cos \frac{\delta}{2} \cdot \sin \frac{\delta}{2} + \mathbf{e} (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \sin^2 \frac{\delta}{2} - (\mathbf{x} \times \mathbf{e}) \cos \frac{\delta}{2} \cdot \sin \frac{\delta}{2} - \underbrace{(\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{e}}_{\mathbf{x} - \mathbf{e}(\mathbf{e} \times \mathbf{x})} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right] \end{aligned}$$

Daher lautet die Formel für die Drehung um eine Achse durch O in Vektorform

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \cos \delta + (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \sin \delta + \mathbf{e}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e})(1 - \cos \delta) \quad \# 9.14$$

### 9.3 EULERSche Drehparameter

Nach #2.22 kann man jede beliebige Quaternion  $\mathbf{A}$  zu einer Einheitsquaternion normieren:

$$\mathbf{D} = \pm \frac{\mathbf{A}}{A} \quad \# 9.15$$

Dann erhält #9.7 wegen #2.28 die Form

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{A}}{A} \circ \mathbf{x} \circ \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{A} = \mathbf{A} \circ \mathbf{x} \circ \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{A^2} = \mathbf{A} \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{A}^{-1} \quad \# 9.16$$

Die Gleichung #9.16 und damit die dargestellte Drehung ändert sich nicht, wenn man  $\mathbf{A}$  mit einem beliebigen skalaren Faktor  $\lambda$  multipliziert, sodaß man derselben Drehung  $\infty^1$  nicht normierte Quaternionen zuordnen kann, von denen aber jede die Drehung eindeutig bestimmt. Setzt man nach #2.28 und #2.21

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{A^2}(\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}), \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix}, \quad \# 9.17$$

$$A^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

so folgt aus #9.16 dann weiter

$$\begin{aligned} A^2 \bar{\mathbf{x}} &= (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}) \circ \mathbf{x} \circ (\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}) = (-\mathbf{ax}) + \mathbf{a}_0 \mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{x} \circ (\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}) = \left[ -(\mathbf{ax})\mathbf{a}_0 + (\mathbf{ax})\mathbf{a}_0 + \underbrace{(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{x})}_0 \right] + \\ &+ \left[ \mathbf{a}_0^2 \mathbf{x} + \mathbf{a}_0 (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) + (\mathbf{ax})\mathbf{a} - \mathbf{a}_0 (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) - \underbrace{(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{a}}_{\mathbf{x}|\mathbf{a}|^2 - \mathbf{a}(\mathbf{ax})} \right] = (a_0^2 - |\mathbf{a}|^2) \mathbf{x} + 2\mathbf{a}_0 (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) + 2(\mathbf{ax})\mathbf{a} \end{aligned}$$

Darstellung in Koordinaten ergibt

$$A^2 \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} = (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) + 2\mathbf{a}_0 \begin{Bmatrix} a_2 z - a_3 y \\ a_3 x - a_1 z \\ a_1 y - a_2 x \end{Bmatrix} + 2(a_1 x + a_2 y + a_3 z) \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

Vergleich der Vektorkoordinaten liefert

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{A^2} [(a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)x + 2(a_1 a_2 - a_3 a_0)y + 2(a_3 a_1 + a_2 a_0)z] \\ \bar{y} &= \frac{1}{A^2} [2(a_1 a_2 + a_3 a_0)x + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)y + 2(a_2 a_3 - a_1 a_0)z] \\ \bar{z} &= \frac{1}{A^2} [2(a_3 a_1 - a_2 a_0)x + 2(a_2 a_3 + a_1 a_0)y + (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)z] \\ A^2 &= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \end{aligned} \quad \# 9.18$$

#9.18 ist die Darstellung einer Drehung um den Ursprung mit Hilfe der *homogenen* EULERSchen Drehparameter  $\mathbf{a}_0: \mathbf{a}_1: \mathbf{a}_2: \mathbf{a}_3^2$ . Normiert man die Quaternion #9.17, indem man  $\lambda_i = \pm \frac{a_i}{A}$

<sup>2</sup>EULER [1]

setzt, so liegen die (inhomogenen) *normierten* EULERSchen Drehparameter  $\lambda_i$  vor. Nach #9.15 und #9.9 ist die durch  $\mathbf{a}_0:\mathbf{a}_1:\mathbf{a}_2:\mathbf{a}_3$  gekennzeichnete Drehung geometrisch durch

$$\mathbf{v} = \mathbf{e} \sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{A} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix} \text{ und } \cos \frac{\delta}{2} = \frac{a_0}{A} = \lambda_0 \quad \# 9.19$$

festgelegt.

### 9.4 Zusammensetzung von Drehungen.

Seien zwei Drehungen um O gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{D}_1 \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}}_1, & \mathbf{D}_1 &= \cos \frac{1}{2} \delta_1 + \mathbf{e}_1 \sin \frac{1}{2} \delta_1 \\ \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{D}_2 \circ \bar{\mathbf{x}} \circ \tilde{\mathbf{D}}_2, & \mathbf{D}_2 &= \cos \frac{1}{2} \delta_2 + \mathbf{e}_2 \sin \frac{1}{2} \delta_2 \end{aligned} \quad \# 9.20$$

Deren Zusammensetzung ergibt eine neue Drehung

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_2 \circ \mathbf{D}_1 = \cos \frac{1}{2} \delta + \mathbf{e} \sin \frac{1}{2} \delta \quad \# 9.21$$

wobei aus #9.20 für die resultierende Drehung folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}_2 \circ \mathbf{D}_1 = \left( \cos \frac{1}{2} \delta_2 + \mathbf{e}_2 \sin \frac{1}{2} \delta_2 \right) \circ \left( \cos \frac{1}{2} \delta_1 + \mathbf{e}_1 \sin \frac{1}{2} \delta_1 \right) = \\ &= \left( \cos \frac{1}{2} \delta_1 \cos \frac{1}{2} \delta_2 - (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \sin \frac{1}{2} \delta_1 \sin \frac{1}{2} \delta_2 \right) + \\ &\quad + \left( \mathbf{e}_1 \sin \frac{1}{2} \delta_1 \cos \frac{1}{2} \delta_2 + \mathbf{e}_2 \sin \frac{1}{2} \delta_2 \cos \frac{1}{2} \delta_1 + (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) \sin \frac{1}{2} \delta_1 \sin \frac{1}{2} \delta_2 \right) = \\ &= \cos \frac{1}{2} \delta + \mathbf{e} \sin \frac{1}{2} \delta = \mathbf{D} \end{aligned} \quad \# 9.22$$

In #9.22 liefert der Vergleich der Skalarteile den Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie, angewendet auf jenes sphärische Dreieck, welches von den Umwendungsachsen  $\mathbf{u}_{11}, \mathbf{u}_{12} = \mathbf{u}_{21}, \mathbf{u}_{22}$  der Fig 8.3 aus der Einheitskugel mit dem Mittelpunkt O ausgeschnitten wird. Die Winkel  $\frac{1}{2} \delta_1 = \angle \mathbf{u}_{11} \mathbf{u}_{12}$ ,  $\frac{1}{2} \delta_2 = \angle \mathbf{u}_{21} \mathbf{u}_{22}$  und  $\frac{1}{2} \delta = \angle \mathbf{u}_{11} \mathbf{u}_{22}$  sind die Seiten dieses Dreiecks. Der von den Seiten  $\mathbf{u}_{11} \mathbf{u}_{12}$  und  $\mathbf{u}_{21} \mathbf{u}_{22}$  eingeschlossenen Winkel ist dem Supplement des Winkels  $\angle \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$  gleich

### 9.5 EULERSche Winkel

In Kap.8.3 (Fig.8 4) wurde gezeigt, daß jede Bewegung, welche den Ursprung fest läßt, sich aus drei Drehungen durch die EULERSchen Winkel zusammensetzen läßt. Dabei geht das Koordinatensystem aus seiner ursprünglichen Lage  $O(x,y,z)$  über die Zwischenlagen  $O(x_1,y_1,z_1)$  und  $O(x_2,y_2,z_2)$  in die Endlage  $\bar{O}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$  über<sup>3</sup>. Ein mit dem bewegten Achsenkreuz starr verbundener Punkt wird in der Ausgangslage O durch  $\mathbf{x}$ , in seiner Endlage  $\bar{P}$  durch  $\bar{\mathbf{x}}$ , beide-male bezogen auf  $O(x,y,z)$  dargestellt. Denken wir uns das bewegte Koordinatensystem in seine vorletzte Lage  $O(x_2,y_2,z_2)$  gebracht. Der mitgenommene Punkt hat dann in bezug auf

<sup>3</sup> In vorliegendem Kapitel sind die Bezeichnungen  $X'_i$  der Figur 8.4 durch  $\bar{X}_i$  zu ersetzen.

## Analytische Behandlungen der Drehungen um O

$O(x_2, y_2, z_2)$  den Ortsvektor  $\mathbf{x}$ . Durch die Drehung um die  $z_2$ -Achse durch den Winkel  $\psi$  erreicht der Punkt seine Endlage  $\bar{P}$ . Deren Ortsvektor  $\mathbf{x}_2$  in  $O(x_2, y_2, z_2)$  ist daher nach #9.7,9

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{D}_1 \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}}_1, \quad \mathbf{D}_1 = \cos \frac{\psi}{2} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin \frac{\psi}{2} \quad \# 9.23$$

Da  $O(x_2, y_2, z_2)$  aus  $O(x_1, y_1, z_1)$  durch eine Drehung um die  $x_1$ -Achse durch den Winkel  $\theta$  hervorgeht, ist der Ortsvektor  $\mathbf{x}_1$  von  $\bar{P}$  bezogen auf  $O(x_1, y_1, z_1)$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{D}_2 \circ \mathbf{x}_1 \circ \tilde{\mathbf{D}}_2, \quad \mathbf{D}_2 = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \# 9.24$$

$O(x_1, y_1, z_1)$  ist aber aus der ursprünglichen Lage  $O(x, y, z)$  des Koordinatensystems durch eine Drehung um die  $z$ -Achse durch den Winkel  $\varphi$  hervorgegangen. Der Ortsvektor  $\bar{\mathbf{x}}$  von  $\bar{P}$  bezüglich  $O(x, y, z)$  ist also

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D}_3 \circ \mathbf{x}_1 \circ \tilde{\mathbf{D}}_3, \quad \mathbf{D}_3 = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \# 9.25$$

Insgesamt gilt daher

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D}_3 \circ \mathbf{D}_2 \circ \mathbf{D}_1 \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}}_1 \circ \tilde{\mathbf{D}}_2 \circ \tilde{\mathbf{D}}_3 = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}}$$

Wegen #9.23,24,25 folgt daher

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}_3 \circ \mathbf{D}_2 \circ \mathbf{D}_1 = \left[ \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \circ \left[ \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] \circ \mathbf{D}_1 = \\ &= \left[ \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \begin{Bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \right] \circ \left[ \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] = \\ &= \left[ \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \right] + \begin{Bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Anwendung der Additionstheoreme ergibt

$$\mathbf{D} = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2} + \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \end{Bmatrix} = \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{d} \quad \# 9.26$$

## Kapitel 9

Die Abfolge der drei EULERSchen Drehungen läßt sich nach #9.26 ersetzen durch eine Drehung um die durch den Drehvektor  $\mathbf{d}$  festgelegte Achse durch den Winkel  $\delta$ .

Setzen wir nach #9.19  $\mathbf{D} = \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{d} = \lambda_0 + \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix}$ ,  $\lambda_i = \frac{a_i}{A}$  ( $i = 1,2,3$ ), so folgt aus #9.18

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta)x - (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta)y + (\sin \varphi \sin \theta)z \\ \bar{y} &= (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta)x - (\sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \theta)y - (\cos \varphi \sin \theta)z \quad \# 9.27 \\ \bar{z} &= (\sin \psi \sin \theta)x + (\cos \psi \sin \theta)y + (\cos \theta)z \end{aligned}$$

### 9.6 Matrizendarstellung

Aus #9.18 folgt, daß eine Bewegung mit fixem Ursprung die Koordinaten der Punkte linear-homogen transformiert. Wir suchen die Bedingungen, unter denen ein lineares homogenes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \bar{x} &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z \\ \bar{y} &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z \\ \bar{z} &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z \end{aligned} \quad \# 9.28$$

eine Drehung um  $O$  darstellt. Die *Kongruenz* der Transformation #9.28 folgt aus der Forderung, daß  $\mathbf{x}$ ,  $\bar{\mathbf{x}}$  gleiche Beträge haben und der Winkel zweier beliebigen Ortsvektoren erhalten bleiben soll. Die *Gleichsinnigkeit* wird erreicht durch die Forderung, daß das Volumen  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  des von drei Vektoren aufgespannten Parallel-epipeds Größe und Vorzeichen beibehält. Wenden wir diese Forderungen auf die Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \# 9.29$$

an, welche voraussetzungsgemäß ein orthonormiertes Rechtsdreiein bilden und welche durch #9.28 in die Vektoren

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \begin{Bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = \begin{Bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{e}}_3 = \begin{Bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{Bmatrix} \quad \# 9.30$$

übergeführt werden. Die geforderten Invarianzen

$$|\mathbf{e}_i|^2 = |\bar{\mathbf{e}}_i|^2 = 1 \quad (i = 1,2,3), \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \bar{\mathbf{e}}_i \bar{\mathbf{e}}_j = 0 \quad (i, j = 1,2,3, i \neq j) \quad \# 9.31$$

ergeben dann folgende Bedingungen, denen die  $c_{ij}$  unterworfen sind

$$\sum_{k=1}^3 c_{ki}^2 = 1 \quad (i = 1,2,3), \quad \sum_{k=1}^3 c_{ki} c_{kj} = 0 \quad (i, j = 1,2,3, i \neq j) \quad \# 9.32$$

Die Forderung

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = +1 \quad \# 9.33$$

ist jedoch keine Folge von #9.31, denn aus #9.31 folgt wegen #1.44 bloß

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^2 = (\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)^2 = 1 \quad \# 9.34$$

Da man bei der durch #9.18 beschriebenen Bewegung mit fixem Ursprung umgekehrt auch das Erfülltsein von #9.32,33 verifiziert, kennzeichnen diese Bedingungen die Bewegungen mit fixem Ursprung

### 9.7 Drehmatrizen

Ist eine Drehung um O durch das ihr zugeordnete lineare Gleichungssystem #9.28, gegeben, so lassen sich wegen #9.18 sofort die inhomogenen EULERSchen Drehparameter  $\lambda_i = \frac{a_i}{A}$  angeben. Der Vergleich von #9.28 mit #9.18 ergibt

$$\begin{aligned} 4\lambda_0^2 &= c_{11} + c_{22} + c_{33} + 1, & 4\lambda_2^2 &= -c_{11} + c_{22} - c_{33} + 1 \\ 4\lambda_1^2 &= c_{11} - c_{22} - c_{33} + 1, & 4\lambda_3^2 &= -c_{11} - c_{22} + c_{33} + 1 \end{aligned} \quad \# 9.35$$

wobei die Vorzeichen so zu wählen sind, daß folgende Kontrollen stimmen

$$\begin{aligned} c_{21} - c_{12} &= 4\lambda_0\lambda_3, & c_{32} - c_{23} &= 4\lambda_0\lambda_1, & c_{13} - c_{31} &= 4\lambda_0\lambda_2 \\ c_{21} + c_{12} &= 4\lambda_1\lambda_2, & c_{32} + c_{23} &= 4\lambda_2\lambda_3, & c_{13} + c_{31} &= 4\lambda_3\lambda_1 \end{aligned} \quad \# 9.36$$

Durch #9.35,36 sind die  $\lambda_i$  bis auf den gemeinsamen Faktor  $\pm 1$  bestimmt und die Drehquaternion #9.11 ist durch #9.19 festgelegt.

### 9.8 Ermittlung der EULERSchen Winkel

Gelegentlich ist es erforderlich, die EULERSchen Winkel einer durch #9.28 festgelegten Drehung zu ermitteln. Die Knotenlinie wird durch den Vektor<sup>4</sup>

$$\mathbf{k} = \mathbf{e}_3 \times \bar{\mathbf{e}}_3 = \begin{Bmatrix} -c_{23} \\ c_{13} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{k}^\circ = \frac{1}{\sqrt{c_{23}^2 + c_{13}^2}} \begin{Bmatrix} -c_{23} \\ c_{13} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \# 9.36$$

festgelegt. Die erste EULERSche Drehung führt  $\mathbf{e}_1$  nach  $\mathbf{k}^\circ$  über. Nach den Sätzen #2.2,3 entspricht ihr die Quaternion

$$\mathbf{A}_1 = \cos \varphi + \mathbf{e}_3 \sin \varphi = \mathbf{k}^\circ \circ \mathbf{e}_1^{-1} = \frac{-c_{23}}{\sqrt{c_{23}^2 + c_{13}^2}} + \frac{c_{13}}{\sqrt{c_{23}^2 + c_{13}^2}} \mathbf{e}_3 \quad \# 9.37$$

sodaß der erste EULERSche Winkel durch

$$\cos \varphi = \frac{-c_{23}}{\sqrt{c_{23}^2 + c_{13}^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{c_{13}}{\sqrt{c_{23}^2 + c_{13}^2}} \quad \# 9.38$$

bestimmt ist. Aus dem Ansatz  $\mathbf{A}_2 = \cos \theta + \mathbf{k}^\circ \sin \theta = \bar{\mathbf{e}}_3 \circ \mathbf{e}_3^{-1}$  folgt für den zweiten EULERSchen Winkel

$$\cos \theta = c_{33}, \quad \sin \theta = \sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2} \quad \# 9.39$$

Schließlich ergibt sich aus  $\mathbf{A}_3 = \cos \psi + \bar{\mathbf{e}}_3 \sin \psi = \bar{\mathbf{e}}_1 \circ (\mathbf{k}^\circ)^{-1}$  wegen #9.32 für den dritten EULERSchen Winkel

$$\cos \psi = \frac{c_{21}c_{13} - c_{11}c_{23}}{\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}}, \quad \sin \psi = \frac{c_{31}}{\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}} \quad \# 9.40$$

<sup>4</sup> Siehe Fußnote 3

## 10 Kontinuierliche Drehungen

### 10.1 Kontinuierliche Drehungen um eine Achse durch O.

Bisher betrachteten wir nur die Anfangs- bzw. Endlage einer Bewegung mit fixem Ursprung. Nunmehr wollen wir unser Augenmerk auch auf die *Zwischenlagen* des bewegten Systems richten und diese in ihrer Abhängigkeit von der Zeit untersuchen, wobei wir zunächst die Drehungen um eine durch O gehende feste Achse, deren Richtung durch den Einheitsvektor  $\mathbf{e}$  festgelegt werde, betrachten. Der Drehwinkel  $\delta(t)$  und somit die Drehquaternion  $\mathbf{D}(t)$  #9.9 sei eine vorgegebene Funktion der Zeit  $t$ . Die Darstellung des Bahnkreises eines dieser Drehung unterworfenen Punktes  $\mathbf{x}'$  ist dann nach #9.7,9

$$\mathbf{x} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x}' \circ \tilde{\mathbf{D}}, \quad \mathbf{D} = \cos \frac{\delta(t)}{2} + \mathbf{e} \sin \frac{\delta(t)}{2} \quad \# 10.1$$

Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  von  $\mathbf{x}$  ergibt sich durch Ableitung nach  $t$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{D}} \circ \mathbf{x}' \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{D} \circ \mathbf{x}' \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}} \quad \# 10.2$$

Eliminiert man aus #10.2 den Vektor  $\mathbf{x}'$  mit Hilfe von  $\mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{D}} \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{D}$ , so folgt

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} \circ \mathbf{x} + \mathbf{x} \circ \mathbf{D} \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}} \quad \# 10.3$$

Nach #2.16 ist

$$\dot{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} = \frac{\dot{\delta}(t)}{2} \left[ -\sin \frac{\delta(t)}{2} + \mathbf{e} \cos \frac{\delta(t)}{2} \right] \circ \left[ \cos \frac{\delta(t)}{2} - \mathbf{e} \sin \frac{\delta(t)}{2} \right] = \frac{1}{2} \dot{\delta}(t) \mathbf{e} \quad \# 10.4$$

Setzen wir

$$\bar{\omega}(t) = \dot{\delta}(t) \mathbf{e} = 2 \dot{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}}, \quad |\bar{\omega}| = \omega = |\dot{\delta}(t)| \quad \# 10.5$$

so folgt aus #10.3 wegen #2.14

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} (\bar{\omega} \circ \mathbf{x} - \mathbf{x} \circ \bar{\omega}) = \bar{\omega} \times \mathbf{x} \quad \# 10.6$$

Wir nennen  $\bar{\omega}$  den *Vektor der Winkelgeschwindigkeit* und bezeichnen seinen Betrag mit  $\omega$ . Aus #10.6 ergibt sich (Fig. 10.1), daß der Geschwindigkeitsvektor auf die Verbindungsebene von  $\mathbf{x}$  mit der Drehachse normal steht und so orientiert ist, daß  $\mathbf{v}$ , von der Spitze von  $\bar{\omega}$  aus gesehen, um die Achse im positiven Sinn dreht. Der Betrag der Geschwindigkeit ist mit den Bezeichnungen der Fig. 10.1

**Figur 10.1**

$$v = \omega |\mathbf{x}| \sin \varphi = r \omega \quad \# 10.7$$

worin  $r$  den Abstand des Punktes von der Drehachse bedeutet. Man spricht von einer *gleichmäßigen Drehung*, wenn die *Winkelgeschwindigkeit*  $\dot{\delta}(t)$  konstant ist. Dann ist  $\delta = ct$ , und der Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\bar{\omega} = c\mathbf{e}$  hat eine konstante Länge  $\omega = |c|$ . Den Ableitungsvektor  $\bar{\beta} = \dot{\bar{\omega}}$  ( $\beta = |\bar{\beta}|$ ) von  $\bar{\omega}$  nach  $t$  nennt man den *Vektor der Winkelbeschleunigung*, seinen Betrag  $\beta = \dot{\delta}(t)$  die *Winkelbeschleunigung*. Bei gleichmäßiger Drehung um die gegebene Achse ist  $\bar{\beta} = \mathbf{0}$ ,  $\beta = 0$ .

Anmerkung: Man beachte, daß die Größen  $\omega$  und  $\beta$  als Beträge von Vektoren nicht negativ sind. Wir werden, ohne Verwechslungen mit  $\dot{\delta}(t)$  und  $\ddot{\delta}(t)$  befürchten zu müssen, auch  $\omega$  als Winkelgeschwindigkeit und  $\beta$  als Winkelbeschleunigung bezeichnen, da der Drehsinn durch die Orientierung von  $\bar{\omega}$  (entsprechend  $\bar{\beta}$ ) eindeutig festgelegt ist.

## 10.2 Allgemeine sphärische Bewegung

### 10.2.1 Koordinatensysteme

Nummehr wenden wir uns der Untersuchung einer beliebigen sphärischen Bewegung zu. Der Fixpunkt sei der dem festen und dem bewegten System gemeinsame Ursprung  $O$ . Ist  $\mathbf{x}'$  ein mit dem bewegten Koordinatensystem  $O(x', y', z')$  starr verbundener Vektor, so kann seine Raumlage, bezogen auf das feste System  $O(x, y, z)$ , zum Zeitpunkt  $t$  dargestellt werden durch

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{D}(t) \circ \mathbf{x}' \circ \tilde{\mathbf{D}}(t) \quad \# 10.8$$

Dabei ist wegen #9.12

$$\mathbf{D} \circ \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{1}, \quad \tilde{\mathbf{D}} \circ \mathbf{D} = \mathbf{1} \quad \# 10.9, \# 10.10$$

$\mathbf{x}(t)$  stellt dann die Bahnkurve des mitgeführten Punktes dar.

Anmerkung: Denkt man sich  $\mathbf{x}'$  zunächst als Ortsvektor im *festen* System  $O(x, y, z)$  abgetragen, so stellt #10.8 jene Drehung dar, die  $\mathbf{x}'$  aus dieser Lage jeweils in die zum Zeitpunkt  $t$  eingenommene Stellung überführt.

Da die Bahnkurve von  $\mathbf{x}$  auf einer Kugelschale um  $O$  liegt, ist es häufig, aber keineswegs immer, zweckmäßig,  $|\mathbf{x}'|^2 = 1$  zu wählen. Die durch #18.8 dargestellte Bewegung stellt dann eine *Bewegung der Einheitskugel* dar.

### 10.2.2 Geschwindigkeit eines Punktes

Differenziert man #10.8 nach der Zeit, so ist

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{D}} \circ \mathbf{x}' \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{D} \circ \mathbf{x}' \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}} \quad \# 10.11$$

der *Geschwindigkeitsvektor*, kurz: die *Geschwindigkeit* des Punktes  $\mathbf{x}$ . Wir suchen nun die momentan ruhenden Punkte des Raumes auf. Dann muß

$$\dot{\mathbf{D}} \circ \mathbf{x}' \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{D} \circ \mathbf{x}' \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}} = \mathbf{o} \quad \# 10.12$$

sein. Multipliziert man #10.12 von rechts mit  $\mathbf{D}$  und von links mit  $\tilde{\mathbf{D}}$ , so folgt wegen #10,9,10

$$\tilde{\mathbf{D}} \circ \dot{\mathbf{D}} \circ \mathbf{x}' + \mathbf{x}' \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}} \circ \mathbf{D} = \mathbf{o} \quad \# 10.13$$

Ableitung von #10.10 ergibt

$$\dot{\tilde{\mathbf{D}}} \circ \mathbf{D} + \tilde{\mathbf{D}} \circ \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{o} \quad \# 10.14$$

Da wegen #2.24 und #2.32

$$(\tilde{\mathbf{D}} \circ \dot{\mathbf{D}})^\sim = \tilde{\mathbf{D}} \circ \dot{\mathbf{D}} = \dot{\tilde{\mathbf{D}}} \circ \mathbf{D} \quad \# 10.15$$

ist, folgt aus #10.14

$$\tilde{\mathbf{D}} \circ \dot{\mathbf{D}} + (\tilde{\mathbf{D}} \circ \dot{\mathbf{D}})^\sim = \mathbf{o} \quad \# 10.16$$

Nach Satz 2.1.2.3.1 ist daher

$$\tilde{\mathbf{D}} \circ \dot{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} \bar{\omega}' \quad \# 10.17$$

ein Vektor. Aus #10.14 folgt dann

$$\bar{\omega}' = 2\tilde{\mathbf{D}} \circ \dot{\mathbf{D}} = -2\dot{\tilde{\mathbf{D}}} \circ \mathbf{D} \quad \# 10.18$$

und wegen #10.13 und #2.14

$$\bar{\omega}' \circ \mathbf{x}' - \mathbf{x}' \circ \bar{\omega}' = 2\bar{\omega}' \times \mathbf{x}' = \mathbf{o} \quad \# 10.19$$

Die Punkte  $\mathbf{x}'$  der durch den reellen Parameter  $\lambda$  festgelegten Geraden durch O

$$\mathbf{x}' = \lambda \bar{\omega}' \quad \# 10.20$$

der *Momentanachse*, ruhen also im Augenblick. Ihr Richtungsvektor *im bewegten System* ist #10.18. Stellen wir ihn *im festen System* dar, so wird wegen #10.8,9,18

$$\bar{\omega} = \mathbf{D} \circ \bar{\omega}' \circ \tilde{\mathbf{D}} = 2\mathbf{D} \circ \tilde{\mathbf{D}} \circ \dot{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} = 2\dot{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} \quad \# 10.21$$

Da die die Differentiation von #10.9

$$\dot{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{D} \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}} = \mathbf{o} \quad \# 10.22$$

ergibt, ist

$$\bar{\omega} = 2\dot{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} = -2\mathbf{D} \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}} \quad \# 10.23$$

die Richtung der Momentanachse, dargestellt im festen System. Für den Betrag  $\omega$  des Vektors  $\bar{\omega}$  folgt aus #10.23 wegen #2.23

$$\omega^2 = \bar{\omega} \circ \tilde{\omega} = -4\dot{\mathbf{D}} \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}} \quad \# 10.24$$

Löst man #10.8 nach  $\mathbf{x}'$  auf, so erhält man

$$\mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{D}} \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{D} \quad \# 10.25$$

Damit folgt aus #10.11 wegen #10.9,10

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} \circ \mathbf{x} + \mathbf{x} \circ \mathbf{D} \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}} \quad \# 10.26$$

Daher ist wegen #10.23 und #2.14

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} [\bar{\omega} \circ \mathbf{x} - \mathbf{x} \circ \bar{\omega}] = \bar{\omega} \times \mathbf{x} \quad \# 10.27$$

Vergleich mit #10.6 ergibt, daß sich der Geschwindigkeitszustand des bewegten Systems in jedem Zeitpunkt t als Drehung um die Momentanachse mit dem *momentanen Winkelgeschwindigkeitsvektor*  $\bar{\omega}$  #10.23 beschreiben läßt.

**Satz 10.2.2.1:** *Der momentane Bewegungszustand eines um einen festen Punkt bewegten Systems ist eine Drehung um die Momentanachse*

Die Einheitskugel um den Fixpunkt O wird von der Momentanachse in zwei Gegenpunkten P

**Figur 10.2** und  $\hat{P}$  geschnitten (Fig. 10.2). Die Bahnnormalebene eines Kugelpunktes X schneidet aus der Kugel den X und P verbindenden Großkreis  $\eta$  heraus, den wir sinngemäß als *sphärische Bahnnormale* der von X beschriebenen Bahn bezeichnen. Analog werden wir den durch X gehenden,  $\mathbf{v}$  berührenden Großkreis als *sphärische Bahntangente* der von x beschriebenen Bahnkurve bezeichnen.

**Satz 10.2.2.2:** *Der momentane Bewegungszustand der Bewegung einer Kugel in sich ist eine Drehung der Kugel um die diametral gegenüberliegenden Momentanzentren P und  $\hat{P}$ . Die sphärischen Normalen der Bahnkurven aller Kugelpunkte gehen durch P und  $\hat{P}$ .*

Meistens werden wir nur von dem sphärischen Momentanzentrum P sprechen und das gegenüberliegende  $\hat{P}$  nicht jedesmal gesondert erwähnen. Dies gilt im folgenden auch für ein beliebiges Paar von Gegenpunkten auf der Kugel.

### 10.2.3 Die Polkegel.

Die Momentanachsen bilden im festen und im bewegten System je einen Kegel, den *Rastkegel* bzw. den *Gangkegel*. Deren Schnittkurven mit der Einheitskugel heißen die *sphärische Rastpolkurve* bzw. die *sphärische Gangpolkurve*. Es gilt

**Satz 10.2.3.1:** Bei jeder sphärischen Bewegung gibt es zwei Kegel, den mit dem festen System verbundenen Rastkegel und den mit dem bewegten System verbundenen Gangkegel. Diese Kegel rollen bei der gegebenen Bewegung gleitungslos aufeinander ab. Umgekehrt ist eine Bewegung durch diesen Abrollvorgang zweier Kegel eindeutig bestimmt.

Bei jeder Bewegung einer Kugel in sich gibt es zwei sphärische Kurven, die sphärische Rastpolkurve und die sphärische Gangpolkurve, welche gleitungslos aufeinander abrollen. Umgekehrt ist eine sphärische Bewegung durch das Abrollen der bewegten Gangpolkurve auf der festen Rastpolkurve eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir denken uns jeden Kegel begrenzt durch den Ort der Endpunkte der sie beschreibenden Vektoren  $\bar{\omega}$  #10.23 bzw.  $\bar{\omega}'$  #10.18 (Fig. 10.3). Wir zeigen, daß die Geschwindigkeiten, mit denen die Endpunkte der Vektoren  $\bar{\omega}$  bzw.  $\bar{\omega}'$  die genannten Kurven durchheilen, in jedem Augenblick der Orientierung und dem Betrage nach übereinstimmen. Damit ist die Berührung der Kurven und damit auch der beiden Kegel gewährleistet. Da die Berührungspunkte ihre Kurven mit derselben Geschwindigkeit durchheilen, kommen immer Punkte zur Deckung, welche von einer gewissen Anfangspunkt aus durch gleichlange Bögen aufeinander bezogen sind. Das Rollen dieser Kurven hat aber das Rollen der Kegel zur Folge. Nun ist nach #10.18

$$\bar{\beta}' = \dot{\bar{\omega}}' = 2(\tilde{\mathbf{D}} \circ \dot{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{D}} \circ \ddot{\mathbf{D}}) \quad \# 10.28$$

der Geschwindigkeitsvektor, mit welchem der Berührungspunkt die Kurve  $\bar{\omega}'$  im bewegten System durchheilt. Aus #10.14 folgt durch Differentiation nach t

$$2\tilde{\mathbf{D}} \circ \dot{\mathbf{D}} = -(\tilde{\mathbf{D}} \circ \ddot{\mathbf{D}} + \ddot{\tilde{\mathbf{D}}} \circ \mathbf{D}) \quad \# 10.29$$

daher wird #10.28

$$\bar{\beta}' = \tilde{\mathbf{D}} \circ \ddot{\mathbf{D}} - \ddot{\tilde{\mathbf{D}}} \circ \mathbf{D} \quad \# 10.30$$

Berechnen wir analog die Geschwindigkeit, mit der der Endpunkt von  $\bar{\omega}$  seine Kurve durchläuft, so liefert die Differentiation von #10.23

$$\bar{\beta} = 2(\ddot{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} + \dot{\mathbf{D}} \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}}) \quad \# 10.31$$

Ableitung von #10.22 ergibt

$$2\dot{\mathbf{D}} \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}} = -(\ddot{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{D} \circ \ddot{\tilde{\mathbf{D}}}) \quad \# 10.22$$

Daher wird #10.31

$$\bar{\beta} = \ddot{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} - \mathbf{D} \circ \ddot{\tilde{\mathbf{D}}} \quad \# 10.33$$

Um die Identität der Vektoren #10.30 und #10.33 nachzuweisen, müssen wir beide im selben System darstellen, also etwa #10.30 im festen System. Es wird dann wegen #10.8

$$\mathbf{D} \circ \bar{\beta}' \circ \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \circ (\tilde{\mathbf{D}} \circ \ddot{\mathbf{D}} - \ddot{\tilde{\mathbf{D}}} \circ \mathbf{D}) \circ \tilde{\mathbf{D}} = \ddot{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} - \mathbf{D} \circ \ddot{\tilde{\mathbf{D}}} \quad \# 10.34$$

Mit #10.33 folgt daher aus #10.34 die behauptete Identität

$$\bar{\beta} = \mathbf{D} \circ \bar{\beta}' \circ \tilde{\mathbf{D}} \quad \# 10.35$$

Da  $\bar{\beta}$  aus dem Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\bar{\omega}$  durch Differentiation nach der Zeit hervorgeht, nennt man  $\bar{\beta}$  den *Vektor der momentanen Winkelbeschleunigung*. Sein Verschwinden bedeutet momentane Drehung mit der im Augenblick stationären Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}$ .

Schneidet man die aufeinander abrollenden Polkegel mit der Einheitskugel (Fig. 10.3), so erhält man auf ihr die beiden aufeinander abrollenden sphärischen Polkurven. Die feste sphärische Polkurve wird durch den Einheitsvektor

$$\mathbf{p}^o = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad \# 10.36$$

in Richtung von  $\bar{\omega}$  dargestellt. Das durch  $\mathbf{p}^o$  festgelegte sphärische Momentanzentrum durchläuft die sphärische Rastpolkurve mit der *Polwechselgeschwindigkeit*

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{p}} = \frac{\bar{\beta}}{\omega} - \bar{\omega} \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \quad \# 10.37$$

Aus Satz 10.2.3.1 folgt, daß die Polwechselgeschwindigkeiten  $\mathbf{v}_P$  und  $\mathbf{v}_P'$  auf der sphärischen Rast- und Gangpolkurve gleich sind, was man auch mit #10.21,35,37 zeigen kann. Nach #1.47 ergibt sich aus #10.36,37

$$\dot{\omega} = \frac{\bar{\omega}\bar{\beta}}{\omega} \quad \# 10.38$$

$$\mathbf{v}_P = \frac{\bar{\beta}}{\omega} - \frac{(\bar{\omega}\bar{\beta})}{\omega^3} \bar{\omega} \quad \# 10.39$$

oder

$$\bar{\beta} = \omega \mathbf{v}_P + \bar{\omega} \frac{(\bar{\omega}\bar{\beta})}{\omega^2} \quad \# 10.40$$

Quadrieren von #10.39 ergibt

$$|\mathbf{v}_P|^2 = v_P^2 = \frac{\beta^2}{\omega^2} - \frac{(\bar{\omega}\bar{\beta})^2}{\omega^4} = \frac{\beta^2}{\omega^2} - \frac{\dot{\omega}^2}{\omega^2} \quad \# 10.41$$

daraus

$$\beta^2 = \dot{\omega}^2 + v_P^2 \omega^2 \quad \# 10.42$$

Trägt man den Winkelbeschleunigungsvektor  $\bar{\beta}$  von O aus ab, so nennt man die dadurch festgelegte Gerade die *Achse der Winkelbeschleunigung*.

#### 10.2.4 Änderung des Zeitgesetzes

Läßt man eine vorgegebene Bewegung #10.8 nach einem anderen Zeitgesetz ablaufen, so wird jede Lage des bewegten Systems statt zum Zeitpunkt  $t$  zum Zeitpunkt  $t_1$  eingenommen und man kann setzen

$$t = \chi(t_1) \quad \# 10.43$$

Dann wird die momentante Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}_1(t_1)$  durch

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega} \dot{\chi} \quad \left( \dot{\chi} = \frac{\partial \chi}{\partial t_1} \right) \quad \# 10.44$$

festgelegt. Aus der Kollinearität von  $\bar{\omega}_1$  und  $\bar{\omega}$  folgt die Übereinstimmung der Momentanachsen und weiters die Gleichheit der Polkegel, die nunmehr mit veränderter Geschwindigkeit aufeinander abrollen. Ableitung von #10.44 nach  $t_1$  ergibt den neuen Winkelbeschleunigungsvektor

$$\bar{\beta}_1 = \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial t_1} = \bar{\beta} \dot{\chi}^2 + \bar{\omega} \ddot{\chi} \quad \# 10.45$$

Für die neue Polwechselfgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{IP}$  zeigt der Vergleich mit #10.39

$$\mathbf{v}_{IP} = \mathbf{v}_P \dot{\chi} \quad \# 10.46$$

Mit #10.44 folgt daraus

$$\frac{\omega_I}{v_{IP}} = \frac{\omega}{v_P} = \text{const.} \quad \# 10.47$$

#10.47 ist vom Zeitgesetz unabhängig, hat also geometrische Bedeutung (siehe später #10.151).

## 10.3 Beschleunigungsverhältnisse

### 10.3.1 Beschleunigung

Durch abermalige Differentiation von #10.27 nach der Zeit  $t$  ergibt sich die *Beschleunigung*

$$\mathbf{b} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} = \bar{\omega} \times \mathbf{v} + \bar{\beta} \times \mathbf{x} \quad \# 10.48$$

eines mitgeführten Punktes. Die von  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannte Ebene ist nach Kap.1.6.2 die Schmiegeebene der Bahnkurve in  $\mathbf{x}$ .  $\mathbf{b}$  hat nach #10.48 die beiden Komponenten (Fig.10.4)

$$\mathbf{b}_\omega = \bar{\omega} \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{b}_\beta = \bar{\beta} \times \mathbf{x} \quad \# 10.49, \# 10.50$$

$\mathbf{b}_\omega$  steht normal auf die Momentanachse und ist gegen dieselbe gerichtet. Der Betrag von  $\mathbf{b}_\omega$  ist wegen #10.49 und #10.7

$$b_\omega = r\omega^2 \quad \# 10.51$$

worin  $r$  den Abstand des Punktes von der Momentanachse bedeutet.  $\mathbf{b}_\beta$  steht normal auf die Verbindungsebene von  $\mathbf{x}$  mit der Achse der Winkelbeschleunigung. Wegen #10.40 **Figur 10.4** kann man  $\bar{\beta}$  in die beiden Komponenten

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}_n + \bar{\beta}_t, \quad \bar{\beta}_n = \omega \mathbf{v}_P, \quad \bar{\beta}_t = \bar{\omega} \frac{(\bar{\omega} \bar{\beta})}{\omega^2} \quad \# 10.52, \# 10.53, \# 10.54$$

zerlegen, welche normal bzw. parallel zur Momentanachse verlaufen und deren Beträge

$$\beta_n = \omega v_P, \quad \beta_t = \frac{|\bar{\omega} \bar{\beta}|}{\omega} \quad \# 10.55, \# 10.56$$

sind. Wegen #10.50,53,54

$$\mathbf{b}_\beta = \bar{\beta} \times \mathbf{x} = (\bar{\beta}_n + \bar{\beta}_t) \times \mathbf{x} = \omega(\mathbf{v}_P \times \mathbf{x}) + \frac{(\bar{\omega} \bar{\beta})}{\omega^2} (\bar{\omega} \times \mathbf{x}) \quad \# 10.57$$

Wir können daher auch  $\mathbf{b}_\beta$  in zwei Komponenten

$$\mathbf{b}_\beta = \mathbf{b}_{\beta n} + \mathbf{b}_{\beta t}, \quad \mathbf{b}_{\beta n} = \omega(\mathbf{v}_P \times \mathbf{x}), \quad \mathbf{b}_{\beta t} = \frac{(\bar{\omega} \bar{\beta})}{\omega^2} \mathbf{v} \quad \# 10.58, \# 10.59, \# 10.60$$

aufspalten, von denen #10.60 in Richtung der Bahntangente fällt. Ist  $\bar{\omega}$  bekannt, so ist  $\mathbf{b}_\omega$  wegen #10.49 ein bekannter Vektor,  $\mathbf{b}_{\beta t}$  wegen #10.60 ein Vektor bekannter Richtung.

### 10.3.2 Tangential- und Normalbeschleunigung

Nach Kap.1.6.3 zerlegen wir die Beschleunigung  $\mathbf{b}$  mit Hilfe des Ansatzes

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_t + \mathbf{b}_n = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{b}_n \quad \# 10.61$$

in die *Tangentialbeschleunigung*  $\mathbf{b}_t$  und die *Normalbeschleunigung*  $\mathbf{b}_n$ . Durch skalare Multiplikation von #10.61 mit  $\mathbf{v}$  ergibt sich wegen #10.48 und  $\mathbf{b}_n \mathbf{v} = 0$

$$\lambda = \frac{\mathbf{b}\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \bar{\beta})}{|\mathbf{v}|^2} \quad \# 10.62$$

daher

$$\mathbf{b}_t = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \bar{\beta})}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \quad \# 10.63$$

Für  $\mathbf{b}_n$  folgt dann aus #10.61 und #10.48

$$\mathbf{b}_n = \bar{\omega} \times \mathbf{v} + \bar{\beta} \times \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \bar{\beta})}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \quad \# 10.64$$

$\mathbf{b}_t$  stellt jenen Anteil von  $\mathbf{b}$  dar, welcher den Betrag der Geschwindigkeit ändert,  $\mathbf{b}_n$  den Anteil, der die Richtungsänderung der Geschwindigkeit, d.h. die Abweichung der Bahnkurve von einer Geraden veranlaßt.  $\mathbf{b}_n$  steht also mit der Bahnkrümmung in engem Zusammenhang (siehe Kap. 10.3.4). Für jene Punkte  $\mathbf{x}$ , die im Moment ihre Bahnen mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchheilen (deren Geschwindigkeit im Augenblick also ein relatives Maximum oder Minimum aufweist), muß  $\mathbf{b}_t = \mathbf{0}$  oder wegen #10.63

**Figur 10.5**

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \bar{\beta}) = 0 \quad \# 10.65$$

sein. O.B.d.A. können wir das Koordinatensystem so legen, daß  $\bar{\omega}$  in die z-Achse fällt und  $\bar{\beta}$  in der xz-Ebene liegt (Fig. 10.5). Dann ist

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad \bar{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix}, \quad \bar{\beta} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \beta_3 \end{Bmatrix}, \quad \text{o.B.d.A. sei } \beta_1 \geq 0 \quad \# 10.66$$

dann gilt wegen #10.27

$$\mathbf{v} = \bar{\omega} \times \mathbf{x} = \omega \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \omega \begin{Bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \bar{\beta}) = \omega \begin{vmatrix} x & -y & \beta_1 \\ y & x & 0 \\ z & 0 & \beta_3 \end{vmatrix} = \omega \cdot (\beta_3 x^2 - xz\beta_1 + \beta_3 y^2) = 0$$

also

$$\beta_3(x^2 + y^2) - \beta_1 xz = 0 \quad \# 10.67$$

oder bei Beachtung von #10.38

$$\dot{\omega} = \frac{\bar{\omega}\bar{\beta}}{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{\omega}{\omega} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} = \beta_3$$

Aus #10.42 folgt

$$\beta^2 = \beta_1^2 + \beta_3^2 = \dot{\omega}^2 + v_p^2 \omega^2 \Rightarrow \beta_1^2 = v_p^2 \omega^2 \Rightarrow \beta_1 = v_p \omega$$

also

$$\dot{\omega}(x^2 + y^2) - v_p \omega xz = 0 \quad \# 10.68$$

**Satz 10.3.2.1:** Alle Punkte, welche in einem bestimmten Augenblick einer sphärischen Bewegung ihre Bahnen mit gleichmäßiger Geschwindigkeit durchlaufen (deren Geschwindigkeit im Augenblick ein Extremum aufweist), liegen auf einem Kegel 2. Ordnung, der die Momentanachse  $\bar{\omega}$  und die Achse der Winkelbeschleunigung  $\bar{\beta}$  enthält, dessen Kreisschnittebenen auf  $\bar{\omega}$  normal stehen und welcher zu der von  $\bar{\omega}$  und  $\bar{\beta}$  aufgespannten Ebene symmetrisch ist. Er durchsetzt die Polkegel längs  $\bar{\omega}$  orthogonal.

Schneidet man diesen Kegel mit der Einheitskugel, so erhält man auf ihr eine Kurve der sphärischen Ordnung 2<sup>1</sup>. Dieser sphärische Kegelschnitt durchsetzt die Polbahnen im Momentanzentrum orthogonal und ist zur sphärischen Poltangente symmetrisch. Schnitt von #10.68 mit der Kugeltangentialebene im Momentanzentrum ergibt einen Kreis mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 - v_p \frac{\omega}{\bar{\omega}} \cdot x = 0, \quad z = 1 \quad \# 10.69$$

### 10.3.3 Komponenten der Normalbeschleunigung

Die Normalkomponente  $\mathbf{b}_n$  #10.64 werde in zwei Komponenten zerlegt

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{b}_{n1} + \mathbf{b}_{n2}, \quad \mathbf{b}_{n1} = \lambda \bar{\omega} \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{b}_{n2} = \mu \bar{\omega} \quad \# 10.70$$

von denen  $\mathbf{b}_{n1}$  normal,  $\mathbf{b}_{n2}$  parallel zu  $\bar{\omega}$  verlaufe. Aus dem Ansatz #10.70 wird wegen #10.64

$$\mathbf{b}_n = \lambda \bar{\omega} \times \mathbf{v} + \mu \bar{\omega} = \bar{\omega} \times \mathbf{v} + \bar{\beta} \times \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \bar{\beta})}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \quad \# 10.71$$

Hieraus folgt durch sukzessive Skalarmultiplikation mit  $\bar{\omega} \times \mathbf{v}$  und  $\bar{\omega}$

$$\lambda |\bar{\omega} \times \mathbf{v}|^2 = |\bar{\omega} \times \mathbf{v}|^2 + (\bar{\beta} \times \mathbf{x})(\bar{\omega} \times \mathbf{v}) - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \bar{\beta})}{|\mathbf{v}|^2} \underbrace{(\mathbf{v}(\bar{\omega} \times \mathbf{v}))}_0$$

daraus

$$\lambda = 1 + \frac{(\bar{\beta} \times \mathbf{x})(\bar{\omega} \times \mathbf{v})}{|\bar{\omega} \times \mathbf{v}|^2} \quad \# 10.72$$

analog

$$\mu \omega^2 = (\bar{\beta}, \mathbf{x}, \bar{\omega}) - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \bar{\beta})}{|\mathbf{v}|^2} \underbrace{(\mathbf{v}\bar{\omega})}_0$$

daraus

$$\mu = \frac{(\mathbf{x}, \bar{\omega}, \bar{\beta})}{\omega^2} \quad \# 10.73$$

Jene Punkte des Raumes, deren Normalbeschleunigung  $\mathbf{b}_n$  parallel zu  $\bar{\omega}$  verläuft, sind durch  $\lambda = 0$  gekennzeichnet. Gilt wie früher #10.66, so folgt aus  $\lambda = 0$  wegen #10.72

$$|\bar{\omega} \times \mathbf{v}|^2 + (\bar{\beta} \times \mathbf{x})(\bar{\omega} \times \mathbf{v}) = 0$$

Daraus mit #10.68

$$\omega(x^2 + y^2) + v_p yz = 0 \quad \# 10.74$$

**Satz 10.3.31:** Alle Raumpunkte, deren Normalbeschleunigung  $\mathbf{b}_n$  parallel zur Momentanachse verläuft, erfüllen einen Kegel 2. Ordnung, der die Momentanachse  $\bar{\omega}$  als Erzeugende ent-

---

<sup>1</sup> Man schreibt der Schnittkurve einer Kugel mit einem Kegel n-ter Ordnung, dessen Spitze im Kugelmittelpunkt liegt, die sphärische Ordnung n zu

hält, dessen Kreisschnittebenen auf  $\bar{\omega}$  normal stehen und der die Polkegel längs der Momentanachse berührt.

Aus #10.47 erkennt man, daß #10.74 vom Zeitgesetz unabgänglich ist. Die Kegel #10.67 und #10.68 kann man als Analoga zu den BRESSEschen Kreisen der ebenen Kinematik auffassen. Sie durchdringen einander läng  $\bar{\omega}$  orthogonal. Schnitt des Kegels #10.74 mit der Kugeltangentialebene im sphärischen Momentanzentrum ergibt einen Kreis  $c^2$  mit der Gleichung

$$c^2 \dots x^2 + y^2 + \frac{v_P}{\omega} y = 0, \quad z = 1 \quad \# 10.75$$

Für jene Punkte des Raumes, deren Normalbeschleunigung auf  $\bar{\omega}$  normal steht, muß  $\mu = 0$  sein. Wegen

$$(\mathbf{x}, \bar{\omega}, \bar{\beta}) = 0 \quad \# 10.76$$

liegen die fraglichen Punkte in der von  $\bar{\omega}$  und  $\bar{\beta}$  aufgespannten Ebene. Es ist dies die gemeinsame Tangentialebene der Polkegel<sup>2</sup>.

### 10.3.4 Krümmung der Bahnkurven.

Nach #1.120 hat der Krümmungsradius einer Raumkurve den Betrag

$$\rho = \frac{v^3}{|\mathbf{v} \times \mathbf{b}|} \quad \# 10.77$$

Zerlegen wir nach #10.61,63,64 die Beschleunigung in ihre Normal- und Tangentialkomponente, so ist nach #1.123

$$b_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \# 10.78$$

Die in der Schmiegeebene des Punktes  $\mathbf{x}$  auszuführende Konstruktion nach Fig.10.6.1 stellt mit Hilfe des Höhensatzes in dem bei der Spitze von  $\mathbf{v}$  rechtwinkligen Dreieck den Zusammenhang zwischen den drei Strecken  $b_n$ ,  $v$ ,  $\rho$  her. Da diese Konstruktion häufig auftritt, erscheint es zweckmäßig, die Geschwindigkeit von  $\mathbf{x}$  als einen in  $\mathbf{X}$  angehängten Pfeil, die Beschleunigung als einen in  $\mathbf{X}$  endigenden Pfeil darzustellen. Man kann aber auch den Kathetensatz zur Konstruktion des Krümmungsradius heranziehen. Dann wird man nach Fig.10.6.2 vorgehen.

## 10.4 Mehrere bewegte Systeme

### 10.4.1 Relativ - und Absolutbewegung

Es seien drei Systeme mit dem gemeinsamen Fixpunkt  $O$  gegeben: das als fest betrachtete System  $\Sigma_0$  sowie die beiden Systeme  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$ . Ein mit  $\Sigma_2$  starr verbundener Raumpunkt habe, bezogen auf das mit diesem System verknüpfte Koordinatensystem den Ortsvektor  $\mathbf{x}''$ . Bezogen auf das mit  $\Sigma_1$  verknüpfte Koordinatensystem lautet der Ortsvektor desselben Punktes

$$\mathbf{x}' = \mathbf{D}'_{21} \circ \mathbf{x}'' \circ \tilde{\mathbf{D}}'_{21} \quad \# 10.79$$

wobei  $\mathbf{D}'_{21}$  die Quaternion jener Drehung ist, welche  $\Sigma_1$  nach  $\Sigma_2$  überführt.  $\mathbf{x}'$  seinerseits lautet, bezogen auf das Koordinatensystem des festen Systems  $\Sigma_0$

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}_{10} \circ \mathbf{x}' \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} \quad \# 10.80$$

<sup>2</sup> Ein Behandlung der sphärischen Beschleunigungsverhältnisse unter anderen Gesichtspunkten bei MEYER zur CAPELLEN-G.DITTRICH [1]

sodaß schließlich  $\mathbf{x}''$  im festen System durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}_{10} \circ \mathbf{D}'_{21} \circ \mathbf{x}'' \circ \tilde{\mathbf{D}}'_{21} \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} = \mathbf{D}_{20} \circ \mathbf{x}'' \circ \tilde{\mathbf{D}}_{20} \quad \# 10.81$$

$$\mathbf{D}_{20} = \mathbf{D}_{10} \circ \mathbf{D}'_{21} \quad \# 10.82$$

dargestellt wird. Denkt man sich  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_1$  bewegt (*Relativbewegung*),  $\Sigma_1$  gegen  $\Sigma_0$  bewegt (*Führungsbewegung*), so wird der mit  $\Sigma_2$  starr mitgeführte Punkt  $\mathbf{x}''$  die durch

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{D}'_{21}(t) \circ \mathbf{x}'' \circ \tilde{\mathbf{D}}'_{21}(t) \quad \# 10.83$$

bestimmte *Relativbahn* in  $\Sigma_1$ , in  $\Sigma_0$  aber die durch

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{D}_{20}(t) \circ \mathbf{x}'' \circ \tilde{\mathbf{D}}_{20}(t), \quad \mathbf{D}_{20}(t) = \mathbf{D}_{10}(t) \circ \mathbf{D}'_{21}(t) \quad \# 10.84$$

bestimmte *absolute Bahn* beschreiben. Nach Satz 10.2.2.1 ist jede sphärische Bewegung eine Momentandrehung. So erfolgt die Momentandrehung von  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_1$  nach #10.23 mit dem in  $\Sigma_1$  liegenden Winkelgeschwindigkeitsvektor

$$\bar{\omega}'_{21} = 2\dot{\mathbf{D}}'_{21} \circ \tilde{\mathbf{D}}'_{21} \quad \# 10.85$$

Bezogen auf  $\Sigma_0$  lautet #10.85 wegen #10.80

$$\bar{\omega}_{21} = \mathbf{D}_{10} \circ \bar{\omega}'_{21} \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} \quad \# 10.86$$

Die Bewegung von  $\Sigma_1$  ist bestimmt durch

$$\bar{\omega}_{10} = 2\dot{\mathbf{D}}_{10} \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} \quad \# 10.87$$

Schließlich ist die resultierende Bewegung #10.84 die Momentandrehung mit

$$\bar{\omega}_{20} = 2\dot{\mathbf{D}}_{20} \circ \tilde{\mathbf{D}}_{20} \quad \# 10.88$$

Aus #10.82 folgt

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{20} &= 2(\dot{\mathbf{D}}_{10} \circ \mathbf{D}'_{21} + \mathbf{D}_{10} \circ \dot{\mathbf{D}}'_{21}) \circ \tilde{\mathbf{D}}'_{21} \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} = \\ &= 2\dot{\mathbf{D}}_{10} \circ (\mathbf{D}'_{21} \circ \tilde{\mathbf{D}}'_{21}) \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} + 2\mathbf{D}_{10} \circ (\dot{\mathbf{D}}'_{21} \circ \tilde{\mathbf{D}}'_{21}) \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} \end{aligned} \quad \# 10.89$$

Berücksichtigt man #10.87,85,86, so ergibt sich aus #10.89

$$\bar{\omega}_{20} = \bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{10} \quad \# 10.90$$

das *Additionsgesetz der Winkelgeschwindigkeitsvektoren* bei Relativbewegung.

**Satz.4.1.1:** Die Momentanachsen  $\bar{\omega}_{10}$ ,  $\bar{\omega}_{21}$ ,  $\bar{\omega}_{20}$  liegen in derselben Ebene

Es ist dies das sphärische Gegenstück zum Satz von ARONHOLD der ebenen Kinematik<sup>3</sup>.

Beschreibt ein Punkt in  $\Sigma_1$  die *Relativbahn*  $\mathbf{x}'(t)$  und bewegt sich  $\Sigma_1$  seinerseits gegen das feste System  $\Sigma_0$ , so beschreibt der bewegte Punkt in  $\Sigma_0$  die *absolute Bahn*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{D}_{10}(t) \circ \mathbf{x}'(t) \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10}(t) \quad \# 10.91$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{D}}_{10} \circ \mathbf{x}' \times \tilde{\mathbf{D}}_{10} + \mathbf{D}_{10} \circ \dot{\mathbf{x}}' \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} + \mathbf{D}_{10} \circ \mathbf{x}' \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}}_{10} \quad \# 10.92$$

Nach #10.11 stellen die ersten beiden Summanden

$$\mathbf{v}_f = \dot{\mathbf{D}}_{10} \circ \mathbf{x}' \times \tilde{\mathbf{D}}_{10} + \mathbf{D}_{10} \circ \mathbf{x}' \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}}_{10} \quad \# 10.93$$

---

<sup>3</sup> WUNDERLICH [5] S.120

die Geschwindigkeit dar, die der mit  $\Sigma_1$  starr verbundene Punkt  $\mathbf{x}'$  durch die Bewegung von  $\Sigma_1$  gegen  $\Sigma_0$  erhalte. Man nennt  $\mathbf{v}_f$  die *Führungsgeschwindigkeit* des Punktes  $\mathbf{x}'$ . Sie läßt sich nach #10.27 auch durch

$$\mathbf{v}_f = \bar{\omega}_{10} \times \mathbf{x} \quad \# 10.94$$

darstellen.

$$\mathbf{v}'_r = \dot{\mathbf{x}}' \quad \# 10.95$$

ist die *Relativgeschwindigkeit* des Punktes  $\mathbf{x}'$ , welche aus der Eigenbewegung von  $\mathbf{x}'(t)$  gegen das System  $\Sigma_1$  resultiert. Stellt man  $\mathbf{v}'_r$  in  $\Sigma_0$  dar, so wird

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{D}_{10} \circ \mathbf{v}'_r \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} \quad \# 10.96$$

Für die aus der Zusammensetzung der Bewegung von  $\mathbf{x}'$  und  $\Sigma_1$  resultierenden *Absolutgeschwindigkeit*  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$  in  $\Sigma_0$  folgt dann wegen #10.94 aus #10.92

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} = \mathbf{v}_f + \mathbf{v}_r \quad \# 10.97$$

das *Additionsgesetz der Geschwindigkeiten* bei Relativbewegung

### 10.4.2 Sphärische Hüllkurven

Wir betrachten eine auf der Einheitskugel liegende, vom bewegten System  $\Sigma_1$  mitgeführte Kurve  $c_1$ . Sie umhüllt im Laufe ihrer Bewegung im festen System  $\Sigma_0$  eine Hüllkurve  $c$ . Der momentane Berührungspunkt  $X$  von  $c_1$  und  $c$  wird seine Lage sowohl im bewegten System als auch im festen System ändern. Wir wollen die Bewegung eines Punktes auf  $c_1$  so regeln, daß er in jedem Moment in den gesuchten Berührungspunkt von  $c_1$  und  $c$  fällt. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Berührungspunkt  $c_1$  durchgeht, ist seine *Relativgeschwindigkeit*  $\mathbf{v}_f$  gegenüber dem bewegten System  $\Sigma_1$ , die Geschwindigkeit auf  $c$  seine *Absolutgeschwindigkeit*  $\mathbf{v}$  im festen System. Diese Geschwindigkeiten sind in jedem Augenblicke kollinear, daher gilt

$$\mathbf{v}_r = \lambda \mathbf{v} \quad \# 10.98$$

$\lambda$  ist die sogenannte *Rollgleitzahl*<sup>4</sup>, so genannt, da die Bewegung von  $c_1$  gegenüber  $c$  kein reines bogentreues Abrollen ist, die Kurven vielmehr zusätzlich noch aneinander gleiten. Wegen #10.97 folgt aus #10.98

$$\mathbf{v}_f = (1 - \lambda)\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{1 - \lambda}\mathbf{v}_f, \quad \mathbf{v}_r = \frac{\lambda}{1 - \lambda}\mathbf{v}_f \quad \# 10.99, \# 10.100, \# 10.101$$

Aus der Kollinearität von Absolut- und Führungsgeschwindigkeitsvektor folgt nach Satz 10.2.2.2:

**Satz 10.4.2.1:** *Der momentane Berührungspunkt von zwei Gleitkurvenpaaren liegt auf der sphärischen Normalen  $\eta$ , die man aus dem sphärischen Momentanzentrum  $P$  auf die momentane Lage von  $c_1$  fallen kann.*

Es sei  $\mathbf{x}'_1(u)$  die Parameterdarstellung von  $c_1$ , bezogen auf das bewegte System  $\Sigma_1$ . Dann hat man  $u$  als Funktion von  $t$  so zu bestimmen, daß  $\mathbf{x}'_1[u(t)]$  zum Zeitpunkt  $t$  den Berührungspunkt von  $c_1$  und  $c$  darstellt. Nun ist die Relativgeschwindigkeit von  $\mathbf{x}'_1[u(t)]$ , bezogen  $\Sigma_1$ :

$\mathbf{v}'_r = \mathbf{x}'_{1u} \cdot \dot{u}$ , oder, umgerechnet auf  $\Sigma_0$ :  $\mathbf{v}_r = \dot{u} \cdot \mathbf{D}_{10}(t) \circ \mathbf{x}'_{1u} \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10}(t)$ <sup>5</sup>. Aus der Kollinearität #10.101 von  $\mathbf{v}_f$  und  $\mathbf{v}_r$  folgt, daß  $\mathbf{v}_r$  ebenso wie  $\mathbf{v}_f$  und  $\mathbf{v}$  auf  $\bar{\omega}_{10}$  normal stehen muß:

<sup>4</sup>Nach H.R.MÜLLER [1] S.20 ff. Dort auch eine geometrische Deutung

<sup>5</sup> $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \mathbf{x}'_{1u} = \frac{\partial \mathbf{x}'_1}{\partial u}$

$$\bar{\omega}_{10} \mathbf{v}_r = 0 \quad \# 10.102$$

Häufig ist es zweckmäßiger, #10.102 im bewegten System auszudrücken, sodaß man aus #10.102 oder aus

$$\bar{\omega}'_{10} \mathbf{v}'_r = 0 \quad \# 10.103$$

u als Funktion von t berechnen kann.. In

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{D}_{10}(t) \circ \mathbf{x}'_1[u(t)] \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10}(t) \quad \# 10.104$$

ergibt sich die gewünschte Darstellung der Hüllkurve c im festen System.

### 10.4.3 Hüllkurven von Großkreisen. Polarkurven

Interesse verdient der Sonderfall, wenn die in  $\Sigma_1$  mitgeführte Kurve  $c_1$  ein *Großkreis* ist. Legt man diesen im festen System durch den Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}^\circ(t)$  seiner Ebene fest, so beschreibt dessen Endpunkt auf der Kugeloberfläche die zur Hüllkurve *polare Kurve* n. Betrachtet man die Lagen von  $c_1$  in den Zeitpunkten t und t+ $\Delta t$ , so wird deren Schnittpunkt<sup>6</sup> durch den Durchstoßpunkt des Vektors

$$\mathbf{g} = \mathbf{n}^\circ(t) \times \frac{\mathbf{n}^\circ(t + \Delta t) - \mathbf{n}^\circ(t)}{\Delta t} = \mathbf{n}^\circ(t) \times \frac{[\mathbf{n}^\circ(t + \Delta t) - \mathbf{n}^\circ(t)]}{\Delta t}$$

mit der Kugeloberfläche festgelegt. Für  $\Delta t \rightarrow 0$  konvergiert der Schnittpunkt gegen den Berührungspunkt mit der eingehüllten Kurve c, der demnach in den Kugelpunkt

$$\mathbf{x}^\circ = \frac{\mathbf{n}^\circ \times \dot{\mathbf{n}}}{|\dot{\mathbf{n}}|} \quad \# 10.105$$

fällt. #10.105 stellt die von dem mitgeführten Großkreis  $c_1$  eingehüllte Kurve c dar. Man erkennt, daß  $\mathbf{x}^\circ$  der Pol der sphärischen Tangente von n ist, c ist daher auch Polarkurve von n. Demnach gilt die zu #10.105 analoge Beziehung

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{\mathbf{x}^\circ \times \dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|} \quad \# 10.106$$

Da  $\mathbf{n}^\circ$  und  $\mathbf{x}^\circ$  Einheitsvektoren sind, stehen sie nach #1.47 auf ihre Ableitung normal. Aus #10.105,106 folgt weiter, daß  $\dot{\mathbf{n}}$  und  $\dot{\mathbf{x}}$  kollinear sind, da beide auf  $\mathbf{n}^\circ$  und  $\mathbf{x}^\circ$  normal stehen.

**Satz 10.4.3.1:** Die Tangenten in den entsprechenden Punkten eines polaren sphärischen Kurvenpaares c und n sind parallel

### 10.4.4 Beschleunigungsverhältnisse

Durch Differentiation von #10.97 erhalten wir die *Absolutbeschleunigung*

$$\mathbf{b} = \ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_f + \dot{\mathbf{v}}_r \quad \# 10.107$$

mit der der bewegte Punkt seine Bahn in  $\Sigma_0$  durchläuft. Wegen #10.94,97 ist

$$\dot{\mathbf{v}}_f = \bar{\beta}_{10} \times \mathbf{x} + \bar{\omega}_{10} \times \mathbf{v} = \bar{\beta}_{10} \times \mathbf{x} + \bar{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_f + \bar{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_r \quad \# 10.108$$

Hierin ist  $\bar{\beta}_{10}$  der Vektor der Winkelbeschleunigung der Bewegung von  $\Sigma_1$  gegen  $\Sigma_0$ . Die ersten beiden Summanden der rechten Seite von #10.108 stellen nach #10.48 die *Führungsbeschleunigung*

$$\mathbf{b}_f = \bar{\beta}_{10} \times \mathbf{x} + \bar{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_f \quad \# 10.109$$

---

<sup>6</sup> Wie verabredet, wird der zugehörige Gegenpunkt nicht gesondert erwähnt

dar, jene Beschleunigung also, die der in  $\Sigma_1$  feste Punkt durch die Bewegung von  $\Sigma_1$  gegen  $\Sigma_0$  erhalte. #10.108 erhält daher die Gestalt

$$\dot{\mathbf{v}}_r = \mathbf{b}_r + \bar{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_r \quad \# 10.110$$

Differentiation von #10.96 ergibt

$$\dot{\mathbf{v}}_r = \dot{\mathbf{D}}_{10} \circ \mathbf{v}'_r \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} + \mathbf{D}_{10} \circ \mathbf{v}'_r \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}}_{10} + \mathbf{D}_{10} \circ \dot{\mathbf{v}}'_r \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} \quad \# 10.111$$

Wir betrachten die ersten beiden Summanden der rechten Seite: Wegen #10.96 gilt

$$\mathbf{v}'_r = \tilde{\mathbf{D}}_{10} \circ \mathbf{v}_r \circ \mathbf{D}_{10}. \text{ Daraus}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}_{10} \circ \mathbf{v}'_r \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} + \mathbf{D}_{10} \circ \mathbf{v}'_r \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}}_{10} &= \dot{\mathbf{D}}_{10} \circ (\tilde{\mathbf{D}}_{10} \circ \mathbf{v}_r \circ \mathbf{D}_{10}) \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} + \mathbf{D}_{10} \circ (\tilde{\mathbf{D}}_{10} \circ \mathbf{v}_r \circ \mathbf{D}_{10}) \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}}_{10} = \\ &= \dot{\mathbf{D}}_{10} \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} \circ \mathbf{v}_r \circ (\mathbf{D}_{10} \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10}) + (\mathbf{D}_{10} \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10}) \circ \mathbf{v}_r \circ \mathbf{D}_{10} \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}}_{10} = \\ &= \dot{\mathbf{D}}_{10} \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} \circ \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_r \circ \mathbf{D}_{10} \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}}_{10} \end{aligned}$$

Wegen #10.87 folgt daraus weiter  $\bar{\omega}_{10} = 2\dot{\mathbf{D}}_{10} \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} \Rightarrow \tilde{\omega} = -\bar{\omega}_{10} = 2\mathbf{D}_{10} \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}}_{10}$  also

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}_{10} \circ \mathbf{v}'_r \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} + \mathbf{D}_{10} \circ \mathbf{v}'_r \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}}_{10} &= \\ \dot{\mathbf{D}}_{10} \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} \circ \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_r \circ \mathbf{D}_{10} \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}}_{10} &= \frac{1}{2} [\bar{\omega}_{10} \circ \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_r \circ \bar{\omega}_{10}] = \bar{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_r \end{aligned} \quad \# 10.112$$

Der dritte Summand der rechten Seite von #10.111 betrifft die *Relativbeschleunigung*

$$\mathbf{b}'_r = \dot{\mathbf{v}}'_r \quad \# 10.113$$

der Eigenbewegung des Punktes gegen  $\Sigma_1$ . Stellt man #10.113 im festen System  $\Sigma_0$  dar, so ist

$$\mathbf{b}_r = \mathbf{D}_{10} \circ \mathbf{b}'_r \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10} \quad \# 10.114$$

Daher kann man #10.111 in der Form

$$\dot{\mathbf{v}}_r = \mathbf{b}_r + \bar{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_r \quad \# 10.115$$

schreiben. #10.107 nimmt daher die Gestalt an

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_r + \mathbf{b}_c \quad \# 10.116$$

an. Diese Formel lehrt, daß die Absolutbeschleunigung die Vektorsumme aus der Führungsbeschleunigung und der Relativbeschleunigung ist, wozu noch ein Zusatzglied von der Größe

$$\mathbf{b}_c = 2\bar{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_r \quad \# 10.117$$

tritt, die sogenannte Zusatz- oder CORIOLIS-Beschleunigung<sup>7</sup>.

## 10.5 Krümmungsverhältnisse

### 10.5.1 Krümmungsachse einer sphärischen Bahnkurve

Nach #1.117 wird die Krümmungsachse einer Raumkurve durch ihre PLÜCKER-Vektoren

$$\mathbf{k} = \mathbf{v} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{k}^* = (\mathbf{x}\mathbf{b} + |\mathbf{v}|^2)\mathbf{v} - (\mathbf{x}\mathbf{v})\mathbf{b} \quad \# 10.118$$

festgelegt. Da die von uns betrachteten Kurven alle sphärisch sind, so folgt aus  $|\mathbf{x}|^2 = \text{const}$  durch zweimalige Differentiation:  $\mathbf{x}\mathbf{v} = 0$ ,  $|\mathbf{v}|^2 + \mathbf{x}\mathbf{b} = 0$ . Für die Krümmungsachsen sphärischer Raumkurven gilt mithin

$$\mathbf{k} = \mathbf{v} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{k}^* = \mathbf{0} \quad \# 10.119$$

<sup>7</sup> CORIOLIS [1]

## Allgemeine sphärische Bewegung

sie gehen daher alle durch den Kugelmittelpunkt. Nun ist aber nach #10.48

$$\mathbf{k} = \mathbf{v} \times [\bar{\omega} \times \mathbf{v} + \bar{\beta} \times \mathbf{x}] \quad \# 10.120$$

Entwicklung nach GRASSMANN und Beachtung von  $\mathbf{xv} = \bar{\omega}\mathbf{v} = 0$  ergibt

$$\mathbf{k} = \bar{\omega}v^2 - \mathbf{x}(\mathbf{v}\bar{\beta}) \quad \# 10.121$$

Aus #10.40 folgt schließlich

$$\mathbf{k} = \bar{\omega}v^2 - \omega(\mathbf{vv}_p)\mathbf{x} \quad \# 10.122$$

Die Krümmungssachse  $\mathbf{k}$ , die Momentanachse  $\bar{\omega}$  sowie der bewegte Punkt  $\mathbf{x}$  liegen also in derselben Ebene. Diese Ebene denken wir uns als Bildebene (Fig.10.7). Das sphärische Momentanzentrum kommt dann auf dem Kugelumriß zu liegen, die Kugeltangentialebene in  $P$  erscheint projizierend. Die Träger der Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{k}$  schneiden die Tangentialebene in den Punkten  $X^g$  und  $K_x^g$ , den gnomonischen Projektionen des Kugelpunktes  $X$  und seines sphärischen Bahnkrümmungsmittelpunktes  $K_x$ . Führt man die Winkel  $\xi = \angle POX$  und  $\xi^* = \angle POK_x$  ein, so kann man nach #1.88 den Normalenvektor  $\mathbf{n}^\circ$  der Ebene von  $\mathbf{x}$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $\mathbf{k}$  darstellen durch

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{\bar{\omega} \times \mathbf{x}}{\bar{\omega}\mathbf{x}} \cot \xi = \frac{\mathbf{v}}{\bar{\omega}\mathbf{x}} \cot \xi \quad \# 10.123$$

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{\bar{\omega} \times \mathbf{k}}{\bar{\omega}\mathbf{k}} \cot \xi^* = -\frac{(\mathbf{vv}_p)}{\bar{\omega}\mathbf{k}} \mathbf{v} \cot \xi^* \quad \# 10.124$$

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{\mathbf{v}}{v} \quad \# 10.125$$

Bei der Umformung von #10.124 wurde #10.122 verwendet. Vergleich von #10.123 und #10.124 mit #10.125 ergibt

$$\cot \xi^* = \frac{(\bar{\omega}\mathbf{k})}{v\omega(\mathbf{vv}_p)}, \quad \cot \xi = \frac{(\bar{\omega}\mathbf{x})}{v} \quad \# 10.126, \# 10.127$$

Daraus folgt bei Beachtung von #10.122

$$\cot \xi - \cot \xi^* = \frac{\omega v}{(\mathbf{vv}_p)} \quad \# 10.128$$

Ist  $\tau$  der von der Bahntangente  $\mathbf{v}$  und der Poltangente  $\mathbf{v}_p$  eingeschlossene spitze Winkel, der auch als Winkel der sphärischen Polnormalen mit dem durch  $X$  gehenden sphärischen Polstrahl auftritt, so ist (Fig.10.8)

$$\mathbf{vv}_p = -v v_p \cos \tau \quad \# 10.129$$

Dann wird aus #10.128

$$\cot \xi^* - \cot \xi = \frac{\omega}{v_p \cos \tau} \quad \# 10.130$$

Diese auf SERRET<sup>8</sup> (1860) zurückgehende Formel stellt das sphärische Gegenstück zur Formel von EULER-SAVARY<sup>9</sup> der ebenen Kinematik dar.

**Figur 10.7, Figur 10.8**

Betrachtet man in Fig.10.7 die gnomonischen Projektionen  $X^g$  und  $K_x^g$  der Punkte  $X$  und  $K_x$  auf die Tangentialebene von  $P$ , so wird mit  $PX^g = r = \tan \xi$ ,  $PK_x^g = r^* = \tan \xi^*$  aus #10.130

<sup>8</sup> Joseph Alfred SERRET 1819-1885

<sup>9</sup> Leonhard EULER 1707-1783, Felix SAVARY 1797-1841

$$\frac{1}{r^*} - \frac{1}{r} = \frac{\omega}{v_p \cos \tau} \quad \# 10.131$$

Dies ist aber die Formel von EULER-SAVARY der ebenen Kineamtik<sup>10</sup>. Der durch #10.130 hergestellte Zusammenhang zwischen den Punkten  $X$  und den sphärischen Krümmungsmittelpunkten  $K_X$  ihrer Bahnen heißt *Krümmungsverwandtschaft*. Für alle Punkte desselben durch den Winkel  $\tau$  festgelegten Polstrahls ist die rechte Seite von #10.130 konstant.

**Satz 10.5.1.1:** *Die Krümmungsverwandtschaft auf einem sphärischen Polstrahl ist festgelegt, sobald man auf ihm ein entsprechendes Punktepaar  $K, K_X$  kennt*

Wegen #10.130,131 gilt

**Satz 10.5.1.2:** *Die Punktepaare einer sphärischen Krümmungsverwandtschaft gehen durch gnomonische Projektion auf die Kugeltangentialebene im sphärischen Momentanzentrum in die Punktepaare der Krümmungsverwandtschaft einer ebenen Bewegung über. Ebenso gilt die Umkehrung dieses Satzes<sup>11</sup>.*

Jene Punkte der Kugeloberfläche, deren Krümmungsachse orthogonal zur Momentanachse steht, sind durch  $\xi = \pi/2$  gekennzeichnet. Ihre gnomonischen Projektionen erfüllen nach #10.131 den Kreis  $c^2$  #10.75 (Fig.10.5), dessen Gleichung in Polarkoordinaten

$$r = -\frac{v_p}{\omega} \cos \tau \quad \# 10.132$$

lautet. Er ist uns bereits als das Bild jener Kugelpunkte bekannt, deren Normalbeschleunigung zu  $\bar{\omega}$  parallel ist. Die gnomonische Projektion der Krümmungsmittelpunkte der Bahnkurven der auf  $c^2$  abgebildeten Kugelpunkte sind daher Fernpunkte.

### 10.5.2 Begleitendes Zweibein einer sphärischen Kurve

Im festen System bewege sich der Punkt  $x(t)$  auf der Kurve  $c$ . Das mit dem bewegten System mitgeführte Koordinatensystem sei so gelagert, daß dessen durch den Einheitsvektor  $f_3$  festgelegte  $Z'$ -Achse immer durch den auf  $c$  wandernden Punkt geht, während die durch den Einheitsvektor  $f_1$  festgelegte  $X'$ -Achse immer zur Tangente an die Kurve  $c$  parallel sei (Fig.10.9). Dann gilt<sup>12</sup>

**Figur 10.9**

$$f_3(t) = x(t) = D \circ f'_3 \circ \tilde{D} \quad \# 10.133$$

Die Bahntangente

$$\dot{x} = \dot{D} \circ f'_3 \circ \tilde{D} + D \circ f'_3 \circ \dot{\tilde{D}} \quad \# 10.134$$

soll nach unserer Festsetzung zu  $f_1$  parallel sein, daher, wenn man diese Forderung im festen System ausdrückt, sich durch

$$\dot{x} = v D \circ f'_1 \circ \tilde{D} \quad \# 10.135$$

darstellen lassen. Differentiation von #10.135 ergibt

$$\ddot{x} = \dot{v} D \circ f'_1 \circ \tilde{D} + v \dot{D} \circ f'_1 \circ \tilde{D} + v D \circ \dot{f}'_1 \circ \tilde{D} \quad \# 10.136$$

Berechnet man aus #10.135

<sup>10</sup> H.R.MÜLLER [2] S.39

<sup>11</sup> HARTMANN [1]

<sup>12</sup> Wie immer stellen  $f_i$  und  $f'_i$  denselben Raumvektor dar, nur das eine Mal auf das feste, das andere Mal auf das bewegte System bezogen.

$$\mathbf{f}'_1 = \frac{1}{v} \tilde{\mathbf{D}} \circ \dot{\mathbf{x}} \circ \mathbf{D} \quad \# 10.137$$

und führt das Ergebnis in #10.136 ein, so erhält man

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\dot{v}}{v} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} \circ \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}} \circ \mathbf{D} \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}} \quad \# 10.138$$

was wegen #10.23 und #2.14

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\dot{v}}{v} \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} (\bar{\omega} \circ \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}} \circ \bar{\omega}) = \frac{\dot{v}}{v} \dot{\mathbf{x}} + \bar{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} \quad \# 10.139$$

ergibt. Hieraus folgt durch vektorielle Multiplikation von links mit  $\dot{\mathbf{x}}$  wegen  $\bar{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} = 0$

**Satz 10.5.2.1:** *Bei der Bewegung des begleitenden Zweibeins eine sphärischen Kurve fällt das sphärische Momentanzentrum mit den sphärischen Krümmungsmittelpunkt  $\mathbf{K}$  von  $\mathbf{c}$  zusammen*

Der feste Polkegel ist der *Evolutenkegel* von  $\mathbf{c}$ . Um die bewegte Polkurve zu ermitteln, beachten wir, daß wegen #10.134,135

$$\dot{\mathbf{D}} \circ \mathbf{f}'_3 \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{D} \circ \mathbf{f}'_3 \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}} = v \mathbf{D} \circ \mathbf{f}'_1 \circ \tilde{\mathbf{D}} \quad \# 10.141$$

ist und hieraus

$$\tilde{\mathbf{D}} \circ \dot{\mathbf{D}} \circ \mathbf{f}'_3 + \mathbf{f}'_3 \circ \dot{\tilde{\mathbf{D}}} \circ \mathbf{D} = v \mathbf{f}'_1 \quad \# 10.142$$

weilers mit #10.18 und #2.14

$$\frac{1}{2} (\bar{\omega}' \circ \mathbf{f}'_3 - \mathbf{f}'_3 \circ \bar{\omega}') = \bar{\omega}' \times \mathbf{f}'_3 = v \mathbf{f}'_1 \quad \# 10.143$$

folgt. Hieraus entnimmt man, daß die Momentanachse im bewegten System immer in der auf  $\mathbf{f}'_1$  normalen Koordinateneben liegt, der bewegte Polkegel entartet also in die Normalebene von  $\mathbf{c}$ .

**Satz 10.5.2.2:** *Bei der Bewegung des begleitenden Zweibeins einer sphärischen Kurve rollt die sphärische Normale auf der sphärischen Evolute ab*

### 10.5.3 Konstruktive Behandlung der Krümmungsverhältnisse.

Die Formeln #10.130,131 gestatten eine einfache Vervollständigung der Krümmungsverwandtschaft auf einem Polstrahl. Es gilt nämlich (Fig.10.10)

**Satz 10.5.3.1:** *Projiziert man die Punkte  $\mathbf{A}$  eines Polstrahles aus dem beliebigen Zentrum  $\mathbf{S}$ , die zugehörige Bahnkrümmungsmitten aus dem Zentrum  $\mathbf{S}_K$ , welches auf dem durch  $\mathbf{S}$  bestimmten Polstrahl beliebig gewählt wird, so schneiden alle Projektionsstrahlen einander in den Punkten  $\mathbf{H}$  desselben Polstrahls  $\rho$ .*

Man nennt  $\rho$  die *Projektionsachse*. Es genügt, nach Satz 10.5.1.2 den Beweis für die gnomonische Projektion zu führen (Fig.10.10.2). Wir wählen die Poltangente  $\mathbf{t}_\rho$  und die gnomonische Projektion  $\mathbf{n}_\rho^g$  der Polnormalen als  $x$ - bzw.  $y$ -Achse eines in der Tangentialebene liegenden Koordinatensystems. Die Punkte  $\mathbf{A}^g$  und  $\mathbf{K}_A^g$  der Krümmungsverwandtschaft legen wir auf ihrem Polstrahl, der mit der  $y$ -Achse den Winkel  $\tau$  einschließt, durch ihre Abstände  $r$  bzw.  $r^*$  von Ursprung fest. Sie haben dann die Koordinaten  $\mathbf{A}^g(r \sin \tau, r \cos \tau)$ ,  $\mathbf{K}_A^g(r^* \sin \tau, r^* \cos \tau)$ . Der Polstrahl, auf dem wir  $\mathbf{S}^g$  und  $\mathbf{S}_K^g$  in den Abständen  $s$  und  $s^*$  von  $\mathbf{O}$  beliebig wählen, schließe mit der  $y$ -Achse den Winkel  $\sigma$  ein. Dann sind die Koordinaten dieser Punkte

$$\mathbf{S}^g(s \sin \sigma, s \cos \sigma), \mathbf{S}_K^g(s^* \sin \sigma, s^* \cos \sigma)$$

Figur 10.10

Für die Koordinaten  $x, y$  des Schnittpunktes  $H_A^g$  der Geraden  $(S^g A^g)$  und  $(S_K^g K_A^g)$  ergibt sich wegen #10.131

$$\frac{x}{y} = \frac{\left(\frac{1}{r^*} - \frac{1}{r}\right) \cos \sigma - \left(\frac{1}{s^*} - \frac{1}{s}\right) \cos \tau}{\left(\frac{1}{r^*} - \frac{1}{r}\right) \sin \sigma - \left(\frac{1}{s^*} - \frac{1}{s}\right) \sin \tau} = \frac{\frac{\omega \cos \sigma}{v_p \cos \tau} - \left(\frac{1}{s^*} - \frac{1}{s}\right) \cos \tau}{\frac{\omega \sin \sigma}{v_p \cos \tau} - \left(\frac{1}{s^*} - \frac{1}{s}\right) \sin \tau} \quad \# 10.144$$

woraus die Behauptung folgt. Der Fig. 10.10 entnimmt man die aus Satz 10.5.3.1 sich ergebende Konstruktion der Krümmungsmitte  $K_x$  eines auf dem Polstrahl durch  $A$  liegenden Punktes  $X$ . Wählen wir die Punkte  $S^g$  und  $S_K^g$  auf ihrem Polstrahl nicht beliebig, sondern als Punktepaar  $B^g, K_B^g$  der Krümmungsverwandtschaft, sodaß  $S^g = B^g, S_K^g = K_B^g$  ist, so gilt die Formel #10.131

$$\frac{1}{s^*} - \frac{1}{s} = \frac{\omega}{v_p \cos \sigma} \quad \# 10.145$$

Für den Winkel  $\varphi$  der Projektivitätsachse  $p$  mit der Poltangente folgt dann aus #10.144

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} = -\tan(\sigma + \tau), \quad \varphi = \pi - (\sigma + \tau) \quad \# 10.146$$

Daher ist der Winkel  $\alpha$  zwischen  $p$  und dem Polstrahl des Punktes  $A$ :

$$\alpha = \varphi - (\frac{1}{2}\pi - \tau) = \frac{1}{2}\pi - \sigma$$

**Figur 10.11**

das ist aber der Winkel, den der Polstrahl durch  $B$  mit der Poltangente  $t_p$  einschließt. Fig. 10.11 zeigt dieses Gegenstück zum Satz von BOBILLIER<sup>13</sup> der ebenen Kinematik auf der Kugel und in der gnomonischen Projektion.

**Satz 10.5.3.2:** *Es seien zwei Punktepaare  $A, K_A$  und  $B, K_B$  der Krümmungsverwandtschaft auf zwei voneinander verschiedenen Polstrahlen  $a$  und  $b$  gegeben. Die Verbindung der Punkte  $A, B$  einerseits und der zugehörigen Krümmungsmittelpunkte  $K_A, K_B$  andererseits schneiden einander in einem Punkt  $H$ , der auf dem Polstrahl  $p$  liegt. Wendet man jene Drehung, welche  $p$  nach  $a$  überführt in gleichem Sinne und mit demselben Drehwinkel auf den Polstrahl  $b$  an, so geht  $b$  in die Poltangente  $t_p$  über.*

Diese Konstruktion gestattet das Aufsuchen der Poltangente  $t_p$ , wenn zwei Punktepaare der Krümmungsverwandtschaft gegeben sind, und umgekehrt, kennt man bereits die Poltangente  $t_p$  und ein Punktepaar der Krümmungsverwandtschaft, so läßt sich die Krümmungsmitte jedes beliebigen weiteren Punktes der Kugel ermitteln.

### 10.5.4 Krümmungsverhältnisse bei Hüllkurven

**Figur 10.12**

Satz 10.5.2.2 können wir anwenden, um die Krümmungsmitte  $K$  der Hüllkurve  $c$  zu ermitteln, die bei einer sphärischen Bewegung von der bewegten Kurve  $c_1$  eingehüllt wird.  $c_1$  werde im System  $\Sigma_1$  bei Abrollung der Gangpolkurve  $p_1$  auf der in  $\Sigma_0$  festen Polkurve  $p$  mitgeführt (Fig. 10.12.1). Der Berührungspunkt  $P$  von  $p$  und  $p_1$  stellt daher das Momentanzentrum 10 dieser Bewegung dar. Das in jedem Augenblick beiden Kurven gemeinsame begleitende Dreibein  $\Sigma_2$  beschreibt dann gegen  $\Sigma_0$  eine Bewegung, deren Momentanzentrum  $O_2$  nach Satz 10.5.2.2 mit der Krümmungsmitte  $R_p$  von  $p$  inzidiert. Ebenso hat die Bewegung von  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_1$  ihr Momentanzentrum 12 in der Krümmungsmitte  $R_{p_1}$  von  $p_1$ . Führt man das begleitende Dreibein  $\Sigma_3$  von  $c_1$  so, daß seine Normale stets durch das Mo-

<sup>13</sup> Etienne BOBILLIER 1798 1840

mentanzentrum  $O_1$  geht, so befindet sich nach Satz 10.4.2.1 dessen Scheitel jeweils im Berührungspunkt von  $c_1$  mit der eingehüllten Kurve  $c$ . Der Relativpol 13 der Bewegung von  $\Sigma_3$  gegen  $\Sigma_1$  inzidiert mit der Krümmungsmitte  $K_1$  von  $c_1$ . Der gesuchte Krümmungsmittelpunkt  $K$  der Hüllkurve  $c$  fällt nach Satz 10.4.1.1 mit dem Momentanzentrum  $O_3$  der Absolutbewegung von  $\Sigma_3$  gegen  $\Sigma_0$  zusammen. Um ihn zu ermitteln, werden wir mehrfach Satz 10.4.1.1 heranziehen. Danach muß der Relativpol 23 auf dem 21 und 31 verbindenden Großkreis liegen. Da die Bewegungsrichtung von  $\Sigma_3$  in  $O_1$  gegeben ist, muß sich 23 auf dem zu ihr normalen Großkreis befinden. 23 ist demnach der Schnittpunkt  $H$  der genannten Großkreise. Satz 10.4.1.1 zufolge muß dann  $O_3$  im Schnittpunkt der 23 und 20 bzw. 01 und 31 verbindenden Großkreise sein. Fig. 10.12.2 stellt die gnomonische Projektion von Fig. 10.12.1 auf die Kugeltangentialebene im Momentanzentrum  $P = O_1$  dar. Die Projektionen  $H^g$  bzw.  $K_1^g$  der Krümmungsmitten mögen von  $P^g$  Abstände  $k = P^gK^g$  und  $k_1 = P^gK_1^g$  haben, ihr Polstrahl schließe mit der Polnormalen  $n^g$  den Winkel  $\tau$  ein. Sind  $k_p$  und  $k_{p_1}$  die Abstände der Projektionen  $R_p^g$  und  $R_{p_1}^g$  der sphärischen Krümmungsmitten der Rast- und Gangpolkurven von  $O$ , so ergibt sich aus Fig. 10.12.2 mit Hilfe ähnlicher Dreiecke

$$\frac{k_1}{PH^g} = \frac{k_1 - k_{p_1} \cos \tau}{k_{p_1} \sin \tau}, \quad \frac{k}{PH^g} = \frac{k - k_p \cos \tau}{k_p \sin \tau} \quad \# 10.147$$

und hieraus

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k_1} = \left( \frac{1}{k_p} - \frac{1}{k_{p_1}} \right) \frac{1}{\cos \tau} \quad \# 10.148$$

Sind auf der Kugeloberfläche die sphärischen Abstände der Krümmungsmittelpunkte  $K_1$  und  $K$  von  $c_1$  und  $c$  von  $P$  gleich  $\xi_1$  und  $\xi^*$  und sind  $\rho_p$  und  $\rho_{p_1}$  die sphärischen Krümmungsradien von Rast- und Gangpolkurve, so hat man  $k = \cot \xi^*$ ,  $k_1 = \cot \xi_1$ ,  $k_p = \cot \rho_p$ ,  $k_{p_1} = \cot \rho_{p_1}$  zu setzen. Dann wird

$$\cot \xi^* - \cot \xi_1 = (\cot \rho_p - \cot \rho_{p_1}) \frac{1}{\cos \tau} \quad \# 10.149$$

Reduziert sich die bewegte Kurve auf einen Punkt  $X$ , der vom Momentanpol augenblicklich den sphärischen Abstand  $\xi$  hat, so wird  $\xi = \xi_1$ , Fig. 10.12.2 geht in die aus der ebenen Kinematik wohlbekannten Konstruktion von EULER-SAVARY über<sup>14</sup> (Fig. 10.12.5) und #10.149 nimmt die Gestalt

$$\cot \xi^* - \cot \xi = (\cot \rho_p - \cot \rho_{p_1}) \frac{1}{\cos \tau} \quad \# 10.150$$

an. Vergleich mit #10.130 ergibt die auf POINSOT<sup>15</sup> zurückgehende Formel

$$\cot \rho_p - \cot \rho_{p_1} = \frac{\omega}{v_p} \quad \#10.151$$

Hieraus entnimmt man, daß (wegen  $\tau = 0$ ) nach #10.130 die Krümmungsmitten von Gang- und Rastpolkurve ein entsprechendes Punktepaar der Krümmungsverwandtschaft sind. Aus #10.149 folgt wegen #10.151

$$\cot \xi^* - \cot \xi_1 = \frac{\omega}{v_p \cos \tau} \quad \# 10.152$$

<sup>14</sup> WUNDERLICH [5] S.175

<sup>15</sup> POINSOT [1] S.10

sodaß die Konstruktion von Fig. 10.10, angewendet auf die Krümmungsmitte  $K_1$  der einhüllenden Kurve, die Krümmungsmitte  $K$  der eingehüllten Kurve ergibt. Entsprechendes gilt für die Konstruktion nach BOBILLIER gemäß Fig. 10.11

### 10.5.5 Sphärische Wendepunkte

Ist der Krümmungsradius in einem Kurvenpunkte ein Großkreis, so spricht man von einem *sphärischen Wendepunkt*. Hier stehen die Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{k}$  aufeinander normal (Fig. 10.7), d.h. es ist

$$\tan \xi \cdot \tan \xi^* = -1 \quad \# 10.153$$

Nun ist nach #10.130

$$\begin{aligned} \cot \xi^* - \cot \xi &= \frac{\omega}{v_p \cos \tau} \Rightarrow -\tan \xi - \cot \xi = \frac{\omega}{v_p \cos \tau} \Rightarrow \tan \xi + \cot \xi = -\frac{\omega}{v_p \cos \tau} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sin^2 \xi + \cos^2 \xi}{\sin \xi \cos \xi} &= -\frac{\omega}{v_p \cos \tau} \end{aligned}$$

daher

$$\sin \xi \cos \xi = -\frac{v_p}{\omega} \cos \tau \quad \# 10.154$$

Denkt man sich die Momentanachse wieder in die z-Achse, die x-Achse parallel zur Polwechselgeschwindigkeit gelegt, so gilt

$$x = \lambda \sin \xi \sin \tau$$

$$y = \lambda \sin \xi \cos \tau$$

$$z = \lambda \cos \xi$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \lambda^2 \\ x^2 + y^2 &= \lambda^2 \sin^2 \xi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \sin^2 \xi$$

$$\frac{y}{z} = \sin \xi \frac{\cos \tau}{\cos \xi} = \sin \xi \left( -\frac{\omega}{v_p} \sin \xi \right) = -\frac{\omega}{v_p} \sin^2 \xi = -\frac{\omega}{v_p} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Daher erfüllen alle Punkte des Raumes, für welche #10.154 gilt, den Kegel 3. Grades mit der Gleichung

$$\omega(x^2 + y^2)z + v_p(x^2 + y^2 + z^2)y = 0 \quad \# 10.155$$

welcher nach #10.47 vom Zeitgesetz unabhängig ist.

**Satz 10.5.5.1:** *Alle Punkte des Raumes, deren Bahnen im Augenblick einen sphärischen Wendepunkt durchlaufen, liegen auf einem Kegel 3. Ordnung, der die Momentanachse enthält und längs derselben den Polkegel berührt*

**Satz 10.5.5.2:** *Alle Punkte einer Kugel, deren Bahnen im Moment sphärische Wendepunkte beschreiben, liegen auf einer Kurve dritter sphärischer Ordnung, der sphärischen Wendelinie, welche die Polkurven im Momentanzentrum berührt.*

Sucht man die Menge der zu #10.155 gehörigen Krümmungssachsen, so hat man aus #10.130 und #10.153  $\xi$  zu eliminieren:

$$\cot \xi^* - \cot \xi = \frac{\omega}{v_p \cos \tau} \wedge \tan \xi \cdot \tan \xi^* = -1 \Rightarrow \frac{\cos^2 \xi^* + \sin^2 \xi^*}{\sin \xi^* \cos \xi^*} = \frac{\omega}{v_p \cos \tau}$$

also

$$\sin \xi^* \cos \xi^* = \frac{v_P}{\omega} \cos \tau \quad \# 10.156$$

Die zugehörigen Krümmungsachsen erfüllen den Kegel 3. Ordnung

$$\omega(x^2 + y^2)z - v_P(x^2 + y^2 + z^2)y = 0 \quad \# 10.157$$

Ihm entspricht auf der Kugel eine Kurve 3. sphärischer Ordnung, welche zu der durch #10.155 ausgeschnittenen Kurve bezüglich des Momentanzentrums symmetrisch liegt, d.h. der durch den Kugelpunkt  $X$  gehende sphärische Polstrahl schneidet den Ort des Krümmungszentren in noch zwei Paaren von Gegenpunkten, von denen ein Paar zu  $X$  bezüglich dem Paar der Momentanzentren symmetrisch liegt. Das weitere Paar stellt die Schnittpunkte mit der  $X$  entsprechenden Krümmungsachse dar. Umformung von #10.130 ergibt

$$\cot \xi^* - \cot \xi = \frac{\omega}{v_P \cos \tau} \Rightarrow \frac{\cos \xi^* \sin \xi - \cos \xi \sin^*}{\sin \xi^* \sin \xi} = \frac{\sin(\xi - \xi^*)}{\sin \xi^* \sin \xi} = \frac{\omega}{v_P \cos \tau}$$

Also

$$\frac{\sin \xi \sin \xi^*}{\sin(\xi - \xi^*)} = \frac{v_P}{\omega} \cos \tau \quad \# 10.158$$

**Satz 10.5.5.3:** Für alle Punkte, deren Krümmungsachse in die Momentanachse fällt ( $\xi^* = 0$ ), muß der Winkel  $\tau = \frac{1}{2}\pi$  sein, d.h. alle diese Punkte liegen in der gemeinsamen Tangentialebene der beiden Polkegel und umgekehrt inzidiert die Krümmungsachse der Bahnkurven aller Punkte dieser Ebene mit der Momentanachse.

### 10.5.6 Konstruktive Behandlung der sphärischen Wendepunkte

Die sphärischen Wendepunkte werden aus der Kugel durch den Kegel 3. Ordnung #10.155 ausgeschnitten. Die gnomonischen Projektionen dieser Punkte auf die Tangentialebene im sphärischen Momentanpol bilden eine ebene Kurve 3. Ordnung  $c^3$ , deren Gleichung, bei Zugrundelegung des Koordinatensystem #10.66 sich als Schnitt des Kegels #10.155 mit der Ebene  $z = 1$  ergibt. Setzt man

$$\frac{1}{w} := -\frac{\omega}{v_P} \quad \# 10.159$$

so ergibt sich

$$-\frac{1}{w}(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2 + 1)y = 0 \Rightarrow \frac{1}{w}(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + 1)y$$

Berechnung von  $x^2$  aus dem letzten Ausdruck ergibt

$$c^3 \dots x^2 = y \frac{wy^2 - y + w}{1 - wy} = y \frac{\left(y - \frac{1}{2w}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4w^2}\right)}{\frac{1}{w} - y}, \quad z = 1 \quad \# 10.160$$

Wegen

$$c^2 \dots x^2 + y^2 = wy, \quad z = 1 \quad \# 10.161$$

stellt  $w$  den Durchmesser des Kreises #10.75 dar. Man erkennt sofort, daß  $c^3$  die Gerade  $y = \frac{1}{w}$ ,  $z = 1$  zur Asymptote hat und daß  $c^2$  der Scheitelkrümmungskreis der Kurve im Ursprung ist.

#10.160 ist eine *Panstrochoide* von BRETSCHNEIDER: Man erhält sie auf folgende Weise: wählt man auf der gemeinsamen Potenzlinie aller Kreise eines Kreisbüschels einen festen Punkt  $P$  (Fig. 10.13), so findet man die Punkte  $S_1, S_2$  der Panstrochoide, indem man jeden Kreis des Büschels mit seinem durch  $P$  gehenden Durchmesser schneidet. In dem in Fig. 10.13 eingezeichneten Koordinatensystem hat die Panstrochoide die Gleichung

**Figur 10.13**

$$x^2 = y \frac{(y-l)^2 - \rho a^2}{2l-y} \quad \# 10.162$$

Hierin ist

$\rho = 1$ , wenn die Grundpunkte des Kreisbüschels reell sind (Fig. 10.13.1)

$\rho = -1$ , wenn die Grundpunkte des Kreisbüschels konjugiert imaginär sind. In diesem Falle schneiden alle Kreise des Büschels einen festen Kreis mit dem Radius  $a$  orthogonal. (Fig. 10.13.2).

$\rho = 0$ , wenn die Grundpunkte zusammenfallen. In diesem Falle ist  $a = 0$  (Fig. 10.13.3). Die Kurve heißt dann *Strophoide* schlechthin.

Vergleichen wir #10.160 und #10.162 so ergibt sich

$$l = \frac{1}{2w}, \quad \rho a^2 = \frac{1}{4w^2} - 1 \quad \# 10.163$$

Zur Konstruktion denken wir uns die Kugeltangentialebene im sphärischen Momentanzentrum als Bildebene. Dann erscheint der Kugelumriß als Kreis mit dem Mittelpunkt  $P$  und dem Radius 1 (Fig. 10.14).  $c^2$  berührt die  $x$ -Achse im Ursprung  $P$  und schneidet aus der  $y$ -Achse den Punkt mit der Ordinate  $w$  heraus. Der bezüglich des Kugelumrisses inverse Punkt mit der Ordinate  $y = 1/w$  legt die Asymptote von  $c^3$  fest. Der Punkt  $y = \frac{1}{2}w$  bestimmt den Ort der Mittelpunkte der Kreise des Büschels. Bei der Bestimmung von diesen Grundpunkten sind drei Fälle zu unterscheiden:

**Figur 10.14**

1.  $w < \frac{1}{2}$  (Fig. 10.14.1). Der Punkt  $y = \frac{1}{2}w$  befindet sich außerhalb des Umrißkreises der Kugel. Die Grundpunkte des Kreisbüschels findet man, wenn man von  $y = \frac{1}{2}w$  die Tangentenstrecke aus diesem Punkt an den Umrißkreis auf der  $y$ -Achse nach beiden Seiten abträgt. Die Kurve besteht aus zwei Zügen.

2.  $w > \frac{1}{2}$  (Fig. 10.14.2). Der Punkt  $y = \frac{1}{2}w$  liegt im Innern des Umrißkreises. Das Kreisbüschel hat keine reellen Grundpunkte. Seine Kreise stehen alle auf einem Kreis normal, dessen Durchmesser die von der Geraden  $y = \frac{1}{2}w$  aus dem Umriß geschnittene Sehne ist.

3.  $w = \frac{1}{2}$  (Fig. 10.14.3). Die beiden Grundpunkte des Kreisbüschels fallen in den Punkt  $y = \frac{1}{2}w = 1$  der Kreisperipherie zusammen. Die Kurve  $c^3$  (Strophoide) hat dort einen Doppelpunkt.

**Satz 10.5.6.1:** *Besitzt eine sphärische Kurve  $c$  sphärische Wendepunkte, so gehen diese in gewöhnliche (ebene) Wendepunkte der durch gnomonische Projektion aus  $c$  hervorgehenden Kurve  $c^g$  über.*

**Figur 10.15**

Die Schmiegeebenen der sphärischen Wendepunkte enthalten ja das Zentrum  $O$  der gnomonischen Projektion, ihre Projektionen weisen daher einen Wendepunkt auf<sup>16</sup>.

<sup>16</sup> WUNDERLICH [3] S.96

### 10.5.7 Spitzen der Hüllkurven von Großkreisen

Ist eine bewegte Kurve  $c_1$  ein Großkreis, so kann dessen Hüllkurve eine Spitze aufweisen. Es ist dies dann der Fall, wenn die Krümmungsachse  $\mathbf{k}$  der eingehüllten Kurve mit dem Vektor  $\mathbf{x}$  des Berührungspunktes kollinear ist. In diesem Fall schließen (Fig. 10.15)  $\mathbf{k}$  und die Krümmungsachse  $\mathbf{k}_1$  des Großkreises einen rechten Winkel ein, sodaß die Beziehung

$$\tan \xi^* \cdot \tan \xi_1 = -1 \quad \# 10.164$$

besteht. Für den Ort aller  $K_1$ , der mit dem Ort aller Spitzen zusammenfällt, die momentan bei Hüllkurven von Großkreisen auftreten, folgt aus #10.152 durch Elimination von  $\xi_1$  mit Hilfe von #10.164 wieder die Beziehung #10.156. Die entsprechenden Kugelpunkte werden durch den Kegel #10.157 aus dem Kugelmittelpunkt projiziert.

**Satz 10.5.7.1:** *Der Ort der Spitzen der Hüllkurven von Großkreisen ist eine zur Wendelinie bezüglich des Momentanpols symmetrische Kurve*

Eliminiert man mit Hilfe von #10.164 aus #10.152 den Winkel  $\xi^*$ , so erhält man die Beziehung

$$\sin \xi_1 \cdot \cos \xi_1 = -\frac{v_P}{\omega} \cos \tau \quad \# 10.165$$

Sie legt die Pole  $K_1$  der Großkreise fest, deren Hüllkurve im Moment eine Spitze aufweist. Vergleich mit #10.154 lehrt, daß alle Punkte  $K_1$  die sphärische Wendelinie erfüllen.

**Satz 10.5.7.2:** *Beschreibt die Bahn eines Punktes einen sphärischen Wendepunkt, so weist deren Polarkurve eine Spitze auf und umgekehrt.*

# 11 Sphärische Radlinien

## 11.1 Bewegungsgleichungen

Um den Nordpol  $N$  der Einheitskugel drehe sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{10}$  der Punkt  $M$ , dessen sphärischer Abstand von  $N$ , gemessen auf dem  $M$  und  $N$  verbindenden Groß-

**Figur 11.1**

kreis  $k_1$  die Größe  $a$  habe. Um  $M$  drehe sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{21}$  gegen  $k_1$  der Großkreis  $k_2$  (Fig. 11.1). In der Anfangslage mögen  $k_1$  und  $k_2$  mit dem in der  $xz$ -Ebene des festen Koordinatensystems  $O(x,y,z)$  liegenden Großkreis  $k_0$  inzidieren. Im Zeitpunkt  $t$  habe sich das mit  $k_1$  verbundene System  $\Sigma_1$  gegen das feste System  $\Sigma_0$  um den Winkel

$$\alpha = \omega_{10} t \quad \# 11.1$$

das mit  $k_2$  fest verbundene System  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_1$  um den Winkel

$$\beta = \omega_{21} t \quad \# 11.2$$

verdreht.

Die  $z'$ -Achse eines mit  $\Sigma_2$  verbundenen Koordinatensystems falle in die Gerade  $OM$ , die  $x'$ -Achse liege in der Ebene von  $k_2$ , während die  $y'$ -Achse auf  $k_2$  normal stehe. Ein mit  $\Sigma_2$  starr mitgeführter Punkt  $X$  habe in  $\Sigma_2$  den konstanten Ortsvektor  $\mathbf{x}'$ . Um die Lage von  $\mathbf{x}$  im ruhenden System  $O(x,y,z)$  darzustellen, denken wir uns  $O(x,y,z)$  durch folgende Schritte in das mit  $\Sigma_2$  verknüpfte System  $O'(x',y',z')$  übergeführt:

1. Die Drehung um  $z$  durch den Winkel  $\alpha$  führe  $O(x,y,z)$  in die Lage  $O(x_1,y_1,z_1=z)$  über, wodurch die  $x_1z_1$ -Ebene in der Ebene von  $k_1$  zu liegen kommt. Diese Drehung wird im System  $O(x,y,z)$  gemäß #9.9 durch

$$\mathbf{D}_1 = \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \# 11.3$$

beschrieben.

2. Drehung um die  $y_1$ -Achse durch den Winkel  $a$  führt das Koordinatensystem  $O(x_1,y_1,z_1)$  in das System über, dessen  $z_2$ -Achse in die Gerade ( $OM$ ) fällt. Beschrieben wird diese Drehung in  $O(x_1,y_1,z_1)$  durch

$$\mathbf{D}_2 = \cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \# 11.4$$

3. Endlich führt eine Drehung um  $z_2$  durch den Winkel  $\beta$  das System  $O(x_2,y_2,z_2)$  nach  $O'(x',y',z')$  über, welche Drehung in  $O(x_2,y_2,z_2)$  durch

$$\mathbf{D}_3 = \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \# 11.5$$

beschrieben wird. Der in  $O'(x',y',z')$  feste Punkt  $\mathbf{x}'$  hat daher nach #9.7 in  $O(x_2,y_2,z_2)$  die Koordinaten

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{D}_3 \circ \mathbf{x}' \circ \tilde{\mathbf{D}}_3 \quad \# 11.6$$

$\mathbf{x}_2$  hat, bezogen auf  $O(x_1,y_1,z_1)$  die Koordinaten

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{D}_2 \circ \mathbf{x}_2 \circ \tilde{\mathbf{D}}_2 \quad \# 11.7$$

Die Koordinaten von  $\mathbf{x}_1$ , bezogen auf das feste System  $O(x,y,z)$  sind dann

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}_1 \circ \mathbf{x}_1 \circ \tilde{\mathbf{D}}_1 \quad \# 11.8$$

Die Zusammensetzung von #11.6,7,8 liefert endlich den gesuchten Zusammenhang zwischen  $\mathbf{x}'$  und  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x}' \circ \tilde{\mathbf{D}}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \circ \mathbf{D}_2 \circ \mathbf{D}_3 \quad \# 11.9$$

Aus #11.3,4,5 folgt bei Beachtung von #11.1,2

$$\mathbf{D} = \cos \frac{a}{2} \cos \frac{\omega_{21} + \omega_{10}}{2} t + \begin{Bmatrix} \sin \frac{a}{2} \sin \frac{\omega_{21} - \omega_{10}}{2} t \\ \sin \frac{a}{2} \cos \frac{\omega_{21} - \omega_{10}}{2} t \\ \cos \frac{a}{2} \sin \frac{\omega_{21} + \omega_{10}}{2} t \end{Bmatrix} \quad \# 11.10$$

#11.9,10 beschreiben die Bahn des mit  $\Sigma_2$  mitgeführten Punktes  $\mathbf{x}'$  im festen System als Funk-

tion der Zeit  $t$ . Setzt man  $\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$ ,  $\mathbf{x}' = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix}$ , so folgt

$$\left. \begin{aligned} x &= (\cos a \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha) x' - (\cos a \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha) y' + \sin a \cos \alpha \cdot z' \\ y &= (\cos a \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \sin \alpha) x' - (\cos a \sin \beta \sin \alpha - \cos \beta \cos \alpha) y' + \sin a \sin \alpha \cdot z' \\ z &= -\sin a \cos \beta \cdot x' + \sin a \sin \beta \cdot y' + \cos a \cdot z' \end{aligned} \right\} \# 11.11$$

als Darstellung der Bahn des Punktes  $\mathbf{x}'$  im festen System.

## 11.2 Momentanachse, Polkegel

### 11.2.1 Kreisrollung

Aus #11.10 folgt

$$\dot{\mathbf{D}} = -\frac{\omega_{21} + \omega_{10}}{2} \cos \frac{a}{2} \sin \left( \frac{\omega_{21} + \omega_{10}}{2} t \right) + \begin{Bmatrix} \frac{\omega_{21} - \omega_{10}}{2} \sin \frac{a}{2} \cos \left( \frac{\omega_{21} - \omega_{10}}{2} t \right) \\ -\frac{\omega_{21} - \omega_{10}}{2} \sin \frac{a}{2} \sin \left( \frac{\omega_{21} - \omega_{10}}{2} t \right) \\ \frac{\omega_{21} + \omega_{10}}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \left( \frac{\omega_{21} + \omega_{10}}{2} t \right) \end{Bmatrix} \quad \# 11.12$$

Daher ist nach #10.23 der Vektor der Winkelgeschwindigkeit der Bewegung von  $\Sigma_2$  gegen das feste System  $\Sigma_0$

$$\bar{\omega}_{20} = 2\dot{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} = \begin{Bmatrix} \omega_{21} \sin a \cos(\omega_{10} t) \\ \omega_{21} \sin a \sin(\omega_{10} t) \\ \omega_{10} + \omega_{21} \cos a \end{Bmatrix} \quad \# 11.13$$

Bezogen auf das bewegte System  $\Sigma_2$  lautet er nach #10.18

$$\bar{\omega}'_{20} = 2\tilde{\mathbf{D}} \circ \dot{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} -\omega_{10} \sin a \cos(\omega_{21}t) \\ \omega_{10} \sin a \sin(\omega_{21}t) \\ \omega_{21} + \omega_{10} \cos a \end{pmatrix} \quad \# 11.14$$

Für die Beträge der beiden Vektoren #11.13,14 ergibt sich

$$\omega_{20}^2 = \omega_{20}'^2 = \omega_{10}^2 + \omega_{21}^2 + 2\omega_{10}\omega_{21} \cos a \quad \# 11.15$$

Die Momentanachse schließt mit der z-Achse den festen Winkel  $a_1$  ein, der nach #1.87 durch

$$\tan a_1 = \frac{\omega_{21} \sin a}{\omega_{10} + \omega_{21} \cos a} \quad \# 11.16$$

bestimmt ist. Der feste Polkegel ist also ein Drehkegel mit dem Öffnungswinkel  $2a_1$ . Ebenso ist der Gangkegel im bewegten System ein Drehkegel, dessen Öffnungswinkel  $2a_2$  durch

$$\tan a_2 = \frac{\omega_{10} \sin a}{\omega_{21} + \omega_{10} \cos a} \quad \# 11.17$$

festgelegt ist. Auf der Einheitskugel rollt daher der Kreis  $p_2$  mit dem sphärischen Radius  $a_2$  auf einem Kreis  $p_1$  mit dem sphärischen Radius  $a_1$ . Ein mit  $p_2$  mitgeführter Punkt beschreibt somit eine *sphärische Radlinie*.

### 11.2.2 Andere Herleitung obiger Ergebnisse

Die Ergebnisse #11.13,14 erhält man auch bei Betrachtung der *Relativbewegung*, welche  $O'(x',y',z')$  gegen  $O(x_1,y_1,z_1)$  ausführt. Diese ist eine Drehung um die  $z'$ -Achse, deren Winkelgeschwindigkeitsvektor, bezogen auf  $O(x',y',z')$

$$\bar{\omega}'_{21} = \omega_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \# 11.18$$

ist. Im festen System lautet dieser Vektor wegen #11.11

$$\bar{\omega}_{21} = \omega_{21} \begin{pmatrix} \sin a \cos(\omega_{10}t) \\ \sin a \sin(\omega_{10}t) \\ \cos a \end{pmatrix} \quad \# 11.19$$

Der Winkelgeschwindigkeitsvektor der Drehung von  $O(x_1,y_1,z_1)$  um  $z_1 = z$  gegen  $O(x,y,z)$ , der *Führungsbewegung*, ist

$$\bar{\omega}_{10} = \omega_{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \# 11.20$$

Nach #10.90 folgt daher für die Absolutbewegung

$$\bar{\omega}_{20} = \bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{10} = \begin{pmatrix} \omega_{21} \sin a \cos(\omega_{10}t) \\ \omega_{21} \sin a \sin(\omega_{10}t) \\ \omega_{10} + \omega_{21} \cos a \end{pmatrix} \quad \# 11.21$$

dasselbe Ergebnis wie in #11.13. Die Vektoren #11.21 liegen in derselben Ebene und aus #11.16,17 folgt

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \quad \# 11.22$$

## Sphärische Radlinien

was auch aus Fig. 11.1 klar ist. Wendet man den Sinussatz der ebenen Trigonometrie auf das aus den Vektoren  $\vec{\omega}_{21}$ ,  $\vec{\omega}_{10}$ ,  $\vec{\omega}_{20}$  gebildete Dreieck an, so folgt

$$\frac{\omega_{21}}{\omega_{10}} = \frac{\sin a_1}{\sin a_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \# 11.23$$

worin  $r_1$  und  $r_2$  die ebenen Radien der sphärischen Rollkreise bedeuten. Soll sich eine sphärische Radlinie nach einer endliche Anzahl von Umläufen schließen, so muß das in #11.23 aufscheinende Verhältnis ein rationales sein.

### 11.3 Sphärische Radlinien

Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir den bei der geschilderten Bewegung mitgeführten Punkt  $Y(y')$  in der  $x'z'$ -Ebene des gewählten Koordinatensystems wählen. Schließt der nach  $Y$  weisende Kugelradius mit der  $z'$ -Achse den Winkel  $b$  ein, so ist

$$y' = \begin{Bmatrix} \sin b \\ 0 \\ \cos b \end{Bmatrix} \quad \# 11.24$$

und aus #11.11 erhält man die Koordinaten des mitgeführten Punktes #11.24, bezogen auf das feste System

$$\begin{aligned} x &= (\cos a \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha) \sin b + \sin a \cos \alpha \cos b \\ y &= (\cos a \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha) \sin b + \sin a \sin \alpha \cos b \\ z &= -\sin a \cos \beta \sin b + \cos a \cos b \end{aligned} \quad \# 11.25$$

Um den Grundriß der Bahnkurve zu ermitteln, ist es zweckmäßig, die Darstellung in der GAUSSschen Zahlenebene heranzuziehen, indem man die Koordinaten  $x, y$  eines Punkte des Grundrisses zu der komplexen Größe  $x + iy$  zusammenfaßt. Setzt man  $\cos \beta = \frac{1}{2}(\hat{e}^{i\beta} + \hat{e}^{-i\beta})$ ,

$\sin \beta = -\frac{i}{2}(\hat{e}^{i\beta} - \hat{e}^{-i\beta})$ , so erhält man bei Beachtung von #11.23

$$x + iy = \frac{1}{2} \sin b (1 + \cos a) \hat{e}^{i\alpha \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)} - \frac{1}{2} \sin b (1 - \cos a) \hat{e}^{i\alpha \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)} + \cos b \sin a \cdot \hat{e}^{i\alpha} \quad \#11.26$$

Die Grundrisse der sphärischen Radlinien sind daher ebene Radlinien 3. Stufe<sup>1</sup>. In gewissen Spezialfällen ergeben sich jedoch Radlinien 2. Stufe (gewöhnliche Radlinien, Trochoiden).

#### 11.3.1 Trochoiden

Es tritt dies ein für  $b = \frac{1}{2}\pi$ . In diesem Falle beschreibt jeder Punkt des zum rollenden Kreis parallelen Großkreises eine sphärische Radlinie, deren Grundriß eine ebene Radlinie mit der Gleichung

$$x + iy = \frac{1}{2} (1 + \cos a) \hat{e}^{i\alpha \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)} - \frac{1}{2} (1 - \cos a) \hat{e}^{i\alpha \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)} \quad \# 11.27$$

ist. Hierher gehören als wichtiger Sonderfall die *sphärischen Kreisevolventen* für  $r_2 = 1$  (= Kugelradius). Sie werden von den Umfangspunkten eines auf einem Kleinkreis abrollenden Großkreises beschrieben.

<sup>1</sup> Siehe WUNDERLICH [1]

**11.3.2 PASCAL-Schnecke als Grundriß einer sphärischen Radlinie**

Ist  $r_1 = r_2$ , so beschreibt jeder mit dem rollenden Kugelkreis mitgeführte Punkt eine Radlinie, deren Grundriß

$$x + i y = \frac{1}{2} \sin b (1 + \cos a) \hat{e}^{2i\alpha} + \cos b \sin a \hat{e}^{i\alpha} - \frac{1}{2} \sin b (1 - \cos a) \quad \# 11.28$$

eine PASCAL-Schnecke ist.

*11.3.2.1 Hippopede des EUDOXOS*

Eine weitere Sonderung tritt ein, wenn man zusätzlich zu  $r_1 = r_2$  noch  $b = \frac{1}{2} \pi$  fordert. Dann reduziert sich der Grundriß

$$x + i y = \frac{1}{2} (1 + \cos a) \hat{e}^{2i\alpha} - \frac{1}{2} (1 - \cos a) \quad \# 11.29$$

auf einen doppelt überdeckten, den Kugelumriß berührenden Kreis. Die sphärische Radlinie ist eine *Hippopede des EUDOXOS*<sup>2</sup>

**11.3.3 Grundriß als Hüllkurve einer Geraden**

Wir fragen noch nach jenen Sonderfällen, bei denen der Grundriß der sphärischen Radlinie als Hüllkurve einer Geraden bei einer ebenen Kreisrollung entsteht. Die bei WUNDERLICH [1] S.285 ff angeführten Bedingungen hierfür ergeben, daß dies bei  $r_1 = 1$  eintritt, wenn also ein Kugelkleinkreis auf einem Großkreis abrollt.

**11.4 Konstruktive Behandlung sphärischer Radlinien**

**11.4.1 Konstruktion der Bahnkurve eines Punktes**

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir die Bewegung in jener Lage beginnen lassen, in welcher der sphärische Mittelpunkt  $N$  des festen Kreises  $p_1$  (der mit dem Kugelnordpol zusammenfällt), der sphärische Mittelpunkt  $M$  des Rollkreises  $p_2$  sowie der mit  $p_2$  mitgeführte Punkt  $A$  demselben durch  $N$  gehenden Meridian angehören (Fig. 11.2 1). Denken wir uns diesen Meridian parallel zur Aufrißebene, so erscheinen  $p_1$  und  $p_2$  projizierend, die Anfangslage  $A_0$  von  $A$  im Aufriß auf dem Kugelumriß, der durch  $A$  gehende, zu  $p_2$  parallele Kugelkreis  $p_3$  gleichfalls projizierend.

Um  $p_2$  auf  $p_1$  abrollen zu lassen, denken wir uns  $p_2$  um die Berührungstangente mit  $p_1$  in die Ebene von  $p_1$  gedreht und den zu  $p_2$  parallelen Kugelkreis  $p_3$ , auf welchem  $A$  liegt, bei dieser Drehung mitgenommen. Die gedrehten Lagen  $p_2^0$  und  $p_3^0$  erscheinen dann in Grundriß als konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt  $M_1^0$ ,  $A_1^0$  nimmt die Lage  $A_0^0$  an. Läßt man  $p_2^0$  auf  $p_1$  in die Lage  $p_{21}^0$  abrollen, bis der Punkt  $1_0$  auf  $p_2^0$  Momentanzentrum wird, während das ursprüngliche Momentanzentrum die Lage  $P_1^0$  annimmt ( $\text{Bogen}(P'1_0) = \text{Bogen}(P'1) = \text{Bogen}(1P_1^0)$ ), so gelangt  $A_0^0$  in die Lage  $A_1^0$ . Den entsprechenden Punkt der sphärischen Radlinie erhält man, wenn man die beiden Kreise  $p_2$  und  $p_3$  in den in den zuletzt erreichten Lagen  $p_{21}^0$  und  $p_{31}^0$  um die Poltangente in  $1$  auf die Kugel zurückklappt. Diese Klappung führt man nach MACK<sup>3</sup>

<sup>2</sup>Die von EUDOXOS zur Erklärung der Planetenbahnen herangezogenen Kurven sind höhere sphärische Radlinien, wenn man diese von WUNDERLICH [1] für die Ebene geprägte Bezeichnung auf die Kugel überträgt. Mit deren Hilfe ließe sich die Eudoxische Theorie bedeutend übersichtlicher und klarer darlegen, als dies bisher geschehen ist (vgl. SCHIAPARELLI [1] S.3-112]. Speziell mit der Hippopede befaßt sich NEUGEBAUER [1]

<sup>3</sup>MACK [1] S.58 ff

zweckmäßigerweise folgendermaßen aus: dreht man  $p_{21}^0$  um eine durch  $N$  gehende, erstprojizierende Achse in die Ausgangslage  $p_2^0$  zurück, so gelangt  $P_1^0$  nach  $\bar{1}$  und  $A_1^0$  nach  $\bar{A}_1^0$ . Dabei erhält man  $\bar{1}$ , wenn man den Bogen( $P'1$ ) von  $p_1^0$  in entgegengesetzter Richtung auf  $p_2^0$  abträgt (Bogen( $P'1$ ) = Bogen( $P'\bar{1}$ )),  $\bar{A}_1^0$  geht dann aus  $A_0^0$  durch Drehung um  $M_1^0$  durch den Winkel  $\angle P'M_1^0\bar{1}$  hervor<sup>4</sup>. In dieser Lage lassen sich die Kreise  $p_2^0$  und  $p_3^0$  bequem in die Ausgangslage  $p_2$  bzw.  $p_3$  zurückdrehen. Man erhält den Aufriß  $\bar{A}'_1$ , wenn man den gekennzeichneten Abstand der Umklappung entnimmt und auf  $p'_3$  in der angedeuteten Weise aufträgt.  $\bar{A}'_1$  findet sich dann auf dem (in Fig. 11.2.1 nicht eingezeichneten) Grundriß  $p'_3$  von  $p_3$ . Nun hat man die Drehung um die erstprojizierende Achse durch  $N$  rückgängig zu machen. Dabei gelangt  $P'$  wieder nach  $1$ ,  $\bar{A}_1$  wandert auf dem durch ihn gehenden Parallelkreis der Kugel, welcher im Grundriß in wahrer Größe, im Aufriß projizierend erscheint. Denkt man sich  $\bar{A}_1$  mit  $P$  durch eine Strecke starr verbunden, so ändert sich, da die Drehachse erstprojizierend ist, die Länge ihres Grundrisses nicht. Man erhält daher die Lager des Punktes  $A'_1$ , indem man die Strecke  $P'\bar{A}'_1$  im Grundriß von  $1$  aus auf dem Bahnkreis von  $\bar{A}_1$  abschlägt.  $A'_1$  liegt auf dem projizierenden Aufriß dieses Parallelkreises.

### 11.4.2 Bahntangente

Da sich  $A_1$  im Augenblick um die Momentanachse ( $O1$ ) dreht, ist die *Bahntangente* die Normale auf die Verbindungsebene  $v$  von  $A$  mit der Momentanachse.

Will man in mehreren Punkten der sphärischen Radlinie Tangenten konstruieren, so empfiehlt sich die Durchführung in einer Nebenfigur mit Hilfe der gnomonischen Projektion. Die gnomonische Projektion des festen Kreises  $p_1$  ergibt den mit  $O^g$  konzentrischen Kreis  $p_1^g$  (Fig. 11.2.2). Man kann ihn zeichnen, sobald man etwa die gnomonische Projektion  $P^g$  des Momentanpoles der Ausgangslage hat. Die gnomonische Projektion  $1^g$  des Momentanzentrums  $1$  geht dann aus  $P^g$  durch jene Drehung hervor, welche  $P$  nach  $1$  überführt. Stellt  $A_1^g$  die gnomonische Projektion des Punktes  $A_1$  dar, so ist  $n^g = (1^g A_1^g)$  die gnomonische Projektion des sphärischen Polstrahles  $n$  durch  $A_1$ . Das gnomonische Bild  $t_1^g$  der Tangentenrichtung der Bahnkurve des Punktes  $A_1$  ist daher der Antipol von  $n^g$  bezüglich des Distanzkreises (Satz 6.2). Der Grundriß  $t'$  der Tangente ist daher parallel zu  $O^g t_1^{g'}$ , ihr Aufriß  $t''$  parallel zu  $U^g t_1^{g'}$ .

#### 11.4.2.1 Sphärische Kreisevolvente

Ist der Gangkreis ein Großkreis und liegt der mitgeführte Punkt auf seiner Peripherie, so liegt eine sphärische Kreisevolvente vor. Da die Ebene des Gangkreises immer die Momentanachse enthält, sind die Bahntangenten aller ihrer Punkte immer auf diese Ebene normal und daher in jedem Moment gegen eine zur Achse des festen Kegels orthogonale Eben gleich geneigt.

**Satz 11.4.2.1.1:** *Dies sphärischen Kreisevolventen sind Böschungslinien*

### 11.4.3 Krümmungsachse

Um die *Krümmungsachse* von  $A_1$  zu ermitteln, ist es zweckmäßig, den zugehörigen Momentanpol  $1$  durch Drehung um eine erstprojizierende Achse durch  $N$  nach  $P$  und gleichzeitig  $A_1$  nach  $\bar{A}_1$  zu bringen. Die Kugeltangentialebene  $\tau$  in  $P$  erscheint dann zweitprojizierend als Gerade  $\tau''$ . Projiziert man die Krümmungsmittelpunkte  $N$  und  $M$  von Rast- und Gangpolkreis sowie  $\bar{A}_1$  aus  $O$  auf diese Tangentialebene, so erhält man in  $N^g$ ,  $M^g$ ,  $A_1^g$  die gnomonischen Pro-

<sup>4</sup> Ein der Bewegung unterworfenen Punkt allgemeiner Lage ginge durch die beschriebene Konstruktion aus der Ausgangsstellung  $Q_0^0$  in die Lage  $\bar{Q}_1^0$  über ( $\angle Q_0^0 M_1^0 \bar{Q}_1^0 = \angle A_0^0 M_1^0 \bar{A}_1^0 = \angle P' M_1^0 \bar{1}$ )

jektionen dieser Punkt auf  $\tau$ , deren Aufrisse sich unmittelbar im Schnitt der betreffenden Projektionsstrahlen mit  $\tau$  ergeben.  $\tau$  klappen wir in die zweite Bildebene, wobei man die geklappte Lage  $\bar{A}_1^g$  der gnomonischen Projektion von  $\bar{A}_1$  findet, wenn man den dem Grundriß entnommenen Abstand von  $\bar{A}_1^g$  von der Reißachse normal zu  $\tau$  von  $\bar{A}_1^g$  aus abträgt. Die Ermittlung der gnomonischen Projektion von  $\bar{K}_{A_1}^g$ , der gesuchten Krümmungsmittle erfolgt nach Fig. 10.12.3 (Konstruktion von EULER-SAVARY), wobei  $N^g$  und  $M^g$  den Punkten  $R_p^g$  bzw.  $\bar{A}_1^g$  und  $\bar{K}_{A_1}^g$ , den Punkten  $X^g$  und  $K_X^g$  entsprechen. Nach Rückdrehung von  $\tau$  ergibt die Verbindung ( $\bar{K}_{A_1}^g O$ ) die gedrehte Lage  $\bar{k}_1$  der Krümmungssachse. Die Rückdrehung, welche  $\bar{A}_1$  wieder nach  $A_1$  bringt, führt  $\bar{k}_1$  in die gesuchte Lage  $k_1$  der Krümmungssachse über.

Der *Krümmungskreis* der Radlinie im Punkte  $A_1$  wird von der Normalebene aus diesem Punkt auf  $k_1$  aus der Kugel ausgeschnitten (in Fig. 11.2 nicht eingezeichnet).

## 11.5 Hüllkurven von Großkreisen

### 11.5.1 Punkt- und tangentialweise Konstruktion

Nach Kap. 10.4.3 ist die Hüllkurve eines Großkreises  $c_1$  gleich der Polarkurve der Bahn seines sphärischen Mittelpunktes  $B$ .

**Figur 11.3** Es seien (Fig. 11.3.1)  $a_1 = \pi/6$  der Radius des festen Kreises  $p_1$  (sphärischer Mittelpunkt  $M$ ),  $a_2 = \pi/2$  der Radius des rollenden Kreises  $p_2$  (sphärischer Mittelpunkt  $N$ ). Es werde die Hüllkurve jenes Großkreises  $c_1$  gesucht, welcher in der Ausgangslage die Polkurven im Momentanzentrum  $P$  unter dem Winkel  $\varepsilon = 70^\circ$  schneidet. Der Pol  $B$  von  $c_1$  muß daher auf dem mit dem Rollkreis konzentrischen Kreis  $p_3$  mit dem sphärischen Radius  $\varepsilon$  liegen. Da  $c_1$  außerdem in der Ausgangslage durch  $P$  gehen soll, befindet sich die Anfangslage  $B$  auch auf dem Großkreis mit dem Pol  $P$ . Die gesuchte Hüllkurve  $c$  ermitteln wir als Polarkurve der Bahn von  $B$ .

Die Ermittlung der Bahn von  $B$  erfolgt wie in Fig. 11.2. Wir drehen also den Rollkreis  $p_2$  um die Poltangente parallel zur Grundrißebene, wobei wir  $p_3$  mitnehmen. Die gedrehten Lagen  $p_2^0$  und  $p_3^0$  erscheinen im Grundriß konzentrisch, die gedrehte Anfangslage von  $B$  ist  $B_0$ . Lassen wir  $p_2$  auf  $p_1$  abrollen, bis etwa der Punkt 1 Momentanzentrum wird, so haben wir, (siehe Fußnote auf 4 auf S.97) den Bogen( $P1$ ) auf  $p_2$  von  $\bar{O}$  aus im angedeuteten Sinn bis nach  $\bar{1}$  aufzutragen und gewinnen so den Punkt  $\bar{B}_1^0$ . Dreht man  $p_2^0$  und  $p_3^0$  gemeinsam in ihre Ausgangslage zurück, so nimmt  $\bar{B}_1^0$  die Lage  $\bar{B}_1$  mit den beiden Rissen  $\bar{B}_1'$  und  $\bar{B}_1''$  an. Drehung um die erstprojizierende Achse durch  $M$  um den Winkel  $\angle P'M'1$  ergibt den Punkt  $B_1$  der von  $B$  beschriebenen Bahnkurve.

Die Bahntangente werde unter Anwendung der Abbildung von MAYOR-MISES bestimmt, deren Abbildungskonstante  $c$  wir gleich dem Radius des Kreises  $p_1$  wählen (Fig. 11.3.2). Nach Satz 5.1.2 haben die Erzeugenden des festen Polkegels Bildträger, welche denselben Kreis berühren. Hat man also nach Fig. 5.1 den Bildträger  $P_0^{m5}$  der Momentanachse ( $OP$ ) ermittelt, so erhält man die Bildträger  $1^m$  der Momentanachse ( $O1$ ), indem man  $P_0^m$  jener Drehung um  $O^m$  unterwirft, welche im Grundriß der Fig. 11.3.1  $P'$  nach  $1$  überführt. Gleichfalls nach Fig. 5.1 erhält man den Träger  $B_1^m$  des Kugelradius ( $OB_1$ ). Der Schnittpunkt  $v_1^m$  von  $B_1^m$  und  $1^m$  ist der Stellungspunkt der ( $OB_1$ ) und ( $O1$ ) verbindenden Normalebene der Bahn von  $B$ , die Antipolare  $t_1^m$  von  $v_1^m$  der Bildträger von der Bahntangente des Punktes  $B_1$ .

<sup>5</sup> Die Bildträger der Kugelhalbmesser werden immer so bezeichnet wie deren Endpunkte auf der Kugeloberfläche

Um den  $B_1$  entsprechenden Punkt  $H_1$  der Hüllkurve zu erhalten, hat man nach #10.105 auf die von  $(OB_1)$  und der Tangente in  $B_1$  aufgespannten Ebene  $\tau_1$  die Normale  $h_1$  zu errichten und diese mit der Kugeloberfläche in  $H_1$  zu schneiden. Der Stellungspunkt  $\tau_1^m$  der Ebene  $\tau_1$  ergibt sich im Schnitt der bereits bekannten Geraden  $t_1^m$  und  $B_1^m$ . Die Normalenrichtung zu  $\tau_1$  wird durch die Antipolare  $h_1^m$  von  $\tau_1^m$  (die zur Kontrolle durch  $v_1^m$  gehen muß) bezüglich des Abbildungskreises festgelegt. Um  $H_1$  aufzusuchen, ermitteln wir zunächst den Grundriß von  $h_1$ , in dem wir  $h_1'$  parallel zu  $h_1^m$  durch  $O'$  ziehen. Klappen wir die erstprojizierende Eben durch  $h_1$  um ihre erste Spur  $h_1'$  um, so erhält man einen Punkt der geklappten Lage  $h_1''$  dieser Geraden nach Fig. 5.1, indem man von  $O'$  aus auf  $h_1'$  die Abbildungskonstante  $c$  aufträgt und in deren Endpunkt den Abstand  $l$  von  $h_1^m$  und  $O^m$  normal zu  $h_1'$  aufträgt. Dann ergibt sich sofort die geklappte Lage  $H_1''$  von  $H_1$ , Mit deren Hilfe man  $H_1'$  und  $H_1''$  findet. Nach Satz 10.4.3.1 ist die Tangente in  $H_1$  parallel zu der in  $B_1$ , sie ist daher durch  $t_1^m$  festgelegt.

### 11.5.2 Spitzen der Hüllkurve

Den *Spitzen* der vom Großkreis  $c_1$  eingehüllten Kurve  $c$  entsprechen nach Satz 10.5.7.2 die *sphärischen Wendepunkte* ihrer Polarkurve. Zur Konstruktion dieser Wendepunkte bestimmen wir zunächst die gnomonische Projektion  $c^3$  der *sphärischen Wendelinie* (Kap. 10.5.6) auf die Tangentialebene im Momentanzentrum. Da  $c^3$  nach #10.159 nur von der Größe  $w$  #10.160 abhängt, diese aber wegen #10.151 während der ganzen Kreisrollung ihren Wert beibehält, sind alle Kurven  $c^3$  untereinander kongruent. Es genügt also, die Kurve  $c^3$  in der Tangentialebene des Momentanzentrums  $P$  der Ausgangsstellung zu konstruieren. Diese Tangentialebene erscheint in Fig. 11.3.1 zweitprojizierend (als Tangente an den Kugelumriß in  $P''$ ) und wir drehen sie um die durch  $P$  gehende 2. Hauptlinie parallel zur Aufrißebene. Die gnomonischen Projektionen  $M^g$  und  $N^g$  der Mittelpunkte des festen und des rollenden Kreises entsprechen den Punkten  $R_p^g$  und  $R_{p_1}^g$  der Fig. 10.12.2 (bei der von uns gewählten Annahme ist  $R_{p_1}^g = N_\infty^g$  ein Fernpunkt). Um die Größe  $w$  zu bestimmen, ermitteln wir zuerst den Kreis  $c^2$  #10.161 über der Strecke  $w$  als Durchmesser. Nach der Bemerkung am Ende von Kap. 10.5.1 sind die den Punkten  $X^g$  von  $c^2$  entsprechenden Punkte  $K_x^g$  Fernpunkte. Um daher einen beliebigen Punkt  $X^g$  auf  $c^2$  zu erhalten, wählen wir in der umgeklappten Tangentialebene eine beliebige Gerade, etwa  $(P''K_{x_\infty}^g)$ , und ermitteln nach dem Vorbild von Fig. 10.12.3 den dem Fernpunkt  $K_{x_\infty}^g$  entsprechenden Punkt  $X^g$  von  $c^2$ . Da dieser Kreis in  $P$  die Poltangente  $t_p$  berührt, ist er bestimmt und sein Durchmesser  $w$  bekannt. Zeichnen wir noch den Kreis vom Radius der Kugel mit dem Mittelpunkt  $P''$ , so können wir nach Fig. 10.14.2 und Fig. 10.13.2 die Kurve  $c^3$  konstruieren.

Wir haben nun jene Stellungen des Rollkreises  $p_2$  zu ermitteln, in welchen der Punkt  $B$  auf der zugehörigen Wendelinie zu liegen kommt. Man findet dem Winkel, um welche sich  $p_2$  dreht, wenn man die Wendelinie festhält und umgekehrt  $B$  so lange um  $N$  dreht, bis  $B$  auf der zum Anfangspol  $P$  gehörigen Wendelinie zu liegen kommt. Bei dieser Drehung beschreibt  $B$  den zum rollenden Kreis  $p_2$  konzentrische Kreis  $p_3$ . Sucht man die gnomonische Projektion  $p_3^g$  dieses Kreises, so so hat man den Verbindungskegel von  $p_3$  und  $O$  mit der Tangentialebene in  $P$  zu schneiden. Der sich ergebende Kegelschnitt  $p_3^g$  (in Fig. 11.3.1 eine Hyperbel, von der nur ein Ast eingezeichnet wurde) schneidet  $c^3$  in 6 Punkten, von denen in Fig. 11.3.1 vier reell sind und von denen  $\overline{W}_1^g$  und  $\overline{W}_2^g$  eingezeichnet wurden. Die beiden anderen liegen bezüglich  $(PN^g)$  symmetrisch. Rückprojektion dieser Punkte auf  $p_3$  ergibt  $\overline{W}_1$  und  $\overline{W}_2$ , wobei  $\overline{W}_2$  zunächst durch seinen Kugelgegenpunkt  $\widehat{\overline{W}}_2$  ersetzt wurde, um die Übersichtlichkeit, besonders im Grundriß der Fig. 11.3.1 zu erhöhen. In der zur Grundrißebenen parallelgedrehten Lage entsprechen den Punkten  $\overline{W}_1^g$  und  $\overline{W}_2^g$  auf  $p_3^g$  die Punkte  $\overline{P}_{w_1}^g$  und  $\overline{P}_{w_2}^g$  auf  $p_2^g$ . Macht man die Bögen

Bogen( $\overline{OP}_{W_1}$ ) und Bogen( $\overline{OP}_{W_2}$ ) auf  $p_2^0$  im angedeuteten Sinne gleich den Bögen Bogen( $P'P'_{W_1}$ ) und Bogen( $P'P'_{W_2}$ ) auf  $p'_1$ , so erhält man aufgrund der Konstruktion von MACK die Momentanzentren  $P_{W_1}$  und  $P_{W_2}$  jener Stellungen des bewegten Systems, in denen die Bahnkurve von  $B$  Wendepunkte  $W_1$  bzw.  $\hat{W}_2$  (dessen Gegenpunkt dann  $W_2$  ist) beschreibt. Um die diesen Punkten entsprechende Spitzen  $S_1$  und  $S_2$  der Polarkurve zu finden, hat man zunächst die Bildpunkte  $v_{W_1}^m, v_{W_2}^m$  (Fig. 11.3.2) der Bahnnormalebene von  $W_1$  und  $W_2$  als Schnittpunkte der Bildgeraden  $W_1^m$  und  $P_{W_1}^m$  bzw.  $W_2^m$  und  $P_{W_2}^m$  aufsuchen. Dies macht bei  $W_2^m$  keine Schwierigkeiten, wohl aber bei  $W_1^m$ , da sich die Verbindungslinie ( $O^*W_1^m$ ) im Aufriß der Fig. 11.3.1 wegen der benachbarten Lage dieser Punkte nicht mit der entsprechenden Genauigkeit ermitteln läßt. Es empfiehlt sich daher die Einführung eines Kreuzrisses (Rißachse 13) und mit dessen Hilfe sowie mit dem beibehaltenen Grundriß den Träger  $W_1^m$  zu ermitteln. Nach Fig. 5.1 hat man dazu von Punkt  $U_{12}$  zu dem um  $\pi/2$  verschwenkten Punkt  $U_{13}$  überzugehen. Die Antipolaren  $t_{W_1}^m, t_{W_2}^m$  von  $v_{W_1}^m$  und  $v_{W_2}^m$  bezüglich des Abbildungskreises stellen die Bilder der Wendetangenten bzw. der Spitzentangenten dar. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit  $W_1^m$  bzw.  $W_2^m$  ergeben die Stellungspunkte  $\tau_{W_1}^m$  bzw.  $\tau_{W_2}^m$ , deren Antipolaren  $S_1^m$  und  $S_2^m$  die Bilder jener Radien sind, welche aus der Kugeloberfläche die gesuchten Spitzen ausschneiden.

## 12 Sphärische Fußpunktkurve eines Kreises. Oktoide

### 12.1 Punktweise Konstruktion

Als *Fußpunktkurve eines Kugelpunktes P in bezug auf einen Kugelkreis c* (sphärischer Mittelpunkt K) bezeichnet man den Ort aller Punkte F, die man als Fußpunkte der sphärischen Lote q aus P auf die sphärischen Tangenten  $c_1$  von c erhält (Fig. 12.1). Figur 12.1

Da alle sphärischen Lote q auf den Großkreis  $c_1$  durch dessen Pol  $K_1$  gehen, ist q durch P und die jeweilige Lage von  $K_1$  bestimmt. Alle  $K_1$  erfüllen den zu c polaren Kugelkleinkreis  $p_1$ . Zur konstruktiven Ermittlung der Fußpunktkurve wählen wir c in einer zweitprojizierenden Ebene, den K und P verbindenden Kugelgroßkreis parallel zur Aufrißebene (Fig. 12.2.1). Die Anfangslage von  $c_1$  werde durch Wahl von  $K_{10}^m$  auf dem zweiten Kugelumriß festgelegt. Der zugehörige Fußpunkt V, der aus Symmetriegründen einen Scheitel der Kurve darstellt, läßt sich unmittelbar angeben. Figur 12.2

Um beliebige Fußpunkte F zu konstruieren, ist es zweckmäßig, eine neue Seiterißebene  $\pi_3$  (Rißachse 23) so einzuführen, daß die Ebene von c parallel zu  $\pi_3$  wird<sup>1</sup>. Bei der von uns gewählten Annahme  $\angle KOP = \pi/2$  liegt der Pol P auf dem dritten Umrißkreis. Die Kugelradien und Durchmessersebenen bilden wir mit Hilfe des Verfahrens von MAYOR-MISES auf eine zu  $\pi_3$  parallele Bildebene ab (Fig. 12.2.2). Die Bildgeraden der Radien bezeichnen wir wie deren Endpunkte auf der Kugeloberfläche, die Stellungspunkte der Durchmessersebenen wie die in ihnen liegenden Kugelgroßkreise.

Da die Erzeugenden des durch O und den Basiskreis  $p_2$  bestimmten Drehkegels gegen  $\pi_3$  alle gleiche Neigung haben, umhüllen deren Bilder nach Satz 5.1.2 einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $O^m$ , der durch das Bild  $K_{10}^m$  der Erzeugenden ( $OK_{10}$ ) festgelegt ist. Die Stellungspunkte  $c_1^m$  der Großkreise  $c_1$  erfüllen dann nach Satz 5.3.2 den zum genannten Kreis bezüglich des Abbildungskreises antipolaren Kreis. Das Bild von (OP) ist der  $O^m$  mit  $U_{23}$  verbindende Durchmesser  $P^m$  des Abbildungskreises. Um dem auf einer beliebigen sphärischen Tangente  $c_1$  liegenden Fußpunkt zu ermitteln, legen wir  $c_1$  bzw. dessen Pol  $K_1$  durch deren Bilder  $c_1^m$  und  $K_1^m$  fest. Der Stellungspunkt  $q^m$  des  $K_1$  und P verbindenden sphärischen Lotes q aus P auf c findet sich daher im Schnittpunkt von  $p^m$  und  $K_1^m$ . Der gesuchte Lotfußpunkt F hat als Schnittpunkt von  $c_1$  und q als Bildgerade  $F^m$  die Verbindung ( $q^m c_1^m$ ). Um den Raumpunkt F zunächst durch  $F''$  und  $F'$  festzulegen, ziehen wir durch  $O''$  die Parallele zu  $F^m$ , tragen auf ihr von  $O''$  aus den Radius c des Abbildungskreises ab und errichten im Endpunkt dieser Strecke eine Normale von der Länge  $l = F^m O^m$ . Dadurch erhalten wir die zu  $\pi_3$  parallelgedrehte Lage ( $O^{IV} F^{IV}$ ) des gesuchten Radius. Damit ergibt sich sofort  $F''$  und durch die gekennzeichneten Abstandsübertragungen Aufriß  $F''$  und Grundriß  $F'$  des Punktes F der Fußpunkteskurve. Da die ermittelte Kurve die Form einer Acht hat, nennt man sie *Oktoide*.

### 12.2 Tangentenkonstruktion

Um im Punkt F der Oktoide auch die *Tangente* zu zeichnen, denken wir uns die Kurve als *Bahnkurve* folgender sphärischen Bewegung ermittelt (Fig. 12.1): der von den beiden Großkreisen  $c_1$  und q gebildete starre rechte Winkel mit dem Scheitel F bewege sich so, daß der Schenkel  $c_1$  immer den Kreis c berührt und der andere Schenkel Q immer durch den festen Punkt P geht. Das sphärische Momentanzentrum Z dieser Bewegung liegt im Schnitt der Berührnormalen r von c und  $c_1$  und der Normalen s in P auf Q. Die Tangente f steht auf dem F und Z verbindenden Polstrahl n normal.

<sup>1</sup> Daß wir nicht gleich c parallel zu  $\pi_1$  wählten, hat seinen Grund darin, daß die in Fig. 12.2 gewählte Annahme bei der Behandlung der Oktoidenverzahnung in Kap. 14.2.1 auftritt

Zur konstruktiven Durchführung dieser Überlegung bedienen wir uns wieder der Abbildung von MAYOR-MISES (Fig. 12.2.2). Da die Ebene von  $r$  drittprojizierend ist, ist ihr Stellungspunkt nach Satz 5.3.3 der Fernpunkt von  $K_1^m$ , da  $K_1$  mit der Ebene von  $r$  inzidiert. Die durch  $c_1^m$  hindurchgehende Antipolare  $Q^m$  von  $q^m$  schneidet aus  $P^m$  den Stellungspunkt  $s^m$  der Ebene des Großkreises  $s$  aus. Die Verbindungslinie  $Z^m = (s^m r_\infty^m)$  ist das Bild des Momentanzentrums  $Z$ , der Stellungspunkt  $n^m$  des  $F$  mit  $Z$  verbindenden Großkreises ist der Schnittpunkt von  $F^m$  mit  $Z^m$ . Dessen Antipolare  $f^m$  endlich stellt das Bild der Tangentenrichtung in  $F$  dar. Zur Kontrolle müssen einander  $f^m, K_1^m$  und  $Q^m$  in einem Punkt schneiden, da, wie man leicht einsieht, die zugehörigen Raumrichtungen derselben Stellung angehören.  $f''$  ist parallel zu  $f^m$ ,  $f''$  parallel zur angegebenen Geraden durch  $U_{23}$  (vgl. Fig. 5.1).

Rückt  $F$  nach  $P$ , so geht die sphärische Sehne  $q$  in die sphärische Tangente der Oktoide in  $P$  über, deren Pol  $K_1$  von  $c_1$  nimmt die Lage  $K_{1P}$  ein. Dann ist die geradlinige Tangente  $f_P$  in  $P$  parallel zur Geraden  $(OK_{1P})$ . Daher stimmen deren Bilder  $K_{1P}^m = f_P^m$  überein, die sich wegen  $K_{1P}^m \perp P^m$  sofort angeben lassen. Da  $f_P$  im 2. und 3. Riß Profillage hat, muß man zur Festlegung dieser Geraden außer  $P$  noch einen weiteren Punkt  $l$  angeben. Man findet dessen 3. Riß  $l'''$  wenn man (siehe Fig. 5.1) auf  $f_P''$  von  $P''$  aus den Abstand  $l_P = f_P'' O''$  abträgt. Den Grundriß findet man durch Übertragung dieses Hilfspunktes. Einfacher erhält man  $f_P'$ , wenn man  $K_{1P}$  in Auf- und Grundriß einzeichnet.  $K_{1P}'$  ist der Endpunkt der Hauptachse der (in Fig. 12.2.1 nicht eingetragenen) Grundrißellipse von  $\rho_2$ .  $f_P'$  ist dann parallel zu  $(O'K_{1P}')$ .

### 12.3 Scheitelkrümmungskreis

Zuletzt möge noch der *Scheitelkrümmungskreis* der Oktoide im Scheitel  $V$  konstruiert werden. Da das Momentanzentrum der in Kap. 12.2 betrachteten Bewegung für  $F = V$  nach  $P$  fällt, verwenden wir die gnomonische Projektion in die zweitprojizierende Tangentialebene dieses Punktes, welche wir um deren 2. Hauptlinie  $s_2$  parallel zu  $\pi_2$  drehen. Die gnomonischen Projektionen  $K_\infty^g$  und  $K_{10}^g$  der Krümmungsmitten  $K$  und  $K_{10}$  von eingehüllter Kurve  $c$  und einhüllender Kurve  $c_1$  legen die Krümmungsverwandtschaft auf diesem Polstrahl fest, sodaß der Krümmungsmittelpunkt  $K_V^g$  zu  $V^g$  nach Fig. 10.10 ermittelt werden kann (man hat  $K_{10}^g$  mit  $A^g$ ,  $K_\infty^g$  mit  $K_A^g$ ,  $V^g$  mit  $X^g$  zu identifizieren). Die Gerade  $(OK_V^g)$  stellt dann die Krümmungsachse der Oktoide für  $V$  dar. Die Schmiegebene  $\sigma$  des Punktes  $V$  steht auf  $(OK_V^g)$  normal. Da sie in Fig. 12.2.1 zweitprojizierend ist, stellt ihr Aufriß  $\sigma''$  die Tangente an den Aufriß der Oktoide in  $V''$  dar. Wendet man Satz 1.7.2.2 auf den durch die Kurve gelegten erstprojizierenden Zylinder an, so folgt, daß der Grundriß  $M_1'$  des Schnittpunktes  $M_1$  der Krümmungsachse mit einer zu  $\pi_1$  parallelen Ebene durch  $V$  der Mittelpunkt des Scheitelkrümmungskreises des Grundrisses der Oktoide ist.

## 13 Das sphärische Gelenkviereck

### 13.1 Bezeichnungsweisen

Ein *sphärisches Gelenkviereck* ist jener sphärische Mechanismus, bei welchem von vier gelenkig miteinander verbundenen Großkreisbögen einer, der *Steg* MN, festgehalten wird (Fig. 13.1). Die gegenüberliegende Seite AB heißt *Koppel*, sie verbindet die Endpunkte A, B der beiden *Arme* MA und NB. Das mit AB mitgeführte System heißt *Koppelsystem*, jeder seiner Punkte X beschreibt eine *sphärische Koppelkurve*. Im übrigen gelten die Bezeichnungen der Figur 13.1. Wir beschränken uns darauf, die Abmessungen  $d, m, n, c$  des sphärischen Gelenkvierecks kleiner als  $\pi$  zu wählen.  $\varphi$  bezeichnen wir als *Antriebs-*,  $\psi$  als *Abtriebswinkel* des Gelenkvierecks.

Zwei Gelenkvierecke nennen wir *äquivalent*, wenn sie dieselbe Koppelbewegung erzeugen. So kann man in Fig. 13.1 den Punkt N durch seinen Gegenpunkt  $\hat{N}$  ersetzen. Das neu entstehende Gelenkviereck  $M\hat{N}AB$  stimmt mit dem gegebenen im Arm  $m$  und der Koppel  $c$  überein, während der neue Steg und der zweite Arm die Größen  $\hat{d} = \pi - d$  und  $\hat{n} = \pi - n$  annehmen. In ähnlicher Weise können wir das Gelenkviereck  $MNAB(d, m, n, c)$  durch die äquivalenten Vierecke  $M\hat{N}AB(\pi - d, \pi - m, n, c)$ ,  $MN\hat{A}B(d, \pi - m, n, \pi - c)$ ,  $MN\hat{A}B(d, m, \pi - n, \pi - c)$  ersetzen. Man erkennt, daß die von einem Eckpunkt ausgehenden Seiten des Gelenkvierecks durch ihre Supplemente ersetzt werden, wenn man zum betreffenden Gegenpunkt übergeht. Durch Kombination der genannten Möglichkeiten kann man immer ein zu einem gegebenen äquivalentes Gelenkviereck finden, bei dem höchstens eine Seite größer als  $\pi/2$  ist. Auf ein derartiges Viereck kann man den aus der ebenen Kinematik bekanntenn Satz von GRASHOF anwenden:

**Figur 13.1**

**Satz 13.1.1:** *Ein Gelenkviereck weist nur dann ein voll umlauffähiges Glied auf, wenn die Summe aus der größten und der kleinsten Gliedlänge kleiner als die Summe der beiden anderen Gliedlängen ist.*

Ist ein Arm voll umlauffähig, so nennen wir ihn *Kurbel*, sonst *Schwinge*. Erfüllt ein Gelenkviereck die GRASHOFsche Bedingung, so ergeben sich folgende Möglichkeiten:

1. Das kürzeste Glied ist ein Arm. Dieser Arm ist dann eine Kurbel, der andere eine Schwinge. Das Gelenkvierecke heißt *Kurbelschwinge*.
2. Das kürzeste Glied ist der Steg. Beide Arme sind Kurbeln (*Doppelkurbel*)
3. Das kürzeste Glied ist die Koppel, welche dann eines vollen Umlaufs gegenüber dem Steg fähig ist. Beide Arme sind Schwingen (*Doppelschwinge*)<sup>1</sup>.

Unter den Gelenkvierecken, die nicht die GRASHOFsche Bedingung erfüllen, sind insbesondere die *durchschlagenden Gelenkvierecke* hervorzuheben, bei denen die Summe zweier Seiten gleich der der beiden anderen ist.

### 13.2 Koppelbewegung

#### 13.2.1 Analytische Beschreibung

Die Ecken des Gelenkvierecks legen wir durch die vier in O angehefteten Einheitsvektoren  $\mathbf{m}^\circ$ ,  $\mathbf{a}^\circ$ ,  $\mathbf{b}^\circ$ ,  $\mathbf{n}^\circ$  fest (Fig. 13.2). Auf die von je zwei aufeinander folgenden Vektoren gebildeten Ebenen errichten wir in Normalenrichtung die Einheitsvektoren  $\mathbf{y}_d^\circ$ ,  $\mathbf{y}_m^\circ$ ,  $\mathbf{y}_c^\circ$ ,  $\mathbf{y}_n^\circ$ , die wir so orientieren, daß sie, gesehen von den Spitzen der Vektoren  $\mathbf{m}^\circ$ ,

**Figur 13.2**

<sup>1</sup> Eine ausführliche Behandlung der die GRASHOFsche Bedingung erfüllenden ebenen und sphärischen Gelenkvierecke bei MEYER zur CAPELLEN - DITTRICH - JANSSEN [1]

$\mathbf{a}^\circ, \mathbf{b}^\circ, \mathbf{n}^\circ$  durch positive Drehungen sukzessive ineinander übergehen. Nach Satz 2.2.3 ist daher<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_m^\circ &= (\cos \varphi + \mathbf{m}^\circ \sin \varphi) \circ \mathbf{y}_d^\circ \\ \mathbf{y}_c^\circ &= (\cos \mu + \mathbf{a}^\circ \sin \mu) \circ \mathbf{y}_m^\circ \\ \mathbf{y}_n^\circ &= (\cos \nu + \mathbf{b}^\circ \sin \nu) \circ \mathbf{y}_c^\circ \\ \mathbf{y}_d^\circ &= (\cos \psi + \mathbf{n}^\circ \sin \psi) \circ \mathbf{y}_n^\circ \end{aligned} \quad \# 13.1,2,3,4$$

Ebenso lassen sich die Vektoren  $\mathbf{m}^\circ, \mathbf{a}^\circ, \mathbf{b}^\circ, \mathbf{n}^\circ$  durch Drehungen um die Winkel  $m, c, n, d$  mit den Achsen  $\mathbf{y}_m^\circ, \mathbf{y}_c^\circ, \mathbf{y}_n^\circ, \mathbf{y}_d^\circ$  ineinander überführen

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^\circ &= (\cos m + \mathbf{y}_m^\circ \sin m) \circ \mathbf{m}^\circ \\ \mathbf{b}^\circ &= (\cos c - \mathbf{y}_c^\circ \sin c) \circ \mathbf{a}^\circ \\ \mathbf{n}^\circ &= (\cos n + \mathbf{y}_n^\circ \sin n) \circ \mathbf{b}^\circ \\ \mathbf{m}^\circ &= (\cos d - \mathbf{y}_d^\circ \sin d) \circ \mathbf{n}^\circ \end{aligned} \quad \# 13.5,6,7,8$$

Wählen wir ein Koordinatensystem so, daß die z-Achse mit  $\mathbf{m}^\circ$ , die y-Achse mit  $\mathbf{y}_d^\circ$  gleich orientiert ist und  $\mathbf{n}^\circ$  in der xz-Ebene liegt (Fig. 13.2), so ist

$$\mathbf{m}^\circ = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{y}_d^\circ = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \# 13.9$$

Wir können dann aus #13.1  $\mathbf{y}_m^\circ$  berechnen. Mit Hilfe dieses Vektors ermittelt man aus #13.5  $\mathbf{a}^\circ$ , wodurch vermöge #13.2  $\mathbf{y}_c^\circ$  bestimmt ist.  $\mathbf{b}^\circ$  ergibt sich dann aus #13.6. Man erhält so der Reihe nach

$$\mathbf{y}_m^\circ = \begin{Bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}^\circ = \begin{Bmatrix} \sin m \cos \varphi \\ \sin m \sin \varphi \\ \cos m \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{y}_c^\circ = \begin{Bmatrix} -\cos \mu \sin \varphi - \cos m \sin \mu \cos \varphi \\ \cos \mu \cos \varphi - \cos m \sin \mu \sin \varphi \\ \sin m \sin \mu \end{Bmatrix} \quad \# 13.10$$

$$\mathbf{b}^\circ = \begin{Bmatrix} (\sin m \cos c - \cos m \sin c \cos \mu) \cos \varphi + \sin c \sin \mu \sin \varphi \\ (\sin m \cos c - \cos m \sin c \cos \mu) \sin \varphi - \sin c \sin \mu \cos \varphi \\ \sin m \sin c \cos \mu + \cos m \cos c \end{Bmatrix} \quad \# 13.11$$

Lösen wir #13.8 nach  $\mathbf{n}^\circ$  auf, indem wir beide Seiten mit der zu  $(\cos d - \mathbf{y}_d^\circ \sin d)$  inversen Quaternion multiplizieren

$$\mathbf{n}^\circ = (\cos d + \mathbf{y}_d^\circ \sin d) \circ \mathbf{m}^\circ = \begin{Bmatrix} \sin d \\ 0 \\ \cos d \end{Bmatrix} \quad \# 13.12$$

so folgt aus #13.4

$$\mathbf{y}_n^\circ = (\cos \psi - \mathbf{n}^\circ \sin \psi) \circ \mathbf{y}_d^\circ = \begin{Bmatrix} \cos d \sin \psi \\ \cos \psi \\ -\sin d \sin \psi \end{Bmatrix} \quad \# 13.13$$

<sup>2</sup> Es liegt hier ein Sonderfall der von YANG - FREUDENSTEIN [1] angewendeten Methode vor

Aus #13.7 finden wir nun

$$\mathbf{b}^\circ = (\cos n - \mathbf{y}_n^\circ \sin n) \circ \mathbf{n}^\circ = \begin{Bmatrix} \cos n \sin d - \sin n \cos d \cos \psi \\ \sin n \sin \psi \\ \cos n \cos d + \sin n \sin d \cos \psi \end{Bmatrix} \quad \# 13.14$$

Wir sind so zu zwei Darstellungen des Vektors  $\mathbf{b}^\circ$  gelangt. Vergleicht man die ersten und dritten Koordinaten von #13.11 und #13.14 und eliminiert aus den sich ergebenden Gleichungen den Winkel  $\psi$ , so erhält man die zwischen Antriebswinkel  $\varphi$  und dem Winkel  $\mu$  bestehende *Koppelbedingung*

$$\begin{aligned} & (\sin m \cos d - \cos m \sin d \cos \varphi) \sin c \cos \mu + \sin c \sin d \sin \varphi \sin \mu = \\ & = (\cos n - \cos m \cos d \cos c) - \sin m \sin d \cos c \cos \varphi \end{aligned} \quad \# 13.15$$

Wählt man an Stelle von #13.9  $\mathbf{m}^\circ = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ ,  $\mathbf{y}_m^\circ = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$  und ermittelt wieder  $\mathbf{b}^\circ$  auf zwei Arten,

so ergibt sich durch Vergleich der ersten und dritten Koordinate

$$\begin{aligned} & \sin n \sin \psi \sin \varphi + (\sin n \sin d - \sin n \cos d \cos \psi) \cos \varphi = \\ & = \sin m \cos c - \cos m \sin c \cos \mu \end{aligned} \quad \# 13.16$$

$$\cos n \cos d + \sin n \sin d \cos \psi = \cos m \cos c + \sin m \sin c \cos \mu \quad \# 13.17$$

Eliminiert man  $\mu$ , so erhält man den Zusammenhang zwischen Antriebswinkel  $\varphi$  und Abtriebswinkel  $\psi$ :

$$\begin{aligned} & (\cos m \sin d - \cos d \sin m \cos \varphi) \sin n \cos \psi + \sin m \sin n \sin \varphi \sin \psi = \\ & = (\cos c - \cos m \cos n \cos d) - \sin m \cos n \sin d \cos \varphi \end{aligned} \quad \# 13.18$$

Wählt man schließlich  $\mathbf{a}^\circ = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ ,  $\mathbf{y}_m^\circ = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$  und berechnet  $\mathbf{n}^\circ$  auf zwei Arten, so ergibt der

Vergleich der dritten Komponenten den Zusammenhang zwischen den Winkeln  $\varphi$  und  $\nu$ :

$$\cos c \cos n + \sin c \sin n \cos \nu = \cos m \cos d + \sin m \sin d \cos \varphi \quad \# 13.19$$

Totlagen  $\varphi_t$  des angetriebenen Armes treten ein, wenn  $\nu = 0$  oder  $\nu = \pi$  ist. Dann folgt aus #13.19 für die Größe  $\varphi_t$  des Antriebseinkels

$$\cos \varphi_t = \frac{\cos(c \mp n) - \cos d \cos m}{\sin d \sin m} \quad \# 13.20$$

Totlagen  $\psi_t$  des Abtriebswinkels treten ein bei  $\mu = 0$  oder  $\mu = \pi$ . Dann folgt durch Vergleich der dritten Koordinaten von #13.11 und #13.14

$$\cos \psi_t = \frac{\cos(c \mp m) - \cos d \cos n}{\sin d \sin n} \quad \# 13.21$$

### 13.2.2 Koppelbewegung

Zur Untersuchung der *Koppelbewegung* denken wir uns mit dem Steg ein *Koordinatensystem*  $O(x,y,z)$  verbunden (Fig.13.2), dessen  $z$ -Achse mit  $\mathbf{m}^\circ$ , dessen  $y$ -Achse mit  $\mathbf{y}_d^\circ$  gleichorientiert ist. Mit der Koppel verknüpfen wir ein Koordinatensystem  $O(x_3,y_3,z_3)$ , dessen  $z_3$ -Achse mit  $\mathbf{a}^\circ$  gleichorientiert, dessen  $y_3$ -Achse dem Vektor  $\mathbf{y}_c^\circ$  entgegengesetzt orientiert ist.

## Kapitel 13

Um die Lage eines mit dem bewegten System  $O(x_3, y_3, z_3)$  starr mitgeführten Punktes, der in diesem System durch den Ortsvektor  $\mathbf{x}$  dargestellt wird, im festen System auszudrücken, denken wir uns  $O(x, y, z)$  durch folgende Schritte nach  $O(x_3, y_3, z_3)$  übergeführt:

1. Drehung um die z-Achse durch den Winkel  $\varphi$  in die Lage  $O(x_1, y_1, z_1)$ , wobei  $y_1$  mit  $y_m^\circ$  gleichorientiert ist. Diese Drehung wird nach #9.9 durch

$$\mathbf{D}_\varphi = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \# 13.22$$

dargestellt.

2. Drehung um die  $y_1$ -Achse durch den Winkel  $m$ .  $O(x_1, y_1, z_1)$  geht nach  $O(x_2, y_2=y_1, z_2)$  über, wobei die  $z_2$ -Achse mit  $\mathbf{a}^\circ$  gleichorientiert ist. Dieser Drehung entspricht im System  $O(x_1, y_1, z_1)$  die Quaternion

$$\mathbf{D}_m = \cos \frac{m}{2} + \sin \frac{m}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \# 13.23$$

3. Schließlich wird  $O(x_2, y_2, z_2)$  um die  $z_2$ -Achse durch den Winkel  $-(\pi-\mu)$  in die Lage  $O(x_3, y_3, z_3=z_2)$  gedreht. Im System  $O(x_2, y_2, z_2)$  lautet die Drehquaternion

$$\mathbf{D}_\mu = \sin \frac{\mu}{2} - \cos \frac{\mu}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \# 13.24$$

Der Punkt  $\mathbf{x}$  von  $O(x_3, y_3, z_3)$  wird daher nach #9.7 bezüglich  $O(x_2, y_2, z_2)$  durch

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{D}_\mu \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}}_\mu \quad \# 13.25$$

bezüglich  $O(x_1, y_1, z_1)$  durch

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{D}_m \circ \mathbf{x}_2 \circ \tilde{\mathbf{D}}_m \quad \# 13.26$$

und schließlich im festen System durch

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D}_\varphi \circ \mathbf{x}_1 \circ \tilde{\mathbf{D}}_\varphi = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}} \quad \# 13.27$$

dargestellt. Hierin ist

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_\varphi \circ \mathbf{D}_m \circ \mathbf{D}_\mu = \cos \frac{m}{2} \sin \frac{\varphi + \mu}{2} \begin{Bmatrix} \sin \frac{m}{2} \cos \frac{\varphi - \mu}{2} \\ \sin \frac{m}{2} \sin \frac{\varphi - \mu}{2} \\ \cos \frac{m}{2} \cos \frac{\varphi + \mu}{2} \end{Bmatrix} \quad \# 13.28$$

wobei  $\varphi$  und  $\mu$  durch die Koppelbedingung zusammenhängen. Auflösung von #13.27 in Koordinaten ergibt in

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (-\cos m \cos \mu \cos \varphi + \sin \mu \sin \varphi)x + (\cos m \sin \mu \cos \varphi + \cos \mu \sin \varphi)y + \sin m \cos \varphi \cdot z \\ \bar{y} &= -(\cos m \cos \mu \sin \varphi + \sin \mu \cos \varphi)x + (\cos m \sin \mu \sin \varphi - \cos \mu \cos \varphi)y + \sin m \sin \varphi \cdot z \quad \# 13.29 \\ \bar{z} &= \sin m \cos \mu \cdot x \quad - \sin m \sin \mu \cdot y \quad + \cos m \cdot z \end{aligned}$$

die Darstellung der Bahn  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  des mit dem Koppelsystem mitgeführten Punktes  $(x, y, z)$ .

13.2.3 Momentanachse

Durch Differentiation nach  $\varphi$  folgt aus #13.28

$$\dot{\mathbf{D}} = \frac{1+\dot{\mu}}{2} \cos \frac{m}{2} \cos \frac{\varphi+\mu}{2} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-\dot{\mu}}{2} \sin \frac{m}{2} \sin \frac{\varphi-\mu}{2} \\ -\frac{1-\dot{\mu}}{2} \sin \frac{m}{2} \cos \frac{\varphi-\mu}{2} \\ \varphi \\ \frac{1+\dot{\mu}}{2} \cos \frac{m}{2} \sin \frac{\varphi+\mu}{2} \end{array} \right\} \quad \# 13.30$$

worin  $\dot{\mu} = \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} = \frac{\sin m \cot c \sin \varphi - (\cos m \sin \varphi \cos \mu + \cos \varphi \sin \mu)}{\sin \varphi \cos \mu - (\sin m \cot d - \cos m \cos \varphi) \sin \mu}$  # 13.31

sich aus der Ableitung der Koppelbedingung #13.15 ergibt. Nach #10.23 ist der Vektor in Richtung der Momentanachse, bezogen auf das feste System

$$\bar{\omega} = 2\dot{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mu} \sin m \cos \varphi \\ \dot{\mu} \sin m \sin \varphi \\ 1 + \dot{\mu} \cos m \end{array} \right\} \quad \# 13.32$$

bezogen auf das bewegte System nach #10.18

$$\bar{\omega}' = 2\tilde{\mathbf{D}} \circ \dot{\mathbf{D}} = \left\{ \begin{array}{l} \sin m \cos \mu \\ -\sin m \sin \mu \\ \dot{\mu} + \cos m \end{array} \right\} \quad \# 13.33$$

13.3 Das Kardangelenk

13.3.1 Eigenschaften. Analytische Behandlung

Einen wichtigen Sonderfall des allgemeinen Gelenkvierecks stellt das *Kardangelenk* (*Kreuzgelenk*) dar. Es dient dazu, eine Drehung um eine Welle auf eine andere, die sie unter einem (i.a. kleinen) Winkel  $\sigma$  schneidende Welle zu übertragen. (Fig. 13.3). Jedem Kardangelenk entspricht als *sphärisches Ersatzgetriebe* (Fig. 13.4) ein Gelenkviereck mit den speziellen Abmessungen  $d = \pi - \sigma$ ,  $m = \pi/2$ ,  $n = \pi/2$ ,  $c = \pi/2$ . Ist  $c \neq \pi/2$ , so spricht man von einem *schiefen Kardangelenk*. Es ist häufig zweckmäßig, das Ersatzgetriebe

MABN gegen das äquivalente Getriebe MAB $\hat{N}$  mit  $\hat{d} = \sigma$  auszutauschen. Figuren 13.3, 13.4

Beim schiefen Kardangelenk beschreiben die Endpunkte A,B der Koppel Großkreise mit den Polen M,N (Fig. 13.5). Man kann daher die Punkte a,b durch Schieber auf Großkreisen führen. Die schiefe Kardanbewegung ist daher das Analogon zur Ellipsenbewegung der Ebene. Der Schnittpunkt c der zu den Polen A,B gehörenden Äquatorkreise ist der Pol der Koppel (Fig. 13.6). Da die genannten Äquatorkreise immer durch die Endpunkte M,N des Steges gehen, erscheint der Bogen(MN) stets unter dem konstanten Winkel  $\pi - c$ . C beschreibt also auf der Kugel die *isoptische Kurve* des Bogens(MN), welche im Falle des geraden Kardangelenks ( $c = \pi/2$ ) zur *orthoptischen Kurve* wird. Figuren 13.5, 13.6

Durch Spezialisierung der Formeln #13.18 und #13.25 für das schiefe Kardangelenk ergibt sich für den Zusammenhang zwischen Antriebswinkel  $\varphi$  und Abtriebswinkel  $\psi$

$$-\cos d \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi = \cos c \quad \#13.34$$

sowie für die Koppelbedingung

$$\cot d \cos \mu + \sin \varphi \sin \mu = -\cot c \cos \varphi \quad \#13.35$$

Aus #13.32 findet man die Gleichung des festen Polkegels

$$\begin{aligned} [xz \cot d - (x^2 + y^2) \cot^2 d - y^2]^2 = \\ = [(x^2 + y^2)(z - x \cot d)^2 + y^2(z \cot d + x)^2] \cot^2 c \end{aligned} \quad \# 13.36$$

aus #13.33 die des Gangkegels, bezogen auf das bewegte System

$$\begin{aligned} [(x'^2 + y'^2) \cot^2 c - x' z' \cot c + y'^2]^2 = \\ = [y'^2(z' \cot c + x')^2 + (x'^2 + y'^2)(z' - x' \cot c)^2] \cot^2 d \end{aligned} \quad \# 13.37$$

Die vom Pol der Koppel beschriebene Kurve, also die zum Winkel  $\pi - c$  gehörige isoptische Kurve des Steges, ergibt sich aus #13.29, wenn man für die Koordinaten des mitgenommenen Punktes  $(0, 1, 0)$  wählt. Der Projektionskegel dieser Kurve aus dem Kugelmittelpunkt hat die Gleichung

$$y^2(x^2 + y^2 + z^2) \cot c = [xz - \cot d(x^2 + y^2)]^2 \quad \# 13.38$$

die isoptischen Kurven eines Punktepaars der Kugel (die den Peripheriewinkelkreisen der Ebene entsprechen) sind also von der 4. sphärischen Ordnung.

Beträchtliche Vereinfachungen ergeben sich für das gerade Kardangelenk ( $c = \pi/2$ ).

Der Zusammenhang zwischen An- und Abtriebswinkel reduziert sich auf

$$\tan \psi = \cos d \cot \varphi \quad \# 13.39$$

die Koppelbedingung auf

$$\cot \mu = -\tan d \sin \varphi \quad \# 13.40$$

Der feste Polkegel

$$xz \cot d - (x^2 + y^2) \cot^2 d - y^2 = 0 \quad \# 13.41$$

ist von 2. Ordnung, der bewegte Polkegel

$$y'^4 = \cot^2 d [x'^2 y'^2 + (x'^2 + y'^2) z'^2] \quad \# 13.42$$

von 4. Ordnung. Die Bahnkurven des Poles der Koppel, also die orthoptische Kurve des Steges (die dem THALESkreis der Ebene entspricht) wird vom Kegel 2. Ordnung

$$xz = \cot d (x^2 + y^2) \quad \# 13.43$$

aus der Kugel ausgeschnitten.

### 13.4 Konstruktive Behandlung des sphärischen Gelenkvierecks

Die konstruktive Behandlung des sphärischen Gelenkvierecks möge am Beispiel des schiefen Kardangelenks mit den Abmessungen  $d = 40^\circ$ ,  $m = n = 90^\circ$ ,  $c = 60^\circ$  dargetan werden. Es ist zweckmäßig, sich der stereographischen Projektion zu bedienen (Fig. 13.7.1). Legt man den Stegendpunkt  $M$  in den Kugelnordpol und klappt man den  $M$  und  $N$  verbindenden Großkreis um seine Spur in den Grundkreis  $g$ , so gelangen  $M$  und  $N$  nach  $M^\circ$  und  $N^\circ$ . Wobei  $\angle M^\circ O N^\circ = d$  ist. Durch Projektion aus dem Südpol, dessen Rückschlag in  $S^\circ$  zu liegen kommt, ergeben sich die stereographischen Bilder  $M^s$  und  $N^s$ . Der Bahnkreis des Punktes  $A$  fällt mit dem Grundkreis zusammen, der Bahnkreis  $k_B$  von  $B$  ist der zum Pol  $N$  gehörige Großkreis und hat das nach Fig. 7.4 ermittelte Bild  $k_B^s$  mit dem Mittelpunkt  $Z_B^c$ . In der Anfangsstellung (Antriebswinkel  $\varphi = 0$ ) hat der Punkt  $A$  die Lage  $A_0$ . Der

Koppelendpunkt  $B_0$  liegt dann auf dem Kugelkleinkreis  $\bar{k}_{B_0}$  mit dem sphärischen Mittelpunkt  $A_0$  und dem sphärischen Radius  $c$ , der in der gezeichneten Umklappung als Strecke  $\bar{k}_{B_0}$  erscheint. Die stereographische Projektion  $\bar{k}_{B_0}^s$  ergibt sich nach Fig. 7.7 durch Ermittlung des Mittelpunktes  $\bar{Z}_{B_0}^c$  und eines Durchmesserendpunktes. Die Anfangsstellung des Gelenkvierecks ist daher durch die Projektionen  $M^s N^s A_0^s B_0^s$  bestimmt, wobei  $B_0^s$  sich als ein Schnittpunkt der beiden Ortslinien  $k_B^s$  und  $\bar{k}_{B_0}$  ergibt. Der den Antrieb bildende Arm  $MA_0$  erscheint, da seine Ebene stets durch den Südpol geht, immer als Radius des Grundkreises, der Steg projiziert sich aus eben diesem Grunde in die Strecke  $M^s N^s$ . Die Koppel  $A_0 B_0$  sowie die Kurbel  $N_0 B_0$  haben als Bilder die (nicht eingezeichneten) Gegenpunktkekreise  $(A_0^s B_0^s)$  bzw.  $(N_0^s B_0^s)$ . Bewegt sich das Gelenkviereck, so beschreiben die Punkte  $A^s$  und  $B^s$  den Grundkreis  $g$  bzw. den Kreis  $k_B^s$ . Das Bild  $\bar{k}_B^s$  des zweiten Ortskreises  $\bar{k}_B$  für  $B$  verdreht sich dabei mit unverändertem Radius um  $O$ . Der zum Antriebswinkel  $\varphi$  gehörige Kreis  $\bar{k}_B^s$  mit dem Mittelpunkt  $Z_B^c$  schneidet aus  $k_B^s$  die entsprechende Lage  $B^s$  aus.

Um die Koppel  $A^s B^s$  darzustellen, haben wir über dem Grundkreisdurchmesser  $OA^s$  den  $B^s$  enthaltenden Gegenpunktkeis (Mittelpunkt  $Z_K^c$ ) zu zeichnen. Da der den Arm  $N^s B^s$  repräsentierende Gegenpunktkeis mit  $N^s$  auch den bezüglich  $g$  antipolaren Punkt  $\hat{N}^s$  enthalten muß, liegt sein Mittelpunkt  $z_n^c$  auf der Symmetralen  $m_n$  der Strecke. Da  $\hat{N}^s$  häufig unerreichbar sein wird, wird man sich unmittelbar nach Fig. 7.4 den Mittelpunkt  $Z_{n_0}^c$  der Strecke  $N^s \hat{N}^s$  beschaffen. Wegen der Winkeltreue der stereographischen Projektion lassen sich die Winkel  $\psi$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  unmittelbar in wahrer Größe ablesen.

### 13.4.1 Momentanzentrum. Rastpolkurve

Der Schnittpunkt der beiden Arme  $(M^s A^s)$  und  $(N^s B^s)$  ergibt das stereographische Bild  $P^s$  des *sphärischen Momentanzentrums* (Fig. 13.7.2). Um die Poltangente zu finden, hat man nach Fig. 10.11 die Koppel  $(A^s B^s)$  und den Steg  $(M^s N^s)$  im Hilfspunkt  $H^s$  zu schneiden, da die Punkte  $M$  und  $N$  die sphärischen Krümmungsmitten  $K_A$  und  $K_B$  der Kreisbahnen von  $A$  und  $B$  sind. Verbindet man  $P^s$  mit  $H^s$  durch den Gegenpunktkeis  $p^s$ , so schließt die Poltangente  $t_p^c$  mit dem Arm  $N^s B^s$  den entgegengesetzten Winkel ein wie  $p^s$  mit  $(M^s A^s)$

**Figur 13.7.2**

### 13.4.2 Gangpolkurve

Die *Gangpolkurve* ermittelt man zweckmäßig durch Heranziehung der *Umkehrbewegung*. Betrachtet man in der in Fig. 13.7.2 hervorgehobenen Stellung  $A^s B^s$  als Steg eines neuen Gelenkvierecks mit der Koppel  $N^s M^s$ , so ist dessen Rastpolkurve die Gangpolkurve des ursprünglichen Gelenkvierecks in der betrachteten Lage.

Bei der Umkehrbewegung beschreibt  $M$  den zum Pol  $A$  gehörigen Großkreis  $k_{1M}$ , dessen stereographische Projektion  $k_{1M}^s$  in den zu  $(A^s O)$  orthogonalen Grundkreisdurchmesser fällt.  $N^s$  beschreibt den Gegenpunktkeis  $k_{1N}^s$ , das Bild des Großkreises mit dem Pol  $B$ . Da  $k_{1N}^s$  auch  $N^s$  enthalten muß, ergibt sich sein Mittelpunkt  $Z_{1N}^c$  im Schnitt von  $m^n$  und  $(Ob^s)$ .

Wählen wir einen Punkt  $M_1^s$  beliebig auf  $k_{1M}^s$ , so kommt der Rückschlag des zugehörigen Kugelpunktes nach  $M_1^0$ , der Südpol nach  $S_1^0$ .  $N$  liegt dann auf dem Kugelkleinkreis  $\bar{k}_{1N}$  um  $M_1$  mit dem sphärischen Radius  $m$ , der sich in der eingezeichneten Umklappung projizierend als Strecke  $\bar{k}_{1N}^0$  abbildet. Dessen Projektion hat (vgl. Fig. 7.7) als Mittelpunkt die Projektion  $\bar{Z}_{1N}^c$  der Spitze  $\bar{Z}_{1N}$  des der Kugel entlang  $\bar{k}_{1N}$  angeschriebenen Kegels. Im Schnitt von  $k_{1N}^s$  und  $\bar{k}_{1N}^s$  findet sich die Projektion des  $M_1^s$  entsprechenden Punktes. Im Schnitt der  $A^s$  und  $M_1^s$  bzw.  $B^s$

und  $N_1^s$  verbindenden Gegenpunktekreise ergibt sich der Pol  $P_1^s$  als gewünschter Punkt der Gangpolkurve. Die Mittelpunkte aller durch  $A^s$  gehenden Gegenpunktekreise liegen auf  $k_M^s$ , die der Gegenpunktekreise durch  $B^s$  auf der Steckensymmetralen  $m_b$  von  $B^s$  und seinem Anti-inversen  $\hat{B}^s$ , die zur Kontrolle durch  $Z_n^c$  gehen muß (Fig. 13.7.1).

### 13.4.3 Koppelkurve. Krümmungskreis

Es werde nun die *Koppelkurve* jenes Punktes  $C$  bestimmt, dessen Lage im Koppelsystem durch den Winkel  $\alpha = -30^\circ$  und den Bogen  $(AC) = b = 45^\circ$  gegeben sei (Fig. 13.1). Das Bild  $A^s C^s$  der Seite  $AC$  des Koppeldreiecks liegt auf jenem Gegenpunktekreis  $k_C^c$  mit dem Mittelpunkt  $Z_C^c$ , welcher die Koppel  $A^s C^s$  (Mittelpunkt  $Z_K^c$ ) unter dem Winkel  $\alpha$  schneidet. Dann ist  $\angle Z_K^c A^s Z_C^c = \alpha$  (Fig. 13.7.1). Das Bild  $Q^s$  des Poles dieses Kreises ermitteln wir nach dem Vorbild der Fig. 7.4. Mit dessen Hilfe können wir nach Fig. 7.6 den Bogen  $b$  auf  $k_C^c$  von  $A^s$  bis  $C^s$  auftragen. Die Tangente (Fig. 13.7.2) an die Bahnkurve des Punktes  $C$  steht (s. Fig. 10.2) auf die sphärische Normale orthogonal. In dem  $C^s$  und  $P^s$  verbindenden Gegenpunktekreis  $o^s$  mit dem Mittelpunkt  $Z_o^c$  haben wir das Bild dieser sphärischen Normalen vor uns. Der Radius  $t^c = C^s Z_o^c$  stellt also die Tangente an die Koppelkurve im Punkt  $c^s$  dar.

Um den Krümmungskreis der Koppelkurve im Punkte  $C^s$  zu konstruieren (Fig. 13.7.2), bedienen wir uns der in Fig. 10.11.1 dargestellten Konstruktion von BOBILLIER. Wir haben danach den Winkel der Poltangente  $t_p^c$  mit dem Polstrahl ( $P^s A^s$ ) vom Polstrahl ( $P^s C^s$ ) aus abzutragen. Der auf diese Weise bestimmte sphärische Polstrahl  $p_1^s$  schneidet ( $A^s C^s$ ) im Hilfspunkt  $H_1^s$ . Die Verbindung von  $H_1^s$  mit der Krümmungsmitte  $M^s$  von  $A^s$  schneidet aus dem Polstrahl  $O^s$  das Bild  $K_C^c$  des sphärischen Krümmungsmittelpunktes aus. Der Mittelpunkt  $Z_{KC}^c$  des Bildes des Krümmungskreises liegt einerseits auf der Normalen zu  $t^c$  in  $C^s$ , andererseits auf dem Durchmesser  $OK_C^c$  des Grundkreises.

## 13.5 Die Taumelscheibe

### 13.5.1 Definition

Einen weiteren Spezialfall des sphärischen Gelenkvierecks stellt das *Taumelscheibengetriebe* dar (Fig. 13.8). Bei diesem Mechanismus beschreibt die Achse einer Scheibe einen Drehkegel, während ein Punkt  $B$  der Scheibe in einer Ebene geführt wird, die meistens die Achse des genannten Drehkegels enthält. Von  $B$  kann man die oszillierende Bewegung eines Kolbens ableiten. Fig. 13.9 zeigt das *sphärische Ersatzgetriebe* des Taumelscheibengetriebes. Es ist dies ein spezielles sphärisches Gelenkviereck mit den Abmessungen  $d = n = c = \pi/2$ . Die Koppelbedingung #13.15 reduziert sich auf die Beziehung

$$\tan \mu = \cos m \cot \varphi \quad \# 13.44$$

der Zusammenhang #13.18 zwischen Antriebs- und Abtriebswinkel auf

$$\cot \psi = -\tan m \sin \varphi \quad \# 13.45$$

Der feste Polkegel #13.32

$$z^2(x^2 + y^2) = y^4 \tan^2 m \quad \# 13.46$$

ist im vorliegenden Fall von der 4. Ordnung, der Gangkegel #13.33, bezogen auf das bewegte System

$$z'^2(x'^2 + y'^2) = y'^4 \tan^2 m \quad \# 13.47$$

ist gleichfalls von 4. Ordnung und zum festen Kegel kongruent.

### 13.5.2 Bahn eines Punktes

Zur Darstellung der *Bahn eines Punktes*  $C$  der Taumelscheibe bedienen wir uns des Auf- und Grundrißverfahrens. Die Achse  $\hat{M}\hat{M}$  der Taumelscheibe sei erstprojizierend., der Steg  $MN$  des sphärischen Ersatzgetriebes liege in einer Profilebene, der Bahnkreis des Punktes  $B$  fällt dann mit dem zweiten Umrißkreis der Kugel zusammen (Fig. 13.10.1). Als Abmessungen wählen wir  $d = r = c = \pi/2$ ,  $m = 50^\circ$ , der mitgeführte Punkt  $C$  der Taumelscheibe habe im Koordinatensystem der Koppel die Polarkoordinaten  $\alpha = -135^\circ$ ,  $b = 90^\circ$  (vgl. Fig. 13.1). Die Konstruktion des Punktes  $C$  werde in der dem Antriebswinkel  $\varphi = 60^\circ$  entsprechenden Lage durchgeführt.

**Figur 13.10**

Zunächst legen wir den Bahnkreis des Punktes  $A$ , der im Aufriß projizierend, im Grundriß in wahrer Größe erscheint, durch seinen sphärischen Radius  $m$  fest. Durch den Antriebswinkel  $\varphi$  ist  $A$  selbst bestimmt. Die Taumelscheibe ist der zu  $(AO)$  normale Kugelgroßkreis. Dreht man die Taumelscheibe um ihre 1. Spur in die Grundrißebene, so überdeckt sie den ersten Umrißkreis der Kugel und der Punkt  $B$  gelangt in die Lage  $B_0$ . Durch Abtragen von  $\alpha$  erhält man die gedrehte Lage  $C_0$  des Koppelpunktes  $C$ . Rückdrehung ergibt Grundriß  $C'$  und Aufriß  $C''$  der dem Antriebswinkel  $\varphi$  entsprechenden Lage von  $C$ .

### 13.5.3 Bahntangente

Zur Ermittlung der *Bahntangente* von  $C$  bestimmen wir die momentane Drehachse  $d$ . Sie ergibt sich als Schnittgerade der Normalebenen  $(AOM)$  bzw.  $(BON)$  der von den Koppelpunkten  $A$  und  $B$  beschriebenen Kreisbahnen. Da  $(AOM)$  erstprojizierend,  $(BON)$  zweitprojizierend ist, wird  $d' = O'A'$  und  $d'' = O''B''$ . Die Verbindungsebene der Momentanachse  $d$  mit  $C$  stellt die Bahnnormalebene dieses Punktes dar. Die gesuchte Bahntangente ist normal zu dieser Ebene.

### 13.5.4 Krümmungsachse. Krümmungskreis

Um die Krümmungsachse  $k_c$  der Bahnkurve des Koppelpunktes  $C$  zu ermitteln, bedienen wir uns der Konstruktion von BOBILLIER (Kap. 10.5.3), die wir nach Fig. 10.11 mit Hilfe der gnomonischen Projektion ausführen. Zu diesem Zweck machen wir die Momentanachse  $d$  durch Einführung zweier Rißachsen (23) und (34) projizierend und übertragen  $O$ , die die Krümmungsverwandtschaft festlegenden Bestimmungsstücke  $A, M$ ;  $B, N$ , sowie den Punkt  $C$  in diese Risse. Nach dem Vorbild von Fig. 6.1 legen wir in Fig. 13.10.2 durch Wahl von  $O^g$  und  $U^g$  eine gnomonische Projektion fest, deren Bildebene zur 4. Bildebene von Fig. 13.10.1 parallel ist. Die Projektion des sphärischen Momentanzentrums fällt nach  $O^g$ , während  $A^g, M^g, B^g, N^g$  als Schnittpunkte der zu  $(OA)$ ,  $(OM)$ ;  $(OB)$ ,  $(ON)$  parallelen Geraden durch  $U^g$  mit der Bildebene die Krümmungsverwandtschaft festlegen. Die Punkte  $M^g$  und  $N^g$  entsprechen als Bilder der sphärischen Krümmungsmitten der Kreisbahnen von  $A$  und  $B$  den Punkten  $K_s^g$  und  $K_B^g$  der Fig. 10.11. Der Schnittpunkt  $H^g$  von  $(A^gB^g)$  und  $(M^gN^g)$  bestimmt mit  $P^g$  die Achse  $p^g$ . Die Abtragung des in Fig. 10.11.2 gekennzeichneten Winkels  $\angle p^g(O^gB^g)$  von  $(O^gA^g)$  aus bestimmt die Poltangente  $t_p^g$ . Trägt man diesen Winkel von  $(O^gC^g)$  aus ab, so erhält man die neue Achse  $p_1^g$  durch  $O^g$ . Aus dieser Geraden schneidet  $(A^gC^g)$  den Hilfspunkt  $H_1^g$ , dessen Verbindung mit  $M^g$  aus  $(O^gC^g)$  die gnomonische Projektion  $K_c^g$  des sphärischen Mittelpunktes  $K_c$  der Bahn von  $C$  ausschneidet. Den 3. und 4. Riß  $k_c''$  bzw.  $k_c^{IV}$  der Krümmungsachse findet man in den angedeuteten Parallelen von Fig. 13.10.1 und Fig. 13.10.2. Der Krümmungskreis  $c$  der Bahnkurve wird von der Normalebene durch  $C$  auf  $k_c$  aus der Kugel ausgeschnitten.

# 14 Verzahnung von Kegelrädern

## 14.1 Prinzipielles

Es sei eine gleichmäßige Drehung um eine Achse  $m$  auf eine andere, sie in  $O$  schneidende Achse  $n$  zu übertragen (Fig. 14.1). Schneidet man beide Achsen mit einer Kugel mit dem Mittelpunkt  $O$ , so bestimmen sie auf der Kugeloberfläche zwei Punkte  $M$  und  $N$ , die Mittelpunkte zweier rotierenden sphärischen Systeme  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$ , welche gegen ein als fest betrachtetes sphärisches System  $\Sigma_0$  (etwa repräsentiert durch den  $M$  und  $N$  verbindenden Großkreis, den *Steg*), die konstanten Winkelgeschwindigkeiten  $\bar{\omega}_{10}$  bzw.  $\bar{\omega}_{20}$  besitzen. Die relative Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}_{21}$  von  $\Sigma_1$  gegen  $\Sigma_2$  ist dann wegen #10.90

$$\bar{\omega}_{21} = \bar{\omega}_{20} - \bar{\omega}_{10} \mathbf{e} \quad \# 14.1$$

Bei Konstanz von  $\bar{\omega}_{10}$  und  $\bar{\omega}_{20}$  ist auch  $\bar{\omega}_{21}$  ein fester Vektor, welcher den Steg im festen Punkt  $P$  trifft. Der Relativpol  $P$  der Bewegung von  $\Sigma_1$  gegen  $\Sigma_2$  hat also in  $\Sigma_1$  von  $M$  den konstanten sphärischen Abstand  $\rho_1$ , in  $\Sigma_2$  von  $N$  den konstanten sphärischen Abstand  $\rho_2$ . Die Relativbewegung von  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_1$  ist demnach eine sphärische Kreisrollung (siehe Kap. 11<sup>1</sup>), bei welcher der bewegliche Kreis  $\rho_2$  (Mittelpunkt  $N$ , sphärischer Radius  $\rho_2$ ) auf dem festen Kreis  $\rho_1$  (Mittelpunkt  $M$ , sphärischer Radius  $\rho_1$ ) abrollt. Mit den *Wälzkreisen*  $\rho_1$  und  $\rho_2$ , deren Berührungspunkt  $P$  *Wälzpunkt* genannt wird, rollen auch die *Wälzkegel*  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$ , welche  $\rho_1$  und  $\rho_2$  aus  $O$  projizieren, aufeinander ab. Man nennt  $\rho_1$  und  $\rho_2$  die *Kegelwinkel* von  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$ . Bezeichnet man die *ebenen* Radien der Rollkreise  $\rho_1$  und  $\rho_2$  mit

**Figur 14.1**

$$r_1 = R \sin \rho_1, \quad r_2 = R \sin \rho_2, \quad (R = \text{Kugelradius}) \quad \# 14.2$$

so ist nach #11.23 das *Übersetzungsverhältnis*

$$i = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \frac{\sin \rho_1}{\sin \rho_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad \#14.3$$

**Figur 14.2** Bildet man auf den Wälzkegeln  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  Kegelstümpfe von der (längs der Erzeugenden gemessenen *Breite*  $b$  materiell aus (Fig. 14.2), so kann die Übertragung der Drehung von  $m$  auf  $n$  durch die so gebildeten *Reib-Kegelräder* erfolgen.

Ist  $\rho_1 \neq \rho_2$ , heißt das kleinere Rad *Ritzel*, das größere *Tellerrad*. Ist  $\rho_2 = \pi/2$ , so liegt ein *Planrad* vor, der Wälzkegel entartet in eine Ebene. Der Winkel

$$\delta = \rho_1 + \rho_2 \quad \# 14.4$$

heißt *Achsenwinkel der Wälzkegel*. Ist er, wie in der Praxis meistens üblich, gleich  $\pi/2$ , so spricht man von einem Paar von *Winkelrädern*.

Reibräder eignen sich nicht zur Übertragung größerer Kräfte. Man versieht daher die Wälzkegel mit geeigneten Flankenflächen und bildet auf diese Weise *Kegel-Zahnräder*, deren Schnitt mit der Kugel *sphärische Zahnräder* ergibt. Die Begrenzung der Zahnräder erfolgt durch den *Kopfkreis* bzw. den *Fußkreis* mit den sphärischen Radien  $\rho_k$  bzw.  $\rho_f$ . Ihnen entspricht beim Kegelrad der *Kopf-* bzw. *Fußkegel* (Fig. 14.2). Soll das sphärische Zahrad  $z$  Zähne aufweisen, so haben wir den Umfang des Wälzkreises in  $z$  Bögen von der Länge

$$t = \frac{2r\pi}{z} \quad \# 14.5$$

<sup>1</sup> Man beachte den Wechsel der Bezeichnungsweise gegenüber Kapitel 11!

zu teilen. Man nennt  $t$  die *Teilung* des sphärischen Zahnrades. Wir haben hier den *Wälzkreis* mit dem *Teilkreis* identifiziert, was nicht immer der Fall sein muß<sup>2</sup>.

Soll beim Zusammenarbeiten zweier Zahnräder kein *Flankenspiel* auftreten, so ist, gemessen auf dem Teilkreis, die *Zahnlücke*  $l$  gleich der *Zahnstärke*  $s$

$$l = s = \frac{t}{2}$$

# 14.6

Die das Zahnrad begrenzende Kugelkalotte ist für die praktische Herstellung des Zahnrades nicht bequem, sie wird daher durch den der Kugel längs des Teilkreises angeschriebenen *Er-gänzungskegel* (*Rückenkegel*) mit der Spitze  $S$  und dem Kegelwinkel  $\pi/2 - \rho$  ersetzt (Fig. 14.2).

Die Theorie der sphärischen Zahnräder entspricht ganz der ebenen Verzahnungstheorie, insbesondere muß das Grundgesetz gelten, welches die Gleichförmigkeit der Drehungsübertragung garantiert (Fig. 14.3):

Figur 14.3

**Satz 14.1.1:** *Zwei sphärische Kurven  $c_1$  und  $c_2$  sind dann als Zahnflanken geeignet, wenn in jedem Augenblick ihre sphärische Berühnormale  $n$  durch den Wälzpunkt  $P$  geht.*

Gilt dieser Satz, ist nämlich nach #14.1 die Konstanz der Winkelgeschwindigkeiten sichergestellt. Nach Satz 10.4.2.1 kann man eine Flanke  $c_1$  bei Abrollung von  $p_1$  auf  $p_2$  eindeutig vorgeben, dann ist  $c_2$  als Hüllkurve von  $c_1$  bei Abrollung von  $p_1$  auf  $p_2$  eindeutig bestimmt.

Eine zweckmäßige Methode, zusammenarbeitende Zahnprofile zu finden, besteht in der Übertragung des Prinzips von CAMUS<sup>3</sup> (1733) der ebenen Kinematik auf die Kugel, das wir in der verallgemeinerten Form von KARL MACK<sup>4</sup> aussprechen:

**Satz 14.1.2:** *Läßt man eine beliebig gewählte sphärische Kurve  $h$  (die sogenannte *Hilfsspolkurve*) auf  $p_1$  bzw.  $p_2$  abrollen, so erzeugt eine beliebige, mit  $h$  starr mitgeführte sphärische Kurve  $l$  zwei Hüllkurven  $c_1$  bzw.  $c_2$ , welche ein Gleitkurvenpaar bei Abrollung von  $p_1$  auf  $p_2$  darstellen (Fig. 14.4)*

Beweis: Läßt man  $h$  aus der Ausgangslage, in welcher  $h$ ,  $p_1$  und  $p_2$  einander in  $P$  berühren, zunächst auf  $p_1$  abrollen, bis  $P_h$  und  $P_1$  zur Deckung gelangen ( $\text{Bogen}(PP_1) = \text{Bogen}(PP_h)$ ), so erhält man den momentanen Berührungspunkt  $C_1$  der von  $l$  erzeugten Hüllkurve  $c_1$  auf dem sphärischen Lot aus  $P_1$  auf die betreffende Lage  $l_1$  von  $l$ . Den entsprechenden Punkt  $C_2$  der Hüllkurve  $c_2$  von  $l$  erhält man, wenn man  $h$  auf  $p_2$  abrollen läßt, bis  $P_h$  mit  $P_2$  inzidiert ( $\text{Bogen}(PP_h) = \text{Bogen}(PP_2)$ ). Rollet nunmehr  $p_1$  auf  $p_2$ , so erkennt man, daß  $c_1$  und  $c_2$  ein *Gleitkurvenpaar* bei dieser Rollung sind. Erreicht nämlich  $P_1$  die Lage  $P_2$ , ( $\text{Bogen}(PP_1) = \text{Bogen}(PP_2) = \text{Bogen}(PP_h)$ ), so gelangen auch die sphärischen Normalen ( $P_1C_1$ ) und ( $P_2C_2$ ) zur Deckung, sodaß  $c_1$  und  $c_2$  einander in  $C_2$  berühren w.z.b.w.

Ein wichtiger Spezialfall bei der Zahnflankenermittlung nach CAMUS tritt ein, wenn man  $h$  als *Kugelgroßkreis* wählt. Man kann dann  $h$  als Wälzkreis eines mit dem durch  $p_1$  bestimmten Kegelrad zusammenarbeitenden Planrades (*Bezugsplanrad*) auffassen, dessen Zahnprofil durch  $l$  gegeben ist. Dieses Planrad spielt in der Theorie der Kegelräder dieselbe Rolle wie die Zahnstange bei den *Stirnrädern*. Nach Satz 14.1.2 ist  $l$  auch die Zahnflanke des mit  $p_2$  zusammenarbeitenden Planrades, allerdings muß man sich das andere Ufer von  $l$  materiell ausgeführt denken. Daraus folgt:

Figur 14.4

<sup>2</sup> SCHIEBEL-LINDNER [1] 1.Bd. S.74, TRIER [1] S.47.ff

<sup>3</sup> CAMUS Charles Étienne Louis 1699-1768

<sup>4</sup> MACK [1] S.49.f

**Satz 14.1.3:** Die zu zwei zusammenarbeitenden Kegelrädern gehörigen Bezugsplanräder greifen wie die Zähne eine Klauenkupplung spielfrei ineinander, sie verhalten sich also wie Form und Abguß<sup>5</sup>.

Die ebenen Radien #14.2 zweier zusammenarbeitenden Kegelräder mit den Zähnezahlen  $z_1$  und  $z_2$  müssen nach #14.3 ein rationales Verhältnis  $i = z_1 : z_2 = r_1 : r_2$  aufweisen. Demgemäß wird die Zähnezahl  $z_{P1}$  des etwa zum ersten Rade passenden Bezugsplanrades wegen

$$z_{P1} = \frac{R}{r_1} z_1 = \frac{z_1}{\sin \rho_1} \quad (R = \text{Kugelradius}) \quad \# 14.7$$

i.a. nicht ganzzahlig sein.

Der Ort der Berührungspunkte zusammenarbeitender Zahnprofile im festen System  $\Sigma_0$  ist die sphärische *Eingriffslinie*  $e$ . So kommen (Fig. 14.4) die Punkte  $C_1, C_2$  der Zahnflanken  $c_1$  und  $c_2$  im Punkte  $E_1$  zum Eingriff, sobald  $P_1$  und  $P_2$  nach  $P$  gelangen. Die sphärischen Strecken  $P_1C_1$  und  $P_2C_2$  vereinigen sich dann in der Strecke  $PE_1$ . Übrigens lassen sich alle Verfahren der ebenen Kinematik zur Ermittlung der Eingriffslinie mutatis mutandis auf die Kugel übertragen. Wichtig ist die Ermittlung der Eingriffslinie unter Heranziehung der Hilfspolkurve  $h$  und der mitgeführten Kurve  $l$  bei Anwendung des Prinzips von CAMUS. Aus Fig. 14.4 erkennt man leicht die Richtigkeit von

**Satz 14.1.4:** Denkt man sich im Berührungspunkt  $P$  der Wälzkreise  $p_1$  und  $p_2$  sowie der Hilfskurve  $h$  eine Hülse angebracht und  $h$  durch diese Hülse durchgezogen, und fällt man in jeder Stellung, die  $h$  bei diesem Vorgange einnimmt, aus  $P$  das sphärische Lot auf die mitgeführte Kurve  $l$ , so ist der Ort der Lotfußpunkte die sphärische Eingriffslinie.

Wickelt man den Ergänzungskegel in eine Ebene ab, so geht der Teilkreis  $k$  in einen Kreisbogen vom Radius der Erzeugendenlänge  $SP$  des Ergänzungskegels über. Faßt man diesen Kreis als Teilkreis eines Ersatz-Stirnrades auf, das nach den in der Ebene gültigen Regeln verzahnt wird, so stellt die Rückwicklung des Ergänzungskegels nach TRETGOLD<sup>6</sup> eine leidliche Näherung einer exakt ausgeführten Verzahnung eines Kegelrades dar.

## 14.2 Spezielle sphärische Verzahnungen

Von den zahlreichen Möglichkeiten, die Flanken sphärischer Zahnräder auszubilden, verdienen folgende Fälle besonderes Interesse:

### 14.2.1 Die Oktoidenverzahnung

Hier sind bei der CAMUSschen Erzeugung entsprechender Zahnflanken sowohl  $h$  als  $l$  Kugelgroßkreise, die Flankenflächen des Bezugsrades sind also Ebenen. Eine Flanke des sphärischen Zahnrades ist die von  $l$  bei Abrollung von  $h$  auf dem Teilkreis  $p$  erzeugte Hüllkurve, die Eingriffslinie  $e$  stellt nach Satz 14.1.4 die Fußpunktcurve des Wälzpunktes  $P$  in bezug auf den von  $l$  eingehüllten Kreis  $k$ , also eine Oktoide, dar. Sie hat der vorliegenden Verzahnung den Namen gegeben<sup>7</sup>.

**Figur 14.5** Fig. 14.5 zeigt den Grundriß eines Oktoidenzahnrades. Folgende Daten liegen zugrunde: Sphärischer Radius des Wälzkreises (= Teilkreises)  $\rho = 30^\circ$ . Der Großkreis  $l$  schließt mit dem Großkreis  $h$  der Hilfskurve einen Winkel von  $70^\circ$  ein. Dies ist genau die bei Fig. 11.3 gewählte Annahme. Die Eingriffslinie entspricht der mit den

<sup>5</sup> SCHIEBEL-LINDNER [1] 2.Bd. S.30

<sup>6</sup> DÜRRFELD [1]

<sup>7</sup> SCHIEBEL-LINDNER [1] 1.Bd. S.72, THOMAS [1] S.69

Angaben der Fig. 12.2 ermittelten Fußpunktekurve. Fig. 14.5 ist somit durch Übereinanderkopieren der Grundrisse der Figuren 11.3 und 12.2 entstanden. Die Zähnezahl beträgt  $z = 10$ , der Fußkreis geht durch die in Fig. 11.3 ermittelte Spitze der Zahnflankenlinie, der sphärische Radius des Kopfkreises ist  $\rho_k = 36^\circ$ .

### 14.2.2 Zykloidenverzahnung<sup>8</sup>

$h$  ist ein Kleinkreis der Kugel,  $l$  reduziert sich auf einen Punkt, der gewöhnlich auf der Peripherie von  $h$  gewählt wird. Die Zahnflanken sind also *sphärische Radlinien*. Um die Zahnflanken über die Wälzkreise hinaus fortsetzen zu können, läßt man (wie bei der Zykloidenverzahnung der Ebene) auf verschiedenen Seiten des Wälzkreises je einen Hilfspolkreis  $h_1$  bzw.  $h_2$  abrollen, der den Kopf- bzw. Fußteil der Flanke erzeugt. Nach Satz 14.1.4 erkennt man, daß die Eingriffslinie aus Bögen der Hilfskreise  $h_1$  bzw.  $h_2$  besteht.

### 14.2.3 Evolventenverzahnung<sup>9</sup>

Die Forderung, daß die sphärische Eingriffslinie ein durch den Wälzpunkt gehender Großkreis ist, führt auf die sphärische Evolventenverzahnung. Es müssen dann nämlich die sphärischen Normalen in den Punkten jeder Zahnflanke den zugehörigen Wälzkreis unter gleichen Winkeln schneiden. Sie hüllen daher die zu den Wälzkreisen  $p_1$  bzw.  $p_2$  konzentrischen Grundkreise  $g_1$  bzw.  $g_2$  ein, deren sphärische Tangenten von den Zahnflanken  $c_1$  und  $c_2$  orthogonal durchsetzt werden. Nach Kap. 11.4.2.1 kann eine sphärische Kreis-evolvente als Radlinie erzeugt werden, wenn eine sphärische Tangente auf dem Grundkreis abrollt und ein Umfangspunkt mitgeführt wird.

---

<sup>8</sup> SCHIEBEL-LINDNER [1] 1.Bd. S.68

<sup>9</sup> SCHIEBEL-LINDNER [1] 1.Bd. S.70

# Räumliche Kinematik

## 15 Endliche Bewegungen des Raumes

### 15.1 Drehungen des Raumes um eine Gerade allgemeiner Lage

Diese Aufgabe kann auf die in Kap.9. behandelte Drehung um eine durch den Ursprung laufende Gerade zurückgeführt werden. Wählen wir auf der Drehachse den beliebigen Punkt  $\mathbf{m}$ , so wird der zu drehende Punkt  $\mathbf{r}$  in bezug auf  $\mathbf{m}$  durch den Ortsvektor  $\mathbf{x}_1$  festgelegt, wobei

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{m} \quad \# 15.1$$

ist. Für den gedrehten Punkt  $\bar{\mathbf{x}}$  gilt analog

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{m} \quad \# 15.2$$

Die Drehung um  $\mathbf{m}$  läßt sich nach #9.7 durch

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{D} \circ \mathbf{x}_1 \circ \tilde{\mathbf{D}} \quad \# 15.3$$

beschreiben, wobei  $\mathbf{D}$  nach #9.11 die zum Drehwinkel  $\delta$  und dem Drehvektor  $\mathbf{d}$  (#9.10) gehörige Drehquaternion

$$\mathbf{D} = \mathbf{c} + \mathbf{d}, \quad \mathbf{c} = \cos \frac{\delta}{2}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{e} \sin \frac{\delta}{2}, \quad \mathbf{D} \circ \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{c}^2 + |\mathbf{d}|^2 = 1 \quad \# 15.4$$

ist. Eliminiert man mit #15.1,2,3 die Größen  $\mathbf{x}_1$  und  $\bar{\mathbf{x}}_1$ , so erhält man

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{m} - \mathbf{D} \circ \mathbf{m} \circ \tilde{\mathbf{D}} \quad \# 15.5$$

Nun ist wegen #2.14

$$\begin{aligned} \mathbf{m} - \mathbf{D} \circ \mathbf{m} \circ \tilde{\mathbf{D}} &= (\mathbf{m} \circ \mathbf{D} - \mathbf{D} \circ \mathbf{m}) \circ \tilde{\mathbf{D}} = (\mathbf{m} \circ \mathbf{d} - \mathbf{d} \circ \mathbf{m}) \circ \tilde{\mathbf{D}} = \\ &= 2(\mathbf{m} \times \mathbf{d}) \circ \tilde{\mathbf{D}} = 2 \cdot \mathbf{d}^* \circ \tilde{\mathbf{D}} \end{aligned} \quad \# 15.6$$

worin  $\mathbf{d}^*$  das Moment des Drehvektors um den Ursprung bedeutet. Daher ist

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}} + 2 \cdot \mathbf{d}^* \circ \tilde{\mathbf{D}} \quad \# 15.7$$

die Darstellung der Drehung um die Achse  $(\mathbf{d}, \mathbf{d}^*)$ .

### 15.2 Allgemeine Bewegung<sup>1</sup>

Nach Kap.8 6 läßt sich jede allgemeine Bewegung des Raumes zusammensetzen aus einer Drehung um eine durch O gehende Achse mit anschließender Parallelverschiebung um einen Vektor  $\mathbf{v}$ . Die Endlage eines Punktes  $\bar{\mathbf{x}}$  hängt mit der Anfangslage  $\mathbf{x}$  durch

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{v} \quad \# 15.8$$

zusammen. Um eine Gerade der Bewegung #15.8 zu unterwerfen, drücken wir ihre PLÜCKER-Koordinaten  $\mathbf{g}, \mathbf{g}^*$  durch zwei ihrer Punkte  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  nach #1.71,72 aus

$$\mathbf{g} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{g}^* = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \quad \# 15.9$$

Die transformierte Gerade  $\bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{g}}^*$  wird dann durch die Endlagen

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{D} \circ \mathbf{x}_i \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{v} \quad \# 15.10$$

der beiden Punkte festgelegt. Daher ist

$$\bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{x}}_2 - \bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{D} \circ \mathbf{g} \circ \tilde{\mathbf{D}} \quad \# 15.11$$

<sup>1</sup> Erstmals wurde von CHASLES [1] eine abgerundete Theorie der endlichen Bewegungen dargestellt

Zur Berechnung des Momentes  $\bar{\mathbf{g}}^*$  beachten wir #2.14

$$\bar{\mathbf{g}}^* = \bar{\mathbf{x}}_1 \times \bar{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}}_1 \circ \bar{\mathbf{x}}_2 - \bar{\mathbf{x}}_2 \circ \bar{\mathbf{x}}_1) \quad \# 15.12$$

Daher ist wegen #15.8 und #2.14

$$\begin{aligned} 2\bar{\mathbf{g}}^* &= [\mathbf{D} \circ \mathbf{x}_1 \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{v}] \circ [\mathbf{D} \circ \mathbf{x}_2 \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{v}] - [\mathbf{D} \circ \mathbf{x}_2 \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{v}] \circ [\mathbf{D} \circ \mathbf{x}_1 \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{v}] = \\ &= \mathbf{D} \circ (\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1) \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{v} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{g} \circ \tilde{\mathbf{D}} - \mathbf{D} \circ \mathbf{g} \circ \tilde{\mathbf{D}} \circ \mathbf{v} = \\ &= 2 \cdot \mathbf{D} \circ \mathbf{g}^* \circ \tilde{\mathbf{D}} + [\mathbf{v} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{g} \circ \tilde{\mathbf{D}} - \mathbf{D} \circ \mathbf{g} \circ \tilde{\mathbf{D}} \circ \mathbf{v}] \end{aligned} \quad \# 15.13$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\mathbf{D}^* = \frac{1}{2} \mathbf{v} \circ \mathbf{D} \quad \# 15.14$$

dann ist nach #2.24

$$\tilde{\mathbf{D}}^* = -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{D}} \circ \mathbf{v} \quad \# 15.15$$

und #15.13 erhält die Gestalt

$$\bar{\mathbf{g}}^* = \mathbf{D} \circ \mathbf{g}^* \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{D}^* \circ \mathbf{g} \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{D} \circ \mathbf{g} \circ \tilde{\mathbf{D}}^* \quad \# 15.16$$

#15.11 und #15.16 sind die Transformationsformeln für die PLÜCKER-Koordinaten einer Geraden unter dem Einfluß der Bewegung #15.8.

Aus #15.14,15 folgt

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{D}^* \circ \tilde{\mathbf{D}}, \quad \mathbf{v} = -2\mathbf{D} \circ \tilde{\mathbf{D}}^* \quad \# 15.17, \# 15.18$$

Hieraus ergibt sich durch Addition bzw. Subtraktion

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{D}^* \circ \tilde{\mathbf{D}} - \mathbf{D} \circ \tilde{\mathbf{D}}^* \\ \mathbf{D}^* \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{D} \circ \tilde{\mathbf{D}}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \mathbf{D} \circ \tilde{\mathbf{D}} = 1 \quad \# 15.19, \# 15.20$$

Die Bewegungsgleichungen #15.8 kann man demnach unter einer der Formen

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{D}^* \circ \tilde{\mathbf{D}} - \mathbf{D} \circ \tilde{\mathbf{D}}^* \quad \# 15.21.1$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}} + 2\mathbf{D}^* \circ \tilde{\mathbf{D}} \quad \# 15.21.2$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}} - 2\mathbf{D} \circ \tilde{\mathbf{D}}^* \quad \# 15.21.3$$

darstellen. Daraus ergibt sich: Eine Bewegung ist durch Angabe zweier Quaternionen  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D}^*$  bestimmt, die durch die Beziehungen #15.20 zusammenhängen (*gebundene Quaternionen*).

### 15.3 Schraubung

Nach Satz 8.6.5 läßt sich jede Bewegung #15.8 durch eine Schraubung ersetzen, deren Achse parallel ist zur Achse der in #15.8 auftretenden Drehung mit dem Drehvektor  $\mathbf{d}$ . Da sich diese Schraubung aus einer Drehung #15.7 um die Schraubachse  $\mathbf{d}, \mathbf{d}^*$  und einer Schiebung in Richtung dieser Schraubachse mit dem Schiebvektor  $\mathbf{s} = \lambda \mathbf{d}$  zusammensetzt, ergibt sich

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}} + 2\mathbf{d}^* \circ \tilde{\mathbf{D}} + \lambda \mathbf{d} \quad \# 15.22$$

als Transformationsformel. Vergleich mit #15.8 ergibt

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{d}^* \circ \tilde{\mathbf{D}} + \lambda \mathbf{d} \quad \# 15.23$$

Aus dieser Beziehung haben wir  $\mathbf{d}^*$  und  $\lambda$  zu berechnen. Durch Multiplikation mit  $\mathbf{D}$  folgt aus #15.23

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{D} = 2\mathbf{d}^* + \lambda \mathbf{d} \circ \mathbf{D} \quad \# 15.24$$

Da  $\mathbf{d}, \mathbf{d}^*$  die PLÜCKERbedingung erfüllen, ist wegen #2.13

$$-2\mathbf{d}\mathbf{d}^* = (\mathbf{d} \circ \mathbf{d}^* + \mathbf{d}^* \circ \mathbf{d}) = 0 \quad \# 15.25$$

Bilden wir daher mit #15.24 das Quaternionenprodukt mit  $\mathbf{d}$  von rechts bzw. links und addieren, so ergibt sich

$$\mathbf{d} \circ \mathbf{v} \circ \mathbf{D} + \mathbf{v} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{d} = \lambda[\mathbf{d} \circ \mathbf{d} \circ \mathbf{D} + \mathbf{d} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{d}] \quad \# 15.26$$

Da  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{D}$  koaxial sind, ist ihr Produkt nach Satz 2.1.2.5.1 kommutativ und #.15.26 läßt sich auf folgende Weise umformen:

$$(\mathbf{d} \circ \mathbf{v} + \mathbf{v} \circ \mathbf{d}) \circ \mathbf{D} = -2(\mathbf{d}\mathbf{v})\mathbf{D} = 2\lambda|\mathbf{d}|^2 \mathbf{D} \quad \# 15.27$$

Daher ist

$$\lambda = \frac{\mathbf{d}\mathbf{v}}{|\mathbf{d}|^2} \quad \# 15.28$$

und der Schiebvektor

$$\mathbf{s} = \lambda \mathbf{d} = \frac{\mathbf{d}\mathbf{v}}{|\mathbf{d}|^2} \mathbf{d} \quad \# 15.28$$

hat den Betrag

$$|\mathbf{s}| = \frac{|\mathbf{d}\mathbf{v}|}{|\mathbf{d}|} \quad \# 15.30$$

Für  $\mathbf{d}^*$  ergibt sich aus #15.24 mit #15.28

$$\mathbf{d}^* = \frac{(\mathbf{v} - \lambda \mathbf{d}) \circ \mathbf{D}}{2} = \frac{[\mathbf{v}|\mathbf{d}|^2 - \mathbf{d}(\mathbf{d}\mathbf{v})] \circ \mathbf{D}}{2|\mathbf{d}|^2} = \frac{[(\mathbf{d} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}] \circ \mathbf{D}}{2|\mathbf{d}|^2} \quad \# 15.31$$

## 15.4 Einführung dualer Elemente

In Kap.15.2 wurde gezeigt, daß die Auswirkung einer durch die Quaternionen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{D}^*$  festgelegten Bewegung auf Gerade durch #15.11 und #15.16

$$\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{D} \circ \mathbf{g} \circ \tilde{\mathbf{D}}, \quad \bar{\mathbf{g}}^* = \mathbf{D} \circ \mathbf{g}^* \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{D}^* \circ \mathbf{g} \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{D} \circ \mathbf{g} \circ \tilde{\mathbf{D}}^* \quad \# 15.32$$

auf Punkte durch #15.21.1

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{D}^* \circ \tilde{\mathbf{D}} - \mathbf{D} \circ \tilde{\mathbf{D}}^* \quad \# 15.33$$

dargestellt wird. Beschreiben wir nun die Geraden und Punkte des Raumes gemäß #3.55,56 durch die speziellen dualen Vektoren bzw. Quaternionen

$$\underline{\mathbf{g}}^* = \mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{g}^*, \quad \underline{\mathbf{X}} = 1 + \varepsilon \mathbf{x} \quad \# 15.34$$

so lassen sich mit Hilfe der dualen Quaternion

$$\underline{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \varepsilon \mathbf{D}^* \quad \# 15.35$$

die Transformationen #15.32 und #15.33 in der Gestalt<sup>2</sup>

$$\underline{\bar{\mathbf{g}}^*} = \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{g}}^* \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}} \quad \# 15.36$$

$$\underline{\bar{\mathbf{X}}} = \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{X}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon \quad \# 15.37$$

<sup>2</sup>BLASCHKE [3], [4] S.39, S.48, STUDY [2] S.42

darstellen. Wegen #15.20 ist

$$\underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}} = 1 \quad \# 15.38$$

Wir wollen nun die geometrische Bedeutung der dualen Quaternionen #15.35 ermitteln. Zu diesem Zweck legen wir die Schraubachse durch ihre Speerkoordinaten  $\mathbf{a}^\circ$ ,  $\mathbf{a}^+$  fest, wobei der Drehsinn des Winkels  $\delta$ , gesehen von der Spitze von  $\mathbf{a}^\circ$  aus positiv erscheint. Für die Schieb-  
strecke  $\mathbf{s}$  und den Schiebvektor  $\mathbf{s}$  gilt:  $\mathbf{s} = \mathbf{sa}^\circ = \lambda \mathbf{d}$ . Mit diesen Beziehungen gilt

$$\mathbf{d} = \mathbf{a}^\circ \sin \frac{\delta}{2}, \quad \mathbf{d}^* = \mathbf{a}^+ \sin \frac{\delta}{2}, \quad \mathbf{D} = \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{a}^\circ \sin \frac{\delta}{2} \quad \# 15.39$$

Vergleich von #15.23 und #15.17 ergibt

$$2\mathbf{D}^* \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}} = 2 \sin \frac{\delta}{2} \cdot (\mathbf{a}^+ \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}) + \mathbf{sa}^\circ \quad \# 15.40$$

Multiplikation von rechts mit  $\mathbf{D}$  ergibt

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{a}^+ \sin \frac{\delta}{2} + \frac{\mathbf{s}}{2} \cdot (\mathbf{a}^\circ \circ \mathbf{D}) = -\frac{\mathbf{s}}{2} \sin \frac{\delta}{2} + \frac{\mathbf{s}}{2} \mathbf{a}^\circ \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{a}^+ \sin \frac{\delta}{2} \quad \# 15.41$$

Mit #15.39 und #15.41 wird #15.35

$$\underline{\mathbf{D}} = \left( \cos \frac{\delta}{2} - \varepsilon \frac{\mathbf{s}}{2} \sin \frac{\delta}{2} \right) + \mathbf{a}^\circ \left( \sin \frac{\delta}{2} + \varepsilon \frac{\mathbf{s}}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right) + \varepsilon \mathbf{a}^+ \sin \frac{\delta}{2} + \varepsilon^2 \mathbf{a}^+ \frac{\mathbf{s}}{2} \cos \frac{\delta}{2} \quad \# 15.42$$

wobei der letzte Summand wegen  $\varepsilon^2 = 0$  hinzugefügt werden konnte. Mit #3.31,32 nimmt #15.42 die Gestalt

$$\underline{\mathbf{D}} = \cos \frac{\delta + \varepsilon \mathbf{s}}{2} + \sin \frac{\delta + \varepsilon \mathbf{s}}{2} \cdot (\mathbf{a}^\circ + \varepsilon \mathbf{a}^+) \quad \# 15.43$$

an. Der duale Einheitsvektor

$$\underline{\mathbf{a}}^\circ = \mathbf{a}^\circ + \varepsilon \mathbf{a}^+ \quad \# 15.44$$

ist nach Kap.3.3 das STUDYsche Bild des die Schraubachse festlegenden Speeres. Der *duale Drehwinkel*

$$\underline{\delta} = \delta + \varepsilon \mathbf{s} \quad \# 15.45$$

legt mit seinem Real- bzw. Dualteil Drehwinkel und Schieb-  
strecke der gegebenen Schraubung fest. #15.43 erscheint dann in der Form

$$\underline{\mathbf{D}} = \cos \frac{\underline{\delta}}{2} + \underline{\mathbf{a}}^\circ \sin \frac{\underline{\delta}}{2} \quad \#15.46$$

Führen wir noch den *dualen Drehvektor*

$$\underline{\mathbf{d}} = \underline{\mathbf{a}}^\circ \sin \frac{\underline{\delta}}{2} \quad \# 15.47$$

ein, so wird die duale Quaternion

$$\underline{\mathbf{D}} = \cos \frac{\underline{\delta}}{2} + \underline{\mathbf{d}} \quad \# 15.48$$

formal völlig der einer sphärischen Bewegung zugeordneten Drehquaternion angeglichen. Daher gilt auch bei allgemeinen Bewegungen

**Satz 15.4.1:** *Jeder dualen Einheitsquaternion entspricht eine Bewegung des Raumes, und umgekehrt lassen sich jeder Bewegung des Raumes zwei duale Einheitsquaternionen  $\pm \underline{\mathbf{D}}$  zuordnen.*

Betrachten wir die Auswirkungen einer vorgelegten Schraubung auf die Geraden des Raumes, die wir durch einen ihnen angehörenden Speer

$$\underline{\mathbf{g}}^\circ = \underline{\mathbf{g}}^\circ + \varepsilon \underline{\mathbf{g}}^+ \quad \# 15.49$$

festlegen, so nimmt #15.36 die Gestalt

$$\underline{\bar{\mathbf{g}}}^\circ = \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{g}}^\circ \circ \underline{\bar{\mathbf{D}}} \quad \# 15.50$$

an. Da den Speeren #15.49 nach STUDY die Punkte der dualen Einheitskugel entsprechen, kann man #15.50 interpretieren durch

**Satz 15.4.2:** Die Bewegungen des Speerraumes bilden sich auf die Drehungen #15.50 der dualen Einheitskugel ab.

Das sphärische Drehzentrum ist der Bildpunkt #15.44 des Trägerstabes der Schraubachse, der duale Drehwinkel  $\underline{\delta}$  hängt in der aus #15.45 ersichtlichen Weise mit Drehwinkel und Schiebvektor der gegebenen Schraubung zusammen.

Die in Satz 3.3.2 und Satz 15.4.1 ausgesprochenen Sachverhalte erhellen die Tragweite des STUDYschen Übertragungsprinzips: Jedem Satz der sphärischen Geometrie der dualen Einheitskugel entspricht ein Satz der Geraden-Geometrie des Raumes, die Sätze der sphärischen Kinematik bilden sich ab auf Aussagen über Bewegungen des Geradenraumes.

Um Satz 2.2.2 ins Duale zu übertragen, betrachten wir den zur Achse  $\underline{\mathbf{a}}^\circ$  der Einheitsquaternion

$$\underline{\mathbf{A}}^\circ = \cos \varphi + \underline{\mathbf{a}}^\circ \sin \varphi \quad \# 15.51$$

normalen Einheitsvektor  $\underline{\mathbf{g}}^\circ$ . Man erkennt sofort, daß auch der Vektor

$$\underline{\bar{\mathbf{g}}}^\circ = \underline{\mathbf{A}}^\circ \circ \underline{\mathbf{g}}^\circ = \underline{\mathbf{g}}^\circ \cos \varphi + \underline{\mathbf{a}}^\circ \times \underline{\mathbf{g}}^\circ \sin \varphi \quad \# 15.52$$

auf  $\underline{\mathbf{a}}$  normal steht. Für den dualen Winkel von  $\underline{\mathbf{g}}^\circ$  und  $\underline{\bar{\mathbf{g}}}^\circ$  ergibt sich aus #15.52

$$\underline{\mathbf{g}}^\circ \circ \underline{\bar{\mathbf{g}}}^\circ = \cos \varphi \quad \# 15.53$$

**Satz 15.4.3:** Eine die Achse  $\underline{\mathbf{a}}^\circ$  orthogonal schneidende Raumgerade  $\underline{\mathbf{g}}^\circ$  wird durch die Transformation #15.52 um die Gerade  $\underline{\mathbf{a}}^\circ$  in die Gerade  $\underline{\bar{\mathbf{g}}}^\circ$  verschraubt. Schraubwinkel  $\varphi$  und Schiebstrecke  $\hat{\varphi}$  werden durch den dualen Winkel  $\underline{\varphi} = \varphi + \varepsilon \hat{\varphi}$  festgelegt.

Man kann aus der Formel #15.36 für die Bewegung des Geradenraumes die Transformationsgleichung #15.37 für die Punkte des Raumes herleiten, indem man einen Punkt  $\underline{\mathbf{X}}$  des Raumes als die Menge aller mit ihm inzidierenden Geraden auffaßt, welche die Inzidenzbedingung #3.59 erfüllen:

$$\underline{\mathbf{X}} \circ \underline{\mathbf{g}}^\circ_\varepsilon - \underline{\mathbf{g}}^\circ \circ \underline{\mathbf{X}} = 0 \quad \# 15.54$$

Da Inzidenzen bei der Bewegung des Raumes erhalten bleiben, müssen die transformierten Elemente die Bedingung

$$\underline{\bar{\mathbf{X}}} \circ \underline{\bar{\mathbf{g}}}^\circ_\varepsilon - \underline{\bar{\mathbf{g}}}^\circ \circ \underline{\bar{\mathbf{X}}} = 0 \quad \# 15.55$$

erfüllen. Löst man #15.36 nach  $\underline{\mathbf{g}}^\circ$  auf:

$$\underline{\mathbf{g}}^\circ = \underline{\bar{\mathbf{D}}} \circ \underline{\bar{\mathbf{g}}}^\circ \circ \underline{\mathbf{D}} \quad \# 15.56$$

und setzt #15.56 in #15.54 ein, so folgt

$$\underline{\bar{\mathbf{X}}} \circ \underline{\bar{\mathbf{D}}}_\varepsilon \circ \underline{\bar{\mathbf{g}}}^\circ \circ \underline{\mathbf{D}}_\varepsilon - \underline{\bar{\mathbf{D}}}_\varepsilon \circ \underline{\bar{\mathbf{g}}}^\circ \circ \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\bar{\mathbf{X}}} = 0 \quad \# 15.57$$

Multiplikation von #15.57 von links mit  $\underline{\mathbf{D}}$  und von rechts mit  $\underline{\bar{\mathbf{D}}}_\varepsilon$  ergibt

$$(\underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{X}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon) \circ \underline{\mathbf{g}}_\varepsilon^\circ - \underline{\mathbf{g}}^\circ \circ (\underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{X}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon) = 0 \quad \# 15.58$$

Vergleich mit #15.55 reproduziert die Formel #15.37. In anloger Weise ergibt sich bei Anwendung der Inzidenzbedingung #3.60 von  $\underline{\mathbf{g}}^\circ$  und Ebene  $\underline{\mathbf{N}}$  die Transformationsformel für Ebenen unter dem Einfluß der betrachteten Bewegung<sup>3</sup>

$$\underline{\tilde{\mathbf{N}}} = \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{N}} \circ \underline{\mathbf{D}} \quad \# 15.59$$

### 15.5 Zusammensetzung von Schraubungen

Folgt auf die Schraubung

$$\underline{\tilde{\mathbf{X}}} = \underline{\mathbf{D}}_1 \circ \underline{\mathbf{X}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{1\varepsilon} \quad \# 15.60$$

die Schraubung

$$\underline{\tilde{\mathbf{X}}} = \underline{\mathbf{D}}_2 \circ \underline{\tilde{\mathbf{X}}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{2\varepsilon} \quad \# 15.61$$

so wird die resultierende Schraubung durch

$$\underline{\tilde{\mathbf{X}}} = \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{X}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon, \quad \underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{D}}_2 \circ \underline{\mathbf{D}}_1 \quad \# 15.62$$

festgelegt. Sind #15.60,61 speziell *Umwendungen* ( $\delta_1 = \pi, \mathbf{s} = 0$ ) um die durch  $\underline{\mathbf{a}}_1^\circ$  und  $\underline{\mathbf{a}}_2^\circ$  festgelegten Umwendungsachsen, so ist

$$\underline{\delta}_1 = \underline{\delta}_2 = \pi \quad \# 15.63$$

Daher reduzieren sich die entsprechenden Quaternionen nach #15.46 auf

$$\underline{\mathbf{D}}_1 = \underline{\mathbf{a}}_1^\circ, \quad \underline{\mathbf{D}}_2 = \underline{\mathbf{a}}_2^\circ \quad \# 15.64$$

Die Zusammensetzung der Umwendungen ergibt die durch die Quaternion

$$-\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{a}}_2^\circ \circ \underline{\mathbf{a}}_1^\circ = -\underline{\mathbf{a}}_2^\circ \underline{\mathbf{a}}_1^\circ - \underline{\mathbf{a}}_1^\circ \times \underline{\mathbf{a}}_2^\circ \quad \# 15.65$$

dargestellte Bewegung. Ist  $\underline{\mathbf{a}}^\circ$  das Gemeinlot der Umwendungsachsen, so läßt es sich nach #3.42 und #3.46 wegen #15.65 in der Form

$$\underline{\mathbf{D}} = \cos \varphi + \underline{\mathbf{a}}^\circ \sin \varphi \quad \# 15.66$$

darstellen, wobei

$$\underline{\mathbf{D}} = \cos \varphi + \underline{\mathbf{a}}^\circ \sin \varphi \quad \# 15.67$$

der *duale Winkel* #3.41 der Umwendungsachsen ist. Vergleich mit #15.52 zeitigt wieder das Ergebnis von Satz 8.6.1

### 15.6 Koordinatendarstellung einer Bewegung

Aus #15.8 ergibt sich, daß man eine Bewegung in der Form

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{\mathbf{X}}} &= \mathbf{C}_{11}\underline{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{12}\underline{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}_{13}\underline{\mathbf{Z}} + \mathbf{V}_1 \\ \underline{\tilde{\mathbf{Y}}} &= \mathbf{C}_{21}\underline{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{22}\underline{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}_{23}\underline{\mathbf{Z}} + \mathbf{V}_2 \\ \underline{\tilde{\mathbf{Z}}} &= \mathbf{C}_{31}\underline{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{32}\underline{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}_{33}\underline{\mathbf{Z}} + \mathbf{V}_3 \end{aligned} \quad \#15.68$$

darstellen kann, wobei die  $\mathbf{C}_{ik}$  den in Kap.9.6 angegebenen Bedingungen genügen. Die Quaternion  $\underline{\mathbf{D}}$  läßt sich durch #9.19 mit Hilfe der Formeln #9.35,36 darstellen.  $\underline{\mathbf{D}}^*$  ergibt sich mit Hilfe des Vektors

<sup>3</sup> STUDY [2] S.42

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{Bmatrix}$$

**# 15.69**

aus #15.14. Dann sind auch Schraubachse und Schiebvektor der Bewegung auf Grund von #15.29 und #15.31 bekannt.

# 16 Kontinuierliche Schraubungen

## 16.1 Die Schraublinie

### 16.1.1 Analytische Darstellung

Bei der durch #15.37 festgelegten Schraubung mit der Achse  $\mathbf{a}, \mathbf{a}^*$ , dem Schraubwinkel  $\delta$  und der Schiebstrecke  $\mathbf{s}$  betrachten wir bloß die Anfangs- bzw. Endlage eines Punktes. Nunmehr wollen wir auch über die Zwischenlagen des Punktes durch die Vorschrift verfügen, daß die Schiebung in Richtung der Schraubachse proportional der Drehung um die Schraubachse erfolgen soll. Man spricht dann von einer *kontinuierlichen Schraubung* oder *Schraubung* schlechthin. Schiebstrecke  $\mathbf{s}$  und Drehwinkel  $\delta$  stehen in der Beziehung

$$\mathbf{s} = p\delta \quad \# 16.1$$

Der Proportionalitätsfaktor  $p$  heißt *Parameter der Schraubung*. Der Drehsinn des Schraubwinkels  $\delta$ , gesehen von der Spitze des Vektors  $\mathbf{a}$ , sei positiv, der Schiebsinn mit  $\mathbf{a}$  gleich oder entgegengesetzt orientiert, je nachdem  $p$  positiv oder negativ ist. Man spricht dann von einer *Rechts-* bzw. *Linksschraubung*.

Der duale Winkel #15.45  $\underline{\delta} = \delta + \varepsilon \mathbf{s}$  läßt sich mit Hilfe von

$$\underline{p} = 1 + \varepsilon p \quad \# 16.2$$

in der Form

$$\underline{\delta} = \delta + \varepsilon \mathbf{s} = \delta + \varepsilon (p\delta) = (1 + \varepsilon p)\delta = \underline{p}\delta \quad \#16.3$$

darstellen. Unterwirft man einen Punkt mit der Anfangslage  $\underline{\mathbf{X}}' = 1 + \varepsilon \mathbf{x}'$  einer kontinuierlichen Schraubung, so beschreibt er eine *Schraublinie*, deren Punkte  $\underline{\mathbf{X}} = 1 + \varepsilon \mathbf{x}$  durch die Werte des reellen Arguments  $\delta$  festgelegt werden. Nach #15.37 und #15.46 ist

$$\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{X}}' \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon, \quad \underline{\mathbf{D}} = \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{a}^\circ \sin \frac{\delta}{2}, \quad \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon = 1 \quad \# 16.4$$

### 16.1.2 Schraubtangente

Um die Schraubtangente in einem Punkt  $\underline{\mathbf{X}}$  zu erhalten, hat man #16.4 nach  $\delta$  abzuleiten, wobei

$$\underline{\dot{\delta}} = \underline{p} \quad \#16.5$$

ist. Aus #16.4 folgt

$$\underline{\dot{\mathbf{X}}} = \underline{\dot{\mathbf{D}}} \circ \underline{\mathbf{X}}' \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon + \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{X}}' \circ \underline{\dot{\tilde{\mathbf{D}}}}_\varepsilon \quad \# 16.6$$

Berechnet man aus #16.4

$$\underline{\mathbf{X}}' = \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{X}} \circ \underline{\mathbf{D}} \quad \# 16.7$$

und führt dies in #16.6 ein, so ergibt sich

$$\underline{\dot{\mathbf{X}}} = \underline{\dot{\mathbf{D}}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{X}} \circ \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\dot{\tilde{\mathbf{D}}}}_\varepsilon \quad \# 16.8$$

Wegen #16.4,5 und  $\mathbf{a}^\circ \circ \mathbf{a}^\circ = -1$  folgt

$$\underline{\dot{\mathbf{D}}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon = \frac{p}{2} \left[ -\sin \frac{\delta}{2} + \mathbf{a}^\circ \cos \frac{\delta}{2} \right] \circ \left[ \cos \frac{\delta}{2} - \mathbf{a}^\circ \sin \frac{\delta}{2} \right] = \frac{p}{2} \mathbf{a}^\circ \quad \# 16.9$$

Ferner ist

$$\underline{\mathbf{D}}_\varepsilon \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon = (\underline{\dot{\mathbf{D}}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}})_\varepsilon \sim = -\frac{p_\varepsilon}{2} \underline{\mathbf{a}}_\varepsilon \quad \# 16.10$$

Daher wird aus #16.8

$$2\underline{\dot{\mathbf{X}}} = (\underline{p}\underline{\mathbf{a}}^\circ) \circ \underline{\mathbf{X}} - (\underline{p}_\varepsilon \underline{\mathbf{X}}) \circ \underline{\mathbf{a}}^\circ \quad \# 16.11$$

Löst man #16.11 in Real- und Dualteil auf, so folgt für den Dualteil

$$2\varepsilon \dot{\mathbf{x}} = 2\varepsilon \left[ p\mathbf{a}^\circ + \mathbf{a}^+ + \frac{1}{2}(\mathbf{a}^\circ \circ \mathbf{x} - \mathbf{x} \circ \mathbf{a}^\circ) \right] \quad \# 16.12$$

Daher ist wegen #2.14

$$\dot{\mathbf{x}} = p\mathbf{a}^\circ + \mathbf{a}^+ + \mathbf{a}^\circ \times \mathbf{x} \quad \# 16.13$$

ein Vektor in Richtung der Schraubtangente. Aus #16.13 läßt sich eine geometrische *Konstruktion für die Schraubtangente* eines Punktes  $\mathbf{x}$  ablesen. Nach #1.60 stellt nämlich

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}^+ + \mathbf{a}^\circ \times \mathbf{x} \quad \# 16.14$$

den Momentenvektor des in der Schraubachse liegenden Stabes mit dem Stabvektor  $\mathbf{a}^\circ$  um  $\mathbf{x}$  dar (Fig.16.1). Der Betrag  $|\mathbf{r}|$  ist daher gleich dem Abstand  $r$  des Punktes  $\mathbf{x}$  von der Schraubachse.  $\mathbf{r}$  steht auf der Verbindungsebene von  $\mathbf{x}$  mit der Schraubachse normal. Fügt man im Endpunkt von  $\mathbf{r}$  den Vektor  $p\mathbf{a}^\circ$  an, so ergibt die Summe

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{r} + p\mathbf{a}^\circ \quad \# 16.15$$

einen Vektor in Richtung der Schraubtangente. Um in einem Punkt  $\mathbf{X}$  die Schraubtangente zu

**Figur 16.1** konstruieren, wird man also in  $\mathbf{X}$  eine Normalebene  $v$  auf die Schraubachse  $\mathbf{a}$  errichten und deren Schnittpunkt  $\mathbf{S}$  mit  $\mathbf{a}$  bestimmen. Schwenkt man die Strecke  $\mathbf{SX}$  in  $v$  um den Punkt  $\mathbf{X}$  von der Spitze von  $\mathbf{a}^\circ$  aus gesehen im negativen Sinn um einen rechten Winkel, so gelangt  $\mathbf{S}$  nach  $\mathbf{T}$ . Trägt man den Parameter  $p$  von  $\mathbf{T}$  aus in Richtung von  $\mathbf{a}^\circ$  ab (je nachdem  $p \geq 0$  ist, gleich oder entgegengesetzt orientiert), so erhält man einen Punkt der Schraubtangente<sup>1</sup>.

In vielen Fällen ist es zweckmäßig, an Stelle der Speerkoordinaten  $\mathbf{a}^\circ, \mathbf{a}^+$  die homogenen PLÜCKER-Vektoren  $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}^\circ$ ,  $\mathbf{a}^* = \lambda\mathbf{a}^+$  zu verwenden. Multipliziert man #16.13 mit dem konstanten Faktor  $\lambda \neq 0$ , so ersetzt man  $\dot{\mathbf{x}}$  durch einen anderen Vektor  $\mathbf{t} = \lambda\dot{\mathbf{x}}$  in Tangentenrichtung

$$\mathbf{t} = p\mathbf{a} + \mathbf{a}^* + \mathbf{a} \times \mathbf{x} \quad \# 16.16$$

Mit der Abkürzung

$$\hat{\mathbf{a}} = p\mathbf{a} + \mathbf{a}^* \quad \# 16.17$$

erhält #16.16 die Gestalt

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \times \mathbf{x} \quad \# 16.18$$

Der Momentenvektor der Schraubtangente ist dann

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{t} \quad \# 16.19$$

Ist  $\varphi$  der Winkel der Schraubtangente mit der Schraubachse, so folgt aus #1.90 zusammen mit #16.16,19 und #1.34

<sup>1</sup> Für die systematische darstellend-geometrische Behandlung der Schraublinie und der Schraubgebilde muß auf WUNDERLICH [4] S.155 ff verwiesen werden

$$r \tan \varphi = -\frac{\mathbf{a}t^* + \mathbf{a}^*t}{\mathbf{a}t} = -\frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{a}^*)t}{\mathbf{a}t} = -\frac{|\mathbf{a}^* + \mathbf{a} \times \mathbf{x}|^2}{\mathbf{a}t} \quad \# 16.20$$

Nach #1.60,61 ist (siehe Fig. 16.1)

$$\tan \varphi = -\frac{|r|^2}{|\mathbf{a}|^2 \cdot p \cdot r} = -\frac{r^2 |\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{a}|^2 \cdot p \cdot r} = -\frac{r}{p} \quad \# 16.21$$

**Satz 16.1.2.1:** Durch das geordnete, homogene Paar von Vektoren ist eine Schraubung eindeutig festgelegt.

Denn der Vektor  $\mathbf{a}$  legt die Richtung der Schraubachse fest, der Schraubparameter ist wegen #16.17 und  $\mathbf{a}\mathbf{a}^* = 0$

$$p = \frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|^2} \quad \# 16.22$$

der die Raumlage der Achse festlegende Momentenvektor ist

$$\mathbf{a}^* = \hat{\mathbf{a}} - p\mathbf{a} \quad \# 16.23$$

Sind die beiden Vektoren  $\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}$  orthogonal, so ist wegen #16.22  $p = 0$ , die Schraubung reduziert sich auf eine *Drehung* und  $\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}$  sind die PLÜCKER-Vektoren ihrer Achse.

Aus #16.13 folgt durch Differentiation nach  $\delta$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}^o \times \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{\lambda} (\mathbf{a} \times \mathbf{t}) \quad \# 16.24$$

Daher ist nach #1.119 die *Krümmungsmittle*  $\mathbf{m}$  des Punktes  $\mathbf{x}$  der Schraublinie

$$\mathbf{m} = \mathbf{x} + |\mathbf{t}|^2 \frac{[\mathbf{t} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{t})] \times \mathbf{t}}{|\mathbf{t} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{t})|^2} = \mathbf{x} + \frac{|\mathbf{t}|^2}{|\mathbf{a} \times \mathbf{t}|^2} (\mathbf{a} \times \mathbf{t}) \quad \#16.25$$

Da nach Fig. 16.1 der Betrag des Vektors  $|\mathbf{t}| = \frac{|\mathbf{a}| \cdot r}{\sin \varphi}$  ist, ergibt sich aus #1.120 der *Krümmungsradius der Schraublinie*

$$\rho = \frac{|\mathbf{t}|^3}{|\mathbf{t} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{t})|} = \frac{|\mathbf{t}|^2}{|\mathbf{a} \times \mathbf{t}|} = \frac{|\mathbf{t}|}{|\mathbf{a}| \sin \varphi} = \frac{r}{\sin^2 \varphi} \quad \# 16.26$$

### 16.1.3 Rechts- und Linksschraubungen

Eine Schraubung sei durch ihre Achse  $\mathbf{a}, \mathbf{a}^*$  gegeben. Ihr Parameter  $p$  sei so zu bestimmen, daß eine vorgegebene Gerade  $\mathbf{g}, \mathbf{g}^*$  eine Schraubtangente ist. Ist  $\mathbf{x}$  der (nicht bekannte) Berührungspunkt der Schraubtangente, so muß mit #16.16 gelten

$$\mathbf{g} = p\mathbf{t} = p[\mathbf{a}^* + p\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{x}], \quad \mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{g} \quad \# 16.27, \#16.28$$

Multipliziert man #16.27 sukzessive skalar mit  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{a}$ , so erhält man wegen #16.28 und #1.34

$$|\mathbf{g}|^2 = p(\mathbf{a}^* \mathbf{g} + p\mathbf{a}\mathbf{g} + \mathbf{a}\mathbf{g}^*), \quad \mathbf{a}\mathbf{g} = p\rho|\mathbf{a}|^2 \quad \# 16.29, \# 16.30$$

Setzt man die aus #16.30 berechneten Größe  $p\rho$  in #16.29 ein, so ergibt sich

$$\rho = \frac{|\mathbf{g}|^2 |\mathbf{a}|^2 - (\mathbf{a}\mathbf{g})^2}{|\mathbf{a}|^2 (\mathbf{a}\mathbf{g}^* + \mathbf{a}^* \mathbf{g})} = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{g}|^2}{|\mathbf{a}|^2 (\mathbf{a}\mathbf{g}^* + \mathbf{a}^* \mathbf{g})} \quad \# 16.31$$

Mit #16.31 läßt sich dann aus #16.30 der gesuchte Parameter berechnen:

$$\rho = \frac{(\mathbf{ag})(\mathbf{ag}^* + \mathbf{a}^* \mathbf{g})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{g}|^2} \quad \#16.32$$

Da das Vorzeichen von #16.32 nur von Zähler abhängt, kann man sagen

**Satz 16.1.3.1:** Eine durch die Achse  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}^*$  und eine Schraubtangente  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{g}^*$  festgelegte Schraubung ist eine Rechts- bzw. Linksschraubung, je nachdem der Ausdruck

$$(\mathbf{ag})(\mathbf{ag}^* + \mathbf{a}^* \mathbf{g}) \quad \# 16.33$$

positiv oder negativ ist.

Da die Schraubachse und die Schraubtangente in #16.32 symmetrisch auftreten, kann man die Bedeutung dieser Geraden vertauschen.

**Satz 16.1.3.2:** Man nennt ein Geradenpaar  $\mathbf{a}, \mathbf{a}^*$ ;  $\mathbf{g}, \mathbf{g}^*$  rechts- bzw. linksgewunden, je nachdem  $(\mathbf{ag})(\mathbf{ag}^* + \mathbf{a}^* \mathbf{g})$  positiv oder negativ ist.

Will man bei gegebener Achse  $\mathbf{a}$  und Schraubtangente  $\mathbf{t}$  den Parameter konstruieren, so bestimme man (Fig. 16.1) zunächst den Abstand  $SX$  dieser Geraden. Nach beliebiger Orientierung von  $\mathbf{a}$  durch Wahl des Vektors  $\hat{\mathbf{a}}$ , drehe man in der durch  $S$  gehenden Ebene  $v \perp \mathbf{a}$  die Strecke  $SX$  gesehen von der Spitze von  $\mathbf{a}$  aus um  $X$  im negativen Sinn um einen rechten Winkel in die Lage  $TX$ . Die Parallele zu  $\mathbf{a}$  durch  $T$  trifft die Schraubtangente in  $G$  im Abstand  $\rho$ . Stimmt die Orientierung von  $\overrightarrow{TG}$  mit  $\hat{\mathbf{a}}$  überein, so ist  $\rho > 0$  und es liegt eine Rechtsschraubung vor, andernfalls eine Linksschraubung.

## 16.2 Der Schraubtangentenkomplex

Ist eine Schraubung durch das geordnete Vektorpaar  $\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}$  gegeben, so wird eine beliebige Raumgerade i.a. keine Schraubtangente sein.. Es erhebt sich die Frage, welche Bedingungen man den PLÜCKER-Vektoren  $\mathbf{g}, \mathbf{g}^*$  dieser Geraden auferlegen muß, damit die Gerade in einem ihrer Punkte  $\mathbf{x}$  eine Schraublinie der gegebenen Schraubung berührt. Nach #16.18 und #16.28 muß gelten

$$\mathbf{g} = \rho \mathbf{t} = \rho(\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \times \mathbf{x}), \quad \mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{g} = \rho[\mathbf{x} \times \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{x} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x})] \quad \# 16.34, \# 16.35$$

Durch skalare Multiplikation von #16.34 mit  $\hat{\mathbf{a}}$  und von #16.35 mit  $\mathbf{a}$  sowie anschließende Addition ergibt sich mit #1.34

$$\hat{\mathbf{a}} \mathbf{g} + \mathbf{a} \mathbf{g}^* = \rho [|\hat{\mathbf{a}}|^2 + 2\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) + \mathbf{a}(\mathbf{x} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x}))] = \rho [|\hat{\mathbf{a}} + (\mathbf{a} \times \mathbf{x})|^2] = \frac{1}{\rho} |\mathbf{g}|^2 \quad \# 16.36$$

Skalare Multiplikation von #16.34 mit  $\mathbf{a}$  ergibt

$$\rho = \frac{\mathbf{ag}}{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}} \quad \# 16.37$$

Aus #16.36 folgt daher die gesuchte Bedingung

$$|\mathbf{g}|^2 (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) = (\mathbf{ag})(\mathbf{ag}^* + \hat{\mathbf{a}}\mathbf{g}) \quad \# 16.38$$

Sie stellt die Gleichung des *Komplexes der Schraubtangente*n der gegebenen Schraubung  $\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}$  dar. Wir wollen den *Komplexkegel* bzw. die *Komplexbogen* des durch #16.38 bestimmten Geraden-Komplexes untersuchen. Darunter versteht man den Kegel, den die der Bedingung #16.38 genügenden, durch einen vorgegebenen Raumpunkt  $\mathbf{z}$  gehenden Geraden erfüllen, bzw. die Kurve, welche von den in einer gegebenen Ebene liegenden Komplexgeraden eingehüllt wird.

Alle Komplexgeraden durch einen beliebigen Punkt  $\mathbf{z}$  müssen außer #16.38 noch die Inzidenzbedingung #1.62

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{z} \times \mathbf{g} \quad \# 16.39$$

erfüllen, sodaß die Richtungsvektoren der Erzeugenden des Komplexkegels mit der Spitze  $\mathbf{z}$  der Bedingung

$$|\mathbf{g}|^2 (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) = (\mathbf{a}\mathbf{g})[\mathbf{a}(\mathbf{z} \times \mathbf{g}) + \hat{\mathbf{a}}\mathbf{g}] = (\mathbf{a}\mathbf{g})[\mathbf{g}(\mathbf{a} \times \mathbf{z} + \hat{\mathbf{a}})] \quad \# 16.40$$

genügen. Man überzeugt sich leicht, daß speziell die Parallele zur Schraubachse ( $\mathbf{g} = \mathbf{a}$ ) sowie die Schraubtangente der Bahn von  $\mathbf{z}$  mit

$$\mathbf{g} = \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \times \mathbf{z} \quad \# 16.41$$

(#16.38) erfüllen, mithin zwei Erzeugende des Kegels darstellen. Um die Art des Komplexkegels zu erkennen, schneiden wir ihn mit einer Ebene  $\mathbf{a}\mathbf{x} = d$ , die normal zur Schraubachse ist (Fig. 16.2). Eine beliebige Erzeugende  $\mathbf{g}, \mathbf{g}^*$  des Komplexkegels hat dann wegen #16.39 und #1.75 sowie 1.37.2 mit dieser Ebene den Schnittpunkt

**Figur 16.2**

$$\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{g} + \mathbf{a} \times \mathbf{g}^*}{\mathbf{a}\mathbf{g}} = \frac{d\mathbf{g} + \mathbf{a} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{g})}{\mathbf{a}\mathbf{g}} = \mathbf{z} + (d - \mathbf{a}\mathbf{z}) \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{a}\mathbf{g}} \quad \# 16.42$$

Wählen wir speziell die Parallele zur Schraubachse bzw. die Schraubtangente durch  $\mathbf{z}$ , so schneiden diese Geraden nach #16.41 die Ebene in den Punkten

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{z} + (d - \mathbf{a}\mathbf{z}) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}, \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{z} + (d - \mathbf{a}\mathbf{z}) \frac{\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \times \mathbf{z}}{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}} \quad \# 16.43, \# 16.44$$

Die beiden der Ebene angehörigen Vektoren  $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}$  und  $\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}$  (Fig. 16.2) stehen aufeinander normal, denn das Skalarprodukt

$$(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s})(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}) = \frac{(d - \mathbf{a}\mathbf{z})^2}{(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})(\mathbf{a}\mathbf{g})^2} \{ (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})|\mathbf{g}|^2 - (\mathbf{a}\mathbf{g})[\mathbf{g}(\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \times \mathbf{z})] \} = 0 \quad \# 16.45$$

verschwindet wegen #16.40. Der Schnittpunkt  $\mathbf{s}$  erfüllt demnach den THALESKreis über dem Durchmesser  $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$ . Die Komplexkegel sind mithin Kegel 2. Ordnung, die von allen Ebenen normal zur Schraubachse nach Kreisen geschnitten werden.

Um die Komplexkurve einer beliebigen Ebene  $\varepsilon(\mathbf{n}, d)$  zu ermitteln, suchen wir alle Punkte  $\mathbf{z}$  von  $\varepsilon$  auf, deren Schraubtangente #16.41 in dieser Ebene liegen, für die also gilt (Fig. 16.3),

**Figur 16.3**

$$\mathbf{n}\mathbf{g} = \mathbf{n}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{n}(\mathbf{a} \times \mathbf{z}) = \mathbf{n}\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{z}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}) = 0 \quad \# 16.46$$

Die gesuchten Punkte  $\mathbf{z}$  genügen demnach den Bedingungen

$$\mathbf{n}\mathbf{z} = d, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{n})\mathbf{z} = \mathbf{n}\hat{\mathbf{a}} \quad \# 16.47, \# 16.48$$

ihre Gesamtheit stellt somit die Schnittgerade  $\mathbf{c}, \mathbf{c}^*$  der Ebenen #16.47,48 dar, deren PLÜCKER-Vektoren nach #1.81.1, #1.81.2

$$\mathbf{c} = \mathbf{n} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) = \mathbf{a}|\mathbf{n}|^2 - \mathbf{n}(\mathbf{a}\mathbf{n}), \quad \mathbf{c}^* = (\mathbf{n}\hat{\mathbf{a}})\mathbf{n} - d(\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \quad \#16.49, \# 16.50$$

sind. Man nennt diese Gerade die *Charakteristik der Ebene* bezüglich der gegebenen Schraubung.

Der Richtungsvektor  $\mathbf{f}$  der durch  $\mathbf{z}$  gehenden, zu  $\mathbf{g}$  normalen Geraden der Ebene ist wegen #16.41,47

$$\mathbf{f} = \mathbf{n} \times \mathbf{g} = \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{n} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{a}\mathbf{n}) \left( \frac{\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}} + d\mathbf{a}}{\mathbf{a}\mathbf{n}} - \mathbf{z} \right) \quad \# 16.51$$

Aus #16.51 folgt, daß alle betrachteten Normalen durch den festen Punkt

$$\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{a} + \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}\mathbf{n}}$$

# 16.52

den sogenannten *Nullpunkt der Ebene* gehen (siehe Kap.16.3).

Demnach ergibt sich die Komplexkurve als Hüllgebilde des Schenkels eines rechten Winkels, dessen Scheitel auf der Charakteristik der Eben läuft und dessen zweiter Schenkel immer durch den Nullpunkt der Ebene geht. Es liegt also eine *Parabel* vor.

### 16.3 Nullsystem. Strahlgewinde

Die durch das geordnete, homogene Vektorpaar  $\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}$  bestimmte Schraubung ordnet jedem Raumpunkt  $\mathbf{x}$  in eindeutiger Weise die Schraubtangente  $\mathbf{t}$  #16.18 der von  $\mathbf{x}$  beschriebenen Schraublinie zu. Damit ist auch jedem Raumpunkt  $\mathbf{x}$  in eindeutiger Weise eine Bahnnormalebene  $\varepsilon$  zugeordnet, deren homogene Koordinaten durch

$$\mathbf{n} = \mathbf{t} = \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \times \mathbf{x}, \quad d = \mathbf{t}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{a}}\mathbf{x} \quad \# 16.53, \# 16.54$$

festgelegt sind. Man nennt  $\varepsilon$  die *Nullebene des Punktes*  $\mathbf{x}$ . Ist umgekehrt eine Ebene  $\varepsilon(\mathbf{n}, d)$  gegeben, so fragen wir nach jenen Punkten  $\mathbf{x}$  der Ebene, deren Schraubtangente auf die Ebene  $\varepsilon$  normal stehen. Diese Punkte sind durch

$$\mathbf{n}\mathbf{x} = d, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{t} = \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{n} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) = \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a}(\mathbf{n}\mathbf{x}) - \mathbf{x}(\mathbf{a}\mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad \# 16.55, \# 16.56$$

gekennzeichnet. Aus #16.55,56 ergibt sich mit

$$\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{a} + \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}\mathbf{n}} \quad \# 16.57$$

eindeutig der gewünschte Punkt. Er heißt *Nullpunkt* von  $\varepsilon$  (vgl. #16.52). Die durch #16.53,54,57 beschriebene Zuordnung von Punkten und Ebenen nennt man das mit der Schraubung verknüpfte *Nullsystem*.

**Figur 16.4**

Betrachten wir das eine Gerade  $\mathbf{g}$  enthaltende Büschel der Ebenen  $\varepsilon$  (Fig.16.4) und suchen wir den Ort der Nullpunkte  $\mathbf{x}$  dieser Ebenen. Jede Ebene  $\varepsilon(\mathbf{n}, d)$  muß mit der gegebenen Geraden  $\mathbf{g}, \mathbf{g}^*$  die Inzidenzbedingung #1.76

$$\mathbf{g}^* \times \mathbf{n} = d\mathbf{g} \quad \# 16.58$$

erfüllen. Multiplizieren wir #16.58 von rechts vektorieil mit  $\mathbf{a}$ , so finden wir

$$(\mathbf{g}^* \times \mathbf{n}) \times \mathbf{a} = \mathbf{n}(\mathbf{a}\mathbf{g}^*) - \mathbf{g}^*(\mathbf{n}\mathbf{a}) = d(\mathbf{g} \times \mathbf{a}) \quad \# 16.59$$

und hieraus

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}^*(\mathbf{a}\mathbf{n}) + d(\mathbf{g} \times \mathbf{a})}{\mathbf{a}\mathbf{g}^*} \quad \# 16.60$$

Führt man dies in #16.57 ein, so erhält man den Nullpunkt

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{g}^* \times \hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}\mathbf{g}^*} + \lambda [\mathbf{a}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})] \quad \text{mit } \lambda := \frac{d}{(\mathbf{a}\mathbf{g}^*)(\mathbf{a}\mathbf{n})} \quad \# 16.61$$

als Funktion der Hilfsgröße  $\lambda$ , die ihrerseits von der betreffenden Büschelebene abhängt. Man erkennt, daß die Nullpunkte  $\mathbf{x}$  auf der Geraden  $\bar{\mathbf{g}}$  durch den Punkt

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{g}^* \times \hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}\mathbf{g}^*} \quad \# 16.62$$

mit dem Richtungsvektor

$$\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{a}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) \quad \# 16.63$$

liegen. Der Momentenvektor dieser Geraden ist

$$\bar{\mathbf{g}}^* = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^* \mathbf{a}) - \mathbf{g}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) \quad \# 16.64$$

Sucht man umgekehrt den Ort der Nullpunkte aller Ebenen  $\varphi$  durch die Gerade  $\bar{\mathbf{g}}$ , so ergibt sich wieder die Gerade  $\mathbf{g}$ . Bildet man nämlich die rechten Seiten von #16.63,64 für die Gerade  $\bar{\mathbf{g}}$ , so ist

$$\mathbf{a}(\bar{\mathbf{g}}\hat{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{g}}^* \mathbf{a}) - \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) = (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})^2 \mathbf{g}, \quad \hat{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{g}}\hat{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{g}}^* \mathbf{a}) - \bar{\mathbf{g}}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) = (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})^2 \mathbf{g}^* \quad \# 16.65$$

Wegen der Homogenität der PLÜCKER-Vektoren ist dies wieder die Gerade  $\mathbf{g}$ . Man nennt  $\mathbf{g}$  und  $\bar{\mathbf{g}}$  *reziproke Polare* des Nullsystems.

**Satz 16.3.1:** *Dreht sich eine Ebene  $\varepsilon$  um eine Gerade  $\mathbf{g}$ , so durchläuft ihr Nullpunkt  $\mathbf{x}$  deren reziproke Polare  $\bar{\mathbf{g}}$ . Durchläuft umgekehrt ein Punkt  $\mathbf{y}$  die Gerade  $\mathbf{g}$ , so dreht sich dessen Nullebene  $\varphi$  um die reziproke Polare  $\bar{\mathbf{g}}$ . Die Schnittgerade zweier Ebenen ist die reziproke Polare der Verbindungslinie ihrer Nullpunkte. Die Verbindungslinie zweier Punkte ist die reziproke Polare der Schnittlinie ihrer Nullebenen.*

Reziproke Polare sind i.a. windschief. Wir fragen nach schneidenden reziproken Polaren. In diesem Falle ergibt die Schnittbedingung #1.84 wegen #16.63,64

$$\mathbf{g}\bar{\mathbf{g}}^* + \bar{\mathbf{g}}\mathbf{g}^* = (\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^* \mathbf{a})^2 = 0 \quad \# 16.66$$

d.h. eine Gerade  $\mathbf{g}$  schneidet ihre reziproke Polare  $\bar{\mathbf{g}}$ , wenn ihre PLÜCKER-Vektoren die Bedingung

$$\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^* \mathbf{a} = 0 \quad \# 16.67$$

erfüllen. Vermöge #16.67 reduzieren sich die Gleichungen #16.63,64 auf

$$\bar{\mathbf{g}} = -(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})\mathbf{g}, \quad \bar{\mathbf{g}}^* = -(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})\mathbf{g}^* \quad \# 16.68$$

d.h. die PLÜCKER-Vektoren von  $\mathbf{g}$  und  $\bar{\mathbf{g}}$  sind proportional,  $\mathbf{g}$  und  $\bar{\mathbf{g}}$  fallen zusammen.

**Satz 16.3.2:** *Reziproke Polare eines Nullsystems sind windschief oder sie fallen zusammen.*

Jene Geraden des Raumes, die mit ihren reziproken Polaren zusammenfallen, nennt man *Nullstrahlen* oder *Gewindestrahlen*. Die durch #16.67 festgelegte Menge aller Nullstrahlen nennt man das mit der Schraubung  $\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}$  verknüpfte *Strahlgewinde*. Schraubung und Strahlgewinde bestimmen einander eindeutig. Man nennt die Schraubachse auch *Achse des Gewindes*, den Schraubparameter auch *Gewindeparameter*.

Ein Gewinde ist durch Angabe der Achse  $\mathbf{a}, \mathbf{a}^*$  und eines Gewindestrahles  $\mathbf{g}, \mathbf{g}^*$  festgelegt. Denn wegen #16.17 ergibt sich aus #16.67 für den Parameter

$$p = -\frac{\mathbf{a}\mathbf{g}^* + \mathbf{a}^* \mathbf{g}}{\mathbf{a}\mathbf{g}} \quad \# 16.69$$

Sind  $r$  und  $\psi$  Abstand und Winkel von Achse und gegebenem Gewindestrahl, so folgt aus #1.90

$$p = r \tan \psi \quad \# 16.70$$

Die Konstruktion von  $p$  erhellt aus Fig. 16.1

Mit einer Schraubung ist demnach außer dem in Kap. 16.2 behandelten *quadratischen Komplex* der Schraubtangente #16.38 noch der *lineare Komplex* #16.67 der Nullstrahlen verknüpft. Wie dort stellen wir die Frage nach dem *Komplexkegel* und der *Komplexkurve*. Alle Gewindestrahlen durch denselben Punkt  $\mathbf{x}$  müssen die *Gewindegleichung* #16.67 sowie die Inzidenzbedingung  $\mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{g}$  erfüllen. Führt man  $\mathbf{g}^*$  in #16.67 ein, so erhält man mit #1.34

$$\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + (\mathbf{x} \times \mathbf{g})\mathbf{a} = \mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) = \mathbf{g}(\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \times \mathbf{x}) = 0 \quad \# 16.71$$

Wegen #16.53 erkennt man, daß alle durch einen Punkt  $\mathbf{x}$  gehenden Nullstrahlen auf die Bahntangenten dieses Punktes normal stehen.

**Satz 16.3.3:** *Alle Nullstrahlen durch einen Punkt liegen in der Nullebene dieses Punktes.*

**Satz 16.3.4:** *Die Nullstrahlen eines Gewindes sind die Bahnnormalen der zugehörigen Schraubung.*

Da die Beziehung #16.61 für jeden Punkt eines Nullstrahls gilt, folgt

**Satz 16.3.5:** *Ein Nullstrahl ist in jedem seiner Punkte Bahnnormale der zugehörigen Schraubung.*

Daraus ergibt sich

**Satz 16.3.6:** *Durchläuft ein Punkt einen Nullstrahl, so dreht sich dessen Nullebene um diesen Nullstrahl und umgekehrt.*

Die in der Ebene  $(\mathbf{n}, \mathbf{d})$  liegenden Gewindestrahlen erfüllen #16.67 und #16.58. Multipliziert man #16.58 von links vektoriell mit  $\mathbf{a}$ , so findet man

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{g}^* \times \mathbf{n}) = \mathbf{g}^*(\mathbf{a}\mathbf{n}) - \mathbf{n}(\mathbf{a}\mathbf{g}^*) = \mathbf{d}\mathbf{a} \times \mathbf{g} \quad \# 16.72$$

Hieraus folgt bei Beachtung von #16.67 und der aus # 16.58 folgenden Tatsache  $\mathbf{g}\mathbf{n} = 0$

$$\mathbf{g}^* = \frac{\mathbf{d}(\mathbf{a} \times \mathbf{g}) + \mathbf{n}(\mathbf{a}\mathbf{g}^*)}{\mathbf{a}\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{d}(\mathbf{a} \times \mathbf{g}) - \mathbf{n}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}}) + \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{n}\mathbf{g})}{\mathbf{a}\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{d}\mathbf{a} + \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}\mathbf{n}} \times \mathbf{g} \quad \#16.73$$

Alle Nullstrahlen der gegebenen Ebene inzidieren daher mit dem Punkt

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{d}\mathbf{a} + \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}\mathbf{n}} \quad \# 16.74$$

der nach #16.57 der Nullpunkt der vorgelegten Ebene ist.

**Satz 16.3.7:** *Die Nullstrahlen einer Ebene bilden ein Strahlbüschel mit dem Nullpunkt der Ebene als Scheitel.*

**Satz 16.3.8:** *Die reziproke Polare zur Normalen einer Ebene  $(\mathbf{n}, \mathbf{d})$  in deren Nullpunkt ist die Charakteristik  $\mathbf{c}, \mathbf{c}^*$  (#16.49,50) der Ebene*

Beweis: Die genannte Normale hat nach #16.52 die PLÜCKER-Vektoren

$$\mathbf{n}, \mathbf{n}^* = \frac{\mathbf{d}\mathbf{a} + \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}\mathbf{n}} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\mathbf{a}\mathbf{n}} [\mathbf{d}\mathbf{a} \times \mathbf{n} + \hat{\mathbf{a}}|\mathbf{n}|^2 - \mathbf{n}(\hat{\mathbf{a}}\mathbf{n})] \quad \# 16.75$$

Deren reziproke Polare ist nach #16.63,64 sowie #16.49,50

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}\mathbf{n}} [\mathbf{a}|\mathbf{n}|^2 - \mathbf{n}(\mathbf{a}\mathbf{n})] = \frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}\mathbf{n}} \mathbf{c}, \quad \bar{\mathbf{n}}^* = \frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}\mathbf{n}} [\mathbf{n}(\mathbf{n}\hat{\mathbf{a}}) - \mathbf{d}(\mathbf{a} \times \mathbf{n})] = \frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}\mathbf{n}} \mathbf{c}^* \quad \# 16.76$$

Daraus folgt wegen der Homogenität der Plückervektoren die Behauptung.

**Satz 16.3.9:** *Trifft ein Gewindestrahl  $\mathbf{g}, \mathbf{g}^*$  eine Raumgerade  $\mathbf{m}, \mathbf{m}^*$ , so trifft er auch deren reziproke Polare  $\bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{m}}^*$ .*

**Satz 16.3.10:** *Jede Gerade, die zwei reziproke Polare trifft, ist ein Nullstrahl*

Beweis: Der Gewindestrahl muß die Gewindegleichung #16.67 sowie die Schnittbedingung #1.84 erfüllen

$$\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{g}\mathbf{m}^* + \mathbf{g}^*\mathbf{m} = 0 \quad \# 16.77$$

Die reziproke Polare

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{a}(\mathbf{m}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{m}^*\mathbf{a}) - \mathbf{m}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}), \quad \bar{\mathbf{m}}^* = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{m}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{m}^*\mathbf{a}) - \mathbf{m}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) \quad \# 16.78$$

von  $m$  erfüllt wegen #16.77 die Schnittbedingung mit dem Gewindestrahl:

$$\overline{g}m^* + g^*\overline{m} = (g\hat{a} + g^*a)(m\hat{a} + m^*a) - (gm^* + g^*m)(a\hat{a}) \quad \# 16.79$$

Zum Nachweis der Umkehrung hat man den angegebenen Beweis von hinten nach vorne zu durchlaufen. Ferner gilt

**Satz 16.3.11:** *Damit zwei Gerade  $m$  und  $\overline{m}$  reziproke Polare sind, ist es hinreichend, daß beide von vier nicht in hyperbolischer Lage befindlichen Nullstrahlen  $g_1, g_2, g_3, g_4$  getroffen werden.*

Beweis: Da nach Satz 16.3.9 alle Gewindestrahlen, die  $m$  treffen auch  $\overline{m}$  treffen müssen, gilt dies auch für die  $g_i$ . Da diese nach Voraussetzung nicht derselben Erzeugendenschar einer Strahlfläche 2. Ordnung angehören, haben sie nach Satz 1.5.3.1 nur  $m$  und  $\overline{m}$  als gemeinsame Treffgerade.

**Satz 16.3.12:** *Je zwei beliebige Paare  $m, \overline{m}; n, \overline{n}$  reziproker Polaren haben hyperbolische Lage.*

Beweis: Alle das Paar  $m, \overline{m}$  von reziproken Polaren, sowie eine beliebige weitere Raumgerade  $n$  treffenden Nullstrahlen bilden nach Satz 1.5.2.2 eine Erzeugendenschar einer Strahlfläche 2. Ordnung. Da nach Satz 16.3.9 jeder dieser Nullstrahlen auch die reziproke Polare  $\overline{n}$  von  $n$  treffen muß, folgt die Aussage des Satzes.

Für die reziproke Polare der durch ihre PLÜCKER-Vektoren  $g = o, g^*$  festgelegten Ferngeraden (Kap. 1.3.9) ergibt sich aus #16.63,64

$$\overline{g} = a(g^*a), \quad \overline{g}^* = \hat{a}(g^*a) - g^*(a\hat{a}) \quad \# 16.80$$

**Satz 16.3.13:** *Die zu einer Ferngeraden reziproke Polare ist eine zur Schraubachse parallele Gerade*

Jede zur Schraubachse parallele Gerade heißt *Durchmesser des Gewindes*.

Ist speziell  $g^* = a$ , d.h. gehört die Ferngerade der zur Schraubachse normalen Ebenenstellung an, so reduziert sich #16.80 wegen #16.17,22 zu

$$\overline{g} = a|a|^2, \quad \overline{g}^* = |a|^2(\hat{a} - pa) = a^*|a|^2 \quad \# 16.81$$

**Satz 16.3.14:** *Die Schraubachse ist die reziproke Polare der zu ihrer Richtung normalen Ebenenstellung.*

Zusammen mit Satz 16.3.10 folgt daraus

**Satz 16.3.15:** *Alle die Schraubachse schneidenden Nullstrahlen tun dies unter rechtem Winkel. Jede die Schraubachse orthogonal schneidende Gerade ist ein Nullstrahl.*

Die zur Achse  $a$  parallelen Ebenen heißen *Durchmesserebenen*. Für deren Normalenvektoren  $n$  gilt

$$an = 0 \quad \# 16.82$$

Aus #16.57 folgt, daß der Nullpunkt einer Durchmesserbene ein Fernpunkt ist. Die in einer Durchmesserbene liegenden Nullstrahlen  $g, g^*$  müssen sowohl die Inzidenzbedingung #1.76 wie die Gewindegleichung erfüllen

$$g^* \times n = dg, \quad g^*a + g\hat{a} = 0 \quad \# 16.83, \#16.84$$

Vektormultiplikation von #16.83 mit  $a$  von rechts ergibt mit #16.82,84

$$n(g^*a) - g^*(an) = -n(g\hat{a}) = dg \times a \quad \# 16.85$$

Wegen der aus #16.83 folgenden Orthogonalität von  $n$  und  $g$  kann man #16.85 auf folgende Weise umformen:

$$d(\mathbf{g} \times \mathbf{a}) + \mathbf{n}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}}) - \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{g}\mathbf{n}) = d(\mathbf{g} \times \mathbf{a}) + \mathbf{g} \times (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{g} \times (\mathbf{d}\mathbf{a} + \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{o} \quad \# 16.86$$

Die in einer Durchmesserebene liegenden Nullstrahlen haben daher die Richtung

$$\mathbf{g} = \mathbf{d}\mathbf{a} + \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}} \quad \# 16.87$$

Ferner gilt der wichtige Satz

**Satz 16.3.16:** *Das Gemeinlot zweier reziproken Polaren trifft die Schraubachse unter rechtem Winkel.*

Als Treffgerade der reziproken Polaren  $\mathbf{m}, \mathbf{m}^*$  und  $\overline{\mathbf{m}}, \overline{\mathbf{m}}^*$  ist das Gemeinlot  $\mathbf{n}, \mathbf{n}^*$  nach Satz 16.3.10 Gewindestrahl. Es erfüllt daher die Bedingungen

$$\mathbf{n}\mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{n}\overline{\mathbf{m}} = 0, \quad \mathbf{n}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{n}^*\mathbf{a} = 0 \quad \# 16.88, \# 16.89, \# 16.90$$

Setzt man in #16.89 aus #16.78 für  $\overline{\mathbf{m}}$  ein, so findet man

$$(\mathbf{a}\mathbf{n})(\mathbf{m}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{m}^*\mathbf{a}) - (\mathbf{n}\mathbf{m})(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) = 0 \quad \# 16.91$$

woraus wegen #16.88

$$\mathbf{a}\mathbf{n} = 0 \quad \# 16.92$$

folgt. Aus #16.90 ergibt sich dann mit #16.17 und #16.92

$$\mathbf{n}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{n}^*\mathbf{a} = \mathbf{p}\mathbf{n}\mathbf{a} + \mathbf{n}\mathbf{a}^* + \mathbf{n}^*\mathbf{a} = \mathbf{n}\mathbf{a}^* + \mathbf{n}^*\mathbf{a} = 0 \quad \# 16.93$$

was zusammen mit #16.92 den behaupteten orthogonalen Schnitt von  $\mathbf{n}, \mathbf{n}^*$  und  $\mathbf{a}, \mathbf{a}^*$  nachweist. Ebenso gilt

**Satz 16.3.17:** *Jede zum Gemeinlot zweier reziproken Polaren orthogonale Ebene ist eine Durchmesserebene.*

Im allgemeinen werden die beiden Vektoren  $\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}$  ein nichtverschwindendes Skalarprodukt aufweisen. Ist jedoch  $\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} = 0$ , so reduziert sich die Schraubung auf eine Drehung und die gegebenen Vektoren lassen sich als PLÜCKER-Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{a}^* = \hat{\mathbf{a}}$  einer Geraden, nämlich der Drehachse, auffassen. Das zugehörige Strahlgewinde ist ausgeartet, seine Gleichung #16.67 reduziert sich auf die Schnittbedingung #1.84 zweier Geraden, es besteht also aus der Menge der Treffgeraden der Drehachse (*Strahlgebüsch*). Die Formel #16.57 für den Nullpunkt einer Ebene reduziert sich auf die Formel #1.75 für den Schnittpunkt der Ebene mit der Drehachse. Die Nullebene #16.53,54 eines Punktes geht über in dessen Verbindungsebene #1.79 mit der Drehachse.

**Satz 16.3.18:** *Das mit einer Drehung verknüpfte Strahlgewinde reduziert sich auf die Menge der die Drehachse schneidenden Geraden (Bahnnormalen). Die Nullebenen aller nicht der Drehachse angehörenden Punkte (Bahnnormalebenen) enthalten die Drehachse. Die Nullpunkte aller nicht die Drehachse enthaltenden Ebenen liegen auf der Drehachse. Die Nullebenen aller Punkte der Drehachse bzw. die Nullpunkte aller die Drehachse enthaltenden Ebenen bleiben unbestimmt.*

## 16.4 Konstruktive Behandlung des Strahlgewindes

Häufig ist ein Gewinde nicht durch Achse und  $d$  Parameter, sondern durch andere Bestimmungsstücke festgelegt.

### 16.4.1 Angabe durch ein Paar reziproker Polaren und einen Gewindestrahl

Ein wichtiger Fall besteht in der Vorgabe eines Paares reziproker Polaren  $\mathbf{m}, \mathbf{m}^*$ ;  $\overline{\mathbf{m}}, \overline{\mathbf{m}}^*$  sowie eines Gewindestrahles  $\mathbf{s}, \mathbf{s}^*$  (Die Angabe eines Paares reziproker Polaren ist nach Satz 16.3.1 äquivalent der Vorgabe zweier Ebenen mit ihren Nullpunkten). Wegen #16.63,64,67 muß (bei Beachtung der Homogenität) gelten

$$\rho \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{m}, \quad \rho \bar{\mathbf{m}}^* = \hat{\mathbf{a}} + \lambda \mathbf{m}^*, \quad \mathbf{s} \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{s}^* \mathbf{a} = 0 \quad \# 16.94, \# 16.95, \# 16.96$$

Multipliziert man #16.94 und #16.95 skalar mit  $\mathbf{s}^*$  bzw.  $\mathbf{s}$  und addiert, so folgt

$$\rho(\bar{\mathbf{m}}\mathbf{s}^* + \bar{\mathbf{m}}^*\mathbf{s}) = (\mathbf{a}\mathbf{s}^* + \hat{\mathbf{a}}\mathbf{s}) + \lambda(\mathbf{m}\mathbf{s}^* + \mathbf{m}^*\mathbf{s}) \text{ daher ist}$$

$$\lambda = \rho \frac{\bar{\mathbf{m}}\mathbf{s}^* + \bar{\mathbf{m}}^*\mathbf{s}}{\mathbf{m}\mathbf{s}^* + \mathbf{m}^*\mathbf{s}} \quad \# 16.97$$

Mithin ergeben sich aus #16.94,95 die das Gewinde festlegenden Vektoren

$$\mathbf{a} = \rho \bar{\mathbf{m}} - \lambda \mathbf{m}, \quad \hat{\mathbf{a}} = \rho \bar{\mathbf{m}}^* - \lambda \mathbf{m}^* \quad \# 16.98$$

Um bei gegebenem Paar  $\mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}}$  von reziproken Polaren und einem Gewindestrahl  $\mathbf{s}$  zu einem beliebigen Punkt  $X$  die Nullebene zu ermitteln, kann man konstruktiv folgendermaßen vorgehen (Fig. 16.5): Die Treffgerade  $\mathbf{s}_1$  aus  $X$  an  $\mathbf{m}$  und  $\bar{\mathbf{m}}$  ist nach Satz 16.3.10 ein Nullstrahl, ebenso die Verbindungslinie  $\mathbf{s}_2$  der Schnittpunkte von  $\mathbf{m}$  und  $\bar{\mathbf{m}}$  mit der  $X$  und  $\mathbf{s}$  verbindenden Ebene  $\alpha$ . Nach Satz 16.3.7 ist  $A = \mathbf{s} \cap \mathbf{s}_2$  der Nullpunkt von  $\alpha$ , daher  $\mathbf{s}_3 = (AX)$  auch ein Nullstrahl. Die von  $\mathbf{s}_1$  und  $\mathbf{s}_3$  aufgespannte Ebene  $\varepsilon$  ist mithin die gesuchte Nullebene von  $X$ .

Figur 16.5

Um zu einer gegebenen Ebene  $\varepsilon$  den Nullpunkt aufzusuchen (Fig. 16.6), bestimmen wir zunächst jenen in  $\varepsilon$  liegenden Nullstrahl  $\mathbf{s}_1$ , der  $\mathbf{m}$  und  $\bar{\mathbf{m}}$  trifft. Die Treffgerade  $\mathbf{s}_2$  aus dem Schnittpunkt  $A$  von  $\mathbf{s}$  mit  $\varepsilon$  spannt zusammen mit  $\mathbf{s}$  die Nullebene  $\alpha$  von  $A$  auf. Die Schnittgerade  $\mathbf{s}_3$  von  $\alpha$  und  $\varepsilon$  ist ein weiterer in  $\varepsilon$  liegender Nullstrahl, sodaß man den Nullpunkt  $X = \mathbf{s}_1\mathbf{s}_3$  von  $\varepsilon$  angeben kann.

Figur 16.6

Hat man zu zwei Punkten  $X$  und  $Y$  die Nullebenen  $\varepsilon$  und  $\eta$  ermittelt, so stellt die Verbindungsgerade  $r = (XY)$  und die Schnittgerade  $\bar{r} = \varepsilon \cap \eta$  nach Satz 16.3.6 ein Paar von reziproken Polaren dar. Bestimmt man das Gemeinlot  $\mathbf{u}$  von  $\mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}}$  sowie das Gemeinlot  $\mathbf{v}$  von  $r, \bar{r}$ , so ist nach Satz 16.3.16 das Gemeinlot  $\mathbf{a}$  von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  die Achse der Schraubung (Fig. 16.7). Der Parameter läßt sich mit Hilfe der Schraubtangente der Bahn eines beliebigen Punktes - als Ebenenormale in der Nullebene des gewählten Punktes - nach Kap. 16.1.3 (Fig. 16.1) konstruieren,.

Figur 16.7

### 16.4.2 Angabe durch drei Nullstrahlen und einer Ebene samt Nullpunkt

Seien von einem Nullsystem drei Nullstrahlen  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$  sowie eine Ebene  $\varepsilon$  mit ihrem Nullpunkt  $X$  bekannt, so läßt sich diese Angabe sofort auf den Fall von Kap. 16.4.1 zurückführen (Fig. 16.8). Schneidet man etwa  $\mathbf{s}_1$  und  $\mathbf{s}_2$  in den Punkten  $A_1$  und  $A_2$  mit  $\varepsilon$ , so sind die Geraden  $\mathbf{s}_4 = (A_1X)$  und  $\mathbf{s}_5 = (A_2X)$  nach Satz 16.3.7 Nullstrahlen und  $\alpha_1 = (\mathbf{s}_1\mathbf{s}_4)$  sowie  $\alpha_2 = (\mathbf{s}_2\mathbf{s}_5)$  die Nullebene der Punkte  $A_1$  bzw.  $A_2$ . Nach Satz 16.3.1 sind  $\bar{\mathbf{m}} = (\alpha_1\alpha_2)$  reziproke Polare, die zusammen mit  $\mathbf{s}_3$  wieder die Angabe von Kap. 16.4.1 liefern.

Figur 16.8

### 16.4.3 Angabe durch fünf Gewindestrahlen

Es seien fünf Nullstrahlen  $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i^*$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) gegeben. Dann können die Verhältnisse der Koordinaten

$$\mathbf{a}_1 : \mathbf{a}_2 : \mathbf{a}_3 : \hat{\mathbf{a}}_1 : \hat{\mathbf{a}}_2 : \hat{\mathbf{a}}_3 \quad \# 16.99$$

des homogenen Vektorpaares  $\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}$  aus dem System

$$\mathbf{a}\mathbf{s}_i^* + \hat{\mathbf{a}}\mathbf{s}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad \# 16.100$$

berechnet werden, sofern die Gleichungen #16.100 linear unabhängig sind. Wäre etwa die letzte dieser Gleichungen von den anderen abhängig, so müßte

$$\mathbf{s}_5 = \sum_{i=1}^5 \lambda_i \mathbf{s}_i, \quad \mathbf{s}_5^* = \sum_{i=1}^5 \lambda_i \mathbf{s}_i^* \quad \# 16.101$$

sein. Die beiden Treffgeraden  $\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_k^*$  ( $k = 1, 2$ ) der ersten vier Gewindestrahlen, für welche

$$\mathbf{t}_k \mathbf{s}^* + \mathbf{t}_k^* \mathbf{s}_i = 0, \quad k = 1, 2; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \# 16.102$$

ist, würden dann wegen #16.101 auch den fünften Gewindestrahl treffen.

**Satz 16.4.3.1:** *Ein Strahlgewinde ist durch Angabe von fünf Nullstrahlen, die nicht demselben Strahlnetz angehören, eindeutig bestimmt.*

Daher dürfen von den fünf gegebenen Gewindestrahlen keine vier *hyperbolische Lage* haben. Denn in diesem Falle würden durch die Schnittpunkte der vier Nullstrahlen tragenden Fläche 2. Ordnung mit dem fünften Nullstrahl zwei Erzeugenden der anderen Schar gehen, die alle fünf Gewindestrahlen treffen. Sind fünf dem Satze 16.4.3.1 genügende Nullstrahlen gegeben, so bestimme man die beiden Treffgeraden  $m, \bar{m}$  von vier der Nullstrahlen, die nach Satz 16.3.11 reziproke Polare sind.  $m, \bar{m}$  gestatten zusammen mit dem fünften Gewindestrahl nach Kap. 16.4.1 eine bequeme Behandlung des Nullsystems<sup>2</sup>.

Obwohl die fünf Gewindestrahlen keinem Netz angehören dürfen, können sehr wohl einzelne einander schneiden. Der Schnittpunkt von je zweien stellt nämlich nach Satz 16.3.7 den Nullpunkt der von ihnen aufgespannten Ebene dar. Je nachdem sich nun ein oder zwei Paare von Nullstrahlen schneiden, stellen sich die in den Kapiteln 16.4.2 bzw. 16.4.1 behandelten Fälle ein<sup>3</sup>.

## 16.5 Schraubung und duale Vektoren.

Nach Satz 16.1.2.1 legt das homogene, geordnete Vektorpaar  $\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}$  eine Schraubung fest. Es ist naheliegend, die beiden Vektoren zu einem *dualen Vektor*

$$\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \varepsilon \hat{\mathbf{a}} \quad \# 16.103$$

zusammenzufassen.

**Satz 15.5.1:** *Durch einen bis auf einen reellen Faktor vorgegebenen dualen Vektor ist eine Schraubung eindeutig bestimmt und umgekehrt.*

Wir betrachten einen Vektor

$$\underline{\mathbf{b}} = \lambda \mathbf{a} \quad \# 16.104$$

der aus #16.103 durch Multiplikation mit einem *dualen* Faktor hervorgeht. Auch dieser Vektor stellt eine Schraubung dar, deren Achse und Parameter wir nach #16.22,23 durch Trennung von Real- und Dualteil ermitteln. Es ist

$$\underline{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \varepsilon \hat{\mathbf{b}} = (\lambda + \varepsilon \hat{\lambda})(\mathbf{a} + \varepsilon \hat{\mathbf{a}}) = \lambda \mathbf{a} + \varepsilon (\hat{\lambda} \mathbf{a} + \lambda \hat{\mathbf{a}}), \quad \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \hat{\lambda} \mathbf{a} + \lambda \hat{\mathbf{a}} \quad \# 16.105$$

Der Parameter dieser Schraubung ist daher

$$\rho_1 = \frac{\mathbf{b}\hat{\mathbf{b}}}{|\mathbf{b}|^2} = \frac{\hat{\lambda}}{\lambda} + \frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{\hat{\lambda}}{\lambda} + \rho \quad \# 16.106$$

<sup>2</sup> Die Bestimmung der beiden Treffgeraden an vier windschiefe Gerade dürfte mit Hilfe der bei G.LORIA [1] S.47 ff. (2.Lösung) angegebenen Konstruktion am einfachsten sein. Sie erfordert allerdings Grundkenntnisse der projektiven Geometrie.

Der Fall, daß bei keinem der aus fünf gegebenen Nullstrahlen auszuwählenden Strahlquadrupel sich reelle Treffgerade ergeben, dürfte bei kinematischen Aufgabestellungen vermutlich nicht auftreten.

<sup>3</sup> Eine Zusammenstellung zahlreicher Sätze, die das mit einer Schraubung verknüpfte Nullsystem betreffen, bei MANNHEIM [1] und CHASLES [1]

worin  $\underline{p}$  der Parameter der Schraubung #16.103 ist. Als Schraubachse ergibt sich

$$\underline{\mathbf{b}}^* = \hat{\underline{\mathbf{b}}} - \underline{p}_1 \underline{\mathbf{b}} = \hat{\underline{\lambda}} \underline{\mathbf{a}} + \lambda \hat{\underline{\mathbf{a}}} - \left( \frac{\hat{\underline{\lambda}}}{\lambda} + \underline{p} \right) \lambda \underline{\mathbf{a}} = \lambda (\hat{\underline{\mathbf{a}}} - \underline{p} \underline{\mathbf{a}}) = \lambda \underline{\mathbf{a}}^* \quad \# 16.107$$

Nach #16.105,107 sind also die PLÜCKER-Vektoren der Achsen von #16.103,104 proportional, letztere sind also identisch.

**Satz 16.5.2:** *Schraubungen, die durch kollineare duale Vektoren dargestellt werden, sind koaxial.*

Wählt man den Faktor  $\underline{\lambda}$  in #16.104 so, daß der Parameter  $\underline{p}_1$  verschwindet, so reduziert sich die Schraubung auf eine Drehung, der duale Vektor  $\underline{\mathbf{b}}$  hat *reellen Betrag* und stellt daher nach Satz 3.3.1 das duale Bild der Achse dar.

Legt umgekehrt der duale Vektor  $\underline{\mathbf{a}}^*$  nach #3.37 die Achse, #16.2 den Parameter einer Schraubung fest, so wird diese durch den dualen Vektor

$$\underline{\mathbf{a}} = \underline{p} \underline{\mathbf{a}}^* = (1 + \varepsilon \underline{p})(\underline{\mathbf{a}} + \varepsilon \underline{\mathbf{a}}^*) = \underline{\mathbf{a}} + \varepsilon (\underline{p} \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}}^*) = \underline{\mathbf{a}} + \varepsilon \hat{\underline{\mathbf{a}}} \quad \# 16.108$$

beschrieben.

## 16.6 Schraubflächen

### 16.6.1 Strahlschraubflächen

Nach #15.36 war die Auswirkung der Bewegung #16.4 auf die mit dem bewegten System mitgeführten Gerade  $\underline{\mathbf{g}}^o$  durch

$$\underline{\mathbf{g}}^o = \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{g}}^{o'} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}, \quad \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}} = 1 \quad \# 16.109$$

beschrieben. Differentiation von #16.109 ergibt

$$\dot{\underline{\mathbf{g}}} = \dot{\underline{\mathbf{D}}} \circ \underline{\mathbf{g}}^{o'} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}} + \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{g}}^{o'} \circ \dot{\underline{\tilde{\mathbf{D}}}} \quad \# 16.110$$

Eliminiert man hieraus  $\underline{\mathbf{g}}^o$  mit Hilfe von  $\underline{\mathbf{g}}^{o'} = \underline{\tilde{\mathbf{D}}} \circ \underline{\mathbf{g}}^o \circ \underline{\mathbf{D}}$ , so erhält man

$$\dot{\underline{\mathbf{g}}} = \dot{\underline{\mathbf{D}}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}} \circ \underline{\mathbf{g}}^o + \underline{\mathbf{g}}^o \circ \underline{\mathbf{D}} \circ \dot{\underline{\tilde{\mathbf{D}}}} \quad \# 16.111$$

Wegen #16.9 kann man #16.111 in der Gestalt

$$\dot{\underline{\mathbf{g}}} = \frac{1}{2} \underline{p} (\underline{\mathbf{a}}^o \circ \underline{\mathbf{g}}^o - \underline{\mathbf{g}}^o \circ \underline{\mathbf{a}}^o) = \underline{p} (\underline{\mathbf{a}}^o \times \underline{\mathbf{g}}^o) \quad \# 16.112$$

schreiben. Trennung von Real- und Dualteil ergibt

$$\dot{\underline{\mathbf{g}}} = \underline{\mathbf{a}}^o \times \underline{\mathbf{g}}^o, \quad \dot{\underline{\mathbf{g}}}^+ = (\underline{p} \underline{\mathbf{a}}^o + \underline{\mathbf{a}}^+) \times \underline{\mathbf{g}}^o + \underline{\mathbf{a}}^o \times \underline{\mathbf{g}}^+ \quad \# 16.113$$

Läßt man Multiplikation von #16.113 mit einer beliebigen reellen Konstanten  $\lambda \neq 0$  zu, so wird nach #16.17 die vorliegende Schraubung durch das homogene Vektorpaar  $\underline{\mathbf{a}}, \hat{\underline{\mathbf{a}}}$  festgelegt. Es ist dann

$$\lambda \dot{\underline{\mathbf{g}}} = \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{g}}^o, \quad \lambda \dot{\underline{\mathbf{g}}}^+ = \hat{\underline{\mathbf{a}}} \times \underline{\mathbf{g}}^o + \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{g}}^+ = (\underline{\mathbf{a}}^* + \underline{p} \underline{\mathbf{a}}) \times \underline{\mathbf{g}}^o + \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{g}}^+ \quad \# 16.114$$

Durch Verschraubung der gegebenen Geraden entsteht eine *Strahlschraubfläche* mit dem *Drall* #3.67

$$d = \frac{\dot{\underline{\mathbf{g}}} \dot{\underline{\mathbf{g}}}^+}{|\dot{\underline{\mathbf{g}}}|^2} = \frac{(\underline{\mathbf{a}} \hat{\underline{\mathbf{a}}}) - (\underline{\mathbf{a}} \underline{\mathbf{g}}^o)(\underline{\mathbf{a}} \underline{\mathbf{g}}^+ + \hat{\underline{\mathbf{a}}} \underline{\mathbf{g}}^o)}{|\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{g}}^o|^2} = - \frac{(\underline{\mathbf{a}} \underline{\mathbf{g}}^o)(\underline{\mathbf{a}} \underline{\mathbf{g}}^+ + \underline{\mathbf{a}}^* \underline{\mathbf{g}}^o)}{|\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{g}}^o|^2} + \underline{p} \quad \# 16.115$$

## Kapitel 16

Soll die erzeugte Strahlfäche eine *Schraubtorse* sein, so muß der Drall verschwinden, d.h. es muß

$$p = \frac{(\mathbf{a}\mathbf{g}^\circ)(\mathbf{a}\mathbf{g}^+ + \mathbf{a}^*\mathbf{g}^\circ)}{|\mathbf{a} \times \mathbf{g}^\circ|^2} \quad \# 16.116$$

sein. Nach #16.32 bedeutet dies, daß die gegebene Gerade Schraubtangente der vorliegenden Schraubung ist. Ist  $r$  der Abstand der Geraden  $\mathbf{g}$  von der Schraubachse  $\mathbf{a}$ ,  $\varphi$  der Winkel der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{g}$ , so läßt sich wegen #1.90 die Formel #16.115 in der Gestalt

$$d = r \cot \varphi + p \quad \# 16.117$$

darstellen. #16.117 reduziert sich für eine Schraubtorse ( $d = 0$ ) für  $\varphi = \frac{1}{2} \pi - \alpha$  (Fig.16.1) auf die schon bekannte Beziehung

$$\tan \alpha = -\frac{p}{r} \quad \# 16.118$$

Aus #3.79 und wegen #16.114 ergibt sich der Zentralpunkt der Schraubfläche

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{g}^\circ(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*, \mathbf{g}^\circ) - (\mathbf{a} \times \mathbf{g}^\circ)(\mathbf{a}\mathbf{g}^+) + \mathbf{a}(\mathbf{a}, \mathbf{g}^\circ, \mathbf{g}^+)}{|\mathbf{a} \times \mathbf{g}^\circ|^2} \quad \# 16.119$$

Man überzeugt sich leicht, daß  $\mathbf{s}$  der Fußpunkt des Gemeinlotes von Achse und Erzeugenden auf der letzteren ist. Da dies für jede Lage der Erzeugenden gilt, folgt, daß die Striktionslinie einer Strahlschraubfläche deren *Kehlschraublinie* ist. Die Tangente an die Striktionslinie ist daher die Schraubtangente des Punktes  $\mathbf{s}$ . Nach #16.16 ist deren Richtung

$$\mathbf{t} = p\mathbf{a} + \mathbf{a}^* + \mathbf{a} \times \mathbf{s} = p\mathbf{a} + \mathbf{a}^* + \frac{\mathbf{g}^\circ |\mathbf{a}|^2 (\mathbf{a}\mathbf{g}^+) - \mathbf{a}(\mathbf{a}\mathbf{g}^\circ)(\mathbf{a}\mathbf{g}^+) + (\mathbf{a} \times \mathbf{g}^\circ)(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*, \mathbf{g}^\circ)}{|\mathbf{a} \times \mathbf{g}^\circ|^2} \quad \# 16.120$$

Drückt man nach #1.42 auch  $\mathbf{a}^*$  im Dreibein  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{g}^\circ$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{g}^\circ$  aus, so nimmt #16.120 die Gestalt an

$$\mathbf{t} = p\mathbf{a} - (\mathbf{a}\mathbf{g}^\circ) \frac{\mathbf{a}^* \mathbf{g}^\circ + \mathbf{a}\mathbf{g}^+}{|\mathbf{a} \times \mathbf{g}^\circ|^2} \mathbf{a} + |\mathbf{a}|^2 \frac{\mathbf{a}^* \mathbf{g}^\circ + \mathbf{a}\mathbf{g}^+}{|\mathbf{a} \times \mathbf{g}^\circ|^2} \mathbf{g}^\circ \quad \# 16.121$$

an. Mit #16.115 ist dann

$$\mathbf{t} = d\mathbf{a} + |\mathbf{a}|^2 \frac{\mathbf{a}^* \mathbf{g}^\circ + \mathbf{a}\mathbf{g}^+}{|\mathbf{a} \times \mathbf{g}^\circ|^2} \mathbf{g}^\circ \quad \# 16.122$$

Da  $\mathbf{t}$  in der Tangentialebene von  $\mathbf{s}$  verläuft, muß sich dieser Vektor als Linearkombination der beiden orthogonalen, diese Tangentialebene aufspannenden Vektoren  $\mathbf{g}^\circ$  und  $\mathbf{g}^\circ \times (\mathbf{a} \times \mathbf{g}^\circ)$  darstellen lassen:

$$\mathbf{t} = d\mathbf{a} + |\mathbf{a}|^2 \frac{\mathbf{a}^* \mathbf{g}^\circ + \mathbf{a}\mathbf{g}^+}{|\mathbf{a} \times \mathbf{g}^\circ|^2} \mathbf{g}^\circ = u\mathbf{g}^\circ + v\mathbf{g}^\circ \times (\mathbf{a} \times \mathbf{g}^\circ) \quad \# 16.123$$

Die Koeffizienten  $u, v$  ergeben sich durch sukzessive Skalarmultiplikation #16.123 mit  $\mathbf{g}^\circ$  bzw.  $\mathbf{g}^\circ \times (\mathbf{a} \times \mathbf{g}^\circ)$ . Es ist

$$\mathbf{t} = \left[ d(\mathbf{a}\mathbf{g}^\circ) + |\mathbf{a}|^2 \frac{\mathbf{a}^* \mathbf{g}^\circ + \mathbf{a}\mathbf{g}^+}{|\mathbf{a} \times \mathbf{g}^\circ|^2} \right] \mathbf{g}^\circ + d\mathbf{g}^\circ \times (\mathbf{a} \times \mathbf{g}^\circ) \quad \# 16.124$$

Mit den Bezeichnungen von #16.117 und wegen #1.90 erhält #16.124 die Gestalt

$$\mathbf{t} = |\mathbf{a}| \left[ d \cos \varphi - \frac{r}{\sin \varphi} \right] \mathbf{g}^\circ + d |\mathbf{a}| \sin \varphi \frac{\mathbf{g}^\circ \times (\mathbf{a} \times \mathbf{g}^\circ)}{|\mathbf{a}| \sin \varphi} \quad \# 16.125$$

Für den *Striktionswinkel*  $\sigma$  der Strahlschraubfläche ergibt sich daher

$$\cot \sigma = \cot \varphi - \frac{r}{d \sin^2 \varphi} \quad \# 16.126$$

### 16.6.2 Hüllflächen

Unterwirft man eine beliebige Fläche

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) \quad \# 16.127$$

einer durch  $\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}$  festgelegten kontinuierlichen Schraubung, so hüllt sie eine Schraubfläche ein. Die Berührkurve (die sogenannte *Charakteristik*) von #16.127 mit der eingehüllten Fläche wird von jenen Punkten gebildet, deren Bahntangenten gleichzeitig Flächentangenten sind. In diesen Punkten sind die Flächennormalen aber auch Gewindestrahlen des mit der vorliegenden Schraubung verknüpften Strahlengewindes. Die Flächennormale eines Punktes hat nach #1.125 die PLÜCKER-Vektoren

$$\mathbf{n} = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v, \quad \mathbf{n}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{n} = \mathbf{x}_u (\mathbf{x} \mathbf{x}_v) - \mathbf{x}_v (\mathbf{x} \mathbf{x}_u) \quad \# 16.128$$

Soll #16.128 ein Gewindestrahl sein, so muß nach #16.67 die Bedingung  $\mathbf{n} \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{n}^* \mathbf{a} = 0$  erfüllt sein. Daher stellt

$$(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \hat{\mathbf{a}}) + (\mathbf{x}_u \mathbf{a})(\mathbf{x} \mathbf{x}_v) - (\mathbf{x}_v \mathbf{a})(\mathbf{x} \mathbf{x}_u) = 0 \quad \# 16.129$$

die zwischen den Parametern  $u$  und  $v$  bestehende Beziehung dar, welche die Charakteristik der Fläche bestimmt. Die durch Verschraubung dieser Charakteristik entstehende Fläche ist die gesuchte Hüllfläche.

### 16.6.3 Konstruktion der Charakteristik

Die Konstruktion der Charakteristik spezieller Flächengattungen gestaltet sich besonders einfach

#### 16.6.3.1 Charakteristik einer Ebene

Die *Charakteristik einer Ebene* ist die durch #16.49,50 festgelegte Gerade (Fig. 16.3). Da die Charakteristik selbst eine Schraubtangente ist, erzeugt deren Verschraubung die von der Ebene umhüllte *Schraubtorse*<sup>4</sup>.

#### 16.6.3.2 Charakteristik der Kugel

Um die Charakteristik einer Kugel zu ermitteln, suchen wir die Nullebene  $\mu$  des Kugelmittelpunktes  $M$  auf (Fig. 16.9.1). Da die durch  $M$  gehenden Nullstrahlen Kugelradien sind, ist der von  $\mu$  ausgeschnittene Großkreis  $C$  die gesuchte Charakteristik. Ihre Verschraubung ergibt die bekannte *Schraubrohrfläche*<sup>5</sup>.

Figur 19.9

#### 16.6.3.3 Charakteristiker von Drehflächen

Da bei *Drehflächen* alle Flächennormalen die Drehachse  $\mathbf{g}$  treffen (Fig. 16.9.2), müssen nach Satz 16.3.10 jene Flächennormalen, die gleichzeitig Nullstrahlen sind, auch die reziproke Polare  $\bar{\mathbf{g}}$  der Drehachse treffen. Läßt man daher einen Meridian  $m$  in seiner Ebene  $\mu$  um  $\mathbf{g}$  rotieren,

<sup>4</sup> WUNDERLICH [4] S.184

<sup>5</sup> WUNDERLICH [4] S.191 ff.

so erhält man Punkte der Charakteristik, indem man jeweils aus dem Schnittpunkt von  $\mu$  mit  $\bar{g}$  (das ist aber nach Satz 16.3.1 der Nullpunkt  $M$  der Ebene  $\mu$ ) auf  $m$  die Normale fällt.

Eine leichte Modifikation erfährt die Fig. 16.9.2, wenn die Drehachse ein Gewindestrahl ist. Dann wandert nach Satz 16.3.6 bei Rotation der Meridianebene  $\mu$  deren Nullpunkt  $M$  auf der Drehachse (Fig. 16.9.3). Die Charakteristik  $c$  ist dann der Ort der Lotfußpunkte aus den Nullpunkten  $M$  der Meridianebenen auf die zugehörigen Meridiane  $m$ .

Der oben beschriebene Sachverhalt findet Anwendung bei der Herstellung von Schraubnuten. Ist  $m$  eine Schneidkante eines Fräasers mit der Achse  $g$ , so erzeugt der Fräser, wenn er relativ zu Werkstück der vorgegebenen Schraubung unterworfen wird, eine Schraubfläche mit der Erzeugenden  $c^6$ .

---

<sup>6</sup> WUNDERLICH [2] Dort auch Lösung der umgekehrten Aufgabe, zu einer vorgegebenen Schraubfläche das geeignete Fräserprofil zu finden. Vgl. auch WUNDERLICH [4] S.194 ff.

# 17 Kontinuierliche Bewegungen

## 17.1 Momentaner Bewegungszustand eines starren Körpers

### 17.1.1 Momentanschraubung. Momentaner Geschwindigkeitszustand

Ein mit einem bewegten Koordinatensystem  $O'(x', y', z')$  starr mitgeführter Punkt werde in diesem System durch den Ortsvektor  $\mathbf{x}'$  festgelegt, Denken wir uns das bewegte Koordinatensystem zunächst mit dem festen Koordinatensystem inzident und durch eine vom jeweiligen Zeitpunkt  $t$  abhängige Schraubung in seine momentane Lage übergeführt, so können wir, unter Verwendung dualer Quaternionen, nach #15.37 die Bahn des bewegten Punkte im festen System durch

$$\underline{\mathbf{X}}(t) = \underline{\mathbf{D}}(t) \circ \underline{\mathbf{X}}' \circ \underline{\mathbf{D}}_\varepsilon(t), \quad \underline{\mathbf{D}}(t) \circ \underline{\mathbf{D}}(t) = 1 \quad \# 17.1, \# 17.2$$

darstellen. Die *Bahngeschwindigkeit* eines Punktes ergibt sich aus #17.1 durch Differentiation nach der Zeit  $t$

$$\dot{\underline{\mathbf{X}}} = \dot{\underline{\mathbf{D}}} \circ \underline{\mathbf{X}}' \circ \underline{\mathbf{D}}_\varepsilon + \underline{\mathbf{D}} \circ \dot{\underline{\mathbf{X}}}' \circ \underline{\mathbf{D}}_\varepsilon \quad \# 17.3$$

Eliminiert man hieraus  $\dot{\underline{\mathbf{X}}}'$ , so findet man

$$\underline{\mathbf{V}} = \dot{\underline{\mathbf{X}}} = \dot{\underline{\mathbf{D}}} \circ \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{X}} \circ \dot{\underline{\mathbf{D}}}_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{D}}_\varepsilon \quad \# 17.4$$

Hierin ist

$$\underline{\mathbf{V}} = \dot{\underline{\mathbf{X}}} = \varepsilon \mathbf{v} = \varepsilon \dot{\mathbf{x}} \quad \# 17.5$$

Da nach #2.24

$$(\dot{\underline{\mathbf{D}}} \circ \underline{\mathbf{D}}) \sim = \underline{\mathbf{D}} \circ \dot{\underline{\mathbf{D}}} \quad \# 17.6$$

ist und aus #17.2 durch Differentiation

$$\underline{\mathbf{D}} \circ \dot{\underline{\mathbf{D}}} + \dot{\underline{\mathbf{D}}} \circ \underline{\mathbf{D}} = 0 \quad \# 17.7$$

folgt, so erkennt man aus Satz 2.1.2.3.1, daß die in #17.4 auftretenden Koeffizienten

$$2\dot{\underline{\mathbf{D}}} \circ \underline{\mathbf{D}} = -2\underline{\mathbf{D}} \circ \dot{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\omega} = \bar{\omega} + \varepsilon \hat{\omega} \quad \# 17.8$$

duale Vektoren sind. #17.4 erhält daher die Gestalt

$$\underline{\mathbf{V}} = \dot{\underline{\mathbf{X}}} = \frac{1}{2}(\underline{\omega} \circ \underline{\mathbf{X}} - \underline{\mathbf{X}} \circ \underline{\omega}_\varepsilon) \quad \# 17.9$$

Auflösung in Real- und Dualteil ergibt

$$\varepsilon \mathbf{v} = \varepsilon \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}[(\bar{\omega} + \varepsilon \hat{\omega}) \circ (1 + \varepsilon \mathbf{x}) - (1 + \varepsilon \mathbf{x}) \circ (\bar{\omega} - \varepsilon \hat{\omega})] = \frac{1}{2}\varepsilon(2\hat{\omega} + \bar{\omega} \circ \mathbf{x} - \mathbf{x} \circ \bar{\omega}) \quad \# 17.10$$

Daher läßt sich die Geschwindigkeit eines der Bewegung unterworfenen Punktes wegen #2.14 in der Form

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \hat{\omega} + \bar{\omega} \times \mathbf{x} \quad \# 17.11$$

darstellen. Vergleich mit #16.18 läßt erkennen, daß die Geschwindigkeitsvektoren des momentanen Bewegungszustandes mit den Tangentenvektoren der durch

$$\bar{\omega}, \hat{\omega} \quad \# 17.12$$

bestimmten *Momentanschraubung* kollinear sind.

**Satz 17.1.1.1 (Hauptsatz der räumlichen Kinematik):** *Ein bewegter starrer Körper verhält sich in jedem Augenblick so, als wäre er der durch #17.12 festgelegten Momentanschraubung unterworfen<sup>1</sup>.*

Da es in #17.11 nicht nur auf die Richtung, sondern auch auf die Orientierung und den Betrag von  $\mathbf{v}$  ankommt, ist das den momentanen Geschwindigkeitszustand festlegende Vektorpaar #17.12 *inhomogen*.

**Satz 17.1.1.2:** *Der momentane Geschwindigkeitszustand eines bewegten Systems wird durch das inhomogene, geordnete Vektorpaar  $\overline{\omega}, \hat{\omega}$  bzw. durch den dualen Vektor  $\underline{\omega} = \overline{\omega} + \varepsilon \hat{\omega}$  festgelegt.*

Nach #16.22,23 wird der Parameter der Momentanschraubung durch

$$\rho = \frac{\overline{\omega} \hat{\omega}}{|\overline{\omega}|^2} \quad \# 17.13$$

deren Achse durch die PLÜCKER-Vektoren

$$\overline{\omega}, \quad \overline{\omega} = \hat{\omega} - \rho \overline{\omega} \quad \# 17.14$$

festgelegt. Setzt man  $|\overline{\omega}| = \omega$ , so lassen sich mit Hilfe der mit  $\overline{\omega}$  gleichorientierten Speerkoordinaten  $\mathbf{a}^\circ, \mathbf{a}^+$  die Vektoren #17.12,14 in der Form

$$\overline{\omega} = \omega \mathbf{a}^\circ, \quad \overline{\omega}^* = \omega \mathbf{a}^+, \quad \hat{\omega} = \omega (\mathbf{a}^+ + \rho \mathbf{a}^\circ) \quad \# 17.15$$

ausdrücken. Dann ist nach #17.11

$$\mathbf{v} = \omega (\mathbf{a}^+ + \mathbf{a}^\circ \times \mathbf{x}) + \omega \rho \mathbf{a}^\circ \quad \# 17.16$$

Wird

$$\rho = 0, \text{ d.h. } \overline{\omega} \hat{\omega} = 0 \quad \# 17.17$$

so reduziert sich die Momentanschraubung auf eine Momentandrehung mit  $\overline{\omega} = \omega \mathbf{a}^\circ$  als *Vektor der momentanen Winkelgeschwindigkeit*. Im Falle

$$\overline{\omega} = \mathbf{0}, \quad \hat{\omega} = \mathbf{v} \quad \# 17.18$$

liegt eine *momentane Parallelverschiebung* vor. Man kann sie auffassen als Drehung um die Ferngerade der zu  $\hat{\omega}$  normalen Ebenenstellung. Ist  $\overline{\omega} \equiv \mathbf{0}$ , so spricht man von einer *krummen Schiebung*.

Die Geschwindigkeit #17.16 eines Punktes  $\mathbf{x}$  enthält als Komponente die *Rotationsgeschwindigkeit*

$$\mathbf{v}_\omega = \omega (\mathbf{a}^+ + \mathbf{x} \times \mathbf{a}^\circ) = \overline{\omega}^* + \overline{\omega} \times \mathbf{x} \quad \# 17.19$$

**Figur 17.1**

die nach #1.60 das Moment des Stabes  $\overline{\omega}, \overline{\omega}^*$  #17.14 um den betrachteten Punkt  $\mathbf{x}$  darstellt. Hiezu tritt in Achsenrichtung die von der Lage des Punktes unabhängige *Translationsgeschwindigkeit*

$$\overline{\tau} = \omega \rho \mathbf{a}^\circ = \rho \overline{\omega} = \frac{(\overline{\omega} \hat{\omega})}{\omega^2} \overline{\omega}, \quad \tau = |\overline{\tau}| = |\rho| \omega \quad \# 17.20$$

Die Geschwindigkeit eines Punktes läßt sich daher in der Form

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\omega + \overline{\tau} \quad \# 17.21$$

darstellen (Fig.17.1). Aus #17.20 und #17.13 folgt

<sup>1</sup> Erstmals bei MOZZI [1], später bei CHASLES [1]

$$\hat{\omega} = \bar{\omega}^* + \bar{\tau}, \quad \rho = \frac{(\bar{\omega}\bar{\tau})}{\omega^2} \quad \# 17.22, \# 17.23$$

Aus #17.8 ergibt sich wegen #17.13

$$\underline{\omega} = \sqrt{|\underline{\omega}|^2} = \omega(1 + \varepsilon\rho) = \omega + \varepsilon \frac{(\bar{\omega}\bar{\tau})}{\omega} = \omega \underline{\rho} \quad \# 17.24$$

und

$$\underline{\omega} = \omega \underline{a}^\circ = \omega \underline{\rho} \underline{a}^\circ \quad \# 17.25$$

worin  $\underline{a}^\circ$  den die Achse repräsentierenden, mit  $\underline{\omega}$  gleichorientierten Speer darstellt.

**Satz 17.1.1.3:** *Der momentane Geschwindigkeitszustand eines bewegten Körpers ist festgelegt, wenn man den Vektor der momentanen Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}$  sowie den Geschwindigkeitsvektor  $\underline{v}$  eines Punktes  $\underline{x}$  kennt.*

Denn nach #17.11 ist dann auch  $\hat{\omega}$  bekannt. Aus #17.11 folgt sofort, daß  $\hat{\omega}$  die Geschwindigkeit des Koordinatenursprungs darstellt.

### 17.1.2 Die Bewegung einer Geraden

Nach Satz 16.3.9. trifft jede Bahnnormale der Bahn eines Punktes einer Geraden  $\underline{g}(\underline{g}, \underline{g}^*)$  deren reziproke Polare  $\bar{g}(\bar{g}, \bar{g}^*)$  bezüglich des durch die momentane Schraubung  $\bar{\omega}, \hat{\omega}$  festgelegten Nullsystems (Fig. 17.2). Beschränkt man demnach die Untersuchung des bewegten Körpers auf die Punkte einer seiner Geraden, so gilt

**Figur 17.2**

**Satz 171.2.1:** *Die momentane Bewegung einer Geraden  $\underline{g}$  kann man auffassen als Momentandrehung um ihre reziproke Polare  $\bar{g}$ .*

Beweis: Nach #16.63,64 gilt

$$\bar{g} = \bar{\omega}(\underline{g}\hat{\omega} + \underline{g}^*\bar{\omega}) - \underline{g}(\bar{\omega}\hat{\omega}), \quad \bar{g}^* = \hat{\omega}(\underline{g}\hat{\omega} + \underline{g}^*\bar{\omega}) - \underline{g}^*(\bar{\omega}\hat{\omega}) \quad \# 17.26$$

Der Vektor der momentanen Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}_g$  der Geraden  $\underline{g}$  um ihre reziproke Polare  $\bar{g}$  muß mit  $\underline{g}$  kollinear sein. Setzen wir also

$$\bar{\omega}_g = \lambda \underline{g}, \quad \bar{\omega}_g^* = \lambda \underline{g}^* \quad \# 17.27$$

so findet man nach #17.19 die von der Drehung um  $\bar{g}$  herrührende Geschwindigkeit eines Punktes  $\underline{x}$  von  $\underline{g}$ , welche dieselbe sein muß, die die Momentanschraubung dem Punkt nach #17.11 erteilt. Daher ist

$$\underline{v} = \bar{\omega}_g^* + \bar{\omega}_g \times \underline{x} = \lambda(\bar{g}^* + \bar{g} \times \underline{x}) = \hat{\omega} + \bar{\omega} \times \underline{x} \quad \# 17.28$$

Durch skalare Multiplikation von #17.28 mit  $\underline{g}$  finden wir mit #1.43

$$\underline{v}\underline{g} = \hat{\omega}\underline{g} + (\bar{\omega} \times \underline{x})\underline{g} = \hat{\omega}\underline{g} + \bar{\omega}(\underline{x} \times \underline{g}) = \hat{\omega}\underline{g} + \bar{\omega}\underline{g}^* = \lambda(\underline{g}\bar{g}^* + \underline{g}^*\bar{g}) \quad \# 17.29$$

Mit #17.26 ergibt sich

$$\hat{\omega}\underline{g} + \bar{\omega}\underline{g}^* = \lambda|\hat{\omega}\underline{g} + \bar{\omega}\underline{g}^*|^2 \quad \# 17.30$$

Daher ist der gesuchte Winkelgeschwindigkeitsvektor

$$\bar{\omega}_g = \frac{\bar{g}}{\hat{\omega}\underline{g} + \bar{\omega}\underline{g}^*} \quad \# 17.31$$

Aus #17.29 folgt ferner

$$\underline{v}\underline{g} = \hat{\omega}\underline{g} + \bar{\omega}\underline{g}^* \quad \# 17.32$$

**Satz 17.1.2.2:** Die Projektionen der Geschwindigkeitsvektoren der Punkte einer Geraden auf diese Gerade haben konstante Länge.

Speziell gilt

**Satz 17.1.2.3:** Steht der Geschwindigkeitsvektor eines Punktes auf einer seiner Trägergeraden normal, so gilt dies für alle Punkte der Geraden.

In diesem Falle folgt aus #17.32  $\hat{\omega} \mathbf{g} + \bar{\omega} \mathbf{g}^* = 0$ , d.h. die Geraden des Satzes 17.1.2.3 sind die Nullstrahlen des mit der Momentanschraubung verknüpften Gewindes. Hier versagt natürlich Formel #17.31 und Satz 17.1.2.1 findet keine Anwendung.

### 17.1.3 Bewegung einer Strecke

Sind  $A(\mathbf{a})$  und  $B(\mathbf{b})$  die Endpunkte einer Strecke  $AB$ , so sind deren Geschwindigkeiten

$$\mathbf{v}_A = \hat{\omega} + \bar{\omega} \times \mathbf{a}, \quad \mathbf{v}_B = \hat{\omega} + \bar{\omega} \times \mathbf{b} \quad \# 17.33$$

Aus #17.33 folgt

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AB} \quad \# 17.34$$

wobei

$$\mathbf{v}_{BA} = \bar{\omega} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad \# 17.45$$

gesetzt wurde. Nach #10.27 stellt #17.35 die Geschwindigkeit der Drehung von  $B$  um  $A$  um eine durch  $A$  gehende, durch den Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\bar{\omega}$  bestimmte Hilfsachse dar.

**Figur 17.3**

## 17.2 Festlegung der Bewegung eines starren Körpers durch Führungen

Nach Satz 17.1.1.1 ist der momentane Bewegungszustand eines starren Körpers eine Schraubung. Diese ist bekannt, sobald man das mit ihr verknüpfte Nullsystem in jedem Augenblick beherrscht. Die in Kap. 16.4 genannten Angabemöglichkeiten eines Nullsystems entsprechen den wichtigsten Möglichkeiten, die Bewegung eines starren Körpers festzulegen.

### 17.2.1 Führung zweier Punkte auf Kurven und Flächenführung eines weiteren Punktes

Führt man zwei Punkte  $A, B$  eines starren Körpers auf vorgegebenen Kurven und einen weiteren Punkt  $C$  auf einer gegebenen Fläche, so ist in jedem Augenblick der momentane Bewegungszustand eindeutig bestimmt (Fig. 17.4). Die Bahnnormalebene  $\alpha$  und  $\beta$  der Punkte  $A$  und  $B$  stellen die Nullebenen dieser Punkte dar, die Flächennormale  $\mathbf{s}$  ist als Bahnnormale des Punktes  $C$  nach Satz 16.3.4 ein Strahl des mit der Momentanschraubung verknüpften Gewindes. Da  $\mathbf{m} = (\mathbf{AB})$  und  $\bar{\mathbf{m}} = \alpha \cap \beta$  nach Satz 16.3.1 reziproke Polare sind, legen nach Kap. 16.4.1  $\mathbf{m}$ ,  $\bar{\mathbf{m}}$  und  $\mathbf{s}$  die Momentanschraubung eindeutig fest.

Bestimmt man die in  $(ABC)$  liegende Treffgerade  $\mathbf{s}_1$  aus  $C$  an  $\mathbf{m}$  und  $\bar{\mathbf{m}}$ , so stellt sie nach Satz 16.3.10 einen Nullstrahl, der Punkt  $C$  nach Satz 16.3.7 den Nullpunkt der Ebene  $\gamma = (\mathbf{s}, \mathbf{s}_1)$  dar. Die Normale  $\mathbf{t}_c$  in auf  $\gamma$  ist die Tangente der Bahn von  $C$ . Da man sich sofort weitere Paare reziproker Polaren - etwa  $(AC) = \mathbf{k}$ ,  $\alpha \cap \gamma = \bar{\mathbf{k}}$  - beschaffen kann, läßt sich nach Fig. 16.7 die Schraubachse, nach Kap. 16.1.3 (Fig. 16.1) der Schraubparameter ermitteln.

### 17.2.2 Kurvenführung eines Punktes und Flächenführung dreier weiterer Punkte

Führt man einen Punkt  $A$  eines starren Körpers auf einer gegebenen Kurve und drei Punkte  $B, C, D$  auf gegebenen Flächen (Fig. 17.5), so ist nach Kap. 16.4.2 die Momentanschraubung gleichfalls zu jedem Zeitpunkt festgelegt. Denn nach Satz 16.3.4

**Figur 17.5**

stellen die Flächennormalen  $s_1, s_2, s_3$  der Punkte drei Nullstrahlen, die Normalebene  $\alpha$  von A die Nullebene dieses Punktes dar.

Will man in einem der Punkte, etwa in B, die Bahntangente  $t_B$  ermitteln, so beschaffe man sich zunächst mit Hilfe der Nullebene  $\alpha$  von A sowie der Gewindestrahlen  $s_1$  und  $s_2$  nach dem Vorbild der Fig. 16.8 ein Paar von reziproken Polaren  $m, \bar{m}$ . Die Treffgerade  $s$  aus B an  $m, \bar{m}$  spannt zusammen mit  $s_1$  die Nullebene  $\beta$  von B auf.  $t_B$  ist dann deren Normale.

### 17.2.3 Flächenführung von fünf Punkten

Nach Kap. 16.4.3 ist der momentane Bewegungszustand bei Kenntnis von fünf Bahnnormalen bestimmt. Dies ist dann der Fall, wenn fünf Punkte des bewegten Körpers auf fünf gegebenen Flächen geführt werden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, daß der bewegte Körper so geführt wird, daß er dauernd an fünf vorgegebenen Stützflächen entlang gleitet. Die gemeinsamen Berührnormalen bestimmen dann das mit der Momentanschraubung verknüpfte Nullsystem.

Natürlich hätte man auch in den Figuren 17.4 und 17.5 die Flächenführung eines Punktes durch Flächenberührung ersetzen können.

Man beachte, daß es bei Flächenberührung bzw. Flächenführung nicht auf die Lage des Berührungspunktes auf der Flächennormalen ankommt

### 17.2.4 Anwendungsbeispiel (1)

Es soll die in Fig. 17.6.1 skizzierte Bewegung betrachtet werden: das bewegte System wird durch das Dreieck ABC repräsentiert, A bewege sich auf der mit der z-Achse zusammenfallenden Geraden  $t_A$ , B auf der parallel zur x-Achse verlaufenden Geraden  $t_B$ . Die Bahn von C liege in der xy-Ebene. Zu bestimmen sind die Bahntangente  $t_C$  der Bahn von C sowie die Momentanschraubung in der vorliegenden Stellung. Figur 17.6.1

Zur konstruktiven Durchführung dieser Aufgabe stellen wir eine Lage des bewegten Körpers in Grund- Auf- und Kreuzriß dar (Fig. 17.6.2). Die Bewegungsverhältnisse entsprechen dem in Kap. 17.2.1 (Fig. 17.4) geschilderten Sachverhalt. Die auf  $t_A$  bzw.  $t_B$  normalen Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  in A und B sind die Nullebenen dieser Punkte. Daher stellen nach Satz 16.3.1 die Verbindungsgerade  $g = (AB)$  und die Schnittgerade  $\bar{g} = \alpha \cap \beta$  ein Paar reziproker Polaren des mit der Momentanschraubung verbundenen Nullsystems dar. Da das Lot  $s$  in C auf die xy-Ebene als Normale auf die Bahn von C ein Nullstrahl ist, ist durch  $g, \bar{g}$  und  $s$  nach Kap. 16.4.1 das momentane Gewinde festgelegt. Figur 17.6.2

#### 17.2.4.1 Bahntangente

Die gesuchte Bahntangente  $t_C$  von C ist die Normale auf die Nullebene  $\gamma$  dieses Punktes. Nach Satz 16.3.3 genügt die Kenntnis zweier Nullstrahlen durch C, von denen  $s$  bereits bekannt ist; der zweite  $s_1$  ergibt sich nach Satz 16.3.10 als Treffgerade aus C an  $g$  und  $\bar{g}$ . Im Kreuzriß von Fig. 17.6.2 läßt sich  $s_1$  sofort einzeichnen und mit Hilfe des Punktes 1 auf  $g$  über den Aufriß in den Grundriß übertragen. Da  $s$  erstprojizierend ist, gilt dies auch für die von  $s$  und  $s_1$  aufgespannte Nullebene  $\gamma$  von C. Die gesuchte Bahntangente ist daher die Normale  $t_C$  auf  $\gamma'$  in C.

#### 17.2.4.2 Momentanachse

Um die Momentanachse zu finden, bedienen wir uns des in Fig. 16.7 angedeuteten Verfahrens. Zu diesem Zweck müssen wir uns zu dem bereits bekannten Paar reziproker Polaren  $g, \bar{g}$  ein weiteres Paar  $k, \bar{k}$  beschaffen. Wir finden es etwa als die Verbindungslinie  $k = (AC)$  sowie als Schnitterade  $\bar{k} = \alpha \cap \gamma$ . Da  $\bar{g}$  drittprojizierend ist, läßt sich das Gemeinlot  $l$  von  $g$  und  $\bar{g}$  im Kreuzriß sofort angeben und mit Hilfe der Punkte 2 und 3 auf  $g$  bzw.  $\bar{g}$  in Auf- und Grundriß übertragen. Das Gemeinlot  $m$  von  $k$  und  $\bar{k}$  findet man auf analoge Weise in einem vierten Riß

(Rißachse 14), in dem  $\bar{k}$  projizierend ist. Um das Gemeinlot  $\mathbf{a}$  von  $l$  und  $m$  zu ermitteln, bestimmen wir die durch  $l$  gehende, zu  $m$  parallele Ebene mit Hilfe der durch den Punkt 2 auf  $l$  gehenden Geraden  $\tilde{m} \parallel m$ . Mit Hilfe der beiden durch den Punkt 3 gehenden Hauptlinien dieser Ebene errichten wir im Punkt 2 die Normale  $n$ , welche die Richtung der Achse angibt. Der Schnittpunkt 7 von  $m$  mit der Ebene ( $ln$ ) ist ein Punkt der gesuchten Achse. Der Aufriß 6" des Punktes 6 der in ( $ln$ ) liegenden,  $m'$  überdeckenden Hilfsgeraden wurde mit Hilfe des Kreuzrisses ermittelt.

17.2.4.3 Parameter der Momentanschraubung

Die Ermittlung des Parameters der Momentanschraubung erfolgt nach Kap. 16.1.3 (Fig. 16.1) mit Hilfe des Punktes  $A$  und seiner Bahntangente  $t_A$ . Wie dort gezeigt, erhält man den Parameter, wenn man aus  $A$  die Normalebene auf die Achse  $\mathbf{a}$  fällt und deren Schnittpunkt 8 mit  $\mathbf{a}$  um einen rechten Winkel in die Lage 9 verdreht und die Parallele zu  $\mathbf{a}$  durch 9 mit der Schraubtangente schneidet.

In Fig. 17.6.2 wurde in einem Seitenriß (Rißachse (15)) die Normalebene  $\varepsilon$  aus  $A$  auf  $\mathbf{a}$  projizierend dargestellt und der Schnittpunkt 8 von  $\mathbf{a}$  und  $\varepsilon$  ermittelt. In der Paralleldrehung von  $\varepsilon$  um die 1. Spur.  $e_1$  gelangt 8<sub>0</sub> durch die genannte Rechtwinkelschwenkung nach 9<sub>0</sub>. Im Seitenriß ergibt sich der Parameter  $p$  auf der Parallelen zu  $\mathbf{a}^V$  durch 9<sup>V</sup> zwischen 9<sup>V</sup> und der Schraubtangente.

**17.3 Geschwindigkeitsverhältnisse**

**17.3.1 Geschwindigkeitsplan**

Trägt man die Geschwindigkeitsvektoren der Raumpunkte  $\mathbf{x}$  als Ortsvektoren  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}$  von einem Punkt  $O_1$  aus ab, so bilden die Punkte  $X_1(\mathbf{x}_1)$  mit

$$\mathbf{x}_1 = \hat{\omega} + \bar{\omega} \times \mathbf{x} \tag{\# 17.36}$$

den zum *Lageplan* der  $X(\mathbf{x})$  gehörigen *Geschwindigkeitsplan* (Fig. 17.7).

**Satz 17.3.1.1:** Die durch #17.36 vermittelte Abbildung  $X \rightarrow X_1$  zwischen Lageplan und Geschwindigkeitsplan stellt eine ausgeartete Affinität dar<sup>2</sup>.

Beweis: Die Geraden  $g$  mit der Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda g$  des Lageplanes entspricht die Gerade  $g_1$

$$\mathbf{x}_1 = (\hat{\omega} + \bar{\omega} \times \mathbf{a}) + \lambda \bar{\omega} \times g \tag{\# 17.37}$$

des Geschwindigkeitsplanes. Man erkennt, daß die vorliegende Abbildung parallelentreu ist. Da

**Figur 17.7** die Punkte entsprechender Geraden durch gleiche Parameterwerte  $\lambda$  aufeinander bezogen sind, sind entsprechende Punktreihen ähnlich. Multipliziert man #17.36 skalar mit  $\bar{\omega}$ , so erkennt man wegen

$$\bar{\omega} \mathbf{x}_1 = \bar{\omega} \hat{\omega} \tag{\# 17.38}$$

daß alle Punkte  $\mathbf{x}_1$  des Geschwindigkeitsplanes *derselben Ebene* mit den Ebenenkoordinaten

$$\mathbf{n}_1 = \bar{\omega}, \quad d_1 = \bar{\omega} \hat{\omega} = p \omega^2 \tag{\# 17.39}$$

angehören w.z.b.w.

In der Abbildung #17.36 wird jeder Punkt einer durch den Punkt  $\mathbf{a}$  gehenden, zur Schraubachse  $\mathbf{a}$  parallelen Geraden  $l$

$$l = \bar{\omega}, \quad l^* = \mathbf{a} \times \bar{\omega} \tag{\# 17.40}$$

<sup>2</sup>MEHMKE [1]

wegen #17.37 in denselben Punkt

$$\mathbf{l}_1 = \hat{\omega} - \mathbf{l}^* \quad \# 17.41$$

abgebildet.

**Satz 17.3.1.2:** *Alle Punkte einer zur Momentanachse parallelen Geraden haben dieselbe Geschwindigkeit.*

Da i.a. die Ebene #17.39 nicht durch  $O_1$  hindurchgeht, gibt es keine Punkte des Lageplanes, deren Geschwindigkeit verschwindet. Die mögliche Minimalgeschwindigkeit wird vom Fußpunkt  $T_1$  des Lotes aus  $O_1$  auf die Ebene bestimmt. Nach #1.70 ergibt sich mit #17.20

$$\vec{O_1 T_1} = \frac{\overline{\omega} \hat{\omega}}{\omega^2} \overline{\omega} = p \overline{\omega} = \bar{\tau} \quad \# 17.42$$

Aus #17.41 folgt daher für  $\mathbf{x}_1 = \bar{\tau}$ , daß alle Punkte der Geraden

$$\mathbf{g} = \overline{\omega}, \quad \mathbf{g}^* = \hat{\omega} - \bar{\tau} = \hat{\omega} - p \overline{\omega} = \overline{\omega}^* \quad \# 17.43$$

d.i. aber der Schraubachse, minimale Geschwindigkeit haben. Man nennt  $\bar{\tau}$  die *Translationsgeschwindigkeit*.

**Satz 17.3.1.3:** *Die Punkte der momentanen Schraubachse sind dadurch gekennzeichnet, daß sie minimale Geschwindigkeit  $\bar{\tau}$  aufweisen.*

Nur im Falle einer Momentandrehung geht wegen  $p = 0$  nach #17.39 die Ebene durch den Ursprung. Dann ist  $\bar{\tau} = \mathbf{o}$ . Alle Punkte der momentanen Drehachse ruhen daher.

Im Falle einer momentanen Parallelverschiebung ( $\overline{\omega} = 0$ ) reduziert sich der Geschwindigkeitsplan nach #17.36 auf einen einzigen Punkt  $\mathbf{x}_1 = \hat{\omega}$ .

**Satz 17.3.1.4:** *Trägt man die Geschwindigkeitsvektoren der Punkte einer Geraden im Lageplan von den Punkten selbst ab, so erfüllen deren Endpunkte eine auf die gegebene Gerade ähnlich bezogene Punktreihe<sup>3</sup>.*

Denn aus #17.37 folgt

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{x}_1 = (\mathbf{a} + \hat{\omega} + \overline{\omega} \times \mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{g} + \overline{\omega} \times \mathbf{g}) \quad \# 17.44$$

Die Geschwindigkeitsverhältnisse des bewegten Systems beherrscht man, sobald zu drei Punkten A,B,C die entsprechenden Punkte  $A_1, B_1, C_1$  des Geschwindigkeitsplanes bekannt sind (Fig. 17.8). Fällt man nämlich aus dem Ursprung  $O_1$  des Geschwindigkeitsplanes auf die durch

$A_1, B_1, C_1$  aufgespannte Ebene das Lot, so stellt nach #17.42 bzw. Satz 17.3.1.3  $\vec{O_1 T_1} = \bar{\tau}$  die Translationsgeschwindigkeit und damit die Richtung der Momentanachse dar. Be-

zieht man die entsprechenden Ebenen auf die affinen Koordinatensysteme mit den Ursprüngen A bzw.  $A_1$  und den Einheitspunkten B, C bzw.  $B_1, C_1$  auf den Achsen, so läßt sich der  $T_1$  entsprechende Punkt T mit Verwendung der Hilfspunkte  $1_1, 2_1$  bzw.  $1, 2$  vermöge der Teilverhältnistreue

$$A1:B1 = A_1 1_1 : B_1 1_1, \quad A2:C2 = A_1 2_1 : C_1 2_1 \quad \# 17.45$$

aufsuchen. Damit ist die Lage der Momentanachse bestimmt. Nach #17.21 stellt

$$\mathbf{v}_{A\omega} = \mathbf{v}_A - \bar{\tau} \quad \# 17.46$$

die momentane Rotationsgeschwindigkeit #17.19 des Punktes A dar. Nach Kap.4.3.2 läßt sich dann  $\overline{\omega}$  konstruieren.

**Figur 17.8**

<sup>3</sup> BURMESTER [1]

Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes  $X$  kann man nunmehr direkt nach #17.21 ermitteln, indem man zuerst nach Kap.4.3.1 oder Kap.4.4 die momentane Rotationsgeschwindigkeit bestimmt und dann  $\bar{\tau}$  hinzufügt. Eine andere Möglichkeit besteht in Auswertung von Satz 17.3.1.2 (Fig.17.8), indem man die Parallele zur Momentanachse durch  $X$  mit  $(ABC)$  in  $Y$  schneidet. Der entsprechende Punkt  $Y_1 = X_1$  des Geschwindigkeitsplanes legt die gesuchte Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_X = \mathbf{v}_Y$  fest.

### 17.3.2 Motoren

Hat man nach Ermittlung der Momentanachse  $\mathbf{a}$ ,  $\bar{\omega}$  und  $\bar{\tau}$  von zahlreichen Punkten  $X$  den Geschwindigkeitsvektor #17.21 zu ermitteln, so wird man wie in Kap.4.5 (Fig.4.3) die Schraubachse projizierend machen und mit Hilfe des Winkels  $\theta$ , der durch  $\tan\theta = \omega$  festgelegt ist, zunächst die Rotationsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_w$  ermitteln (Fig.17.9.1).

Addition des Vektors  $\bar{\tau}$  ergibt die gesuchte Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  des Punktes  $X$ . Faßt man die Schenkel des Winkels  $\theta$  als Grundrisse  $m'_1$  und  $m'_2$  zweier Geraden  $m_1$  und  $m_2$  auf, welche die Schraubachse  $\mathbf{a}$  unter rechtem Winkel schneiden und deren Abstand gleich dem Betrag  $\tau$  der Rotationsgeschwindigkeit ist, so erhält man den Geschwindigkeitsvektor eines Punktes  $X$  durch folgende Vorschrift (Fig.17.9.2): Man fälle aus dem Punkt  $X$  auf die beiden Geraden  $m_1$  und  $m_2$  die Normalebenen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  und schneide dieselben mit  $m_1$  und  $m_2$  in den Punkten  $V_2$  bzw.  $V_1$ . Dann ist  $\mathbf{v} = \vec{V_1V_2}$  der Geschwindigkeitsvektor des Punktes  $X$ .

Das geordnete Paar  $m_1, m_2$  nennt man nach STUDY<sup>4</sup> einen *Motor*. Der Abstand

$$\hat{\theta} = \rho\omega = \tau \quad \# 17.47$$

heißt *Länge*, die Größe

$$\tan\theta = \omega \quad \# 17.48$$

*Öffnung* des Motors. Die Gerade  $\mathbf{a}$  ist seine Achse.

**Satz 17.3.2.1:** *Durch Angabe des Motors  $(m_1, m_2)$  ist der momentane Bewegungszustand eines Körpers festgelegt.*

Ein Motor mit verschwindender Länge ( $\rho = 0$ ) legt eine momentane Drehung (*Rotor*), ein Vektor mit verschwindender Öffnung ( $\theta = \omega = 0$ ) eine momentane Parallelverschiebung fest (*Translator*). Die Momentanachse ist in letzterem Falle unbestimmt.

Auf Grund der Ausführungen in Kap.4.5 gilt

**Satz 17.3.2.2:** *Alle orientierten Geradenpaare, die aus einem Motor  $(m_1, m_2)$  durch Verschraubung um dessen Achse entstehen, bestimmen denselben momentanen Bewegungszustand.*

Ist der momentane Bewegungszustand durch Angabe der Achse  $\mathbf{a}$ ,  $\bar{\omega}$  und  $\bar{\tau}$  festgelegt, so kann man  $m_1$  die Achse  $\mathbf{a}$  orthogonal schneidend, sonst aber beliebig annehmen. Dann ist  $m_2$  durch Öffnung und Länge eindeutig festgelegt.

Legen wir die Achse  $\mathbf{a}$  sowie  $m_1$  durch die dualen Einheitsvektoren  $\underline{\mathbf{a}}^\circ$  und  $\underline{\mathbf{m}}_1^\circ$  fest, wobei nach Satz 3.2.2.1  $\underline{\mathbf{a}}^\circ \underline{\mathbf{m}}_1^\circ = 0$  sein muß. Die zweite Gerade des Motors schließt mit der ersten den dualen Winkel #3.41  $\underline{\theta} = \theta + \varepsilon\hat{\theta}$  ein. Nach Satz 15.4.3 erhält man

$$\underline{\mathbf{m}}_2^\circ = (\cos\underline{\theta} + \underline{\mathbf{a}}^\circ \sin\underline{\theta}) \circ \underline{\mathbf{m}}_1^\circ \quad \# 17.49$$

<sup>4</sup> STUDY [1], MISES [1], STRUBECKER [1]

Ist umgekehrt ein Motor durch das geordnete Paar  $\underline{\mathbf{m}}_1^0, \underline{\mathbf{m}}_2^0$  festgelegt, so ist dadurch der momentane Bewegungszustand charakterisiert. Nach #3.46 ist

$$\underline{\mathbf{m}}_1^0 \times \underline{\mathbf{m}}_2^0 = \underline{\mathbf{a}}^0 \sin \theta \quad \# 17.50$$

worin  $\underline{\mathbf{a}}^0$  das Gemeinlot der gegebenen Geraden ist. Wählen wir nach Satz 16.5.2 einen dualen Faktor  $\underline{\lambda}$  so, daß

$$\underline{\lambda} \underline{\mathbf{m}}_1^0 \times \underline{\mathbf{m}}_2^0 = \underline{\lambda} \underline{\mathbf{a}}^0 \sin \theta = \underline{\omega} = \underline{\omega} \underline{\mathbf{a}}^0 \quad \# 17.51$$

wird, dann muß

$$\underline{\lambda} \sin \theta = \underline{\omega} \quad \# 17.52$$

sein, oder wegen #17.24,47,48 sowie #3.31

$$(\lambda + \varepsilon \hat{\lambda})(\sin \theta + \varepsilon \hat{\theta} \cos \theta) = \omega + \varepsilon \rho \omega = \tan \theta + \varepsilon \hat{\theta} \quad \# 17.53$$

Hieraus folgt

$$\lambda = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\mathbf{m}_1^0 \mathbf{m}_2^0}, \quad \hat{\lambda} = 0 \quad \# 17.54$$

Daher ist die durch den Motor  $\underline{\mathbf{m}}_1^0, \underline{\mathbf{m}}_2^0$  festgelegte Schraubung

$$\underline{\omega} = \frac{\underline{\mathbf{m}}_1^0 \times \underline{\mathbf{m}}_2^0}{\mathbf{m}_1^0 \mathbf{m}_2^0} \quad \# 17.55$$

Trennung von Real- und Dualteil ergibt

$$\underline{\omega} = \frac{\mathbf{m}_1^0 \times \mathbf{m}_2^0}{\mathbf{m}_1^0 \mathbf{m}_2^0}, \quad \hat{\omega} = \frac{\mathbf{m}_1^0 \times \mathbf{m}_2^+ + \mathbf{m}_1^+ \times \mathbf{m}_2^0}{\mathbf{m}_1^0 \mathbf{m}_2^0} \quad \# 17.56$$

Aus den vorangegangenen Überlegungen folgt

**Satz 17.3.2.3:** *Durch einen dualen Vektor  $\underline{\omega}$  wird ein Motor bis auf Schraubungen um seine Achse festgelegt und umgekehrt entspricht jedem Motor ein dualer Vektor.*

### 17.3.3 Konstruktive Behandlung der Geschwindigkeitsverhältnisse

Wir wollen die momentanen Geschwindigkeitsverhältnisse eines bewegten Körpers untersuchen, wenn die Bewegung auf eine der in Kap.17.2 beschriebenen Arten festgelegt und die momentane Geschwindigkeit eines Punktes gegeben ist.

Zu besserer Übersicht führen wir folgende Bezeichnungen ein

- |   |   |         |
|---|---|---------|
| <b>a</b> ... bekannter Vektor   | } | # 17.57 |
| <b>(a)</b> ... Vektor bekannter Richtung (Vektor ist parallel zu einer gegebenen Geraden) |   |         |
| <b>[a]</b> ... Vektor bekannter Stellung (Vektor ist parallel zu einer gegebenen Ebene)   |   |         |
| <b>{a}</b> ... unbekannter Vektor   |   |         |

#### 17.3.3.1 Kurvenführung zweier Punkte und Flächenführung eines weiteren Punktes

Es bewege sich (Fig.17.4) der Punkt A auf einer Kurve mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_A$ . B beschreibe gleichfalls eine Kurve, während C auf einer Fläche geführt werde. Die Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_B$  bzw.  $\mathbf{v}_C$  dieser Punkte sind anzugeben.

Da die Tangente  $t_B$  der Bahn von B bekannt ist, ist  $(\mathbf{v}_B)$  ein Vektor gegebener Richtung. Aus #17.35 folgt, daß der Vektor  $[\mathbf{v}_{BA}]$  von #17.34 ein Vektor bekannter Stellung ist, da er in der

Normalebene auf die Verbindungsgerade der beiden Punkte A,B liegen muß. Die Vektorgleichung

$$(\mathbf{v}_B) = \mathbf{v}_A + [\mathbf{v}_{BA}] \quad \#17.58$$

ist daher im Geschwindigkeitsplan lösbar (Fig. 17.10.1). Man trage von Ursprung  $O_1$  den gegebenen Vektor  $\vec{O_1A_1} = \mathbf{v}_A$  ab und konstruiere in  $A_1$  die Ebene  $[\mathbf{v}_{BA}]$  normal zur Geraden (AB) des Lageplanes. Legt man durch  $O_1$  die Gerade  $(\mathbf{v}_B)$  der Richtung  $t_B$ , so trifft sie diese Ebene im Endpunkt  $B_1$  des Vektors  $\mathbf{v}_B = \vec{O_1B_1}$ .

**Figur 17.10**

Zweimalige Anwendung der soeben besprochenen Konstruktion ergibt den Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_C$  (Fig. 17.10.2). Da  $\mathbf{v}_C$  in der Tangentialebene  $\varepsilon$  der Fläche liegt (Fig. 17.4), ist seine Stellung bekannt:

$$[\mathbf{v}_C] = \mathbf{v}_A + [\mathbf{v}_{CA}] = \mathbf{v}_B + [\mathbf{v}_{BC}] \quad \# 17.59$$

Zeichnet man also im Geschwindigkeitsplan  $\mathbf{v}_A$  und den nunmehr bekannten Vektor  $\mathbf{v}_B$ , in deren Endpunkten die Ebenen mit den zu den Geraden (AC) bzw. (BC) des Lageplanes normalen Ebenenstellungen  $[\mathbf{v}_{CA}]$  bzw.  $[\mathbf{v}_{CB}]$  durch  $O_1$ , so ist  $\vec{O_1C_1} = \mathbf{v}_C$  der gesuchte Vektor.

Hätte man die Tangente  $t_C$  nach Kap.172.1 auf geometrischem Wege ermittelt, so hätte man mit der zur Bestimmung von  $\mathbf{v}_B$  angewendeten Konstruktion das Auslangen gefunden.

Da jetzt die Geschwindigkeiten dreier Punkte bekannt sind, ist die ausgeartete Affinität von Satz 17.3.1.1 bestimmt und es können die Konstruktionen nach Fig. 17.8 Anwendung finden.

17.3.3.2 Kurvenführung eines Punktes und Flächenführung dreier weiterer Punkte

Die Bewegung sei nunmehr dadurch festgelegt, daß der Punkt A auf einer Kurve mit der momentanen Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_A$ , die Punkte B,C,D sich auf gegebenen Flächen bewegen (Fig. 17.5). Da die Geschwindigkeitsvektoren  $\mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C, \mathbf{v}_D$  in den Tangentialebenen dieser Flächen liegen, ist ihre Stellung bekannt und es ist

$$[\mathbf{v}_B] = \mathbf{v}_A + [\mathbf{v}_{BA}], \quad [\mathbf{v}_C] = \mathbf{v}_A + [\mathbf{v}_{CA}], \quad [\mathbf{v}_D] = \mathbf{v}_A + [\mathbf{v}_{DA}] \quad \# 17.60$$

Im Geschwindigkeitsplan liegen daher die Endpunkte  $B_1, C_1, D_1$  der Vektoren

$\mathbf{v}_B = \vec{O_1B_1}, \mathbf{v}_C = \vec{O_1C_1}, \mathbf{v}_D = \vec{O_1D_1}$ , auf je einer Geraden  $b_1, c_1, d_1$ . Die Gerade  $b_1$  z.B. ist die Schnittgerade der zur Tangentialebene von B parallelen Ebene  $[\mathbf{v}_B]$  mit  $[\mathbf{v}_{BA}]$ , welche letztere auf die Gerade (AB) des Lageplanes normal ist. Wählen wir eine in  $\lambda$  lineare Parameterdarstellung der Punkte  $B_1(\lambda)$  der Geraden  $b_1$ , so ist  $\mathbf{v}_B(\lambda)$  eine lineare Funktion von  $\lambda$ . Daher sind auch

$$\mathbf{v}_C(\lambda) = \mathbf{v}_B(\lambda) + [\mathbf{v}_{CB}(\lambda)], \quad \mathbf{v}_D(\lambda) = \mathbf{v}_B(\lambda) + [\mathbf{v}_{DB}(\lambda)] \quad \# 17.61$$

lineare Funktionen von  $\lambda$ . Im Geschwindigkeitsplan sind  $C_1(\lambda)$  und  $D_1(\lambda)$  jene Punkte, die aus den Geraden  $c_1$  und  $d_1$  durch die Ebenen der Stellungen  $[\mathbf{v}_{CB}] \perp CB$  bzw.  $[\mathbf{v}_{DB}] \perp DB$ , die durch  $B_1(\lambda)$  gehen, ausgeschnitten werden.

Schließlich kann man auch mit Hilfe von #17.61 den Ansatz

$$\mathbf{v}'_D(\lambda) = \mathbf{v}_C(\lambda) + [\mathbf{v}_{DC}(\lambda)] \quad \# 17.62$$

machen.  $D'_1(\lambda)$  wird auf  $d_1$  durch die durch  $C_1(\lambda)$  gehende Ebene der Stellung  $[\mathbf{v}_{DC}] \perp DC$  bestimmt.

Wir erhalten daher auf der Geraden  $d_1$  zwei Punktreihen  $D_1(\lambda)$  und  $D'_1(\lambda)$ , die von  $\lambda$  linear abhängen und daher ähnlich sind. Der Doppelpunkt  $D_1(\lambda) = D'_1(\lambda)$  legt den gesuchten Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_D = \vec{O_1D_1}$  fest. Um ihn zu finden, bestimme man auf  $d_1$  die zu zwei

**Figur 17.11**

Parameterwerten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  (d.h. zu zwei beliebig auf  $b_1$  gewählten Punkten  $B_1^1, B_1^2$ ) gehörigen Punkte  $D_1(\lambda_1), D_1(\lambda_2); D_1'(\lambda_1), D_1'(\lambda_2)$ . Mit Hilfe von zwei durch diese Punkte gelegte Parallelenpaare bliebig Richtung (Fig. 17.11) ergibt sich auf bekannte Weise der Doppelpunkt  $\bar{D}_1$ . Rückschreitend ergeben sich im Geschwindigkeitsplan dann die Punkte  $\bar{C}_1$  und  $\bar{D}_1$ . Damit beherrscht man nach Fig. 17.8 den gesamten Geschwindigkeitszustand.

Viel rascher kommt man ans Ziel, wenn man auf rein geometrischem Wege nach Kap. 17.22 die Bahntangenten  $t_B, t_C, t_D$  aufsucht und dann die Konstruktion nach Fig. 17.10.1 anwendet.

### 17.3.4 Anwendungsbeispiel (2)

Bei der in Kap. 17.2.4 (Fig. 17.6) betrachteten Bewegung wollen wir die Geschwindigkeitsverhältnisse unter der Voraussetzung untersuchen, daß die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_A$  des Punktes A gegeben sei (Fig. 17.12.1). Im Geschwindigkeitsplan (Fig. 17.12.2, Ursprung  $O_1$ , Figur 17.12 Rißachse  $(1_1 2_1)$ , zur Vermeidung von Überdeckungen wurden Auf- und Grundriß in Ordnerichtung auseinandergesogen) tragen wir zunächst den gegebenen Vektor

$\mathbf{v}_A = \vec{O_1 A_1}$  ein, sowie parallel zur Geraden  $t_B$  des Lageplanes durch  $O_1$  die Richtung  $(\mathbf{v}_B)$ .

Nach #17.58 haben wir im Punkt  $A_1$  die Normalebene  $[\mathbf{v}_{BA}]$  auf die Gerade  $AB$  des Lageplanes zu errichten. Wir legen sie durch ihre Spuren  $e_{2BA} \perp A''B''$  und  $e_{1BA} \perp A'B'$  fest. Da  $(\mathbf{v}_B)$  der Grundrißebene angehört, ist  $B_1 = (\mathbf{v}_B) \cap e_{1BA}$  und  $\mathbf{v}_B = \vec{O_1 B_1}$ .

#### 17.3.4.1 Geschwindigkeiten

Zur Ermittlung von  $\mathbf{v}_C$  haben wir nach #17.59 die Ebenen  $[\mathbf{v}_{CA}]$  und  $[\mathbf{v}_{CB}]$  durch  $A_1$  bzw.  $B_1$  normal zu den Geraden  $AC$  bzw.  $BC$  zu legen. Wir bedienen uns wieder der Spuren dieser Ebenen und zwar ist  $e_{2CA} \perp A''C''$ ,  $e_{1CA} \perp A'C'$ ,  $e_{1CB} \perp B'C'$ . Da  $[\mathbf{v}_C]$  mit der Grundrißebene des Geschwindigkeitsplanes zusammenfällt, ist durch  $C_1 = e_{1CA} \cap e_{1CB}$  der Vektor  $\mathbf{v}_C = \vec{O_1 C_1}$  bestimmt. Auch die Vektoren  $\mathbf{v}_{BA} = \vec{A_1 B_1}$ ,  $\mathbf{v}_{CA} = \vec{A_1 C_1}$ ,  $\mathbf{v}_{CB} = \vec{B_1 C_1}$  lassen sich dem Geschwindigkeitsplan unmittelbar entnehmen.

#### 17.3.4.2 Momentanachse und Translationsgeschwindigkeit

Um die Momentanachse und die Translationsgeschwindigkeit zu ermitteln, haben wir nach Fig. 17.8 aus  $O_1$  das Lot  $a_1$  auf die Ebene  $(A_1 B_1 C_1)$  zu fällen, sein Schnittpunkt  $T_1$  ergibt in  $\vec{\tau} = \vec{O_1 T_1}$  die Translationsgeschwindigkeit der Bewegung. Die Aufsuchung des  $T_1$  entsprechenden Punktes im Lageplan nach #17.45 ergibt den Punkt minimaler Geschwindigkeit der Ebene  $(ABC)$ . Durch ihn geht die Momentanachse  $a \parallel a_1$ .

#### 17.3.4.3 Momentane Winkelgeschwindigkeit

Um den Vektor  $\bar{\omega}$  der momentanen Winkelgeschwindigkeit zu ermitteln, bestimmen wir zunächst mit Hilfe von #17.46 den Vektor  $\mathbf{v}_{A\omega}$  #17.19, dessen Betrag  $v_{A\omega} = l\omega$  ist, worin  $l$  den Abstand des Punktes A von der Momentanachse  $a$  bedeutet. Zur Bestimmung von  $l$  schneiden wir  $a$  mit der Normalebene  $\varepsilon$  aus A auf  $a$  im Punkte D.  $\varepsilon$  erscheint in einem Seitenriß (Rißachse  $13 \parallel a'$ , Fig. 17.12.1) projizierend. Die Parallele zu  $a$  durch den Endpunkt des Vektors  $\mathbf{v}_A$  schneidet  $\varepsilon$  im Enpunkt des Vektors  $\mathbf{v}_{A\omega}$ . Dreht man  $\varepsilon$  in die Grundrißebene, so kann man der Umklappung die Größen  $v_{A\omega z}$  und  $l_z$  entnehmen. Nach #4.17 ist  $\omega_z : c = v_{A\omega z} : l_z$ . Mit Hilfe der Fig. 17.12.3 läßt sich  $\omega_z$  ermitteln.

Aus dem in der Umklappung erkennbaren Drehsinn von  $\mathbf{v}_{A\omega}$  um  $S_0$  entnimmt man die Orientierung von  $\bar{\omega}$ . Da in vorliegendem Beispiel  $\bar{\omega}$  und  $\vec{\tau}$  entgegengesetzt orientiert sind, liegt eine momentane Linksschraubung vor.

Aus #17.20 folgt für die zeichnerische Darstellung des Parameters  $\omega_z:c = \tau_z:p_z$ . Fig.17.12.3 zeigt die Auswertung dieser Formel.

## 17.4 Beschleunigungsverhältnisse

### 17.4.1 Momentane Winkelbeschleunigung. Momentane Translationsbeschleunigung

Für die momentane Geschwindigkeit eines Punktes  $\mathbf{x}$  ergab sich nach #17.11 bzw. #17.21

$$\mathbf{v} = \hat{\omega} + \bar{\omega} \times \mathbf{x} = \mathbf{v}_\omega + \bar{\tau} \quad \# 17.63$$

Durch Differentiation nach der Zeit folgen daraus für die Beschleunigung folgende Ausdrücke

$$\mathbf{b} = \dot{\mathbf{v}} = \hat{\beta} + \bar{\beta} \times \mathbf{x} + \bar{\omega} \times \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}}_\omega + \mathbf{b}_\tau \quad \# 17.64$$

Dabei werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\hat{\omega} = \bar{\beta}, \quad |\bar{\beta}| = \beta \quad (\hat{\omega})' = \hat{\beta} \quad \dot{\tau} = \mathbf{b}_\tau, \quad |\mathbf{b}_\tau| = b_\tau \quad \# 17.65$$

Wir nennen  $\bar{\beta}$  den *Vektor der momentanen Winkelbeschleunigung*,  $\mathbf{b}_\tau$  den *Vektor der momentanen Translationsbeschleunigung*.

Aus #17.20 ergibt sich durch Differentiation

$$\mathbf{b}_\tau = \dot{\rho}\bar{\omega} + \rho\bar{\beta} \quad \# 17.66$$

aus #17.13

$$\dot{\rho} = \frac{\bar{\beta}\hat{\omega} + \bar{\omega}\hat{\beta}}{|\bar{\omega}|^2} - 2\rho \frac{\bar{\omega}\bar{\beta}}{|\bar{\omega}|^2} \quad \# 17.67$$

Eliminiert man mit #17.63 aus #17.64 den Vektor  $\mathbf{v}$ , so findet man für die Beschleunigung von  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{b} = \bar{\beta} \times \mathbf{x} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{x}) + \hat{\beta} + \bar{\omega} \times \hat{\omega} \quad \# 17.68$$

Man erkennt, daß

$$\mathbf{b}_0 = \hat{\beta} + \bar{\omega} \times \hat{\omega} \quad \# 17.69$$

die Beschleunigung des Ursprungs  $O$  ist.

**Satz 17.4.1.1:** *Der momentane Beschleunigungszustand eines Körpers ist durch die Vektoren  $\bar{\omega}, \hat{\omega}, \bar{\beta}, \hat{\beta}$  bestimmt.*

**Figur 17.13** Aus #17.66 folgt, daß  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{\beta}$ , und  $\mathbf{b}_\tau$  komplanar sind. Vektorielle Multiplikation dieser Gleichung mit  $\bar{\omega}$  ergibt wegen #17.20

$$\bar{\omega} \times \mathbf{b}_\tau = \rho \bar{\omega} \times \bar{\beta} \quad \# 17.70$$

Sind  $\varphi$  und  $\psi$  die Winkel, welche  $\bar{\beta}$  und  $\mathbf{b}_\tau$  mit der momentanen Schraubachse einschließen, so erhält man für die Beträge der beiden Seiten von #17.70  $\omega b_\tau \sin \psi = |\rho| \omega \beta \sin \varphi$ , daher

$$\frac{b_\tau \sin \psi}{\beta \sin \varphi} = |\rho| = \frac{\tau}{\omega} \quad \# 17.71$$

daher (siehe Fig.17.13)

**Satz 17.4.1.2:** *Das Verhältnis der zur Schraubachse normalen Komponenten der Winkelbeschleunigung und der Translationsbeschleunigung ist gleich dem Betrag des Parameters der Momentanschraubung.  $\bar{\beta}$  und  $\mathbf{b}_\tau$  liegen bei Rechtsschraubung auf derselben, bei Linksschraubung auf verschiedenen Seiten der Momentanschraubachse.*

Es ist zweckmäßig, so wie wir dies bei den Vektoren  $\bar{\omega}$ ,  $\hat{\omega}$  taten, auch deren Ableitungen  $\bar{\beta}$ ,  $\hat{\beta}$  als Vektorkoordinaten eines Gewindes mit dem Parameter

$$\mathbf{q} = \frac{\hat{\beta}\bar{\beta}}{|\bar{\beta}|^2} \quad \# 17.72$$

und der Achse

$$\bar{\beta}, \quad \bar{\beta}^* = \hat{\beta} - \mathbf{q}\bar{\beta} \quad \# 17.73$$

zu interpretieren. #17.73 nennen wir die *momentane Beschleunigungsachse*. Mit ihrer Hilfe kann man die Beschleunigung #17.64 auch in der Form

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_\beta + \mathbf{b}_\omega, \quad \mathbf{b}_\beta = \hat{\beta} + \bar{\beta} \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{b}_\omega = \bar{\omega} \times \mathbf{v} \quad \# 17.74,$$

schreiben.  $\mathbf{b}_\beta$  rührt von der Schraubung um die Beschleunigungsachse mit dem Parameter  $\mathbf{q}$  und dem Winkelbeschleunigungsvektor  $\bar{\beta}$  her.  $\mathbf{b}_\omega$  verschwindet für die Punkte der Momentanachse, da deren Geschwindigkeit  $\bar{\tau}$  mit  $\bar{\omega}$  kollinear ist.

Das Gemeinlot von Schraub- und Beschleunigungsachse nennen wir *Zentralgerade*  $\mathbf{a}_1$  des Bewegungszustands. Nach #1.91,93 sind ihre PLÜCKER-Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \bar{\omega} \times \bar{\beta}, \quad \mathbf{a}_1^* = \frac{(\bar{\omega}, \bar{\beta}, \bar{\omega}^*)(\bar{\omega} \times \bar{\beta}) \times \bar{\beta} - (\bar{\omega}, \bar{\beta}, \bar{\beta}^*)(\bar{\omega} \times \bar{\beta}) \times \bar{\omega}}{|\bar{\omega} \times \bar{\beta}|^2} \quad \# 17.77$$

Einsetzen von #17.14 und #17.73 sowie Auflösen der Vektorprodukte nach GRASSMANN ergibt

$$\mathbf{a}_1^* = \frac{\bar{\omega}[(\bar{\omega}\bar{\beta})(\bar{\omega}, \bar{\beta}, \hat{\beta}) - \beta^2(\bar{\omega}, \bar{\beta}, \hat{\omega})] + \bar{\beta}[(\bar{\omega}\bar{\beta})(\bar{\omega}, \bar{\beta}, \hat{\omega}) - \omega^2(\bar{\omega}, \bar{\beta}, \bar{\beta})]}{|\bar{\omega} \times \bar{\beta}|^2} \quad \# 17.78$$

Den Schnittpunkt  $\mathbf{s}$  der Schraubachse mit der Zentralgeraden nennt man *Zentralpunkt*<sup>5</sup>. Es ergibt sich nach #1.86

$$\mathbf{s} = \frac{(\bar{\omega}, \bar{\beta}, \bar{\beta}^*)\bar{\omega} - (\bar{\omega}, \bar{\beta}, \bar{\omega}^*)\bar{\beta} + (\bar{\omega}^*\bar{\beta})(\bar{\omega} \times \bar{\beta})}{|\bar{\omega} \times \bar{\beta}|^2} \quad \# 17.79$$

oder wegen #17.14 und #17.73

$$\mathbf{s} = \frac{(\bar{\omega}, \bar{\beta}, \hat{\beta})\bar{\omega} - (\bar{\omega}, \bar{\beta}, \hat{\omega})\bar{\beta} + (\hat{\omega}\bar{\beta} - \mathbf{q}\bar{\omega}\bar{\beta})(\bar{\omega} \times \bar{\beta})}{|\bar{\omega} \times \bar{\beta}|^2} \quad \#17.80$$

Der Abstand  $m$  von Momentanachse und Beschleunigungsachse berechnet man nach #1.90 mit Hilfe des Ausdrucks

$$\bar{\omega}\bar{\beta}^* + \bar{\omega}^*\bar{\beta} = \bar{\omega}\hat{\beta} + \hat{\omega}\bar{\beta} - (\mathbf{p} + \mathbf{q})(\bar{\omega}\bar{\beta}) \quad \# 17.81$$

Soll eine *momentane sphärische Bewegung* vorliegen, so müssen Schraub- und Beschleunigungsachse einander schneiden, also muß #17.81 verschwinden. Ferner lehrt #10.48, daß sich sowohl die Schraubung um die Momentanachse wie um die Beschleunigungsachse auf eine reine Drehung reduzieren. Es müssen also sowohl  $\mathbf{p}$  als  $\mathbf{q}$  verschwinden. Daher sind die Bedingungen für momentane sphärische Bewegung

<sup>5</sup> An Stelle von „Zentralgerade“ und „Zentralpunkt“ sind auch die Bezeichnungen „Zentraltangente“ und „Strikionspunkt“ im Gebrauch. Um Verwechslungen mit gleichlautenden Begriffen in Kap.3.5 werden wir diese Begriffe mit Ausnahme von „Zentralpunkt“ hier nicht verwenden

$$\overline{\omega} \hat{\omega} = 0, \quad \overline{\beta} \hat{\beta} = 0, \quad \overline{\omega} \hat{\beta} + \hat{\omega} \overline{\beta} = 0 \quad \# 17.82$$

Anmerkung: An Stelle des bei uns auftretenden, durch  $\overline{\beta}$ ,  $\hat{\beta}$  festgelegten Gewindes, betrachtet KOENIGS<sup>6</sup> seinen *Hilfskomplex* (complexe auxiliaire):

$$\mathbf{h} = \overline{\beta} - \frac{\hat{\omega}}{\omega} \overline{\omega}, \quad \hat{\mathbf{h}} = \hat{\beta} - \frac{\hat{\omega}}{\omega} \hat{\omega} \quad \# 17.83$$

Dieses Gewinde ist vom Zeitgesetz unabhängig.

Unter Verwendung der Bezeichnungen

$$\underline{\mathbf{B}} = \varepsilon \mathbf{b}, \quad \underline{\beta} = \overline{\beta} + \varepsilon \hat{\beta} \quad \# 17.84$$

kann man die Beschleunigung eines Punktes  $\underline{\mathbf{X}} = 1 + \varepsilon \mathbf{x}$  durch Differentiation von #17.9 in folgender Gestalt darstellen

$$\underline{\mathbf{B}} = \underline{\dot{\mathbf{V}}} = \frac{1}{2} (\underline{\beta} \circ \underline{\mathbf{X}} - \underline{\mathbf{X}} \circ \underline{\beta}_\varepsilon) + \frac{1}{2} (\overline{\omega} \circ \underline{\mathbf{V}} - \underline{\mathbf{V}} \circ \overline{\omega}_\varepsilon) \quad \# 17.85$$

### 17.4.2 Beschleunigungsplan

Trägt man die Beschleunigungsvektoren der Punkte  $\mathbf{x}$  als Ortsvektoren  $\mathbf{x}_2 = \overset{\rightarrow}{\mathbf{O}_2} \mathbf{X}_2 = \mathbf{b}_2$  von einem Punkt  $\mathbf{O}_2$  aus ab, so gelangt man zum *Beschleunigungsplan*. Nach #17.68 wird der Zusammenhang zwischen den Punkten  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  des Lageplanes und den Punkten  $\mathbf{X}_2(\mathbf{x}_2)$  des Beschleunigungsplans durch die Beziehung

$$\mathbf{x}_2 = \overline{\beta} \times \mathbf{x} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \mathbf{x}) + \hat{\beta} + \overline{\omega} \times \hat{\omega} \quad \# 17.86$$

beschrieben.

**Satz 17.4.2.1:** *Zwischen den Punkten des Lageplans und den Punkten des Beschleunigungsplans besteht eine Affinität<sup>7</sup>.*

Beweis: Einer Geraden  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \sigma \mathbf{u}$  des Lageplanes entspricht im Beschleunigungsplan die Gerade

$$\mathbf{x}_2 = \left[ \overline{\beta} \times \mathbf{a} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \mathbf{a}) + \hat{\beta} + \overline{\omega} \times \hat{\omega} \right] + \sigma \left[ \overline{\beta} \times \mathbf{u} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \mathbf{u}) \right] \quad \# 17.87$$

Man erkennt, daß parallelen Geraden wieder parallele Gerade entsprechen, die Punkte zugeordneter Geraden entsprechen gleichen Parameterwerten  $\sigma$ , die Geraden sind also ähnlich aufeinander bezogen w.z.b.w.

Dem Koordinatenursprung  $\mathbf{O}_2$  des Beschleunigungsplanes entspricht ein Punkt  $\mathbf{R}(\mathbf{r})$  des Lageplanes, dessen Beschleunigung verschwindet, der *Beschleunigungspol*. Für ihn gilt nach #17.86

$$\mathbf{o} = \overline{\beta} \times \mathbf{x} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \mathbf{x}) + \hat{\beta} + \overline{\omega} \times \hat{\omega} \quad \# 17.88$$

Trifft man für  $\mathbf{x} = \mathbf{r}$  den Ansatz

$$\mathbf{r} = \lambda \overline{\omega} + \mu \overline{\beta} + \nu (\overline{\omega} \times \overline{\beta}) \quad \# 17.89$$

und führt dies in #17.88 ein, so erhält man

$$\mathbf{o} = \overline{\omega} [\mu (\overline{\omega} \times \overline{\beta}) + \nu \beta^2] - \overline{\beta} [\mu \omega^2 + \nu (\overline{\omega} \times \overline{\beta})] - (\overline{\omega} \times \overline{\beta}) [\lambda + \nu \omega^2] + \overline{\omega} \times \hat{\omega} + \hat{\beta} \quad \# 17.90$$

<sup>6</sup> KOENIGS [1] S.41, GARNIER [1] II.Bd. S.209

<sup>7</sup> MEHMKE [1]

Durch skalare Multiplikation von #17.90 der Reihe nach mit  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{\beta}$ .  $\bar{\omega} \times \bar{\beta}$  erhält man die Koeffizienten

$$\lambda = \frac{\omega^2 (\bar{\omega} \hat{\beta} + \bar{\beta} \hat{\omega}) - (\bar{\omega} \bar{\beta}) (\bar{\omega} \hat{\omega}) + (\bar{\omega}, \bar{\beta}, \hat{\beta})}{|\bar{\omega} \times \bar{\beta}|^2}, \quad \mu = \frac{-(\bar{\omega}, \bar{\beta}, \hat{\omega}) + \bar{\beta} \hat{\beta}}{|\bar{\omega} \times \bar{\beta}|^2}, \quad \nu = -\frac{\bar{\omega} \hat{\beta}}{|\bar{\omega} \times \bar{\beta}|^2} \quad \#17.91$$

**Satz 17.4.2.2:** *Im allgemeinen existiert ein einziger Punkt mit verschwindender Beschleunigung.*

Die Bedeutung des Beschleunigungspoles erhellt aus folgendem: Legt man den Koordinatenursprung vermöge der Transformation  $\mathbf{x} = \mathbf{r} + \mathbf{y}$  in den Beschleunigungspol, so nimmt wegen #17.88 der Ausdruck #17.68 für die Beschleunigung eines Punktes die Gestalt

$$\mathbf{b} = \bar{\beta} \times \mathbf{y} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{y})$$

an. Vergleich mit #10#48 lehrt.

**Satz 17.4.3.2.3:** *Der momentane Beschleunigungszustand verhält sich so, als beschriebe das bewegte System eine sphärische Bewegung mit dem Beschleunigungspol als Zentrum.*

Die Affinität nach Satz 17.4.2.1 gestattet es in einfacher Weise, sich über die Beschleunigungsverhältnisse des Lageplanes zu orientieren. So findet man<sup>8</sup>

*Es gibt einen einzigen Punkt, dessen Beschleunigung einem vorgegebenen Vektor gleich ist.*

*Die Punkte mit Beschleunigungen vorgegebener konstanter Beträge liegen auf ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden mit dem Beschleunigungspol als Mittelpunkt. Denn im Beschleunigungsplan sind die entsprechenden Punkte auf einer Schar konzentrischer Kugeln um  $O_2$  angeordnet.*

*Auf einer Geraden (Ebene) gibt es einen Punkt minimaler Beschleunigung. Er entspricht dem Fußpunkt des Lotes aus  $O_2$  auf die entsprechende Gerade (Ebene) des Beschleunigungsplanes.*

*Auf einer Geraden gibt es zwei Punkte, deren Beschleunigung gegebene Beträge haben. Sie entsprechen den Schnittpunkten der zugeordneten Geraden des Beschleunigungsplanes mit der Kugel um  $O_2$ , deren Radius die Größe des genannten Betrages hat.*

Der Beschleunigungspol ist nach #17.91 nur bestimmt, wenn  $\bar{\omega}$  und  $\bar{\beta}$  nicht kollinear sind, also  $\bar{\omega} \times \bar{\beta} \neq \mathbf{0}$  ist. Ist jedoch  $\bar{\beta} = \sigma \bar{\omega}$ , so folgt aus #17.86

$$\mathbf{x}_2 = \sigma (\bar{\omega} \times \mathbf{x}) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{x}) + \hat{\beta} + \bar{\omega} \times \hat{\omega} \quad \# 17.92$$

Skalare Multiplikation von #17.92 mit  $\bar{\omega}$  ergibt

$$\bar{\omega} \mathbf{x}_2 = \bar{\omega} \hat{\beta} \quad \# 17.93$$

Man erkennt, daß in diesem Falle die in Satz 17.4.2.1 genannte Affinität ausgeartet ist. Die Endpunkte aller Ortsvektoren des Beschleunigungsplanes erfüllen die Ebene #17.93, die i.a. nicht durch  $O_2$  hindurchgeht. Daher gibt es keinen Punkt mit verschwindender Beschleunigung. Jedoch haben alle Punkte  $\mathbf{x}$  einer zur Momentanachse parallelen Geraden

$$\mathbf{g} = \bar{\omega}, \quad \mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \bar{\omega} \quad \# 17.94$$

dieselbe Beschleunigung. Mit Hilfe von #17.94 nimmt #17.92 nämlich die Gestalt

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} = -\sigma \mathbf{g}^* - \bar{\omega} \times \mathbf{g}^* + \hat{\beta} + \bar{\omega} \times \hat{\omega} \quad \# 17.95$$

an, die nur von der Geraden selbst, nicht aber von ihren einzelnen Punkten abhängt.

---

<sup>8</sup> SCHELL [1] I.Bd. S.506

Die minimale Beschleunigung erhält man, wenn man aus  $O_2$  das Lot auf die Ebene #17.93 fällt. Nach #1.70 ergibt sich

$$\mathbf{b}_{min} = \frac{\bar{\omega} \hat{\beta}}{\omega^2} \bar{\omega} \quad \# 17.96$$

Die zu einer vorgegebenen Beschleunigung  $\mathbf{b}$ , die natürlich der aus #17.93 folgenden Bedingung  $\bar{\omega} \mathbf{b} = \bar{\omega} \hat{\beta}$  genügen muß, gehörende Raumgerade erhält man, wenn man #17.95 von links mit  $\bar{\omega}$  vektoriell multipliziert - wegen #17.94 ist  $\bar{\omega} \mathbf{g}^* = 0$  -

$$\bar{\omega} \times \mathbf{b} = -\sigma \bar{\omega} \times \mathbf{g}^* + \mathbf{g}^* \omega^2 + \bar{\omega} \times (\hat{\beta} + \bar{\omega} \times \hat{\omega}) \quad \# 17.97$$

und zu #17.97 die mit  $\sigma$  multiplizierte Gleichung #17.95 hinzufügt. Man findet

$$\mathbf{g}^* = \frac{1}{\omega^2 + \sigma^2} \left[ \bar{\omega} \times (\mathbf{b} - \hat{\beta} - \bar{\omega} \times \hat{\omega}) - \sigma (\mathbf{b} - \hat{\beta} - \bar{\omega} \times \hat{\omega}) \right] \quad \# 17.98$$

wozu nach #17.94 noch  $\mathbf{g} = \bar{\omega}$  tritt. Mit #17.96 erhält man aus #17.98 die Gerade minimaler Beschleunigung.

**Satz 17.4.2.4:** Sind Schraubachse und Beschleunigungsachse parallel, so gibt es i.a. keine Punkte verschwindender Beschleunigung. Es gibt aber zur Schraubachse parallele Gerade, deren Punkte minimale Beschleunigung aufweisen.

Ist zusätzlich zu  $\bar{\beta} = \sigma \bar{\omega}$  noch  $\bar{\omega} \hat{\beta} = 0$ , so geht die Ebene #17.93 durch  $O_2$ . Es existiert daher eine Raumgerade, deren Punkte verschwindende Beschleunigung haben. Ihre PLÜCKER-Vektoren sind nach #17.98

$$\mathbf{g} = \bar{\omega}, \quad \mathbf{g}^* = \frac{1}{\omega^2 + \sigma^2} \left[ \sigma (\hat{\beta} + \bar{\omega} \times \hat{\omega}) - \bar{\omega} \times (\hat{\beta} + \bar{\omega} \times \hat{\omega}) \right] \quad \# 17.99$$

Mit  $\bar{\beta} = \sigma \bar{\omega}$  und  $\bar{\omega} \hat{\beta} = 0$  folgt wegen #17.13 aus #17.67  $\dot{\mathbf{p}} = -\sigma \mathbf{p}$ , daher wird mit #17.66  $\mathbf{b}_\tau = \mathbf{0}$ .

**Satz 17.4.2.5:** Sind Schraubachse und Beschleunigungsachse parallel und verschwindet gleichzeitig die Translationsbeschleunigung, so existiert eine zur Schraubachse parallele Gerade mit Punkten verschwindender Beschleunigung<sup>9</sup>.

### 17.4.3 Tangentialbeschleunigung. Normalbeschleunigung. Krümmung. Wendepunkte

Wir zerlegen die Beschleunigung  $\mathbf{b}$  eines Punktes in eine Tangentialkomponente  $\mathbf{b}_t$  und eine Normalkomponente  $\mathbf{b}_n$ :

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_t + \mathbf{b}_n = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{b}_n \quad \# 17.100$$

Skalarmultiplikation von #17.100 mit  $\mathbf{v}$  ergibt wegen  $\mathbf{b}_n \mathbf{v} = 0$

$$\lambda = \frac{\mathbf{b} \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{(\hat{\beta} + \bar{\beta} \times \mathbf{x})}{|\mathbf{v}|^2} \quad \# 17.101$$

daher

$$\mathbf{b}_t = \frac{(\hat{\beta} + \bar{\beta} \times \mathbf{x})}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{b}_n = \hat{\beta} + \bar{\beta} \times \mathbf{x} + \bar{\omega} \times \bar{\mathbf{v}} - \frac{(\hat{\beta} + \bar{\beta} \times \mathbf{x})}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \quad \# 17.102, \#17.103$$

<sup>9</sup> STÜBLER [1]

Nach #1.122 stellt  $|\mathbf{b}_n|$  den Zusammenhang mit dem Krümmungsradius der Raumkurve her. Die konstruktive Auswertung zeigt Fig.10.6

Das Verschwinden von  $\mathbf{b}_t$  kennzeichnet jene Punkte des Raumes, die im Augenblick ihre Bahn mit gleichmäßiger Geschwindigkeit durchlaufen, deren Geschwindigkeit i.a. gerade ein Extremum aufweist. Die Punkte verschwindender Normalbeschleunigung sind dadurch gekennzeichnet, daß der Beschleunigungsvektor und der Geschwindigkeitsvektor kollinear sind. Die Bahnkrümmung verschwindet, der Punkt bewegt sich im Moment geradlinig. Wir wollen Punkte dieser Art ganz allgemein als *Wendepunkte* bezeichnen.

Um die Punkte verschwindender Tangential- bzw. Normalbeschleunigung aufzusuchen, ist es zweckmäßig, ein Koordinatensystem zu wählen, dessen Ursprung im Zentralpunkt #17.80 liegt, dessen z-Achse in die momentane Schraubachse fällt und dessen y-Achse die Zentral-gerade ist. Die x-Achse ergänzt diese Achsen zu einem Rechtssystem (Fig.17.14). Legen wir die Schraubung durch Angabe des Parameters  $p$  sowie des Betrages  $\omega$  der Winkelgeschwindigkeit fest, so ist

**Figur 17.14**

$$\bar{\omega} = \omega \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\omega}^* = \mathbf{0}, \quad \hat{\omega} = \omega p \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad p = \frac{\bar{\omega} \hat{\omega}}{\omega^2} \quad \# 17.104$$

Nach Annahme ist die Beschleunigungsachse parallel zur xz-Ebene. Sie treffe die y-Achse im Punkt  $(0, m, 0)$ . Ferner sei  $q$  der Parameter der Schraubung um die Beschleunigungsachse. Dann ist

$$\left. \begin{aligned} \bar{\beta} &= \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \beta_3 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\beta}^* = \begin{Bmatrix} \beta_3 \\ 0 \\ -\beta_1 \end{Bmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{Bmatrix} q\beta_1 + m\beta_3 \\ 0 \\ q\beta_3 - m\beta_1 \end{Bmatrix}, \quad q = \frac{\bar{\beta} \hat{\beta}}{\beta^2} \\ \beta^2 &= \beta_1^2 + \beta_3^2, \quad \bar{\omega} \times \bar{\beta} = \omega \beta_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\omega} \bar{\beta} = \omega \beta_3, \\ \bar{\omega} \hat{\beta} + \hat{\omega} \bar{\beta} &= \omega \beta_3 (p + q) - \omega m \beta_1 \end{aligned} \right\} \quad \# 17.105$$

Mit diesen Bezeichnungen nehmen Translationsgeschwindigkeit #17.20 und Translationsbeschleunigung #17.66 die Form

$$\bar{\tau} = p\omega \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b}_\tau = \begin{Bmatrix} p\beta_1 \\ 0 \\ q\beta_3 - m\beta_1 \end{Bmatrix} \quad \# 17.106$$

an. Für Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Punktes findet man nach #17.11 bzw. #17.64

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \omega \begin{Bmatrix} -y \\ x \\ p \end{Bmatrix}, \quad \bar{\beta} \times \mathbf{v} = -\omega^2 \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \# 17.107$$

$$\hat{\beta} + \bar{\beta} \times \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} -y\beta_3 + (q\beta_1 + m\beta_3) \\ x\beta_3 - z\beta_1 \\ y\beta_1 + (q\beta_3 - m\beta_1) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} -x\omega^2 - y\beta_3 + (q\beta_1 + m\beta_3) \\ x\beta_3 - y\omega^2 - z\beta_1 \\ y\beta_1 + (q\beta_3 - m\beta_3) \end{Bmatrix} \quad \# 17.108$$

Ferner hat nach #17.89,91 der Beschleunigungspol die Koordinaten

$$\mathbf{R} \left( \frac{\beta^2 q}{\omega^2 \beta_1}, -\frac{q\beta_3 - m\beta_1}{\beta_1}, \frac{\omega^2 (q\beta_3 - m\beta_1)}{\beta_1^2} + \frac{\beta^2 q \beta_3}{\omega^2 \beta_1^2} \right) \quad \# 17.109$$

Man erhält #17.109 auch durch Nullsetzen der Koordinaten von  $\mathbf{b}$  #17.108

#### 17.4.3.1 Punkte verschwindender Tangentialbeschleunigung

Die Punkte verschwindender Tangentialbeschleunigung sind nach #17.102 durch

$$\left( \hat{\beta} + \bar{\beta} \times \mathbf{x} \right) \mathbf{v} = 0 \quad \# 17.110$$

gekennzeichnet. Dieser Ausdruck erhält mit #17.107,108 die Gestalt

$$\beta_3(x^2 + y^2) - xz\beta_1 - y[(q-p)\beta_1 + m\beta_3] + p(q\beta_3 - m\beta_1) = 0 \quad \# 17.111$$

Diese Fläche ist ein einschaliges Hyperboloid, ein Kegel oder ein zweischaliges Hyperboloid, je nachdem im Ausdruck  $[(q-p)\beta_1 + m\beta_3]^2 \stackrel{>}{\leq}{\geq} 4p\beta_3(q\beta_3 - m\beta_1)$  das Zeichen  $>$ ,  $=$  oder  $<$  gilt.

Speziell liegt auch dann ein Kegel vor, wenn  $p = q = 0$  ist. Es ist dies nach #17.82 die Bedingung für momentane sphärische Bewegung. #17.111 reduziert sich dann auf den Kegel #10.67.

**Satz 7.4.3.1.1:** Die Punkte, deren momentane Tangentialbeschleunigung verschwindet, erfüllen eine Fläche 2.Ordnung.

Es ist begrifflich klar, daß der Beschleunigungspol #17.109 auf dieser Fläche liegen muß. Dies verifiziert man auch durch Einsetzen seiner Koordinaten in #17.111.

#### 17.4.3.2 Punkte verschwindender Normalbeschleunigung

Die Punkte, deren momentane Normalbeschleunigung verschwindet, sind durch  $\mathbf{v} \times \mathbf{b} = 0$  gekennzeichnet. Bildet man diesen Ausdruck mit #17.107,108 und setzt die einzelnen Koordinaten des Produktvektors gleich Null, so findet man

$$x\{y\beta_1 - [(p-q)\beta_3 + m\beta_1]\} + p(y\omega^2 + z\beta_1) = 0 \quad \# 17.112.1$$

$$\{y\beta_1 - [(p-q)\beta_3 + m\beta_3]\} - p[x\omega^2 - (q\beta_1 + m\beta_3)](0) \quad \# 17.122.2$$

$$y(y\omega^2 + z\beta_1) + x[x\omega^2 - (q\beta_1 + m\beta_3)] = 0 \quad \# 17.112.3$$

Alle Punkte, welche diesen drei Flächen 2.Ordnung gemeinsam sind, haben verschwindende Normalbeschleunigung. Unmittelbar erkennt man:

1 Die Fläche #17.112.1 und der parabolische Zylinder #17.112.2 haben die Ferngerade der Ebene  $y = 0$  gemeinsam

2 Die Flächen #17.112.2 und #112.3 haben die Schnittgerade der Ebenen  $x\omega^2 - (q\beta_1 + m\beta_3) = 0$  und  $y = 0$  gemeinsam

3 Die Flächen #112.3 und #112.1 haben die Schnittgerade der Ebenen  $\omega^2 y + z\beta_1 = 0$  und  $x = 0$  gemeinsam.

Wir zeigen nun, daß die drei Flächen #17.112.1,2,3 eine Raumkubik (eine sogenannte *kubische Parabel*) gemeinsam haben. Zu diesem Zweck bestimmen wir zunächst den Restschnitt von #17.112.1 und #17.112.3. Wählen wir  $y = \lambda$  als Parameter, so folgt

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\{\lambda\beta_1 - [(p-q)\beta_3 + m\beta_1]\}}{p\omega^2} \lambda + \frac{(q\beta_1 + m\beta_3)}{\omega^2} \\ y &= \lambda \\ z &= -\frac{\{\lambda\beta_1 - [(p-q)\beta_3 + m\beta_1]\}^2}{p^2\omega^2\beta_1} \lambda - \frac{(q\beta_1 + m\beta_3)}{p\omega^2\beta_1} \{\lambda\beta_1 - [(p-q)\beta_3 + m\beta_1]\} - \frac{\omega^2}{\beta_1} \lambda \end{aligned} \right\} \# 17.113$$

Wie man leicht nachrechnet, liegt #17.113 auch auf #17.112.4

**Satz 17.4.3.2.1:** *Im allgemeinen liegen die Punkte verschwindender Normalbeschleunigung (Wendepunkte) auf einer kubischen Parabel (Wendekurve)<sup>10</sup>.*

Man überzeugt sich leicht, daß der Beschleunigungspol #17.109 auf der Wendekurve liegt, was auch begrifflich klar ist.

Die Kurve #17.113 existiert nur, wenn weder  $p$  noch  $\beta_1$  verschwinden.

Ist  $p = 0$ , so reduzieren sich die Flächen #17.112.1,1 auf

$$x\{y\beta_1 + [q\beta_3 - m\beta_1]\} = 0 \quad \# 17.114.1$$

$$y\{y\beta_1 + [q\beta_3 - m\beta_1]\} = 0 \quad \# 17.114.2$$

Diese Flächen zerfallen in je ein Ebenenpaar, wovon die Ebene  $y\beta_1 + [q\beta_3 - m\beta_1] = 0$  beiden Flächen angehört. Den drei Flächen #114.1,2 und #112.3 ist daher die Schnittparabel dieser Ebene mit #112.3 gemeinsam.

**Satz 17.4.3.2.2:** *Bei einer momentanen Drehung reduziert sich die Wendekurve auf eine Parabel, deren Ebene zur Momentanachse parallel ist<sup>11</sup>.*

Ist  $\beta_1 = 0$ , d.h. sind Schraubachse und Beschleunigungsachse parallel, so reduziert sich das Flächensystem #17.112 auf

$$-x(p-q)\beta_3 + yp\omega^2 = 0 \quad \# 17.115.1$$

$$y(p-q)\beta_3 + xp\omega^2 - pm\beta_3 = 0 \quad \# 17.115.2$$

$$\omega^2(x^2 + y^2) - xm\beta_3 = 0 \quad \# 17.115.3$$

Hier liegen zwei orthogonale Ebenen vor, deren Schnittgerade auf dem Drehzylinder #17.115.3 liegt. Die Wendekurve reduziert sich auf eine Gerade parallel zur Momentanachse<sup>12</sup>.

**Satz 17.4.3.2.3:** *Sind Momentanachse und Beschleunigungsachse parallel, so reduziert sich die Wendelinie auf eine zur Momentanachse parallele Gerade. Es ist dies die Gerade minimaler Beschleunigung #17.96. Ist zusätzlich zu  $\beta_1$  auch  $q = 0$ , so verschwindet nach #17.106 auch die Translationsbeschleunigung. Die Wendelinie ist dann die Gerade verschwindender Gesamtbeschleunigung von Satz 17.4.2.5.*

#### 17.4.4 Beschleunigungsverhältnisse einer Geraden

Betrachtet man die Endpunkte einer Strecke AB, so gilt für deren Beschleunigungsvektoren nach #17.64

$$\mathbf{b}_A = \hat{\beta} + \bar{\beta} \times \mathbf{a} + \bar{\omega} \times \mathbf{v}_A, \quad \mathbf{b}_B = \hat{\beta} + \bar{\beta} \times \mathbf{b} + \bar{\omega} \times \mathbf{v}_B \quad \# 17.116$$

<sup>10</sup> EVERETT [1], MEHMKE [2]

<sup>11</sup> STÜBLER [1]

<sup>12</sup> STÜBLER [1]

Differenzenbildung ergibt

$$\mathbf{b}_A = \mathbf{b}_B + \bar{\beta} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \bar{\omega} \times (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \quad \# 17.117$$

Man kann #17.117 in der Form

$$\mathbf{b}_B = \mathbf{b}_A + \mathbf{b}_{BA} \quad \# 17.118$$

anschreiben. Hierin wurde

$$\mathbf{b}_{BA} = \mathbf{b}_{BA\omega} + \mathbf{b}_{BA\beta} \quad \# 17.119$$

gesetzt, wobei wegen #17.35

$$\mathbf{b}_{BA\omega} = \bar{\omega} \times \mathbf{v}_{BA}, \quad \mathbf{b}_{AB\beta} = \bar{\beta} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \bar{\beta} \times \overrightarrow{AB} \quad \# 17.120, \# 17.121$$

bedeutet.  $\mathbf{b}_{BA}$  ist nach #10.48 die Beschleunigung, die B bei der durch  $\bar{\omega}$  und  $\bar{\beta}$  festgelegten sphärischen Bewegung mit dem Zentrum A erhielt.

Betrachten wir die Punkte  $\mathbf{x}$  einer zur Schraubachse parallelen Geraden  $\mathbf{b} = \bar{\omega}$ ,  $\mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{g} = \mathbf{x} \times \bar{\omega}$ , so gilt für deren Beschleunigung  $\mathbf{b} = \hat{\beta} + \bar{\beta} \times \mathbf{x} + \bar{\omega} \times \mathbf{v}$ . Skalarmultiplikation mit  $\bar{\omega}$  ergibt

$$\mathbf{b}\bar{\omega} = \hat{\beta}\bar{\omega} + \bar{\beta}\mathbf{g}^* \quad \# 17.122$$

Da dieser Ausdruck nur von der Geraden, nicht aber von deren einzelnen Punkten abhängt, folgt

**Satz 17.4.4.1:** Die Projektionen der Beschleunigungsvektoren einer zur Schraubachse parallelen Geraden auf diese Gerade sind konstant.

Fällt diese Geraden speziell mit der Schraubachse selbst zusammen, so folgt aus #17.122 mit  $\mathbf{g}^* = \bar{\omega}^*$  wegen #17.14 und #17.66,67:  $\mathbf{b}\bar{\omega} = \mathbf{b}_r\bar{\omega}$ .

**Satz 17.4.4.2:** Die Projektionen der Beschleunigungsvektoren der Punkte der Schraubachse auf diese sind gleich der Projektion der Translationsbeschleunigung auf die Schraubachse.

Für die Punkte der Beschleunigungsachse folgt nach #17.75,73

$$\mathbf{b}_\beta = \hat{\beta} - \bar{\beta}^* = \mathbf{q}\bar{\beta} \quad \# 17.123$$

**Satz 17.4.4.3:** Der Anteil  $\mathbf{b}_\beta$  des Beschleunigungsvektors  $\mathbf{b}$  ist für alle Punkte der Beschleunigungsachse gleich  $\mathbf{q}\bar{\beta}$ .

### 17.4.5 Die Affinität zwischen Lage- und Beschleunigungsplan

Die zwischen Lageplan und Beschleunigungsplan laut Satz 17.4.2.1 bestehende Affinität ist

**Figur 17.15** festgelegt, sobald entsprechende Punktequadrupel  $A;B;C;D; A_2;B_2;C_2, D_2$  bekannt sind (Fig.17.15). Betrachtet man die affinen Koordinatensysteme mit den Ursprüngen A bzw.  $A_2$  und den Einheitspunkten B;C;D bzw.  $A_2, B_2, C_2$ , so findet man zu jedem Punkt X den entsprechenden, indem man die Eckpunkte 1,2,3 des Koordinatenquaders mit Hilfe der Teilverhältnisse

$$A1:B1 = A_2 1_2 : B_2 1_2, \quad A2:C2 = A_2 2_2 : C_2 2_2, \quad A3:C3 = A_2 3_2 : C_2 3_2 \quad \# 17.124$$

überträgt. Die Beschleunigung des Punktes X ist dann durch  $\mathbf{v}_X = \overrightarrow{O_2 X_2}$  festgelegt. Umgekehrt entspricht etwa dem Punkt  $R_2 = O_2$  der Beschleunigungspol R.

Für die konstruktive Behandlung der Beschleunigungsverhältnisse erweist sich die Darstellung #17.74 als sehr geeignet. Die Komponente  $\mathbf{b}_\omega$  #17.76 hängt nur von den Geschwindigkeitsverhältnissen ab. Die Konstruktion von  $\mathbf{b}_\omega$  läuft darauf hinaus, die Punkte des Geschwindigkeitsplanes einer Momentandrehung mit dem Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\bar{\omega}$  um eine durch  $O_1$

gehende Achse zu unterwerfen. Die Komponente  $\mathbf{b}_\beta$  ist dann das Ergebnis der durch  $\bar{\beta}$ ,  $\hat{\beta}$  bestimmten Schraubung um die Beschleunigungsachse.

Völlig analog zu den in Kap. 17.3.1 geschilderten Geschwindigkeitsverhältnissen gehören daher die Endpunkte der von  $O_2$  aus abgetragenen Vektoren

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_\beta = \mathbf{b} - \mathbf{b}_\omega = O_2 \vec{X}_3 \quad \# 17.125$$

derselben Ebene

$$\mathbf{x}_3 \bar{\beta} = \bar{\beta} \hat{\beta} \quad \# 17.126$$

an, welche dem Lageplan in einer ausgearteten Affinität entspricht. Um sie zu finden, hat man (Fig. 17.16) sich von drei Punkten die Beschleunigungsvektoren  $\mathbf{b}$  sowie die Vektoren  $\mathbf{b}_\omega = \bar{\omega} \times \mathbf{v}$  zu beschaffen und den Vektor  $\mathbf{b}_\beta$  #17.125 zu bilden. Das

Figur 17.16

Lot von  $O_2$  auf diese Ebene hat die Richtung der Beschleunigungsachse, der durch den Lotfußpunkt  $U_3$  bestimmte Vektor

$$\bar{\tau}_\beta = q\bar{\beta} = O_2 \vec{U}_3 \quad \# 17.127$$

ist nach Satz 17.4.4.3 die in Richtung der Beschleunigungsachse fallenden Beschleunigungskomponente deren Punkte. Im Lageplan geht die Beschleunigungsachse parallel zu  $\bar{\tau}_\beta$  durch den Punkt  $U$ , der in der genannten Affinität dem Punkt  $U_3$  entspricht.

Nun ist nach #17.75,73 und wegen #17.127

$$\mathbf{b}_\beta = \hat{\beta} + \bar{\beta} \times \mathbf{x} = (\bar{\beta} * + \bar{\beta} \times \mathbf{x}) + \bar{\tau}_\beta = \mathbf{b}_{\beta\beta} + \bar{\tau}_\beta \quad \# 17.128$$

worin nach #1.60

$$\mathbf{b}_{\beta\beta} = \bar{\beta} * + \bar{\beta} \times \mathbf{x} = \mathbf{b} - \bar{\tau}_\beta \quad \# 17.129$$

das Moment des in der Beschleunigungsachse liegenden Vektors  $\bar{\beta}$  um den Punkt  $\mathbf{x}$  ist. Kennt man daher die Beschleunigung  $\mathbf{b}_\beta$  eines Punktes sowie  $\bar{\tau}_\beta$ , so kann man mit Hilfe von  $\mathbf{b}_{\beta\beta}$  nach Kap. 4.3.1 die momentane Winkelbeschleunigung  $\bar{\beta}$  ermitteln.

Sind  $A, B$  die Endpunkte einer Strecke des Lageplans, so entsprechen ihnen im Beschleunigungsplan die Punkte  $A_2, B_2$  #17.116. Den Anteilen  $\mathbf{b}_{A\beta}$  und  $\mathbf{b}_{B\beta}$  der Beschleunigungen  $\mathbf{b}_A$  und  $\mathbf{b}_B$  sind nach #17.75 die Endpunkte  $A_3, B_3$  der Vektoren

$$O_2 \vec{A}_3 = \mathbf{b}_{A\beta} = \hat{\beta} + \bar{\beta} \times \mathbf{a} \quad O_2 \vec{B}_3 = \mathbf{b}_{B\beta} = \hat{\beta} + \bar{\beta} \times \mathbf{b} \quad \# 17.130$$

zugeordnet. Daher ist nach #17.121

$$A_3 \vec{B}_3 = \bar{\beta} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b}_{BA\beta} \quad \# 17.131$$

Natürlich kann man den Winkelbeschleunigungsvektor  $\bar{\beta}$ , dessen Richtung aus #17.127 bekannt ist, gleich aus #17.131 ermitteln (Kap. 4.3.1). Man wird dies tun, wenn man an der Raumlage der Beschleunigungsachse nicht interessiert ist.

Es sollen nun bei den in Kap. 17.3.3 hinsichtlich der Geschwindigkeitsverhältnisse untersuchten Angabemöglichkeiten die Beschleunigungen untersucht werden.

### 17.4.5.1 Kurvenführung zweier Punkte und Flächenührung eines weiteren Punktes

Zunächst betrachten wir jenen Fall (Fig. 17.4), bei dem zwei Punkte  $A, B$  auf vorgegebenen Kurven, der Punkt  $C$  auf einer vorgegebenen Fläche geführt werden. Hier können wir die Tangentialbeschleunigung  $\mathbf{b}_{At}$  des Punktes  $\mathbf{a}$  beliebig vorschreiben. Die Normalbeschleunigung  $\mathbf{b}_{An}$  ist nach #1.123 durch die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_A$  und den Krümmungsradius  $\rho_A$  der Bahnkurve

von  $\mathbf{A}$  bereits bestimmt. Daher ist wegen #17.100 auch die Gesamtbeschleunigung  $\mathbf{b}_A$  des Punktes  $\mathbf{A}$  bekannt. Um die Beschleunigung  $\mathbf{b}_B$  zu ermitteln, zerlegen wir diesen Vektor nach #17.118,119,120,121. Die bekannten Geschwindigkeitsverhältnisse gestatten die Konstruktion von  $\mathbf{b}_{BA\omega}$ , während  $\mathbf{b}_{AB\beta}$  nur seiner Stellung  $\perp(\mathbf{AB})$  nach bekannt ist. Mit der Bezeichnungsweise #17.57 ist daher

$$\{\mathbf{b}_B\} = \mathbf{b}_A + \mathbf{b}_{BA\omega} + [\mathbf{b}_{BA\beta}] \quad \# 17.132$$

Wir haben also zunächst im Beschleunigungsplan (Fig. 17.17) den Summenvektor der bekannten Vektoren  $\mathbf{b}_A$  und  $\mathbf{b}_{BA\omega}$  zu bilden und in dessen Endpunkt die Ebene zu konstruieren, deren

**Figur 17.17** Stellung normal zur Geraden  $\mathbf{AB}$  des Lageplanes ist. Zerlegt man hingegen  $\mathbf{b}_B$  in seine Normal- und Tangentialkomponente, kann man  $\mathbf{b}_{Bn}$ , da  $\mathbf{v}_B$  und der Krümmungsradius  $\rho_B$  der Bahn von  $\mathbf{B}$  bekannt sind, nach #1.123 bzw. Fig. 10.6 angeben.  $\mathbf{b}_{Bt}$  muß in der Tangente  $t_B$  liegen. Daher ist

$$\{\mathbf{b}_B\} = \mathbf{b}_{Bn} + (\mathbf{b}_{Bt}) \quad \# 17.133$$

Im Beschleunigungsplan werden wir somit die durch den Endpunkt von  $\mathbf{b}_{Bn}$  gelegte Gerade mit der Richtung  $t_B$  mit der Ebene  $[\mathbf{b}_{BA\beta}]$  schneiden. Damit ist  $\mathbf{b}_B$  bekannt.

Um die Beschleunigung  $\mathbf{b}_C$  des flächenläufigen Punktes  $\mathbf{C}$  zu ermitteln, wenden wir zweimal die Beziehung #17.132 auf die Endpunkte der Strecken  $\mathbf{AC}$  und  $\mathbf{BC}$  an:

$$\{\mathbf{b}_C\} = \mathbf{b}_A + \mathbf{b}_{CA\omega} + [\mathbf{b}_{CA\beta}], \quad \{\mathbf{b}_C\} = \mathbf{b}_B + \mathbf{b}_{CB\omega} + [\mathbf{b}_{CB\beta}] \quad \# 17.134$$

Hiernach muß (Fig. 17.18) der Endpunkt  $C_2$  des Vektors  $\mathbf{b}_C = \vec{O_2C_2}$  auf der Schnittgeraden der beiden zu  $(\mathbf{AC})$  bzw.  $(\mathbf{BC})$  normalen Stellungsebene liegen. Da  $\mathbf{C}$  außerdem

**Figur 17.18** auf der gegebenen Fläche läuft, zerlegen wir nach #1.133  $\mathbf{b}_C$  in eine Komponente  $\mathbf{b}_{CN}$  in Richtung der Flächennormalen sowie in eine in der Tangentialebene liegende Komponente  $\mathbf{b}_{CT}$ .  $\mathbf{b}_{CN}$  ist aber nach #1.135 durch  $\mathbf{v}_C$  und den Krümmungsradius  $R$  des Flächennormalschnittes durch  $\mathbf{v}_C$  bestimmt, während  $\mathbf{b}_{CT}$  die Stellung der Flächentangentialebene  $\varepsilon$  hat. Daher ist

$$\{\mathbf{b}_C\} = \mathbf{b}_{CN} + [\mathbf{b}_{CT}] \quad \# 17.135$$

Somit ist  $\mathbf{b}_C$  bestimmt. Nunmehr sind wir in der Lage, die Beschleunigung  $\mathbf{b}_D$  eines beliebigen Punktes  $\mathbf{D}$  durch dreimalige Anwendung der Beziehung #17.132 unter Benützung der bereits bekannten Beschleunigungsvektoren  $\mathbf{b}_A$ ,  $\mathbf{b}_B$ ,  $\mathbf{b}_C$  zu ermitteln. Der Endpunkt  $D_2$  des Vektors  $\mathbf{b}_D = \vec{O_2D_2}$  ergibt sich als Schnittpunkt dreier Stellungsebenen. Die entsprechenden Punktequadrupel  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}; \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2, \mathbf{D}_2$  legen die Affinität zwischen Lageplan und Beschleunigungsplan fest.

#### 17.4.5.2 Kurvenführung eines Punktes und Flächenführung dreier weiterer Punkte

Ist (Fig. 17.5) die Bewegung dadurch festgelegt, daß ein Punkt  $\mathbf{A}$  auf einer Kurve geführt wird, während  $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  flächenläufig sind, so kann man unter den in Kap. 17.4.5.1 genannten Bedingungen die Beschleunigung  $\mathbf{b}_A$  vorgeben. Dreimalige Anwendung von #17.134,135

$$\left. \begin{aligned} \{\mathbf{b}_B\} &= \mathbf{b}_A + \mathbf{b}_{BA\omega} + [\mathbf{b}_{BA\beta}] = \mathbf{b}_{Bn} + [\mathbf{b}_{Bt}] \\ \{\mathbf{b}_C\} &= \mathbf{b}_A + \mathbf{b}_{CA\omega} + [\mathbf{b}_{CA\beta}] = \mathbf{b}_{Cn} + [\mathbf{b}_{CT}] \\ \{\mathbf{b}_D\} &= \mathbf{b}_A + \mathbf{b}_{DA\omega} + [\mathbf{b}_{DA\beta}] = \mathbf{b}_{Dn} + [\mathbf{b}_{DT}] \end{aligned} \right\} \quad \# 17.136$$

zeigt, daß die Endpunkte der Vektoren  $\mathbf{b}_B = O_2 \vec{B}_2$ ,  $\mathbf{b}_C = O_2 \vec{C}_2$ ,  $\mathbf{b}_D = O_2 \vec{D}_2$  auf der Schnittgeraden  $b_2, c_2, d_2$  je zweier Stellungsebenen liegen. Lassen wir nun, der Überlegung von Kap. 17.3.3.2 folgend, etwa die Punkte  $B_2$  die Gerade  $b_2$  durchlaufen, so werden auf den Geraden  $c_2$  und  $d_2$  vermöge

$$\mathbf{b}_C = \mathbf{b}_B + \mathbf{b}_{CB\omega} + [\mathbf{b}_{BC\beta}], \quad \mathbf{b}_D = \mathbf{b}_B + \mathbf{b}_{DB\omega} + [\mathbf{b}_{DB\beta}] \quad \# 17.137$$

durch die Ebenen der Stellungen  $[\mathbf{b}_{CB\beta}] \perp BC$  und  $[\mathbf{b}_{DB\beta}] \perp BD$  Punktreihen ausgeschnitten, die zu jener auf  $b_2$  ähnlich sind. Schließlich erzeugt

$$\mathbf{b}_D = \mathbf{b}_C + \mathbf{b}_{DC\omega} + [\mathbf{b}_{DB\beta}] \quad \# 17.138$$

auf  $d_2$  eine weitere Punktreihe, die zu der bereits genannten ähnlich ist. Der nach Fig. 17.12 ermittelte Doppelpunkt sei  $\bar{D}_2$ , durch den  $\mathbf{b}_D$  festgelegt ist. Von  $\bar{D}_2$  zu den Punktreihen auf  $b_2$  und  $c_2$  rückschreitend, ergeben sich die Beschleunigungen  $\mathbf{b}_B$  und  $\mathbf{b}_C$ . Das weitere Vorgehen erfolgt wie in Kap. 17.4.5.1.

### 17.4.6 Anwendungsbeispiel (3)

Als Beispiel sollen die Beschleunigungsverhältnisse der Bewegung von Kap. 17.3.4 untersucht werden (Fig. 17.19). Auf die Wiedergabe des Lageplanes (Fig. 17.6 und Fig. 17.12) wurde verzichtet, der Geschwindigkeitsplan von Fig. 17.12.2 wurde reproduziert, wobei jedoch zum Zwecke der Platzersparnis  $O'_1$  und  $O''_1$  zur Deckung gebracht wurden (Fig. 17.19.2), und die Vektoren  $\mathbf{v}_{CA}$  und  $\mathbf{v}_{CB}$  als Ortsvektoren von  $O_1$  aus abgetragen wurden. Ferner wurde der Vektor  $\bar{\omega}$  im Geschwindigkeitsplan abgetragen.

Die Beschleunigungsverhältnisse sind durch Vorgabe des Beschleunigungsvektors  $\mathbf{b}_A = O_2 \vec{A}_2$  des Punktes  $A$ , der natürlich die Richtung  $t_A$  der geradlinigen Bahn von  $A$  aufweisen muß, bestimmt. Die Konstruktion verläuft dann nach dem im Kap. 17.4.5.1 beschriebenen Figur 17.19 Plan. Da  $B$  eine geradlinige Bahn  $t_B$  beschreibt, ist die Richtung der Beschleunigung  $\mathbf{b}_B$  bekannt (sie liegt in der  $x_2$ -Achse des Beschleunigungsplanes) und #17.132 erhält die Gestalt

$$(\mathbf{b}_B) = \mathbf{b}_A + \mathbf{b}_{BA\omega} + [\mathbf{b}_{BA\beta}] \quad \# 17.139$$

Die zeichnerische Darstellung von  $\mathbf{b}_{BA\omega}$  #17.120 erfolgt nach Kap. 4.4<sup>13</sup>. Es ist  $|\mathbf{b}'_{BA\omega z}| \cdot c = \omega_{3z} \cdot \overline{1'_1 2'_1}$ , worin  $\overline{1'_1 2'_1}$  die Länge des Grundrisses der 1. Hauptlinie durch den Endpunkt des Vektors  $\mathbf{v}_{AB}$  ist, die in der Verbindungsebene dieses Punktes mit  $\bar{\omega}$  liegt.  $\mathbf{b}'_{BA\omega}$  ist normal auf den Grundriß dieser Hauptlinie.  $\mathbf{b}''_{BA\omega}$  steht auf dem Aufriß  $2''_1 4''_1$  einer Hauptlinie dieser Ebene normal, könnte aber auch mit Hilfe der dritten Komponente  $|\mathbf{b}_{BA\omega 3z}| \cdot c = \omega'_z |_{BA}$  ermittelt werden, worin  $|_{AB}$  den Abstand des Endpunktes  $2'_1$  von  $\mathbf{v}'_{BA}$  vom Träger von  $\bar{\omega}'$  bedeutet. Den Vektor  $\mathbf{b}_{BA\omega}$  tragen wir im Beschleunigungsplan vom Endpunkt des gegebenen Vektors  $\mathbf{b}_A$  aus ab. Die Stellung des Vektors  $[\mathbf{b}_{BA\beta}]$  ist normal auf die Gerade  $(AB)$  des Lageplans. Der Aufriß der durch den Endpunkt von  $\mathbf{b}''_{BA\omega}$  gehenden 2. Hauptlinie dieser Ebene ist normal zu  $A''B''$ , deren erste Spur  $\perp A'B'$ . Diese schneidet die  $x_2$ -Achse des Beschleunigungsplanes im Endpunkt  $B_2$  des Vektors  $\mathbf{b}_B$ .

<sup>13</sup> Die Hilfsfigur, die der Konstruktion dieses und der folgenden gleichartigen Ausdrücken dient, wurde in Fig. 17.19 aus Platzmangel unterdrückt.

Der Beschleunigungsvektor des Punktes C muß in der xy-Ebene liegen, seine Stellung ist daher bekannt. Nach #17.134 gilt

$$[\mathbf{b}_C] = \mathbf{b}_A + \mathbf{b}_{CA\omega} + [\mathbf{b}_{CA\beta}], \quad [\mathbf{b}_C] = \mathbf{b}_B + \mathbf{b}_{CB\omega} + [\mathbf{b}_{CB\beta}] \quad \# 17.140$$

Wir suchen zunächst die Vektoren  $\mathbf{b}_{CA\omega}$  und  $\mathbf{b}_{CB\omega}$  und in deren Endpunkten die Stellungsebenen  $[\mathbf{b}_{CA\beta}]$  und  $[\mathbf{b}_{CB\beta}]$ , die zu den Geraden (AC) bzw. (BC) des Lageplanes normal sind. Die ersten Spuren dieser Ebenen schneiden einander im Endpunkt  $C_2$  des Beschleunigungsvektors  $\mathbf{b}_C$ .

#### 17.4.6.1 Beschleunigungsachse

Um die Beschleunigungsachse bzw. den Vektor  $\bar{\beta}$  der momentanen Winkelbeschleunigung zu konstruieren, bestimmen wir zunächst mit Hilfe des Geschwindigkeitsplanes (Fig. 17.19.2) die Vektoren  $-\mathbf{b}_{A\omega}$ ,  $-\mathbf{b}_{B\omega}$ ,  $-\mathbf{b}_{C\omega}$  #17.76, die wir in den Endpunkten von  $\mathbf{b}_A$ ,  $\mathbf{b}_B$ ,  $\mathbf{b}_C$  abtragen. Nach #17.125 erhalten wir so die Endpunkte  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$  der Vektoren

$$\mathbf{b}_{A\beta} = \vec{O_2 A_3}, \quad \mathbf{b}_{B\beta} = \vec{O_2 B_3}, \quad \mathbf{b}_{C\beta} = \vec{O_2 C_3}. \quad \#17.131 \text{ zufolge muß daher}$$

$\vec{A_3 B_3} = \mathbf{b}_{BA\beta}$ ,  $\vec{B_3 C_3} = \mathbf{b}_{CB\beta}$ ,  $\vec{A_3 C_3} = \mathbf{b}_{CA\beta}$  sein. Man hätte also auch nach Ermittlung von  $A_3$  die Punkte  $B_3$  und  $C_3$  durch bloßes Parallelenziehen finden können. Das Lot  $\mathbf{b}_2$  aus  $O_2$  auf die Ebene  $(A_3 B_3 C_3)$  gibt die Richtung der Beschleunigungsachse  $\mathbf{b}$  an. Ist  $U_3$  der Lotfußpunkt, so ist  $\vec{O_2 U_3} = \bar{\tau}_\beta$  #17.127. Überträgt man  $U_3$  mit Hilfe der Teilverhältnistreue in den Lageplan (Fig. 17.12), so ist die Raumlage der Beschleunigungsachse  $\mathbf{b}$  bekannt. Das Gemeinlot von  $\mathbf{b}$  und der Schraubachse  $\mathbf{a}$  stellt nach Kap. 17.4.1 die Zentralgerade, dessen Fußpunkt  $S$  auf  $\mathbf{a}$  den Zentralpunkt dar.

Zur Bestimmung von  $\bar{\beta}$  bedienen wir uns der Formel #17.121. Den Vektor  $\vec{AB} = \vec{O_2 X_2}$  übertragen wir aus dem Lageplan in den Beschleunigungsplan. Ist  $X_2 1_2$  die durch  $X_2$  gehende 1. Hauptlinie der Verbindungsebene von  $X_2$  und  $\mathbf{b}_2$ , so ist wegen Kap. 4.4  $|\mathbf{b}'_{BA\beta}|_C = \beta_{3z} \cdot \overline{X_2 1_2}$ . Hieraus läßt sich  $\beta_3$  leicht konstruieren.

#### 17.4.6.2 Krümmungsradius

Den Krümmungsradius der Bahn von C kann man leicht nach Fig. 10.6. ermitteln, nachdem man die Normalkomponente  $\mathbf{b}_{Cn}$  aufgesucht hat.

## 18 Mehrere bewegte Systeme

### 18.1 Geschwindigkeitsverhältnisse

#### 18.1.1 Relativbewegung dreier Systeme

Gegeben seien drei Systeme  $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$ , von denen  $\Sigma_0$  fest sei. Die *Relativbewegung* von  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_1$  werde durch die, auf ein mit  $\Sigma_1$  fest verknüpftes Koordinatensystem bezogene, duale Einheitsquaternion  $\underline{\mathbf{D}}'_{21}(t)$  festgelegt. Die *Relativbahn* eines mit  $\Sigma_2$  starr verbundenen Punktes, der in bezug auf ein mit  $\Sigma_2$  verbundenes Koordinatensystem durch die Punktquaternion  $\underline{\mathbf{X}}''$  #3.56 dargestellt wird, wird in  $\Sigma_1$  nach #17.1 durch

$$\underline{\mathbf{X}}'(t) = \underline{\mathbf{D}}'_{21}(t) \circ \underline{\mathbf{X}}'' \circ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}'_{21e}(t) \quad \# 18.1$$

beschrieben. Die Führungsbewegung von  $\Sigma_1$  gegen das feste System  $\Sigma_0$  sei durch die duale Einheitsquaternion  $\underline{\mathbf{D}}_{10}(t)$  gegeben. Der in  $\Sigma_2$  feste Punkt  $\underline{\mathbf{X}}''$  durchläuft dann in  $\Sigma_0$  die *absolute Bahn*

$$\underline{\mathbf{X}}(t) = \underline{\mathbf{D}}_{10}(t) \circ \underline{\mathbf{X}}' \circ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}_{10e}(t) = \underline{\mathbf{D}}_{20}(t) \circ \underline{\mathbf{X}}'' \circ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}_{20e} \quad \# 18.2$$

Hier legt wegen #18.1

$$\underline{\mathbf{D}}_{20}(t) = \underline{\mathbf{D}}_{10}(t) \circ \underline{\mathbf{D}}'_{21}(t) \quad \# 18.3$$

die *absolute Bewegung* von  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_0$  fest.

Jede der genannten Bewegungen wird in jedem Augenblick durch eine Momentanschraubung ersetzt. So wird etwa der momentane Geschwindigkeitszustand der Relativbewegung nach #17.8 durch den dualen Vektor

$$\bar{\underline{\omega}}'_{21} = 2\dot{\underline{\mathbf{D}}}'_{21} \circ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}'_{21}$$

beschrieben. Er lautet, bezogen auf das feste System nach #16.109

$$\bar{\underline{\omega}}_{21} = \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \bar{\underline{\omega}}'_{21} \circ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}_{10} = 2\underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \dot{\underline{\mathbf{D}}}'_{21} \circ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}'_{21} \circ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}_{10} \quad \# 18.4$$

Für die Führungsbewegung gilt

$$\bar{\underline{\omega}}_{10} = 2\dot{\underline{\mathbf{D}}}_{10} \circ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}_{10} = -2\underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \ddot{\underline{\mathbf{D}}}_{10} \quad \# 18.5$$

für die Absolutbewegung

$$\bar{\underline{\omega}}_{20} = 2\dot{\underline{\mathbf{D}}}_{20} \circ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}_{20} \quad \# 18.6$$

#18.6 erhält vermöge #18.3 die Gestalt

$$\begin{aligned} \bar{\underline{\omega}}_{20} &= 2\left(\dot{\underline{\mathbf{D}}}_{10} \circ \underline{\mathbf{D}}'_{21} + \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \dot{\underline{\mathbf{D}}}'_{21}\right) \circ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}'_{21} \circ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}_{10} = \\ &= 2\dot{\underline{\mathbf{D}}}_{10} \circ \left(\underline{\mathbf{D}}'_{21} \circ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}'_{21}\right) \circ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}_{10} + 2\underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \dot{\underline{\mathbf{D}}}'_{21} \circ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}'_{21} \circ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}_{10} \end{aligned} \quad \# 18.7$$

Da  $\underline{\mathbf{D}}'_{21}$  eine Einheitsquaternion ist, nimmt #18.7 wegen #18.4,5 die Gestalt

$$\bar{\underline{\omega}}_{20} = \bar{\underline{\omega}}_{21} + \bar{\underline{\omega}}_{10} \quad \# 18.8$$

an. #18.8 ist das räumliche Analogon zur Formel von ARONHOLD der ebenen, bzw. zur Formel #10.90 der sphärischen Kinematik.

Betrachten wir nur zwei Systeme  $\Sigma_0$  und  $\Sigma_1$ , so folgt aus #18.8:  $\bar{\underline{\omega}}_{01} + \bar{\underline{\omega}}_{10} = \bar{\underline{\omega}}_{00} = \mathbf{0}$  oder

$$\bar{\underline{\omega}}_{01} = -\bar{\underline{\omega}}_{10} \quad \# 18.9$$

Sei zunächst  $\Sigma_0$  fest und  $\Sigma_1$  beweglich, so beschreibt  $\underline{\omega}_{10}$  den momentanen Geschwindigkeitszustand.  $\underline{\omega}_{01}$  gehört dann zur *Umkehrbewegung*, bei der  $\Sigma_1$  als fest,  $\Sigma_0$  als bewegt betrachtet wird. #18.9 zeigt, daß beim Übergang zur Umkehrbewegung der Vektor der dualen Winkelgeschwindigkeit bloß sein Vorzeichen ändert.

### 18.1.2 Anwendung der Motorrechnung

In Kap. 17.3.2 wurde die Darstellung des durch  $\underline{\omega}$  festgelegten momentanen Geschwindigkeitszustandes mit Hilfe eines *Motors* beschrieben. #18.8 legt es nun nahe, den dem Vektor  $\underline{\omega}_{20}$  zugeordneten Geschwindigkeitszustand mit Hilfe der  $\underline{\omega}_{21}$  bzw.  $\underline{\omega}_{01}$  zugeordneten Motoren zu interpretieren. +Sind  $\mathbf{a}_{10}$  bzw.  $\mathbf{a}_{21}$  die Momentanachsen von Führungs- und Relativbewegung, so möge der Motor der Führungsbewegung durch das Geradenpaar  $(m_1, m_2)$  festgelegt sein, wobei  $m_1$  in das Gemeinlot der Achsen  $\mathbf{a}_{10}$ ,  $\mathbf{a}_{21}$  falle. Die Relativbewegung werde dann durch das Geradenpaar  $(m_1, m_3)$  bestimmt (Fig. 18.1)

Legen wir die genannten Geraden  $m_i$  durch ihre PLÜCKER-Vektoren fest, so gilt nach #17.55 und #17.56 bei Verzicht auf Normierung

$$\underline{\omega}_{10} = \frac{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} = \frac{1}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} [\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 + \varepsilon (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2^* + \mathbf{m}_1^* \times \mathbf{m}_2)] \quad \# 18.10$$

$$\underline{\omega}_{21} = \frac{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_3}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_3} = \frac{1}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_3} [\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_3 + \varepsilon (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_3^* + \mathbf{m}_1^* \times \mathbf{m}_3)] \quad \#18.11$$

Die *Summe der Motoren* #18.10,11 werde geometrisch auf folgende Weise definiert<sup>1</sup>

**Figur 18.1** (Fig. 18.1): Eine beliebige Normalebene  $v$  ( $\mathbf{n} = \mathbf{m}_1$ ,  $d$  variabel) auf die den gegebenen Motoren gemeinsame Gerade  $m_1$  hat mit den Geraden  $m_1, m_2, m_3$  nach #1.75 die Schnittpunkte

$$\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_1^*}{|\mathbf{m}_1|^2}, \quad \mathbf{x} = \frac{d\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2^*}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}, \quad \mathbf{y} = \frac{d\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_3^*}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_3} \quad \#18.12$$

Ergänzt man diese Punkte zu einem Parallelogramm mit dem Vierten Eckpunkt  $\mathbf{z}$ , so ergibt sich aus #18.12

$$\begin{aligned} \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{s} &= \left( \frac{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2^*}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} + \frac{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_3^*}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_3} - \frac{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_1^*}{|\mathbf{m}_1|^2} \right) + d \left( \frac{\mathbf{m}_2}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} + \frac{\mathbf{m}_3}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_3} - \frac{\mathbf{m}_1}{|\mathbf{m}_1|^2} \right) = \# 18.13 \\ &= \mathbf{p} + d\mathbf{m}_4 \end{aligned}$$

Bei variablem  $d$  beschreibt demnach  $\mathbf{z}$  eine Gerade  $m_4$  durch den Punkt  $\mathbf{p}$  mit der Richtung  $\mathbf{m}_4$ . Deren Momentenvektor ist daher

$$\mathbf{m}_4^* = \mathbf{p} \times \mathbf{m}_4, \quad \underline{\mathbf{m}}_4 = \mathbf{m}_4 + \varepsilon \mathbf{m}_4^* \quad \# 18.14$$

Wir nennen den durch das orientierte Geradenpaar  $(m_1, m_4)$  bestimmten Motor die Summe der beiden gegebenen Motoren. Wir wollen nachweisen, daß dies der Motor  $\underline{\omega}_{20}$  der aus #18.10 und #18.11 zusammengesetzten Absolutbewegung ist. Stellen wir nämlich diesen Motor nach #17.55,56 dar, so ist

$$\frac{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_4}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_4} = \frac{1}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_4} [\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_4 + \varepsilon (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_4^* + \mathbf{m}_1^* \times \mathbf{m}_4)] \quad \# 18.15$$

Nun ist aber

<sup>1</sup> STUDY [1] S.54 ff

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_4 &= 1, \quad \mathbf{m}_1 \mathbf{p} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_4 = \frac{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} + \frac{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_3}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_3}, \\ \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_4^* + \mathbf{m}_1^* \times \mathbf{m}_4 &= \mathbf{m}_1 \times (\mathbf{p} \times \mathbf{m}_4) + \mathbf{m}_1^* \times \mathbf{m}_4 = \mathbf{p} + \mathbf{m}_1^* \times \mathbf{m}_4 = \\ &= \frac{1}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} [\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2^* + \mathbf{m}_1^* \times \mathbf{m}_2] + \frac{1}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_3} [\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_3^* + \mathbf{m}_1^* \times \mathbf{m}_3] \end{aligned} \right\} \quad \# 18.16$$

woraus in der Tat folgt

$$\frac{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_4}{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_4} = \overline{\omega}_{21} + \overline{\omega}_{10} = \overline{\omega}_{20} \quad \# 18.17$$

In Fig. 18.2 der Sonderfall mit parallelen Achsen  $\mathbf{a}_{21}$  und  $\mathbf{a}_{10}$  dargestellt. Es wurden zur Konstruktion zweier Punkte von  $\mathbf{m}_4$  jene beiden Normalebene zu  $\mathbf{m}_1$  herangezogen, die  $\mathbf{a}_{21}$  bzw.  $\mathbf{a}_{10}$  enthalten. Man erkennt, daß  $\mathbf{m}_4$  parallel zu der durch  $\mathbf{m}_1$  gehen- Figur 18.2 den Normalebene auf die gegebenen Achsen ist. Das Gemeinlot  $\mathbf{a}_{20}$  von  $\mathbf{m}_1$  und  $\mathbf{m}_4$  ist daher gleichfalls zu ihnen parallel.

Schließlich wurde in Fig. 18.3 noch die durch den Motor  $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$  festgelegte Schraubung mit der Schiebung mit der momentanen Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  zusammengesetzt. Der Figur 18.3 entsprechende Motor wird durch das Parallelenpaar  $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3)$  mit dem Abstand  $|\mathbf{v}|$  dargestellt. Wieder ist  $\mathbf{m}_4$  parallel zur Normalebene auf  $\mathbf{a}_{10}$ . Daher ist  $\mathbf{a}_{20}$  als Gemeinlot von  $\mathbf{m}_1$  und  $\mathbf{m}_4$  parallel zu  $\mathbf{a}_{10}$ .

### 18.1.3 Geschwindigkeitsverhältnisse bei Relativbewegung

Differentiation von #18.1 nach der Zeit ergibt die *Relativgeschwindigkeit*

$$\underline{\mathbf{V}}'_r = \varepsilon \mathbf{v}'_r = \underline{\mathbf{X}}' = \underline{\mathbf{D}}'_{21} \circ \underline{\mathbf{X}}'' \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}'_{21\varepsilon} + \underline{\mathbf{D}}'_{21} \circ \underline{\mathbf{X}}'' \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}'_{21\varepsilon} \quad \# 18.18$$

des in  $\Sigma_2$  mitgeführten Punktes  $\underline{\mathbf{X}}''$  gegen  $\Sigma_1$ , dargestellt in diesem System. Löst man #18.1 nach  $\underline{\mathbf{X}}''$  auf und setzt in #18.18 ein, so folgt

$$\underline{\mathbf{V}}'_r = \underline{\mathbf{D}}'_{21} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}'_{21} \circ \underline{\mathbf{X}}' + \underline{\mathbf{X}}' \circ \underline{\mathbf{D}}'_{21\varepsilon} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}'_{21\varepsilon} \quad \# 18.19$$

Darstellung der Relativgeschwindigkeit im festen System ergibt

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{V}}_r &= \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\mathbf{V}}'_r \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{10\varepsilon} = \\ &= \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\mathbf{D}}'_{21} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}'_{21} \circ \underline{\mathbf{X}}' \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{10\varepsilon} + \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\mathbf{X}}' \circ \underline{\mathbf{D}}'_{21\varepsilon} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}'_{21\varepsilon} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{10\varepsilon} \end{aligned} \quad \# 18.20$$

Differentiation von #18.2 nach der Zeit liefert die *Absolutgeschwindigkeit*

$$\underline{\mathbf{V}} = \varepsilon \mathbf{v} = \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\mathbf{X}}' \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{10\varepsilon} + \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\mathbf{X}}' \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{10\varepsilon} + \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\mathbf{V}}'_r \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{10\varepsilon} \quad \# 18.21$$

Vergleich mit #17.3 lehrt, daß die beiden ersten Summanden von #18.21 die *Führungsgeschwindigkeit* des Punktes  $\underline{\mathbf{X}}'$  darstellen, d.h. jene Geschwindigkeit, die der in  $\Sigma_1$  fest gedachte Punkt  $\underline{\mathbf{X}}'$  durch die Führungsbewegung erhalte:

$$\underline{\mathbf{V}}_f = \varepsilon \mathbf{v}_f = \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\mathbf{X}}' \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{10\varepsilon} + \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\mathbf{X}}' \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{10\varepsilon} \quad \# 18.22$$

Der dritte Summand von #18.21 stellt nach #18.20 die im festen Koordinatensystem dargestellte Relativgeschwindigkeit dar. Daher ist

$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{V}}_f + \underline{\mathbf{V}}_r \quad \# 18.23$$

oder in reeller Schreibweise

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_f + \mathbf{v}_r$$

# 18.24

#18.23,24 stellen das *Additionsgesetz der Geschwindigkeiten* bei Relativbewegung dar.

## 18.2 Beschleunigungsverhältnisse

### 18.2.1 Winkelbeschleunigungen

Differentiation vom #18.8 ergibt

$$\dot{\underline{\omega}}_{20} = \dot{\underline{\omega}}_{21} + \dot{\underline{\omega}}_{10} \quad \# 18.25$$

Nun stellen  $\dot{\underline{\omega}}_{20} = \underline{\beta}_{20}$ ,  $\dot{\underline{\omega}}_{10} = \underline{\beta}_{10}$  die dualen Winkelbeschleunigungen der Absolut- bzw. Relativbewegung dar. Durch Differentiation von #18.4 folgt

$$\dot{\underline{\omega}}_{21} = \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\omega}'_{21} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{10} + \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\omega}'_{21} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{10} + \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\beta}'_{21} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{10} \quad \# 18.26$$

Hierin bedeutet

$$\underline{\beta}_{21} = \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\beta}'_{21} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{10} \quad \# 18.27$$

die im festen System dargestellte duale Winkelbeschleunigung der Relativbewegung. Berechnet man aus #18.4  $\underline{\omega}'_{21} = \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{10} \circ \underline{\omega}_{21} \circ \underline{\mathbf{D}}_{10}$  und führt dies in #18.26 ein, so ergibt sich

$$\dot{\underline{\omega}}_{21} = \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{10} \circ \underline{\omega}_{21} + \underline{\omega}_{21} \circ \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{10} + \underline{\beta}_{21} \quad \#18.28$$

Mit #18.5 erhält #18.28 die Form

$$\dot{\underline{\omega}}_{21} = \frac{1}{2}(\underline{\omega}_{10} \circ \underline{\omega}_{21} - \underline{\omega}_{21} \circ \underline{\omega}_{10}) + \underline{\beta}_{21} = \underline{\omega}_{10} \times \underline{\omega}_{21} + \underline{\beta}_{21} \quad \# 18.29$$

Daher wird aus #18.25

$$\underline{\beta}_{20} = \underline{\beta}_{21} + \underline{\beta}_{10} + \underline{\omega}_{10} \times \underline{\omega}_{21} \quad \# 18.30$$

Trennung von Real- und Dualteil ergibt

$$\underline{\beta}_{20} = \underline{\beta}_{21} + \underline{\beta}_{10} + \underline{\omega}_{10} \times \underline{\omega}_{21}, \quad \hat{\underline{\beta}}_{20} = \hat{\underline{\beta}}_{21} + \hat{\underline{\beta}}_{10} + \underline{\omega}_{10} \times \hat{\underline{\omega}}_{21} + \hat{\underline{\omega}}_{10} \times \underline{\omega}_{21} \quad \# 18.31$$

### 18.2.2 Bahnbeschleunigungen. CORIOLISbeschleunigung

Differentiation von #18.23 ergibt

$$\dot{\underline{\mathbf{v}}} = \dot{\underline{\mathbf{v}}}_f + \dot{\underline{\mathbf{v}}}_r \quad \# 18.32$$

Nach #17.9 ist

$$\underline{\mathbf{v}}_f = \frac{1}{2}(\underline{\omega}_{10} \circ \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}} \circ \underline{\omega}_{10\varepsilon}) \quad \# 18.33$$

Durch Differentiation folgt daraus wegen #18.23

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\mathbf{v}}}_f &= \frac{1}{2}(\underline{\beta}_{10} \circ \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}} \circ \underline{\beta}_{10\varepsilon}) + \frac{1}{2}(\underline{\omega}_{10} \circ \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{v}} \circ \underline{\omega}_{10\varepsilon}) = \\ &= \frac{1}{2}(\underline{\beta}_{10} \circ \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}} \circ \underline{\beta}_{10\varepsilon}) + \frac{1}{2}(\underline{\omega}_{10} \circ \underline{\mathbf{v}}_f - \underline{\mathbf{v}}_f \circ \underline{\omega}_{10\varepsilon}) + \frac{1}{2}(\underline{\omega}_{10} \circ \underline{\mathbf{v}}_r - \underline{\mathbf{v}}_r \circ \underline{\omega}_{10\varepsilon}) \end{aligned} \quad \# 18.34$$

Das kann man nach #17.85 auch in der Form

$$\dot{\underline{\mathbf{v}}}_f = \underline{\mathbf{B}}_f + \frac{1}{2}(\underline{\omega}_{10} \circ \underline{\mathbf{v}}_r - \underline{\mathbf{v}}_r \circ \underline{\omega}_{10\varepsilon}) \quad \# 18.35$$

anschreiben, worin  $\underline{\mathbf{B}}_f = \varepsilon \mathbf{b}_f$  die *Führungsbeschleunigung* bedeutet, also jene Beschleunigung, die der in  $\Sigma_1$  fest gedachte Punkt durch die Führungsbewegung erhalte.

Aus #18.20 folgt durch Differentiation

$$\underline{\dot{\mathbf{V}}}_r = \underline{\dot{\mathbf{D}}}_{10} \circ \underline{\mathbf{V}}'_r \tilde{\mathbf{D}}_{10\varepsilon} + \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\dot{\mathbf{V}}}'_r \tilde{\mathbf{D}}_{10\varepsilon} + \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\mathbf{B}}'_r \tilde{\mathbf{D}}_{10\varepsilon} \quad \# 18.36$$

Hierin stellt

$$\underline{\mathbf{B}}_r = \varepsilon \mathbf{b}_r = \underline{\mathbf{D}}_{10} \circ \underline{\mathbf{B}}'_r \circ \tilde{\mathbf{D}}_{10\varepsilon} \quad \# 18.37$$

die im festen System dargestellte *Relativbeschleunigung*  $\underline{\mathbf{B}}'_r = \varepsilon \mathbf{b}'_r$  dar, jene Beschleunigung, die der in  $\Sigma_2$  feste Punkt gegen  $\Sigma_1$  durch die Relativbewegung erhält. Formt man die ersten beiden Summanden #18.36 nach dem Vorbild von #17.3 und #17.9 um (man hat dort  $\underline{\mathbf{X}}'$  durch  $\underline{\mathbf{V}}'_r$ ,  $\underline{\mathbf{D}}$  durch  $\underline{\mathbf{D}}_{10}$ ,  $\underline{\omega}$  durch  $\underline{\omega}_{10}$  zu ersetzen), so nimmt #18.36 die Gestalt

$$\underline{\dot{\mathbf{V}}}_r = \underline{\mathbf{B}}_r + \frac{1}{2} (\underline{\omega}_{10} \circ \underline{\mathbf{V}}_r - \underline{\mathbf{V}}_r \circ \underline{\omega}_{10\varepsilon}) \quad \# 18.38$$

an. Bezeichnet man  $\underline{\mathbf{B}} = \underline{\dot{\mathbf{V}}} = \varepsilon \mathbf{b}$  als *Absolutbeschleunigung* des in  $\Sigma_2$  mitgeführten Punktes gegen das feste System  $\Sigma_0$ , so nimmt #18.322 die Gestalt

$$\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{B}}_f + \underline{\mathbf{B}}_r + \underline{\mathbf{B}}_c \quad \# 18.39$$

an, wobei

$$\underline{\mathbf{B}}_c = \underline{\omega}_{10} \circ \underline{\mathbf{V}}_r - \underline{\mathbf{V}}_r \circ \underline{\omega}_{10\varepsilon} \quad \#18.40$$

gesetzt wurde. Man nennt  $\underline{\mathbf{B}}_c$  die *Zusatz- oder CORIOLISbeschleunigung*<sup>2</sup> des betrachteten Punktes. Reelle Schreibweise von #18.39,40 ergibt

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_r + \mathbf{b}_c, \quad \mathbf{b}_c = 2 \cdot \underline{\omega} \times \mathbf{v}_r \quad \# 18.41, \# 18.42$$

## 18.3 Getriebe

Mehrere bewegte Systeme treten in der technischen Praxis bei den *Getrieben* auf. Die Relativbewegung der *Getriebeglieder* untereinander wird durch *Gelenke* vermittelt. Eines der Getriebeglieder betrachten wir als ruhend. Wir nennen es *Gestell* oder *Steg*. Die einzelnen Getriebeglieder setzen wir als starr voraus. Die relative Lage zweier Getriebeglieder werden wir häufig durch Angabe der gegenseitigen Lage fest mit diesen Gliedern verbundener kartesischen Rechtskoordinatensysteme beschreiben.

### 18.3.1 Freie Beweglichkeit

Die Raumlage eines Getriebegliedes  $\Sigma_1$ - repräsentiert durch das Koordinatensystem  $O(x_1, y_1, z_1)$  - gegen das Gestell  $\Sigma_0$   $O(x, y, z)$  wird nach Kap.8.1 durch 6 Parameter bestimmt. Wird deren beliebige Wahl keinerlei Einschränkung auferlegt, so ist das Getriebeglied gegenüber dem Gestell frei beweglich, es hat den *Freiheitsgrad* 6.

### 18.3.2 Eingeschränkte Beweglichkeit. Freiheitsgrade

Durch Gelenke, welche das Getriebeglied mit dem Gestell verbinden, wird dessen freie Beweglichkeit eingeschränkt. Man wird nicht mehr alle 6 die Lage des Getriebegliedes fixierenden Parameter frei wählen könne. Jedes Gelenk reduziert demnach die Parameterzahl 6 um eine gewisse Anzahl  $u$ , den *Unfreiheitsgrad* des Gelenkes. Die verbleibende Anzahl von frei wählbaren Parametern

<sup>2</sup> Gustave de CORIOLIS 1792-1843

$$f = 6 - u$$

# 18.43

nennt man den *Freiheitsgrad des Gelenkes*. Im folgenden seien einige wichtige Gelenke samt ihren Freiheits- bzw. Unfreiheitsgraden angegeben. Der Begriff „Gelenk“ wird dabei in einem sehr weiten Sinn verwendet.

18.3.2.1  $u = 1, f = 5$

Die mindeste Bewegungseinschränkung findet statt, wenn eine Fläche des Getriebegliedes  $\Sigma_1$  dauernd eine Fläche des Gestells  $\Sigma_0$  berühren soll. Da der Berührungspunkt auf jeder der Fläche von zwei Parametern abhängt und die bewegte Fläche um die gemeinsame Normale noch verdreht werden kann, weist das Getriebeglied den Freiheitsgrad  $f = 5$  auf. Eine mögliche Ausführung stellt das in Fig. 18.4 dargestellte *Kugelplattengelenk* dar, bei der eine Kugel und eine Ebene einander dauernd berühren.

**Figur 18.4**

18.3.2.2  $u = 2, f = 4$

Fig. 18.5 zeigt das *Kugelrillengelenk* mit dem Freiheitsgrad  $f = 4$ .

18.3.2.3  $u = 3, f = 3$

Das *Plattengelenk* von Fig. 18.6.1 vermittelt zwischen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_0$  eine ebene Bewegung. Ebenso hat das *Kugelgelenk* von Fig. 18.6.2 den Freiheitsgrad  $f = 3$ . Da Kugelgelenke  $K$  häufig auftreten, wollen wir sie in Getriebeskizzen durch das in Fig. 18.6.2 angegebene Symbol andeuten.

**Figur 18.6**

18.3.2.4  $u = 4, f = 2$

Fig. 18.7 zeigt ein *Zylinder- oder Drehschubgelenk*  $Z$  samt dem dazugehörigen Symbol.  $\Sigma_1$  kann um die Achse von  $Z$  beliebig verdreht und unabhängig von der Drehung in Achsenrichtung verschoben werden.

**Figur 18.7**

18.3.2.5  $u = 5, f = 1$

Fig. 18.8.1 stellt ein *Drehgelenk*  $D$  dar.  $\Sigma_1$  beschreibt eine Drehung um die in  $\Sigma_0$  feste Achse von  $D$ . Ein *Schubgelenk (Prismenpaar)*  $P$  gestattet  $\Sigma_1$  bloß eine Parallelverschiebung gegen  $\Sigma_0$  (Fig. 18.8.2). Schließlich beschreibt  $\Sigma_1$  bei einem *Schraubgelenk*  $S$  gegenüber  $\Sigma_0$  die Bewegung einer Schraubenmutter entlang ihrer Spindel (Fig. 18.8.3)

**Figur 18.8**

**18.3.3 Freiheitsgrad zusammengesetzter Getriebe**

Ein räumlicher Mechanismus bestehe - inklusive Gestell - aus  $n$  Systemen. Wären die  $n-1$  vom Gestell verschiedenen Systeme frei beweglich, so hätte das Getriebe insgesamt  $6(n-1)$  Freiheitsgrade gegenüber dem Gestell. Diese Anzahl der Freiheitsgrade ist zu vermindern um die Summe  $\sum_{i=1}^g u_i$  aller Unfreiheitsgrade, die von den insgesamt  $g$  Gelenken dem Getriebe aufgezungen werden. Die Anzahl der dem System verbleibenden Freiheitsgrade ist mithin

$$F = 6(n - 1) - \sum_{i=1}^g u_i \tag{# 18.44}$$

d.h. um eine Stellung des Getriebes zu fixieren, bedarf es noch der (innerhalb gewisser Grenzen) beliebigen Wahl von  $F$  Parametern. Mit #18.43 kann man #18.44 auch in der Form

$$F = 6(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i \tag{# 18.45}$$

darstellen.  $\sum_{i=1}^g f_i$  stellt die Summe der Freiheitsgrade aller  $g$  Gelenke dar. Ist  $f = 2$ , so nennt man das Getriebe *flächenläufig*. Da jede Getriebestellung von 2 Parametern abhängt, wird ein Punkt des bewegten Systems i.a. eine Fläche beschreiben. Ein Getriebe mit  $F = 1$  nennt man *zwangläufig*, jeder Punkt beschreibt i.a. eine *Bahnkurve*. Mit zwangläufigen Getrieben werden wir uns in erster Linie befassen. Für  $F = 1$  geht #18.45 in das *Zwanglaufkriterium*

$$7 = 6(n - g) + \sum_{i=1}^g f_i \quad \# 18.46$$

über. Getriebe mit  $F \leq 0$  sind i.a. *starr*.

Die Formel #18.45 ist mit Vorsicht zu handhaben. Sie gilt nur „im allgemeinen“, d.h. bei „beliebig“ gewählten Abmessungen der Getriebeglieder. Es kann aber sehr wohl der Fall eintreten, daß durch spezielle Wahl der Abmessungen die Anzahl der Freiheitsgrade größer ist, als #18.45 erwarten läßt, sodaß Getriebe, die nach #18.45 starr sein müßten, beweglich werden. Um auch diesem Fall Rechnung zu tragen, müßte man #18.45 eigentlich in der Gestalt

$$F \geq 6(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i \quad \# 18.47$$

anschreiben.

### 18.3.3.1 Räumliche Schubgetriebe

Sind sämtliche Gelenke Schubgelenke  $P$ , so sind die Bewegungen der Getriebeglieder gegeneinander ausschließlich Parallelverschiebungen, die relativen Lageänderungen hängen dann nur von je drei Parametern ab. In #18.45 haben wir demnach den Faktor 6 durch den Faktor 3 zu ersetzen. Da bei allen auftretenden Schubgelenken  $f_i = 1$  ist wird  $\sum_{i=1}^g f_i = g$  und wir erhalten an Stelle von #18.45

$$F_I = 3n - 2g - 3 \quad \# 18.48$$

### 18.3.3.2 Sphärische Getriebe

Hier sind alle Gelenke Drehgelenke, deren Achsen dauernd durch denselben Punkt gehen. Hier erleiden die die Getriebeglieder keinerlei Parallelverschiebung, die Relativbewegung besteht aus reinen Drehungen. Da aber eine Drehung durch drei Parameter festgelegt ist (Richtungswinkel der Drehachse, Drehwinkel) und alle Drehgelenke den Freiheitsgrad  $f_i = 1$  haben, ergibt sich auch hieraus #18.45

$$F_{II} = 3n - 2g - 3 \quad \# 18.49$$

Ist der Schnittpunkt der Achsen ein Fernpunkt, so sind alle Achse parallel und es liegt der Sonderfall einer *ebenen Bewegung* vor, für welche demnach #18.49 gleichfalls gilt.

## 18.4 Zwangläufige Getriebe

### 18.4.1 Die Siebengelenkskette

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall zwangläufiger Gertriebe, bei denen jedes Gelenk den Freiheitsgrad 1 hat. Dann ist  $\sum_{i=1}^g f_i = g$  und aus #18.45 folgt die von M.GRÜBLER herrührende Bedingung<sup>3</sup>

<sup>3</sup>GRÜBLER [1]

$$6n - 5g - 7 = 0$$

# 18.50

#18.50 stellt eine DIOPHANTische Gleichung für die Anzahl  $n$  der Getriebeglieder und die Anzahl der Gelenke dar. Mit Hilfe des ganzzahligen Parameters  $\lambda$  lassen sich  $n$  und  $g$  in folgender Weise darstellen:

|                    |           |   |    |    |     |         |
|--------------------|-----------|---|----|----|-----|---------|
| $n = 5\lambda + 2$ | $\lambda$ | 1 | 2  | 3  | ... |         |
| $g = 6\lambda + 1$ | $n$       | 7 | 12 | 17 | ... | # 18.51 |
|                    | $g$       | 7 | 13 | 19 | ... |         |

Die angeführte Tabelle stellt die einfachsten Möglichkeiten dar, zwangsläufige Mechanismen der genannten Art zu bilden. Sind alle Gelenke Drehgelenke, so erhält man im Falle  $n = 7$ ,  $g = 7$  die räumliche Siebengelenkskette, die wir symbolisch durch

$$\Sigma_0-D-\Sigma_1-D-\Sigma_2-D-\Sigma_3-D-\Sigma_4-D-\Sigma_5-D-\Sigma_6-D-\Sigma_0$$

oder einfacher durch

$$0D1D2D3D4D5D6D0$$

beschreiben, wobei zwischen zwei Systemen immer die Art des sie verknüpfenden Gelenks angedeutet wird. Fig. 18.9.1 zeigt ein Schrägbild der Siebengelenkskette, Fig. 18.9.2

**Figur 18.9**

eine schematische Darstellung, welche die einzelnen Glieder durch Strecken repräsentiert und die Art ihrer Verbindung durch passende Beschriftung angibt.

**18.4.2 Ableitungen aus der Siebengelenkskette**

Aus der Siebengelenkskette kann man nach einem von GRÜBLER herrührenden, leicht einsichtigen Schnittprinzip<sup>4</sup> neue zwangsläufige Mechanismen herleiten:

**Satz 18.4.2.1:** *Schneidet man aus der räumlichen Siebengelenkskette  $r$  aufeinanderfolgende Gelenke und verknüpft die Schnittstellen durch ein Gelenk vom Freiheitsgrad  $f = r$ , so ist das neue Getriebe wieder zwangsläufig.*

Führt man in Fig. 18.10 den angedeuteten Schnitt durch, so hat man nach obigem Satz Glied  $\Sigma_3$  mit Glied  $\Sigma_6$  durch ein Gelenk vom Freiheitsgrad  $f = 3$  zu verbinden. Es ergibt sich das fünf-

**Figur 18.10**

gliedrige Getriebe der Fig. 18.10.2 (die Glieder wurden neu numeriert), das außer vier Drehgelenken noch etwa ein Kugelgelenk aufweist. Mit #18.45 überprüft man leicht den Zwanglauf dieses Getriebes. Führt man in Fig. 18.10.2 den Schnitt I durch, so hat man  $\Sigma_0$  mit  $\Sigma_3$  durch ein Gelenk von Freiheitsgrad  $f = 2$  zu verbinden. Es ergibt sich das zwangsläufige viergliedrige Getriebe von Fig. 18.10.3 mit zwei Drehgelenken, einem Kugelgelenk und einem Gelenk vom Freiheitsgrad 2, das man etwa als Zylindergelenk ausbilden kann. Bei Ausführung des Schnittes II hingegen haben wir  $\Sigma_0$  und  $\Sigma_2$  durch ein Gelenk mit  $f = 4$  zu verbinden. So entsteht das viergliedrige Getriebe der Fig. 18.10.4. mit drei Drehgelenken und etwa einem Kugelrillengelenk.

Wählt man in Fig. 18.10.2  $\Sigma_0$  als Gestell, so liegt das dargestellte Schema der von der DESAGA GmbH, Heidelberg, hergestellten „Desaga-Labor-Schüttelmaschine“ zugrunde, worin  $\Sigma_2$  als Schüttelkasten ausgebildet wird (Fig. 18.11.1).

Ersetzt man in Fig. 18.10.2 das  $\Sigma_0$  mit  $\Sigma_4$  verbindende Drehgelenk D durch ein Schubgelenk P,

**Figur 18.11**

so erhält man die *räumliche Schubkurbel* von Fig. 18.11.2, welche die Drehbewegung von  $\Sigma_1$  in eine oszillierende Schubbewegung von  $\Sigma_4$  umwandelt.

**Figur.18.12**

Stellt man das Getriebe von Fig. 18.10.3 auf  $\Sigma_0$ , so ergibt sich der Mechanismus von Fig. 18.12, der die Drehbewegung von  $\Sigma_1$  in die Drehschubbewegung von  $\Sigma_3$

<sup>4</sup>zitiert bei ADRIAN [1] S.488

umwandelt.

Schließlich läßt sich das auf  $\Sigma_0$  gestellte Getriebe von Fig. 18.10.4 als Vorsatzgetriebe nach DRP Nr. 848 589, Kl. 47 h, Gr. 21 verwenden, das (Fig. 18.13) die Drehbewegung von  $\Sigma_1$  in die oszillierende koaxiale Schubbewegung von  $\Sigma$  umwandelt. Figur 18.13

### 18.4.3 Getriebe mit mehr als sieben Gliedern

In der Tabelle #18.51 tritt nach der Siebengelenkskette ein Getriebe mit  $n = 12$  Gliedern und  $g = 13$  Gelenken auf. Getriebe dieser Art kann man auf verschiedene Arten aus einer Siebengelenkskette ableiten. Fig. 18.14 zeigt einige Möglichkeiten. Durch Ausführung von Schnitten kann man die Anzahl der Glieder vermindern, wobei sich gleichzeitig die Freiheitsgrade der sie verbindenden Gelenke erhöhen. Bei den Getrieben der Fig. 18.14 treten außer *binären Gliedern* (Gliedern mit zwei Gelenken) auch *ternäre Glieder* (*Dreibinder*) mit drei Gelenken auf. Natürlich sind auch Getriebe mit quaternären Gliedern, ... möglich. Eine Untersuchung der Getriebe unter diesem Gesichtspunkt hat R.KRAUS<sup>5</sup> unternommen. Hier sei nur darauf hingewiesen. Figur 18.14

## 18.5 Spezielle Gelenkkombinationen

### 18.5.1 Binäre Koppel

In der räumlichen Schubkurbel (Fig. 18.15, ohne den strichlierten Teil), welche die Drehbewegung von  $\Sigma_1$  in die Schubbewegung von  $\Sigma_3$  umwandelt, sind  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  durch das als *binäre Koppel* ausgebildete, mit zwei Kugelgelenken versehene System  $\Sigma_2$  verbunden. Der Mechanismus hätte nach #18.45  $F = 2$  Freiheitsgrade. Dies scheint der Eindeutigkeit zu widersprechen, mit der jeder Stellung der Kurbel  $\Sigma_1$  eine wohlbestimmte Lage des abgetriebenen Gliedes  $\Sigma_3$  entspricht. Das Glied  $\Sigma_2$  läßt sich jedoch um seine Längsachse verdrehen, ohne daß sich die gegenseitige Stellung von  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_3$  ändert. Von den 6 Freiheitsgraden, welche  $\Sigma_2$  auf Grund seiner beiden Kugelgelenke zukommen, spaltet sich einer als für das Gesamtsystem unwesentlich ab. Es ist also zweckmäßig, eine binäre Koppel nicht als eigenes System, sondern als Gelenk vom Freiheitsgrad  $f = 5$  aufzufassen. Dann wird dem Mechanismus von Fig. 18.15 tatsächlich der Freiheitsgrad  $F = 1$  zugeordnet. Figur 18.15

Völlig anders ist die Sachlage, wenn die Bewegung von  $\Sigma_2$  selbst zum Gegenstand der Untersuchung gemacht wird, indem man etwa (in Fig. 18.15 strichliert) diesem Glied eine weitere Führung in Form eines Kugelplattengelenkes aufzwingt. Dann haben wir  $n = 4$  Glieder mit  $g = 5$  Gelenken mit insgesamt  $\Sigma f = 1+3+3+5+1 = 13$  Freiheitsgraden. Der Gesamtmechanismus hat daher den Freiheitsgrad  $F = 1$ .

Die Bewegung von  $\Sigma_2$  ist der in Fig. 17.6.1 betrachteten analog, nur werden dort zwei Punkte des bewegten Systems auf Geraden geführt, während hier einer auf einer Geraden, der angetriebene jedoch auf einem Kreis läuft. Hier wie dort wird ein dritter Punkt auf einer Ebene geführt. Die Ermittlung der Momentanachse, der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverhältnisse verläuft völlig analog zu den Kapiteln 17.2.4, 17.3.4, 17.4.6. Figur 18.16

### 18.5.2 Kombination von Kugel- und Zylindergelenk

In Fig. 18.16 liegt ein  $n = 4$  gliedriger Mechanismus mit  $g = 4$  Gelenken und mit  $\Sigma f = 1+3+2+2 = 8$  Freiheitsgraden vor. Nach #18.45 weist der Gesamtmechanismus  $F = 2$  Freiheitsgrade auf, von denen allerdings einer, nämlich die Drehungen der Kugel  $\Sigma_2$  um die

<sup>5</sup>KRAUS [1]

Achse des Zylindergelenks  $Z$  für die Bewegung des Gesamtmechanismus unerheblich ist. Die Kombination eines Kugelgelenkes mit einem coaxialen Zylindergelenk entspricht also einem Einzelgelenk vom Freiheitsgrad  $f = 3$ .

### 18.6 Spezielle zwangsläufige Getriebe

In Kap. 18.3.3 wurde erwähnt, daß sich bei spezieller Wahl der Abmessungen der Glieder der Freiheitsgrad #18.45 eines Getriebes erhöhen kann. Im folgenden werden wir einige bemerkenswerte Mechanismen nennen, bei denen eine Erhöhung des Freiheitsgrades eintritt.

#### 18.6.1 Das Isogramm von G.T.BENNETT

##### 18.6.1.1 Notwendige Bedingungen

Nach #18.45 ist ein Getriebe mit  $n = 4$  Systemen und  $g = 4$  Drehgelenken starr (nicht jedoch nach #18.48 ein derartiges Getriebe mit lauter Schubgelenken!). Durch spezielle Wahl der Abmessungen läßt sich jedoch ein zwangsläufig beweglicher Mechanismus auf folgende Weise angeben: Wir gehen von einem ebenen Parallelogramm mit den Seiten  $a, b$  aus, dessen als Stäbe ausgebildete Seiten wir uns zunächst durch die in den Eckpunkten  $A, B_1, C, D_1$  angebrachten Kugelgelenke verbunden denken (Fig. 18.17.1)). Sieht man von der Verdrehbarkeit der Stäbe als binäre Koppeln (Kap. 85.51) um ihre Achsen ab, so beträgt der Freiheitsgrad dieses Gelenksystems nach #18.45  $F = 2$ . Verknicken wir dieses Stabwerk um seine Diagonale  $AC$  (deren Länge wir beliebig wählen) um einen beliebigen Winkel, so entsteht ein windschiefes Viereck  $ABCD$  mit je zwei gleich langen Gegenseiten, das wir nach BENNETT<sup>6</sup> als *Isogramm* bezeichnen. Man erkennt leicht, daß es bezüglich des Gemeinlotes  $l$  seiner beiden Diagonalen axialsymmetrisch ist. Aus der Kongruenz der beiden Dreiecke  $\triangle ABD$  und  $\triangle BCD$  folgt ihre Flächengleichheit (Fig. 18.17.2)

**Figur 18.17**

$$2F = ah_1 = bh_2 \quad \# 18.52$$

worin  $h_1$  bzw.  $h_2$  die Höhen der genannten Dreiecke sind. Für die Höhe  $h$  der Pyramide  $ABCD$  gilt dann

$$h = h_1 \sin \alpha = h_2 \sin \beta \quad \# 18.53$$

worin  $\alpha$  und  $\beta$  die Winkel der Dreiecksebenen  $(ABD)$  und  $(BCD)$  gegen die Ebene  $(ABC)$  sind; daher sind  $\alpha$  und  $\beta$  auch die von den Normalen dieser Ebenen eingeschlossenen Winkel. Aus #18.52,53 ergibt sich

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad \# 18.54$$

Hält man den Winkel  $\alpha$  konstant, so ist auch der von den Ebenen  $(ABC)$  bzw.  $(ABD)$  gebildete Keil unveränderlich. Wegen der Symmetrie bezüglich  $l$  ist auch der Keilwinkel von  $(DCA)$  und  $(DCB)$  konstant. Die Forderung nach Konstanz von  $\alpha$  vermindert den Freiheitsgrad des Getriebes um eine Einheit, es wird zwangsläufig. Hält man etwa  $AB$  fest, so kann sich  $AD$  nur mehr in der festen Ebene  $(ABD)$ ,  $BC$  nur mehr in  $(ABC)$  verdrehen. Dabei schließt die von  $(BCD)$  aufgespannte Ebene mit  $(ABC)$  nach #18.54 beständig den festen Winkel  $\beta$  ein, der wegen der Symmetrie um  $l$  gleich dem Keilwinkel  $\angle(ADB)(ADC)$  ist. Daher schließen die Normalen der beweglichen Ebenen  $(ABC)$  bzw.  $(ADC)$  den konstanten Winkel  $\beta$  ein.

Verbindet man demnach in den Punkten  $A, B, C, D$  die dort zusammentreffenden Strecken durch *Drehgelenke*, deren Achsen auf die von den Strecken aufgespannten Ebenen normal stehen, so ist der so gebildete Mechanismus zwangsläufig.

<sup>6</sup> BENNETT [1], [2]

18.6.1.2 Hinreichende Bedingungen

Im vorhergehenden Kapitel wurde gezeigt, daß dem BENNETT'schen Isogramm innewohnenden Eigenschaften für dessen Beweglichkeit hinreichend sind. Nunmehr wollen wir zeigen, daß ein viergliedriges Raumgetriebe mit lauter Drehgelenken, deren Achsen windschief sind, notwendigerweise ein BENNETT'sches Isogramm ist<sup>7</sup>. Den Fall dauernd paralleler Drehachsen und jenen Fall, bei dem die vier Drehachsen ständig durch denselben Punkt gehen, können wir außer acht lassen, da sie auf die bekannten viergliedrigen Getriebe des ebenen und sphärischen Gelenkvierecks führen.

Seien also (Fig. 18.18)  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  die windschiefen Achsen,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ( $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$ ) die Winkel,  $a, b, c, d$  ( $abcd \neq 0$ ) die kürzesten Abstände der Achsen je zweier aufeinanderfolgender Drehgelenke. Die Fußpunkte der Gemeinlote zweier Nachbarachsen auf der Drehachse  $\mathbf{a}_i$  mögen voneinander die Abstände  $\lambda_i$  besitzen. Das so festgelegte Getriebe wird bei beliebig gewählten Abmessungen nach #18.45 starr sein. Um die Bedingungen der Beweglichkeit aufzusuchen, legen wir die z-Achse eines kartesischen Rechts-Systems in  $\mathbf{a}_1$ , den Ursprung O in den Fußpunkt des Gemeinlotes zu  $\mathbf{a}_2$ , die x-Achse wählen wir parallel zum Gemeinlot von  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_4$ .  $\mathbf{a}_4$  ist daher parallel zur yz-Ebene des Koordinatensystems. Ist  $\varphi$  der Winkel, den das Gemeinlot von  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  mit der x-Achse einschließt, so sind die in den Achsen  $\mathbf{a}_2$  und  $\mathbf{a}_4$  liegenden Einheitsvektoren

**Figur 18.8**

$$\mathbf{a}_2^{\circ} = \begin{Bmatrix} \sin \alpha \sin \varphi \\ -\sin \alpha \cos \varphi \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4^{\circ} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sin \delta \\ \cos \delta \end{Bmatrix} \quad \# 18.55$$

Die Ortsvektoren  $\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_4$  der Fußpunkte  $M_2$  und  $M_4$  der Gemeinlote aus  $\mathbf{a}_2$  bzw.  $\mathbf{a}_4$  aus  $\mathbf{a}_3$  sind dann

$$\mathbf{m}_2 = \begin{Bmatrix} a \cos \varphi + \lambda_2 \sin \alpha \sin \varphi \\ a \sin \varphi - \lambda_2 \sin \alpha \cos \varphi \\ \lambda_2 \cos \alpha \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{m}_4 = \begin{Bmatrix} d \\ -\lambda_4 \sin \delta \\ -\lambda_1 + \lambda_4 \cos \delta \end{Bmatrix} \quad \# 18.56$$

Es ist zweckmäßig, die-Richtungen von  $\mathbf{a}_2$  bzw.  $\mathbf{a}_4$  durch Vektoren  $\mathbf{a}_2$  bzw.  $\mathbf{a}_4$  zu repräsentieren, deren Beträge von Abstand und Winkel dieser Achsen bezüglich  $\mathbf{a}_3$  in folgender Weise abhängen:

$$\mathbf{a}_2 = \frac{b}{\sin \beta} \begin{Bmatrix} \sin \alpha \sin \varphi \\ -\sin \alpha \cos \varphi \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \frac{c}{\sin \gamma} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sin \delta \\ \cos \delta \end{Bmatrix} \quad \# 18.57$$

Diese Vektoren stehen auf die Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  normal, deren Richtungen und Beträge mit denen der Gemeinlote von  $\mathbf{a}_2$  und  $\mathbf{a}_3$  bzw.  $\mathbf{a}_3$  und  $\mathbf{a}_4$  übereinstimmen. Ist  $\mathbf{a}_3^{\circ}$  ein mit  $\mathbf{a}_3$  gleichorientierter Einheitsvektor, so ist (siehe Fig. 18.18)

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{a}_3^{\circ} b \cot \beta + \mathbf{b} \times \mathbf{a}_3^{\circ}, \quad \mathbf{m}_4 = \mathbf{a}_3^{\circ} c \cot \gamma + \mathbf{a}_3^{\circ} \times \mathbf{c} \quad \# 18.58$$

Setzt man  $M_2 M_4 = \mathbf{m}$ , so gilt

$$\mathbf{m} = \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{a}_3^{\circ} + \mathbf{c} \quad \# 18.59$$

Aus #18.58,59 findet man weiters bei Beachtung der diversen Orthogonalitäten und der Formeln #1.39 und #1.44

<sup>7</sup> Der folgende Beweis folgt DELASSUS [1], eine andere Methode bei DIMENTBERG [1]

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_4 \mathbf{m} &= (\mathbf{a}_3^0, \mathbf{c}, \mathbf{b}) + \lambda_3 \mathbf{c} \cot \gamma \\ \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_4 &= bc \cot \beta \cot \gamma + (\mathbf{b} \times \mathbf{a}_3^0)(\mathbf{a}_3^0 \times \mathbf{c}) = bc \cot \beta \cot \gamma - (\mathbf{bc}) \\ |\mathbf{m}|^2 &= b^2 + c^2 + \lambda_3^2 + 2(\mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3^0)^2 = b^2 c^2 - (\mathbf{bc})^2 \end{aligned} \right\} \quad \# 18.60$$

Hieraus ergeben sich die bemerkenswerten Beziehungen

$$[\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_4 - bc \cot \beta \cot \gamma]^2 + [\mathbf{a}_4 \mathbf{m} - \lambda_3 \mathbf{c} \cot \gamma]^2 = b^2 c^2 \quad \# 18.61.1$$

$$|\mathbf{m}|^2 + 2\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_4 = b^2 + c^2 + 2bc \cot \beta \cot \gamma + \lambda_3^2 \quad \# 18.61.2$$

$$\mathbf{a}_4 \mathbf{m} - \mathbf{a}_2 \mathbf{m} = \lambda_3 (\mathbf{c} \cot \gamma - \mathbf{b} \cot \beta) \quad \# 18.61.3$$

Denkt man sich die Geraden  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  aus dem vorliegenden System herausgelöst und (unter Beibehaltung ihrer Abstände  $b, c$  und ihrer Winkel  $\beta, \gamma$ ) beliebig um  $\mathbf{a}_3$  gegeneinander verdreht, so lehrt die Betrachtung der rechten Seite der oben angeführten Beziehungen, daß die linken Seiten dabei ihren Wert nicht ändern. Führt man in die Relation #18.61 die Ausdrücke #18.57 sowie  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_4 - \mathbf{m}_2$  ein, so müssen die sich ergebenden Beziehungen speziell vom Winkel  $\varphi$  unabhängig sein. Aus #18.61 ergeben sich u. a. die Bedingungen

$$\lambda_2 = 0, \quad \frac{a^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{b^2}{\sin^2 \beta} \quad \# 18.62.1, \# 18.82.2$$

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \beta \cos \gamma \quad \# 18.62.3$$

Ebenso folgt u. a. aus #61.2 bei Beachtung von #18.62.1,3

$$\lambda_4 = 0, \quad a^2 + d^2 + \lambda_1^2 = b^2 + c^2 + \lambda_3^2 \quad \# 18.63.1, \# 18.63.2$$

Aus der Gleichberechtigung der Achsen des vorliegenden Systems ergeben sich weitere Beziehungen durch zyklische Vertauschung. Aus #63.1,3 erhält man

$$\lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 = 0 \quad \# 18.64.1$$

$$\cos \beta \cos \alpha = \cos \gamma \cos \delta \quad \# 16.64.2$$

Daher folgt aus #18.63.2

$$a^2 + d^2 = b^2 + c^2 \quad \# 18.65$$

Weitere zyklische Vertauschung liefert

$$b^2 + a^2 = c^2 + d^2 \quad \# 18.66$$

Addition bzw. Subtraktion von #18.65,66 ergibt

$$a^2 = c^2, \quad b^2 = d^2 \quad \# 18.67$$

Produkt- bzw. Quotientenbildung von #18.63.3,2 liefert

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \gamma, \quad \cos^2 \beta = \cos^2 \delta \quad \# 18.68$$

Daraus ergibt sich folgendes: Soll eine Viergelenksskette, deren Drehgelenke windschiefe Achsen haben, beweglich sein, so bilden die Gemeinlote der Achsen ein geschlossenes windschiefes Viereck mit gleich langen gegenüberliegenden Seiten. Die Winkel der Achsen genügen den durch #18.67,68 dargestellten Beziehungen, Achsenabstände und Achsenwinkel stehen in der Relation #18.62.2. Demnach gilt

**Satz 18.6.1.2.1:** Die einzigen beweglichen Viergelenkssketten mit windschiefen Achsen der Drehgelenke sind die BENNETT'schen Isogramme.

**18.6.2 Die fünf- und sechsgliedrigen Getriebe von GOLDBERG**

Nach #18.45 sind auch fünf- und sechsgliedrige Getriebe beliebiger Abmessungen mit lauter Drehgelenken starr. Durch Kombination mehrerer BENNETTschen Isogramme gelang es GOLDBERG<sup>8</sup>, stetig bewegliche Mechanismen dieser Art herzustellen. Zunächst koppeln wir zwei BENNETTsche Isogramme ABC'E und EC'CD so, daß sie die Seite C'E gemeinsam haben. (Fig. 18.19). Sind  $\alpha$  und  $\beta$  die Winkel der Achsen des ersten Isogramms,  $\alpha$  und  $\gamma$  die des zweiten, so ist nach #18.54

**Figur 18.19**

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \# 18.69$$

Hält man EC' fest, so sind die beiden Isogramme unabhängig voneinander beweglich. Steuert man aber die Bewegung beider Isogramme so, daß die Strecken BC' und CC' immer derselben Geraden angehören, so bedeutet das eine Verschmelzung der beiden Getriebeglieder zu einem einzigen Glied. Das Glied EC' kann dann weggelassen werden und es verbleibt die zwangsläufige fünfgliedrige Kette ABCDE. Die Länge des Gliedes BC ist dann gleich  $b + c$ , der Winkel der Drehachsen in B und C ist  $\beta + \gamma$ .

Man könnte vermuten, daß sich bei Entfernung der Glieder EC' der Freiheitsgrad des Getriebes um eine Einheit erhöht. Dann müßte aber das viergliedrige Getriebe mit den Systemen CA, AE, ED, DC und Drehgelenken in A,E,D,C bei Fixierung von A und C zwangsläufig beweglich sein. Dies widerspricht aber Satz 18.6.1.2.1.

Koppelt man (Fig. 18.20) drei Isogramme derart, daß das erste und zweite, sowie das zweite und dritte je ein Glied gemeinsam haben, so muß

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{d}{\sin \delta} \quad \# 18.70$$

sein. Bilden wir zunächst durch Entfernung des Gliedes C'F wie eben geschildert einen fünfgliedrigen Mechanismus, so ist dieser sowie das Isogramm C"CDE bei festgehaltenem Glied EC" für sich beweglich. Verschmelzung der Glieder BC", C"C in ein einziges und Entfernung von EC" ergibt den zwangsläufigen sechsgliedrigen Mechanismus ABCDEF. Für das Glied BC gilt  $BC = b+c+d$ , der Winkel der Achsen in B und C beträgt  $\beta+\gamma+\delta$ .

**18.6.3 Der sechsgliedrige Mechanismus von BRICARD**

Zu einem anderen beweglichen sechsgliedrigen Mechanismus kommt man nach BRICARD<sup>9</sup> auf folgendem Wege: Man geht (Fig. 18.21) von einem beliebigen schiefwinkligen Dreiein  $O(x,y,z)$  aus und fällt aus einem beliebigen Punkt  $O_1$  des Raumes die Normalebenen auf die Achsen  $x,y,z$ . Die Ebenen des so entstandenen neuen Dreiebens  $O(x_1,y_1,z_1)$  schneiden die Achsen des alten in den Punkten  $X,Y,Z$ , seine Achsen die ursprünglichen Ebenen in den Punkten  $Z_1,X_1,Y_1$ . Mit den Bezeichnungen der Fig. 18.21 folgt für die Abstände dieser Punkte

**Figur.18.21**

$$OZ^2 + a^2 = OX^2 + c_1^2, \quad OX^2 + b^2 = OY^2 + a^2, \quad OY^2 + c^2 = OZ^2 + b_1^2 \quad \# 18.71$$

Aufsummieren dieser Gleichungen ergibt

$$a^2 + b^2 + c^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \quad \# 18.72$$

<sup>8</sup> GOLDBERG [1]

<sup>9</sup> BRICARD [2] 2.Bd. S.316 ff.

Je zwei Achsen mit dem sie verbindenden Gemeinlot (z.B.  $z_1y_1, y_1c_1x, x_1b_1z, \dots$ ) bestimmen ein starres räumliches System. Denken wir uns je zwei aufeinanderfolgende dieser Systeme durch Drehgelenke mit den Achsen  $z, y_1, x, z_1, \dots, z$  verbunden, so ist die so gebildete geschlossene Kette beweglich.

**Beweis:** Die Gestalt der Fig. 18.21 hängt von 6 Parametern ab: dem Winkel, den die  $x$ - mit der  $y$ -Achse einschließt, den beiden Winkeln, den die  $z$ -Achse mit der  $x$ - und  $y$ -Achse einschließt, ferner den drei Koordinaten des Punktes  $O_1$ . Sollen nun fünf Seiten des windschiefen Sechsecks  $XZ_1YX_1ZY_1$  konstante Längen haben, so verbleibt der Figur noch ein Freiheitsgrad. #18.72 lehrt, daß dann auch die Länge der sechsten Seite erhalten bleibt.

### 18.6.4 Das Oktaeder von BRICARD

BRICARD gibt ferner drei Typen von beweglichen Oktaedern an<sup>10</sup>. Die erste sei hier angeführt. Wir wählen zwei Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle BCD$ , welche die Seite  $BC$  gemeinsam haben und spiegeln beide Dreiecke an einer Streckensymmetralen  $a$  von  $AD$  (in Fig. 18.22.1 wurde die Aufstellung so gewählt, daß  $a$  zweitprojizierend ist). Verbindet man die so gefundenen vier Systeme  $ABC, BCD, DEF, EFA$  durch Drehgelenke entlang  $BC$  und  $EF$ , sowie durch Kugelgelenke in  $A$  und  $D$ , so ist  $n = 4, g = 4, \Sigma f = 1+1+3+3 = 8$ , der Freiheitsgrad des Gesamtmechanismus nach #18.45 daher  $F = 2$ . Bei jeder Lage des Mechanismus herrscht Symmetrie bezüglich einer Symmetralen von  $AD$ . Um Zwanglauf herzustellen, fordern wir zusätzlich Konstanz des Abstandes der Punkte  $BF$ . Wegen der angeführten Symmetrie bleibt dann auch der Abstand der Punkte  $CE$  unveränderlich. Führen wir die Dreiecke  $\triangle ABF$  und  $\triangle DEC$  materiell aus, so entsteht das in Fig. 18.22.2 dargestellte zwangläufige Gebilde, das aus den sechs Ebenen  $ABC, BCD, DEF, EFD, ABF$  und  $DCE$  besteht, die entlang der Kanten  $AB, BC, CD, EF, FA$  durch Drehgelenke verbunden sind. Formel #18.45 ließe aber wegen  $n = 6, g = 6, \Sigma f = 6$  bei allgemeiner Wahl der Abmessungen den Freiheitsgrad  $F = 0$ , d.h. Starrheit erwarten. Es ist klar, daß auch die Dreiecke  $\triangle ACE$  und  $\triangle BDF$  ihre Größe während der Bewegung nicht ändern. Sie können nur, der sich einstellenden Schnitte mit den anderen Ebenen wegen, nicht materiell ausgeführt werden. Es liegt demnach ein *bewegliches Oktaeder* vor.

<sup>10</sup> BRICARD [1]

# 19 Bewegungen des Geradenraumes

## 19.1 Axoide

### 19.1.1 Sphärische Bewegung der dualen Einheitskugel. Rast- und Gangaxoid

Führt man mit dem bewegten System einen nach Satz 3.2.1.2 durch  $\underline{g}^{\circ}$  bestimmten Speer mit, so nimmt dieser, bezogen auf das feste System nach #16.109 zum Zeitpunkt  $t$  die Lage

$$\underline{g}^{\circ}(t) = \underline{D}(t) \circ \underline{g}^{\circ'} \circ \underline{\tilde{D}}(t) \quad \# 19.1$$

ein. Da nach dem Übertragungsprinzip von STUDY (Kap.3.3) jedem Speer ein Punkt der dualen Einheitskugel zugeordnet ist, läßt sich, wie ein Vergleich mit #10.8 lehrt, #19.1 als Bewegung der dualen Einheitskugel in sich auffassen.

**Satz 19.1.1.1:** *Den Bewegungen des Speerraumes entsprechen die sphärischen Bewegungen der dualen Einheitskugel in sich.*

Trennt man #19.1 in Real- und Dualteil, so erhält man

$$\underline{g}^{\circ} = \underline{D} \circ \underline{g}^{\circ'} \circ \underline{\tilde{D}}, \quad \underline{g}^+ = \underline{D}^* \circ \underline{g}^{\circ'} \circ \underline{\tilde{D}} + \underline{D} \circ \underline{g}^{\circ'} \circ \underline{\tilde{D}}^* + \underline{D} \circ \underline{g}^{+'} \circ \underline{\tilde{D}} \quad \# 19.2, \# 19.3$$

Die Bewegung des Geradenraumes zerfällt also in einen *sphärischen Anteil* #19.2, der sich auf die Richtung der bewegten Geraden bezieht bzw. auf deren durch den Ursprung  $O$  gezogenen Parallele, und den durch #19.3 repräsentierten räumlichen Anteil<sup>1</sup>.

Die formale Übereinstimmung von #19.1 mit #10.8 gestattet es, alle im Kapitel über sphärische Bewegungen entwickelten Formeln auf die Bewegungen des Geradenraumes zu übertragen, wobei alle dort vorkommenden Zeichen hier fett-unterstrichen zu drucken, bzw. der Ortsvektor  $\underline{x}$  durch den dualen Einheitsvektor  $\underline{g}^{\circ}$  zu ersetzen sind. Aus #10.21 reproduziert sich das bereits in #17.8 abgeleitete Ergebnis

$$\underline{\omega} = 2\underline{\dot{D}} \circ \underline{\tilde{D}} \quad \# 19.4$$

Der *duale Winkelgeschwindigkeitsvektor*  $\underline{\omega}$  legt die Geschwindigkeitsverhältnisse des bewegten Systems fest. Dem nach #10.36 gebildeten *sphärischen Momentanzentrum*

$$\underline{p} = \frac{\underline{\omega}}{\underline{\omega}} = \underline{a}^{\circ} \quad \# 19.5$$

entspricht im Raum die *momentane Schraubachse* #17.25. Wir verwenden wieder die aus Kap.17.1.1 bekannten Bezeichnungen

$$\underline{\omega} = \underline{\omega} + \varepsilon \hat{\underline{\omega}} = \underline{\omega a}^{\circ} = \underline{\omega p a}^{\circ}, \quad \underline{\omega} = \omega(1 + \varepsilon p), \quad \underline{p} = 1 + \varepsilon p \quad \# 19.6, \# 19.7, \# 19.8$$

$$\underline{a}^{\circ} = \underline{a}^{\circ} + \varepsilon \underline{a}^+ = \frac{1}{\omega} (1 - \varepsilon p) (\underline{\omega} + \varepsilon \hat{\underline{\omega}}) = \frac{\underline{\omega}}{\omega} + \frac{\varepsilon}{\omega} (\hat{\underline{\omega}} - p \underline{\omega}) = \frac{\underline{\omega}}{\omega} + \varepsilon \frac{\underline{\varepsilon}^*}{\omega} \quad \# 19.9$$

Den sphärischen Polkurven entsprechen zwei Strahlflächen, das *Rastaxoid* als Menge aller Momentanachsen im festen, das *Gangaxoid* als Menge aller Momentanachsen im bewegten System.

Nach Satz 10.2.3.1. rollt die sphärische Gangpolkurve auf der sphärischen Rastpolkurve. Diese Redeweise übertragen wir auf die duale Einheitskugel und sprechen demgemäß von einem *dua-*

<sup>1</sup> Nach DIMENTBERG [1] wurde für räumliche Mechanismen diese Trennung erstmals von DOBROWOLSKI angewendet

len Rollen. Ihm entspricht im Strahlraum ein Bewegungsvorgang, den wir nach F.REULEAUX als *Schroten* bezeichnen und näher untersuchen wollen<sup>2</sup>.

Das duale Rollen folgt daraus, daß der duale Vektor  $\underline{v}_p$  der Polwechselgeschwindigkeit auf der festen bzw. bewegten Polkurve derselbe ist. Bezogen auf das feste System erhält man demnach den Formeln #10.37 und #10.39 entsprechend aus #19.5

$$\underline{\dot{p}} = \underline{\dot{a}} = \underline{v}_p = \underline{v}_p + \varepsilon \hat{v}_p = \frac{\bar{\beta}}{\underline{\omega}} - \frac{\underline{\omega} \bar{\beta}}{\underline{\omega}^3 \underline{\omega}} \quad \# 19.10$$

Der Realteil von #19.10 bezieht sich nach einer in Kap.3.5.5 gemachten Bemerkung auf die *Richtkegel der Axoide*. Wegen Satz 10.2.3.1 rollen daher die Richtkegel der Axoide aufeinander.

Da beide Axoide in #19.5 und #19.10 übereinstimmen, haben sie nach #3.70,71 die Zentralnormale

$$\underline{a}_2^\circ = \frac{\underline{\dot{a}}}{|\underline{\dot{a}}|} = \frac{\underline{v}_p}{|\underline{v}_p|} \quad \# 19.11$$

sowie die Zentraltangente

$$\underline{a}_1^\circ = \frac{\underline{a}^\circ \times \underline{\dot{a}}}{|\underline{\dot{a}}|} = \frac{\underline{a}^\circ \times \underline{v}_p}{|\underline{v}_p|} \quad \# 19.12$$

gemeinsam. Daher stimmen sie auch in Striktionspunkt und begleitendem Dreibein der gemeinsamen Erzeugenden #91.5 überein. Überdies haben beide Axoide entlang der gemeinsamen Erzeugenden denselben Drall. Setzen wir nämlich

$$\underline{v}_p = \underline{v}_p + \varepsilon \hat{v}_p \quad \# 19.13$$

so ist der gemeinsame Drall der beiden Axoide nach #3.67

$$d_p = \frac{\underline{v}_p \hat{v}_p}{|\underline{v}_p|^2} \quad \# 19.14$$

Zusammen fassen können wir sagen:

**Satz 19.1.1.2:** *Bei jeder räumlichen Bewegung gibt es zwei Strahlflächen, das mit dem festen System verbundene Rastaxoid und das mit dem bewegten System verbundene Gangaxoid, die bei der gegebenen Bewegung aufeinander „abschroten“. Dabei versteht man unter „Schrotung“ folgenden Vorgang: In jedem Augenblick berühren Rast- und Gangaxoid einander entlang der Momentanachse. Zum Eingriff kommende Erzeugende sind außer durch gleichen Drall noch dadurch gekennzeichnet, daß die ihnen entsprechenden Erzeugenden der Richtkegel durch Abrollen des bewegten auf dem festen zur Deckung gelangen.*

### 19.1.2 Differenzengeometrisches Modell

Den Vorgang des Schroten kann man sich durch Grenzübergang an folgendem *differenzengeometrischen Modell* veranschaulichen (Fig.19.1): Die Schraubung mit der Achse  $\underline{a}_1$ , dem Drehwinkel  $\delta_1$  und der Schiebstrecke  $s_1$  führe den bewegten Körper aus seiner Ausgangslage in die Nachbarlage über, hierauf folge die Schraubung um die Achse  $\underline{a}_2$ , dann die um  $\underline{a}_3$  usw. Im bewegten System gibt es dann eine Gerade  $\underline{a}_2'$ , welche nach der ersten Schraubung in die Lage  $\underline{a}_2$ , ebenso einer Gerade  $\underline{a}_3'$ , welche nach der zweiten Schraubung in die Lage  $\underline{a}_3$  kommt usw.

<sup>2</sup>REULEAUX [1] 1.Bd. S.83

Die Folge  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots$  im festen System stellt das Rastaxoid, die Folge  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3, \dots$  im bewegten System das Gangaxoid in unserem differenzengeometrischen Modell dar. Jede Momentanschraubung bringt ein Paar benachbarter Erzeugenden der beiden Axoide zur Deckung. Entsprechende Erzeugende stimmen daher nicht nur im Drall (der ja nach #3.67 bloß das Verhältnis von deren Abstand und Winkel darstellt), sondern auch in der Größe von Abstand und Winkel mit der Nachbarerzeugenden überein. Daraus folgt, daß die sphärischen Bilder der Axoide (Fig. 19.1.2), die in unserem Differenzengeometrischen Modell sphärische Polygone mit entsprechenden gleich langen Seiten sind, aufeinander abrollen.

### 19.1.3 Differentialgeometrische Eigenschaften der Axoide

Setzen wir

$$\underline{d}_p = 1 + \varepsilon d_p, \quad |\underline{\mathbf{v}}_p| = \left| \sqrt{(\underline{\mathbf{v}}_p \underline{\mathbf{v}}_p)} \right| = |\underline{\mathbf{v}}_p| \left( 1 + \varepsilon \frac{\underline{\mathbf{v}}_p \hat{\underline{\mathbf{v}}}_p}{|\underline{\mathbf{v}}_p|^2} \right) = v_p \underline{d}_p = \underline{v}_p \quad \#19.15, \#19.16$$

so kann man #19.11 in der Gestalt

$$\underline{\mathbf{v}}_p = v_p \underline{d}_p \underline{\mathbf{a}}_2^\circ \quad \# 19.17$$

anschreiben. Daraus erhellt - man vergleiche mit #17.25 - daß die durch  $\underline{\mathbf{v}}_p$  festgelegte Schraubung die Zentralnormale der Axoide als Schraubachse und deren Drall zum Parameter hat. Ebenso hat die nach #19.12 durch  $\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{a}}^\circ \times \hat{\underline{\mathbf{a}}} = v_p \underline{d}_p \underline{\mathbf{a}}_1^\circ$  festgelegt Schraubung die Zentraltangente der Axoide zur Achse und gleichfalls  $\underline{d}_p$  zum Parameter. Diese Schraubung führt die Momentanachse in ihre Nachbarlage über.

Trennt man in #19.10 Real- und Dualteil so findet man

$$\underline{\mathbf{v}}_p = \frac{\bar{\beta}}{\omega} - \frac{\bar{\omega}\bar{\beta}}{\omega^3} \bar{\omega} = \frac{(\bar{\omega} \times \bar{\beta}) \times \bar{\omega}}{\omega^3}, \quad |\underline{\mathbf{v}}_p|^2 = \frac{\beta^2}{\omega^2} - \frac{(\bar{\omega}\bar{\beta})^2}{\omega^4} = \frac{(\bar{\omega} \times \bar{\beta})^2}{\omega^4} \quad \# 19.18, \# 19.19$$

$$\hat{\underline{\mathbf{v}}}_p = \frac{\hat{\beta}}{\omega} - \frac{p}{\omega} \bar{\beta} + \frac{3p(\bar{\omega}\bar{\beta}) - (\bar{\omega}\hat{\beta} - \hat{\omega}\bar{\beta})}{\omega^3} \bar{\omega} - \frac{(\bar{\omega}\bar{\beta})}{\omega^3} \hat{\omega} \quad \# 19.20$$

Für den Drall #19.14 der Axoide ergibt sich daher mit #17.72

$$\underline{d}_p = \frac{(q-p)\omega^2\beta^2 - (\bar{\omega}\bar{\beta})(\bar{\omega}\hat{\beta} + \hat{\omega}\bar{\beta}) + 2p(\bar{\omega}\bar{\beta})^2}{|\bar{\omega} \times \bar{\beta}|^2} \quad \# 19.21$$

Bezeichnet man wie in Fig. 17.14 mit  $m$  und  $\mu$  Abstand und Winkel von Momentan- und Beschleunigungsachse, so folgt aus #19.21 mit #17.81 und #1.90

$$m \cot \mu = (p-q) + \underline{d}_p \quad \# 19.22$$

Die PLÜCKER-Vektoren der gemeinsamen Zentralnormalen #3.78 der Axoide sind wegen #19.9 und #19.18

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}}_1^\circ &= \frac{\underline{\mathbf{a}}^\circ \times \hat{\underline{\mathbf{a}}}}{|\hat{\underline{\mathbf{a}}}|} = \frac{\underline{\mathbf{a}}^\circ \times \underline{\mathbf{v}}_p}{v_p} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{\beta}}{\omega^2 v_p}, \quad \underline{\mathbf{a}}_1^+ = -\underline{\mathbf{a}}^\circ \frac{(\underline{\mathbf{a}}^\circ, \hat{\underline{\mathbf{a}}}, \underline{\mathbf{a}}^+)}{|\hat{\underline{\mathbf{a}}}|} - \hat{\underline{\mathbf{a}}} \frac{(\underline{\mathbf{a}}^\circ, \hat{\underline{\mathbf{a}}}, \underline{\mathbf{a}}^+)}{|\hat{\underline{\mathbf{a}}}|^3} = \\ &= \frac{\bar{\omega}[(\bar{\omega}\bar{\beta})(\bar{\omega}, \bar{\beta}, \hat{\omega}) - \beta^2(\bar{\omega}, \bar{\beta}, \hat{\omega})] + \bar{\beta}[(\bar{\omega}\bar{\beta})(\bar{\omega}, \bar{\beta}, \hat{\omega}) - \omega^2(\bar{\omega}, \bar{\beta}, \hat{\beta})]}{\omega^2 v_p |\bar{\omega} \times \bar{\beta}|^2} \end{aligned} \quad \# 19.23$$

Da die PLÜCKER-Vektoren dieser Geraden zu jenen des in #17.77,78 berechneten Gemeinlotes von Momentan- und Beschleunigungsachse proportional sind, ist diese mit der Zentralnormalen der Axoide identisch. Der nach #3.80 berechnete Striktionspunkt

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}^{\circ} \times \mathbf{a}^+ + \mathbf{a}^{\circ} \frac{(\mathbf{a}^{\circ}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{a}}^+)}{|\dot{\mathbf{a}}|^2} = \bar{\omega} \frac{(\bar{\omega}, \bar{\beta}, \hat{\beta})\omega^2 - (\bar{\omega}, \bar{\beta}, \hat{\omega})(\bar{\omega}\bar{\beta})}{\omega^2 |\bar{\omega} \times \bar{\beta}|^2} + \frac{\bar{\omega} \times \hat{\omega}}{\omega^2} \quad \# 19.24$$

der Axoide erweist sich als mit dem in #17.80 berechneten Fußpunkt des Gemeinlotes von Momentan- und Beschleunigungsachse auf der ersteren identisch, sobald man  $\bar{\omega}$  im Dreibein der  $\bar{\omega}, \bar{\beta}, \bar{\omega} \times \bar{\beta}$  nach #1.42 darstellt.

### 19.1.4 Sonderfälle für das Abschrotten der Axoide

#### 19.1.4.1 $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}, \mathbf{d}_p \neq \mathbf{0}$

Dies ist der allgemeine Fall. Die Axoide sind Strahlflächen mit nichtverschwindendem Drall, die Momentanschraubungen besitzen nicht verschwindende Parameter, d.h. das Gangaxoid verdreht sich um die Berührerzeugende (Momentanachse) mit dem Rastaxoid und führt gleichzeitig eine Gleitbewegung in Richtung dieser Erzeugenden aus.

#### 19.1.4.2 $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}, \mathbf{d}_p \equiv \mathbf{0}$

Die aufeinander abschrotenden Axoide sind beide nach Satz 3.5.3.1 Torsen

#### 19.1.4.3 $\mathbf{p} \equiv \mathbf{0}, \mathbf{d}_p \neq \mathbf{0}$

Der momentane Bewegungszustand ist eine Drehung, das Gangaxoid rollt auf dem Rastaxoid, es findet keine Gleitung in Richtung der gemeinsamen Erzeugenden statt.

#### 19.1.4.4 $\mathbf{p} \equiv \mathbf{0}, \mathbf{d}_p \equiv \mathbf{0}$

Die Axoide sind zwei aufeinander rollende *Torsen*.

Anmerkung: Man nennt die Axoide von Fall 19.1.4.3 aufeinander *abwickelbar*. Im Gegensatz zu zwei allgemeinen Strahlflächen sind zwei Torsen stets aufeinander abwickelbar, wobei i.a. die Gratlinien einander nicht entsprechen. Im Falle 19.1.4.4 entsprechen einander auch die Gratlinien.

#### 19.1.4.5 $\mathbf{v}_p \equiv \mathbf{0}$

In diesem Falle treten nach #3.93 *Zylinderflächen* auf wobei i.a.  $\hat{\mathbf{v}}_p \neq \mathbf{0}$  sein wird. Nach #19.18 hat dies  $\bar{\omega} \times \bar{\beta} \equiv \mathbf{0}$  zur Folge. Gang und Rastzylinder können sich auf dieselbe Gerade reduzieren wie etwa im Falle der kontinuierliche Schraubung.

## 19.2 Symmetrische Schrotungen

### 19.2.1 Allgemeine Begriffe

Unter einer symmetrischen Schrotung versteht man nach J.KRAMES<sup>3</sup> jene kontinuierliche Bewegung eines starren Körpers, bei der die einzelnen Lagen des bewegten Systems durch Spiegelung eines festen Systems an den Erzeugenden einer Strahlfläche - der *Grundfläche* - hervorgehen. Legen wir die Grundfläche nach #3.62 durch den dualen Einheitsvektor  $\underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t)$  fest, so wird nach #15.46 die Spiegelung an diesem Speer wegen  $\delta = \pi, \mathbf{s} = \mathbf{0}$  durch  $\underline{\mathbf{D}}(t) = \underline{\mathbf{g}}^{\circ}(t)$  festgelegt. Der momentane Bewegungszustand wird nach #19.4 durch den Vektor

$$\bar{\omega} = 2\underline{\mathbf{D}} \circ \tilde{\underline{\mathbf{D}}} = -2\underline{\dot{\mathbf{g}}} \circ \underline{\mathbf{g}}^{\circ} = 2\underline{\mathbf{g}}^{\circ} \times \underline{\dot{\mathbf{g}}}, \quad \underline{\omega} = 2|\underline{\dot{\mathbf{g}}}| \quad \# 19.25$$

<sup>3</sup> KRAMES [1-6]. Diese Arbeiten werden in den folgenden Abschnitten nicht jedesmal neu zitiert werden

beschrieben. Dabei wurde berücksichtigt, daß

$$\underline{\mathbf{g}}^{\circ} \underline{\dot{\mathbf{g}}} = (\underline{\mathbf{g}}^{\circ} + \varepsilon \underline{\mathbf{g}}^+) (\underline{\mathbf{g}}^+ + \varepsilon \underline{\dot{\mathbf{g}}}^+) = \underline{\mathbf{g}}^{\circ} \underline{\dot{\mathbf{g}}} + \varepsilon (\underline{\dot{\mathbf{g}}} \underline{\mathbf{g}}^+ + \underline{\mathbf{g}}^{\circ} \underline{\dot{\mathbf{g}}}^+) = 0 \quad \# 19.26$$

ist, da  $\underline{\mathbf{g}}^{\circ}$  Einheitsvektor ist. Für die momentane Schraubachse #19.5 ergibt sich daher

$$\underline{\mathbf{a}}^{\circ} = \frac{\underline{\overline{\omega}}}{\underline{\omega}} = \frac{\underline{\mathbf{g}}^{\circ} \times \underline{\dot{\mathbf{g}}}}{|\underline{\dot{\mathbf{g}}}|} = \underline{\mathbf{g}}_1^{\circ} \quad \# 19.27$$

Nach #3.69 ist also die Momentanachse die Zentralnormale der Grundfläche. Das Rastaxoid wird mithin von der Menge der Zentralnormalen, dem sogenannten *Striktionsband*, der Grundfläche gebildet. Trennung von Real- und Dualteil in #19.25 ergibt

$$\underline{\overline{\omega}} = 2\underline{\mathbf{g}}^{\circ} \times \underline{\dot{\mathbf{g}}}, \quad \underline{\hat{\omega}} = 2(\underline{\mathbf{g}}^{\circ} \times \underline{\dot{\mathbf{g}}}^+ + \underline{\mathbf{g}}^+ \times \underline{\dot{\mathbf{g}}}), \quad \omega^2 = 4|\underline{\dot{\mathbf{g}}}|^2 \quad \# 19.28$$

Für den Parameter der Momentanschraubung findet man nach #17.13 bei Beachtung von #19.26

$$\underline{\rho} = \frac{\underline{\overline{\omega}} \underline{\hat{\omega}}}{\omega^2} = \frac{\underline{\dot{\mathbf{g}}} \underline{\dot{\mathbf{g}}}^+}{|\underline{\dot{\mathbf{g}}}|^2} = \underline{d}_G \quad \# 19.29$$

Wegen #3.67 ist  $\underline{\rho}$  gleich dem Drall  $\underline{d}_G$  der Grundfläche. Nach #10.17 ist im bewegten System

$$\underline{\overline{\omega}}' = 2\underline{\overline{\mathbf{D}}} \circ \underline{\dot{\mathbf{D}}} = -2\underline{\mathbf{g}}^{\circ} \circ \underline{\dot{\mathbf{g}}} = 2\underline{\dot{\mathbf{g}}} \times \underline{\mathbf{g}}^{\circ} \quad \# 19.30$$

Das Gangaxoid ist daher zum Rastaxoid kongruent. Es ist das Striktionsband der Strahlfläche, die entsteht, wenn man die Grundfläche an einer ihrer Erzeugenden spiegelt. Da Gang- und Rastaxoid demnach in jedem Augenblick bezüglich der jeweiligen Erzeugenden der Grundfläche symmetrisch sind, spricht man von *symmetrischer Schrotung*

### 19.2.2 Die BENNETTsche Bewegung als symmetrische Schrotung

Hält man beim BENNETTschen Isogramm die Seite AD fest (Fig. 19.2), so ist die Seite BC in jeder Stellung bezüglich des Gemeinlotes l der Diagonalen AC, BD zum Gestell AD symmetrisch. Die Bewegung des Gliedes BC ist daher eine symmetrische Schrotung mit der von der Geraden l überstrichenen Strahlfläche als Grundfläche. Um deren Art zu ermitteln, legen wir den Ursprung O eines kartesischen Koordinatensystems in den Mittelpunkt der Strecke AD, die positive x-Achse in die Strecke OA, die y-Achse gehöre der Ebene (ABD) an. Setzt man  $\angle DAB = \varphi$ , so erhält man als Koordinaten der Punkte A, B, D

**Figur 19.2**

$$A\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right), \quad B\left(\frac{a}{2} - b \cos \varphi, b \sin \varphi, 0\right), \quad D\left(-\frac{a}{2}, 0, 0\right) \quad \# 19.31$$

Der Punkt C gehört einerseits den Ebenen (ADC) bzw. (ABC) an, welche durch ihre Spuren (AD) bzw. (AB) sowie durch ihre Neigungswinkel  $\alpha$  bzw.  $\beta$  gegen die xy-Ebene festgelegt sind. Die Gleichungen dieser Ebenen lauten daher

$$y \tan \alpha - z = 0, \quad x \sin \varphi + y \cos \varphi + z \cot \beta = \frac{a}{2} \sin \varphi \quad \# 19.32$$

Andererseits gehört C den beiden Kugeln mit den Mittelpunkten B bzw. D und den Radien a bzw. b an. Deren Potenzebene hat die Gleichung

$$2x(a - b \cos \varphi) + 2by \sin \varphi = 2b^2 - a^2 - ab \cos \varphi \quad \# 19.33$$

Schnitt der drei Ebenen #19.32,33 ergibt daher den Punkt C, dessen Koordinaten bei Beachtung von #18.54 lauten

$$C \left( \frac{(2b^2 - a^2)B - abA}{2(aB - bA)}, \frac{(a^2 - b^2) \sin \varphi}{(aB - bA)}, \frac{(a^2 b^2) \tan \alpha \sin \varphi}{(aB - bA)} \right) \quad \# 19.34$$

$$A = 1 + \tan \alpha \cot \beta \cos \varphi, \quad B = \cos \varphi + \tan \alpha \cot \beta$$

Die Gerade  $l$  ist die Verbindung der Mittelpunkte

$$M_1 \left( -\frac{b}{2} \cos \varphi, \frac{b}{2} \sin \varphi, 0 \right), \quad M_2 \left( \frac{b(bB - aA)}{2(aB - bA)}, \frac{(a^2 - b^2) \sin \varphi}{2(aB - bA)}, \frac{(a^2 - b^2) \tan \alpha \sin \varphi}{2(aB - bA)} \right) \quad \# 19.35$$

von  $BD$  und  $AC$ . Die Punkte  $M_1$  und  $M_2$  selbst beschreiben in den Ebenen  $(ABD)$  und  $(ADC)$  liegende Kreise mit dem gemeinsamen Mittelpunkt  $O$  und den Radien  $b/2$ . Sie gehen aus den Kreisbahnen der Punkte  $B$  und  $C$  durch zentrische Ähnlichkeiten mit den Zentren  $D$  bzw.  $A$  und dem Streckungsverhältnis  $1/2$  hervor, stellen also Kreisschnittebenen der von  $l$  erzeugten

Strahlfläche dar. Für den Richtungsvektor  $\vec{M_1 M_2} = \lambda \vec{l}$  der Erzeugenden  $l$  findet man

$$\vec{l} = \frac{b}{2} \begin{Bmatrix} \sin \beta \sin \varphi \\ \sin \beta \cos \varphi - \sin \alpha \\ \cos \beta + \cos \alpha \end{Bmatrix}, \quad \lambda = b \frac{(\cos \beta - \cos \alpha) \tan \alpha}{\sin^2 \beta} \cdot \frac{\sin \alpha}{(aB - bA)} \quad \# 19.36$$

Wählt man den von den  $M_1$  beschriebenen Kreis als Leitkurve, so ergibt die Elimination der Parameter  $\varphi$  und  $t$  aus  $\vec{x} = \vec{OM_1} + t\vec{l}$  die Gleichung der Grundfläche

$$x^2 + y^2 + \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{\cos \beta + \cos \alpha} z^2 + 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \beta + \cos \alpha} yz = \frac{b^2}{4} \quad \# 19.37$$

Sie wird demnach von einer Erzeugendenschar eines einschaligen Hyperboloides gebildet. Das Rastaxoid (und analog das Gangaxoid) ist daher das Striktionsband dieser Fläche. Es ist eine rationale Strahlfläche sechsten Grades. Dieser Fall entspricht Kap. 19.1.4.1.

### 19.2.3 Die BRICARDSche Bewegung mit lauter sphärischen Bahnkurven

Betrachten wir das in Fig. 19.3 dargestellte, als Türheber verwendete dreigliedrige Getriebe.

**Figur 19.3** Das als Stab  $O_2B = b$  ausgebildete System  $\Sigma_2$  wird so geführt, daß der Punkt  $O_2$  mit Hilfe eines Zylindergelenkes die  $a$ -Achse entlanggleitet, während der Punkt  $b$  mit Hilfe des als binäre Koppel ausgebildeten Systems  $AB = r$  von dem auf der  $x$ -Achse liegenden Punkt  $A(a, 0, 0)$  den konstanten Abstand  $r$  beibehält. Man erkennt sogleich, daß das mit  $\Sigma_2$  verknüpfte Koordinatensystem  $O_2(x_2, y_2, z_2)$  durch Spiegelung aus dem System  $O(x, y, z)$  an der Mittellinie  $g$  der  $x$ - und  $x_2$ -Achse hervorgeht. Dabei ist die Mittellinie jene Gerade, welche den Winkel  $\varphi = \angle x x_2$  und den Abstand  $t = OO_2$  der  $x$ - und  $x_2$ -Achse halbiert

Die Bewegung von  $\Sigma_2$  ist also eine symmetrische Schrotung, deren Grundfläche von der Menge der Geraden  $g$  gebildet wird. Mit Hilfe des Kosinussatzes, angewendet auf das Dreieck  $\Delta OAB'$ , und aus dem rechtwinkligen Dreieck  $\Delta AB'B$  folgt

$$t^2 = r^2 - (a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi) \quad \# 19.38$$

Man erkennt leicht, daß der Punkt  $M(c = \sqrt{ab}, 0, 0)$  der  $x$ -Achse von allen Geraden  $g$  denselben konstanten Abstand  $m$  mit

$$m^2 = \frac{r^2 - (a - b)^2}{4} \quad \# 19.39$$

hat. Alle Geraden  $g$  treffen demnach die  $z$ -Achse orthogonal und berühren die Kugel mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $m$ . Sie erfüllen daher ein *gerades Kugelkonoid*.

Ein mit  $\Sigma_2$  starr mitgeführter Punkt habe in bezug auf  $O_2(x_2, y_2, z_2)$  die Koordinaten  $(x_2, y_2, z_2)$ , bezogen auf das feste System die Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} x &= x_2 \cos \varphi + y_2 \sin \varphi \\ y &= x_2 \sin \varphi - y_2 \cos \varphi \\ z &= \phantom{x_2 \sin \varphi - y_2 \cos \varphi} - z_2 + t \end{aligned} \right\} \quad \# 19.40$$

Zunächst ergibt

$$x^2 + y^2 = x_2^2 + y_2^2 \quad \# 19.41$$

die auch anschaulich unmittelbar einleuchtende Tatsache, daß alle Bahnkurven auf mit der z-Achse koaxialen Drehzylindern verlaufen. Ferner folgt aus #19.40 wegen #19.38

$$\begin{aligned} \left( x - ab \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)^2 + \left( y + ab \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)^2 + (z + z_2)^2 &= \\ = x_2^2 + y_2^2 + r^2 - a^2 - b^2 + \frac{a^2 b^2}{x_2^2 + y_2^2} & \end{aligned} \quad \# 19.42$$

Jeder Punkt des Systems  $\Sigma_2$  (mit Ausnahme der Punkte der  $z_2$ -Achse) beschreibt somit eine *sphärische Kurve*. Die Bahnkurven sind somit als Schnittkurven von #19.41 und #19.42 Raumkurven 4. Ordnung. BRICARD<sup>4</sup> hat gezeigt, daß die obige Bewegung die einzige nicht-triviale Raumbewegung ist, bei der alle Punkte des bewegten Systems sphärische Bahnkurven durchlaufen.

Da sich hier das Striktionsband der Grundfläche auf die z-Achse reduziert, entarten Rast- und Gangaxoid in je eine Gerade, nämlich die z- bzw.  $z_2$ -Achse.

Diese am Ende von Kap. 191.4.5 genannte Ausartung der Axoide in zwei Gerade tritt bei symmetrischer Schrotung dann auf, wenn die Grundfläche ein *gerades Konoid* ist, d.h. wenn deren Erzeugende dieselbe Gerade orthogonal schneiden.

#### 19.2.4 Das PLÜCKER-Konoid als Grundfläche

Legen wir als Grundfläche ein Plücker-Konoid (siehe Kap. 20.2) zugrunde, dessen mit der x-Achse den Winkel  $\varphi$  einschließende Erzeugende die z-Achse im Punkt mit der Applikate

$$z = \frac{h}{2} \sin 2\varphi = h \sin \varphi \cos \varphi \quad \# 19.43$$

orthogonal schneidet, so wird ein in dieser Erzeugenden liegender Speer durch

$$\underline{\mathbf{g}}^0 = \underline{\mathbf{g}}^0 + \varepsilon \underline{\mathbf{g}}^+ = \begin{Bmatrix} \cos \varphi - \varepsilon h \sin^2 \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi + \varepsilon h \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \underline{\mathbf{D}} \quad \# 19.44$$

festgelegt. Ein mit dem bewegten System mitgeführter Punkt  $\mathbf{x}'$  beschreibt dann nach #17.1 die Bahn

$$\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{X}}' \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon \quad \# 19.45$$

woraus sich wegen #19.44

---

<sup>4</sup>BRICARD [3]

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos 2\varphi + y' \sin 2\varphi \\ y &= x' \sin 2\varphi - y' \cos 2\varphi \\ z &= \quad \quad \quad -z' + h \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad \# 19.46$$

ergibt. Man erkennt unmittelbar, daß wegen

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \quad \# 19.47$$

alle Bahnkurven auf mit der z-Achse koaxialen Zylindern liegen. Eliminiert man aus den ersten beiden Gleichungen #19.46  $\cos 2\varphi$  und aus dem sich ergebenden Resultat und der dritten #19.46  $\sin 2\varphi$ , so findet man

$$y'hx + x'hy - (x'^2 + y'^2)z = z'(x'^2 + y'^2) \quad \# 19.48$$

Die Bahnkurven dieser symmetrischen Schrotung sind demnach *ebene Kurven* und zwar wegen #19.47 *Ellipsen*. Man nennt diese Bewegung *aufrechte Ellipsenbewegung* des Raumes. Sie stellt einen Sonderfall des in Kap. 19.3 zu behandelnden DARBOUXschen Umschwungs dar.

### 19.2.5 Wendelfläche als Grundkurve

Ist das gegebene Konoid eine *Wendelfläche*, so reduziert sich die symmetrische Schrotung auf eine kontinuierliche Schraubung

### 19.2.6 Hyperbolisches Paraboloid als Grundfläche

Sind alle Erzeugenden der Grundfläche zu einer Ebene parallel, so sind die Axoide aufeinander schrotende Zylinder. Wählt man als diese Ebene die  $xy$ -Ebene, so kann man den Richtungsvektor einer Erzeugenden in der Form  $\mathbf{g}^\circ = \mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi$  ansetzen. Nach #19.28 folgt dann  $\bar{\omega} = 2\mathbf{g}^\circ \times \dot{\mathbf{g}} = 2\mathbf{e}_3$  für den Richtungsvektor der Momentanachse. Wählt man speziell ein hyperbolisches Paraboloid als Grundfläche, so erhält man die *schiefe kubische Kreisbewegung*<sup>5</sup>, bei der zwei parabolische Zylinder aufeinander abschroteten.

### 19.2.7 Torse als Grundfläche

Wählt man als Grundfläche eine Torse, so verschwindet nach #19.29 nach Satz 3.5.3.1 deren Drall  $d_G$  und somit auch nach #19.29 der Parameter der resultierenden Schrotung. Die Axoide rollen daher aufeinander. Das Rastaxoid wird von den Binormalen der Gratlinie der Grundfläche gebildet. Es ist dies der in 10.1.4.3 genannte Fall.

### 19.2.8 Binormalenfläche einer Raumkurve als Grundfläche

Wählt man umgekehrt die Binormalenfläche einer Raumkurve als Grundfläche, so ist deren Striktionsband die Tangentenfläche der gegebenen Raumkurve. Die Axoide der symmetrischen Schrotung sind hier aufeinander abschrotende Torsen.

### 19.2.9 Ausartungsfälle

Es seien noch folgende Ausartungsfälle erwähnt:

#### 19.2.9.1 Zylinder als Grundfläche

Die symmetrische Schrotung stellt in diesem Falle eine *krumme Schiebung* dar.

#### 19.2.9.2 Kegel als Grundfläche

Die symmetrische Schrotung ist eine *sphärische Bewegung*, deren Polkegel in jedem Augenblick zur Berührerzeugenden symmetrisch sind.

<sup>5</sup> GRÜN WALD [1]

19.2.9.3 *Strahlbüschel als Grundfläche*

Wir erhalten eine Drehung um eine feste Achse

**19.3 Der Umschwung von DARBOUX<sup>6</sup>**

Die allgemeinste Raumbewegung, bei der alle Raumpunkte ebene Bahnkurven beschreiben, ist die von DARBOUX<sup>7</sup> angegebene *Umschwungbewegung*. Bei ihr schroten ein Zylinder in einem anderen von doppeltem Radius in der Weise, daß die Spuren der Zylinder in einer zu ihrer Achse normalen Ebene die von der ebenen Ellipsenbewegung<sup>8</sup> her bekannte Abrollung des kleinen im doppelt so großen Kardankreis ausführen, während ein Punkt des Gangzylinders auf einer Geraden  $g$ , die notwendigerweise die Achse des Rastzylinders treffen muß, geführt wird.

Legen wir die Achse des Rastzylinders (Radius  $a$ ) in die  $z$ -Achse des Koordinatensystems und lassen wir in der Ausgangsstellung festes und bewegtes Koordinatensystem zusammenfallen, so bedeutet es keine Einschränkung, wenn wir den Ursprung des bewegten Systems in der in der  $yz$ -Ebene liegenden Geraden  $g$  mit der Gleichung  $z = y \tan \alpha$  sich bewegen lassen (Fig. 19.4).

**Figur 19.4**

Hat sich der Gangzylinder um den Winkel  $t$  verdreht, so ist das bewegte Koordinatensystem in die Lage  $O_1(x_1, y_1, z_1)$  gelangt. Denkt man sich den Übergang aus der Anfangslage in diese Stellung aus einer Drehung um die  $z$ -Achse um den Winkel  $t$  mit anschließender Parallelverschiebung um dem Vektor  $\vec{OO}_1$  zusammengesetzt, so erhält man als Transformationsgleichung

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \cos t + y_1 \sin t \\ y &= -x_1 \sin t + y_1 \cos t + a \sin t \\ z &= z_1 + b \sin t \end{aligned} \right\} \quad \# 19.49$$

Dabei wurde  $a \tan \alpha = b$  gesetzt. Aus #19.49 folgt

$$by_1x - bx_1y - (z - z_1)(x_1^2 + y_1^2 - ax_1) = 0 \quad \# 19.50$$

Alle Punkte beschreiben daher ebene Bahnkurven. Die Grundrisse aller Punktbahnen, als der kardanischen Bewegung unterworfen, beschreiben konzentrische Ellipsen mit dem gemeinsamen Mittelpunkt  $O$ . Daher sind auch die Bahnen der Raumpunkte in den Ebenen #19.50 liegende Ellipsen mit dem Mittelpunkt auf der  $z$ -Achse. Raumpunkte, die sich nur in der  $z_1$ -Koordinate unterscheiden, beschreiben kongruente Ellipsen, die durch Schiebung in  $z$ -Richtung ineinander übergehen. Alle Punkte mit  $z_1 = 0$  beschreiben Ellipsen, deren Ebenen durch  $O$  gehen und dort ihren Mittelpunkt haben. Die Achsenendpunkte dieser Ellipsen haben daher von  $O$  extreme Abstände. Nullsetzen der Ableitung von

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \\ &= ay_1 \sin 2t - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2ax_1) \cos 2t + \left[ x_1^2 + y_1^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2ax_1) \right] \quad \# 19.51 \end{aligned}$$

ergibt in

<sup>6</sup> Gaston DARBOUX 1842-1917

<sup>7</sup> DARBOUX [1]; ENTHALTEN IN KOENIGS [1] S.352 ff

<sup>8</sup> WUNDERLICH [5] S.40 ff

$$\tan 2t = -\frac{2ay_1}{a^2 + b^2 - 2ax_1}, \quad \sin 2t = \mp \frac{2ay_1}{w}, \quad \cos 2t = \pm \frac{a^2 + b^2 - 2ax_1}{w} \quad \# 19.52$$

$$w^2 = 4a^2y_1^2 + (a^2 + b^2 - 2ax_1)^2$$

die den Achsenendpunkten entsprechenden t-Werte. Fordert man Gleichheit der Ausdrücke #19.51 für beide Lösungen #19.52, so ergeben sich in

$$4a^2y_1^2 + (a^2 + b^2 - 2ax_1)^2 = 0 \quad \#19.53$$

die Bedingung für *Kreisbahnen*. Bei Beschränkung auf Reelles bewegen sich daher die Punkte der Geraden

$$y_1 = 0, \quad x_1 = \frac{a^2 + b^2}{2a} \quad \# 19.54$$

auf Kreisen. Mit ihrer Hilfe lassen sich Mechanismen zur Erzeugung eines DARBOUXschen Umschwunges angeben<sup>9</sup>.

Wird  $a = 0$  ( $b \neq 0$ ), so reduzieren sich beide Axoide auf die z-Achse, ohne daß die Bewegung selbst ausartet. Es resultiert vielmehr die in Kap.19.2.1 behandelte *aufrechte Ellipsenbewegung*.

Daß die vorliegende Bewegung die einzige ist, in der einerseits jeder bewegte Punkt eine ebene Bahn beschreibt, andererseits jede Ebene des festen Systems Bahnebene eines solchen Punktes ist, zeigt DARBOUX a.a.O.

## 19.4 Krümmungsverhältnisse bei Bahnstrahlflächen

### 19.4.1 Duale Geschwindigkeit

Wird ein Speer ( $\mathbf{g}^\circ, \mathbf{g}^+$ ) einer Bewegung unterworfen, so beschreibt sein STUDYsches Bild  $\underline{\mathbf{g}}^\circ = \mathbf{g}^\circ + \varepsilon \mathbf{g}^+$  eine sphärische Kurve auf der dualen Einheitskugel. Analog zu #10.27 besitzt jeder Punkt eine momentane *duale Geschwindigkeit*

$$\underline{\dot{\mathbf{g}}} = \dot{\mathbf{g}} + \varepsilon \dot{\mathbf{g}}^+ = \underline{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \varepsilon \hat{\mathbf{v}} = \underline{\bar{\omega}} \times \underline{\mathbf{g}}^\circ \quad \# 19.55$$

Nach #3.73-75 wird durch diesen Ausdruck sowohl der Drall als auch die Zentralnormale der erzeugten Strahlfläche festgelegt. Aus Satz 3.2.3.2 folgt daher

**Satz 19.4.1.1:** *Die Zentralnormale der Bahnfläche einer Geraden trifft in jedem Augenblick die Momentanachse orthogonal.*

Trennt man in #19.55 Real- und Dualteil, so findet man

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{g}} = \bar{\omega} \times \mathbf{g}^\circ, \quad \hat{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{g}}^* = \hat{\bar{\omega}} \times \mathbf{g}^\circ + \bar{\omega} \times \mathbf{g}^+ \quad \# 19.56, \# 19.57$$

und daraus den sich nach #3.67 ergebenden Drall

$$d = \frac{\hat{\mathbf{v}}}{|\mathbf{v}|^2} = -\frac{(\bar{\omega} \mathbf{g}^\circ)(\bar{\omega} \mathbf{g}^+ + \bar{\omega}^* \mathbf{g}^\circ)}{|\bar{\omega} \times \mathbf{g}^\circ|^2} + p \quad \# 19.58$$

Vergleich mit #16.115 lehrt, daß #19.58 der Drall der Schraubfläche ist, die durch Verschraubung der Geraden um die momentane Schraubachse  $(\bar{\omega}, \bar{\omega}^*)$  mit dem momentanen Parameter  $p$  entsteht. Diese Schraubfläche und die Bahnfläche berühren einander in jedem Augenblick.

<sup>9</sup> GRÜNWARD [1]

Der Vektor  $\mathbf{v}$  #19.56 ist die Tangente an das sphärische Bild der Strahlfläche, spannt also zusammen mit der Erzeugenden die asymptotische Ebene der Strahlfläche auf (Vgl. Satz 3.5.5.1).

### 19.4.2 Krümmungsachse

Setzen wir  $\underline{\mathbf{b}} = \underline{\dot{\mathbf{g}}}$ , so können wir nach dem Vorbild #10.119 den dualen Vektor

$$\underline{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{b}} = \underline{\dot{\mathbf{g}}} \times \underline{\dot{\mathbf{g}}} = \mathbf{g} + \varepsilon \hat{\mathbf{k}} \quad \# 19.59$$

bilden. Dessen Schnittpunkt mit der dualen Einheitskugel entspricht dem Krümmungsmittelpunkt des STUDYschen Bildes der betrachteten Bahnregelfläche. Die Achse

$$\underline{\mathbf{k}}^* = \underline{\lambda} \underline{\mathbf{k}} = \mathbf{k} + \varepsilon \mathbf{k}^*, \quad \underline{\lambda} = 1 - \varepsilon \frac{\mathbf{k} \hat{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|^2} \quad \# 19.60$$

der durch #19.59 bestimmten Schraubung können wir als die der Erzeugenden  $\mathbf{g}^\circ(t)$  zugeordnete *Krümmungsachse* bezeichnen<sup>10</sup>. Sie schneidet, wie aus #19.59 folgt, die Zentralnormale der gegebenen Strahlfläche orthogonal. Ist  $\underline{\rho} = \rho + \varepsilon \hat{\rho}$  der duale *sphärische Krümmungsradius* des STUDYschen Bildes der Strahlfläche, so bedeuten  $\rho$  bzw.  $\hat{\rho}$  Winkel und Abstand der Erzeugenden und deren Krümmungsachse.  $\rho$  stellt gleichzeitig den sphärischen Krümmungsradius des sphärischen Bildes der Strahlfläche dar, oder, was dasselbe bedeutet, den halben Öffnungswinkel des Richtkegels. Nun ist

$$\cot \underline{\rho} = \frac{\underline{\mathbf{g}}^\circ \underline{\mathbf{k}}^*}{|\underline{\mathbf{g}}^\circ \times \underline{\mathbf{k}}^*|} \quad \#19.61$$

Da mit #3.34 und #19.60

$$\left. \begin{aligned} \cot \underline{\rho} &= \cot \rho - \varepsilon \frac{\hat{\rho}}{\sin^2 \rho}, \quad \underline{\mathbf{g}}^\circ \underline{\mathbf{k}}^* = (\mathbf{g}^\circ \mathbf{k}) + \varepsilon (\mathbf{g}^\circ \mathbf{k}^* + \mathbf{g}^+ \mathbf{k}) \\ |\underline{\mathbf{g}}^\circ \times \underline{\mathbf{k}}^*| &= |\mathbf{g}^\circ \times \mathbf{k}| - \varepsilon \frac{(\mathbf{g}^\circ \mathbf{k})}{|\mathbf{g}^\circ \times \mathbf{k}|} (\mathbf{g}^\circ \mathbf{k}^* + \mathbf{g}^+ \mathbf{k}) \end{aligned} \right\} \quad \# 19.62$$

wird, ergibt die Trennung von #19.61 in Real- und Dualteil

$$\cot \rho = \frac{\mathbf{g}^\circ \mathbf{k}}{|\mathbf{g}^\circ \times \mathbf{k}|}, \quad -\frac{\hat{\rho}}{\sin^2 \rho} = \frac{|\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{g}^\circ \times \mathbf{k}|^3} (\mathbf{g}^\circ \mathbf{k}^* + \mathbf{g}^+ \mathbf{k}) \quad \# 19.63$$

### 19.4.3 Krümmungsschraubfläche

Wir betrachten nun jene Strahlschraubfläche, welche die vorliegende Strahlfläche längs einer Erzeugenden berührt und die Krümmungsachse zur Schraubachse hat. Dies ist möglich, da die Zentralnormale der gegebenen Fläche die Krümmungsachse orthogonal schneidet. Diese Schraubfläche heiße *Krümmungsschraubfläche*<sup>11</sup>. Sie stellt bei Strahlflächen das Analogon zum Krümmungskreis der Raumkurven dar. Der Parameter  $\rho_s$  der die Krümmungsschraubfläche erzeugenden Schraubung ist nach #16.117

$$\rho_s = d - \hat{\rho} \cot \rho \quad \# 19.64$$

worin  $d$  der Drall der gegebenen Fläche ist. Die Eigenschaften der Krümmungsschraubfläche fassen wir zusammen in

<sup>10</sup> BLASCKE [2] S.202

<sup>11</sup> DISTELI [2] nennt sie *Striktionsschraubfläche*

**Satz 19.4.3.1:** Die Krümmungsschraubfläche  $K$  einer Strahlfläche  $\Phi$  berührt  $\Phi$  längs einer Erzeugenden und hat deren Krümmungsachse zur Schraubachse. Die Krümmungsachse schneidet die Zentralnormale von  $\Phi$  orthogonal. Das sphärische Bild von  $K$  ist der Krümmungskreis des sphärischen Bildes von  $\Phi$ , die Striktionslinien von  $K$  und  $\Phi$  berühren einander. Daher ist die Krümmungsachse einer Strahlfläche die Achse jener Schraubung, welche das begleitende Dreibein der betrachteten Flächenerzeugenden in seine Nachbarlage überführt.

Es ist noch die Berührung der Striktionslinien zu beweisen. Wegen #19.59,60 und #1.47 ist

$$\mathbf{k} = \dot{\mathbf{g}} \times \ddot{\mathbf{g}}, \quad \hat{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{g}}^+ \times \ddot{\mathbf{g}} + \dot{\mathbf{g}} \times \ddot{\mathbf{g}}^+, \quad \mathbf{k}^* = \hat{\mathbf{k}} - \frac{\mathbf{k}\hat{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|^2} \mathbf{k}, \quad |\mathbf{g}^\circ \times \mathbf{k}| = |\dot{\mathbf{g}}|^3 \quad \# 19.65$$

Nach #3.84 schließt die Striktionslinie von  $\Phi$  mit der Erzeugenden den durch

$$\cot \sigma = \frac{u}{d|\dot{\mathbf{g}}|} \quad \# 19.66$$

bestimmten Winkel  $\sigma$  ein. Dabei ist nach #3.83

$$u = (\mathbf{g}^\circ, \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}}^+) + \frac{|\dot{\mathbf{g}}|^2 [(\mathbf{g}^\circ, \ddot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}}^+) + (\mathbf{g}^\circ, \dot{\mathbf{g}}, \ddot{\mathbf{g}}^+)] - 2(\dot{\mathbf{g}}\ddot{\mathbf{g}})(\mathbf{g}^\circ, \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}}^+)}{|\dot{\mathbf{g}}|^4} \quad \# 19.67$$

Nach längeren Umformungen läßt sich #19.67 mit Hilfe von #19.65 auf die Gestalt

$$u = \frac{1}{|\dot{\mathbf{g}}|^2} \left[ \frac{\mathbf{g}^\circ \mathbf{k}^* + \mathbf{g}^+ \mathbf{k}}{|\mathbf{g}^\circ \times \mathbf{k}|^2} |\mathbf{k}|^2 + d(\mathbf{g}^\circ \mathbf{k}) \right] \quad \# 19.68$$

bringen. Für den Winkel  $\sigma$  folgt daher aus #19.66 wegen #19.65

$$\cot \sigma = \frac{\mathbf{g}^\circ \mathbf{k}^* + \mathbf{g}^+ \mathbf{k}}{|\mathbf{g}^\circ \times \mathbf{k}|^3} \cdot \frac{|\mathbf{k}|^2}{d} + \frac{\mathbf{g}^\circ \mathbf{k}}{|\mathbf{g}^\circ \times \mathbf{k}|} \quad \# 19.69$$

Beachtung von #19.63 ergibt

$$\cot \sigma = \cot \rho - \frac{\hat{\rho}}{d \sin^2 \rho} \quad \# 19.70$$

Vergleicht man dieses Resultat mit #16.26, so erkennt man, daß die Striktionslinien von  $\Phi$  und  $K$  einander berühren.

#### 19.4.4 Krümmungsschraubfläche einer Torse

Ist  $\Phi$  eine Torse, so läßt sich wegen  $d = 0$  der Ausdruck #19.70 nicht bilden. Gleichwohl ist durch #19.63-65 die Krümmungsschraubfläche  $K$ , die dann gleichfalls eine Torse ist, wohlbestimmt.

**Satz 19.4.4.1:** Ist  $\Phi$  eine Torse und  $K$  ihre Krümmungsschraubfläche, so oskulieren die Gratlinien von  $\Phi$  und  $K$  einander

Ist nämlich  $d = 0$ , so ist (man vergl Kap. 3 5 3) die Striktionslinie mit der Gratlinie identisch. Nach #3.82,83 ist

$$\dot{\mathbf{s}} = u \mathbf{g}^\circ, \quad u = -\frac{\hat{\rho}}{\sin^2 \rho} \cdot \frac{|\mathbf{g}^\circ \times \mathbf{k}|}{|\dot{\mathbf{g}}|^2} = -\frac{\hat{\rho}}{\sin \rho} \cdot \frac{|\mathbf{k}|}{|\dot{\mathbf{g}}|^2} \quad \# 19.71$$

Daraus folgt durch Differentiation

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{u} \mathbf{g}^\circ + u \dot{\mathbf{g}} \quad \# 19.72$$

Daher ist wegen #1.47

$$|\dot{\mathbf{s}}| = |\mathbf{u}|, \quad |\dot{\mathbf{s}} \times \ddot{\mathbf{s}}| = u^2 |\dot{\mathbf{g}}| \quad \# 19.73$$

und nach #1.120 der Krümmungsradius der Gratlinie wegen #19.71 und #19.65

$$R = \frac{|\mathbf{u}|}{|\dot{\mathbf{g}}|} = \frac{\hat{\rho}}{\sin \rho} \cdot \frac{|\mathbf{k}|}{|\dot{\mathbf{g}}|^3} = \frac{\hat{\rho}}{\sin \rho} \cdot \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{g}^\circ \times \mathbf{k}|} = \frac{\hat{\rho}}{\sin^2 \rho} \quad \# 19.74$$

Das ist aber nach #16.26 der Krümmungsradius der Gratlinie der Krümmungsschraubfläche.

#### 19.4.5 Duale Fassung der Formel von POINSOT

Überträgt man die Formel #10.151 von POINSOT ins Duale, so ergibt sich

$$\frac{\omega}{v_p} = \cot \underline{\rho}_p - \cot \underline{\rho}_{p_1} \quad \# 19.75$$

Hierin bedeuten  $\underline{\rho}_p$  bzw.  $\underline{\rho}_{p_1}$  die dualen Winkel der Krümmungsachsen von Rast- und Gangaxoid mit der Momentanachse. Mit #19.7, #19.16, #19.62 erhält man

$$\frac{\omega(1+\varepsilon p)}{v_p(1+\varepsilon d_p)} = \frac{\omega}{v_p} [1+\varepsilon(p-d_p)] = \cot \rho_p - \cot \rho_{p_1} + \varepsilon \left( \frac{\hat{\rho}_{p_1}}{\sin^2 \rho_{p_1}} - \frac{\hat{\rho}_p}{\sin^2 \rho_p} \right) \quad \# 19.76$$

Trennung von Real- und Dualteil reproduziert die Beziehung #10.151 und liefert die neue Relation

$$\frac{\omega}{v_p} (p-d_p) = \frac{\hat{\rho}_{p_1}}{\sin^2 \rho_{p_1}} - \frac{\hat{\rho}_p}{\sin^2 \rho_p} \quad \# 19.77$$

Eliminiert man hieraus mit #10.151 das Verhältnis  $\frac{\omega}{v_p}$ , sowie mit Hilfe der auf die Axoide angewendeten Formel #19.70 die Größen  $\underline{\rho}_p$  und  $\underline{\rho}_{p_1}$ , so erhält man die Formel von HAAG<sup>12</sup>

$$\frac{p}{d_p} = \frac{\cot \sigma_p - \cot \sigma_{p_1}}{\cot \rho_p - \cot \rho_{p_1}} \quad \# 19.78$$

Diese Formel verliert ihre Bedeutung, wenn die Axoide Torsen sind ( $d_p = 0$ ). In diesem Falle folgt aus #10.151

$$\left( \cot \rho_p - \cot \rho_{p_1} \right) = \frac{\rho_{p_1}}{\sin^2 \rho_{p_1}} - \frac{\rho_p}{\sin^2 \rho_p} \quad \# 19.79$$

Auf der rechten Seite dieses Ausdrucks stehen nach #16.26 die Krümmungsradien  $R_p$ ,  $R_{p_1}$  der Gratlinien der Krümmungsschraubflächen von Rast- und Gangaxoid, die aber nach Satz 19.4.4.1 mit den Krümmungsradien der Gratlinien der Axoide selbst übereinstimmen. Daher gilt bei abschrotenden Torsen

$$p = \frac{R_{p_1} - R_p}{\cot \rho_p - \cot \rho_{p_1}} \quad \# 19.80$$

#### 19.4.6 Paare von auf einander abschrotenden Strahlflächen

Ist eine Strahlfläche  $\underline{\mathbf{a}}^\circ(t) = \mathbf{a}^\circ(t) + \varepsilon \mathbf{a}^+(t)$  gegeben, so kann man mit Hilfe der Formel #19.79 von HAAG alle auf ihr abschrotbaren Flächen bestimmen. Wir geben deren Richtkegel sowie die Werte  $p(t)$  des Parameters der Momentanschraubung in jedem Augenblick vor. Sorgen wir

<sup>12</sup>HAAG [1]

dafür, daß der beliebig gewählte Richtkegel  $\mathbf{b}^\circ(t)$  auf dem gegebenen Richtkegel  $\mathbf{a}^\circ(t)$  abrollt<sup>13</sup>, so ist der Krümmungskegel der neuen Fläche und damit  $\cot \rho_{p_1}$  festgelegt, ebenso ist in jedem Augenblick  $\cot \sigma_{p_1}$  durch #19.78 wohlbestimmt. Da das begleitende Dreibein der neuen Fläche durch deren Richtkegel  $\mathbf{b}^\circ(t)$  bestimmt ist und diese auch im Drall  $\mathbf{d}_p(t)$  mit der gegebenen Fläche übereinstimmt, ergibt sich nach #3.82 und #3.84 für den Gratpunkt  $\mathbf{s}_1$  der neuen Fläche

$$\mathbf{s}_1 = \int_{t_0}^t \mathbf{d}_p \left( |\dot{\mathbf{b}}| \mathbf{b}^\circ \cot \sigma_{p_1} + \mathbf{b}^\circ \times \dot{\mathbf{b}} \right) dt \quad \# 19.81$$

Die Integration ist natürlich koordinatenweise auszuführen<sup>14</sup>.

### 19.4.7 Duale Fassung der Formel von SERRET

Wir wollen die Formel #10.130 ins Duale übertragen und so das räumliche Gegenstück zur Formel von EULER-SAVARY der ebenen Kinematik gewinnen:

$$\cot \underline{\xi} - \cot \underline{\xi}^* = \frac{\omega}{v_p \cos \tau} \quad \# 19.82$$

Hier bedeuten  $\underline{\xi} = \xi + \varepsilon \hat{\xi}$  und  $\underline{\xi}^* = \xi^* + \varepsilon \hat{\xi}^*$  die dualen Winkel, welche die Momentanachse mit der bewegten Geraden  $\underline{\mathbf{g}}^\circ$  und der Krümmungsachse  $\underline{\mathbf{k}}^*$  der von dieser überstrichenen Fläche einschließt. Auf Grund der Sätze 19.4.1.1 und 19.4.3. haben  $\underline{\mathbf{g}}^\circ$ ,  $\underline{\mathbf{k}}^*$  sowie die Momentanachse  $\underline{\mathbf{a}}^\circ$  eine gemeinsame Normale.  $\tau = \tau + \varepsilon \hat{\tau}$  ist der duale Winkel dieser gemeinsamen Normalen mit der Zentralnormalen  $\underline{\mathbf{a}}_2$  #19.11 (Fig. 19.5 stelle die räumlichen Verhältnisse sowie die sphärischen Anteile dar). Trennt man in #19.82 Real- und Dualteil, so ergibt sich außer der auf den sphärischen Anteil der Bewegung bezüglichen Formel #10.130 noch<sup>15</sup>

$$\frac{\hat{\xi}}{\sin^2 \xi} - \frac{\hat{\xi}^*}{\sin^2 \xi^*} = \frac{\omega}{v_p \cos \tau} \left[ (\rho - d_p) + \hat{\tau} \cot \tau \right] \quad \# 19.83$$

<sup>13</sup> wobei man die Berührerzeugende bei Beginn der Abrollung noch willkürlich vorgeben kann. Im Zeitpunkt  $t_0$  muß  $\mathbf{a}^\circ(t_0) = \mathbf{b}^\circ(t_0)$ ,  $\dot{\mathbf{a}}(t_0) = \dot{\mathbf{b}}(t_0)$  sein.

<sup>14</sup> man vergleiche auch SCHUR [1]

<sup>15</sup> DISTELI [2]

## 20 Mehrere bewegte Systeme des Geradenraumes

### 20.1 Zusammensetzung von Bewegungen

#### 20.1.1 Lage der Relativachsen. Normalennetze

Wird die *Relativbewegung* des Systems  $\Sigma_2$  gegen das System  $\Sigma_1$  im festen System  $\Sigma_0$  durch  $\overline{\omega}_{21}$ , die *Führungsbewegung* von  $\Sigma_1$  gegen  $\Sigma_0$  durch  $\overline{\omega}_{10}$  dargestellt, so gilt für die *Absolutbewegung* von  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_0$  nach #18.8

$$\overline{\omega}_{20} = \overline{\omega}_{21} + \overline{\omega}_{10} \quad \# 20.1$$

Trennung von Real- und Dualteil ergibt

$$\overline{\omega}_{20} = \overline{\omega}_{21} + \overline{\omega}_{10}, \quad \hat{\omega}_{20} = \hat{\omega}_{21} + \hat{\omega}_{10} \quad \# 20.2, \# 20.3$$

Nach #17.25 können wir #20.1 auch in der Form

$$\overline{\omega}_{20} \mathbf{a}_{20}^{\circ} = \overline{\omega}_{21} \mathbf{a}_{21}^{\circ} + \overline{\omega}_{10} \mathbf{a}_{10}^{\circ} \quad \# 20.4$$

anschreiben. Daraus folgt wegen Satz 3.2.3.3 der Satz

**Satz 20.1.1.1:** Die Relativachsen  $\mathbf{a}_{21}^{\circ}, \mathbf{a}_{10}^{\circ}, \mathbf{a}_{20}^{\circ}$  dreier bewegter Systeme gehören demselben Normalennetz an.

Jeder der dualen Vektoren  $\overline{\omega}_{21}, \overline{\omega}_{10}$  bestimmt ein *Strahlgewinde*. Alle Nullstrahlen  $\mathbf{g}, \mathbf{g}^*$ , die beiden Gewinden gleichzeitig angehören, die also die Bedingungen

$$\mathbf{g} \hat{\omega}_{21} + \mathbf{g}^* \hat{\omega}_{01} = 0, \quad \mathbf{g} \hat{\omega}_{10} + \mathbf{g}^* \hat{\omega}_{10} = 0$$

erfüllen, gehören wegen #20.2,3 auch dem durch  $\overline{\omega}_{20}$  bestimmten Gewinde an.

**Satz 20.1.1.2:** Alle Geraden, die gleichzeitig Bahnnormalen der Relativ- und der Führungsbewegung sind, sind auch Bahnnormalen der Absolutbewegung.

#### 20.1.2 Drehungen um windschiefe Achsen

##### 20.1.2.1 Zusammensetzung zweier Drehungen

Wir betrachten den Sonderfall, daß  $\overline{\omega}_{21}, \overline{\omega}_{10}$  Drehungen mit windschiefen Achsen sind. Dann ist auch #17.17

$$\overline{\omega}_{21} \hat{\omega}_{21} = 0, \quad \hat{\omega}_{21} = \overline{\omega}_{21}^*, \quad \overline{\omega}_{10} \hat{\omega}_{10} = 0, \quad \hat{\omega}_{10} = \overline{\omega}_{10}^* \quad \# 20.5$$

Für die resultierende Schraubung folgt aus #20.2,3 wegen #20.5

$$\overline{\omega}_{20} \hat{\omega}_{20} = \overline{\omega}_{21} \hat{\omega}_{10} + \overline{\omega}_{10} \hat{\omega}_{21} \quad \# 20.6$$

Sei  $(\overline{\mathbf{g}}, \overline{\mathbf{g}}^*)$  die reziproke Polare zur Drehachse  $(\overline{\omega}_{21}, \hat{\omega}_{21})$  bezüglich der resultierenden Schraubung, so folgt aus #16.63,64 wegen #20.2-3

$$\left. \begin{aligned} \overline{\mathbf{g}} &= \overline{\omega}_{20} (\overline{\omega}_{21} \hat{\omega}_{20} + \hat{\omega}_{21} \overline{\omega}_{20}) - \overline{\omega}_{21} (\overline{\omega}_{20} \hat{\omega}_{20}) = \overline{\omega}_{10} (\overline{\omega}_{20} \hat{\omega}_{20}) \\ \overline{\mathbf{g}}^* &= \hat{\omega}_{20} (\overline{\omega}_{21} \hat{\omega}_{20} + \hat{\omega}_{21} \overline{\omega}_{20}) - \hat{\omega}_{21} (\overline{\omega}_{20} \hat{\omega}_{20}) = \hat{\omega}_{10} (\overline{\omega}_{20} \hat{\omega}_{20}) \end{aligned} \right\} \quad \# 20.7$$

Wegen der Homogenität der PLÜCKER-Vektoren ist demnach  $(\overline{\mathbf{g}}, \overline{\mathbf{g}}^*)$  mit  $(\overline{\omega}_{10}, \hat{\omega}_{10})$  identisch.

## 20.1.2.2 Zerlegung einer Schraubung in zwei Drehungen

Wir wollen nun umgekehrt die gegebene Schraubung  $\bar{\omega}_{20}$  in zwei Drehungen zerlegen. Die erste Drehung  $\underline{a}_{21}^{\circ}$ , wählen wir beliebig, die Größe der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{21}$  lassen wir noch offen. Dann muß für die gesuchte Drehung mit der Achse  $\underline{a}_{10}^{\circ}$  gelten

$$\omega_{10} \underline{a}_{10}^{\circ} = \bar{\omega}_{20} - \omega_{21} \underline{a}_{21}^{\circ} \quad \# 20.8$$

Trennung von Real- und Dualteil ergibt

$$\omega_{10} \underline{a}_{10}^{\circ} = \bar{\omega}_{20} - \omega_{21} \underline{a}_{21}^{\circ}, \quad \omega_{10} \underline{a}_{10}^{+} = \hat{\omega}_{20} - \omega_{21} \underline{a}_{21}^{+} \quad \# 20.9$$

Da  $(\underline{a}_{10}^{\circ}, \underline{a}_{10}^{+})$  die PLÜCKER-Bedingung erfüllen muß, ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{21}$  der ersten Drehung

$$\omega_{21} = \frac{\bar{\omega}_{20} \hat{\omega}_{20}}{\underline{a}_{21} \hat{\omega}_{20} + \underline{a}_{21}^{+} \bar{\omega}_{20}} \quad \# 20.10$$

Damit ist die erste Drehung durch

$$\bar{\omega}_{21} = \omega_{21} \underline{a}_{21}^{\circ}, \quad \hat{\omega}_{21} = \omega_{21} \underline{a}_{21}^{+} \quad \# 20.11$$

die zweite durch

$$\bar{\omega}_{10} = \bar{\omega}_{20} - \bar{\omega}_{21}, \quad \hat{\omega}_{10} = \hat{\omega}_{20} - \hat{\omega}_{21} \quad \# 20.12$$

festgelegt. Man überzeugt sich leicht, daß  $\underline{a}_{21}^{\circ}$  und  $\underline{a}_{10}^{\circ}$  reziproke Polare bezüglich  $\bar{\omega}_{20}$  sind.

**Satz 20.1.2.2.1:** *Setzt man zwei Drehungen zusammen, so sind deren Achsen reziproke Polare bezüglich der resultierenden Schraubung. Zerlegt man umgekehrt eine Schraubung in zwei Drehungen, so kann man als deren Achsen zwei beliebige reziproke Polare der Schraubung wählen. Alle Treffgeraden beider Drehachsen sind daher Nullstrahlen der resultierenden Schraubung.*

Die letzte Aussage stellt einen Spezialfall von Satz 20.1.2 dar.

## 20.1.3 Zusammensetzung von Schraubungen

### **Figur 20.1**

Wenden wir uns wieder dem allgemeinen Fall zu. Die Richtung des Vektors  $\bar{\omega}_{20}$  ergibt sich aus #20.2 mit Hilfe des in Fig.20.1 eingezeichneten Vektordreiecks. Für dessen Winkel  $a = \angle \underline{a}_{21} \underline{a}_{10}$ ,  $a_1 = \angle \underline{a}_{10} \underline{a}_{20}$ ,  $a_2 = \angle \underline{a}_{21} \underline{a}_{20}$  gilt

$$a = a_1 + a_2 \quad \# 20.13$$

Ferner folgt aus dem Sinussatz

$$\frac{\omega_{10}}{\sin a_2} = \frac{\omega_{21}}{\sin a_1} = \frac{\omega_{20}}{\sin a} \quad \# 20.14$$

Für die Abstände  $\hat{a} = \underline{a}_{10} \underline{a}_{21}$ ,  $\hat{a}_1 = \underline{a}_{10} \underline{a}_{20}$ ,  $\hat{a}_2 = \underline{a}_{21} \underline{a}_{20}$  gilt ebenfalls

$$\hat{a} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 \quad \# 20.15$$

Wir können daher je zwei Relativachsen die dualen Winkel

$$\underline{a} = \underline{a} + \varepsilon \hat{a}, \quad \underline{a}_1 = \underline{a}_1 + \varepsilon \hat{a}_1, \quad \underline{a}_2 = \underline{a}_2 + \varepsilon \hat{a}_2, \quad \underline{a} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 \quad \# 20.16$$

zuordnen. Sind  $\underline{p}_{21}$ ,  $\underline{p}_{10}$ ,  $\underline{p}_{20}$  die Parameter der vorliegenden Schraubungen, und setzen wir  $\underline{p}_{21} = 1 + \varepsilon \underline{p}_{21}$ ,  $\underline{p}_{10} = 1 + \varepsilon \underline{p}_{10}$ ,  $\underline{p}_{20} = 1 + \varepsilon \underline{p}_{20}$ , dann ist nach #17.24

$$\omega_{21} = \omega_{21} \underline{p}_{21}, \quad \omega_{10} = \omega_{10} \underline{p}_{10}, \quad \omega_{20} = \omega_{20} \underline{p}_{20} \quad \# 20.17$$

Mit dieser Bezeichnungsweise erhält man durch Quadrieren von #20.4

## Mehrere bewegte Systeme des Geradenraumes

$$\omega_{20}^2 p_{20}^2 = \omega_{21}^2 p_{21}^2 + \omega_{10}^2 p_{10}^2 + 2\omega_{21}\omega_{10} p_{21} p_{10} \cos a \quad \# 20.18$$

Trennung von Real- und Dualteil ergibt

$$\omega_{20}^2 = \omega_{21}^2 + \omega_{10}^2 + 2\omega_{21}\omega_{10} \cos a \quad \# 20.19$$

$$\omega_{20}^2 p_{20} = \omega_{21} p_{21} (\omega_{21} + \omega_{10} \cos a) + \omega_{10} p_{10} (\omega_{10} + \omega_{21} \cos a) - \omega_{10} \omega_{21} \hat{a} \sin a \quad \# 20.20$$

Durch #20.18 bzw. #20.20 ist der Parameter  $p_{20}$  der resultierenden Schraubung festgelegt.

Den Abstand  $a_1$  der Achsen  $a_{20}$  und  $a_{10}$  berechnen wir aus  $\cos a_1 = \frac{a_{20}^\circ a_{10}^\circ}{a_{20} a_{10}}$ . Multiplizieren wir diesen Ausdruck mit  $\omega_{20}$ , so folgt mit #20.4

$$\omega_{20} \cos a_1 = \omega_{20} \frac{a_{20}^\circ a_{10}^\circ}{a_{20} a_{10}} = \omega_{21} \cos a + \omega_{10} = \omega_{21} p_{21} \cos a + \omega_{10} p_{10} \quad \# 20.21$$

Trennung von Real- und Dualteil ergibt

$$\omega_{20} \cos a_1 = \omega_{21} \cos a + \omega_{10} \quad \# 20.22$$

$$-\omega_{20} \hat{a}_1 \sin a_1 = \omega_{10} p_{10} + \omega_{21} (p_{21} \cos a - \hat{a} \sin a) - \omega_{20} p_{20} \cos a_1 \quad \# 20.23$$

Analog zu #20.22 ergibt sich der Ausdruck

$$\omega_{20} \cos a_1 = \omega_{10} \cos a + \omega_{21} \quad \# 20.24$$

Mit #20.22 und #20.24 erhält #20.20 die Form

$$\omega_{20}^2 p_{20} = \omega_{20} \omega_{21} p_{21} \cos a_2 + \omega_{20} \omega_{10} p_{10} \cos a_1 - \omega_{10} \omega_{21} \hat{a} \sin a \quad \# 20.25$$

Multipliziert man #20.25 mit  $\sin a$  und beachtet die aus #120.14 folgenden Beziehungen

$$\sin a = \frac{\omega_{20}}{\omega_{21}} \sin a_1 = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} \sin a_2, \quad \sin^2 a = \frac{\omega_{20}^2 \sin a_1 \sin a_2}{\omega_{10} \omega_{21}} \quad \# 20.26$$

so erhält man nach Kürzung durch  $\omega_{20}^2$

$$p_{20} \sin a = p_{21} \cos a_2 \sin a_1 + p_{10} \cos a_1 \sin a_2 - \hat{a} \sin a_1 \sin a_2 \quad \# 20.27$$

Erhöht man  $p_{10}$  und  $p_{21}$  um dieselbe Konstante  $c$ , so erhält auch  $p_{20}$  einen neuen Wert  $p'_{20}$ . Aus #20.27 folgt sofort

**Satz 20.1.3.1:** *Verändert man die Parameter zweier Schraubungen um dieselbe Größe, so ändert sich auch der Parameter der resultierenden Schraubung um diese Größe.*

Multipliziert man #20.23 mit  $\sin a$  und beachtet #20.26, so ergibt sich nach Kürzung durch  $\omega_{20}$

$$-\hat{a}_1 \sin a_1 \sin a = p_{10} \sin a_2 + p_{21} \sin a_1 \cos a - \hat{a} \sin a \sin a_1 - p_{20} \cos a_1 \sin a \quad \# 20.28$$

Elimination von  $p_{20}$  mit #20.27 und Kürzung durch  $\sin a_1$  ergibt

$$-\hat{a}_1 \sin a = p_{10} \sin a_2 \sin a_1 + p_{21} (\cos a - \cos a_1 \cos a_2) + \hat{a} (\cos a_1 \sin a_2 - \sin a) \quad \# 20.29$$

Eliminiert man schließlich mit Hilfe von #20.13 auf der rechten Seite von #20.29 den Winkel  $a$ , so erhält man

$$\hat{a}_1 \sin a = (p_{21} - p_{10}) \sin a_1 \sin a_2 + \hat{a} \sin a_1 \cos a_2 \quad \# 20.30$$

## 20.1.4 Konstruktion der resultierenden Achsen

### 20.1.4.1 Allgemeiner Fall<sup>1</sup>

Zwei momentane Geschwindigkeitszustände seien durch Angabe der Momentanachsen  $\mathbf{a}_{21}$ ,  $\mathbf{a}_{10}$ , der Parameter  $p_{21}$ ,  $p_{10}$  sowie der Winkelgeschwindigkeitsvektoren  $\bar{\omega}_{21}$ ,  $\bar{\omega}_{10}$  gegeben. Nehmen wir das Gemeinlot  $\mathbf{n}$  von  $\mathbf{a}_{12}$  und  $\mathbf{a}_{10}$  ohne Einschränkung der Allgemeinheit dritt-projizierend an (Fig.20.2), so ist  $\bar{\omega}_{20}$  und damit auch der Kreuzriß von  $\mathbf{a}_{20}$  nach #20.2 fest-gelegt.

**Figur 20.2**

Um auch den Aufriß  $\mathbf{a}_{20}''$  zu erhalten, gehen wir so vor: Parallel zu  $\mathbf{n}$  wählen wir die *Parameterachse*  $h$ , von der aus wir die Parameter  $p_{10}$  und  $p_{21}$  auf den Aufrissen  $\mathbf{a}_{10}''$  und  $\mathbf{a}_{21}''$  unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens abtragen (in Fig. 20.2 sind  $p_{10}$ ,  $p_{21} > 0$  gewählt, die positive Orientierung weist nach unten). Durch deren Endpunkte  $A_{10}$  und  $A_{20}$  ziehen wir die Parallelen zu  $\mathbf{a}_{10}''$  und  $\mathbf{a}_{21}''$ , die einander in  $Z$  unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden. Die Peripherie des Umkreises von  $\Delta A_{10}A_{21}Z$  - des *Bildkreises* - werde von der Parallelen zu  $\mathbf{a}_{20}''$  durch  $Z$  in  $A_{20}$  getroffen. Wir behaupten: Die Parallele  $\mathbf{a}_{20}''$  zu  $\mathbf{a}_{10}''$  bzw.  $\mathbf{a}_{21}''$  durch  $A_{20}$  stellt den Aufriß der resultierenden Schraubachse  $\mathbf{a}_{20}$  dar, der Abstand des Punktes  $A_{20}$  von der Parameterachse  $h$  ist gleich dem resultierenden Parameter  $p_{20}$ .

Beweis: In Fig.20.2 ist

$$A_{10}N = \hat{a}, \quad NA_{21} = p_{21} - p_{10}, \quad \tan \varphi = \frac{p_{21} - p_{10}}{\hat{a}}, \quad A_{10}A_{21} = \frac{\hat{a}}{\cos \varphi} \quad \# 20.31$$

Für den Durchmesser  $D$  des Abbildungskreises ergibt sich

$$D = \frac{A_{10}A_{21}}{\sin \alpha} = \frac{\hat{a}}{\sin \alpha \cos \varphi} \quad \# 20.32$$

daher hat die Sehne  $A_{10}A_{20}$  die Länge

$$A_{10}A_{20} = D \sin \alpha_1 = \frac{\hat{a} \sin \alpha_1}{\sin \alpha \cos \varphi} \quad \# 20.33$$

Für die Strecke  $A_{10}M$  ergibt der Vergleich mit #20.30

$$\begin{aligned} A_{10}M &= A_{10}A_{20} \cos(\varphi - \alpha_2) = \\ &= \frac{\hat{a} \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + (p_{21} - p_{10}) \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin \alpha} = \hat{a}_1 \end{aligned} \quad \# 20.34$$

Ferner ergibt der Vergleich mit #20.27 für den Abstand des Punktes  $A_{20}$  von der Parameterachse wegen #20.33,31

$$\begin{aligned} A_{20}h &= p_{10} + A_{10}A_{20} \sin(\varphi - \alpha_2) = \\ &= \frac{p_{10} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + p_{21} \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \hat{a} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin \alpha} = p_{20} \end{aligned} \quad \# 20.35$$

w.z.b.w.

**Figur 20.3**

Die angegebene Konstruktion zur Ermittlung der resultierenden Schraubachse läßt sich noch anwenden, wenn die Achsen  $\mathbf{a}_{21}$  und  $\mathbf{a}_{10}$  einander schneiden (Fig.20.3)

<sup>1</sup> Die folgende Konstruktion basiert auf einer von LEWIS [1] angegebenen Eigenschaft des PLÜCKER-Konoids (siehe Kap.20.2) und wurde ausführlich abgehandelt in BALL [1]. Man vergleiche die Modifikation der angegebenen Konstruktionen bei DISTELI [1].

## 20.1.4.2 Schneidende Achsen und gleiche Parameter

Haben die gegebenen Schraubungen schneidende Achsen und gleiche Parameter, so setzen wir zunächst die Drehungen #20.2 um diese Achsen zusammen. Dann hat nach Satz 20.1.3.1 die resultierende Schraubung denselben Parameter  $p_{20} = p_{21} = p_{10}$  wie die gegebenen Schraubungen und alle drei Schraubachsen gehen durch denselben Punkt.

## 20.1.4.3 Parallele Schraubachsen

Sind die gegebenen Schraubachsen parallel (Fig.20.4), so ist nach #20.2 auch die resultierende Achse zu  $a_{10}$ ,  $a_{21}$  parallel und liegt in der von diesen Geraden auf-gespannten Ebene. Die Bögen Bogen( $A_{10}A_{20}$ ) und Bogen( $A_{21}A_{20}$ ) gehen in die Strecken  $A_{10}A_{20}$  bzw.  $A_{21}A_{20}$  über. Nun ist wegen #20.14

**Figur 20.4**

$$\frac{\hat{a}_1}{\hat{a}_2} = \frac{A_{10}A_{20}}{A_{21}A_{20}} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\text{Bogen}(A_{10}A_{20})}{\text{Bogen}(A_{21}A_{20})} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a_1}{a_2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a_1}{\sin a_2} = \frac{\omega_{21}}{\omega_{10}} \quad \# 20.36$$

**Satz 20.1.4.3.1:** Setzt man zwei Schraubungen mit parallelen Achsen zusammen, so teilt die resultierende Schraubachse deren Abstand im umgekehrten Verhältnis der relativen Winkelgeschwindigkeiten.

Dabei ist auf die Orientierung der Vektoren  $\bar{\omega}_{10}$  und  $\bar{\omega}_{21}$  zu achten. In Fig.20.4 liegen zwei Rechtsschraubungen vor, daher befinden sich die Endpunkte  $A_{10}$  und  $A_{20}$  der Parameterstrecken  $p_{10}$  und  $p_{20}$  auf derselben Seite der Parameterachse h.

Da die kollinearen Winkelgeschwindigkeitsvektoren  $\bar{\omega}_{10}$  und  $\bar{\omega}_{21}$  entgegengesetzt orientiert sind, wurden ihre Beträge zur Auswertung der Proportion #20.36 auf  $a_{21}'$  bzw.  $a_{10}'$  auf verschiedenen Seiten von  $n''$  abgetragen. Da  $p_{20}$  positiv ist, ist die resultierende Schraubung eine Rechtsschraubung, deren Orientierung durch  $\bar{\omega}_0$  festgelegt ist.

## 20.1.4.4 Zusammensetzung einer Schiebung mit einer Schraubung

Soll eine vorgegebene Schraubung  $\bar{\omega}_{10}$ ,  $\hat{\omega}_{10}$  mit einer momentanen Schiebung  $\bar{\omega}_{21} = \mathbf{0}$ ,  $\hat{\omega}_{21} = \mathbf{v}$  zusammengesetzt werden (Fig.20.5), so ist die resultierende Schraubung nach #20.2,3 durch

$$\bar{\omega}_{20} = \bar{\omega}_{10}, \quad \hat{\omega}_{20} = \hat{\omega}_{10} + \mathbf{v} \quad \# 20.37$$

festgelegt. Der Ortsvektor  $\mathbf{f}_{20}$  des Lotfußpunktes aus dem Koordinatenursprung O auf  $a_{20}$  ist wegen #1.68 und #17.14

$$\mathbf{f}_{20} = \frac{\bar{\omega}_{20} \times \hat{\omega}_{20}^*}{\omega_{20}^2} = \frac{\bar{\omega}_{20} \times \hat{\omega}_{20}}{\omega_{20}^2} = \frac{\bar{\omega}_{10} \times \hat{\omega}_{10}}{\omega_{10}^2} + \frac{\bar{\omega}_{10} \times \mathbf{v}}{\omega_{10}^2} = \mathbf{f}_{10} + \frac{\bar{\omega}_{10} \times \mathbf{v}}{\omega_{10}^2} \quad \# 20.38$$

$\mathbf{f}_{10}$  ist der Lotfußpunkt auf  $a_{10}$  aus O. Der Abstand der beiden parallelen Achsen  $a_{20}$  und  $a_{10}$  wird durch  $\mathbf{f}_{20} - \mathbf{f}_{10}$  festgelegt und steht nach #20.38 auf der von  $\bar{\omega}_{10}$  und  $\mathbf{v}$  auf-gespannten Ebene normal. Die Vektoren  $\bar{\omega}_{10}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{f}_{20} - \mathbf{f}_{10}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtsdrei-bein. Der Betrag des Abstandes  $\hat{a}_1$  der beiden Schraubachsen  $a_{10}$  und  $a_{20}$  ist wegen #20.38

**Figur 20.5**

$$\hat{a}_1 = \frac{|\mathbf{v}| \sin a}{\omega_{10}} = \frac{v_1}{\omega_{10}} \quad \# 20.39$$

Hier ist  $v_1$  der Betrag der zu  $a_{10}$  normalen Komponente von  $\mathbf{v}$ . In der Zeichnung läßt sich nach Wahl einer Momentenkonstante c die Strecke  $a_{1z}$  aus

$$\omega_{10z} \cdot c = v_{1z} \cdot \hat{a}_{1z}$$

leicht ermitteln (siehe Kap.4). Für den Parameter  $p_{20}$  der resultierenden Schraubung gilt nach #17.13 und #20.37

$$p_{20} = \frac{\bar{\omega}_{20} \hat{\omega}_{20}}{\omega_{20}^2} = \frac{\bar{\omega}_{10} \hat{\omega}_{10}}{\omega_{10}^2} + \frac{\bar{\omega}_{10} \mathbf{v}}{\omega_{10}^2} = p_{10} + \frac{|\mathbf{v}| \cos a}{\omega_{10}} \quad \# 20.40$$

Aus #20.39,40 folgt durch Elimination des Verhältnisses  $\frac{|\mathbf{v}|}{\omega_{10}}$

$$p_{20} = \hat{a}_1 \cot a + p_{10} \quad \# 20.41$$

Hieraus entnimmt man, daß der Endpunkt  $A_{20}$  der von der Parameterachse  $h$  aus abgetragenen Strecke  $p_{20}$  auf der durch  $A_{10}$  gehenden Geraden liegt, die mit  $h$  den Winkel  $\pi/2 - a$  einschließt. Diese Gerade entspricht dem Bildkreis des allgemeinen Falles.

## 20.2 Das PLÜCKER - Konoid

### 20.2.1 Definition und Eigenschaften

Sind zwei Schraubungen durch ihre Achsen  $a_{21}$  und  $a_{10}$  sowie durch ihre Parameter  $p_{21}$  und  $p_{10}$  gegeben, so hängt die etwa durch  $a_1$  und  $\hat{a}_1$  bestimmte Achse  $a_{20}$  der resultierenden Schraubung nach #20.19,26,30 noch vom Verhältnis  $\bar{\omega}_{21} : \bar{\omega}_{10}$  der Winkelgeschwindigkeiten ab.

Der zugehörige Schraubparameter  $p_{20}$  ist dann durch #20.27 eindeutig bestimmt. Bemerkenswerterweise geht bei der Ermittlung von  $\hat{a}_1$  bloß die Differenz  $(p_{21} - p_{10})$  der gegebenen Parameter ein. Alle diese Bemerkungen werden bei den im vorhergehenden Kapitel angegebenen Konstruktionen unmittelbar einsichtig. Hält man die vorgegebenen Schraubungen fest und läßt das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten variieren, so überstreichen alle möglichen Lagen der Achsen  $a_{20}$  eine Fläche, die man nach ihrem ersten Entdecker *PLÜCKER-Konoid* nennt und die von CAYLEY<sup>2</sup> als *Zylindroid* bezeichnet wurde<sup>3</sup>. Läßt man in Fig.20.2 im Kreuzriß  $a_{20}''$  variieren, so entspricht jeder Lage dieser Geraden ein eindeutig bestimmter Schnittpunkt  $A_{20}$  ihrer Parallelen durch  $Z$  mit dem Bildkreis und damit in eindeutiger Weise die Raumlage von  $a_{20}$ . Man nennt die von allen Erzeugenden des Zylindroids orthogonal geschnittene Gerade  $n$  dessen *Achse*. Die äußersten (reellen) Erzeugenden sind jene, deren Aufrisse den Abbildungskreis berühren. Dessen Durchmesser  $D$  stellt die *Höhe* des PLÜCKER-Konoids dar. Jede zur Achse  $n$  normale Ebene schneidet das PLÜCKER-Konoid nach zwei Erzeugenden. Denn die Projektion einer solchen Ebene schneidet den Bildkreis in zwei Punkten, deren jeder eine Erzeugende eindeutig festlegt. Speziell stehen jene den Punkten  $A_I$  und  $A_{II}$  entsprechenden Erzeugenden  $a_I$  und  $a_{II}$ , deren einander deckende Aufrisse durch den Mittelpunkt des Bildkreises gehen, aufeinander normal. Ihnen entsprechen die Extremwerte  $p_I$  bzw.  $p_{II}$  der möglichen Parameterstrecken. Den Schnittpunkt  $O$  der genannten Erzeugenden nennen wir *Mittelpunkt*, die Erzeugenden selbst *Haupterzeugende* des Konoids

Um den Mittelpunkt  $O$ , dessen Abstand von  $a_{10}$  den Betrag  $\hat{a}_m$  aufweise, und die Haupterzeugenden des Zylindroids festzulegen, beachten wir folgende, aus Fig.20.2 und #20.31 unmittelbar zu entnehmenden Beziehungen

$$2\hat{a}_m = A_{10}L = A_{10}N - NA_{21} \cot a = \hat{a} - (p_{21} - p_{10}) \cot a \quad \# 20.42$$

Für das Doppelte des den Punkt  $A_I$  festlegenden Winkels  $a_m$  gilt

$$2a_m = \angle A_{10}ZL = \angle A_{10}ZA_{21} - \angle LZA_{21} = a - \varphi \quad \# 20.43$$

<sup>2</sup> Arthur CAYLEY 1821-1895

<sup>3</sup> Eine erschöpfende Darstellung der Rolle, die das PLÜCKER-Konoid in der Mechanik spielt, findet sich bei BALL [2]. Vom rein geometrischen Standpunkt aus wird diese Fläche betrachtet in MÜLLER-KRAMES [1] S.204-225.

Daher ist wegen #20.31

$$\tan 2a_m = \frac{\hat{a} \tan a - (p_{21} - p_{10})}{\hat{a} + (p_{21} - p_{10}) \tan a} \quad \# 20.44$$

Wählen wir ein Rechtskoordinatensystem  $O(\xi, \eta, \zeta)$ , dessen Ursprung mit dem Mittelpunkt  $O$  des Zylindroids zusammenfällt, dessen  $\xi$ - und  $\eta$ -Achse in die Haupterzeugenden  $a_I$  und  $a_{II}$  fallen und dessen  $\zeta$ -Achse in der Zylindroidachse liege. Eine beliebige Erzeugende  $a_{20}$  des Zylindroids schließe mit der  $\xi$ -Achse den Winkel  $\psi$  ein, der im Bildkreis als Peripheriewinkel über dem Bogen  $Bogen(A_I A_{20})$  auftritt. Der  $\zeta$ -Wert der Erzeugenden ist dann der Abstand des Punktes  $A_{20}$  vom Durchmesser  $A_I A_{II}$ , daher

$$\zeta = \frac{p_{II} - p_I}{2} \sin 2\psi = \frac{D}{2} \sin 2\psi \quad \# 20.45$$

Wegen  $\eta = \xi \tan \psi$  lautet die Gleichung des PLÜCKER-Konoids, bezogen auf das genannte Koordinatensystem

$$\zeta = D \frac{\xi \eta}{\xi^2 + \eta^2} \quad \# 20.46$$

Das Zylindroid ist somit eine Strahlfläche 3. Ordnung, deren Gestalt nur von der Differenz  $D$  der beiden Hauptparameter  $p_I$  und  $p_{II}$  abhängt.

Jeder Erzeugenden  $a_{20}$  des Zylindroids ist als Schraubachse ein bestimmter Parameter  $p_{20}$  zugeordnet, den man mit Hilfe des zu  $A_{20}$  gehörigen Zentriwinkels  $2\psi$  des Bildkreises folgendermaßen darstellen kann:

$$p_{20} = \frac{p_{II} + p_I}{2} - \frac{p_{II} - p_I}{2} \cos 2\psi = p_I \cos^2 \psi + p_{II} \sin^2 \psi \quad \# 20.47$$

Durch #20.47 ist die *Parameterverteilung* auf den einzelnen Erzeugenden des Zylindroids festgelegt.

Zu einem vorgegebenen PLÜCKER-Konoid #20.45 sind unendlich viele Parameterverteilungen möglich. Sie gehen nach Satz 20.1.3.1 aus einer zulässigen hervor, indem man alle Parameter um dieselbe Konstante vergrößert.

**Satz 20.2.1.1:** *Zwei durch Achse und Parameter gegebene Schraubungen bestimmen eindeutig ein PLÜCKER-Konoid und die zugehörige Parameterverteilung.*

Jede mit dem zugehörigen Parameter belegte Erzeugende des Konoids stellt dann jene resultierende Schraubung dar, die einem gewissen Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der gegebenen Schraubungen entspricht. Ist umgekehrt ein PLÜCKER-Konoid mit Parameterverteilung gegeben, so kann jede einer Erzeugenden zugeordnete Schraubung in zwei andere zerlegt werden, die zwei beliebig gewählten Erzeugenden des Konoids entsprechen.

**Satz 20.2.1.2:** *Ein PLÜCKER-Konoid ist durch drei seiner Erzeugenden eindeutig bestimmt.*

Beweis: Die drei Erzeugenden seien so aufgestellt, daß ihr Gemeinlot  $n$  drittprojizierend ist (Fig. 20.6). Wählen wir auf  $a_1'$  einen beliebigen Hilfspunkt  $H$  und tragen mit diesem Punkt als Scheitel von dieser Geraden die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  der gegebenen Erzeugenden im selben Sinne aus ab, so bestimmen die Schenkel dieses Winkels auf  $a_2'$  und  $a_3'$  die

Figur.20.6

Punkte  $A_2$  und  $A_3$ . Der Umkreis des Dreiecks  $\Delta H A_2 A_3$  bestimmt den Bildkreis des Zylindroids, die Punkte  $A_2$ ,  $A_3$  sowie der Schnittpunkt des Bildkreises mit  $A_1$  bestimmen die Bilder der Konoiderzeugenden. Der Punkt  $Z$  läßt sich dann leicht ermitteln.

Jede zu den Aufrissen der Erzeugenden normale Parameterachs  $h$  bestimmt eine zulässige Parameterverteilung. In Fig.20.6 wurde  $h$  so gewählt, daß die Schraubung um  $\underline{a}_1$  eine Links-, die um  $\underline{a}_3$  eine Rechtsschraubung ist. Übrigens erkennt man sofort die Gültigkeit von

**Satz 20.2.1.3:** *Bei jeder zulässigen Parameterverteilung gibt es höchstens zwei Drehungen.*

#20.4 kann man nach #17.25 in der Gestalt

$$\omega_{20} \underline{p}_{20} \underline{a}_{20}^{\circ} = \omega_{21} \underline{p}_{21} \underline{a}_{21}^{\circ} + \omega_{10} \underline{p}_{10} \underline{a}_{10}^{\circ} \quad \# 20.48$$

anschreiben. Die Vektoren  $\underline{a}_{ik} = \underline{p}_{ik} \underline{a}_{ik}^{\circ}$  repräsentieren dann nach Satz 16.5.1 die betrachteten Schraubungen sowie die mit ihnen verknüpften Gewinde eindeutig, und #20.48 nimmt folgende Form an

$$\omega_{20} \underline{a}_{20} = \omega_{21} \underline{a}_{21} + \omega_{10} \underline{a}_{10} \quad \# 20.49$$

Daher können wir das Ergebnis dieses Abschnittes auch folgendermaßen aussprechen<sup>4</sup>

**Satz 20.2.1.4:** *Die Achsen aller Gewinde  $\underline{a}_{20}$ , die durch Linearkombination mit reellen Koeffizienten aus den beiden Gewinden  $\underline{a}_{21}$  und  $\underline{a}_{10}$  hervorgehen, bilden ein PLÜCKER-Konoid.*

## 20.2.2 Schraubungen mit schneidenden Achsen

Bei Zusammensetzung von Schraubungen mit schneidenden Achsen und gleichen Parametern entartet das Plückerkonoid in ein Strahlbüschel. Allen Erzeugenden entsprechen gleiche Parameter (Siehe Kap.20.1.4.2).

## 20.2.3 Schraubungen mit parallelen Achsen

Bei Zusammensetzung zweier Schraubungen mit parallelen Achsen entartet das Zylindroid in ein Parallelstrahlenbüschel (Kap.20.2.4.3, Fig.20.4). Sind die Parameter der gegebenen Schraubungen verschieden, so gibt es eine Erzeugende  $d_{20}$ , der eine Drehung entspricht, die Parameter der anderen Erzeugenden sind proportional dem Abstand dieser Erzeugenden von  $d_{20}$ . Fig.20.4 zeigt die Ermittlung der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega'_{21}$  und  $\omega'_{10}$ , die man den Schraubungen  $(\underline{a}_{10}, p_{10})$ ,  $(\underline{a}_{21}, p_{21})$  zuordnen muß, damit deren Resultierende die Drehung um  $d_{20}$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}'_{20} = \bar{\omega}'_{21} + \bar{\omega}'_{10}$  ist.

Sind die Parameter der gegebenen Schraubungen gleich, so haben alle Schraubungen denselben Parameter, sie unterscheiden sich nur in der Winkelgeschwindigkeit.

Ist  $p_{21} = p_{10} = 0$ , so liegen in der zu den Achsen normalen Ebenenstellung momentan ebene Bewegungen vor

Die Projektion der Raumbewegung auf eine zu den Achsen normale Ebene stellt auch bei verschiedenen Parametern die Zusammensetzung ebener Bewegungen dar

## 20.2.4 Schraubung und Schiebung

Bei Zusammensetzung einer Schraubung  $(\underline{a}_{10}, p_{10})$  mit einer Schiebung vorgegebener Tangentenrichtung  $t$  entartet das Zylindroid gleichfalls in ein Parallelstrahlenbüschel (Kap.20.1.4.4, Fig.20.5). Einer Erzeugenden  $d_{20}$  entspricht eine Drehung, die anderen Schraubachsen haben Parameter, deren Größe dem Abstand dieser Achse von  $d_{20}$  proportional ist. Fig.20.5 zeigt die Konstruktion jenes Schiebungsvektors  $\underline{v}'$ , der zusammen mit der Momentanschraubung um

<sup>4</sup>LÖBELL [1]

$(\mathbf{a}_{10}, p_{10})$  von vorgegebener Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}_{10}$  die resultierende Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}_{10}$  um  $d_{20}$  ergibt.

## 20.3 Räumliche Getriebe

### 20.3.1 Das räumliche Genekviereck

Dem sphärischen Gelenkviereck der dualen Einheitskugel entspricht im Raum das in Fig. 20.7 dargestellte viergliedrige Getriebe. Den vier Eckpunkten  $\underline{\mathbf{a}}_i^\circ = \mathbf{a}_i^\circ + \varepsilon \mathbf{a}_i^+$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) entsprechen im Raum die vier durch  $(\mathbf{a}_i^\circ, \mathbf{a}_i^+)$  festgelegten Geraden  $\mathbf{a}_i$ . Je zwei zyklisch aufeinanderfolgende duale Einheitsvektoren  $\underline{\mathbf{a}}_i^\circ$  und  $\underline{\mathbf{a}}_{i+1}^\circ$  schließen den konstanten dualen Winkel  $\underline{\alpha}_i = \alpha_i + \varepsilon n_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) ein. Dabei stellen  $\mathbf{a}_i$  und  $n_i$  Winkel und Abstand der Geraden  $\mathbf{a}_i$  und  $\mathbf{a}_{i+1}$  dar. Jede Gerade  $\mathbf{a}_i$  repräsentiert mit dem ihr starr verbundenen Gemeinlot  $n_i$  zur nächsten Geraden ein System  $\Sigma_i$ . Verbinden wir  $\Sigma_4$  mit  $\Sigma_1$  durch ein Drehgelenk, alle anderen Systeme aber durch ein Zylindergelenk, so ist das Getriebe nach #18.45 zwangsläufig.

Figur 20.7

Die Raumlagen der Gemeinlote aufeinanderfolgender Geraden  $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}$  legen wir durch die dualen Einheitsvektoren  $\underline{\mathbf{n}}_i^\circ = \mathbf{n}_i^\circ + \varepsilon \mathbf{n}_i^+$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) fest. Je zwei auf dieselbe Gerade  $\mathbf{a}_i$  normal stehenden Lote  $n_{i-1}$  und  $n_i$  schließen den dualen Winkel  $\underline{\nu}_i = \nu_i + \varepsilon \lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) ein. Dabei sind  $\nu_i$  die Winkel dieser Lote und  $\lambda_i$  der Abstand ihrer Fußpunkte auf der Geraden  $\mathbf{a}_i$ . Hält man  $\Sigma_4$  als Gestell fest, so ist eine Getriebestellung festgelegt, sobald man die dualen Winkel  $\underline{\nu}_j$  ( $j = 2, 3, 4$ ) als Funktion des Antriebswinkels  $\underline{\nu}_1 = \nu_1 + \varepsilon \lambda_1$  ( $\lambda_1 = \text{const.}$ ) kennt.

Zu diesem Zweck<sup>5</sup> bedienen wir uns des Satzes 15.4.3. Der duale Vektor  $\underline{\mathbf{a}}_i^\circ$  geht bei Schraubung um den zu ihm normalen Vektor  $\underline{\mathbf{n}}_i^\circ$  durch den Winkel  $\underline{\alpha}_i$  in den Vektor  $\underline{\mathbf{a}}_{i+1}^\circ$  über. Daher ist<sup>6</sup>

$$\underline{\mathbf{a}}_2^\circ = (\cos \underline{\alpha}_1 + \underline{\mathbf{n}}_1^\circ \sin \underline{\alpha}_1) \circ \underline{\mathbf{a}}_1^\circ \quad \# 20.50$$

$$\underline{\mathbf{a}}_3^\circ = (\cos \underline{\alpha}_2 + \underline{\mathbf{n}}_2^\circ \sin \underline{\alpha}_2) \circ \underline{\mathbf{a}}_2^\circ \quad \# 20.51$$

$$\underline{\mathbf{a}}_4^\circ = (\cos \underline{\alpha}_3 + \underline{\mathbf{n}}_3^\circ \sin \underline{\alpha}_3) \circ \underline{\mathbf{a}}_3^\circ \quad \# 20.52$$

$$\underline{\mathbf{a}}_1^\circ = (\cos \underline{\alpha}_4 + \underline{\mathbf{n}}_4^\circ \sin \underline{\alpha}_4) \circ \underline{\mathbf{a}}_4^\circ \quad \# 20.53$$

Ebenso findet man

$$\underline{\mathbf{n}}_2^\circ = (\cos \underline{\nu}_2 + \underline{\mathbf{a}}_2^\circ \sin \underline{\nu}_2) \circ \underline{\mathbf{n}}_1^\circ \quad \# 20.54$$

$$\underline{\mathbf{n}}_3^\circ = (\cos \underline{\nu}_3 + \underline{\mathbf{a}}_3^\circ \sin \underline{\nu}_3) \circ \underline{\mathbf{n}}_2^\circ \quad \# 20.55$$

$$\underline{\mathbf{n}}_4^\circ = (\cos \underline{\nu}_4 + \underline{\mathbf{a}}_4^\circ \sin \underline{\nu}_4) \circ \underline{\mathbf{n}}_3^\circ \quad \# 20.56$$

$$\underline{\mathbf{n}}_1^\circ = (\cos \underline{\nu}_1 + \underline{\mathbf{a}}_1^\circ \sin \underline{\nu}_1) \circ \underline{\mathbf{n}}_4^\circ \quad \# 20.57$$

Die Lage des von  $\mathbf{a}_2$  und  $n_2$  aufgespannten Systems  $\Sigma_2$ , das wir in Analogie zum ebenen und sphärischen Gelenkviereck als *Koppelsystem* bezeichnen, ist relativ zum vorhergehenden System  $\Sigma_1$  bei Kenntnis des dualen Winkels  $\underline{\nu}_2$  festgelegt. Die Relation, welche die Abhängig-

<sup>5</sup> YANG-FREUDENSTEIN [1]

<sup>6</sup> Die Orientierung wurde so gewählt, daß jeweils der Speer  $\underline{\mathbf{a}}_i^\circ$  durch eine *Rechtsschraubung* mit der Achse  $\underline{\mathbf{n}}_i^\circ$  nach  $\underline{\mathbf{a}}_{i+1}^\circ$  übergeht.

## Kapitel 20

keit dieser Größe vom *Antriebswinkel*  $v_1$  darstellt, nennen wir die *Koppelbedingung*. Um sie aufzustellen wählen wir für den Augenblick ein Hilfskoordinatensystem so, daß in ihm

$$\underline{\mathbf{a}}_1^{\circ} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{n}}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \# 20.58$$

wird. Dann ergibt die sukzessive Verwendung von #20.57,50,54 und #20.51

$$\left. \begin{aligned} \underline{\mathbf{n}}_1^{\circ} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sin v_1 \\ \cos v_1 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{a}}_2 = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 \cos v_1 \\ \sin \alpha_1 \sin v_1 \end{Bmatrix} \\ \underline{\mathbf{n}}_2^{\circ} &= \begin{Bmatrix} \sin v_2 \sin \alpha_1 \\ -\cos v_2 \sin v_1 - \sin v_2 \cos \alpha_1 \cos v_1 \\ \cos v_2 \cos v_1 - \sin v_2 \cos \alpha_1 \sin v_1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \# 20.59$$

$$\underline{\mathbf{a}}_3^{\circ} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_2 \sin \alpha_1 \cos v_2 \\ \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 \cos v_1 + \sin \alpha_2 (\cos \alpha_1 \cos v_2 \cos v_1 - \sin v_1 \sin v_2) \\ \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 \sin v_1 + \sin \alpha_2 (\sin v_2 \cos v_1 + \cos \alpha_1 \cos v_2 \sin v_1) \end{Bmatrix} \quad \# 20.60$$

Andererseits gelangt man ausgehend von #20.53 zum Vektor  $\underline{\mathbf{a}}_3^{\circ}$ . Multipliziert man nämlich #20.53 beiderseits von links mit der zu  $\cos \alpha_4 + \underline{\mathbf{n}}_4^{\circ} \sin \alpha_4$  inversen Quaternion, so erhält man

$$\underline{\mathbf{a}}_4^{\circ} = (\cos \alpha_4 - \underline{\mathbf{n}}_4^{\circ} \sin \alpha_4) \circ \underline{\mathbf{a}}_1^{\circ} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_4 \\ -\sin \alpha_4 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \# 20.61$$

Ganz ähnlich erhält man aus #20.56 und #20.52

$$\underline{\mathbf{n}}_3^{\circ} = \begin{Bmatrix} \sin v_4 \sin \alpha_4 \\ \sin v_4 \cos \alpha_4 \\ \cos v_4 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{a}}_3^{\circ} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 - \sin \alpha_3 \cos v_4 \sin \alpha_4 \\ -\cos \alpha_3 \sin \alpha_4 - \sin \alpha_3 \cos v_4 \cos \alpha_4 \\ \sin \alpha_3 \sin v_4 \end{Bmatrix} \quad \# 20.62$$

Vergleicht man die beiden ersten Koordinaten der beiden Darstellungen #20.60 und #20.62 von  $\underline{\mathbf{a}}_3^{\circ}$  und eliminiert daraus  $v_4$ , so erhält man die Koppelbedingung

$$\begin{aligned} \sin v_2 (\sin \alpha_2 \sin \alpha_4 \sin v_1) - \cos v_2 \sin \alpha_2 (\sin \alpha_1 \cos \alpha_4 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_4 \cos v_1) &= \\ = (\cos \alpha_3 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_4) + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_4 \cos v_1 & \quad \# 20.63 \end{aligned}$$

Der Realteil dieses Ausdrucks ergibt den Zusammenhang der Winkel  $v_2$  und  $v_1$ . Er ist bis auf die Bezeichnungsweise identisch mit der Koppelbedingung #13.15 für das sphärische Gelenkviereck. Der Dualteil von #20.62 ergibt die Abhängigkeit der Schiebstrecke  $\lambda_2$  von  $v_1$  und  $v_2$ <sup>7</sup>.

Um den Zusammenhang zwischen Antriebswinkel  $v_1$  und Abtriebswinkel  $v_4$  zu ermitteln, wählen wir ein Hilfskoordinatensystem derart, daß

<sup>7</sup> Explizite Darstellung dieser Beziehungen bei YANG-FREUDENSTEIN [1] und BEYER [2] S.158.ff. Man vergleiche auch DIMENTBERG [1] und DENAVIT [1]

$$\underline{\mathbf{a}}_1^{\circ} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{n}}_1^{\circ} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \# 20.64$$

ist. Berechnet man  $\underline{\mathbf{a}}_3^{\circ}$  auf zwei Arten, ausgehend von #20.50 bzw. #20.57, so ergibt der Vergleich der ersten beiden Komponenten

$$\cos \underline{\alpha}_1 \cos \underline{\alpha}_2 - \sin \underline{\alpha}_1 \sin \underline{\alpha}_2 \cos \underline{\nu}_2 = \cos \underline{\alpha}_3 \cos \underline{\alpha}_4 - \sin \underline{\alpha}_3 \sin \underline{\alpha}_4 \cos \underline{\alpha}_4 \quad \# 20.65$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \underline{\alpha}_1 \cos \underline{\alpha}_2 + \cos \underline{\alpha}_1 \sin \underline{\alpha}_2 \cos \underline{\nu}_2 = \\ = -\cos \underline{\alpha}_3 \sin \underline{\alpha}_4 \cos \underline{\nu}_1 + \sin \underline{\alpha}_3 (\sin \underline{\nu}_4 \sin \underline{\nu}_1 - \cos \underline{\alpha}_4 \cos \underline{\nu}_4 \cos \underline{\nu}_1) \end{aligned} \right\} \quad \# 20.66$$

Eliminiert man aus #20.65,66 den Winkel  $\underline{\nu}_2$ , so ergibt sich die gesuchte Beziehung zwischen An- und Abtriebswinkel:

$$\begin{aligned} \sin \underline{\nu}_4 (\sin \underline{\alpha}_1 \sin \underline{\alpha}_3 \sin \underline{\nu}_1) - \cos \underline{\nu}_4 \sin \underline{\alpha}_3 (\cos \underline{\alpha}_1 \sin \underline{\alpha}_4 + \sin \underline{\alpha}_1 \cos \underline{\alpha}_4 \cos \underline{\nu}_1) = \\ = (\cos \underline{\alpha}_2 - \cos \underline{\alpha}_1 \cos \underline{\alpha}_3 \cos \underline{\alpha}_4) + \sin \underline{\alpha}_1 \cos \underline{\alpha}_3 \sin \underline{\alpha}_4 \cos \underline{\nu}_1 \end{aligned} \quad \# 20.67$$

Um die Bahnkurve eines mit dem Koppelsystem  $\Sigma_2$  mitgeführten Punktes zu berechnen, denken wir uns das System  $\Sigma_4$  als Gestell festgehalten und auf ein Koordinatensystem  $O(x,y,z)$  bezogen, dessen Ursprung im Drehgelenk des Getriebes ist, dessen  $x$ -Achse mit  $\underline{\mathbf{a}}_1^{\circ}$ , dessen  $z$ -Achse mit  $\underline{\mathbf{n}}_4^{\circ}$  gleichorientiert ist. Das mit  $\Sigma_2$  verknüpfte Koordinatensystem  $O_3(x_3,y_3,z_3)$  hat seinen Ursprung  $O_3$  im Schnittpunkt von  $\underline{\mathbf{a}}_2$  und  $\underline{\mathbf{n}}_2$ , die  $x_3$ - bzw.  $z_3$ -Achse ist mit  $\underline{\mathbf{a}}_2^{\circ}$  bzw.  $\underline{\mathbf{n}}_2^{\circ}$  gleichorientiert (Fig.20.7). Den Übergang des Systems  $O(x,y,z)$  nach  $O_3(x_3,y_3,z_3)$  geschehe in drei Schritten:

1. Die Schraubung um  $\underline{\mathbf{a}}_1$  durch den dualen Winkel  $\underline{\nu}_1$  führt  $O(x,y,z)$  in die Lage  $O_1(x_1=y_1,z_1)$  über, deren  $z_1$ -Achse mit dem Gemeinlot  $\underline{\mathbf{n}}_1$  inzidiert. Beschrieben wird diese Schraubung im System  $O(x,y,z)$  durch die duale Quaternion

$$\underline{\mathbf{D}}_1 = \cos \frac{\underline{\nu}_1}{2} + \sin \frac{\underline{\nu}_1}{2} \cdot \underline{\mathbf{a}}_1^{\circ} \quad \# 20.68$$

2.  $O_1(x_1,y_1,z_1)$  geht durch die Schraubung mit  $\underline{\mathbf{n}}_1$  als Achse und dem dualen Winkel  $\underline{\alpha}_1$  über in die Lage  $O_2(x_2,y_2,z_2=z_1)$ , deren  $x_2$ -Achse nach  $\underline{\mathbf{a}}_2$  zu liegen kommt. Die entsprechende, auf  $O_1(x_1,y_1,z_1)$  bezogene Quaternion lautet

$$\underline{\mathbf{D}}_2 = \cos \frac{\underline{\alpha}_1}{2} + \sin \frac{\underline{\alpha}_1}{2} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1^{\circ} \quad \# 20.69$$

3. Schließlich führt die bezüglich  $O_2(x_2,y_2,z_2)$  durch

$$\underline{\mathbf{D}}_3 = \cos \frac{\underline{\nu}_2}{2} + \sin \frac{\underline{\nu}_2}{2} \cdot \underline{\mathbf{a}}_2^{\circ} \quad \# 20.70$$

gekennzeichnete Schraubung ( $\underline{\mathbf{a}}_2$  als Achse, dualer Schraubwinkel  $\underline{\nu}_2$ ) das Koordinatensystem in die Endlage  $O_3(x_3=x_2,y_3,z_3)$  über.

Ein mit  $O_3(x_3,y_3,z_3)$  starr verbundenener Punkt  $\underline{\mathbf{X}}$  hat dann in  $O_2(x_2,y_2,z_2)$  die Koordinaten

$$\underline{\mathbf{X}}_2 = \underline{\mathbf{D}}_3 \circ \underline{\mathbf{X}} \circ \underline{\mathbf{D}}_{3e} \quad \# 20.71$$

Dieser Punkt wird in  $O_1(x_1,y_1,z_1)$  durch

$$\underline{\mathbf{X}}_1 = \underline{\mathbf{D}}_2 \circ \underline{\mathbf{X}}_2 \circ \underline{\mathbf{D}}_{2e} \quad \# 20.72$$

beschrieben. Die Darstellung der Bahnkurve von  $\underline{\mathbf{X}}$  in  $O(x,y,z)$  lautet schließlich

$$\bar{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{D}}_1 \circ \underline{\mathbf{X}}_1 \circ \underline{\mathbf{D}}_{1e} = \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{X}} \circ \underline{\mathbf{D}}_e \quad \# 20.73$$

wobei wegen #20.68-70 gilt

$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{D}}_1 \circ \underline{\mathbf{D}}_2 \circ \underline{\mathbf{D}}_3 = \cos \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} + \begin{Bmatrix} \cos \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \\ \sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \\ \sin \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \end{Bmatrix} \quad \# 20.74$$

Die Beziehung zwischen  $\nu_1$  und  $\nu_2$  wird durch die Koppelbedingung #20.63 festgelegt.

Totlagen des abgetriebenen Gliedes  $\Sigma_3$  treten ein, wenn beim zugeordneten Gelenkviereck auf der dualen Kugel die Bildpunkte  $\underline{\mathbf{a}}_1^o$ ,  $\underline{\mathbf{a}}_2^o$ ,  $\underline{\mathbf{a}}_3^o$  auf demselben dualen Kugelgroßkreis zu liegen kommen. In diesem Falle muß  $\nu_2$  die Werte  $\pm 1$  annehmen. Für die Totlagenwinkel des Abtriebs findet man somit aus #20.65

$$\cos \nu_{4t} = \frac{\cos \alpha_3 \cos \alpha_4 - \cos(\alpha_1 \pm \alpha_2)}{\sin \alpha_3 \sin \alpha_4} \quad \# 20.75$$

Ähnlicher ergibt sich für die Totlagen des Antriebswinkels  $\nu_1$ <sup>8</sup>.

Um die relativen Schraubachsen des betrachteten Getriebes aufzusuchen, bedienen wir uns des Satzes 20.1.1.1. Zunächst sind die Relativachsen  $\mathbf{a}_{41}$ ,  $\mathbf{a}_{12}$ ,  $\mathbf{a}_{23}$  und  $\mathbf{a}_{34}$  unmittelbar bekannt. Nach dem genannten Satz muß die Momentanachse  $\mathbf{a}_{24}$  der Bewegung des Koppelsystems  $\Sigma_2$  gegen das Gestell  $\Sigma_4$  sowohl dem von  $\mathbf{a}_{23}$  und  $\mathbf{a}_{34}$  als auch dem von  $\mathbf{a}_{14}$  und  $\mathbf{a}_{12}$  aufgespannten Normalennetz angehören.  $\mathbf{a}_{24}$  ist daher das Gemeinlot von  $\mathbf{n}_1$  und  $\mathbf{n}_3$ . Analog ist die Relativachse  $\mathbf{a}_{31}$  das Gemeinlot von  $\mathbf{n}_4$  und  $\mathbf{n}_2$ .

### 20.3.2 Getriebe von Typ 0D1K2D3Z0

Ein anderes viergliedriges zwangsläufiges Getriebe vom Typ 0D1K2D3Z0 (vgl. Kap. 18.4.1) wird in Fig. 20.8 dargestellt. Wir wollen die Momentanachse der Bewegung des Koppelsystems  $\Sigma_2$  gegen das ruhende System  $\Sigma_0$  ermitteln. Da der Mittelpunkt A des Kugelgelenkes eine Kreisbahn beschreibt, ist die Normalebene  $\alpha$  auf die Bahntangente  $\mathbf{t}_A$  dieses Punktes eine

**Figur 20.8** Nullebene des momentanen Nullsystems. Andererseits kann man die Bewegung von  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_0$  zusammensetzen aus der Führungsbewegung von  $\Sigma_3$  gegen  $\Sigma_0$  um die Momentanachse  $\mathbf{a}_{30}$  und der Relativdrehung von  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_3$  um die Achse  $\mathbf{a}_{23}$ . Nach Satz 20.1.1.1 muß daher  $\mathbf{a}_{20}$  das Gemeinlot  $\mathbf{n}$  von  $\mathbf{a}_{23}$  und  $\mathbf{a}_{30}$  orthogonal schneiden. Nach Satz 16.3.15 ist jede  $\mathbf{a}_{30}$  orthogonal schneidende Gerade ein Nullstrahl der Führungsbewegung, nach Satz 16.3.18 jede Treffgerade von  $\mathbf{a}_{23}$  ein Nullstrahl der Relativbewegung. Aus Satz 20.1.1.2 ergibt sich demnach, daß jede  $\mathbf{a}_{30}$  orthogonal schneidende und  $\mathbf{a}_{23}$  treffende Gerade ein Nullstrahl der Absolutbewegung ist. Wählen wir daher drei beliebige dieser Nullstrahlen aus - darunter jedenfalls die Gerade  $\mathbf{n}$  -, so ist das momentane Nullsystem der Koppelbewegung zusammen mit dem Nullpunkt A und der Nullebene  $\alpha$  nach Kap. 6.4.2 festgelegt. Bestimmt man nach Fig. 16.8 mit Hilfe der beiden von  $\mathbf{n}$  verschiedenen Nullstrahlen  $\mathbf{s}_1$  und  $\mathbf{s}_2$  zwei reziproke Polare  $\mathbf{m}$ ,  $\bar{\mathbf{m}}$ , so trifft  $\mathbf{a}_{20}$  deren Gemeinlot sowie  $\mathbf{n}$  orthogonal.

Der Schraubparameter  $p_{20}$  ergibt sich nach Kap. 16.1.3, Fig. 16.1 mit Hilfe der momentanen Schraubtangente  $\mathbf{t}_A$ .

<sup>8</sup> Man vergleiche DUFFY-GILMARTIN [1]

Da  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_1$  eine sphärische Bewegung mit dem Zentrum  $A$  ausführt, muß die Relativachse  $\mathbf{a}_{12}$  durch  $A$  gehen. Außerdem schneidet sie das Gemeinlot von  $\mathbf{a}_{10}$  und  $\mathbf{a}_{20}$  nach Satz 20.1.1.1 orthogonal.  $\mathbf{a}_{13}$  ergibt sich als Gemeinlot der Gemeinlote von  $\mathbf{a}_{12}$  und  $\mathbf{a}_{23}$  bzw. von  $\mathbf{a}_{10}$  und  $\mathbf{a}_{30}$ .

### 20.3.3 Getriebe vom Typ 0D1K2D3D4D0

Das in Fig. 20.9 dargestellte fünfgliedrige Getriebe liegt der Schüttelmaschine von Fig. 18.11.1 zugrunde. Wir wollen die Momentanachse  $\mathbf{a}_{20}$  der Bewegung des Schüttelkastens  $\Sigma_2$  ermitteln. Zu diesem Zweck beachten wir, daß die drei Punkte  $K, A, B$  des Getriebes immer derselben, mit  $\Sigma_4$  fest verbundenen, die Relativachse  $\mathbf{a}_{40}$  enthaltenden Ebene  $\pi$  angehören. Das durch die Antriebskurbel gebildete System  $\Sigma_1$  hat nur den Punkt  $K$  mit  $\pi$  gemeinsam.

**Figur 20.9**

In Fig. 20.9 stellt die Ebene  $\pi$  die Bildebene eines Schrägrisses dar, die Relativachsen  $\mathbf{a}_{34}$  und  $\mathbf{a}_{23}$  stehen auf  $\pi$  normal. Da die Relativbewegung von  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_3$  und von  $\Sigma_3$  gegen  $\Sigma_4$  Drehungen um die parallelen Achsen  $\mathbf{a}_{23}$  bzw.  $\mathbf{a}_{34}$  sind, ist nach Kap. 20.2.3 die Bewegung von  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_4$  ebenfalls eine Drehung, deren Achse  $\mathbf{a}_{24}$  zu den genannten Drehachsen parallel sein muß und in der von ihnen aufgespannten Ebene liegt.

Um  $\mathbf{a}_{24}$  zu lokalisieren, betrachten wir die in  $\pi$  verlaufende Relativbahn des  $\Sigma_2$  angehörenden Punktes  $K$  gegen  $\Sigma_4$ . Da  $\mathbf{a}_{10}$  und  $\mathbf{a}_{40}$  einander in dem während der ganzen Bewegung festen Punkt  $M$  schneiden, verbleibt der Punkt  $K$  bei der Relativbewegung von  $\Sigma_1$  gegen  $\Sigma_4$  auf einer Kugeloberfläche mit der Mitte  $M$ , seine Bahn in  $\pi$  ist daher ein Kreis mit der Mitte  $M$ . Seine Bahnnormale  $(KM)$  trifft mithin die Gerade  $(AB)$  im Schnittpunkt  $C$  von  $\mathbf{a}_{24}$  mit  $\pi$ . Da die Bewegung von  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_0$  das Ergebnis der Zusammensetzung der Drehungen um  $\mathbf{a}_{40}$  und  $\mathbf{a}_{24}$  ist, sind diese beiden Geraden nach Satz 20.2.2.1 reziproke Polare der resultierenden Schraubung. Deren Achse  $\mathbf{a}_{20}$  trifft nach Satz 16.3.16 das Gemeinlot  $n$  von  $\mathbf{a}_{40}$  und  $\mathbf{a}_{24}$  unter rechtem Winkel.

Da die absolute Bahn von  $K$  der Kreis um  $\mathbf{a}_{10}$  ist, ist deren Normalebene  $\kappa$  die Nullebene dieses Punktes. Die Nullebene  $\varepsilon$  eines beliebigen Punktes  $E$  von  $\mathbf{a}_{24}$  ist nach Satz 16.3.1 dessen Verbindungsebene mit  $\mathbf{a}_{40}$ . Da nach demselben Satz die Verbindungslinie  $m = (KE)$  und die Schnittgerade  $\bar{m} = \kappa \cap \varepsilon$  reziproke Polare sind, schneidet deren Gemeinlot  $\mathbf{a}_{20}$  orthogonal. Damit ist  $\mathbf{a}_{20}$  festgelegt.

## 20.4 Übergeschlossene Systeme mit lauter Drehgelenken<sup>9</sup>

### 20.4.1 Viergliedrige Getriebe

Ein viergliedriges Getriebe, dessen vier Systeme  $\Sigma_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) durch Drehgelenke miteinander verknüpft sind, ist nach #18.45 starr.

Wäre  $\Sigma_3$  gegen das als Gestell festgehaltene System  $\Sigma_0$  beweglich, so müßte, in naheliegender Verallgemeinerung von #20.1, gelten

$$\bar{\omega}_{30} = \bar{\omega}_{32} + \bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{10} \quad \# 20.76$$

worin die  $\bar{\omega}_{ik}$  die Relativbewegungen aufeinanderfolgender Systeme beschreiben. Da dies nach Voraussetzung lauter Drehungen sein sollen, muß nach #17.24,25 für die Relativachsen gelten

$$\omega_{30} \mathbf{a}_{30}^{\circ} = \omega_{32} \mathbf{a}_{32}^{\circ} + \omega_{21} \mathbf{a}_{21}^{\circ} + \omega_{10} \mathbf{a}_{10}^{\circ} \quad \# 20.77$$

---

<sup>9</sup> RITTERSHAUS [1], BRICARD [2], Tome II, S.314 ff., HUNT [1]

worin die  $\omega_{ik}$  *reell* sind. Nach Satz 3.2.3.4 gehören momentan alle vier Drehachsen derselben Erzeugendenschar einer Strahlfläche 2. Ordnung an. Im nächsten Augenblick wird dies aber i.a. nicht mehr der Fall sein, sodaß bei momentaner Erfüllung von #20.77 eine bloß infinitesimale Beweglichkeit vorliegt. Solche Systeme nennt man *wackelig*.

Ist #20.77 in jedem Augenblick erfüllt, so liegt ein stetig bewegliches Getriebe mit vier Drehgelenken vor (BENNETsches Isogramm).

### 20.4.2 Fünfgliedrige Getriebe

Auch ein Getriebe, bei dem fünf Systeme  $\Sigma_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ) durch Drehgelenke verbunden sind, wird i.a. starr sein. Infinitesimale Beweglichkeit liegt dann vor, wenn die fünf Drehachsen momentan der Bedingung genügen

$$\omega_{40} \underline{\mathbf{a}}_{40}^{\circ} = \omega_{43} \underline{\mathbf{a}}_{43}^{\circ} + \omega_{32} \underline{\mathbf{a}}_{32}^{\circ} + \omega_{21} \underline{\mathbf{a}}_{21}^{\circ} + \omega_{10} \underline{\mathbf{a}}_{10}^{\circ} \quad \# 20.78$$

Sie gehören dann nach Satz 3.2.3.5 demselben Strahlnetz an.

Ist #20.78 in jedem Augenblick erfüllt, so liegen stetig bewegliche fünfgliedrige Getriebe vor (z.B. die von GOLDBERG).

### 20.4.3 Sechsgliedrige Getriebe

Damit ein sechsgliedriges Getriebe mit lauter Drehgelenken momentan beweglich ist, müssen deren Achsen die Bedingung

$$\omega_{50} \underline{\mathbf{a}}_{50}^{\circ} = \omega_{54} \underline{\mathbf{a}}_{54}^{\circ} + \omega_{43} \underline{\mathbf{a}}_{43}^{\circ} + \omega_{32} \underline{\mathbf{a}}_{32}^{\circ} + \omega_{21} \underline{\mathbf{a}}_{21}^{\circ} + \omega_{10} \underline{\mathbf{a}}_{10}^{\circ} \quad \# 20.79$$

erfüllen. Die fünf Geraden  $\underline{\mathbf{a}}_{i,i-1}^{\circ}$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) auf der rechten Seite von #20.79 bestimmen ein Gewinde  $\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}$  (siehe Kap. 16.4.3), sodaß für jede der fünf genannten Achsen gilt

$$\underline{\mathbf{a}}_{i,i-1}^{\circ} \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a}_{i,i-1}^+ \mathbf{a} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad \# 20.80$$

Multipliziert man den Realteil von #20.79 skalar mit  $\hat{\mathbf{a}}$ , den Dualteil mit  $\mathbf{a}$  und summiert auf, so erkennt man, daß wegen #20.80 auch  $\underline{\mathbf{a}}_{50}^{\circ}$  diesem Gewinde angehört.

Der in Kap. 18.6.3, Fig. 18.21 behandelte BRICARDsche Mechanismus erfüllt diese Bedingung in jedem Augenblick in trivialer Weise, da alle Achsen die Verbindungsgerade der Punkte  $O$  und  $O_1$  treffen, mithin einem ausgearteten Gewinde angehören. Die sechs Drehachsen der BRICARDschen Oktaeder (Kap. 18.6.4) sind hingegen Strahlen eines nicht ausgearteten Gewindes.

## 21 Duale sphärische Radlinien

### 21.1 Interpretation im Reellen

Wir wollen die phärischen Radlinien der reellen Kugel (Kap.11.3) ins Duale übertragen. Um den Nordpol  $\underline{N}$

$$\underline{n}^o = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \# 21.1$$

der dualen Kugel drehe sich ein durch den dualen Meridiankreis  $\underline{k}_1$  festgelegtes System  $\Sigma_1$  mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit

$$\underline{\omega}_{10} = \omega_{10}(1 + \varepsilon p_{10}) \quad \# 21.2$$

(siehe #17.24) gegenüber dem festen System  $\Sigma_0$ . Der auf  $\underline{k}_1$  mitgeführte Punkt  $\underline{M}$  habe von  $\underline{N}$  den konstanten sphärischen Abstand

$$\underline{a} = a + \varepsilon \hat{a} \quad \# 21.3$$

Um  $\underline{M}$  verdrehe sich das durch den dualen Großkreis  $\underline{k}_2$  repräsentierte System  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_1$  mit der konstanten relativen Winkelgeschwindigkeit

$$\underline{\omega}_{21} = \omega_{21}(1 + \varepsilon p_{21}) \quad \# 21.4$$

Fallen  $\underline{k}_1$  und  $\underline{k}_2$  in der Anfangslage in die  $xy$ -Ebene des mit  $\Sigma_0$  verbundenen Koordinatensystems  $O(x,y,z)$ , so hat sich  $\Sigma_1$  gegen  $\Sigma_2$  zum Zeitpunkt  $t$  um den Winkel

$$\underline{\alpha} = \alpha + \varepsilon \hat{\alpha} = \underline{\omega}_{10} t \quad \# 21.5$$

und  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_1$  um den Winkel

$$\underline{\beta} = \beta + \varepsilon \hat{\beta} = \underline{\omega}_{21} t \quad \# 21.6$$

verdreht. Die Raumlage des Punktes  $\underline{M}$  zum Zeitpunkt  $t$  wird daher durch

$$\underline{m}^o = \begin{Bmatrix} \sin \underline{a} \cos(\underline{\omega}_{10} t) \\ \sin \underline{a} \sin(\underline{\omega}_{10} t) \\ \cos \underline{a} \end{Bmatrix} \quad \# 21.7$$

bestimmt.

Die Vektoren der Winkelgeschwindigkeiten der dualen Führungs- bzw. Relativgeschwindigkeit sind dann (vgl. #11.20,19)

$$\underline{\omega}_{10} = \omega_{10} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\omega}_{21} = \omega_{21} \begin{Bmatrix} \sin \underline{a} \cos(\underline{\omega}_{10} t) \\ \sin \underline{a} \sin(\underline{\omega}_{10} t) \\ \cos \underline{a} \end{Bmatrix} \quad \# 21.8$$

Der dualen Drehung des sphärischen Systems  $\Sigma_1$  entspricht im Raum eine Schraubung (Parameter  $p_{10}$ , Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{10}$ ) um die mit der  $z$ -Achse zusammenfallende,  $\underline{N}$

entsprechende Gerade  $n$ . Um die dem System  $\Sigma_1$  angehörende,  $\underline{M}$  entsprechende Gerade  $m$  verschraubt sich (Parameter  $p_{21}$ , Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{21}$ ) das System  $\Sigma_2$ . Fig.21.1. zeigt die gegenseitige Lage dieser Systeme. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  nehme  $m$

**Figur 21.1**

die Lage  $m_0$  ein, die Ausgangslage eines mit  $\Sigma_2$  verbundenen Koordinatensystems sei  $O_{30}(x_{30}, y_{30}=y, z_{30}=m_0)$ , dessen  $y_0$ -Achse mit der  $y$ -Achse des festen Koordinatensystems  $O(x,y,z)$  inzidiert und dessen  $z$ -Achse immer in der Geraden  $m$  liege. Zum Zeitpunkt  $t$  nimmt

$O(x,y,z)$  inzidiert und dessen  $z$ -Achse immer in der Geraden  $m$  liege. Zum Zeitpunkt  $t$  nimmt

## Kapitel 21

das mit  $\Sigma_2$  verbundene Koordinatensystem die Lage  $O_3(x, y, z)$  ein. Die Systeme  $O_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $O_2(x_2, y_2, z_2)$  stellen jene Zwischenlagen dar, die das Koordinatensystem  $O(x, y, z)$  bei sukzessiver Überführung nach  $O_3(x, y, z)$  durchläuft (man vergleiche den analogen Vorgang in Kap. 11.1, Formeln #11.3-10).

Für die Absolutbewegung des Systems  $\Sigma_2$  ergibt die Übertragung von #11.21 ins Duale

$$\bar{\omega}_{20} = \bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{10} = \begin{Bmatrix} \omega_{21} \sin a \cos(\omega_{10} t) \\ \omega_{21} \sin a \cos(\omega_{10} t) \\ \omega_{10} + \omega_{21} \cos a \end{Bmatrix} \quad \# 21.9$$

Im Raum stellt die Trägergerade  $\mathbf{g}$  von  $\bar{\omega}_{20}$  eine Erzeugende des durch  $\bar{\omega}_{21}$  und  $\bar{\omega}_{10}$  bestimmten PLÜCKER-Konoids dar. Die Übertragung von #11.16 ins Duale

$$\tan \underline{a}_1 = \frac{\omega_{21} \sin a}{\omega_{10} + \omega_{21} \cos a} \quad \# 21.10$$

lehrt, daß der Abstand

$$\underline{a}_1 = a_1 + \varepsilon \hat{a}_1 \quad \# 21.11$$

von  $n$  und der Achse  $\mathbf{g}$  von  $t$  unabhängig ist. Das Rastaxoid ist daher eine Strahlschraubfläche mit der Achse  $n$  und dem Schraubparameter  $p_{10}$ . Analog ist das Gangaxoid eine Strahlschraubfläche, deren Achse  $m$  und deren Parameter  $p_{21}$  ist. Ihre Erzeugenden schließen mit der Achse  $m$  (vgl #11.22) den dualen Winkel

$$\underline{a}_1 = \underline{a} - \underline{a}_2 \quad \# 21.12$$

ein.

Nach #16.117 ist der gemeinsame Drall der Axoide

$$d_p = \hat{a}_1 \cot a_1 + p_{10} \quad \# 21.13$$

Wegen #20.30 ist aber

$$\hat{a}_1 \sin a \cot a_1 = (p_{21} - p_{10}) \cos a_1 \sin a_2 + \hat{a} \cos a_1 \cos a_2 \quad \# 21.14$$

Damit erhält #21.13 die Gestalt

$$d_p = \frac{p_{21} \cos a_1 \sin a_2 + p_{10} \sin a_1 \cos a_2 + \hat{a} \cos a_2 \cos a_1}{\sin a} \quad \# 21.15$$

Im Zähler von #21.15 wurde mit Hilfe von

$$a = a_1 + a_2 \quad \# 21.16$$

der Winkel  $a$  eliminiert. Aus #20.35 folgt dann

$$d_p + p_{20} = p_{21} + p_{10} + \hat{a} \cot a \quad \# 21.17$$

wobei wieder von #21.16 Gebrauch gemacht wurde.

### 21.2 Axoide

#### **Figur 21.2**

In Fig. 21.2 wurde nach Kap. 20.1.4 die Schraubachse  $\mathbf{g}$  der Absolutbewegung sowie deren Parameter  $p_{20}$  aus der gegebenen Führungsbewegung ( $n$ ,  $p_{10}$ ) sowie der Relativbewegung ( $m$ ,  $p_{21}$ ) ermittelt. Um den Drall  $d_p$  #21.17 der Axoide zu

## Duale sphärische Radlinien

ermitteln, spiegeln wir die Parameter-achse  $h$  am Mittelpunkt des Bildkreises. Der Abstand des Endpunktes  $A_{20}$  der Parameterstecke  $p_{20}$  von der gespiegelten Geraden  $h'$  stellt die geforderte Strecke  $d_p$  dar<sup>1</sup>.

Beweis: Ist  $U$  die Projektion des Punktes  $A_{21}$  auf  $n''$  und  $V$  der von  $A_{10}$  verschiedene Schnittpunkt von  $n''$  mit dem Bildkreis, so ist  $UV = \hat{a} \cdot \cot \alpha$ . Trägt man auf  $n''$  von  $V$  aus  $p_{10}$  vorzeichenrichtig ab, so gelangt man zu einem Punkt von  $h'$  und es ist wegen #21.17

$$hh' = hU + UV + Vh' = p_{21} + \hat{a} \cot \alpha + p_{10} = p_{20} + d_p \quad \# 21.18$$

w.z.b.w.

Fällt (bei entsprechender Wahl von  $\bar{\omega}_{10}$  und  $\bar{\omega}_{21}$ ) der Bildpunkt  $G_1$  der Schraubachse  $g_1$  der Absolutbewegung in einen der Schnittpunkte von  $h$  mit dem Bildkreis, so verschwindet der resultierende Parameter  $p_1$  und die Axoide sind aufeinander abrollende Strahlschraubflächen mit den Drall  $d_{p1}$ .

Fällt der Bildpunkt  $G_2$  der Schraubachse  $g_2$  der Absolutbewegung in einen der Schnittpunkte des Bildkreises mit  $h'$ , so verschwindet der Drall  $d_{p2}$  der Axoide. Hier liegen mit dem Parameter  $p_2$  aufeinander abschrotende Schraubtorsen vor.

Sollen die Axoide aufeinander rollende Schraubtorsen sein, hat man die Annahme so zu treffen, daß  $h = h'$  in einen Durchmesser des Bildkreises fällt. Der Bildpunkt der Momentanachse ist dann einer der beiden Schnittpunkte von  $h$  mit dem Bildkreis.

### 21.3 Schraublinien höherer Stufe (Helikoiden)

Ein mit  $\Sigma_2$  mitgeführter Raumpunkt beschreibt eine Raumkurve, die wir in Analogie zur Ebene<sup>2</sup> und zur Kugel als *Schraublinien 2. Stufe* bezeichnen wollen.

Die Übertragung von #11.10 ins Duale ergibt

$$\underline{D} = \cos \frac{a}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2} + \begin{pmatrix} \sin \frac{a}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \\ \sin \frac{a}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \\ \cos \frac{a}{2} \sin \frac{\beta + \alpha}{2} \end{pmatrix} = \underline{D} + \varepsilon \underline{D}^* \quad \# 21.19$$

Der Realteil  $\underline{D}$  von #21.19 ist mit #11.10 identisch. Für den Dualteil findet man

$$\underline{D}^* = - \left( \frac{\hat{a}}{2} \sin \frac{a}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\hat{\alpha} + \hat{\beta}}{2} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \begin{pmatrix} \frac{\hat{a}}{2} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\alpha}}{2} \sin \frac{a}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \\ \frac{\hat{a}}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} - \frac{\hat{\beta} - \hat{\alpha}}{2} \sin \frac{a}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \\ - \frac{\hat{a}}{2} \sin \frac{a}{2} \sin \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\hat{\beta} + \hat{\alpha}}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \end{pmatrix} \quad \# 21.20$$

<sup>1</sup> DISTELI [1]

<sup>2</sup> WUNDERLICH [1]; HOHENBERG [1] bezeichnet diese Kurven als *Helikoiden*. Dementsprechend nennt er die vorliegende Bewegung *Helikoidenbewegung*.

## Kapitel 21

Der mit  $\Sigma_2$  mitgeführte Punkt, sei, bezogen auf  $O_3(x_3, y_3, z_3)$ , durch den konstanten Ortsvektor  $\mathbf{x}'$  festgelegt. Dann ist nach #15.21.2 dieser Punkt im festen System  $O(x, y, z)$  durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x}' \circ \tilde{\mathbf{D}} + 2\mathbf{D}^* \circ \tilde{\mathbf{D}} \quad \# 21.21$$

bestimmt. Nach #11.10 und #21.20 ist

$$2\mathbf{D}^* \circ \tilde{\mathbf{D}} = \begin{Bmatrix} -\hat{a} \sin \alpha \\ \hat{a} \cos \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \hat{\beta} \sin a \cos \alpha \\ \hat{\beta} \sin a \sin \alpha \\ \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cos a \end{Bmatrix} \quad \# 21.22$$

Setzen wir

$$\mathbf{x}_1 = \begin{Bmatrix} -\hat{a} \sin \alpha \\ \hat{a} \cos \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{Bmatrix} \hat{\beta} \sin a \cos \alpha \\ \hat{\beta} \sin a \sin \alpha \\ \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cos a \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{D} \circ \mathbf{x}' \circ \tilde{\mathbf{D}} \quad \# 21.23$$

so wird  $\mathbf{x}$  durch die Vektorsumme

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \quad \# 21.23$$

dargestellt. Hier ist  $\mathbf{x}_1$  der in der  $xy$ -Ebene liegende *Leitkreis*, während  $\mathbf{x}_2$  die *Leitspirale* beschreibt. Sie ist eine *konische Spirale*, die aus dem Drehkegel mit der Spitze  $O$ , der  $z$ -Achse als Drehachse und dem halben Öffnungswinkel

$$\tan \psi = \frac{\rho_{21} \sin a_1 \sin a}{\rho_{10} \sin a_2 + \rho_{21} \sin a_1 \cos a} \quad \# 21.24$$

durch jene Wendelfläche ausgeschnitten wird, die durch Verschraubung der  $x$ -Achse um die  $z$ -Achse mit dem Schraubparameter

$$p_w = \rho_{10} + \rho_{21} \frac{\sin a_1 \cos a}{\sin a_2} \quad \# 21.25$$

entsteht. Schließlich stellt  $\mathbf{x}_3$  jene sphärische Radlinie dar, welche auf der Kugel mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Radius  $r = |\mathbf{x}'|$  beschrieben wird, wenn der Richtkegel des Gangaxoids (halber Öffnungswinkel  $a_2$ ) auf dem Richtkegel des Rastaxoids (Achse ist die  $z$ -Achse, halber Öffnungswinkel  $a_1$ ) abrollt und dabei der Vektor  $\mathbf{x}'$  mitgenommen wird. Dabei denken wir uns das System  $O_{30}(x_{30}, y_{30}, z_{30})$  samt dem darin befindlichen Vektor  $\mathbf{x}'$  parallel verschoben, daß  $O_{30}$  mit  $O$  zur Deckung kommt und der genannten sphärischen Bewegung unterworfen wird.

$\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  hängen bloß von der Bewegung selbst ab, nur in  $\mathbf{x}_3$  geht auch der mitgeführte Punkt ein. Die Konstruktion der Helikoiden durch Ausführung der Vektoraddition #21.24 wurde von HOHENBERG a.a.O. empfohlen.

Führt man mit dem bewegten System eine Gerade mit, so stellt die überstrichene Strahlschraubfläche das räumliche Analogon zu sphärischen Radlinien dar. Wir bezeichnen sie als *Strahlschraubfläche 2. Stufe* (HOHENBERG nennt sie *Helikoidenstrahlfläche*). Man könnte sie konstruieren, indem man die Helikoide eines ihrer Punkte ermittelt und dann den Richtkegel der Fläche aufsucht. Dieser ergibt sich, wenn man die Parallele zur gegebenen Geraden durch  $O$  der genannten sphärischen Bewegung unterwirft.

## 22 Verzahnung von Hyperboloidrädern

Im festen System  $\Sigma_0$  seien zwei windschiefe Achsen  $n$  und  $m$  gelagert, deren Abstand und Winkel durch

$$\underline{a} = a + \varepsilon \hat{a} \quad \# 22.1$$

gegeben sei. Um  $n$  drehe sich das System  $\Sigma_1$  mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{10}$ . Diese Drehung möge auf die Drehung eines Systems  $\Sigma_2$  um  $m$  mit vorge-schriebener konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{20}$  übertragen werden. Sind die beiden Drehachsen durch  $\underline{n}^\circ$ ,  $\underline{m}^\circ$  festgelegt, gilt für die genannten Drehungen

**Figur 22.1**

$$\underline{\omega}_{10} = \omega_{10} \underline{n}^\circ, \quad \underline{\omega}_{20} = \omega_{20} \underline{m}^\circ \quad \# 22.2$$

Die Momentanachse  $g$  der Relativbewegung von  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_1$  ist dann nach #18.8 durch

$$\underline{\omega}_{21} = \underline{\omega}_{20} - \underline{\omega}_{10} \quad \# 22.3$$

gekennzeichnet.  $g$  ist eine Erzeugende des durch #22.2 bestimmten PLÜCKER-Konoids  $\Pi$ , deren konstruktive Ermittlung in Fig.22.1 dargestellt ist.

Die Axoide der Relativbewegung sind jene *Drehyperboloide*, die durch Rotation von  $g$  um  $n$  bzw.  $m$  entstehen. Sie schroten mit den Parameter  $p_{21}$  (in Fig.22.1 ist  $p_{21} < 0$ ) aufeinander ab. Es ist unmöglich, die Annahme so zu treffen, daß ein Abrollen stattfindet, da bei der durch #22.2 auf  $\Pi$  vorgegebenen Parameterverteilung die nach Satz 20.2.1.3 möglichen zwei Drehungen für die Erzeugenden  $n$  und  $m$  verbraucht sind.

Die genannten Hyperboloide dienen als Grundkörper für Zahnräder, die der kraftschlüssigen Drehungsübertragung von  $n$  auf  $m$  dienen und für die wir eine zweckdienliche Verzahnung konstruieren wollen. Wie bei Stirn- und Kegelrädern können wir im Prinzip die Flankenfläche in  $\Sigma_2$  beliebig vorgeben und das Gegenprofil als Hüllfläche bei der Relativbewegung von  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_1$  ermitteln. In jedem Augenblick berühren einander die Flankenflächen entlang der Charakteristik (vgl. Kap.16.6.2). Daraus folgt

**Satz 22.1** Die gemeinsamen Flächennormalen beider Zahnflanken entlang der Charakteristik gehören in jedem Augenblick dem der Relativschraubung von  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_1$  zugeordneten Gewinde (Achse  $a$ , Parameter  $p_{21}$ ) an.

Es ist dies die räumliche Verallgemeinerung des Grundgesetzes der ebenen und sphärischen Verzahnung<sup>1</sup>.

Der Ort der Charakteristiken im festen System  $\Sigma_0$  ist die *Eingriffsfläche*.

Wir wollen uns hier auf jenen Fall beschränken, bei dem die Zahnflanken beider Räder *Strahlflächen* sind, die einander in jedem Augenblick längs einer Erzeugenden berühren<sup>2</sup>.

Zur Aufsuchung richtig funktionierender Zahnflanken bedienen wir uns des STUDYschen Übertragungsprinzips. Dem Abschroten der Grundhyperboloide entspricht auf der dualen Kugel das duale Abrollen zweier Kreise mit den sphärischen Mittelpunkten  $\underline{n}^\circ$  und  $\underline{m}^\circ$  (vgl. Kap.19.1.1). Die dualen Kreise berühren einander in dem der Relativachse  $g$  entsprechenden Punkt

$$\underline{g}^\circ = \frac{\underline{\omega}_{21}}{\underline{\omega}_{21}} \quad \# 22.4$$

<sup>1</sup> WUNDERLICH [5] S.204 und Satz 14.1.1

<sup>2</sup> Eine allgemeine Theorie der räumlichen Verzahnung bei OLIVIER [1] und DYSON [1]. Man vergleiche auch TRIER [1]

## Kapitel 22

und haben dort, dem Abschrotten der räumlichen Hyperboloide entsprechend, dieselbe duale Polwechselgeschwindigkeit

$$\underline{\mathbf{v}}_p = \underline{\omega}_{10} \times \underline{\mathbf{g}}^\circ = \underline{\omega}_{20} \times \underline{\mathbf{g}}^\circ = \frac{\underline{\omega}_{10} \times \underline{\omega}_{20}}{\underline{\omega}_{21}} \quad \# 22.5$$

Wir wollen den einfachsten Fall der sphärischen Verzahnung, die Zykloidenverzahnung (Kap.2.2), auf die duale Kugel übertragen. Wir wählen daher als Hilfspolkurve einen dualen Kreis, dessen Mittelpunkt  $\underline{\mathbf{h}}^\circ$  in der Ausgangslage auf dem  $\underline{\mathbf{n}}^\circ$  und  $\underline{\mathbf{m}}^\circ$  verbindenden dualen Großkreis liege. Drehen wir das System  $\Sigma_1$  um  $\underline{\mathbf{n}}^\circ$  mit der dualen Winkelgeschwindigkeit  $\underline{\omega}_{10}$ , so induziert dies eine duale Drehung der Hilfspolkurve um ihren Mittelpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\underline{\omega}_{h0}$ . Ein Punkt des mit der Hilfspolkurve verknüpften Systems  $\Sigma_h$  beschreibt dann beim dualen Abrollen auf jedem der beiden Polkreise Flanken der dualen sphärischen Zahnräder.

Für die Relativbewegung von  $\Sigma_h$  gegen  $\Sigma_1$  gilt analog zu #22.3

$$\underline{\omega}_{h1} = \underline{\omega}_{h0} - \underline{\omega}_{10} \quad \# 22.6$$

Damit das in Satz 22.1 formulierte Grundgesetz der räumlichen Verzahnung erfüllt ist, muß die durch  $\underline{\omega}_{h1}$  festgelegte Schraubung nach Satz 16.5.1 bis auf einen reellen Faktor mit #22.3 übereinstimmen, sodaß gilt

$$\underline{\omega}_{h1} = \underline{\omega}_{h0} - \underline{\omega}_{10} = \lambda \underline{\omega}_{21} = \lambda (\underline{\omega}_{20} - \underline{\omega}_{10}) \quad \# 22.7$$

Daher ist

$$\underline{\omega}_{h0} = \lambda \underline{\omega}_{20} + (1 - \lambda) \underline{\omega}_{10} \quad \# 22.8$$

Die Drehung von  $\Sigma_2$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\underline{\omega}_{20}$  erteilt wegen #22.5 dem System  $\Sigma_h$  der Hilfspolkurve um deren Mittelpunkt gleichfalls die Winkelgeschwindigkeit  $\underline{\omega}_{h0}$ . Auch  $\underline{\omega}_{h2}$  muß bis auf einen reellen Faktor mit #22.3 übereinstimmen. Analog zu #22.7 ist also

$$\underline{\omega}_{2h} = \mu \underline{\omega}_{21} = \mu (\underline{\omega}_{20} - \underline{\omega}_{10}) \quad \# 22.9$$

Aus

$$\underline{\omega}_{h0} = \underline{\omega}_{h1} - \underline{\omega}_{10} = \underline{\omega}_{h2} + \underline{\omega}_{20} \quad \# 22.10$$

folgt wegen #22.7,9

$$\mu = \lambda - 1 \quad \# 22.11$$

#22.9 erhält daher die Gestalt

$$\underline{\omega}_{2h} = (\lambda - 1) \underline{\omega}_{21} \quad \# 22.12$$

Diese Überlegungen auf der dualen Kugel, die in Analogie zur Zykloidenverzahnung auf der reellen Kugel angestellt wurden, haben wir nun im Raum zu interpretieren und ihre Brauchbarkeit für die Verzahnung von *Hyperboloidrädern* darzutun.

Aus #22.9 folgt zunächst wegen Satz 20.2.1.4, daß die Achse  $h$  des *Hilfsaxoids*, die im Raum dem dualen Einheitsvektor  $\underline{\mathbf{h}}^\circ$  entspricht, eine Erzeugende des durch  $\underline{\omega}_{10}$  und  $\underline{\omega}_{20}$  gekennzeichneten Zyindroids ist, die der Konstanten  $\lambda$  umkehrbar eindeutig zugeordnet ist. Der dualen Hilfspolkurve entspricht im Raum als Hilfsaxoid jene Strahlschraubfläche, die durch Verschraubung der Momentanachse  $\underline{\mathbf{g}}$  um  $h$  mit dem Parameter  $\rho_{h0}$  der Schraubung  $\underline{\omega}_{h0}$  entsteht.

Sie stellt die *Eingriffsfläche* der Verzahnung dar, also den Ort der in Berührung befindlichen Erzeugenden der Flankenflächen in  $\Sigma_0$ .

## Verzahnung von Hyperboloidrädern

Führt man bei der Abschrotung des Hilfsaxoids auf dem  $\Sigma_1$  zugeordneten Hyperboloid eine mit  $\Sigma_h$  fest verbundene Gerade  $l$  mit, so überstreicht  $l$  eine zu  $\Sigma_1$  gehörige Zahnflankenfläche  $\varphi_1$ . Diese stellt demnach jene Schraubfläche 2. Stufe dar, die bei der Zusammensetzung der Drehung von  $\Sigma_0$  um  $n$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}_{01}$  sowie der Schraubung von  $\Sigma_h$  um die in  $\Sigma_0$  feste Gerade  $h$  mit dem Parameter  $p_{h0}$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}_{h0}$  entsteht, wenn  $l$  mit  $\Sigma_h$  mitgeführt wird. Die Konstruktion von  $\bar{\omega}_{h0}$ ,  $\bar{\omega}_{h1}$  sowie  $\bar{\omega}_{h2}$  ist aus Fig. 22.1 ersichtlich.

Schrotet hingegen das Hilfsaxoid auf dem mit  $\Sigma_2$  verknüpften Hyperboloid ab, so erzeugt  $l$  die  $\varphi_1$  entsprechende Gegenflanke  $\varphi_2$ . Auch sie stellt eine Schraubfläche 2. Stufe dar, die durch Zusammensetzung der Rotation um die Achse  $m$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}_{02}$  und der Schraubung ( $p_{h0}$ ,  $\bar{\omega}_{h0}$ ) um  $h$  entsteht.

Sind beide Zahnräder in Aktion und ist  $l$  im Augenblick gemeinsame Erzeugende der beiden Zahnflanken, so verändert  $l$  auf  $\varphi_1$  nach #22.7 seine Lage derart, als würde  $l$  momentan um  $g$  mit dem Parameter  $p_{21}$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}_{h1} = \lambda \bar{\omega}_{21}$  verschraubt. Die Lageänderung auf der Gegenflanke  $\varphi_2$  entspricht nach #22.12 der Anwendung derselben Schraubung auf  $l$ , jedoch mit der veränderten Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}_{h2} = (\lambda - 1)\bar{\omega}_{21}$ . Die Zahnflanken berühren daher einander, gleiten aber schräg zur Berührerzeugenden  $l$  übereinander hinweg. Beim Abschroten des Axoide erfolgt im Gegensatz dazu die relative Gleitung in Richtung der Berührerzeugenden.

Es ist naheliegend, analog zur ebenen und sphärischen Zykloidenverzahnung die Gerade  $l$  als Erzeugende des Hilfsaxoids zu wählen. In Fig. 22.1 wurde dessen Achse  $h$  zwischen  $n$  und  $g$  gewählt. Man wird nun, wie in der Ebene und auf der Kugel, auf dem Zylindroid  $\Pi$  noch eine zweite, zwischen  $g$  und  $m$  liegende Erzeugende  $\bar{h}$  (in Fig. 22.1 nicht eingezeichnet) als Achse eines weiteren Hilfsaxoids wählen. Mit dessen Hilfe wird man wieder zwei entsprechende Zahnflanken herstellen. Man wird die Annahme so treffen, daß jeder Zahn aus zwei Schraubflächen 2. Stufe besteht, die in einer, dem Grundhyperboloid angehörenden Erzeugenden berührend ineinander übergehen.

Die oben beschriebene Übertragung der Zykloidenverzahnung auf Hyperboloidräder stammt von DISTELI<sup>3</sup>. Derselbe Autor hat diese Überlegung dahingehend erweitert, daß er nicht nur eine feste Erzeugende  $h$  des Zylindroids  $\Pi$  als Achse eines Hilfsaxoids wählte, sondern  $h$  als Funktion der Zeit die Erzeugenden von  $\Pi$  durchlaufen läßt. Dadurch gelangt er zu allgemeineren Hilfsaxoiden, die keine Schraubflächen mehr sind und auch zu allgemeineren geradlinigen Zahnflanken. Insbesondere verallgemeinert er die Evolventenverzahnung auf den Raum<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup> DISTELI [1]

<sup>4</sup> DISTELI [3]

## Literatur

- ADRIAN W.: [1] Tagung für Getriebelehre in Dresden im Oktober 1926.  
ZAMM 6 (1926) 487-494
- BALL R.S.: [1] Dynamics and modern geometry: A new chapter in the theory of screws  
Royal Irish Academy, Cunningham Memoirs. Nr.4. Dublin 1887  
[2] A treatise on the theory of screws (1900)
- BENNETT G.T.: [1] A new Mechanism.  
Engineering 76 (1903) 777-778  
[2] The skew Isogram Mechanism.  
Proc.of the London Math.Soc. 2nd series, 13 (1913-1914) 151-173
- BEYER R.: [1] Technische Kinematik (1931)  
[2] Technische Raumkinematik (1963)
- BLASCHKE W.: [1] Geometrie der Speere im euklidischen Raum.  
Mh.Math.Phys. 21 (1910) 201-303  
[2] Vorlesungen über Differentialgeometrie I (1924<sup>2</sup>)  
[3] Anwendung dualer Quaternionen auf Kinematik.  
Ann.Acad.Scient.Fennicae, Helsinki, AI 250/3 (1958)  
[4] Kinematik und Quaternionen (1960)
- BRICARD R.: [1] Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé.  
Journal de math.pures et appl. 3 (1897) 113-150  
[2] Leçons de cinématique. Tome I: Cinématique théorique (1926)  
Tome II: Cinématique appliquée (1927)  
[3] Mémoire sur les déplacements à trajectoires sphériques  
Journ.Ec.Polyt. (2) 11 (1906)
- BURMESTER L.: [1] Kinematisch-geometrische Theorie der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen und ebenen Systemen  
Z.Math.Phys. 23 (1878) 110-131
- CHASLES M.: [1] Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace.  
Comptes Rendus 16 (1843) 1420-1432  
[2] Propriétés relatives au déplacement fini quelconque, dans l'espace, d'une figure de forme invariable  
Comptes Rendus 51 (1860) 855-863, 905-914. 52 (1861) 77-85, 189-197, 497-501
- CLIFFORD W.K.: [1] Preliminary sketch of Biquaternions  
Mathematical Papers (Reprint 1968) 181-220
- CORIOLIS G.: [1] Mémoire sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines  
Mémoires présentés par divers savants à l'académie royale des sciences de l'instut de France 3 (1832) 573-607
- DARBOUX G.: [1] Sur les mouvements algébriques, Note III in G.KOENIGS: Leçons de Cinématique (1897)
- DELASSUS Et.: [1] Les chaines articulées fermées et déformables a quatre membres.  
Bulletin des sciences mathématiques. 2.ser. 46 (1922) 283-304

## Literatur

---

- DENAVIT J.: [1] Displacement Analysis of Mechanisms based on  $(2 \times 2)$  Matrices of Dual Numbers  
VDI Berichte 29 (1958) 81-89
- DIMENTBERG F.M.: [1] A general Method for the investigation of finite displacements of spatial mechanisms and certain cases of passive joints.  
Akad.Nauk.SSSR Trudi Sem.Teorii Mash.Mekh.Nt.17, Vol.5 (1948) 5-39  
Englische Übersetzung in: Purdue Translation Nr. 436. Purdue University, Lafayette, Indiana (1959)
- DISTELI M.: [1] Über instantane Schraubengeschwindigkeiten und die Verzahnung der Hyperboloidräder.  
Z.Matz.Phys. 51 (1904) 51-88  
[2] Über das Analogon der Savary'schen Formel und Konstruktion in der kinematischen Geometrie des Raumes.  
Z.Math.Phys. 62 (1914) 261-309  
[3] Über die Verzahnung der Hyperboloidräder mit geradlinigem Eingriff.  
Z.Math.Phys. 59 (1911) 244-298
- DUFFY J.-GILMARTIN M.J.: [1] Limit Positions of Fourlink Spatial Mechanisms.  
1. Mechanisms Having Revolute and Cylindric Pairs.  
Journ.Mechanisms 4 (1969) 261-272
- DÜRRFELD W.: [1] Die Erzeugung geometrisch genauer Zahnflanken an Kegelrädern mit Radialzähnen und die Tredgold'sche Annäherung.  
Diss.TH.Aachen (1927)
- DYSON A.: [1] A general theory of the Kinematics and Geometry of Gears in three Dimensions. (1969)
- EULER L.: [1] Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum.  
Novi Commentarii Acad.Petroplitanae 20 (1776) 189-207
- EVERETT J.D.: [1] On the Kinematics of a Rigid Body.  
The quarterly Journal of pure and applied mathematics 13 (1875) 33-66
- FABER K.: [1] Über den Zusammenhang der drei Typen von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Veränderlichen mit gewissen Funktionentheorien  
Deutsche Mathematik 6.(1941) 323-341  
[2] Begründung der Potential- und Funktionentheorie mit Einschluß gewisser Erweiterungen  
Jahresberichte DMV 61 (1959) 32-56
- FEDERHOFER K.: [1] Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems (1928)
- FLADT K.: [1] Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven (1962)
- GARNIER R.: [1] Cours de Cinématique I(1954<sup>3</sup>). II(1956<sup>3</sup>), III(1951)
- GAUSS C.F.: [1] Werke Bd. 8 (1900) S.356
- GOLDBERG M.: [1] New Five-Bar and Six-Bar Linkages in three Dimensions.  
Trans. of the A.S.M.E, ser.B, Journal of Engineering 65 (1943) 649-661
- GRÜBLER M.: [1] Das Kriterium der Zwangläufigkeit der Schraubenketten. Otto Mohr zum achtzigsten Geburtstag. Festschrift (1916) 124-133

## Literatur

---

- GRÜNWALD A.: [1] Darstellung der Mannheim-Darboux'schen Umschwungbewegung eines starren Körpers  
Z.Math.Phys. 54 (1906) 154-220
- [2] Die kubische Kreisbewegung eines starren Körpers.  
Z.Math.Phys. 55 (1907) 264-296
- HAAG J.: Sur certains mouvements remarquables et leurs applications.  
Journ.math.pures et appl, 6<sup>e</sup> sér. 6 (1910) 343-386
- HARTMANN W.: [1] Die Maschinengetriebe (1913)
- HENNEBERG L.: [1] Die graphische Statik des starren Systems (1911)
- HOHENBERG F.: [1] Über Zusammensetzung zweier gleichförmigen Schraubungen.  
Mh.Math. 54 (1950) 221-234
- HUNT K.H.: [1] Screw Axes and Mobility in Spatial Mechanisms via the linear complex  
Journ.Mechanisms 3 (1967) 307-327
- KELER M.: [1] Analyse und Synthese der Raumkurbelgetriebe mittels Raumliniengeometrie und dualer Größen.  
Diss.TH.München (1958)
- KOENIGS G.: [1] Leçons de Cinématique (1897)
- [2] Mémoire sur les courbes conjuguées dans le mouvement relatif le plus général de deux corps solides (1910)  
Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences. t.35, 2<sup>e</sup> sér., Paris, 1914, n<sup>o</sup>1, p.1-215
- KOTJELNIKOFF A.: [1] Schraubenrechnung und einige Anwendungen derselben auf Geometrie und Mechanik (russisch)  
Sitz.ber. der Universität von Kasan 62 (1895). Referat im Jahrb. über d.Fortschritte der Math. 26 (1895) 804
- KOWALEWSKY G.: [1] Bestand und Wandel. Meine Lebenserinnerungen. Zugleich ein Beitrag zur neueren Geschichte der Mathematik (1950)
- KRAMER J.: [1] Über Fußpunktkurven von Regelflächen und eine besondere Klasse von Raumbewegungen (über symmetrische Schrotungen I)  
Mh.Math.Phys. 45 (1937) 394-406
- [2] Zur Bricard'schen Bewegung, deren sämtliche Bahnkurven auf Kugeln liegen (über symmetrische Schrotungen II)  
Mh.Math.Phys. 45 (1937) 407-417
- [3] Zur aufrechten Ellipsenbewegung des Raumes (über symmetrische Schrotungen III)  
Mh.Math.Phys. 46 (1937) 38-50
- [4] Zur kubischen Kreisbewegung des Raumes (über symmetrische Schrotungen IV)  
Wiener Akademieber.Math.nat.wiss.Kl., Abtlg. IIa, 146 (1937) 145-158
- [5] Zur Geometrie d. Bennett'schen Mechanismus (über symmetrische Schrotungen V)  
Wiener Akademieber.Math.nat.wiss.Kl., Abtlg. IIa, 146 (1937) 159-173
- [6] Die Borel-Bricard-Bewegung mit punktweise gekoppelten orthogonalen Hyperboloiden (über symmetrische Schrotungen VI)  
Mh.Math.Phys. 46 (1937) 172-195
- KRAUS R.: [1] Getriebelehre Bd.I: Einführung (1954<sup>2</sup>)
- KRUPPA E.: [1] Über die Mises'sche Abbildung räumlicher Kräftesysteme  
ZAMM 4 (1924) 146-155

## Literatur

---

- LEWIS T.C.: [1] On the Cylindroid.  
Messenger of Mathematics 9 (1879) 1-5
- LÖBELL F.: [1] Gewindebüschel und ihre Invarianten  
Journ.f.reine und angew. Math 164 (1931) 64-66
- LORIA G.: [1] Vorlesungen über Darstellende Geometrie, I.Bd. (1907)
- MACK K.: [1] Geometrie der Getriebe (1931)
- MANNHEIM A.: [1] Etude sur le déplacement d'une figure de forme invariable.Nouvelle méthode des normales; application diverses.  
Journ.de l'école polytechnique, cahier 43, t.XXVI (1870) 57-121
- MAYOR B.: [1] Statique graphique des systèmes de l'espace (1910)
- MEHMKE R.: [1] Über die Geschwindigkeiten beliebiger Ordnung eines in seiner Ebene bewegten ähnlich-veränderlichen ebenen Systems.  
Der Civilingenieur 29 (1883) 487-508  
[2] Über den geometrischen Ort der Punkte ohne Normalbeschleunigung in einer Phase eines starren oder affin-veränderlichen Systems.  
Der Civilingenieur 29 (1883) 581
- MEYER zur CAPELLEN W. - DITTRICH G.: [1] The instantaneous Distribution of Acceleration of a spherically moving System.  
Journ.Mechanisms 1 (1966) 23-42
- MEYER zur CAPELLEN W. - DITTRICH G. - JANSSEN B.: [1] Systematik und Kinematik ebener und sphärischer Viereckgetriebe.  
Forschungsber.des Landes Nordrhein-Westfalen Nr.1611 (1966)
- MISES R.v.: [1] Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme  
Z.Math.Phys. 64 (1917) 209-232  
[2] Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik  
ZAMM 4 (1924) 155-192
- MOZZI G.: [1] Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi (1763)
- MÜLLER H.R.: [1] Sphärische Kinematik (1962)  
[2] Kinematik (1963)
- MÜLLER E. - KRAMES J.: [1] Vorlesungen über Darstellende Geometrie, III.Band: Konstruktive Behandlung der Regelflächen.
- NEUGEBAUER O.: [1] On the „Hippopede“ of Eudoxus.  
Scripta Mathematica 19 (1953) 225-229
- OLIVIER Th.: [1] Théorie géométrique des engrenages (1842)
- POINSOT L.: [1] Neue Theorie der Drehungen des Körpers (Deutsch von K.H.SCHELLBACH) (1851)
- REULEAUX F.: [1] Lehrbuch der Kinematik. I.Bd.: Theoretische Kinematik (1875)  
II.Bd.: Die praktischen Beziehungen der Kinematik zu Geometrie und Mechanik (1900)
- RITTERSHAUS T.R.: [1] Die kinematische Kette, ihre Beweglichkeit und Zwangsläufigkeit.  
Der Civilingenieur 2.ser. 24 (1878) 171-202
- SHELL H.: [1] Theorie der Bewegung und der Kräfte. I.Bd. 1879<sup>2</sup>, II.Bd. 1880<sup>2</sup>
- SCHIAPARELLI G.: [1] Scritti sulla storia della astronomia antica II. 3-112

## Literatur

---

- SCHIEBEL A: - LINDNER W.: [1] Zahnräder. 1.Bd.: Stirn- und Kegelräder mit geraden Zähnen (1954<sup>4</sup>), 2.Bd.: Stirn- und Kegelräder mit schrägen Zähnen (1957<sup>4</sup>)
- SCHUR F.: [1] Über die Bewegung eines starren Körpers durch Abschroten.  
Z.Math.Phys.55 (1907) 408-415
- STRUBECKER K.: [1] Study'sches Übertragungsprinzip und Motorrechnung  
Math.Zschr. 44 (1938) 1-19
- STÜBLER E.: [1] Das Beschleunigungssystem bei der Bewegung eines starren Körpers.  
Jahres.ber. der DMV 19 (1910) 177-185
- STUDY E.: [1] Geometrie der Dynamen (1903)  
[2] Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik  
Sitz.ber.d.Berliner Math.Ges. 12 (1913) 36-60 (104.Sitzung 21.Dez.1912)  
Beigebunden zu Arch.d.Math.u.Phys. 3.Reihe 20 (1913)  
[3] Von den Bewegungen und Umlegungen  
Math.Annalen 39 (1891) 441-566
- TAIT P.G.: [1] Elementares Handbuch der Quaternionen (1880)
- THOMAS A.K.: [1] Grundzüge der Verzahnung (1957)
- TRIER H.: [1] Die Formen der Zahnräder (1954<sup>4</sup>)
- WEISS E.A.: [1] Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik (1935)
- WIENER H.: [1] Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubungen zu einer einzigen  
Leipziger Berichte 42 (1890) 13-23  
[2] Zur Theorie der Umwendungen.  
Leipziger Berichte 42 (1890) 71-87  
[3] Über geometrische Analysen.  
Leipziger Berichte 42 (1890) 245-267; 43 (1891) 424-447
- WUNDERLICH W.: [1] Höhere Radlinien  
Österr.Ing.Archiv 1 (1947) 277-296  
[2] Geometrische Grundlagen für das Fräsen von Schraubnuten I, II  
Österr.Ing.Archiv 6 (1952) 315-326  
Österr.Ing.Archiv 9 (1955) 273 280  
[3] Darstellende Geometrie I (1966)  
[4] Darstellende Geometrie II (1967)  
[5] Ebene Kinematik (1970)
- YANG T. - FREUDENSTEIN F.: [1] Application of Dual-Number Quaternion Algebra to the  
Analysis of Spatial Mechanisms  
Transactions of the A.S.M.E, ser. E, Journ.of appl.Mech. 31 (1964) 300-308

# Stichwortverzeichnis

## A

Abbildungskonstante 45  
Abbildungskreis 51  
Ableitung von Vektoren 8  
Absolutbahn 79  
Absolutbeschleunigung 81, 167  
Absolutbewegung 191  
absolute Bahn 79, 163  
absolute Bewegung 163  
Absolutgeschwindigkeit 80, 165  
Abstand Punkt-Gerade 15  
Abstand windschiefer Geraden 14  
Abtriebswinkel 103  
Achse der Winkelbeschleunigung 74  
Achse einer Quaternion 23  
Achse eines Gewindes 129  
Achse eines Motors 146  
Achsen eines Geradennetzes 15  
Achsenwinkel 112  
Addition dualer Zahlen 29  
Additionsgesetz der Geschwindigkeiten 80, 166  
Additionsgesetz der Winkelgeschwindigkeitsvektoren 79  
affine Koordinaten eines Vektors 3  
antiinvers 54  
Antiinversion 54  
Antipol 47  
Antipolare 47  
Antipolarität 51  
Antriebswinkel 200  
äquivalente Bewegung 56  
Arme eines sphärischen Gelenkvierecks 103  
asymptotische Ebene 37  
Aufriß 3

## B

Bahn 56  
Bahngeschwindigkeit 139  
Bahnkurve 169  
Bahntangente 97  
Basis 3  
begleitendes Dreibein der Erzeugenden einer Srahlfläche 37  
Berührungskorrelation 39  
Beschleunigung 18; 19, 42, 75

Beschleunigungsplan 152  
Beschleunigungspol 152  
Beschleunigungsvektor 19; 21  
Betrag eines Vektors 2  
Bewegung des Raumes 56  
Bewegung einer Geraden 116  
Bewegungslehre 56  
Bezugsplanrad 113  
Bildkreis 194  
Bildpunkt einer Ebenenstellung 47  
binäre Glieder 171  
binäre Koppel 171  
Biquaternion 35  
Breite 112

## C

Charakteristik 137  
Charakteristik einer Ebene 127; 137  
CORIOLIS-Beschleunigung 82, 167

## D

Darstellung der Ebene 9  
Darstellung einer Geraden 8  
Differentiation von Quaternionen 26  
Differentiation von Vektoren 8  
Differenzenvektor 1  
Distanz 51  
Distanzkreis 51  
Doppelkurbel 103  
Doppelschwinge 103  
Drall einer Strahlfläche 36, 135  
Drehachse 56  
Drehflächen 137  
Drehgelenk 168  
Drehquaternion 63  
Dreh Schubgelenk 168  
Drehstreckung 28, 44  
Drehung 28, 125  
Drehvektor 64  
Drehwinkel 56  
Drehyperboloid 209  
Dreibinder 171  
duale Einheitskugel 34  
duale Quaternion 35, 119  
duale Vektoren 32, 134  
duale Zahlen 29  
dualen Drehvektor 119  
dualer Drehwinkel 119

# Stichwortverzeichnis

Dualer Einheitsvektor 32  
Dualer Raum 34  
dualer Winkel 121  
dualer Winkel zweier Speere 32  
Dualteil einer dualen Zahl 29  
Durchmesser eines Gewindes 131  
Durchmesserebenen 131  
durchschlagende Gelenkvierecke 103

## E

$\varepsilon$ -Konjugierte einer dualen Zahl 30  
 $\varepsilon$ -Konjugium 30  
ebene Bewegung 59; 60, 169  
Ebenenkoordinaten 9  
Ebenenquaternion 35  
Eingriffsfläche 209; 210  
Eingriffslinie 114  
Einheitsquaternion 25, 64  
Einheitsvektor 2  
entgegengesetzter Vektor 1  
Entwicklungssatz von GRASSMANN 7  
Ersatzbewegung 56  
Erzeugenden einer Strahlfläche 36  
EULERSche Drehungen 68  
EULERSchen Winkel. 58, 66  
Evolutenkegel 85  
Evolventenverzahnung 115

## F

Ferngerade 11, 131  
Fläche 20  
Flächenkurve 20  
flächenläufig 169  
Flächennormale 20  
Flankenspiel 113  
Formel von ARONHOLD 163  
freie Beweglichkeit 167  
Freiheitsgrad 167  
Freiheitsgrad 56  
Freiheitsgrad eines Gelenkes 168  
Führungsbeschleunigung 81, 167  
Führungsbewegung 79, 94, 191  
Führungsgeschwindigkeit 80, 165  
Fundamentalsatz der räumlichen Kinematik  
60  
Fußkegel 112  
Fußkreis 112

## G

Gangkegel 72  
Gangpolkurve 109  
gebundene Quaternionen 117  
Gegenpunktekreis 53; 54  
Gelenke 167  
Gemeinlot 121  
Gemeinlot dreier Speere 34  
Gemeinlot zweier Geraden 14  
gemischtes Produkt dreier Vektoren 6  
Geradenkoordinaten 10  
Geradennetz 15  
Geradenquaternion 35  
Geschwindigkeit 18, 71, 139  
Geschwindigkeitsmaßstab 42  
Geschwindigkeitsplan 144  
Geschwindigkeitsvektor 18; 21, 70, 71  
Gestell 167  
Getriebeglieder 167  
Getrieben 167  
Gewindgleichung 129  
Gewindeparameter 129  
Gewindestrahlen 129  
Gleichheit zweier Quaternionen 23  
gleichmäßige Drehung 70  
Gleichsinnigkeit 68  
Gleitkurvenpaar 113  
gnomonischen Projektion 83, 97  
Gratlinie 40  
Gratpunkt 40  
Großkreis 81  
Grundkreis 53  
Grundriß 3

## H

Hauptnormale 19  
Hauptparameter eines Zylindroids 197  
Helikoiden 207  
Helikoidenbewegung 207  
Helikoidenstrahlfläche 208  
Hilfskomplex 152  
Hilfsxoid 210  
Hippopede des EUDOXOS 96  
Homogene Ebenenkoordinaten 9  
homogene EULERSche Drehparameter 65  
homogene Koordinaten einer Geraden 10  
hyperbolische Lage von vier Geraden 17,  
134  
Hyperboloidräder 210

# Stichwortverzeichnis

## I

identische Bewegung 56  
Identität 56  
Identität von JACOBI 7  
Identität von LAGRANGE 7  
Inverse einer Quaternion 25  
Inzidenzbedingung Punkt-Ebene 9,35  
Inzidenzbedingung Gerade-Ebene 12, 35  
Inzidenzbedingung Punkt-Gerade 35  
Inzidenzbedingung Punkt-Stab 9  
Isogramm von BENNETT 172  
isoptische Kurve 107

## K

Kardangelenk 107  
Kegel-Zahnräder 112  
Kegelwinkel 112  
Kehlpunkt 37  
Kehlschraublinie 136  
Kinematik 56  
Knotenlinie 58  
Koaxiale Quaternionen 25  
kollineare Vektoren 2  
kommutativer Ring 29  
komplanare Vektoren 2  
Komplex der Schraubtangente 126  
Komplexkegel 126; 129  
Komplexe Kurve 126; 129  
Komponenten eines Vektors 3  
Kongruenz 68  
konische Spirale 208  
Konjugierte eines Quaternionenprodukts 25  
Konjugierte Quaternionen. 23  
Konstruktion der Schraubtangente 124  
kontinuierliche Schraubung 123  
Koordinaten eines Stabes 10  
Koordinaten eines Vektors 1; 3  
Kopfkegel 112  
Kopfkreis 112  
Koppel 103  
Koppelbedingung 105, 200  
Koppelbewegung 105  
Koppelkurve 110  
Koppelsystem 103, 199  
Kreuzgelenk 107  
Kreuzriß 3  
krumme Schiebung 140  
Krümmung 18; 19

Krümmung sphärischer Bahnkurven 78  
Krümmungsachse 18, 97  
Krümmungsachse einer Flächenkurve 20  
Krümmungsachse einer sphärischen Bahnkurve 82  
Krümmungskegel 40  
Krümmungskreis 98  
Krümmungsmittelpunkt 19  
Krümmungsmittelpunkt 19  
Krümmungsradius 19, 78  
Krümmungsradius der Schraublinie 125  
Krümmungsverwandtschaft 84  
kubische Parabel 156  
Kugel von MEUSNIER 21  
Kugeldrehungen 58  
Kugelgelenk 168  
Kugelplattengelenk 168  
Kurbel 103  
Kurbelschwinge 103

## L

Lageplan 144  
Länge eines Motors 146  
Längenmaßstab 41  
Leitkreis 208  
Leitspirale 208  
linear abhängige Vektoren 2  
linear unabhängige Vektoren 3  
linearer Komplex 129  
Linksschraubung 61, 123

## M

Maßstäbe 41  
mittlere Geschwindigkeit 18  
Moment eines Stabes 9  
Momentanachse 72  
momentane Beschleunigungsachse 151  
momentane Parallelverschiebung 140  
momentane Translationsbeschleunigung 150  
momentane Winkelbeschleunigung 73, 150  
momentaner Winkelgeschwindigkeitsvektor 72  
Momentangeschwindigkeit 18  
Momentanschraubung 139  
Momentenkonstante 41, 45  
Momentenvektor einer Geraden 10  
Motor 146, 164  
Multiplikation dualer Zahlen 29

# Stichwortverzeichnis

## N

Norm einer Quaternion 25  
Normalbeschleunigung 19, 75  
Normalbeschleunigungsvektor 21  
Normalebene in einem Kurvenpunkt 18  
Normalennetz 15, 34, 191  
Normensatz 26  
normierte EULERsche Drehparameter 66  
normierte Quaternion 25  
Normierung eines Vektors 2  
Nullebene eines Punktes 128  
Nullpunkt einer Ebene 128  
Nullquaternion 23  
Nullstrahlen 129  
Nullsystem 128  
Nullteiler 29  
Nullvektor 1

## O

Öffnung eines Motors 146  
Oktoide 101  
orthonormierte Basis 3  
orthoptische Kurve 107  
Ortsvektor 1

## P

Panstrophoide 90  
Parabel 128  
Parallelverschiebung 58  
Parameter der Schraubung 123  
Parameterachse 194  
Parameterdarstellung der Ebene 9  
Parameterdarstellung der Geraden 8; 11  
Parameterlinien 20  
Parameterverteilung 197  
Planrad 112  
Plattengelenk 168  
PLÜCKER-Bedingung 10  
PLÜCKER-Konoid 196  
PLÜCKER-Vektoren einer Geraden 10  
polare Kurve 81  
Polwechselgeschwindigkeit 74  
Prismenpaar 168  
Produkt zweier Quaternionen 24  
Projektionsachse 85  
Punktdarstellung 8  
Punktquaternion 163  
Punktquaternion 35

quadratischer Komplex 129

## Q

Quaternion 23  
Quaternionenprodukt 24  
Quotientenring 30

## R

Rastkegel 72  
räumliche Schubkurbel 170  
Realteil einer dualen Zahl 29  
Rechte-Hand-Regel 5  
Rechtsschraubung 123  
Rechtsschraubung 61  
Reib-Kegelräder 112  
Relativbahn 79, 163  
Relativbeschleunigung 82, 167  
Relativbewegung 79, 94, 163, 191  
Relativgeschwindigkeit 80, 165  
Repräsentant 1  
Resultierende zweier Vektoren 1  
reziproke Polare 129  
Richtkegel 40  
Richtung von Vektoren 2  
Richtungskosinus 5  
Richtungsvektor einer Geraden 8; 10  
Ritzel 112  
Rollgleitzahl 80  
Rotationsgeschwindigkeit 140  
Rotor 146  
Rückenkegel 113  
Rückschlag 54

## S

Satz von BOBILLIER 86  
Satz von GRASHOF 103  
Scheitelkrümmungskreis 102  
Schiebstrecke 59  
Schiebung 58  
schiefes Kardangeln 107  
Schmiegebene 19, 75  
Schnittbedingung zweier Geraden 13  
Schnittgerade zweier Ebenen 13  
Schnittpunkt schneidender Geraden 13  
Schraubgelenk 168  
Schraublinie 123  
Schraublinien 2. Stufe 207  
Schraubrohrfläche 137

## Stichwortverzeichnis

- Schraubtangentialkomplex 126  
Schraubtorse 136; 137  
Schraubung 59, 123  
Schraubwinkel 59  
Schubgelenk 168  
Schwinge 103  
skalare Quaternion 23  
Skalares Quadrupelprodukt 7  
skalares Sechserprodukt 7  
skalares Tripelprodukt 6  
Skalarprodukt zweier Vektoren 4  
Skalarteil einer Quaternion 23  
Spatprodukt dreier Vektoren 6  
Speer 11, 32  
Speerkoordinaten 11  
sphärische Bahnnormale 72  
sphärische Bahntangente 72  
sphärische Fußpunktkurve 101  
sphärische Gangpolkurve 72  
sphärische Koppelkurve 103  
sphärische Kreisevolvente 95, 97  
sphärische Ordnung 77  
sphärische Radlinie 94, 115  
sphärische Rastpolkurve 72  
sphärische Wendelinie 99  
sphärische Wendepunkte 99  
sphärische Zahnräder 112  
sphärischen Bewegung 60  
sphärischer Abstand 55  
sphärischer Kegelschnitt 77  
sphärischer Wendepunkt 88  
sphärisches Bild einer Strahlfläche 40  
sphärisches Ersatzgetriebe 107  
sphärisches Gelenkviereck 103  
sphärisches Momentanzentrums 109  
Spitzen 99  
Stab 9  
Stabkoordinaten 10  
Stabpaar 47  
Steg 103, 112, 167  
Stellung von Vektoren 2  
Stellungspunkt 47  
Stirnräder 113  
Strahlfläche 16, 36, 209  
Strahlgebüsch 132  
Strahlgewinde 129, 191  
Strahlnetz 34  
Strahlschraubfläche 135  
Strahlschraubfläche 2. Stufe 208  
Striktionslinie 38  
Striktionspunkt 37  
Striktionstangente 38  
Striktionswinkel 137  
Striktionswinkel 38  
Strophoide 90  
Summe (Differenz) zweier Quaternionen 23  
Summe von Motoren 164  
Summe zweier Vektoren 1  
Synektische Funktionen 30
- ### T
- Tangente 18  
Tangentenfläche einer Raumkurve 40  
Tangentialbeschleunigung 19, 75  
Tangentialebene 20  
Taumelscheibengetriebe 110  
Teilkreis 113  
Teilung 113  
Tellerrad 112  
Tensor einer Quaternion 28  
ternäre Glieder 171  
Torse 40  
Totlagen 105, 202  
Translationsgeschwindigkeit 140; 145  
Translator 146
- ### U
- Übersetzungsverhältnis 112  
Übertragungsprinzip von STUDY 34; 36  
Umkehrbewegung 109, 164  
Umwendung 56, 121  
Umwendungsache 56  
Unfreiheitsgrad 167
- ### V
- Vektor 1  
Vektor der momentanen Winkelgeschwindigkeit 140  
vektorielle Quaternion 23  
Vektorielles Produkt zweier Vektoren 5  
Vektorielles Quadrupelprodukt 7  
Vektorielles Tripelprodukt 7  
Vektorteil einer Quaternion 23  
Verbindungsebene Punkt-Gerade 13  
Versor einer Quaternion 28

## Stichwortverzeichnis

---

### W

wackelige Systeme 204  
Wälzkegel 112  
Wälzkreis 112, 113  
Wälzpunkt 112  
Wendekurve 157  
Wendelinie 91  
Wendepunkt 155  
Winkel zweier Geraden 14  
Winkelbeschleunigung 42  
Winkelbeschleunigung 70  
Winkelbeschleunigungsvektor 70  
Winkelgeschwindigkeit 70  
Winkelgeschwindigkeitsmaßstab 41  
Winkelgeschwindigkeitsvektor 41, 70  
Winkelrädern 112  
Winkeltreue 53

### Z

Zahnlücke 113  
Zahnstärke 113  
Zentralgerade 151  
Zentralnormale 37  
Zentralpunkt 37, 151  
Zentraltangente 37  
Zentraltangentialebene 37  
Zusatzbeschleunigung 82, 167  
Zwanglauf 56  
zwangläufig 56, 169  
Zwanglaufkriterium 169  
Zykloidenverzahnung 115  
Zylinder 40  
Zylindergelenk 168  
Zylindroid 196

# Inhalt

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Grundzüge und Anwendungen der Vektorrechnung</b> .....                            | <b>1</b>  |
| <b>1.1 Vektoren</b> .....  | <b>1</b>  |
| 1.1.1 Definition.....  | 1         |
| 1.1.2 Summe von Vektoren.....  | 1         |
| 1.1.3 Nullvektor.....  | 1         |
| 1.1.4 Betrag eines Vektor.....   | 2         |
| 1.1.5 Produkt eines Vektors mit einer reellen Zahl.....                                | 2         |
| 1.1.6 Normierung eines Vektors. Einheitsvektoren.....                                  | 2         |
| 1.1.7 Kollineare Vektoren.....   | 2         |
| 1.1.8 Komplanare Vektoren.....   | 2         |
| 1.1.9 Lineare Abhängigkeit.....  | 2         |
| 1.1.10 Basis aus Einheitsvektoren.....   | 3         |
| <b>1.2 Vektorprodukte</b> .....  | <b>4</b>  |
| 1.2.1 Skalares (inneres) Produkt.....  | 4         |
| 1.2.2 Winkel zweier Vektoren.....  | 4         |
| 1.2.3 Vektoriell (äußeres) Produkt.....  | 5         |
| 1.2.4 Das gemischte Produkt (Spatprodukt, skalares Tripelprodukt) dreier Vektoren..... | 6         |
| 1.2.5 Entwicklungssatz von GRASSMANN (Vektoriell Tripelprodukt).....                   | 7         |
| 1.2.6 Die Identität von JACOBI (Vektoriell Quadrupelprodukt).....                      | 7         |
| 1.2.7 Die Identität von LAGRANGE (Skalares Quadrupelprodukt).....                      | 7         |
| 1.2.8 Das vektorielle Quadrupelprodukt.....  | 7         |
| 1.2.9 Das skalare Sechserprodukt.....  | 7         |
| 1.2.10 Differentiation (Ableitung) von Vektoren.....                                   | 8         |
| <b>1.3 Anwendung der Vektorrechnung auf die Grundelemente des Raumes</b> .....         | <b>8</b>  |
| 1.3.1 Darstellung des Punktes.....   | 8         |
| 1.3.2 Parameterdarstellung einer Geraden.....  | 8         |
| 1.3.3 Parameterdarstellung der Ebene.....  | 9         |
| 1.3.4 Homogene Ebenenkoordinaten.....  | 9         |
| 1.3.5 Stäbe.....   | 9         |
| 1.3.6 Moment eines Stabes um einen Punkt.....  | 10        |
| 1.3.7 Geradenkoordinaten.....  | 10        |
| 1.3.8 Speerkoordinaten.....  | 11        |
| 1.3.9 Ferngerade.....  | 11        |
| <b>1.4 Die Grundaufgaben der Geometrie des Raumes in vektorieller Behandlung</b> ..... | <b>11</b> |
| 1.4.1 Elemente der Raumgeometrie.....  | 11        |
| 1.4.2 Lotfußpunkt auf eine Ebene.....  | 12        |
| 1.4.3 Gerade durch zwei Punkte.....  | 12        |
| 1.4.4 Schnittpunkt Gerade-Ebene.....   | 12        |
| 1.4.5 Inzidenz Gerade-Ebene.....   | 12        |
| 1.4.6 Verbindungsebene Punkt-Gerade.....   | 12        |
| 1.4.7 Schnittgerade zweier Ebenen.....   | 13        |
| 1.4.8 Schnittbedingung zweier Geraden.....   | 13        |
| 1.4.9 Schnittpunkt schneidender Geraden.....   | 13        |
| 1.4.10 Winkel zweier Geraden.....  | 14        |
| 1.4.11 Abstand windschiefer Geraden.....   | 14        |
| 1.4.12 Gemeinlot zweier Geraden.....   | 15        |
| 1.4.13 Abstand Punkt-Gerade.....   | 15        |

# Inhalt

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1.5 Geradenmannigfaltigkeiten .....</b>                               | <b>15</b> |
| 1.5.1 Netze .....  | 15        |
| 1.5.2 Treffgeraden dreier gegebenen Geraden.....                         | 16        |
| 1.5.3 Treffgeraden von vier gegebenen Geraden .....                      | 17        |
| <b>1.6 Raumkurven.....</b>   | <b>17</b> |
| 1.6.1 Tangente. Bahngeschwindigkeit.....                                 | 17        |
| 1.6.2 Krümmung einer Bahnkurve. Beschleunigung.....                      | 18        |
| 1.6.3 Beschleunigung. Normal- und Tangentialbeschleunigung .....         | 19        |
| <b>1.7 Flächen .....</b>   | <b>20</b> |
| 1.7.1 Parameterdarstellung einer Fläche.....                             | 20        |
| 1.7.2 Krümmungsachse einer Flächenkurve .....                            | 20        |
| 1.7.3 Flächenkurven .....  | 21        |
| <b>2 Quaternionen .....</b>  | <b>23</b> |
| <b>2.1 Rechenregeln .....</b>  | <b>23</b> |
| 2.1.1 Definitionen.....  | 23        |
| 2.1.2 Rechenregeln und Bezeichnungen.....                                | 23        |
| 2.1.2.1 Gleichheit zweier Quaternionen .....                             | 23        |
| 2.1.2.2 Summe und Differenz zweier Quaternionen.....                     | 23        |
| 2.1.2.3 Konjugierte Quaternionen.....                                    | 23        |
| 2.1.2.4 Das Quaternionenprodukt .....                                    | 24        |
| 2.1.2.5 Koaxiale Quaternionen.....                                       | 25        |
| 2.1.2.6 Norm einer Quaternion .....                                      | 25        |
| 2.1.2.7 Die Konjugierte eines Quaternionenprodukts .....                 | 25        |
| 2.1.2.8 Inverse einer Quaternion.....                                    | 25        |
| 2.1.2.9 Der Normensatz .....   | 26        |
| 2.1.2.10 Differentiation von Quaternionen .....                          | 26        |
| <b>2.2 Geometrische Deutung der Quaternionen .....</b>                   | <b>26</b> |
| <b>3 Duale Zahlen. Übertragungsprinzip von STUDY. Strahlflächen.....</b> | <b>29</b> |
| <b>3.1 Duale Zahlen .....</b>  | <b>29</b> |
| 3.1.1 Definitionen, Rechenregeln.....                                    | 29        |
| 3.1.2 Synektische Funktionen .....                                       | 30        |
| <b>3.2 Duale Vektoren .....</b>  | <b>32</b> |
| 3.2.1 Duale Vektoren. Gerade. Speere.....                                | 32        |
| 3.2.2 Dualer Winkel zweier Speere.....                                   | 32        |
| 3.2.3 Gemeinlot zweier Speere .....                                      | 33        |
| <b>3.3 Das Übertragungsprinzip von STUDY.....</b>                        | <b>34</b> |
| <b>3.4 Duale Quaternionen (Biquaternionen).....</b>                      | <b>35</b> |
| 3.4.1 Definitionen. Rechenregeln .....                                   | 35        |
| 3.4.2 Darstellung der Raumelemente durch Biquaternionen .....            | 35        |
| <b>3.5 Strahlflächen .....</b>   | <b>36</b> |
| 3.5.1 Abbildung auf die duale Einheitskugel.....                         | 36        |
| 3.5.2 Differentialgeometrische Eigenschaften von Strahlflächen .....     | 39        |
| 3.5.3 Torsen.....  | 39        |
| 3.5.4 Zylinder.....  | 40        |
| 3.5.5 Richtkegel, Krümmungskegel .....                                   | 40        |

# Inhalt

|  |           |
|--|-----------|
| <b>4 Normalprojektion</b> .....  | <b>41</b> |
| <b>4.1 Momentenvektor eines Stabes</b> .....   | <b>41</b> |
| 4.1.1 Vektor der Winkelgeschwindigkeit .....   | 41        |
| <b>4.2 Maßstabsfragen</b> .....  | <b>41</b> |
| <b>4.3 Konstruktionsbeispiel</b> .....   | <b>42</b> |
| 4.3.1 Wahl der Maßstäbe.....   | 42        |
| 4.3.2 Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit.....  | 43        |
| 4.3.3 Lage der Drehachse.....  | 43        |
| <b>4.4 Momentenvektor eines Stabes</b> .....   | <b>43</b> |
| <b>4.5 Momente bezüglich mehrerer Punkte</b> .....                                       | <b>43</b> |
| <b>5 Die Abbildung von MAYOR und MISES</b> .....   | <b>45</b> |
| <b>5.1 Beschreibung des Verfahrens</b> .....   | <b>45</b> |
| <b>5.2 Abbildung komplanarer Vektoren</b> .....  | <b>46</b> |
| <b>5.3 Abbildung paralleler Ebenen</b> .....   | <b>47</b> |
| <b>5.4 Konstruktion des Momentenvektors</b> .....  | <b>48</b> |
| <b>5.5 Zusammenhang zwischen Normalprojektion und Projektion von MAYOR-MISES</b>         | <b>49</b> |
| <b>5.6 Momente mehrerer Punkte</b> .....   | <b>49</b> |
| <b>5.7 Umkehrung obiger Konstruktion</b> .....   | <b>49</b> |
| <b>6 Die gnomonische Projektion</b> .....  | <b>51</b> |
| <b>7 Die stereographische Projektion</b> .....   | <b>53</b> |
| <b>7.1 Definition</b> .....  | <b>53</b> |
| <b>7.2 Grundkonstruktionen des stereographischen Projektion</b> .....                    | <b>54</b> |
| 7.2.1 Gegenpunkte der Kugeloberfläche .....  | 54        |
| 7.2.2 Stereographische Projektion von Kugelgroßkreisen .....                             | 54        |
| 7.2.2.1 Kugelgroßkreis mit gegebenem Pol .....   | 54        |
| 7.2.2.2 Kugelgroßkreis durch zwei gegebene Punkte .....                                  | 54        |
| 7.2.2.3 Spärischer Abstand zweier Punkte .....   | 55        |
| 7.2.3 Kleinkreise der Kugel .....  | 55        |
| 7.2.3.1 Kugelkleinkreis aus gegebenem spärischen Mittelpunkt und sphärischen Radius..... | 55        |
| 7.2.3.2 Ermittlung des sphärischen Radius eines Kugelkleinkreises.....                   | 55        |
| <b>8 Elemente der Raumkinematik</b> .....  | <b>56</b> |
| <b>8.1 Grundbegriffe</b> .....   | <b>56</b> |
| <b>8.2 Drehung um eine Achse</b> .....   | <b>56</b> |
| <b>8.3 Spärische Bewegung</b> .....  | <b>58</b> |
| <b>8.4 Parallelverschiebung</b> .....  | <b>58</b> |
| <b>8.5 Ebene Bewegung</b> .....  | <b>59</b> |
| <b>8.6 Schraubung</b> .....  | <b>59</b> |
| <b>8.7 Konstruktive Zusammensetzung zweier Schraubungen</b> .....                        | <b>61</b> |
| 8.7.1 Zusammensetzung der Drehungsanteile.....   | 61        |

# Inhalt

|   |           |
|---|-----------|
| 8.7.2 Zusammensetzung der Schiebungsanteile .....               | 61        |
| <b>9 Analytische Behandlungen der Drehungen um O .....</b>      | <b>63</b> |
| 9.1 Umwendungen .....   | 63        |
| 9.2 Zusammensetzung von Umwendungen .....                       | 63        |
| 9.3 EULERSche Drehparameter.....                                | 65        |
| 9.4 Zusammensetzung von Drehungen. ....                         | 66        |
| 9.5 EULERSche Winkel .....                                      | 66        |
| 9.6 Matrizendarstellung.....                                    | 68        |
| 9.7 Drehmatrizen .....  | 69        |
| 9.8 Ermittlung der EULERSchen Winkel .....                      | 69        |
| <b>10 Kontinuierliche Drehungen.....</b>                        | <b>70</b> |
| 10.1 Kontinuierliche Drehungen um eine Achse durch O. ....      | 70        |
| 10.2 Allgemeine sphärische Bewegung.....                        | 70        |
| 10.2.1 Koordinatensysteme .....                                 | 70        |
| 10.2.2 Geschwindigkeit eines Punktes .....                      | 70        |
| 10.2.3 Die Polkegel.....  | 70        |
| 10.2.4 Änderung des Zeitgesetzes .....                          | 70        |
| 10.3 Beschleunigungsverhältnisse.....                           | 70        |
| 10.3.1 Beschleunigung .....                                     | 70        |
| 10.3.2 Tangential- und Normalbeschleunigung .....               | 70        |
| 10.3.3 Komponenten der Normalbeschleunigung .....               | 70        |
| 10.3.4 Krümmung der Bahnkurven.....                             | 70        |
| 10.4 Mehrere bewegte Systeme.....                               | 70        |
| 10.4.1 Relativ - und Absolutbewegung .....                      | 70        |
| 10.4.2 Sphärische Hüllkurven.....                               | 70        |
| 10.4.3 Hüllkurven von Großkreisen. Polarkurven .....            | 70        |
| 10.4.4 Beschleunigungsverhältnisse.....                         | 70        |
| 10.5 Krümmungsverhältnisse .....                                | 70        |
| 10.5.1 Krümmungsachse einer sphärischen Bahnkurve.....          | 70        |
| 10.5.2 Begleitendes Zweibein einer sphärischen Kurve .....      | 70        |
| 10.5.3 Konstruktive Behandlung der Krümmungsverhältnisse.....   | 70        |
| 10.5.4 Krümmungsverhältnisse bei Hüllkurven .....               | 70        |
| 10.5.5 Sphärische Wendepunkte.....                              | 70        |
| 10.5.6 Konstruktive Behandlung der sphärischen Wendepunkte..... | 70        |
| 10.5.7 Spitzen der Hüllkurven von Großkreisen.....              | 70        |
| <b>11 Sphärische Radlinien .....</b>                            | <b>92</b> |
| 11.1 Bewegungsgleichungen .....                                 | 92        |
| 11.2 Momentanachse, Polkegel.....                               | 93        |
| 11.2.1 Kreisrollung.....  | 93        |
| 11.2.2 Andere Herleitung obiger Ergebnisse .....                | 94        |
| 11.3 Sphärische Radlinien .....                                 | 95        |
| 11.3.1 Trochoiden.....  | 95        |

# Inhalt

|  |            |
|--|------------|
| 11.3.2 PASCAL-Schnecke als Grundriß einer sphärischen Radlinie ..... | 96         |
| 11.3.2.1 Hippopede des EUDOXOS .....                                 | 96         |
| 11.3.3 Grundriß als Hüllkurve einer Geraden.....                     | 96         |
| <b>11.4 Konstruktive Behandlung sphärischer Radlinien.....</b>       | <b>96</b>  |
| 11.4.1 Konstruktion der Bahnkurve eines Punktes .....                | 96         |
| 11.4.2 Bahntangente.....   | 97         |
| 11.4.2.1 Sphärische Kreisevolvente .....                             | 97         |
| 11.4.3 Krümmungsachse .....  | 97         |
| <b>11.5 Hüllkurven von Großkreisen .....</b>                         | <b>98</b>  |
| 11.5.1 Punkt- und tangentialweise Konstruktion.....                  | 98         |
| 11.5.2 Spitzen der Hüllkurve.....                                    | 99         |
| <b>12 Sphärische Fußpunktcurve eines Kreises. Oktoide .....</b>      | <b>101</b> |
| 12.1 Punktweise Konstruktion .....                                   | 101        |
| 12.2 Tangentenkonstruktion.....                                      | 101        |
| 12.3 Scheitelkrümmungskreis.....                                     | 102        |
| <b>13 Das sphärische Gelenkviereck.....</b>                          | <b>103</b> |
| 13.1 Bezeichnungsweisen .....  | 103        |
| 13.2 Koppelbewegung.....   | 103        |
| 13.2.1 Analytische Beschreibung .....                                | 103        |
| 13.2.2 Koppelbewegung.....   | 105        |
| 13.2.3 Momentanachse.....  | 107        |
| 13.3 Das Kardangelenck.....  | 107        |
| 13.3.1 Eigenschaften. Analytische Behandlung .....                   | 107        |
| 13.4 Konstruktive Behandlung des sphärischen Gelenkvierecks .....    | 108        |
| 13.4.1 Momentanzentrum. Rastpolkurve .....                           | 109        |
| 13.4.2 Gangpolkurve.....   | 109        |
| 13.4.3 Koppelkurve. Krümmungskreis.....                              | 110        |
| 13.5 Die Taumelscheibe .....   | 110        |
| 13.5.1 Definition .....  | 110        |
| 13.5.2 Bahn eines Punktes.....                                       | 111        |
| 13.5.3 Bahntangente.....   | 111        |
| 13.5.4 Krümmungsachse. Krümmungskreis .....                          | 111        |
| <b>14 Verzahnung von Kegelrädern.....</b>                            | <b>112</b> |
| 14.1 Prinzipielles .....   | 112        |
| 14.2 Spezielle sphärische Verzahnungen.....                          | 114        |
| 14.2.1 Die Oktoidenverzahnung .....                                  | 114        |
| 14.2.2 Zykloidenverzahnung.....                                      | 115        |
| 14.2.3 Evolventenverzahnung.....                                     | 115        |
| <b>15 Endliche Bewegungen des Raumes .....</b>                       | <b>116</b> |
| 15.1 Drehungen des Raumes um eine Gerade allgemeiner Lage.....       | 116        |
| 15.2 Allgemeine Bewegung .....                                       | 116        |
| 15.3 Schraubung .....  | 117        |

# Inhalt

|  |            |
|--|------------|
| <b>15.4 Einführung dualer Elemente .....</b>   | <b>118</b> |
| <b>15.5 Zusammensetzung von Schraubungen .....</b>                                   | <b>121</b> |
| <b>15.6 Koordinatendarstellung einer Bewegung .....</b>                              | <b>121</b> |
| <b>16 Kontinuierliche Schraubungen.....</b>  | <b>123</b> |
| <b>16.1 Die Schraublinie.....</b>  | <b>123</b> |
| 16.1.1 Analytische Darstellung .....   | 123        |
| 16.1.2 Schraubtangente .....   | 123        |
| 16.1.3 Rechts- und Linksschraubungen.....  | 123        |
| <b>16.2 Der Schraubtangentenkomplex .....</b>  | <b>123</b> |
| <b>16.3 Nullsystem. Strahlgewinde.....</b>   | <b>123</b> |
| <b>16.4 Konstruktive Behandlung des Strahlgewindes .....</b>                         | <b>123</b> |
| 16.4.1 Angabe durch ein Paar reziproker Polaren und einen Gewindestrahl.....         | 123        |
| 16.4.2 Angabe durch drei Nullstrahlen und einer Ebene samt Nullpunkt.....            | 123        |
| 16.4.3 Angabe durch fünf Gewindestrahlen.....  | 123        |
| <b>16.5 Schraubung und duale Vektoren.....</b>                                       | <b>123</b> |
| <b>16.6 Schraubflächen.....</b>  | <b>123</b> |
| 16.6.1 Strahlschraubflächen.....   | 123        |
| 16.6.2 Hüllflächen .....   | 123        |
| 16.6.3 Konstruktion der Charakteristik.....  | 123        |
| 16.6.3.1 Charakteristik einer Ebene .....  | 123        |
| 16.6.3.2 Charakteristik der Kugel.....   | 123        |
| 16.6.3.3 Charakteristiken von Drehflächen.....                                       | 123        |
| <b>17 Kontinuierliche Bewegungen .....</b>   | <b>139</b> |
| <b>17.1 Momentaner Bewegungszustand eines starren Körpers .....</b>                  | <b>139</b> |
| 17.1.1 Momentanschraubung. Momentaner Geschwindigkeitszustand.....                   | 139        |
| 17.1.2 Die Bewegung einer Geraden .....  | 141        |
| 17.1.3 Bewegung einer Strecke .....  | 142        |
| <b>17.2 Festlegung der Bewegung eines starren Körpers durch Führungen.....</b>       | <b>142</b> |
| 17.2.1 Führung zweier Punkte auf Kurven und Flächenführung eines weiteren Punktes .. | 142        |
| 17.2.2 Kurvenführung eines Punktes und Flächenführung dreier weiterer Punkte .....   | 142        |
| 17.2.3 Flächenführung von fünf Punkten.....  | 143        |
| 17.2.4 Anwendungsbeispiel (1).....   | 143        |
| 17.2.4.1 Bahntangente.....   | 143        |
| 17.2.4.2 Momentanachse.....  | 143        |
| 17.2.4.3 Parameter der Momentanschraubung .....                                      | 144        |
| <b>17.3 Geschwindigkeitsverhältnisse .....</b>                                       | <b>144</b> |
| 17.3.1 Geschwindigkeitsplan .....  | 144        |
| 17.3.2 Motoren .....   | 146        |
| 17.3.3 Konstruktive Behandlung der Geschwindigkeitsverhältnisse.....                 | 147        |
| 17.3.3.1 Kurvenführung zweier Punkte und Flächenführung eines weiteren Punktes.....  | 147        |
| 17.3.3.2 Kurvenführung eines Punktes und Flächenführung dreier weiterer Punkte ..    | 148        |
| 17.3.4 Anwendungsbeispiel (2).....   | 149        |
| 17.3.4.1 Geschwindigkeiten.....  | 149        |
| 17.3.4.2 Momentanachse und Translationsgeschwindigkeit.....                          | 149        |
| 17.3.4.3 Momentane Winkelgeschwindigkeit .....                                       | 149        |

# Inhalt

|   |            |
|---|------------|
| <b>17.4 Beschleunigungsverhältnisse.....</b>                                      | <b>150</b> |
| 17.4.1 Momentane Winkelbeschleunigung. Momentane Translationsbeschleunigung....   | 150        |
| 17.4.2 Beschleunigungsplan.....   | 152        |
| 17.4.3 Tangentialbeschleunigung. Normalbeschleunigung. Krümmung. Wendepunkte ..   | 154        |
| 17.4.3.1 Punkte verschwindender Tangentialbeschleunigung.....                     | 156        |
| 17.4.3.2 Punkte verschwindender Normalbeschleunigung .....                        | 156        |
| 17.4.4 Beschleunigungsverhältnisse einer Geraden.....                             | 157        |
| 17.4.5 Die Affinität zwischen Lage- und Beschleunigungsplan.....                  | 158        |
| 17.4.5.1 Kurvenführung zweier Punkte und FLächenührung eines weiteren Punktes     | 159        |
| 17.4.5.2 Kurvenführung eines Punktes und Flächenführung dreier weiterer Punkte .. | 160        |
| 17.4.6 Anwendungsbeispiel (3).....  | 161        |
| 17.4.6.1 Beschleunigungsachse.....  | 162        |
| 17.4.6.2 Krümmungsradius.....   | 162        |
| <b>18 Mehrere bewegte Systeme .....</b>   | <b>163</b> |
| <b>18.1 Geschwindigkeitsverhältnisse .....</b>                                    | <b>163</b> |
| 18.1.1 Relativbewegung dreier Systeme.....  | 163        |
| 18.1.2 Anwendung der Motorrechnung .....  | 164        |
| 18.1.3 Geschwindigkeitsverhältnisse bei Relativbewegung .....                     | 165        |
| <b>18.2 Beschleunigungsverhältnisse.....</b>                                      | <b>166</b> |
| 18.2.1 Winkelbeschleunigungen.....  | 166        |
| 18.2.2 Bahnbeschleunigungen. CORIOLISbeschleunigung .....                         | 166        |
| <b>18.3 Getriebe .....</b>  | <b>167</b> |
| 18.3.1 Freie Beweglichkeit .....  | 167        |
| 18.3.2 Eingeschränkte Beweglichkeit. Freiheitsgrade .....                         | 167        |
| 18.3.2.1 $u = 1, f = 5$ .....   | 168        |
| 18.3.2.2 $u = 2, f = 4$ .....   | 168        |
| 18.3.2.3 $u = 3, f = 3$ .....   | 168        |
| 18.3.2.4 $u = 4, f = 2$ .....   | 168        |
| 18.3.2.5 $u = 5, f = 1$ .....   | 168        |
| 18.3.3 Freiheitsgrad zusammengesetzter Getriebe .....                             | 168        |
| 18.3.3.1 Räumliche Schubgetriebe .....  | 169        |
| 18.3.3.2 Sphärische Getriebe .....  | 169        |
| <b>18.4 Zwangläufige Getriebe.....</b>  | <b>169</b> |
| 18.4.1 Die Siebengelenkskette .....   | 169        |
| 18.4.2 Ableitungen aus der Siebengelenkskette.....                                | 170        |
| 18.4.3 Getriebe mit mehr als sieben Gliedern .....                                | 171        |
| <b>18.5 Spezielle Gelenkkombinationen .....</b>                                   | <b>171</b> |
| 18.5.1 Binäre Koppel .....  | 171        |
| 18.5.2 Kombination von Kugel- und Zylindergelenk .....                            | 171        |
| <b>18.6 Spezielle zwangläufige Getriebe.....</b>                                  | <b>172</b> |
| 18.6.1 Das Isogramm von G. T. BENNET .....  | 172        |
| 18.6.1.1 Notwendige Bedingungen .....   | 172        |
| 18.6.1.2 Hinreichende Bedingungen.....  | 173        |
| 18.6.2 Die fünf- und sechsgliedrigen Getriebe von GOLDBERG .....                  | 175        |
| 18.6.3 Der sechsgliedrige Mechanismus von BRICARD .....                           | 175        |
| 18.6.4 Das Oktaeder von BRICARD .....   | 176        |
| <b>19 Bewegungen des Geradenraumes.....</b>                                       | <b>177</b> |

# Inhalt

|   |            |
|---|------------|
| <b>19.1 Axoide</b> .....  | <b>177</b> |
| 19.1.1 Sphärische Bewegung der dualen Einheitskugel. Rast- und Gangaxoid..... | 177        |
| 19.1.2 Differenzengeometrisches Modell .....                                  | 178        |
| 19.1.3 Differentialgeometrische Eigenschaften der Axoide.....                 | 179        |
| 19.1.4 Sonderfälle für das Abschroten der Axoide .....                        | 180        |
| 19.1.4.1 $p \neq 0, d_p \neq 0$ .....   | 180        |
| 19.1.4.2 $p \neq 0, d_p \equiv 0$ .....                                       | 180        |
| 19.1.4.3 $p \equiv 0, d_p \neq 0$ .....                                       | 180        |
| 19.1.4.4 $p \equiv 0, d_p \equiv 0$ .....                                     | 180        |
| 19.1.4.5 $v_p \equiv \mathbf{o}$ .....  | 180        |
| <b>19.2 Symmetrische Schrotungen</b> .....                                    | <b>180</b> |
| 19.2.1 Allgemeine Begriffe.....   | 180        |
| 19.2.2 Die BENNETTsche Bewegung als symmetrische Schrotung.....               | 181        |
| 19.2.3 Die BRICARDsche Bewegung mit lauter sphärischen Bahnkurven .....       | 182        |
| 19.2.4 Das PLÜCKER-Konoid als Grundfläche.....                                | 183        |
| 19.2.5 Wendelfläche als Grundkurve .....                                      | 184        |
| 19.2.6 Hyperbolisches Paraboloid als Grundfläche.....                         | 184        |
| 19.2.7 Torse als Grundfläche.....   | 184        |
| 19.2.8 Binormalenfläche einer Raumkurve als Grundfläche.....                  | 184        |
| 19.2.9 Ausartungsfälle.....   | 184        |
| 19.2.9.1 Zylinder als Grundfläche .....                                       | 184        |
| 19.2.9.2 Kegel als Grundfläche .....  | 184        |
| 19.2.9.3 Strahlbüschel als Grundfläche .....                                  | 185        |
| <b>19.3 Der Umschwung von DARBOUX</b> .....                                   | <b>185</b> |
| <b>19.4 Krümmungsverhältnisse bei Bahnstrahlflächen</b> .....                 | <b>186</b> |
| 19.4.1 Duale Geschwindigkeit .....  | 186        |
| 19.4.2 Krümmungsachse .....   | 187        |
| 19.4.3 Krümmungsschraubfläche.....  | 187        |
| 19.4.4 Krümmungsschraubfläche einer Torse.....                                | 188        |
| 19.4.5 Duale Fassung der Formel von POINSOT .....                             | 189        |
| 19.4.6 Paare von auf einander abschrotenden Strahlflächen.....                | 189        |
| 19.4.7 Duale Fassung der Formel von SERRET .....                              | 190        |
| <b>20 Mehrere bewegte Systeme des Geradenraumes</b> .....                     | <b>191</b> |
| <b>20.1 Zusammensetzung von Bewegungen</b> .....                              | <b>191</b> |
| 20.1.1 Lage der Relativachsen. Normalennetze.....                             | 191        |
| 20.1.2 Drehungen um windschiefe Achsen.....                                   | 191        |
| 20.1.2.1 Zusammensetzung zweier Drehungen.....                                | 191        |
| 20.1.2.2 Zerlegung einer Schraubung in zwei Drehungen.....                    | 192        |
| 20.1.3 Zusammensetzung von Schraubungen.....                                  | 192        |
| 20.1.4 Konstruktion der resultierenden Achsen.....                            | 194        |
| 20.1.4.1 Allgemeiner Fall.....  | 194        |
| 20.1.4.2 Schneidende Achsen und gleiche Parameter .....                       | 195        |
| 20.1.4.3 Parallele Schraubachsen .....  | 195        |
| 20.1.4.4 Zusammensetzung einer Schiebung mit einer Schraubung.....            | 195        |
| <b>20.2 Das PLÜCKER - Konoid</b> .....  | <b>196</b> |
| 20.2.1 Definition und Eigenschaften .....                                     | 196        |
| 20.2.2 Schraubungen mit schneidenden Achsen .....                             | 198        |

# Inhalt

---

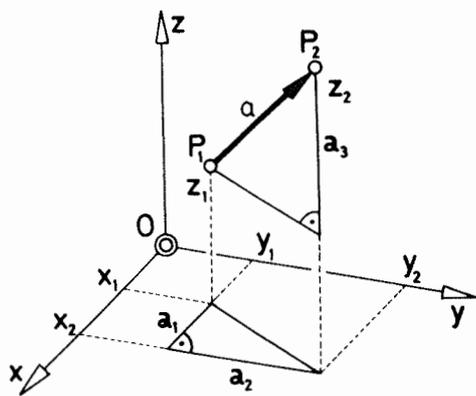
|   |            |
|---|------------|
| 20.2.3 Schraubungen mit parallelen Achsen .....                   | 198        |
| 20.2.4 Schraubung und Schiebung .....                             | 198        |
| <b>20.3 Räumliche Getriebe .....</b>                              | <b>199</b> |
| 20.3.1 Das räumliche Genekviereck .....                           | 199        |
| 20.3.2 Getriebe von Typ 0D1K2D3Z0 .....                           | 202        |
| 20.3.3 Getriebe vom Typ 0D1K2D3D4D0 .....                         | 203        |
| <b>20.4 Übergeschlossene Systeme mit lauter Drehgelenken.....</b> | <b>203</b> |
| 20.4.1 Viergliedrige Getriebe .....                               | 203        |
| 20.4.2 Fünfgliedrige Getriebe .....                               | 204        |
| 20.4.3 Sechsgliedrige Getriebe .....                              | 204        |
| <b>21 Duale sphärische Radlinien.....</b>                         | <b>205</b> |
| 21.1 Interpretation im Reellen.....                               | 205        |
| 21.2 Axoide.....  | 206        |
| 21.3 Schraublinien höherer Stufe (Helikoiden) .....               | 207        |
| <b>22 Verzahnung von Hyperboloidrädern.....</b>                   | <b>209</b> |
| <b>Literatur.....</b>   | <b>212</b> |
| <b>Stichwortverzeichnis.....</b>                                  | <b>217</b> |
| <b>Inhalt.....</b>  | <b>223</b> |

# **Sphärische und räumliche Kinematik**

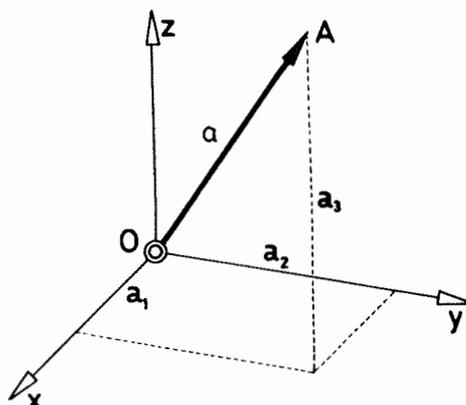
## **Figuren**

**Wolfgang STRÖHER**

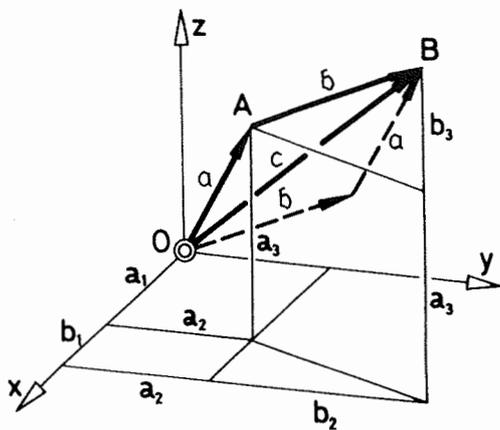
# Figuren 1.1-1.6



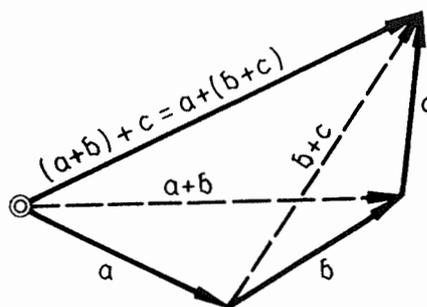
**Figur 1.1**



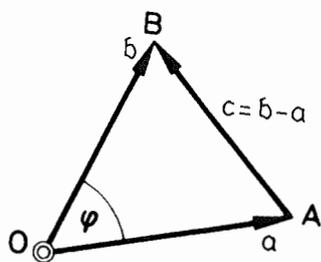
**Figur 1.2**



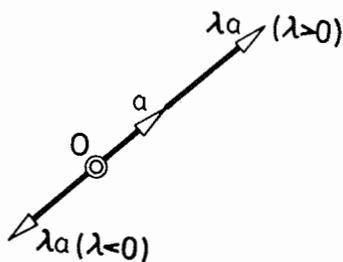
**Figur 1.3**



**Figur 1.4**

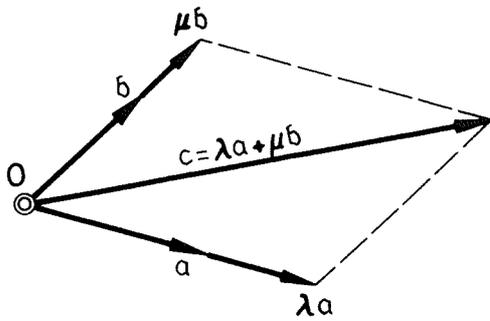


**Figur 1.5**

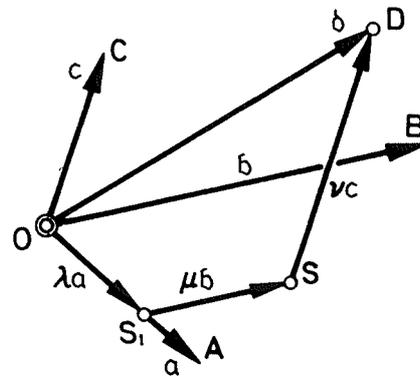


**Figur 1.6**

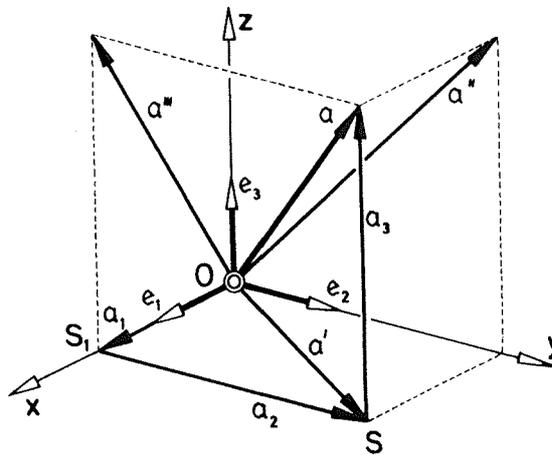
Figuren 1.7-1.11



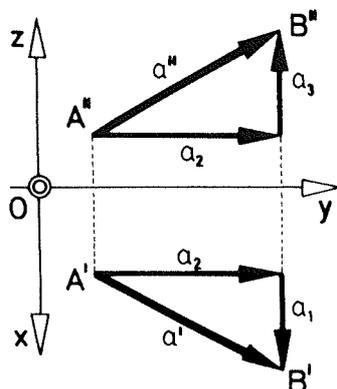
Figur 1.7



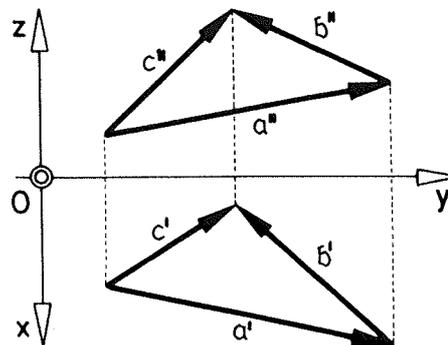
Figur 1.8



Figur 1.9

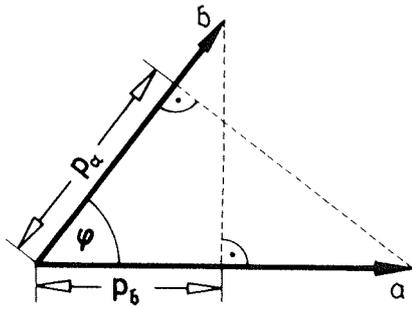


Figur 1.10

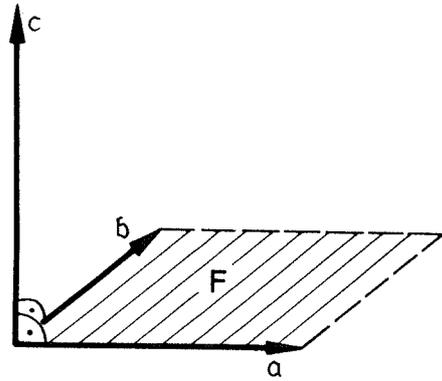


Figur 1.11

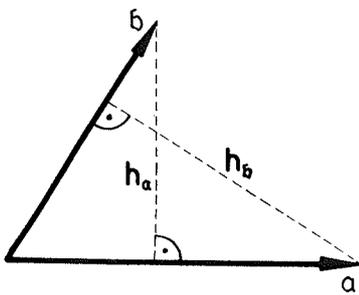
Figuren 1.12-1.17



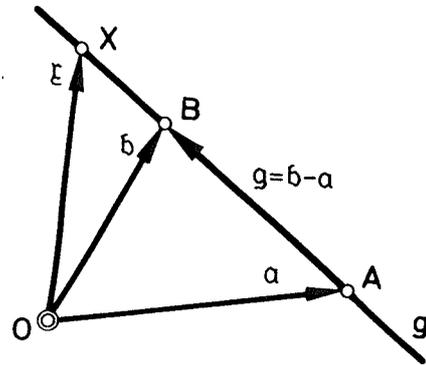
Figur 1.12



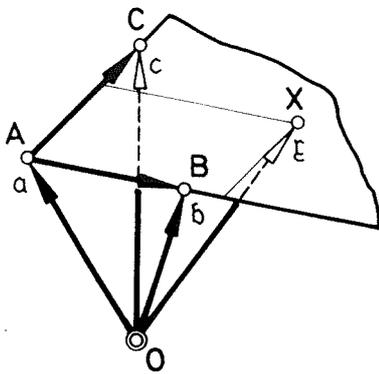
Figur 1.13



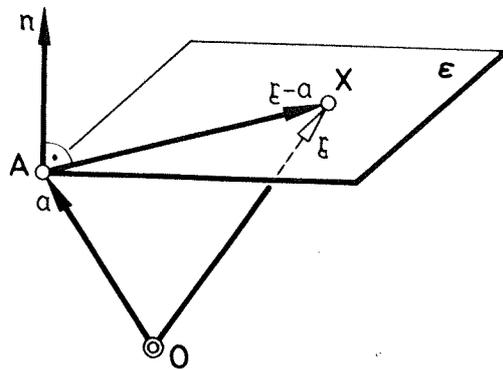
Figur 1.14



Figur 1.15

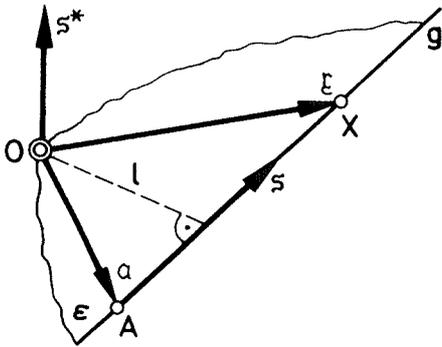


Figur 1.16

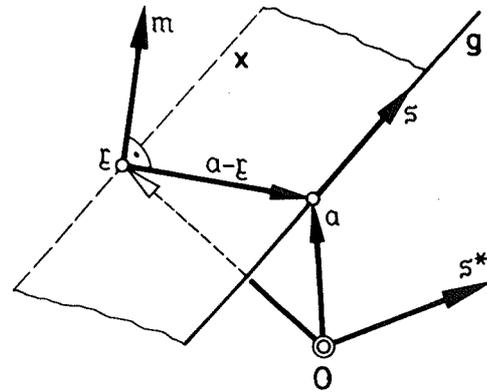


Figur 1.17

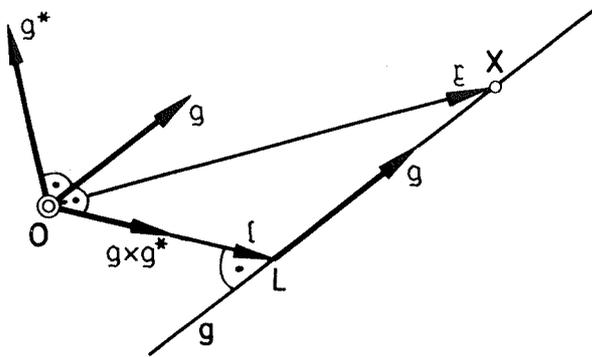
Figuren 1.18-1.23



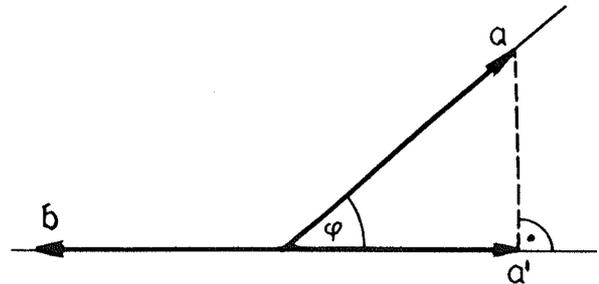
Figur 1.18



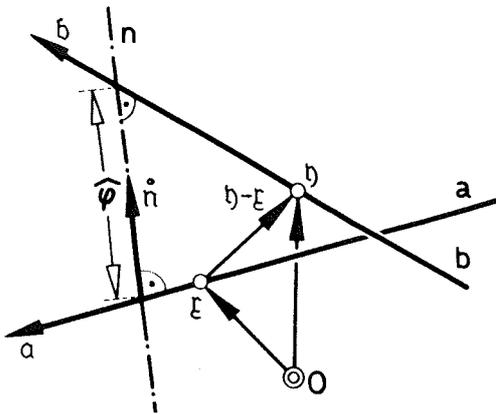
Figur 1.19



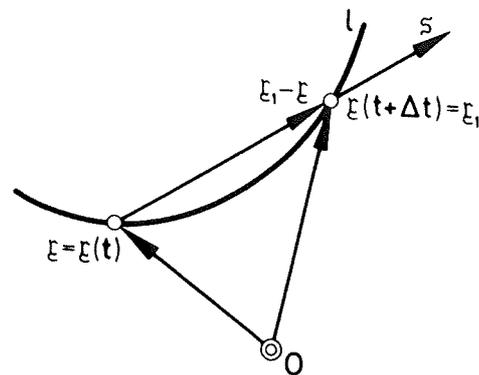
Figur 1.20



Figur 1.21

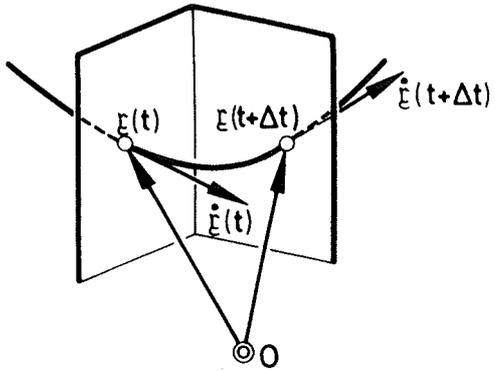


Figur 1.22

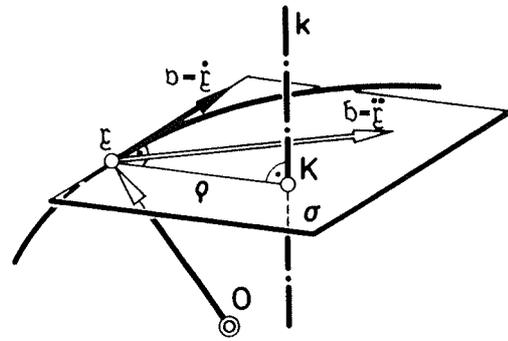


Figur 1.23

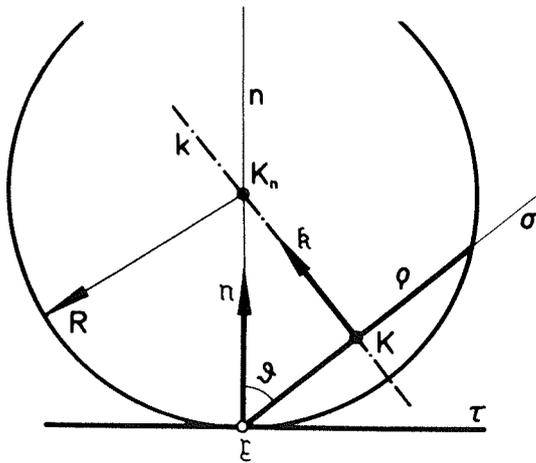
Figuren 1.24-1.27, Figur 2.1



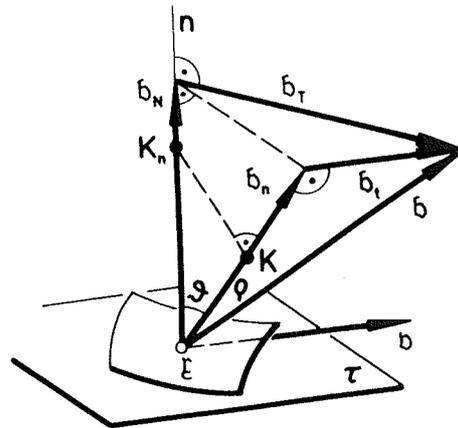
Figur 1.24



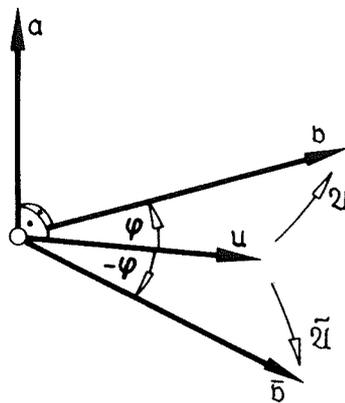
Figur 1.25



Figur 1.26

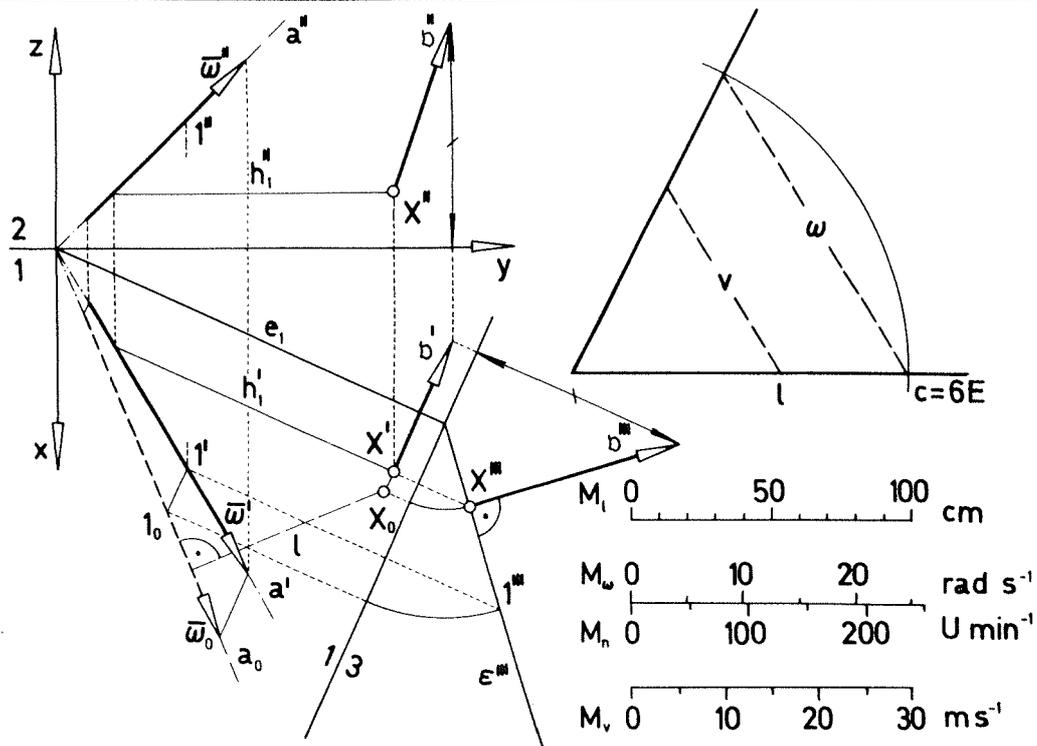


Figur 1.27

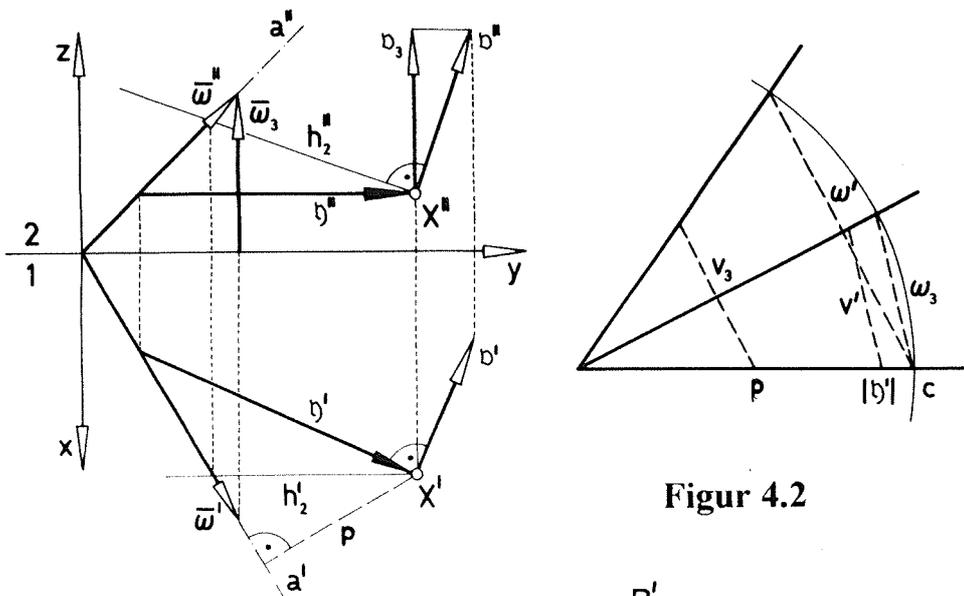


Figur 2.1

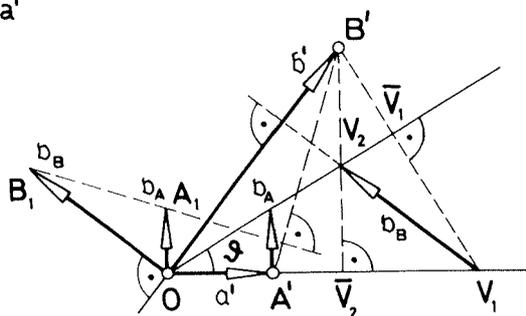
Figuren 4.1-4.3



Figur 4.1



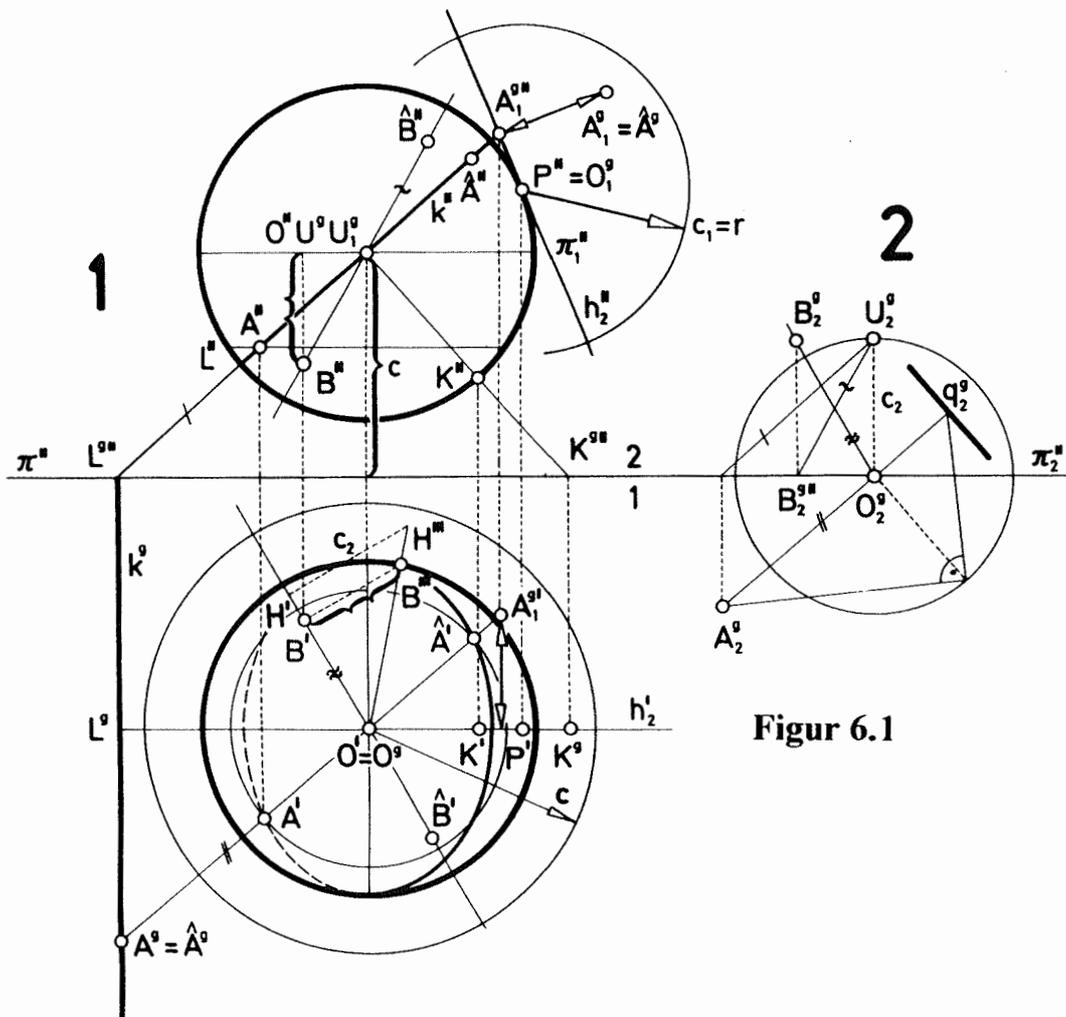
Figur 4.2



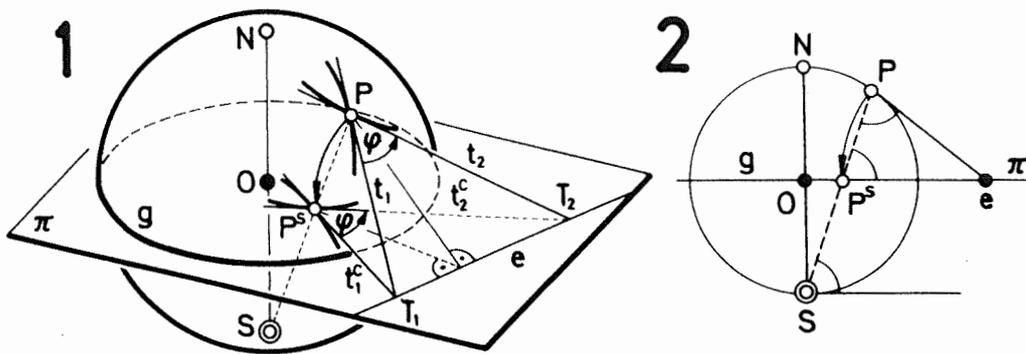
Figur 4.3



Figur 6.1, Figur 7.1

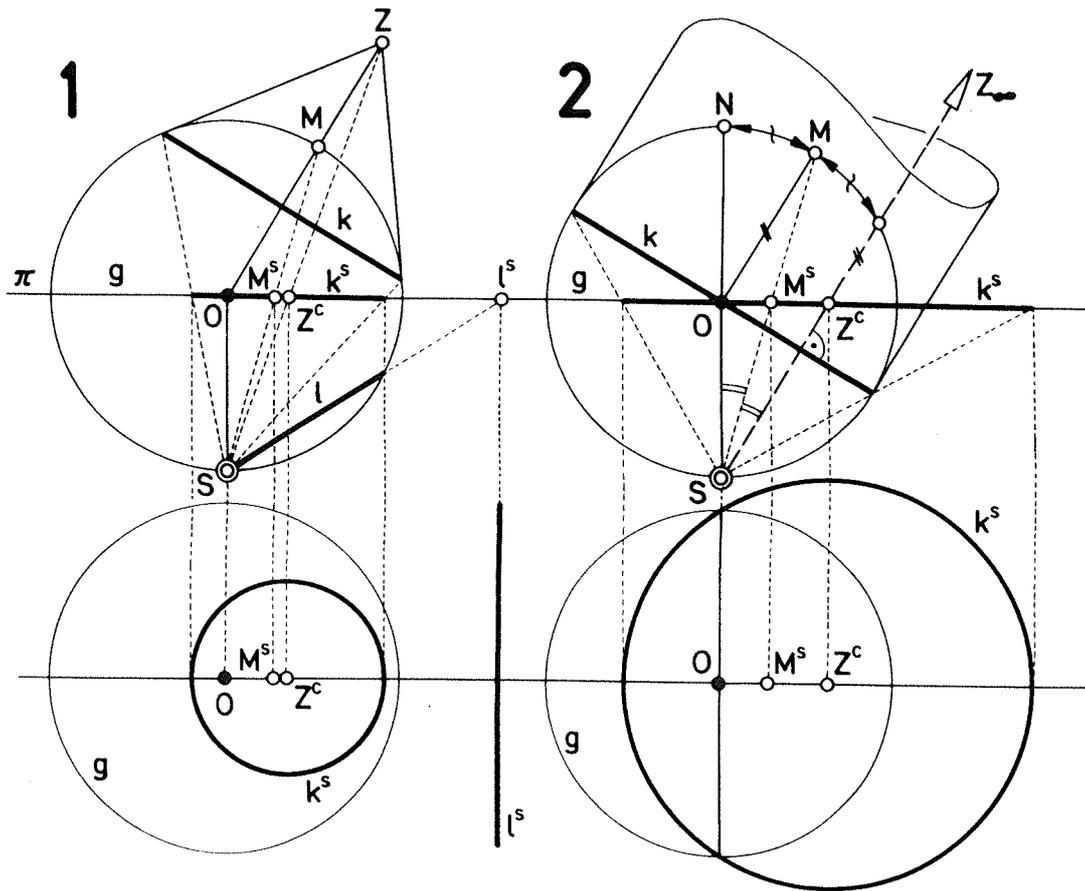


Figur 6.1

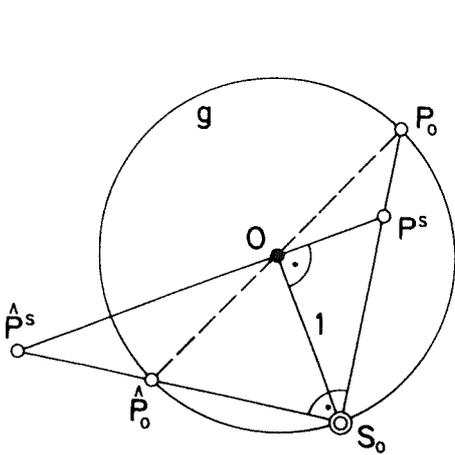


Figur 7.1

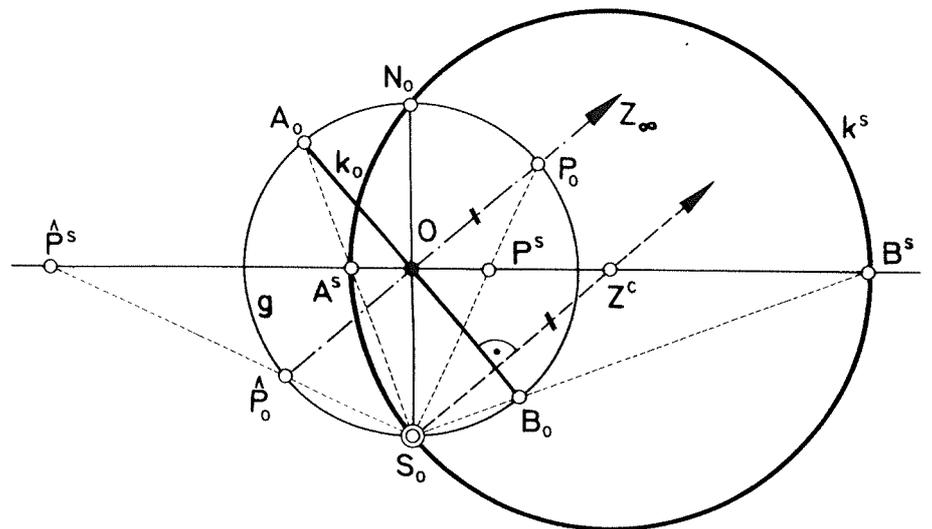
Figuren 7.2-7.4



Figur 7.2

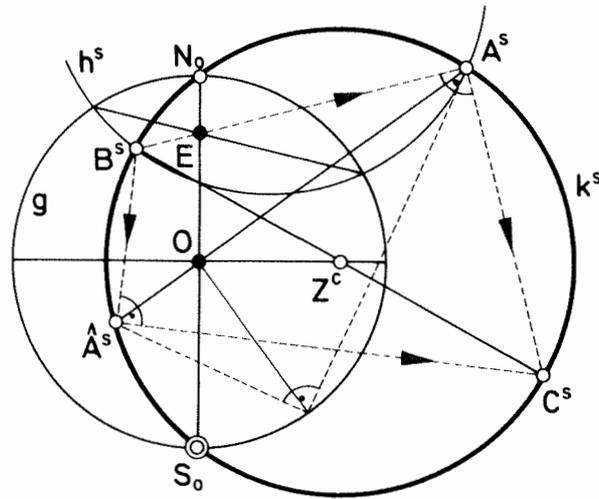


Figur 7.3

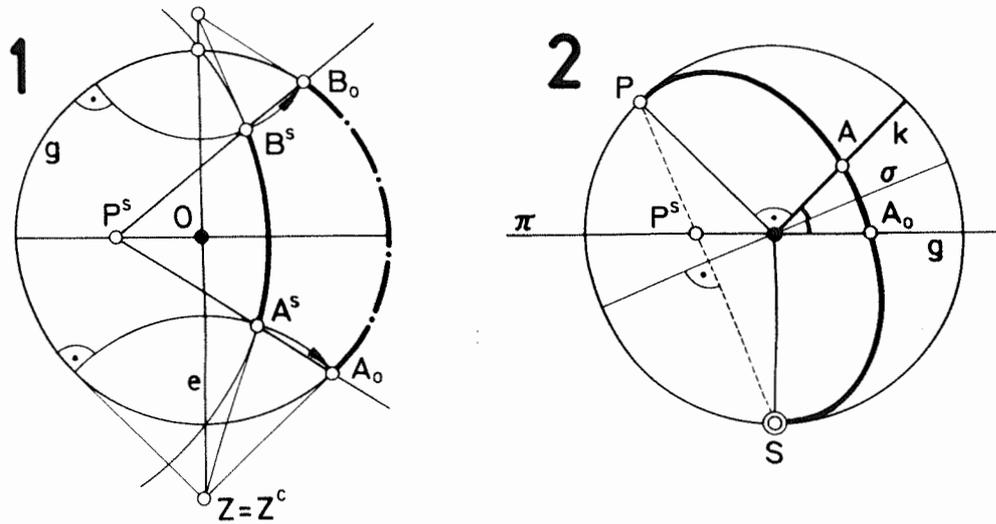


Figur 7.4

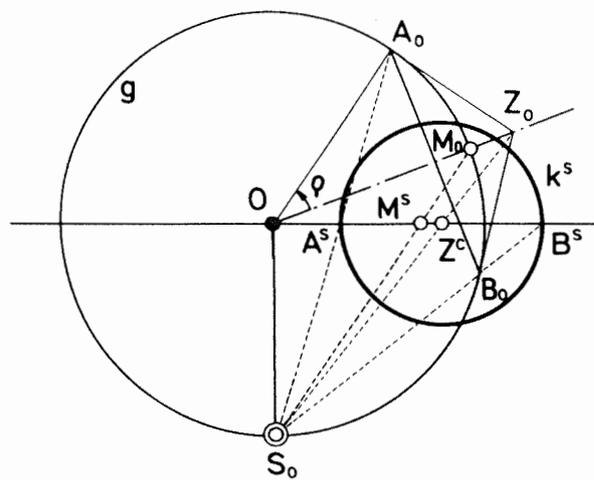
Figuren 7.5-7.7



Figur 7.5

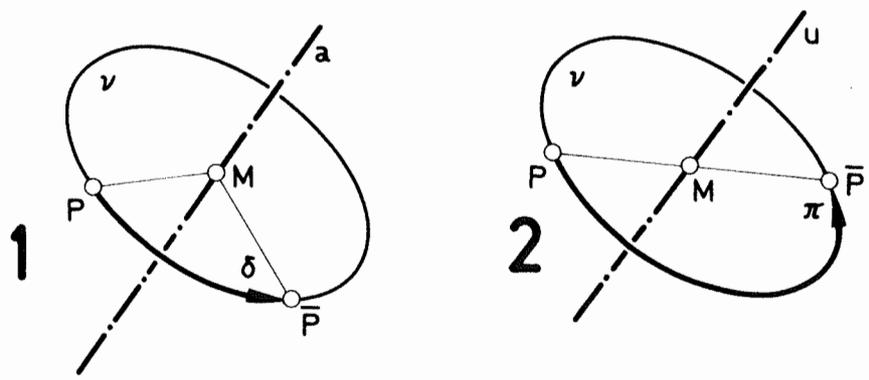


Figur 7.6

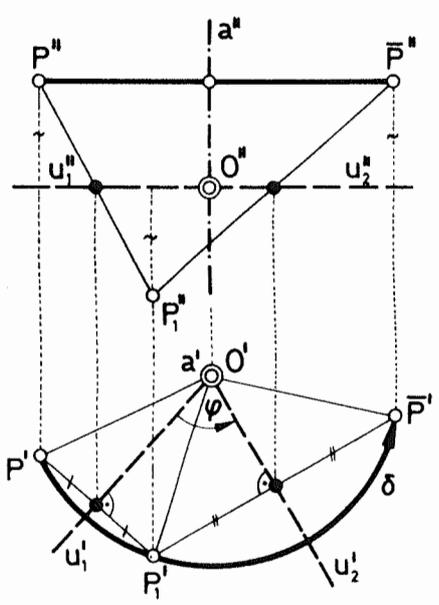


Figur 7.7

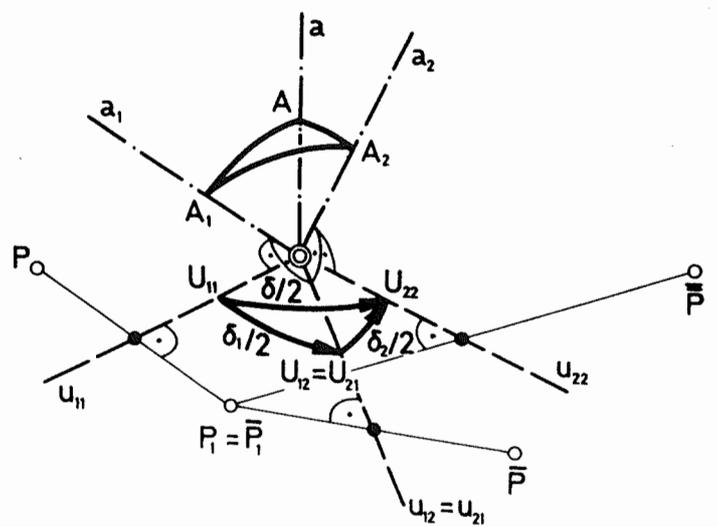
Figuren 8.1-8.4



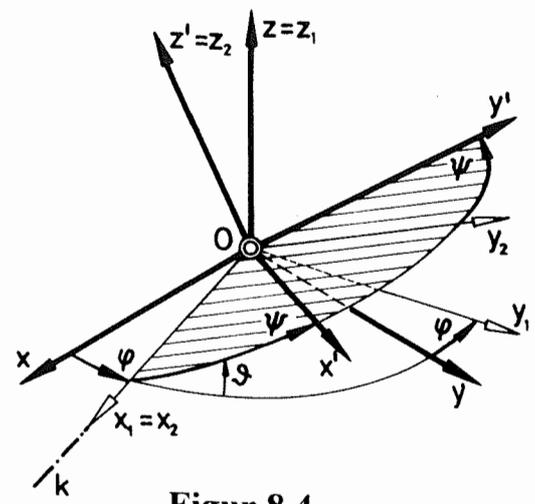
Figur 8.1



Figur 8.2

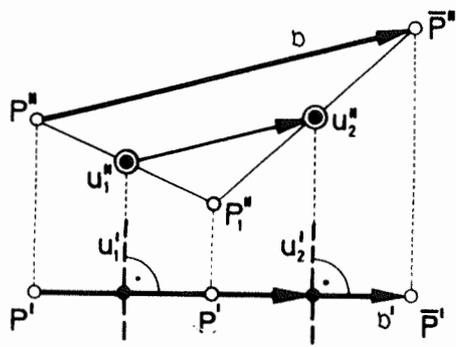


Figur 8.3

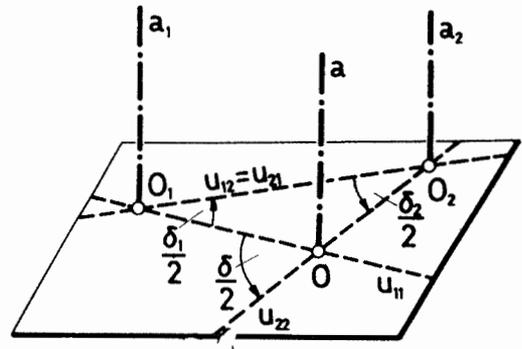


Figur 8.4

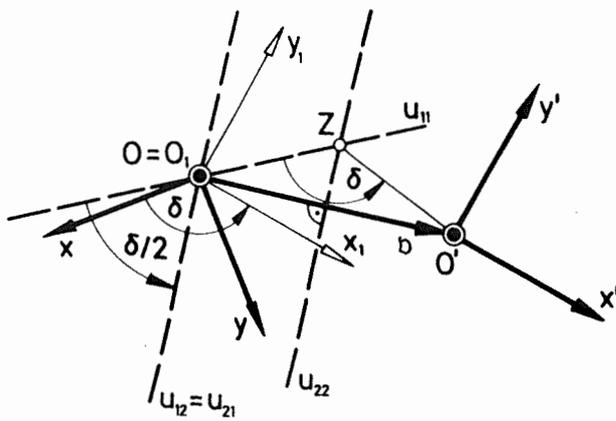
Figuren 8.6-8.10



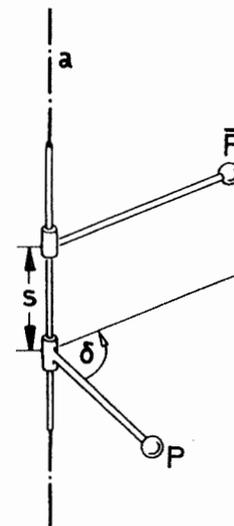
Figur 8.5



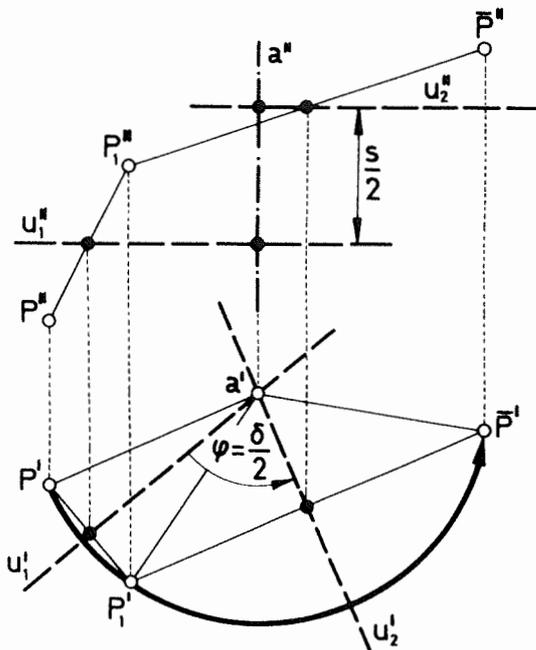
Figur 8.6



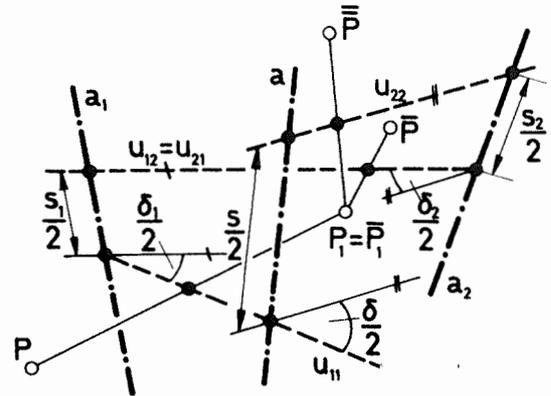
Figur 8.7



Figur 8.8

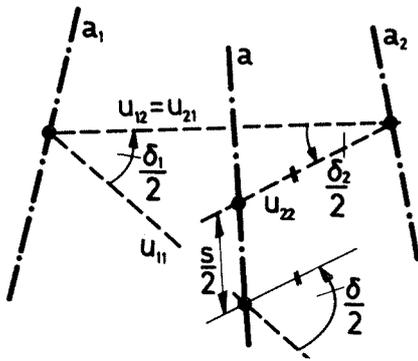


Figur 8.9

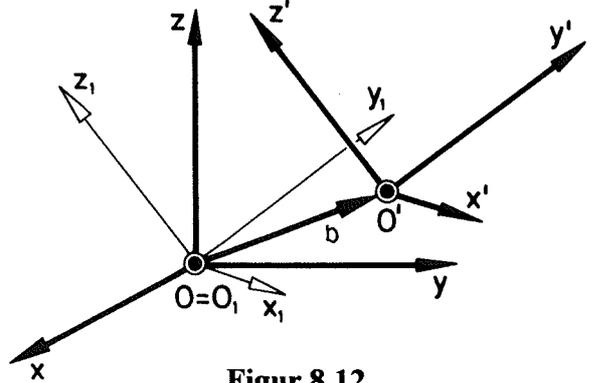


Figur 8.10

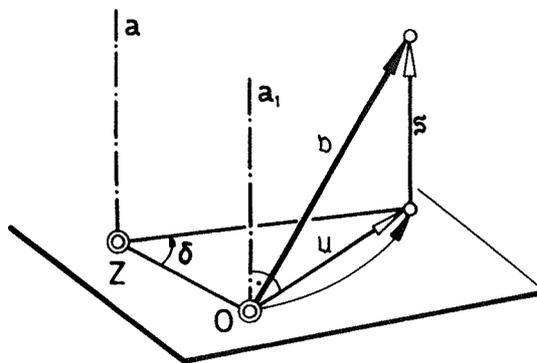
Figuren 8.11-8.14



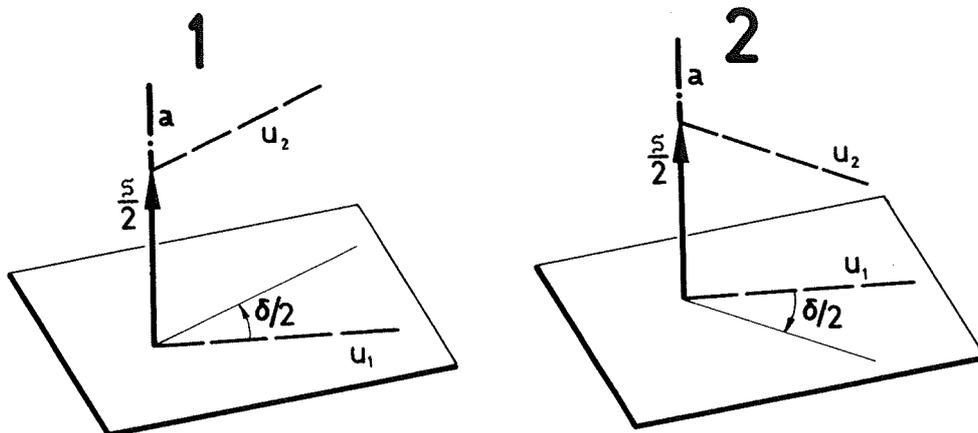
Figur 8.11



Figur 8.12

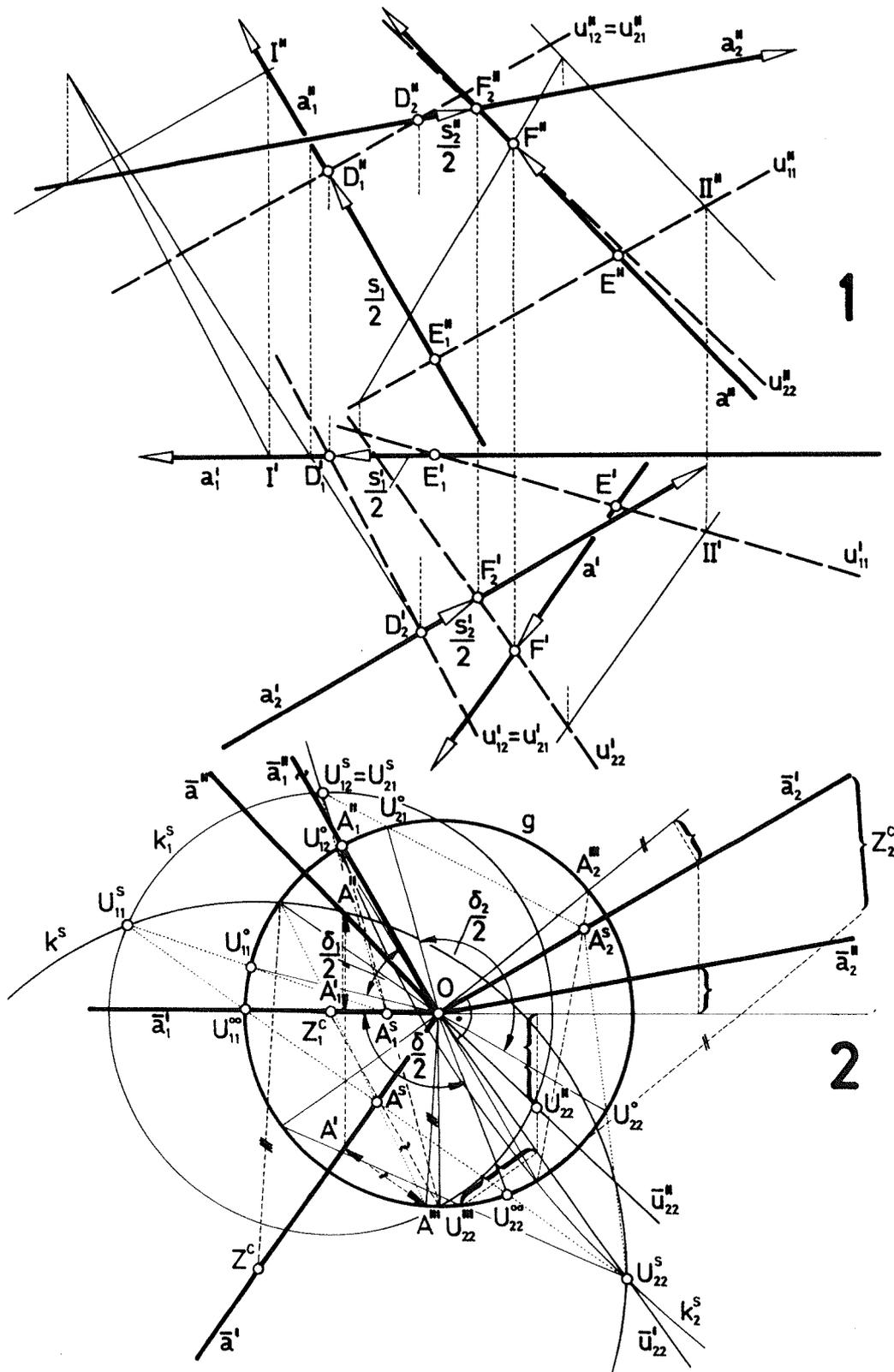


Figur 8.13



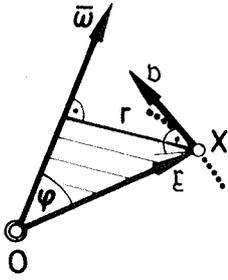
Figur 8.14

Figur 8.15

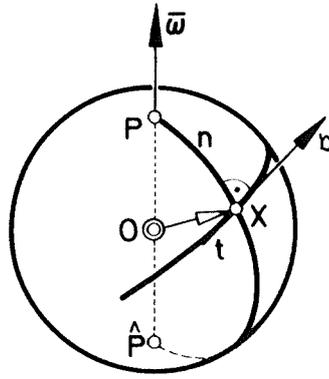


Figur 8.15

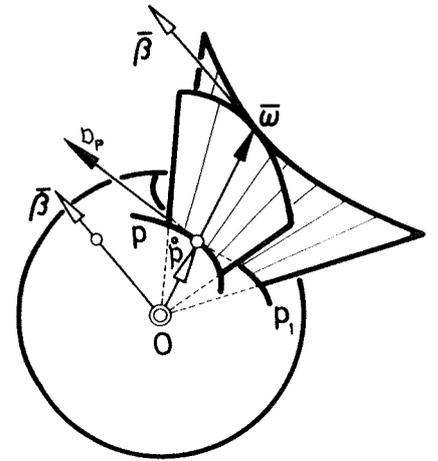
Figuren 10.1-10.7



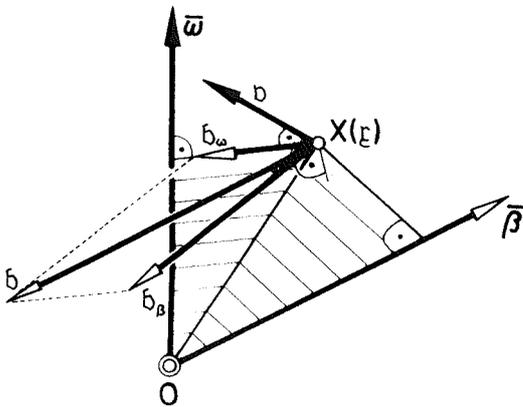
Figur 10.1



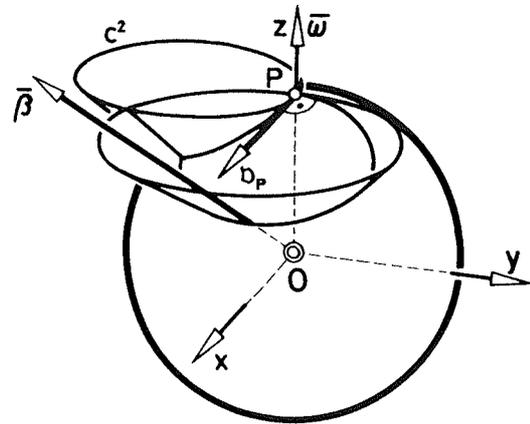
Figur 10.2



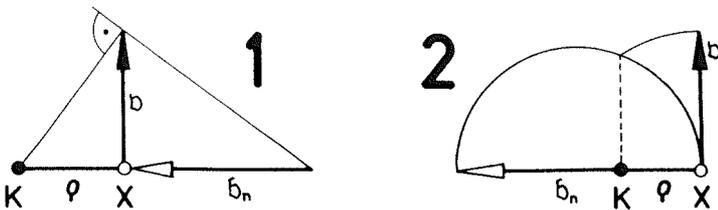
Figur 10.3



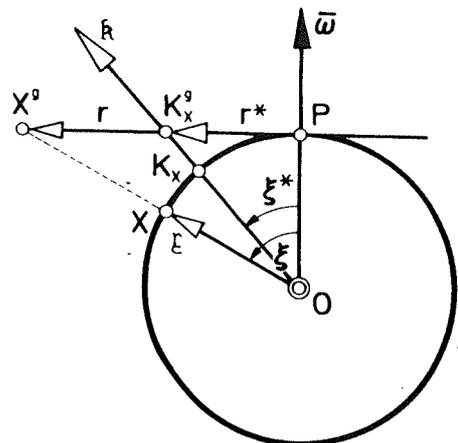
Figur 10.4



Figur 10.5

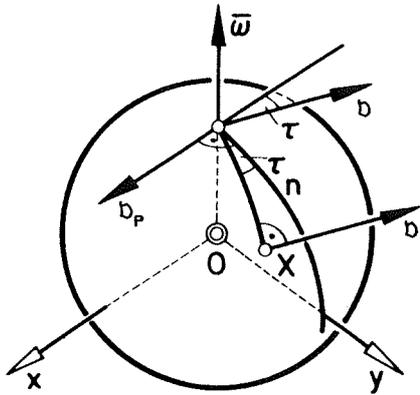


Figur 10.6

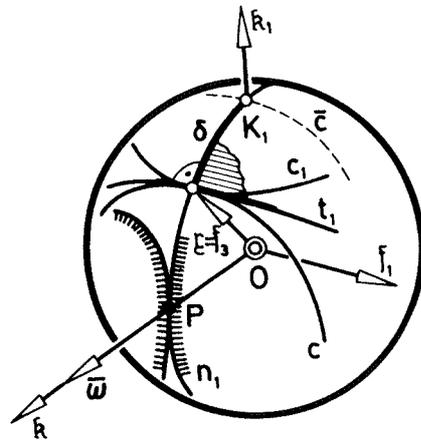


Figur 10.7

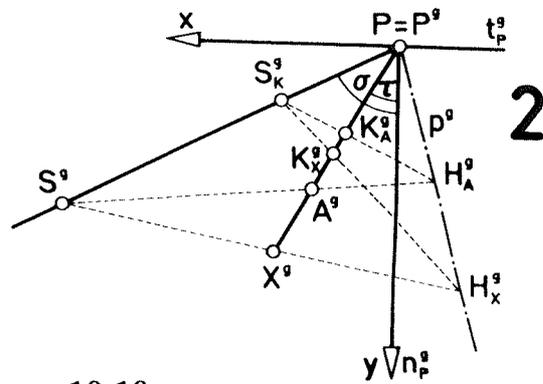
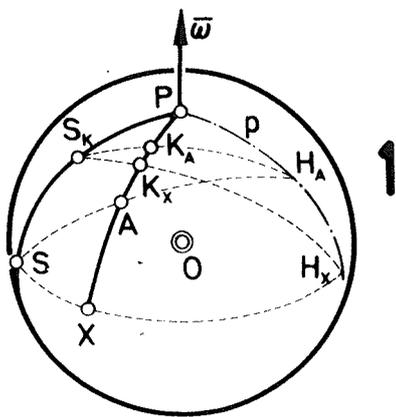
Figuren 10.8-10.11



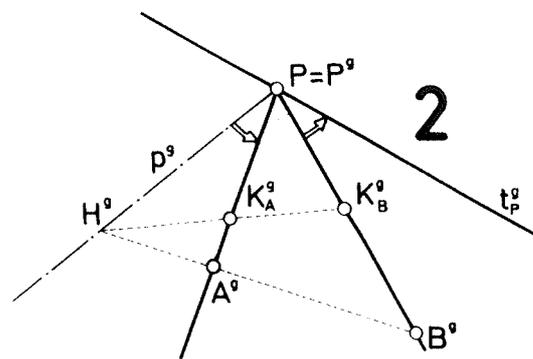
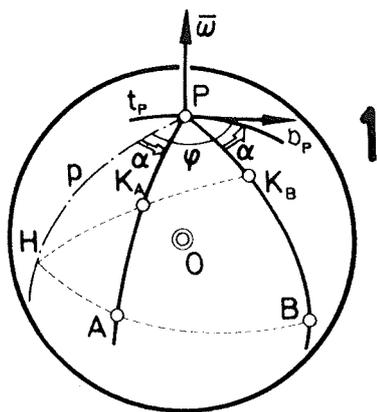
Figur 10.8



Figur 10.9

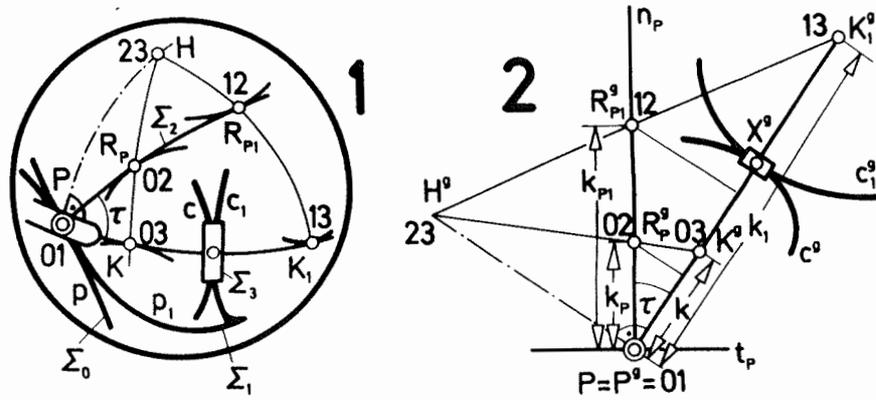


Figur 10.10

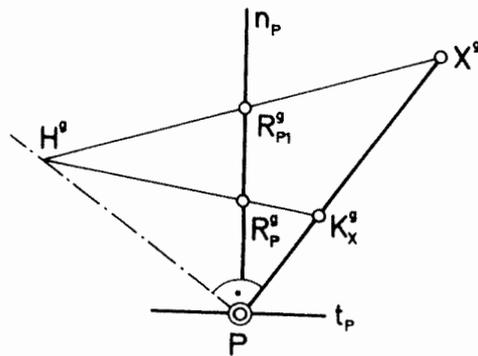


Figur 10.11

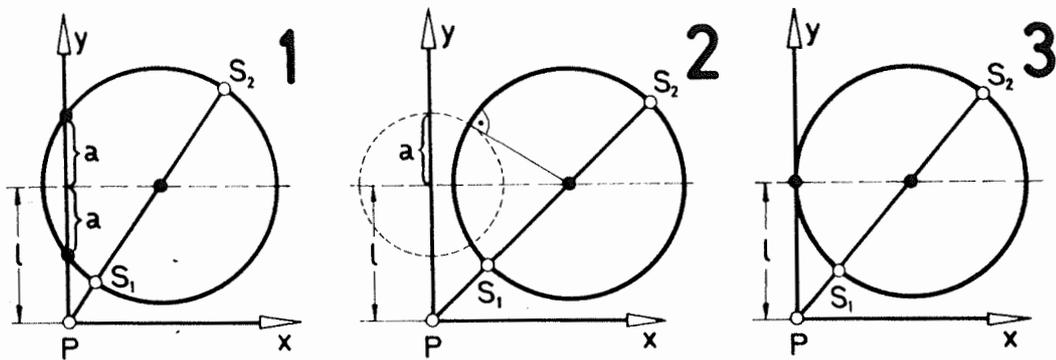
Figuren 10.12-10.13



Figur 10.12

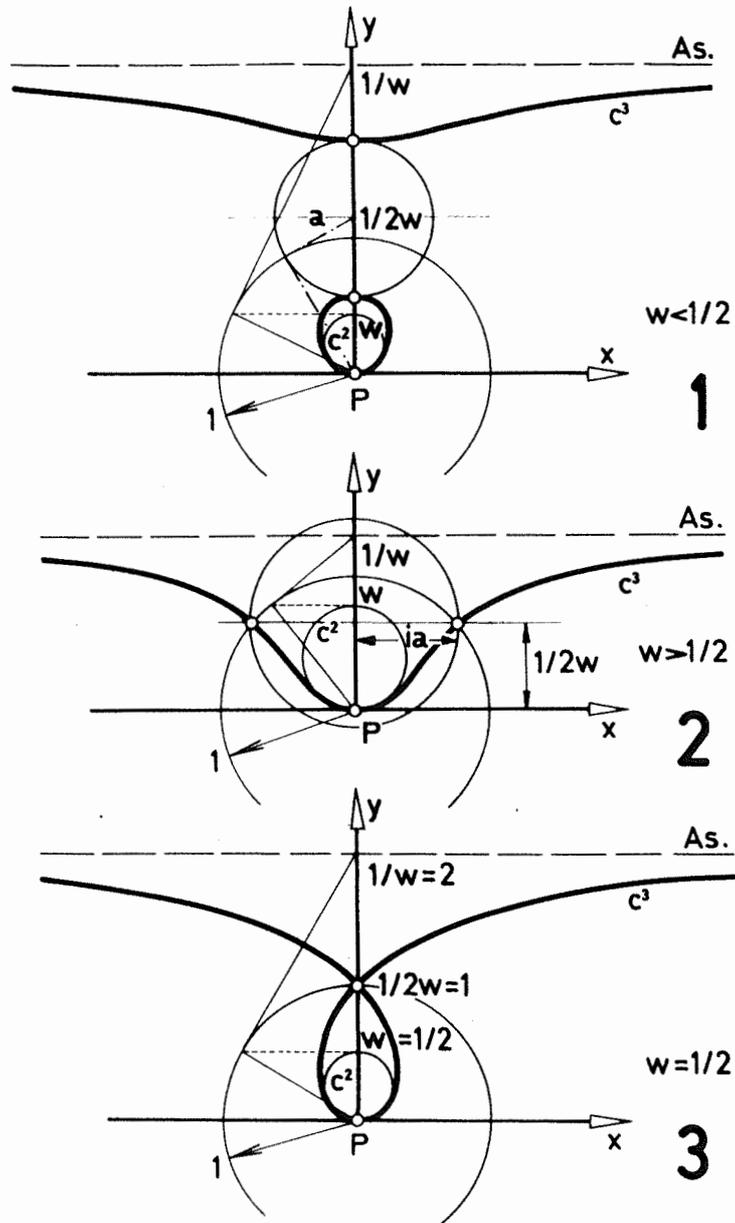


Figur 10.12.3

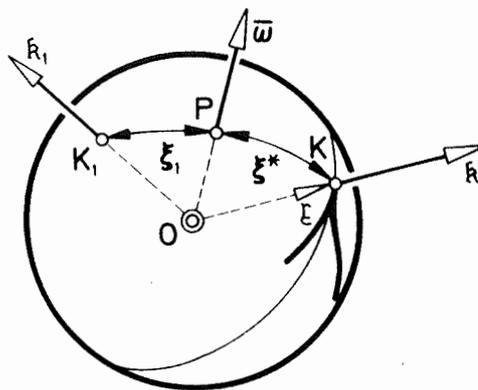


Figur 10.13

Figuren 10.14-10.15

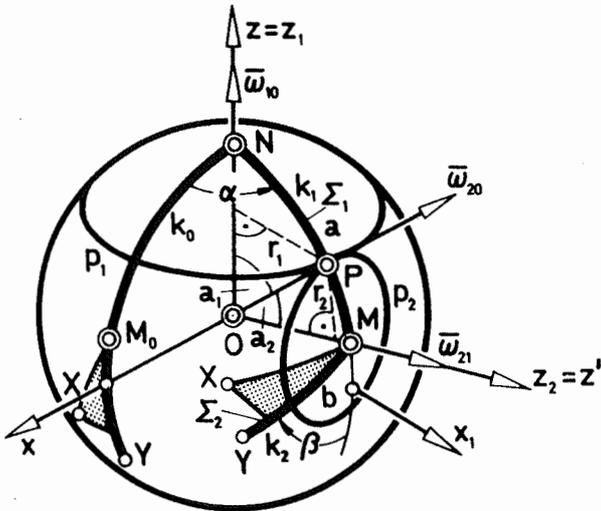


Figur 10.14

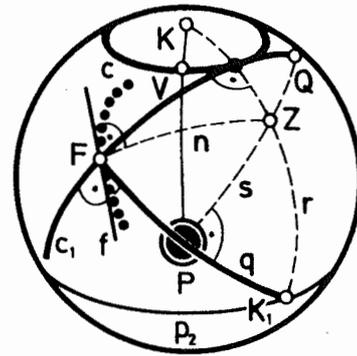


Figur 10.15

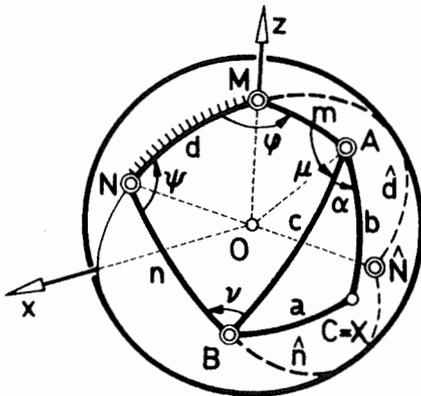
Figur 11.1, Figur 12.1, Figuren 13.1-13.4



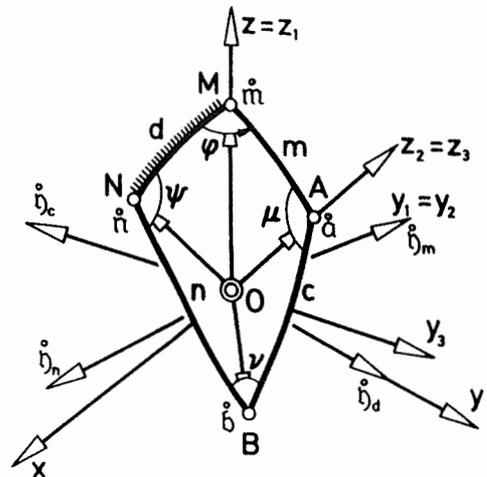
Figur 11.1



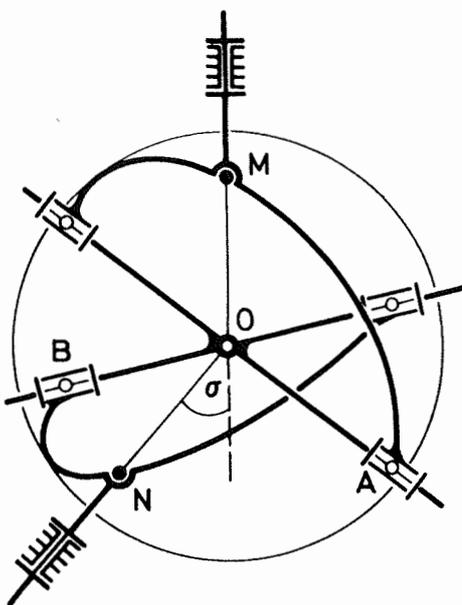
Figur 12.1



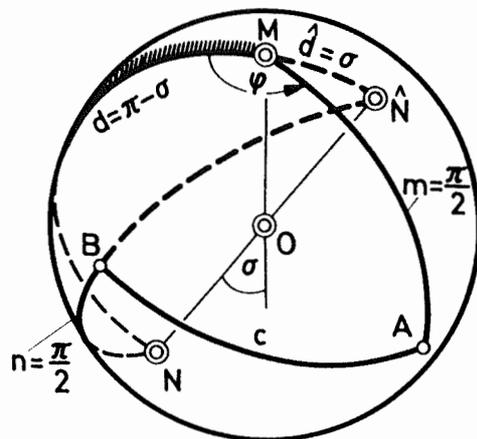
Figur 13.1



Figur 13.2

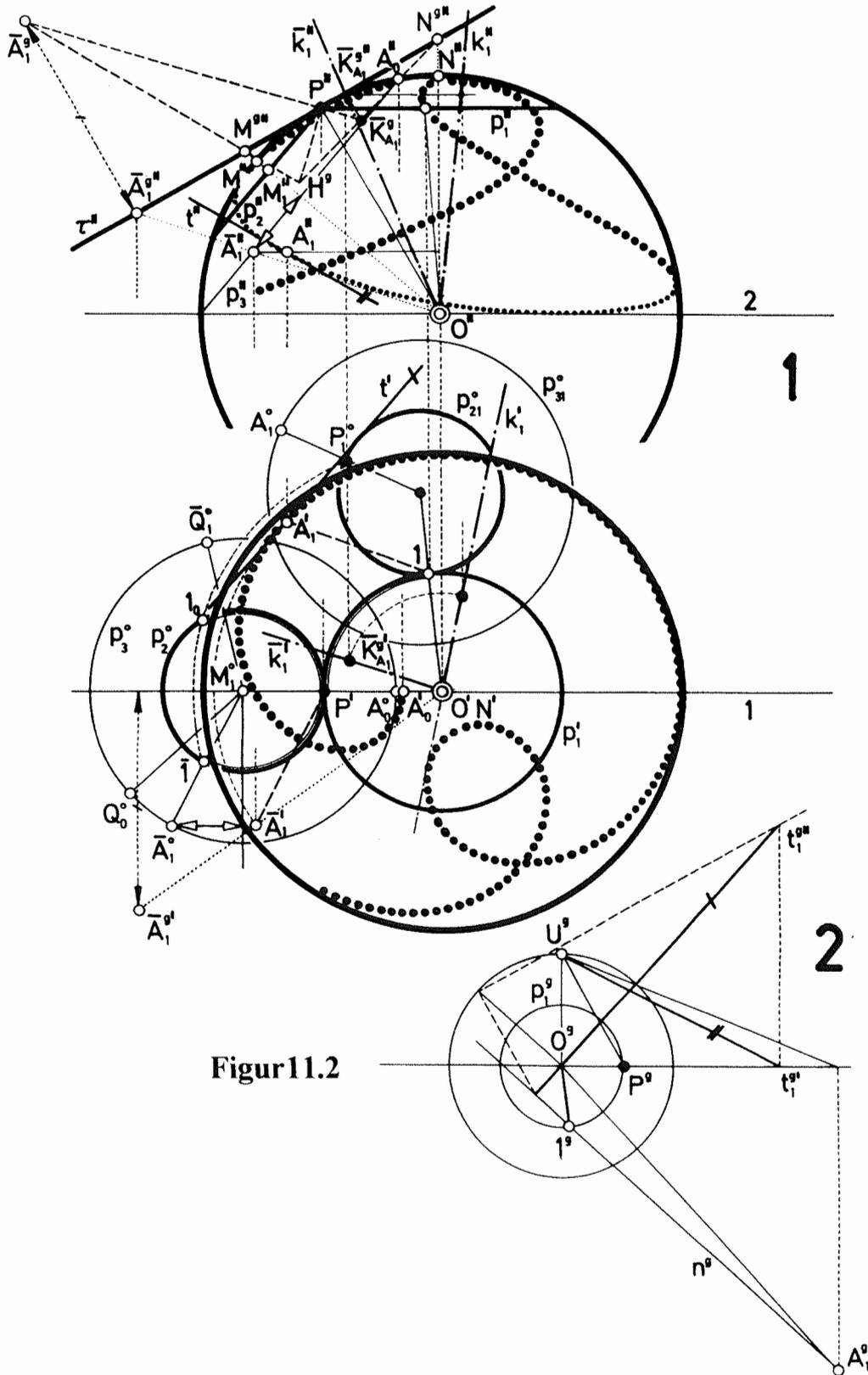


Figur 13.3

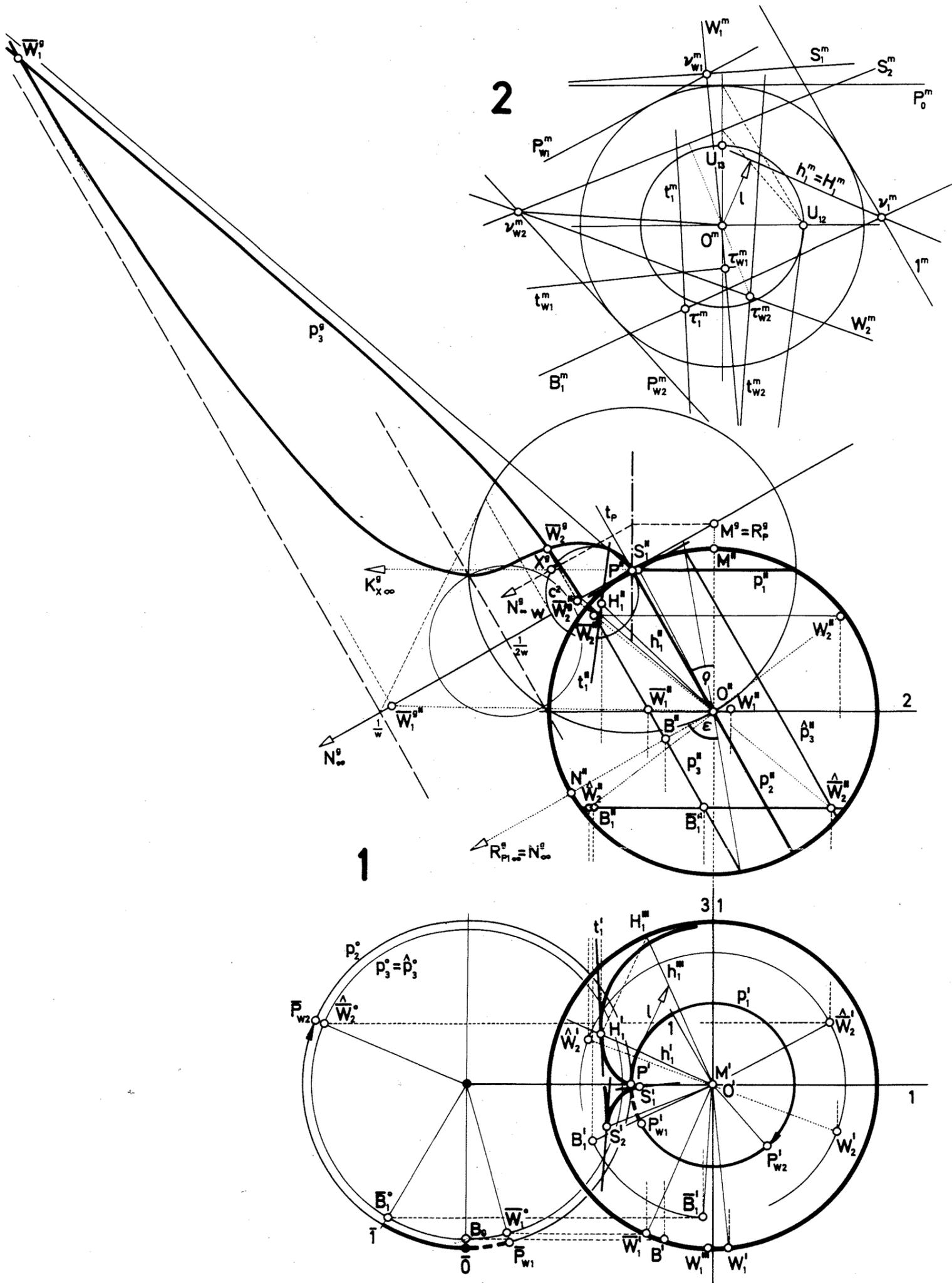


Figur 13.4

Figur 11.2



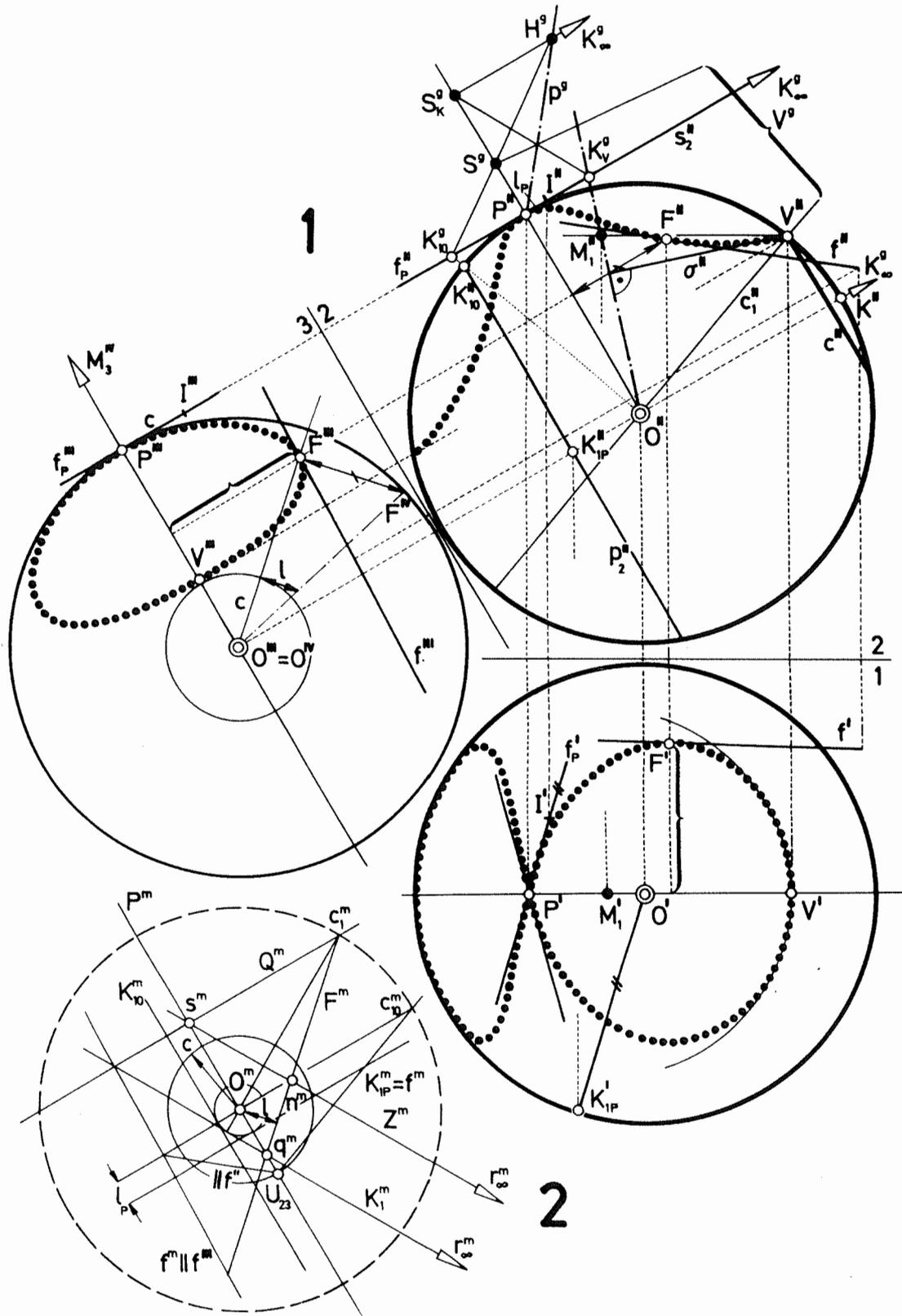
Figur11.2



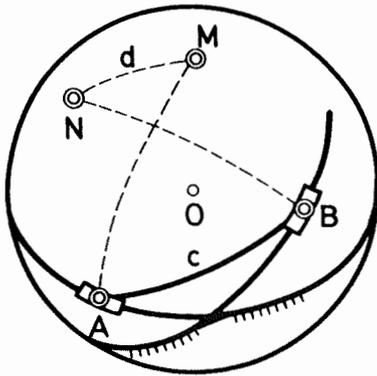
Figur 11.3

Figur 11.3

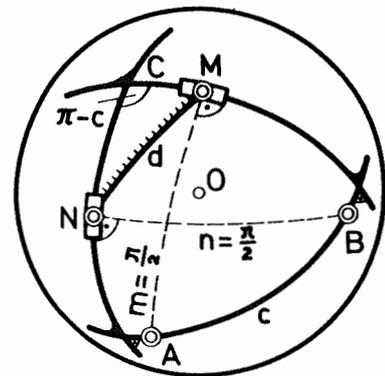
Figur 12.2



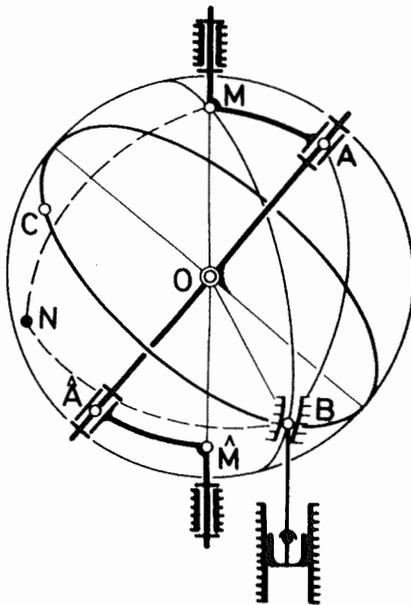
Figur 12.2



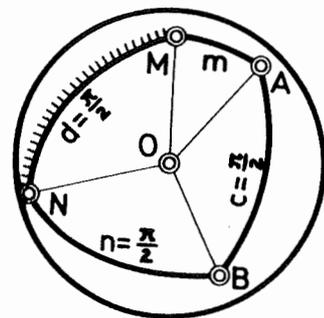
Figur 13.5



Figur 13.6



Figur 13.8



Figur 13.9

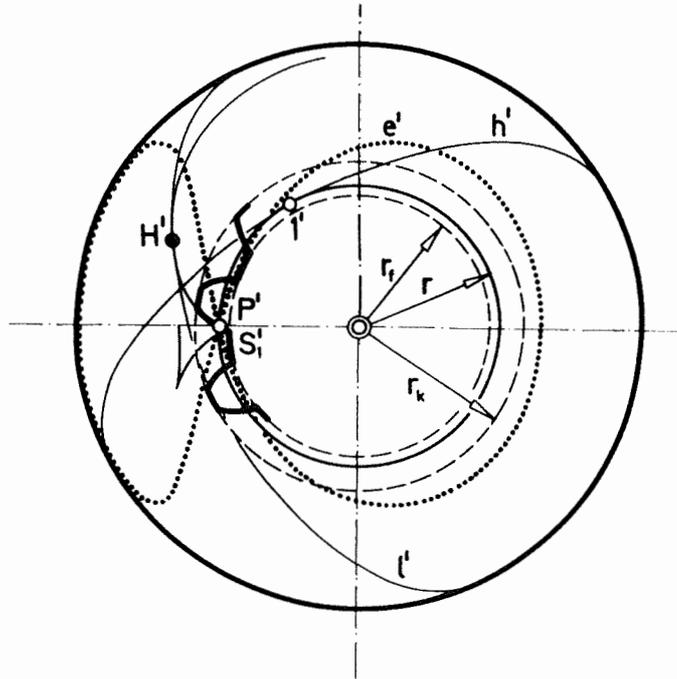




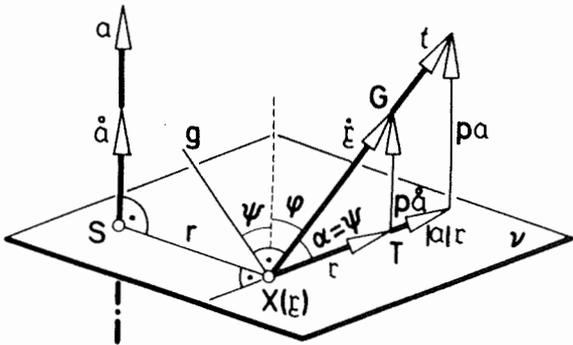




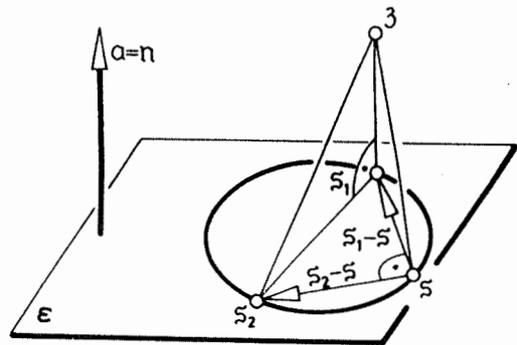
Figur 14.5, Figuren 16.1-16.4



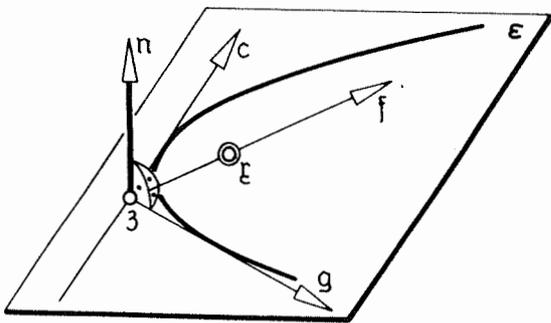
Figur 14.5



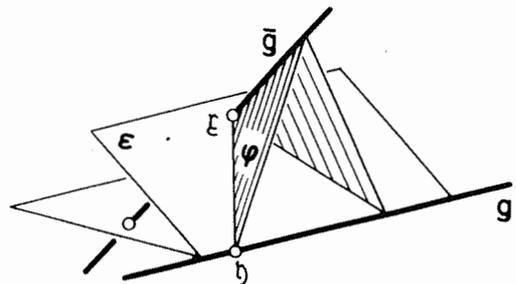
Figur 16.1



Figur 16.2

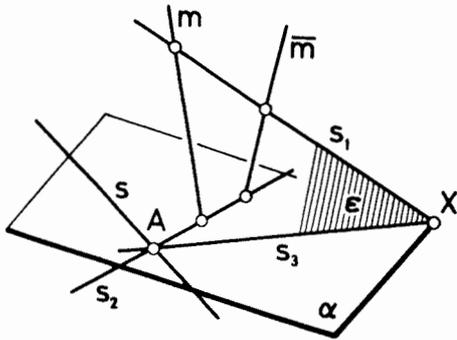


Figur 16.3

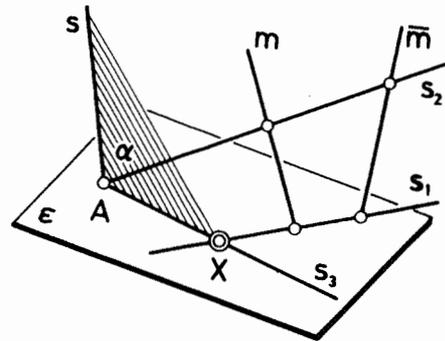


Figur 16.4

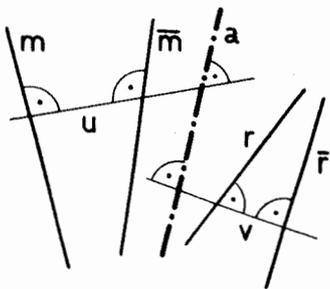
Figuren 16.5-16.9



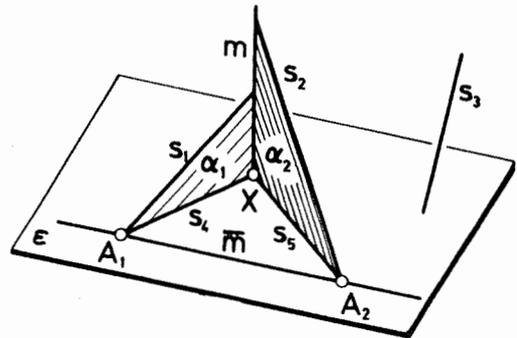
Figur 16.5



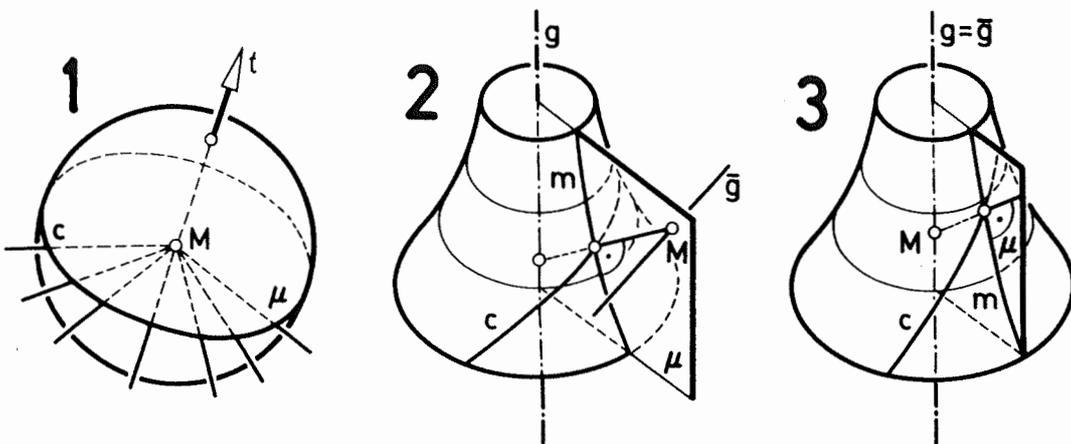
Figur 16.6



Figur 16.7

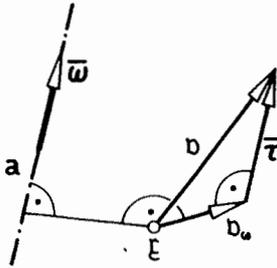


Figur 16.8

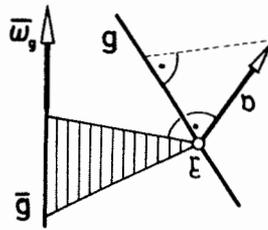


Figur 16.9

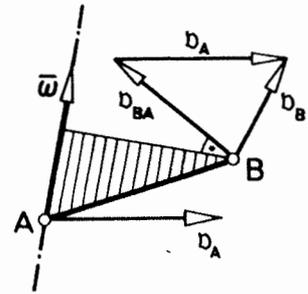
Figuren 17.1-17.6.1



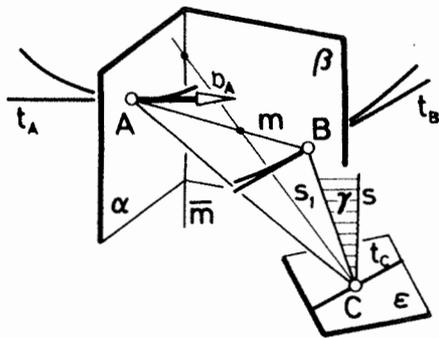
Figur 17.1



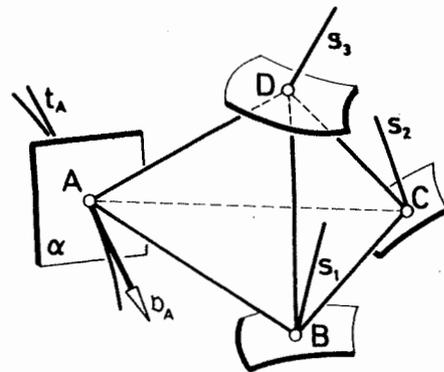
Figur 17.2



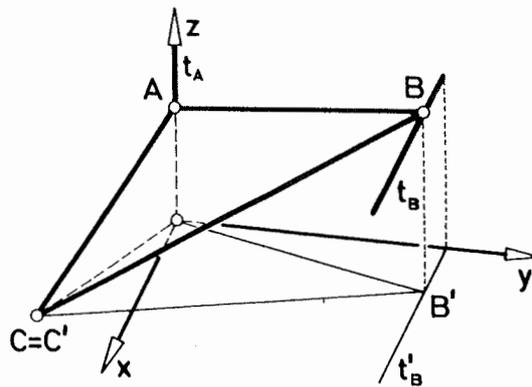
Figur 17.3



Figur 17.4

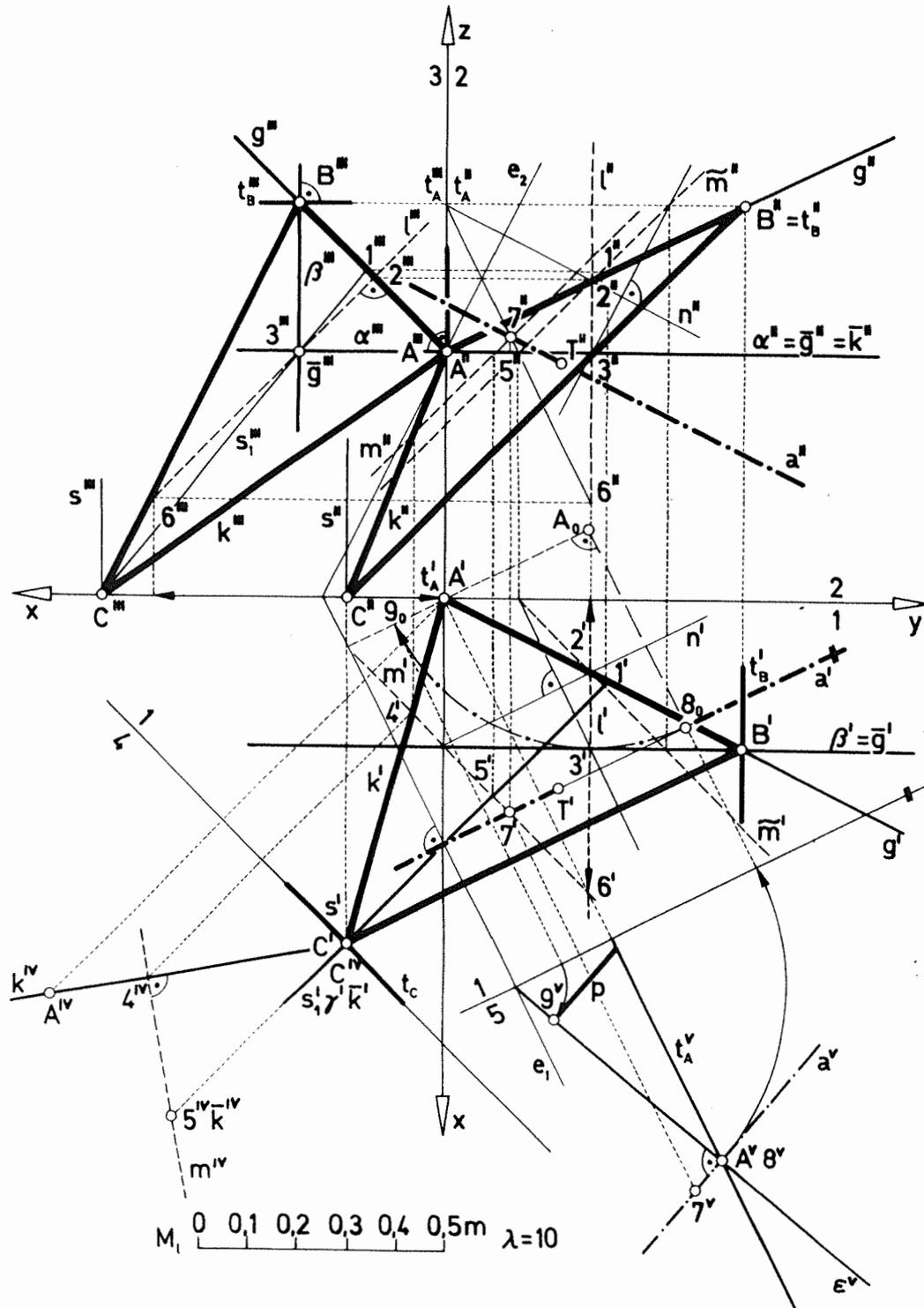


Figur 17.5

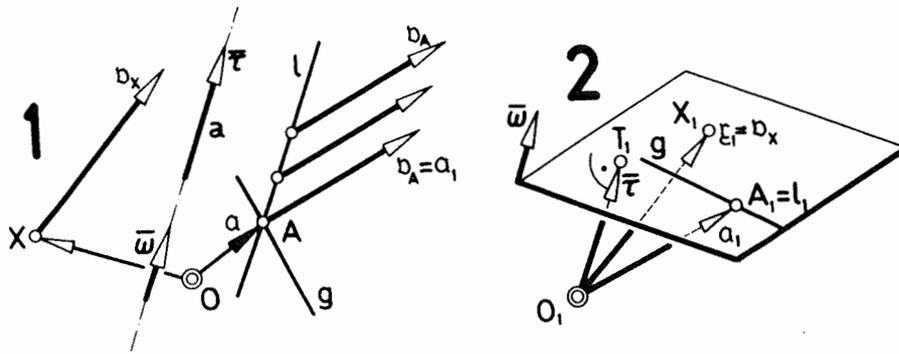


Figur 17.6.1

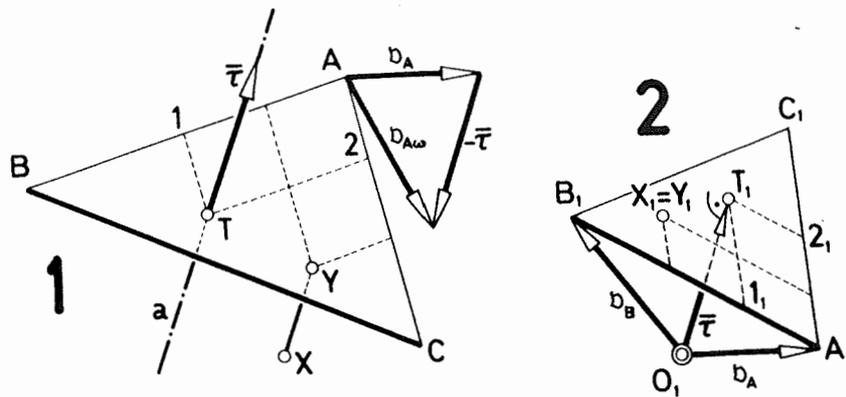
Figur 17.6.2



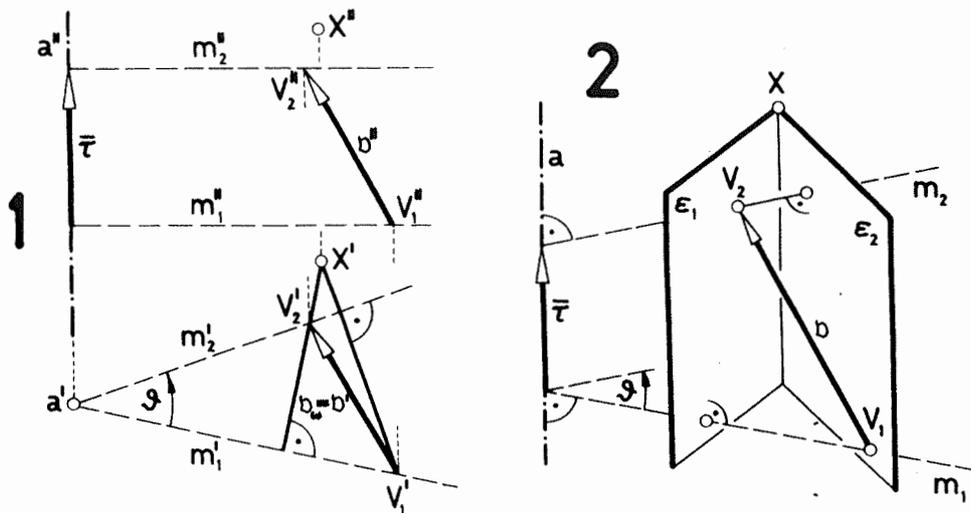
# Figuren 17.7-17.9



Figur 17.7

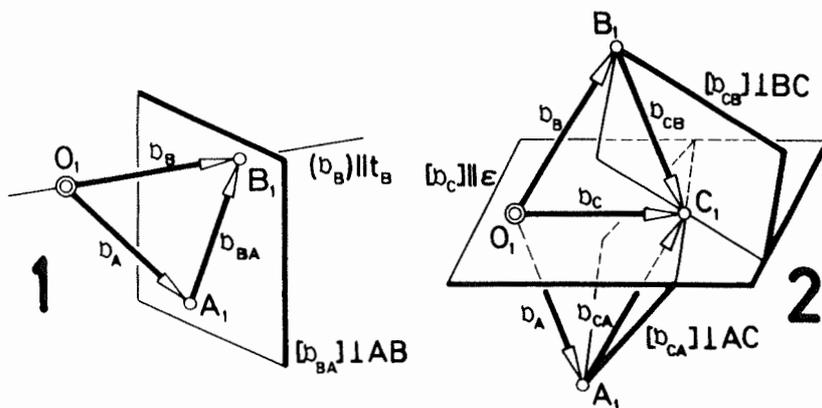


Figur 17.8

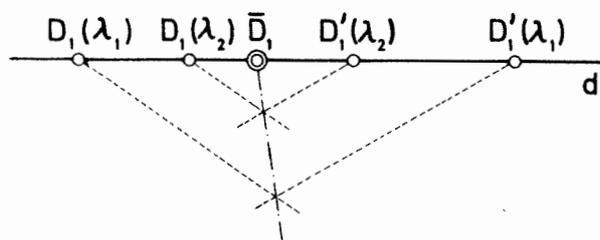


Figur 17.9

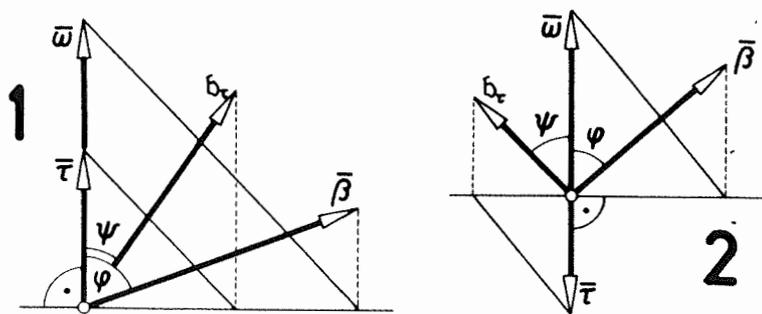
Figuren 17.10-17.11, Figuren 17.13-17.14



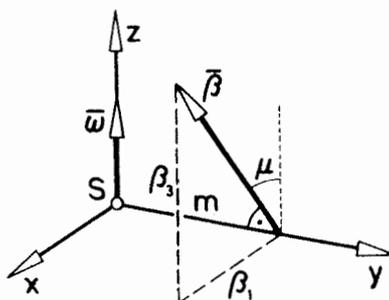
Figur 17.10



Figur 17.11

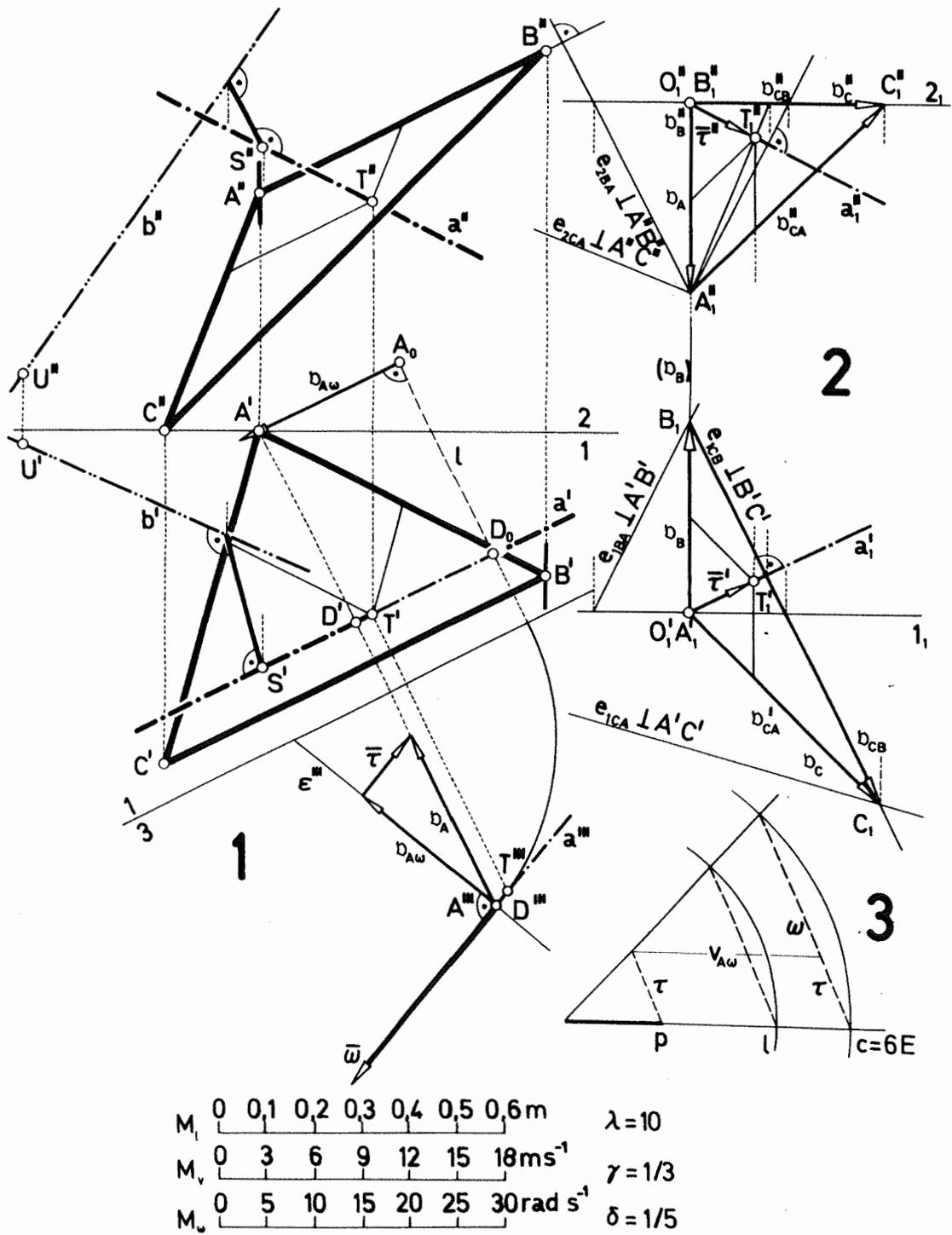


Figur 17.13



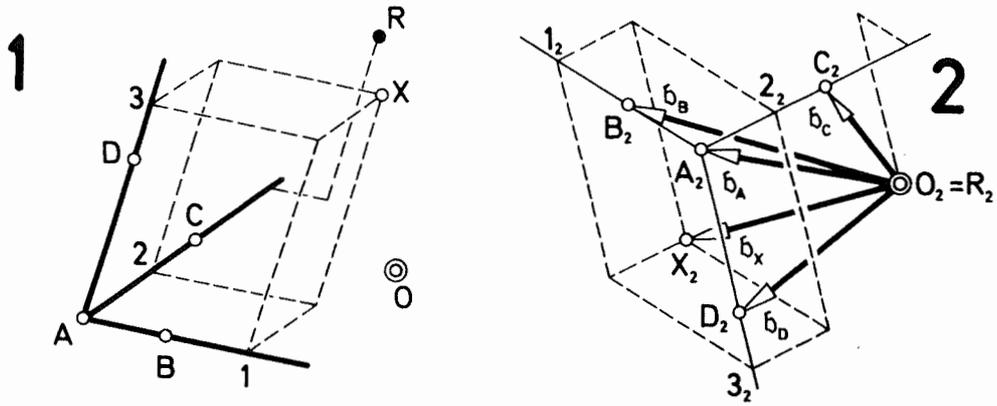
Figur 17.14

Figur 17.12

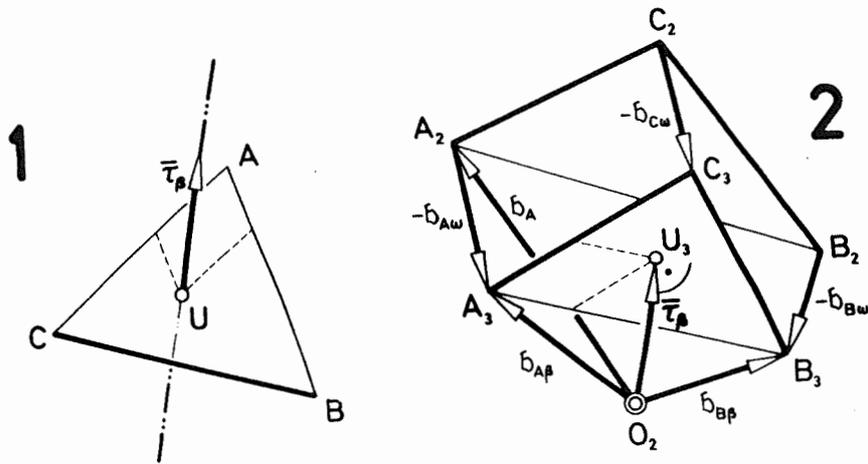


Figur 17.12

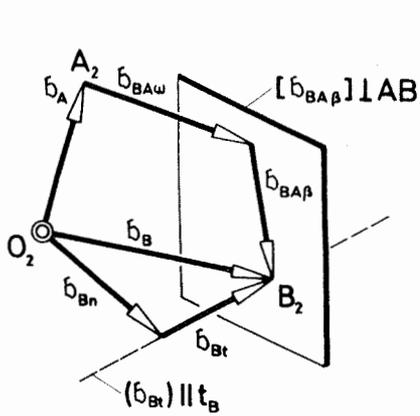
Figuren 17.15-17.18



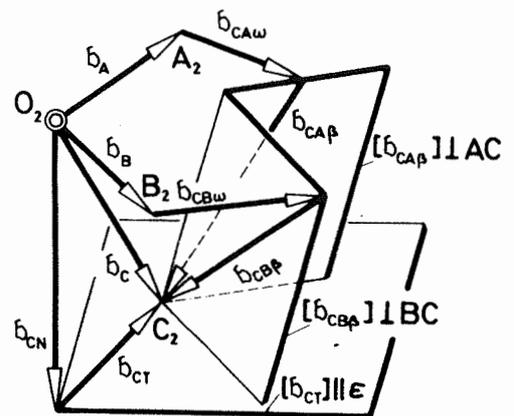
Figur 17.15



Figur 17.16

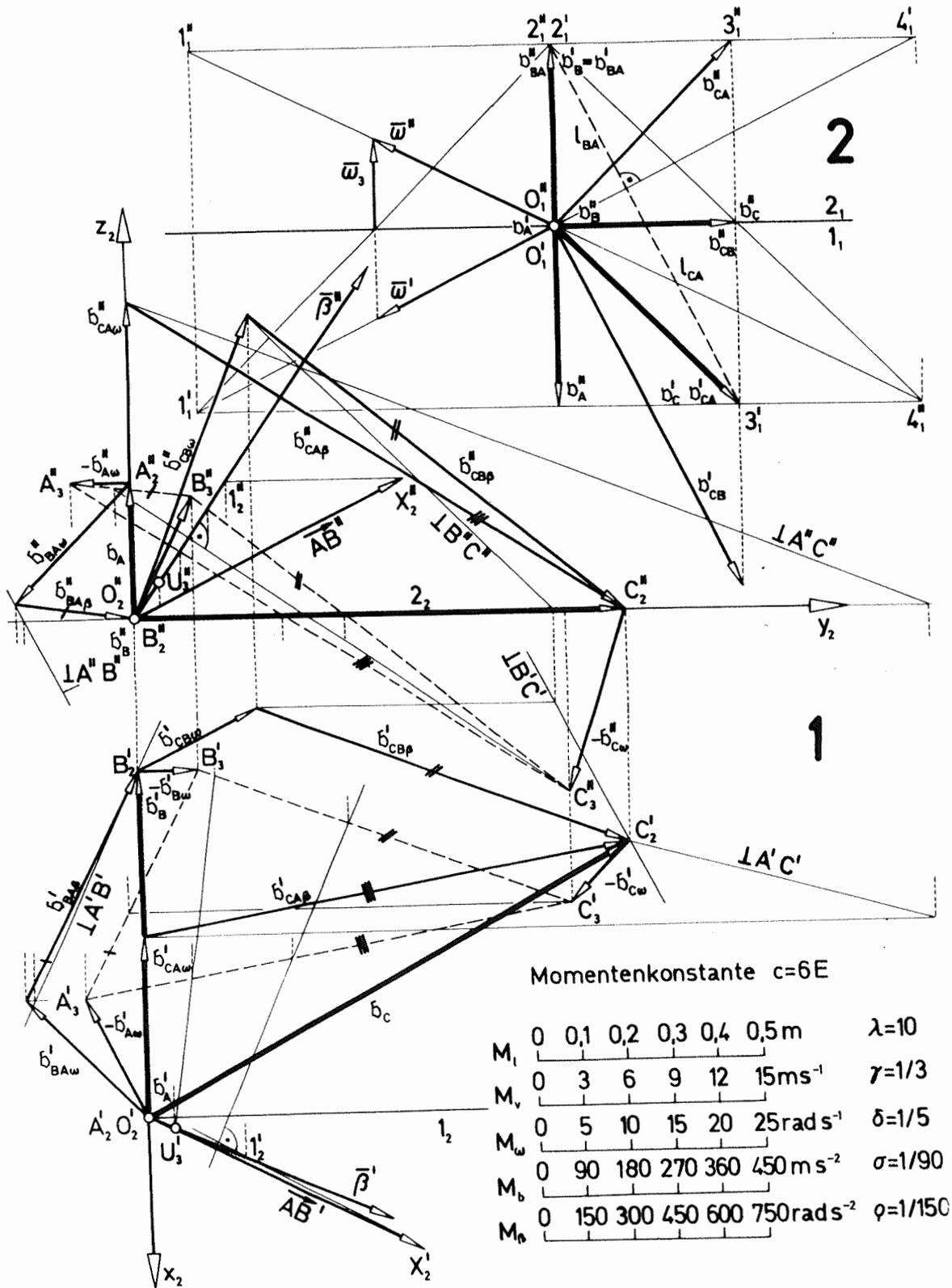


Figur 17.17



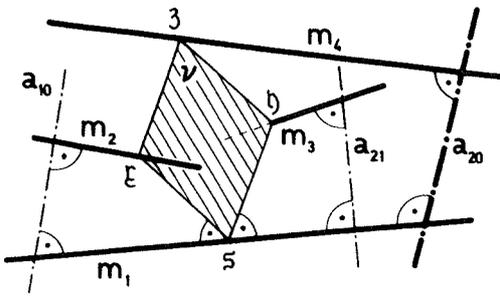
Figur 17.18

Figur 17.19

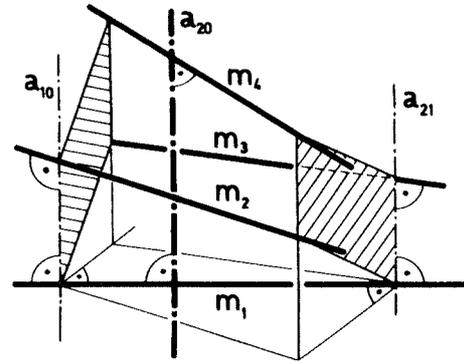


Figur 17.19

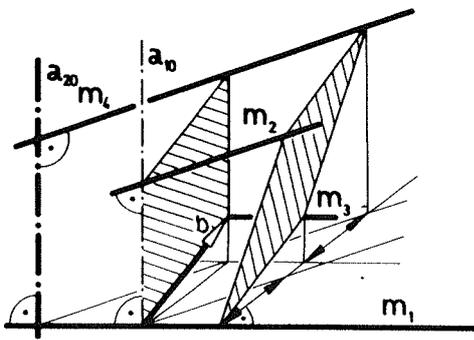
Figuren 18.1-18.8



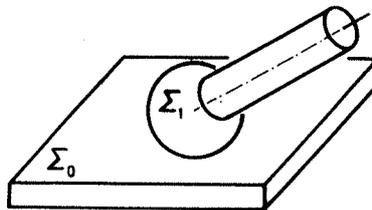
Figur 18.1



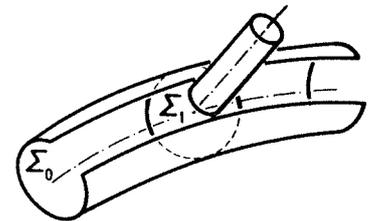
Figur 18.2



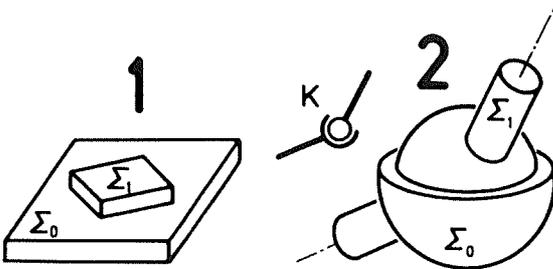
Figur 18.3



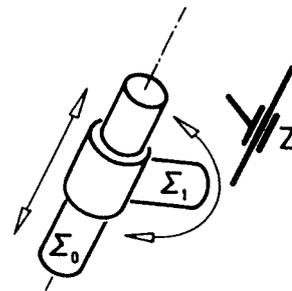
Figur 18.4



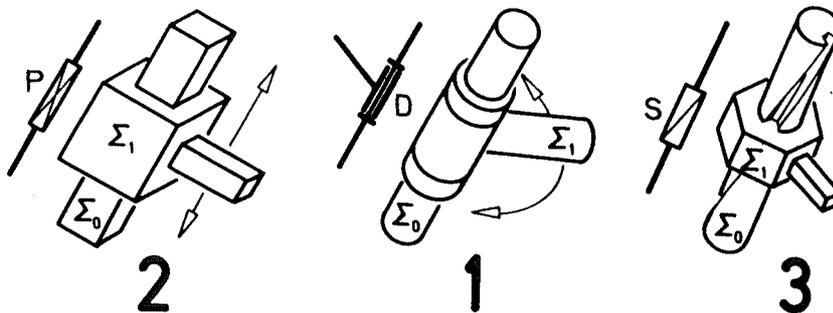
Figur 18.5



Figur 18.6

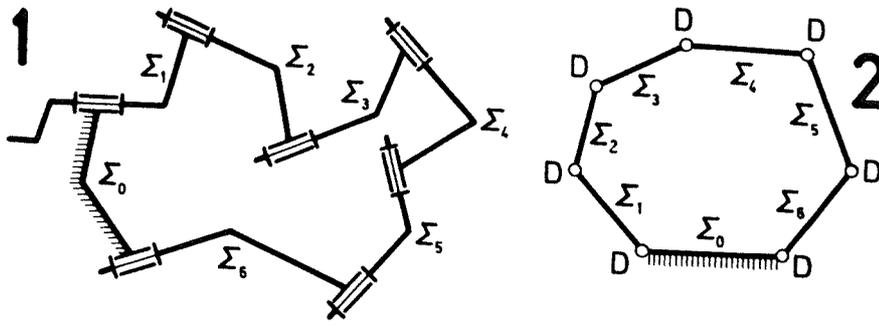


Figur 18.7

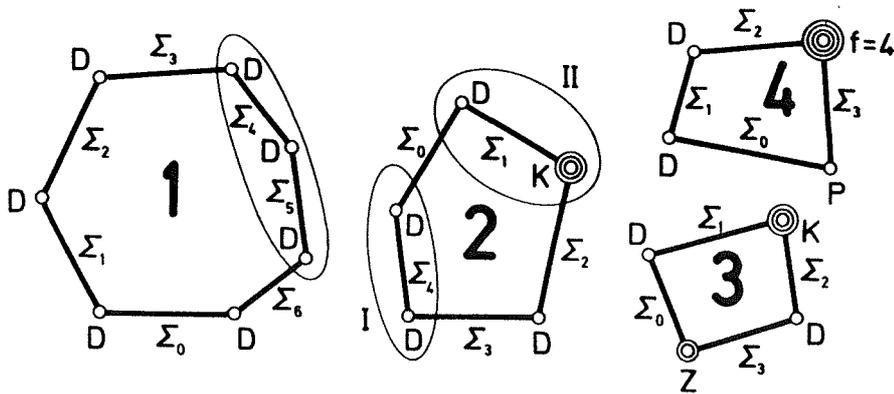


Figur 18.8

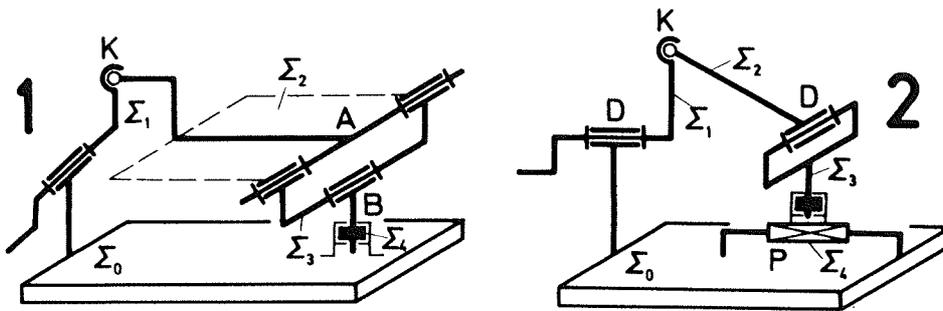
Figuren 18.9-18.13



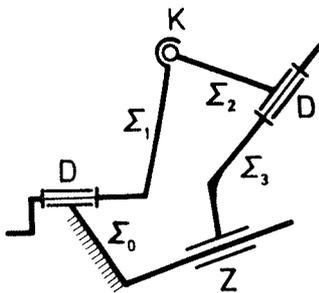
Figur 18.9



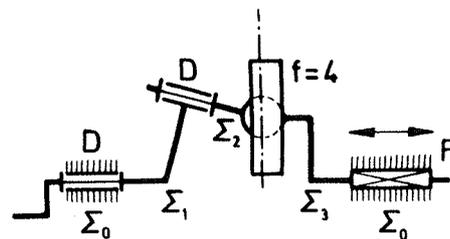
Figur 18.10



Figur 18.11



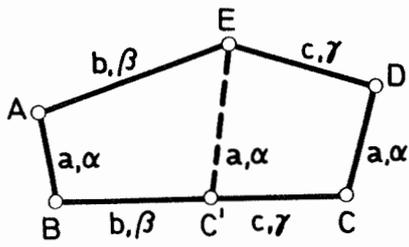
Figur 18.12



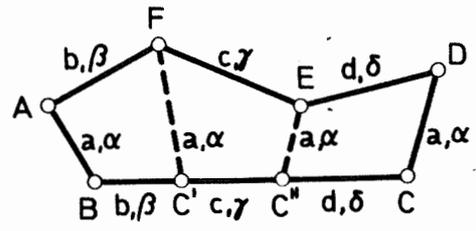
Figur 18.13



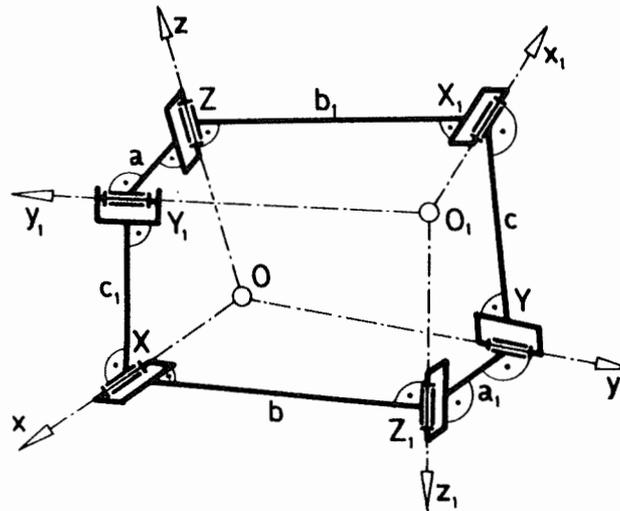
Figuren 18.19-18.22



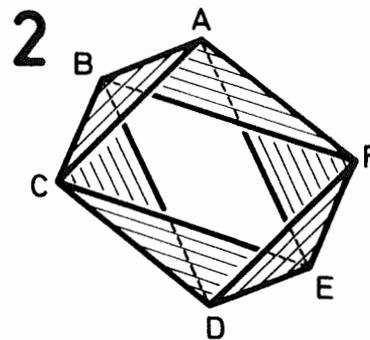
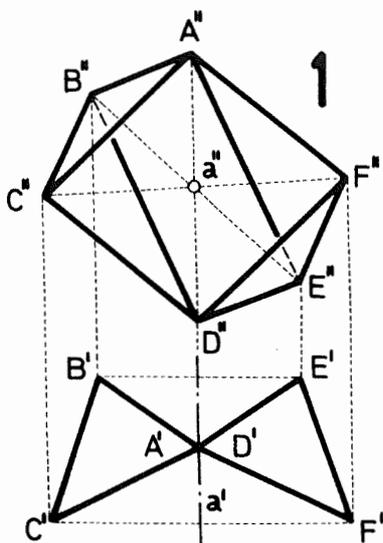
Figur 18.19



Figur 18.20

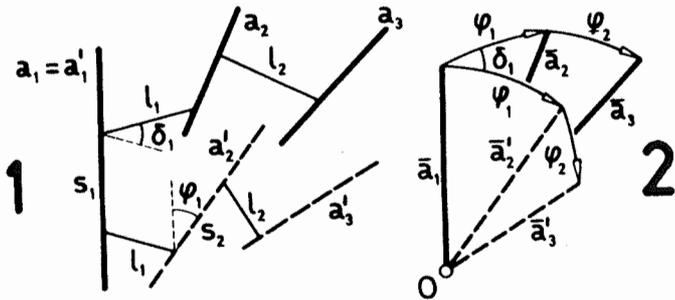


Figur 18.21

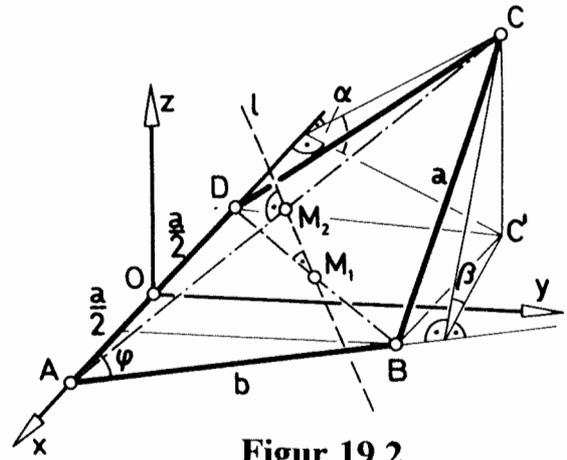


Figur 18.22

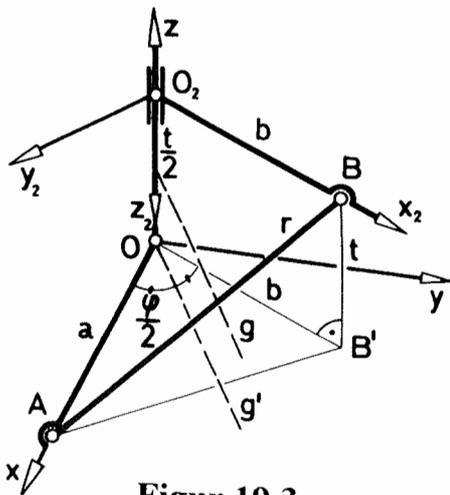
Figuren 19.1-19.5



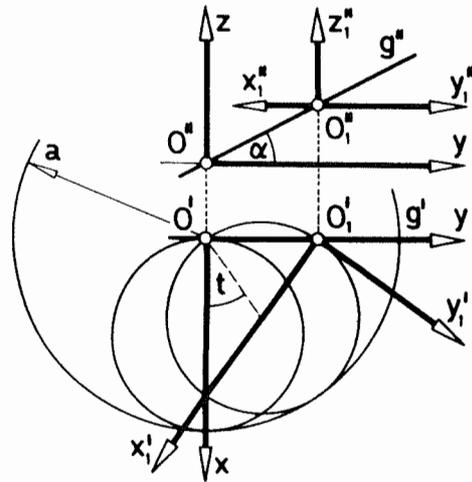
Figur 19.1



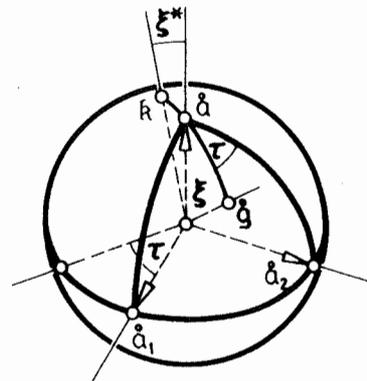
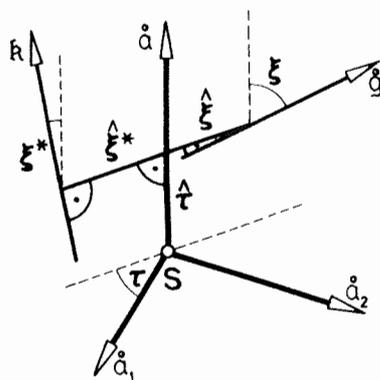
Figur 19.2



Figur 19.3

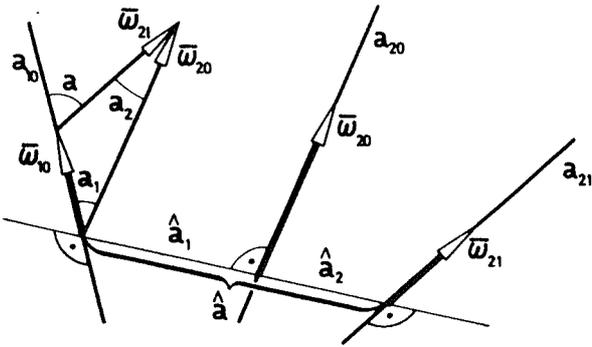


Figur 19.4

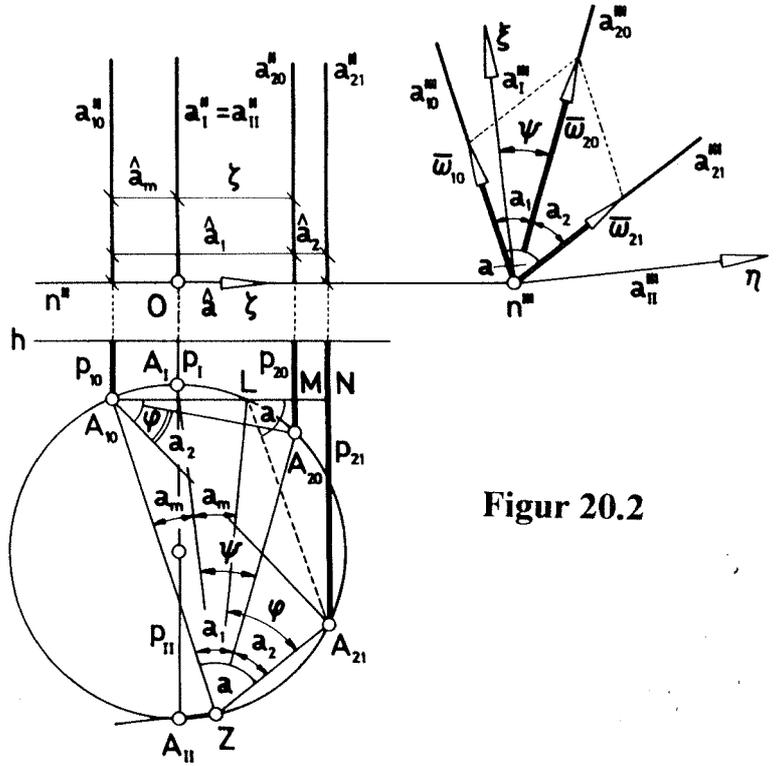


Figur 19.5

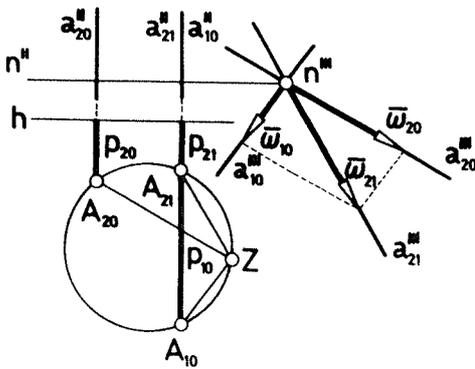
Figuren 20.1-20.6



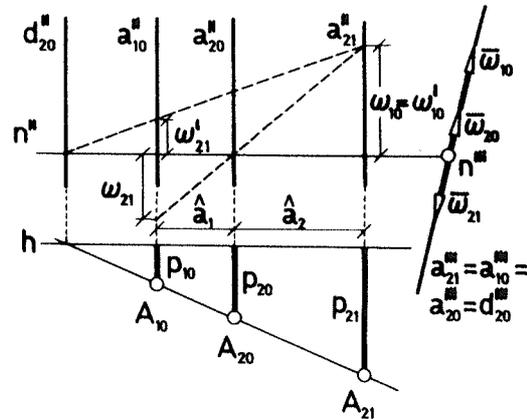
Figur 20.1



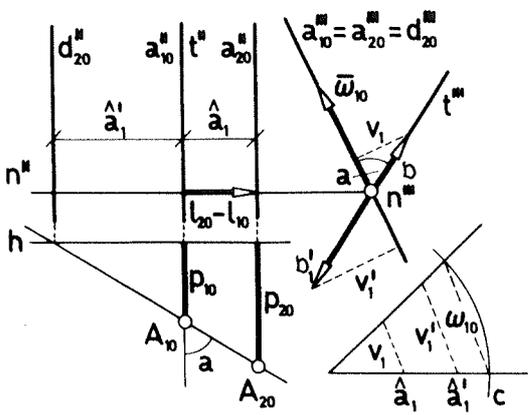
Figur 20.2



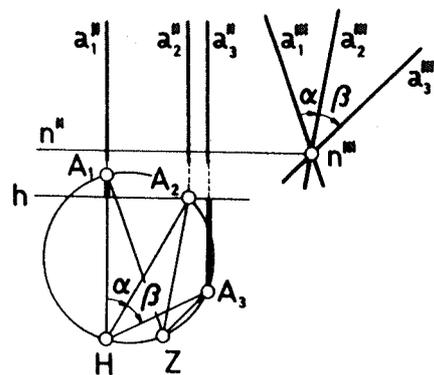
Figur 20.3



Figur 20.4

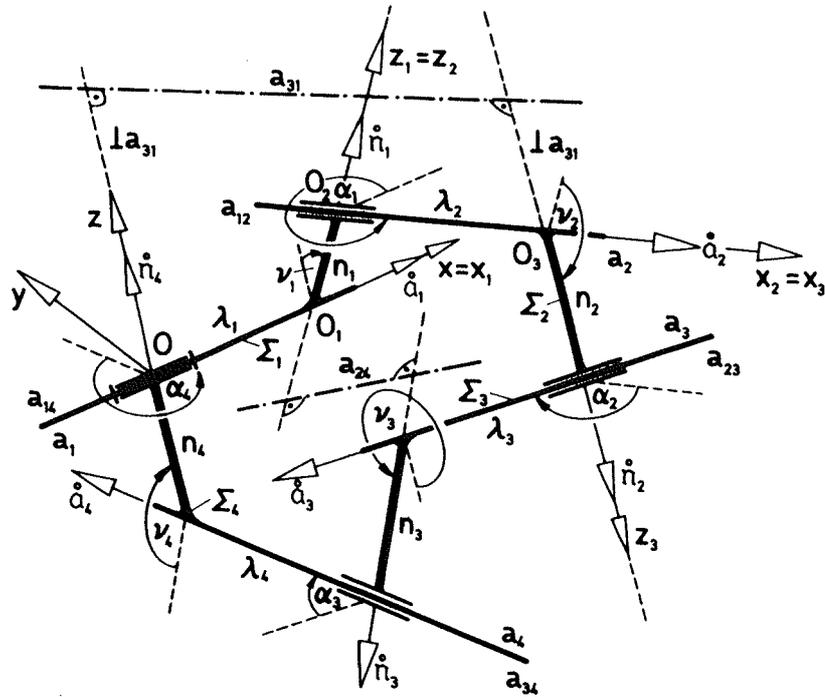


Figur 20.5

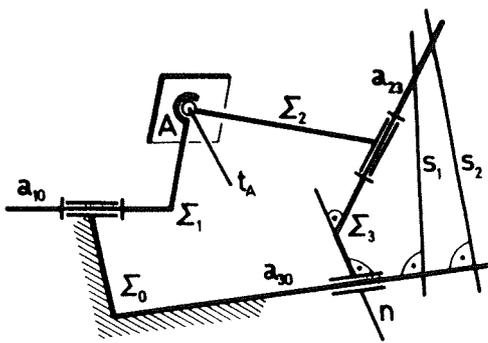


Figur 20.6

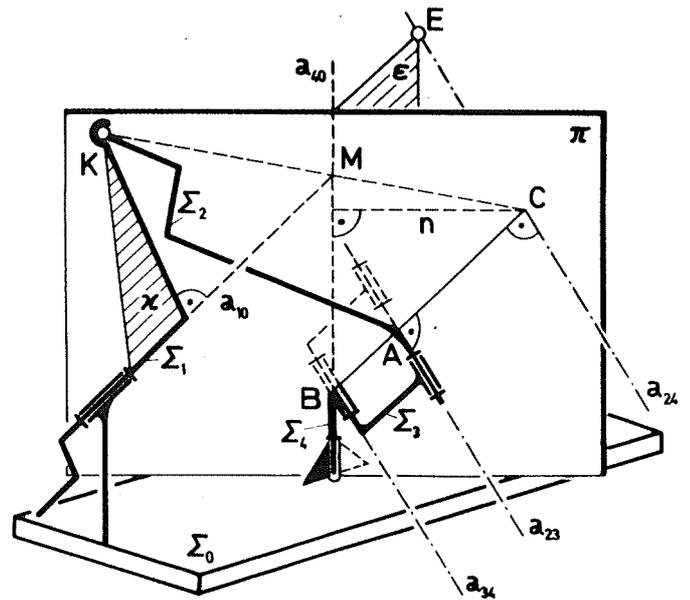
Figuren 20.7-20.9



Figur 20.7

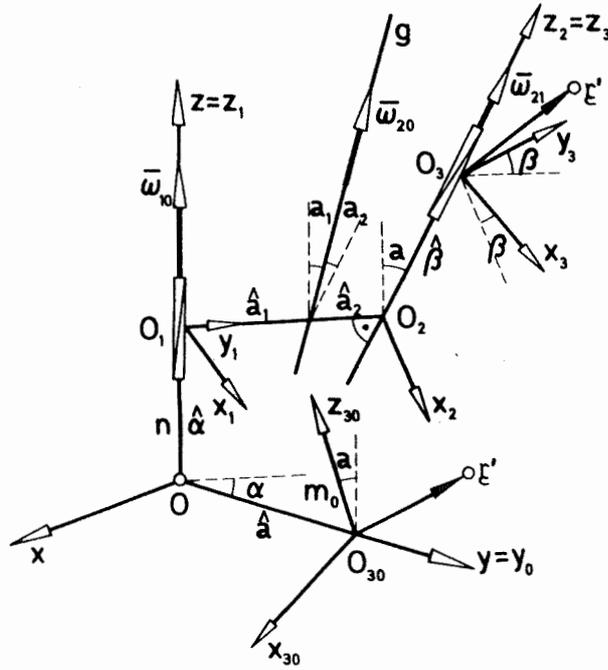


Figur 20.8

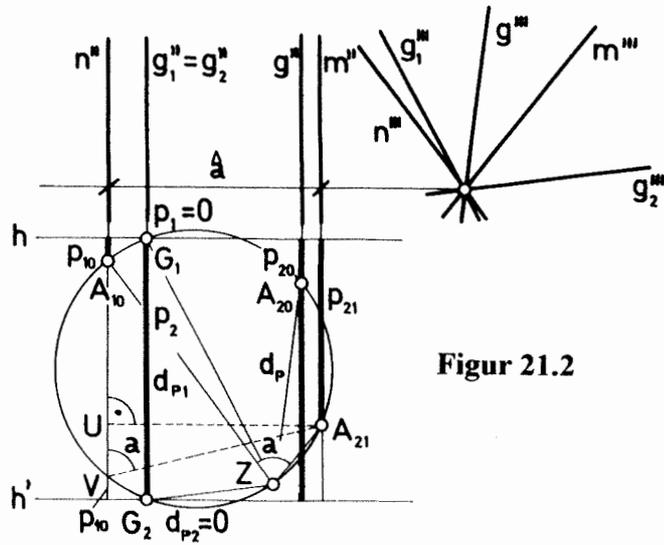


Figur 20.9

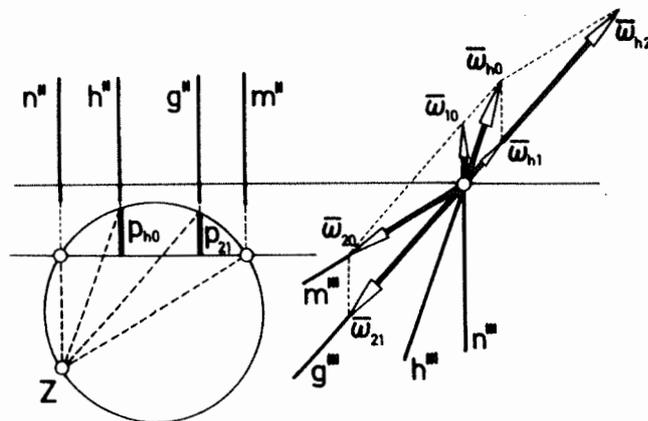
Figuren 21.1-21.2, Figur 22.1



Figur 21.1



Figur 21.2



Figur 22.1