Vektoralgebra I

Wolfgang Ströher

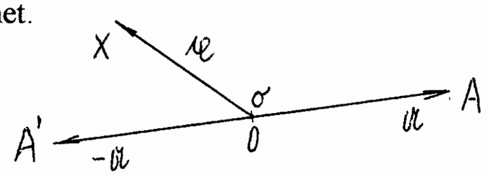
Vektoralgebra I

Der Anschauungsraum

Der *Anschauungsraum* wird aufgefaßt als Menge von gleichberechtigten Punkten. Die *Geraden* und *Ebenen* des Anschauungsraumes sind spezielle Teilmengen.
Andere Auffassung: Man kann Punkte, Gerade und Ebenen als selbständige Elemente auffassen, die z.B. durch *Inzidenzrelationen* miteinander in Beziehung treten (HILBERT).
In dieser Vorlesung fassen wir den Anschauungsraum als *Punktmenge* auf und alle Objekte des Anschauungsraumes als spezielle Teilmengen.
Die Elementargeometrie des Anschauungsraumes wird im folgenden als bekannt vorausgesetzt: Kongruenzsätze, Ähnlichkeitslehre usw.

Der punktierte Anschauungsraum als Menge von Vektoren

Zeichnen wir (im Gegensatz zur Gleichberechtigung aller Punkte des Anschauungsraumes) einen Punkt 0 als *Ursprung* (*Nullpunkt*) aus, so wird jedem weiteren Punkt in bijektiver Weise ein *Pfeil* (*Vektor*) zugeordnet.

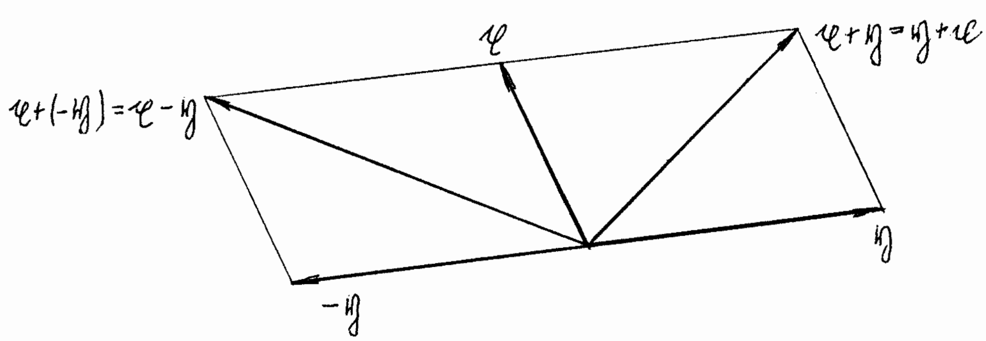


Dem Punkt 0 entspricht der *Nullvektor* **o**, dem zu A bezüglich 0 symmetrisch gelegenen Punkt A' entspricht der dem Vektor **a** *entgegengesetzte Vektor* (-**a**). Er hat die dem Vektor **a** entgegengesetzte *Orientierung*.
Durch Auszeichnung des Punktes 0 tritt also an Stelle des Grundbegriffes "Punkt" der Grundbegriff "Vektor".
An Stelle von Punktmengen betrachten wir ab nun *Vektormengen*.

Der Vektorraum

Die Vektoraddition

In der Menge der Vektoren führen wir durch folgende Konstruktion eine *innere Verknüpfung* ein, die wir *Vektoraddition* nennen[1)].



---

1) Die Definition der Vektoraddition ist motiviert durch die Eigenschaft der Zusammensetzung von Kräften (Kräfteparallelogramm). Das Kräfteparallelogramm wurde erstmals von Simon STEVIN (1528-1620) angewendet, aber noch nicht klar formuliert. Die erste klare Formulierung über die Zusammensetzung von Kräften findet sich bei Isaak NEWTON (1642-1726).
Literatur: Ernst MACH (1838-1916):Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 1.Aufl.1883

Der Vektorraum

Die Menge der Vektoren, **a,b,c,...**bildet mit der Vektoraddition "+" als Verknüpfung eine *kommutative Gruppe*. Aus der angeführten Konstruktion folgt das

Kommutatives Gesetz der Vektoraddition

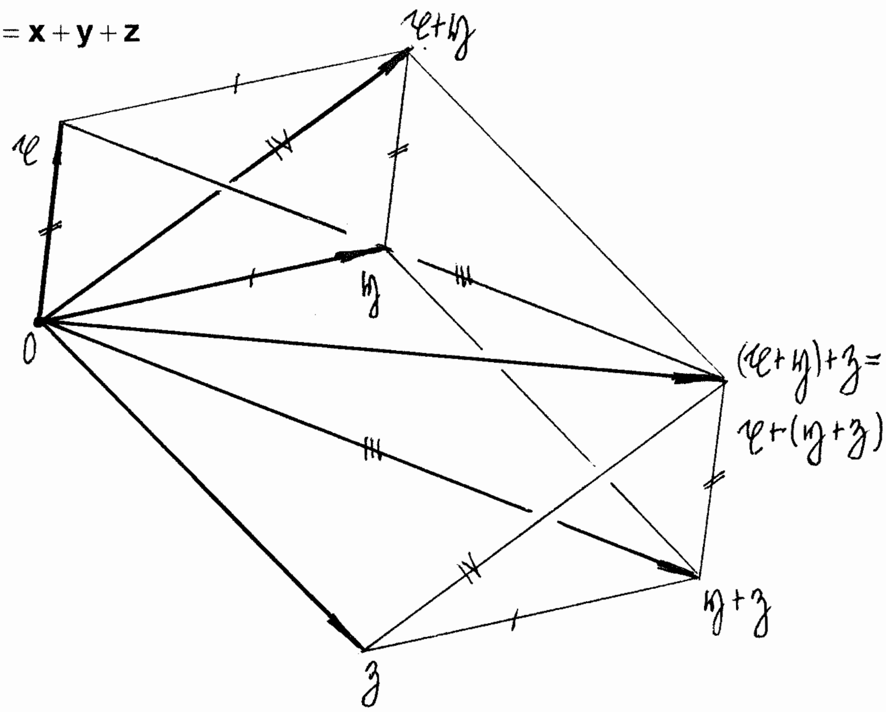
$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ Kommutatives Gesetz der Vektoraddition

Wir nennen

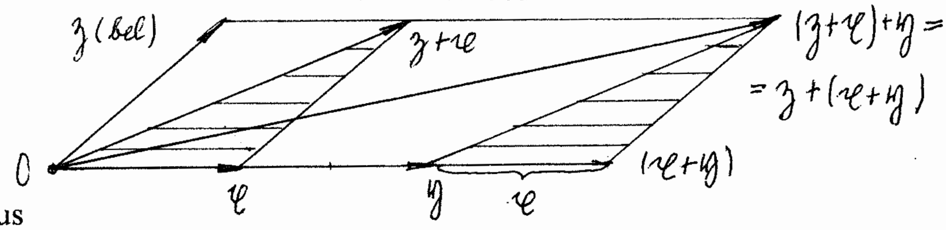
$\mathbf{x}+(-\mathbf{y}):=\mathbf{x}-\mathbf{y}$ den Differenzenvektor von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$

Assoziatives Gesetz der Vektoraddition

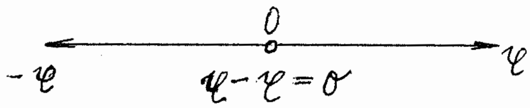
$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$



Das *assoziative Gesetz* muß natürlich für beliebige drei Vektoren gelten. Demnach kann man auch die Summe zweier Vektoren ermitteln, welche dieselbe Trägergerade besitzen und für die die Parallelogrammkonstruktion nicht unmittelbar anwendbar ist.



Speziell folgt daraus



$\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{x}-\mathbf{x}=\mathbf{o}$

Der Vektorraum

Gruppen

Eine (nichtleere) Menge $\mathbf{G}$ hat Gruppenstruktur, (ist eine Gruppe), wenn in ihr eine *innere Verknüpfung* "$*$" definiert ist, die jedem geordneten Paar $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ von Elementen $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{G}$ eindeutig ein Element $\mathbf{c} := \mathbf{a} * \mathbf{b}$ zuordnet, wobei folgende Eigenschaften gelten

1. $(\mathbf{a}*\mathbf{b})*\mathbf{c} = \mathbf{a}*(\mathbf{b}*\mathbf{c}) = \mathbf{a}*\mathbf{b}*\mathbf{c}$ assoziatives Gesetz
2. Es existiert ein Element $\mathbf{e}$ (*neutrales Element*), sodaß für alle Elemente $\mathbf{a} \in \mathbf{G}$ gilt
$$\mathbf{a}*\mathbf{e} = \mathbf{e}*\mathbf{a} = \mathbf{a}$$
3. Zu jedem Element $\mathbf{a}$ gibt es ein Element $\mathbf{a}^{-1}$ (*inverses Element* zu $\mathbf{a}$)
$$\mathbf{a}*\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}^{-1}*\mathbf{a} = \mathbf{e}$$

Gilt zusätzlich noch für alle $\mathbf{a},\mathbf{b}. \in \mathbf{G}$

4. $\mathbf{a} * \mathbf{b} = \mathbf{b} * \mathbf{a}$ *kommutatives Gesetz*

so heißt G *kommutative Gruppe, (abelsche Gruppe, Modul)*

Äußere Verknüpfung von Vektoren und reellen Zahlen

Produkt eines Vektors mit einer ganzen Zahl n

$n > 0 \qquad n \cdot \mathbf{a} := \underbrace{\mathbf{a} + \mathbf{a} + \ldots + \mathbf{a}}_{n}$ Speziell $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$

$n = 0 \qquad 0 \cdot \mathbf{a} := \mathbf{o}$

$n < 0 \qquad n \cdot \mathbf{a} := \underbrace{+(-\mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) + \ldots + (-\mathbf{a})}_{|n|} = |n| \cdot (-\mathbf{a})$ Speziell $(-1) \cdot \mathbf{a} = (-\mathbf{a})$

Mit dieser Definition gilt

$(n+m)\mathbf{a} = n\mathbf{a} + m\mathbf{a}$

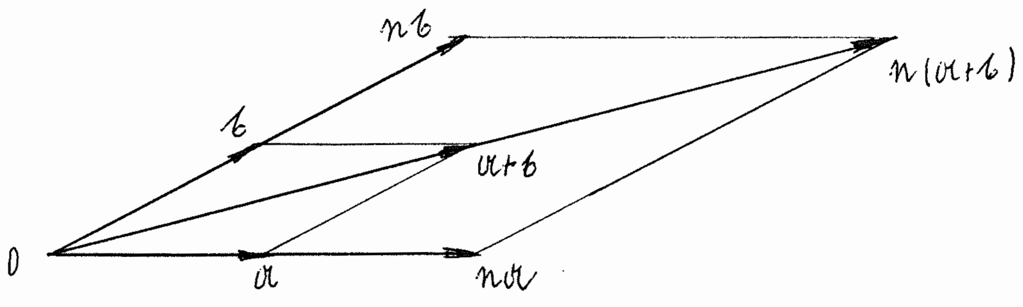
Beweis: $(n+m)\mathbf{a} = \underbrace{\mathbf{a} + \ldots + \mathbf{a}}_{n+m} = \underbrace{(\mathbf{a} + \ldots + \mathbf{a})}_{n} + \underbrace{(\mathbf{a} + \ldots + \mathbf{a})}_{m} = n\mathbf{a} + m\mathbf{a}$

$n(m\mathbf{a}) = (nm)\mathbf{a}$

$$n(m\mathbf{a}) = \underbrace{\left(\underbrace{(\mathbf{a} + \ldots + \mathbf{a})}_{m} + \ldots + \underbrace{(\mathbf{a} + \ldots + \mathbf{a})}_{m} \right)}_{n} = \underbrace{\mathbf{a} + \ldots + \mathbf{a}}_{nm} = (nm)\mathbf{a}$$

$n(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = n\mathbf{a} + n\mathbf{b}$

Beweis mit Hilfe des Strahlensatzes



Der Vektorraum

Diese für *ganze Zahlen* ausgesprochenen Sätze erweitern wir auf *reelle Zahlen*. Wir definieren zuerst

$|\mathbf{a}| > 0$ Länge, Betrag von $\mathbf{a}$ speziell $|\mathbf{o}| = 0$, $|-\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|$

Ferner sei per Definitionem

$\lambda > 0$ $\lambda\mathbf{a}$ ist der mit $\mathbf{a}$ gleichorientierte Vektor von λ - facher Länge

$\lambda < 0$ $\lambda\mathbf{a}$ ist der mit $(-\mathbf{a})$ gleichorientierte Vektor der Länge $|\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$

$$\lambda\mathbf{a} := -|\lambda|\mathbf{a} = |\lambda|(-\mathbf{a})$$

Allgemein gilt also für $\lambda \neq 0$

$$|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$$

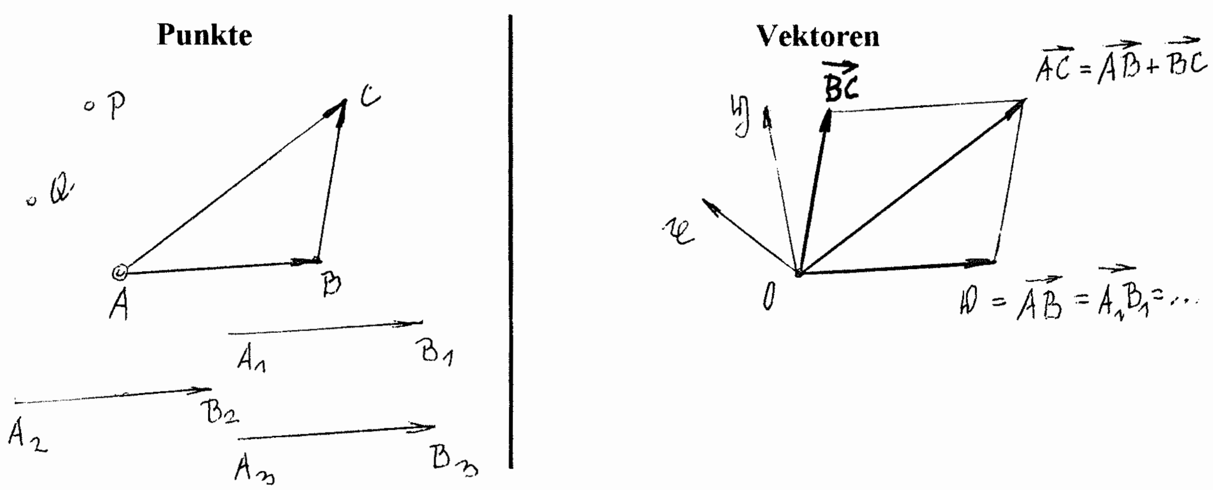
Die Menge der Vektoren bildet zusammen mit den inneren und äußeren Verknüpfungen einen *Vektorraum*

Der affine Raum

Gegeben sei eine Menge $\mathbf{A}$, deren Elemente "Punkte" heißen und ein Vektorraum $\mathbf{V}$. Zwischen den Elementen A,B,C, $\in \mathbf{A}$ und den Vektoren von $\mathbf{V}$ besteht folgender Zusammenhang: Jedem geordneten Punktepaar $(A,B) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ entspricht in eindeutiger Weise ein Vektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, wobei gilt

1. Hält man einen Punkt $A \in \mathbf{A}$ fest, dann ist für jeden weiteren Punkt $B \in \mathbf{A}$ die Zuordnung
$$B \rightarrow \overrightarrow{AB}$$
bijektiv.
2. Es gilt stets
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

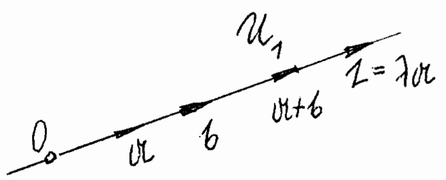
Eine Punktmenge $\mathbf{A}$, die in der beschriebenen Weise mit einem Vektorraum $\mathbf{V}$ zusammenhängt, heißt affiner Raum

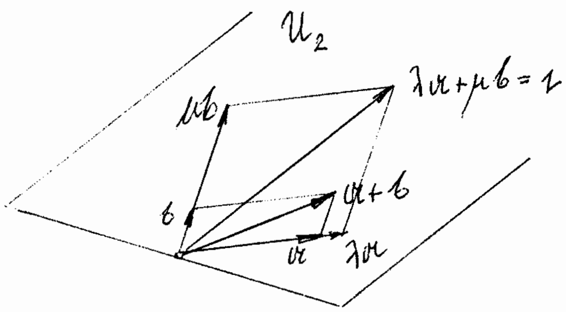


Der Punktraum der Anschauung ist daher ein *affiner Raum*. Jedem Vektor des Vektorraumes entspricht im Punktraumdie Menge aller parallelen, gleich langen und gleich orientierten Strecken. Umgekehrt entspricht jeder *Äquivalenzklasse* aller parallelen, gleich langen und gleich orientierten Strecken derselbe Vektor. Eine Strecke kann als *Repräsentant* der ganzen Äquivalenzklasse dienen. Hält man einen Punkt $0 \in \mathbf{A}$ fest, so wird der affine Raum zentriert (punktiert). Man spricht dann von einem zentralaffinen Raum.mit dem Ursprung 0. Dieser hat die Struktur eines Vektorraumes, d.h. er ist zu einem Vektorraum isomorph.

Unterräume

Unter einem *Unterraum* **U** versteht man eine Teilmenge eines Vektorraumes, die gegenüber den Vektorraumoperationen abgeschlossen ist und selbst ein Vektorraum ist.





$\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{U_1} \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b} \in \mathbf{U_1}$

$\mathbf{a} \in \mathbf{U_1} \Rightarrow \lambda\mathbf{a} \in \mathbf{U_1}$

$\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{U_2} \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b} \in \mathbf{U_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b} \in \mathbf{U_2}$

Triviale Unterräume: **V**, $\{\mathbf{o}\}$

Im Vektorraum der Anschauung gibt es zwei Arten von nichttrivialen Unterräumen: die Geraden durch den Ursprung und die Ebenen durch den Ursprung.

Linearkombination und lineare Abhängigkeit von Vektoren

Gilt für einen Vektor $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a}$ bzw. $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$, so nennt man **c** eine *Linearkombination* von **a** bzw von **a** und **b** .Allgemein heißt

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{a_1} + \lambda_2\mathbf{a_2} + \ldots + \lambda_r\mathbf{a_r}$$

Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$

Läßt sich der Nullvektor **o** als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a_r}$ darstellen, d.h. gilt

$$\mathbf{o} = \lambda_1\mathbf{a_1} + \lambda_2\mathbf{a_2} + \ldots + \lambda_r\mathbf{a_r}$$

so heißen die Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ *linear abhängig* (l.a.), wenn wenigstens ein $\lambda_i \neq 0$ ist, sie heißen *linear unbhängig* (l.u.), wenn die Linearkombination des Nullvektors nur möglich ist, wenn alle $\lambda_i = 0$ sind.

Gilt z.B.

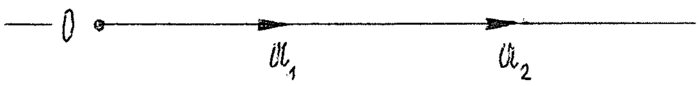
$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} \Rightarrow 1 \cdot \mathbf{c} - \lambda\mathbf{a} = \mathbf{o}$ $\quad$ **a, c** linear abhä ngig

$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \Rightarrow 1 \cdot \mathbf{c} - \lambda\mathbf{a} - \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$ $\quad$ **a, b, c** linear abhä ngig

Der affine Raum

Es gelten folgende Sätze

1. Zwei oder mehr Vektoren in einer Geraden durch den Ursprung 0 sind stets l. a.



Es sei $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbf{U}_1$. Dann gibt es, wenn $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{o}$, stets ein wohlbestimmtes $0 \neq \lambda \in \mathfrak{R}$, sodaß gilt $\mathbf{a}_2 = \lambda \mathbf{a}_1$. Dann gilt

$\lambda \mathbf{a}_1 - 1 \cdot \mathbf{a}_2 + 0 \cdot \mathbf{a}_3 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ linear abhängig

Ist aber $\mathbf{a}_1 = \mathbf{o}$, so kann man $\lambda \neq 0$ beliebig wählen, Dann gilt

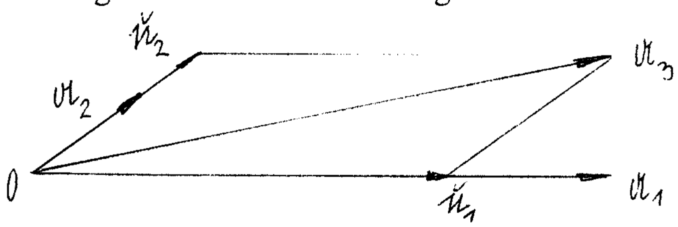
$\lambda \mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2 + 0 \cdot \mathbf{a}_3 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ linear abhängig

Daraus folgt

Eine Menge von Vektoren ist stets linear abhängig, wenn sie den Nullvektor enthält.
Der Nullvektor $\mathbf{o}$ selbst ist linear abhängig

2. Drei oder mehr Vektoren in einer Ebene durch 0 sind stets linear abhängig.

Die in 1. erledigten Fälle können wir übergehen.



Es seien $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{o}$ $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{o}$ und $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbf{U}_2$

Wir stellen $\mathbf{a}_3$ als Summe $\mathbf{a}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ dar, wobei gilt

$\mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_1$, $\mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{a}_2 \Rightarrow \mathbf{a}_3 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$, daher

$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 - 1 \cdot \mathbf{a}_3 + 0 \cdot \mathbf{a}_4 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ linear abhängig

3. Vier oder mehr Vektoren des Vektorraumes der Anschauung sind stets linear abhängig.

Die in 1. und 2. behandelten Fälle übergehen wir.

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \in \mathbf{V}$

$\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{o}, \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{o}, \mathbf{a}_3 \neq \mathbf{o}, \mathbf{a}_4 \neq \mathbf{o}$

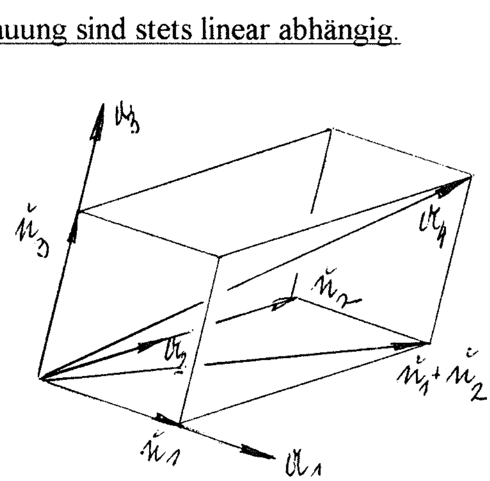
$\mathbf{a}_4 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$

$\mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_1, \mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{u}_3 = \lambda_3 \mathbf{a}_3$

$\mathbf{a}_4 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 - 1 \cdot \mathbf{a}_4 + 0 \cdot \mathbf{a}_5 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{o} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ linear abhängig



4. Umgekehrt gilt: Sind zwei Vektoren l.a., so gehören sie derselbenGeraden durch 0 an, sind drei Vektoren l.a., so gehören sie derselben Ebene durch 0 an.

Basis und Dimension

Wie gezeigt wurde, sind alle Vektoren in einer Geraden durch 0 Vielfache eines Vektors $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ dieser Geraden. Wir nennen $\mathbf{b}$ den *Basisvektor* des durch die Gerade festgelegten Unterraumes.

Alle Vektoren einer Ebene durch 0 lassen sich als Linearkombinationen von zwei Vektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ ($\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{b}_2 \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{b}_1 \neq \lambda\mathbf{b}_2$) darstellen. $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ heißen *Basisvektoren* des durch die Ebene festgelegten Unterraumes.

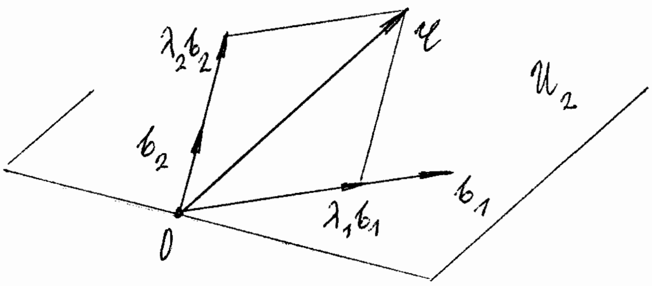
Ebenso lassen sich alle Vektoren des gesamten Vektorraumes als Linearkombination von drei l.u. Vektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ darstellen. $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ stellen eine *Basis* des Vektorraumes dar.

Die Anzahl der Basisvektoren, die nötig sind, einen Unterraum oder den Gesamtraum darzustellen heißt *Dimension* des Unterraumes bzw. Vektorraumes. daher gilt:

Gerade durch 0 ... eindimensionaler Vektorraum

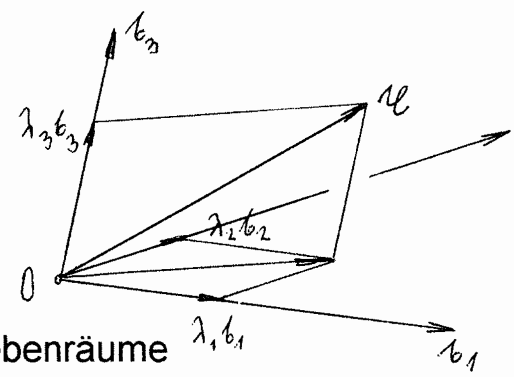
$$\mathbf{x} \in \mathbf{U}_1 \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda\mathbf{b}$$

Ebene durch 0 ......zweidimensionaler Vektorraum



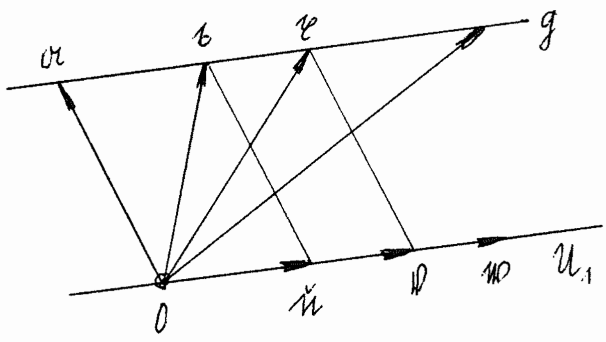
$$\mathbf{x} \in \mathbf{U}_2 \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2$$

Gesamtraum ....dreidimensoinaler Vektorraum



$$\mathbf{x} \in \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \lambda_3\mathbf{b}_3$$

Nebenräume



Eine Gerade g des Anschauungsraumes, welche nicht durch 0 geht, können wir auffassen als Menge der Endpunkte der in ihr endigenden, von 0 ausstrahlenden Vektoren, z.B $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

Diese Menge stellt keinen Unterraum dar, da z.B. der Summenvektor $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ nicht mehr in g endet.

Durch g ist jedoch ein Unterraum $\mathbf{U}_1$ eindeutig bestimmt, nämlich die zu g parallele Gerade durch 0. Sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ zwei beliebige Vektoren von g, so gilt

$$\mathfrak{u} := \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathbf{U}_1$$

Ist $\mathbf{a}$ ein beliebiger Vektor von g und $\mathbf{v} \in \mathbf{U}_1$, so ist $\mathbf{x} := \mathbf{a}+\mathbf{v}$ wieder ein Vektor von g. Auch hier gilt

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = \mathbf{v} \in \mathbf{U_1}$$

Jeder Vektor von g hat daher die Darstellung

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{v} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v} \in \mathbf{U_1}$$

Ist $\mathbf{w}$ ein Basisvektor von $\mathbf{U}_1$, so gilt $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$ und es ist

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{w}$$

eine Parameterdarstellung von g

$\mathbf{a}$ heißt *Repräsentant* von g ("*Ortsvektor*"), $\mathbf{w}$ gehört dem Unterraum $\mathbf{U}_1$ an. $\mathbf{U}_1$ heißt *Richtung* von g. Der Repräsentant $\mathbf{a}$ kann durch einen beliebigen anderen Vektor von g ersetzt werden, z.B. durch

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{u} + \lambda\mathbf{w}$$

wegen $\mathbf{u} = \mu\mathbf{w}$ folgt $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mu\mathbf{w} + \lambda\mathbf{w} = \mathbf{b} + \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\nu}\mathbf{w} = \mathbf{b} + \nu\mathbf{w}$

Also

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + \nu\mathbf{w}$$

Man nennt die Gerade g, aufgefaßt als Menge ihrer Vektoren einen Nebenraum mit der Richtung $\mathbf{U}_1$ und dem Repräsentanten $\mathbf{a}$ (oder $\mathbf{b}$) und schreibt

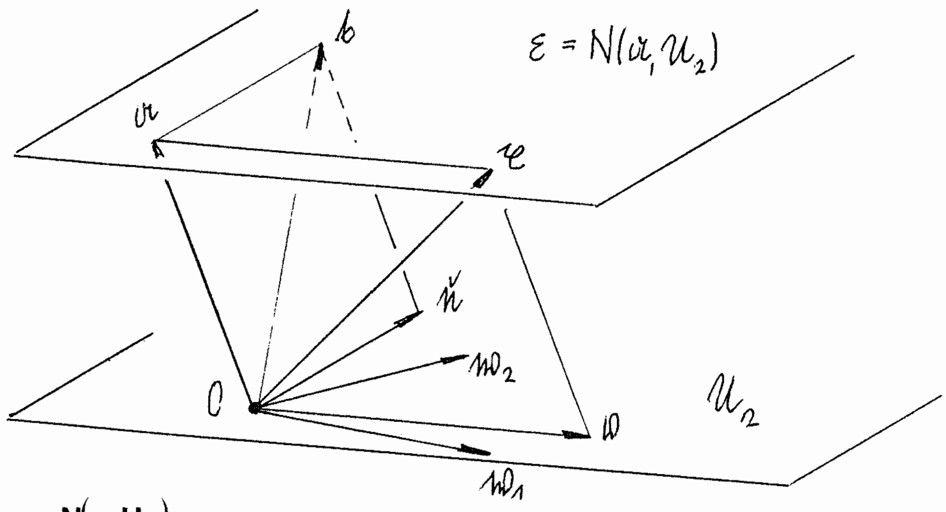
$$g = \mathbf{N}(\mathbf{a}, \mathbf{U_1}) = \mathbf{N}(\mathbf{b}, \mathbf{U_1})$$

Für jeden Vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{N}(\mathbf{a}, \mathbf{U}_1)$ gilt dann

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} \in \mathbf{U_1}$$

Zwei Geraden sind *parallel*, wenn sie *dieselbe Richtung* $\mathbf{U}_1$ haben

Ebenso entspricht einer Ebene nicht durch 0 ein Nebenraum $\mathbf{N}(\mathbf{a}, \mathbf{U}_2)$ mit dem Repräsentanten $\mathbf{a}$ und dem zweidimensionen Unterraum $\mathbf{U}_2$ als Richtung.



$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{u} \in \mathbf{U_2}$

$\mathbf{v} \in \mathbf{U_2} \Rightarrow \mathbf{x} := \mathbf{a} + \mathbf{v} \in \mathbf{N}(\mathbf{a}, \mathbf{U_2})$

Führen wir in $\mathbf{U}_2$ eine Basis $\mathbf{w}_1$ und $\mathbf{w}_2$ ein, so gilt

$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{w}_1 + \lambda_2\mathbf{w}_2, \quad \mathbf{u} = \mu_1\mathbf{w_1} + \mu_2\mathbf{w}_2$

und für alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbf{N}(\mathbf{a}, \mathbf{U}_2)$ gilt die *Parameterdarstellung*

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2$$

Ferner gilt

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{u} + \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 = \mathbf{b} + \underbrace{(\lambda_1 - \mu_1)}_{\nu_1} \mathbf{w}_1 + \underbrace{(\lambda_2 - \mu_2)}_{\nu_2} \mathbf{w}_2$$

daher auch

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + \nu_1 \mathbf{w}_1 + \nu_2 \mathbf{w}_2 \Rightarrow \mathbf{N}(\mathbf{a}, \mathbf{U}_2) = \mathbf{N}(\mathbf{b}, \mathbf{U}_2)$$

Die Parameterdarstellungen

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{w}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2$$

weisen die Unsymmetrie auf, daß außer den Ortsvektoren **x, a** der Nebenräume noch die Richtungsvektoren **w** bzw $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ der den Nebenräumen zugeordneten Unterräume $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ auftreten, also Vektoren, die den betrachteten Nebenräumen gar nicht angehören ("Richtungsvektoren"). Wir leiten daher eine Darstellung ab, in der nur Ortsvektoren auftreten

1. Linearer Fall: Die Gerade sei durch die beiden Punkte **a, b** gegeben. Dann ist **u = b-a** ein Richtungsvektor, und wir erhalten die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mu \mathbf{u} = \mathbf{a} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \underbrace{(1 - \mu)}_{\lambda} \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$$

Daraus folgt die Darstellung eines Punktes x der Geraden durch die *affine Linearkombination*

der Ortsvektoren **a** und **b**:

$$\boxed{\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \qquad (\lambda + \mu = 1)}$$

3. Ebener Fall: Die Ebene sei durch die drei l.u. Ortsvektoren **a,b,c** gegeben. Dann sind **u = b-a** und **v = c-a** Richtungsvektoren und es gilt die Parameterdarstellung

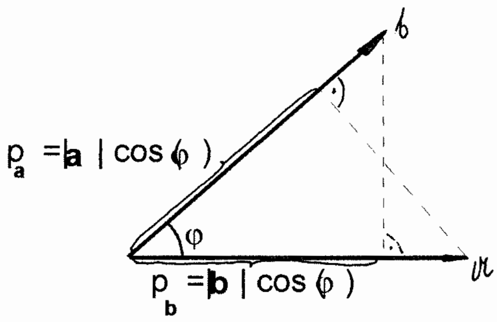
$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \nu(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \underbrace{(1 - \mu - \nu)}_{\lambda} \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c}$$

Die folgende *affine Linearkombination* stellt den Ebenenpunkt **x** mit Hilfe der drei beliebigen *Ortsvektoren* **a, b, c** dar:

$$\boxed{\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c} \qquad \lambda + \mu + \nu = 1}$$

Der Euklidische Vektorraum

Das Skalarprodukt



Das *Skalarprodukt* (*inneres Produkt*) ordnet zwei Vektoren **a,b** eine reelle Zahl zu

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) \to \mathbf{ab} = \lambda \in \Re$$

Dabei gilt folgende <u>Definition</u>:

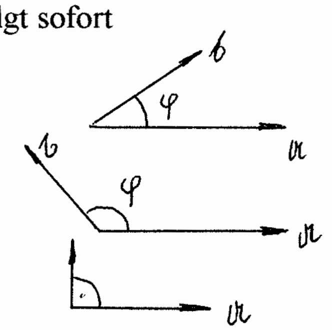
$$\mathbf{ab} := |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\varphi) = |\mathbf{a}| \cdot p_{\mathbf{b}} = |\mathbf{b}| \cdot p_{\mathbf{a}} \qquad 0 \le \varphi \le \pi$$

Aus dieser Definition folgt sofort

$$\mathbf{ab} > 0 \Leftrightarrow 0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{ab} < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$$

$$\mathbf{ab} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$



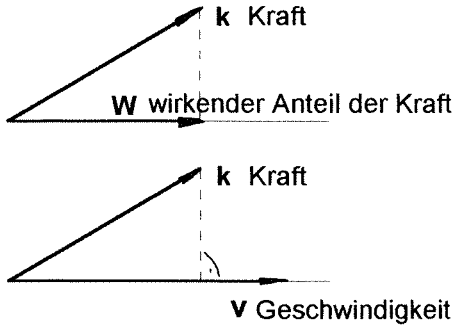
Winkel zweier Vektoren

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}}$$

Die letzte Äquivalenz gilt aber nur dann, wenn wir folgende Festsetzung treffen
<u>Der Nullvektor ist zu allen Vektoren orthogonal</u>
Aus dem Verschwinden des Skalarprodukts $\mathbf{ab} = 0$ kann man i.a. nur schließen $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$
Aus $\mathbf{ax} = 0$ folgt $\mathbf{a} = 0$ nur dann, wenn **ax** für <u>alle</u> Vektoren $\mathbf{x}$ des Vektorraumes verschwindet.

Geometrische (mechanische) Deutung des Skalarproduktes:

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot p_{\mathbf{b}} = |\mathbf{a}| \cdot p_{a}$$



$$|\mathbf{v}| = \frac{\partial s}{\partial t}$$

vk...Leistung

Spezialfälle des Skalarproduktes

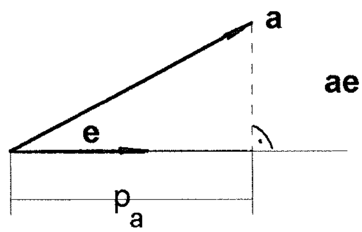
$$\mathbf{aa} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos(0) = |\mathbf{a}|^2$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{aa}} \quad \text{Länge von } \mathbf{a}$$

Ein Vektor mit der Länge 1 heißt *Einheitsvektor*. Es gelten folgende Bezeichnungsweisen

$$\mathbf{e} \ldots |\mathbf{e}| = 1; \qquad \mathring{\mathbf{a}} \ldots \left|\mathring{\mathbf{a}}\right| = 1$$

Der Projektionssatz



$$\mathbf{ae} = p_a$$

<u>Ist **e** ein Einheitsvektor, so ist der Wert des Skalarproduktes **ae** gleich der Länge p_a der Projektion von a auf **e**</u>

Eigenschaften des Skalarproduktes

Kommutatives Gesetz

$\boxed{\mathbf{ab} = \mathbf{ba}}$ folgt aus der Definition

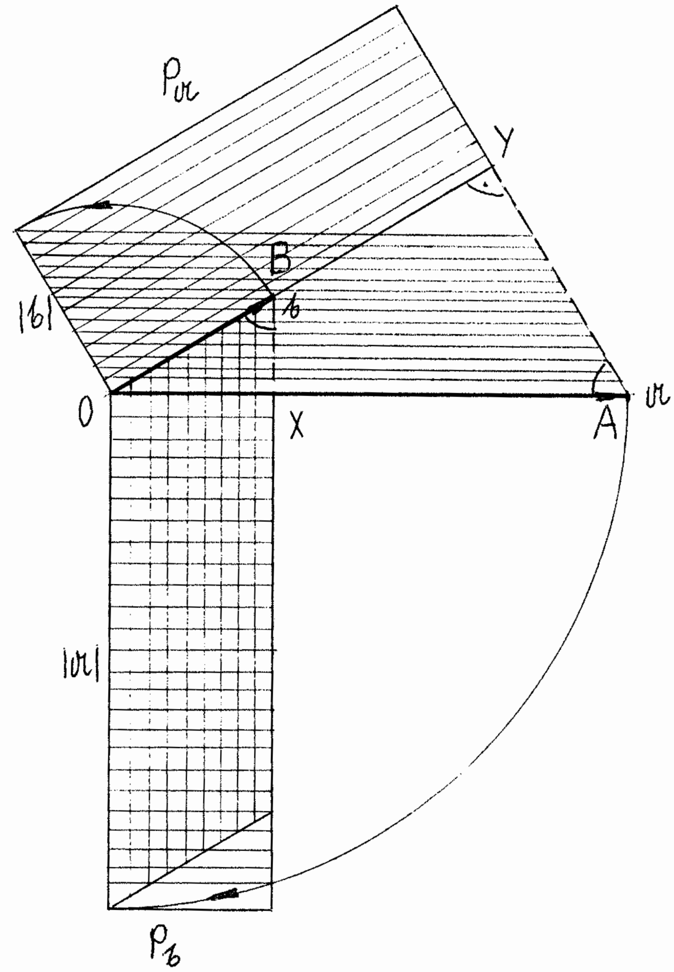
Bemerkung:: In der Schule wird häufig die Vektorrechnung noch vor der Behandlung der Winkelfunktionen eingeführt. Trotzdem braucht man auf das Skalarprodukt nicht zu verzichten. Man führt es als das Produkt

$$\mathbf{ab} := |\mathbf{a}| \cdot p_b$$

ein. Hieraus folgt sofort das Verschwinden des Skalarproduktes bei orthogonalen Vektoren. Hingegen ist bei dieser Definition die Kommutativität des Skalarproduktes keineswegs selbstverständlich. Es ist vielmehr nachzuweisen, daß gilt:

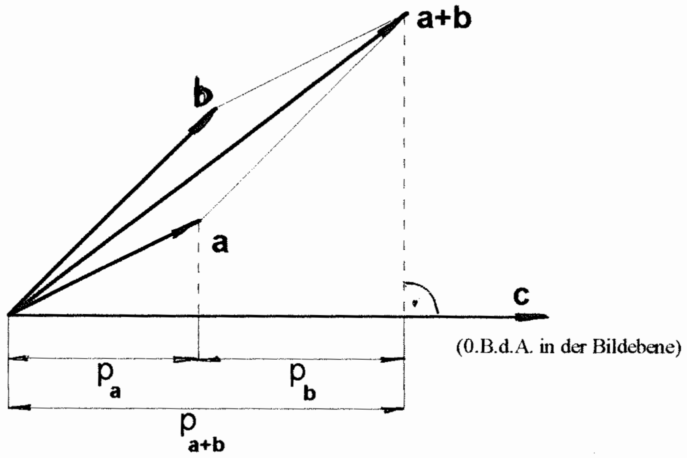
$$\frac{|\mathbf{b}|}{p_b} = \frac{|\mathbf{a}|}{p_a} \Rightarrow |\mathbf{a}| \cdot p_b = |\mathbf{b}| \cdot p_a$$

Die Behauptung folgt aus dem Flächenvergleich der schraffierten Flächen bzw.aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔOAY und ΔOBX



Distributives Gesetz

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac}+\mathbf{bc}$



$$p_{a+b} = p_a + p_b$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = p_{a+b} \cdot |\mathbf{c}| = (p_a + p_b) \cdot |\mathbf{c}| = p_a \cdot |\mathbf{c}| + p_b \cdot |\mathbf{c}| = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$$

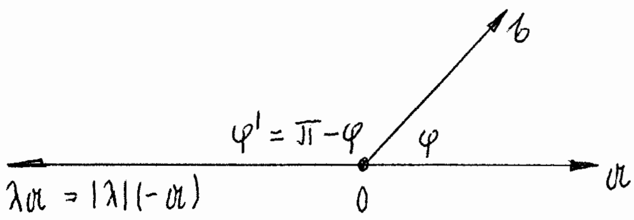
Homogenität

$$\boxed{(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{ab})}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda = 0 & \lambda(\mathbf{ab}) = \mathbf{ob} = 0 \\ & 0(\mathbf{ab}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{ab})$$

$$\lambda > 0 \quad (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = |\lambda\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\varphi = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi = \lambda(|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi) = \lambda \cdot \mathbf{ab}$$

$$\lambda < 0 \quad (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = |\lambda\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\varphi' = -|\lambda\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi = -|\lambda| \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi = (-|\lambda|) \cdot (|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi) = \lambda \cdot (\mathbf{ab})$$



Normierung eines Vektors

Aufsuchung eines mit **a** gleichorientierten Einheitsvektors

$$\lambda\mathbf{a} = \mathring{\mathbf{a}} \quad (\lambda > 0)$$

$$\lambda^2|\mathbf{a}|^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \Rightarrow \mathring{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

Für den Winkel zweier Vektoren gilt daher

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \mathring{\mathbf{a}}\mathring{\mathbf{b}}}$$

Das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren ist gleich dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Definition: Ein Vektorraum über dem reellen Zahlkörper heißt euklidischer Vektorraum, wenn über ihm eine Skalarprodukt definiert ist. Ein Skalarprodukt ordnet je zweiVektoren eine reelle Zahl zu. Es hat folgende Eigenschaften

$$\mathbf{xy} = \mathbf{yx}$$

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz} + \mathbf{yz}$$

$$(\lambda\mathbf{x})\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{xy})$$

Der Euklidische Vektorraum

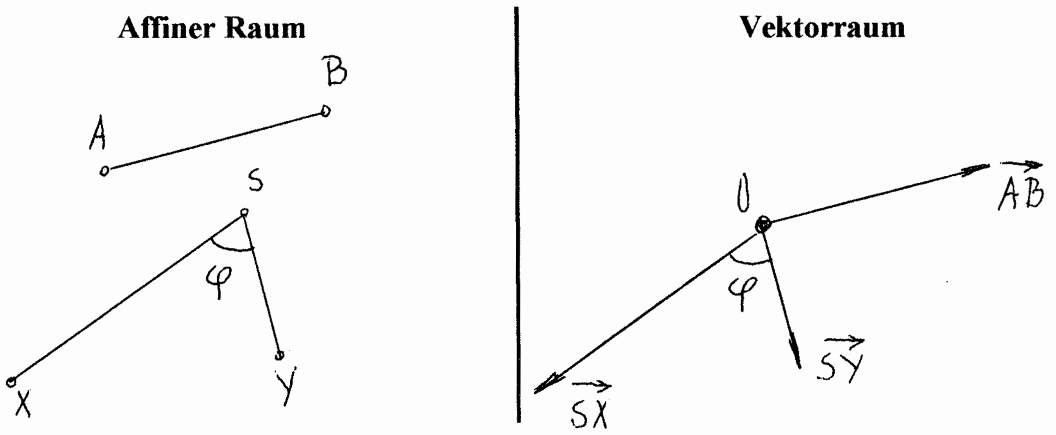
Für beliebige Vektoren $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ gilt $\mathbf{xx} > \mathbf{0}$ $\mathbf{xx} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o}$

Ist der zum affinen Raum **A** gehörige Vektorraum **V** ein euklidischer Vektorraum, so heißt **A** *eukldischer Raum*. Zwei Punkte A,B von **A** haben dann den Abstand

$$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}|$$

Für den Winkel <XSY gilt

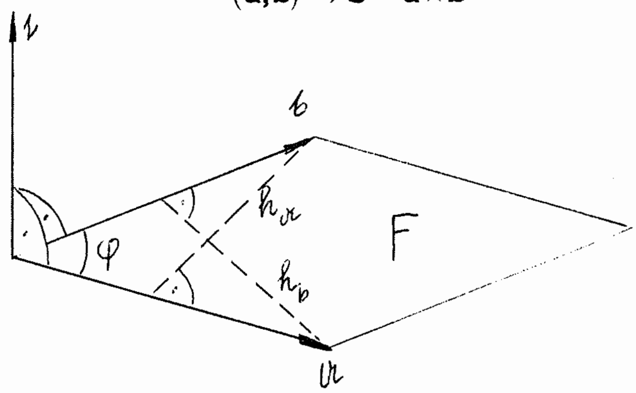
$$cos(< XSY) = \frac{\overrightarrow{SX} \cdot \overrightarrow{SY}}{|SX| \cdot |SY|}$$



Das Vektorprodukt zweier Vektoren

Das *Vektorprodukt* (*äußeres Produkt*) ordnet dem geordneten Paar zweier Vektoren **(a,b)** einen dritten Vektor **c** mit folgenden Eigenschaften zu

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$



1. **c** steht auf **a** und **b** normal
2. Die Länge |**c**| von **c** ist gleich dem Wert der Flächeninhaltes des von **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms
3. Die Vektoren **a,b,c** bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtsdreibein, d.h. sie sind orientiert wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand (Rechte-Hand-Regel)

Aus 3. folgt sofort

$$\boxed{\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}}$$

Das Vektorprodukt ist *schiefsymmetrisch*

Aus Forderung 2 folgt

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot h_{\mathbf{a}} = |\mathbf{b}| \cdot h_{\mathbf{b}} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\varphi) \qquad 0 \le \varphi \le \pi$$

Sind zweiVektoren linear abhängig, so schließen sie den Winkel $\varphi = \mathbf{0}$ oder $\varphi = \pi$ ein, daher gilt

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(0) \quad \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{o}$$

Demnach ist

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o} \Leftrightarrow \mathbf{a},\mathbf{b} \text{ linear abhä ngig}$$

Die Umkehrung folgt aus

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow |\mathbf{a}| = 0 \text{ oder } |\mathbf{b}| = 0 \text{ oder } \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ oder } \varphi = \pi$$

Da aus $|\mathbf{a}| = 0$ folgt $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ und $\mathbf{o}$ von jedem Vektor linear abhängig ist, gilt der Satz ausnahmslos. Speziell gilt

$$\boxed{\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{o}}$$

Das Vektorprodukt ist *alternierend*

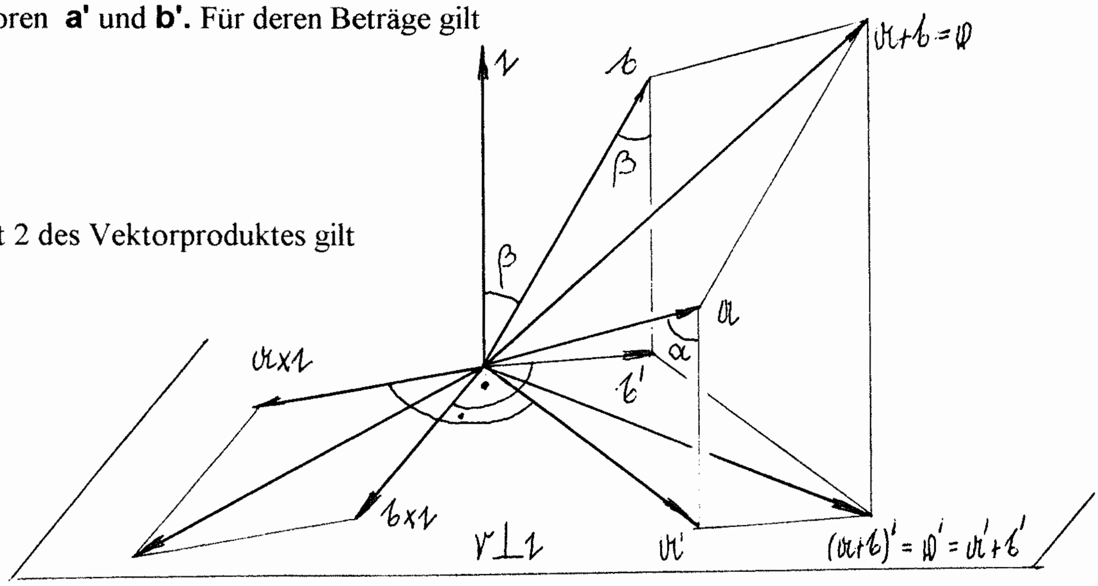
Eigenschaften des Vektorproduktes

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$
$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}$$

Zum Beweis der 1.Formel projizieren wir die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ auf eine Ebene $\nu \perp \mathbf{c}$ und erhalten so die Vektoren $\mathbf{a}'$ und $\mathbf{b}'$. Für deren Beträge gilt

$$|\mathbf{a}'| = |\mathbf{a}| \sin(\alpha)$$
$$|\mathbf{b}'| = |\mathbf{b}| \sin(\beta)$$

Wegen Eigenschaft 2 des Vektorproduktes gilt



$|\mathbf{a}\times\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{c}|\cdot \sin(\alpha) = |\mathbf{c}|\cdot|\mathbf{a}'|$

$|\mathbf{b}\times\mathbf{c}| = |\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|\cdot \sin(\beta) = |\mathbf{c}|\cdot|\mathbf{b}'|$

$|\mathbf{a}'\times\mathbf{c}| = |\mathbf{a}'|\cdot|\mathbf{c}|\cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = |\mathbf{a}'|\cdot|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}\times\mathbf{c}|$

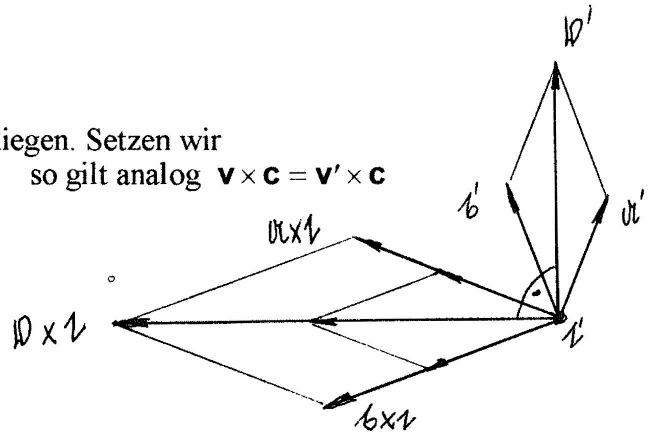
$|\mathbf{b}'\times\mathbf{c}| = |\mathbf{b}'|\cdot|\mathbf{c}|\cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = |\mathbf{b}'|\cdot|\mathbf{c}| = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$

Daher ist

$\mathbf{a}\times\mathbf{c} = \mathbf{a}'\times\mathbf{c}$

$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{b}'\times\mathbf{c}$

da **a, a'** und **c** in derselben Ebene liegen. Setzen wir
$\mathbf{v} := \mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{v}' = (\mathbf{a}+\mathbf{b})' = \mathbf{a}'+\mathbf{b}'$, so gilt analog $\mathbf{v}\times\mathbf{c} = \mathbf{v}'\times\mathbf{c}$



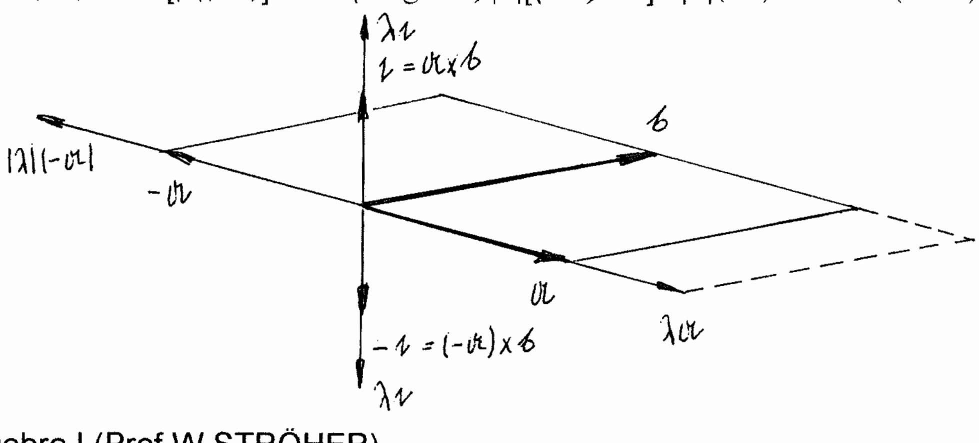
Nun gehen die Vektoren $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ und $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ aus den Vektoren **a'** und **b'** durch eine *Drehstrekkung* in v um 0 hervor, wobei der Drehwinkel $\pi/2$ beträgt und das Streckungsverhältnis $|\mathbf{c}|$ ist. Daher geht auch die Diagonale **a'+b' = (a+b)' = v'** des von a' und b' aufgespannten Parallelogrammes über in die Diagonale $\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ des von $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ und $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ aufgespannten Parallelogrammes. Daher gilt

$$\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{v}'\times\mathbf{c} = \mathbf{v}\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}$$

$$\boxed{(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}$$

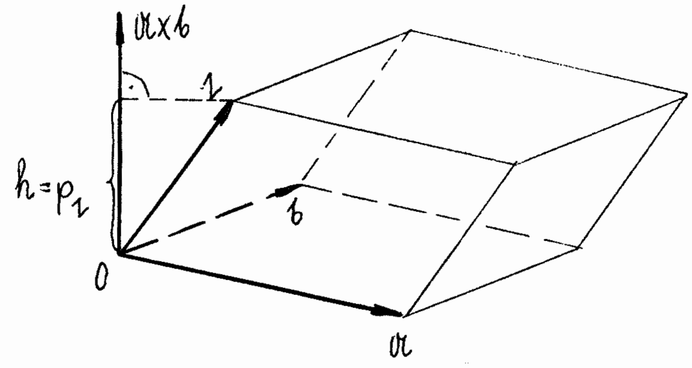
<u>Beweis.</u>

1. $\lambda = 0$ trivial
2. $\lambda > 0$ Orientierung bleibt unverändet. Fläche wird mit λ multipliziert
3. $\lambda < 0$ $(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = [|\lambda|(-\mathbf{a})]\times\mathbf{b} =$ (wegen 2) $|\lambda|[(-\mathbf{a})\times\mathbf{b}] = |\lambda|(-\mathbf{c}) = \lambda\mathbf{c} = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$



Mehrfache Produkte

Das gemischte Produkt (Spatprodukt)



Man erhält das gemischte Produkt, wenn man das *Volumen* des von den drei Vektoren **a,b,c** aufgespannten Parallelepipedes berechnet

$V = F \cdot h$

Es gilt

$F = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|, \quad h = p_c$ daher

$V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$

Das Volumen hat eine positives Vorzeichen, wenn die Vektoren **a,b,c** ein Rechtsdreibein bilden. Durch analoge Betrachtungen folgt

$V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\mathbf{b} = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ Vertauschungssatz

Es gilt die Schreibweise

$\boxed{V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\mathbf{b} = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{b}.\mathbf{c}.\mathbf{a}) = (\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}) \quad \text{Vertauschungssatz}}$

Rechenregeln für das gemischte Produkt

$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = -(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c})$

Das gegebene Dreibein wird umorientiert

$\boxed{(\lambda\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$

$(\lambda\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = [(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b}]\mathbf{c} = [\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})]\mathbf{c} = \lambda[(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}] = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$

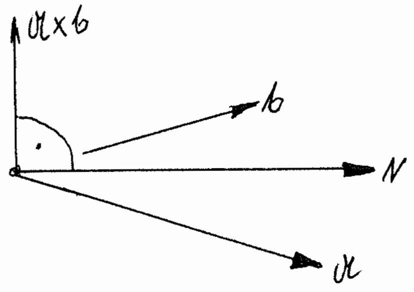
$\boxed{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}+\mathbf{d}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) + (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})}$

$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}+\mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \quad = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{d} = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) + (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})$

$\boxed{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \quad \text{linear abhä ngig}}$

Das gemischte Produkt verschwindet genau dann, wenn die Vektoren $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ linear abhängig sind

Beweis: $\Rightarrow$ $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ linear abhä ngig



$\Leftarrow$ $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ linear abhä ngig $\Rightarrow \mathbf{c} = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) = \mathbf{a}[\mathbf{b}\times(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})] =$

$$\mathbf{a}[\mathbf{b}\times(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})] = \mathbf{a}\left[\lambda(\mathbf{b}\times\mathbf{a})+\mu\underbrace{(\mathbf{b}\times\mathbf{b})}_{\mathbf{o}}\right] = \lambda\underbrace{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{a})}_{\perp} = 0$$

Speziell gilt daher

$$\boxed{(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0}$$

Ferner gilt

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}+\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$$

Beweis: $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}+\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\lambda\mathbf{a}) + (\mathbf{a},\mathbf{b},\mu\mathbf{b}) + (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$

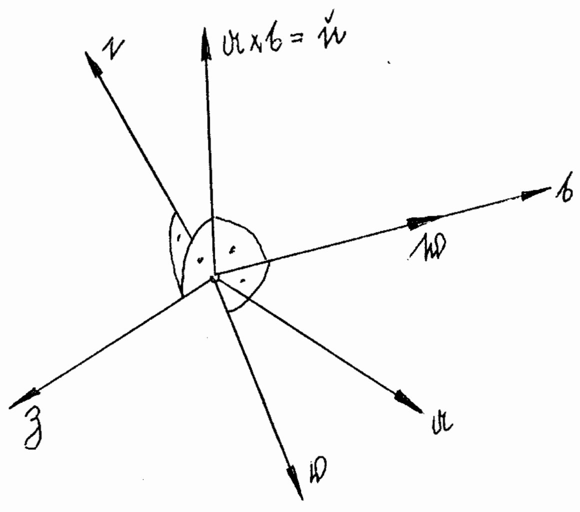
Vektorielles Tripelprodukt, Entwicklungssatz von GRASSMANN
(Hermann GRASSMANN 1809-1877)

$$\boxed{\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} &= \mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{a}(\mathbf{bc})\\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= \mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{c}(\mathbf{ab})\end{aligned}}$$

Das Vektorprodukt ist also nicht assoziativ.

Beweis der ersten Formel: Setzen wir

$\mathbf{z} := (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$
so liegt $\mathbf{z}$, da es zu $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ orthogonal ist, in der durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Ebene. $\mathbf{z}$ läßt sich daher aus $\mathbf{a}$
und $\mathbf{b}$ linear kombinieren. Es ist demnach



$$\mathbf{z} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b} \qquad (*)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten λ und μ betrachten wir die Vektoren

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{a}\times\mathbf{b}=:\mathbf{u} & \mathbf{b}\times\mathbf{u}=:\mathbf{v} & \mathbf{u}\times\mathbf{v}=:\mathbf{w} \\ |\mathbf{a}| & |\mathbf{b}| & |\mathbf{u}| & |\mathbf{v}|=|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{u}| & |\mathbf{w}|=|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|=|\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{b}| \end{array}$$

Je drei aufeinanderfolgende dieser Vektoren bilden ein Rechtsdreibein; **u,v,w** bilden sogar ein orthogonales Rechtsdreibein. Daher ist **w** von **b** linear abhängig und gleich orientiert. Demnach gilt

$$\mathbf{w}=|\mathbf{u}|^2\cdot\mathbf{b}$$

Mit dieser Bezeichnung folgt (∗)aus

$$\mathbf{u}\times C=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b} \quad | \quad \mathbf{v}$$

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{c})\mathbf{v}=(\mathbf{v}\times\mathbf{u})\mathbf{c}=-(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\mathbf{c}=-\mathbf{wc}=-|\mathbf{u}|^2(\mathbf{bc})=$$

$$\lambda(\mathbf{av})+\mu\underbrace{(\mathbf{bv})}_{0!}=\lambda\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{u})=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{u}=\lambda\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=\lambda|\mathbf{u}^2|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda|\mathbf{u}|^2=-|\mathbf{u}|^2(\mathbf{bc})\Rightarrow\lambda=-(\mathbf{bc}) \qquad (1)$$

Daher gilt zunächst

$$\mathbf{u}\times\mathbf{c}=-(\mathbf{bc})\mathbf{a}+\mu\mathbf{b} \quad | \quad \mathbf{c}$$

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{c})\mathbf{c}=(\mathbf{u},\mathbf{c},\mathbf{c})=0=-(\mathbf{bc})(\mathbf{ca})+\mu(\mathbf{bc})\Rightarrow\mu=(\mathbf{ac}) \qquad (2)$$

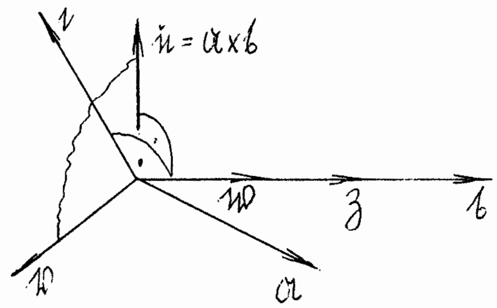
Daher

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{a}(\mathbf{bc})$$

<u>Zusätze:</u> 1. Um zu (1) zu gelangen, muß man durch $|\mathbf{u}|$ kürzen, was nur möglich ist, wenn $|\mathbf{u}| \neq 0$ ist, d.h. wenn $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{u}\neq\mathbf{o}$ ist, d.h. wenn **a,b** linear unabhängig sind, daher eine Ebene aufspannen. Ist aber $\mathbf{u}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{o}$, so gilt $\mathbf{b}=\nu\mathbf{a}$. Auch in diesem Falle stimmt die Formel, denn es gilt

$$\left.\begin{array}{l}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\nu(\mathbf{a}\times\mathbf{a})\times\mathbf{c}=\nu\mathbf{o}\times\mathbf{c}=\mathbf{o}\\ \mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{a}(\mathbf{bc})=\nu\mathbf{a}(\mathbf{ac})-\mathbf{a}((\nu\mathbf{a})\mathbf{c})=\nu\mathbf{a}(\mathbf{ac})-\nu\mathbf{a}(\mathbf{ac})=\mathbf{0}\end{array}\right\}\Rightarrow(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{a}(\mathbf{bc})=\mathbf{o}$$

2. Zur Herleitung von (2) mußte durch **bc** gekürzt werden, was nur möglich ist, wenn $\mathbf{bc}\neq 0$ ist, d.h. wenn **b** und **c** *nicht orthogonal* sind. Die Beweisfigur hat dann folgende Gestalt, wenn $\mathbf{b}\perp\mathbf{c}$ ist:



c liegt dann in der von **u** und **v** aufgspannten Ebene und es gilt

$$\mathbf{c}=\rho\mathbf{u}+\sigma\mathbf{v}$$

z muß, da es auf **u** und **c** orthogonal ist, von **b** linear abhängig sein:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{u}\times\mathbf{c}=\mu\mathbf{b}$$

Daher

$$\mathbf{u}\times\mathbf{c}=\mathbf{u}\times(\rho\mathbf{u}+\sigma\mathbf{v})=\rho\underbrace{(\mathbf{u}\times\mathbf{u})}_{\mathbf{o}}+\sigma\underbrace{(\mathbf{u}\times\mathbf{v})}_{\mathbf{w}}=\sigma\mathbf{w}=\sigma|\mathbf{u}|^2\mathbf{b}=\mu\mathbf{b}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mu=\sigma|\mathbf{u}|^2$$

Ferner gilt

$$\mathbf{ac}=\mathbf{a}(\rho\mathbf{u}+\sigma\mathbf{v})=\rho\underbrace{(\mathbf{au})}_{\perp}+\sigma(\mathbf{av})=\sigma\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{u})=\sigma(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{u}=\sigma\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=\sigma|\mathbf{u}|^2=\mu\Rightarrow\mu=\mathbf{ac}$$

Daher gilt für alle $\mathbf{b}\perp\mathbf{c}$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{b}(\mathbf{ac})$$

Die Identität von JACOBI

(Carl Gustav JACOBI (1804-1852)

$$\boxed{\begin{array}{l}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{o}\\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\quad(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{o}\end{array}}$$

<u>Beweis:</u>

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=$$
$$=\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{a}(\mathbf{bc})+\mathbf{c}(\mathbf{ab})-\mathbf{b}(\mathbf{ac})+\mathbf{a}(\mathbf{bc})-\mathbf{c}(\mathbf{ab})=\mathbf{o}$$

Die Menge der Vektoren bildet mit den beide Verknüpfungen "+" und "×" einen *nichtkommutativen Ring*. Statt des kommutativen Gesetzes gilt $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ = - $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, statt des assoziativen Gesetzes gilt die Identität von JACOBI. Ein Ring dieser Art heißt LIEscher Ring (Sophus LIE 1842-1899)

Das skalare Quadrupelprodukt (Identität von LAGRANGE*)*

Joseph Louis LAGRANGE (1736-1813)

$$\boxed{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{ac})(\mathbf{bd})-(\mathbf{ad})(\mathbf{bc})}$$

<u>Beweis:</u> Setzen wir $\mathbf{u}:=\mathbf{c}\times\mathbf{d}$, so gilt

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{u}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{u})=\mathbf{a}[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]=\mathbf{a}[\mathbf{c}(\mathbf{bd})-\mathbf{d}(\mathbf{bc})]=(\mathbf{ac})(\mathbf{bd})-(\mathbf{ad})(\mathbf{bc})$$

<u>Wichtiger Sonderfall</u>

$$\boxed{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2\cdot|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{ab})^2}$$

Häufig wird bloß dieser Sonderfall als Identität von LAGRANGE bezeichnet

Das vektorielle Quadrupelprodukt

$$\boxed{\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}) - \mathbf{a}(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})\end{aligned}}$$

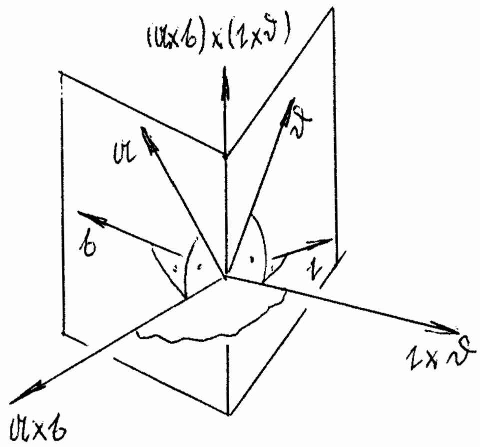
1. $\mathbf{u} := \mathbf{a}\times\mathbf{b}$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{u}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{c}(\mathbf{ud}) - \mathbf{d}(\mathbf{uc}) = \mathbf{c}[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{d}] - \mathbf{d}[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}] = \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$$

2. $\mathbf{v} := \mathbf{c}\times\mathbf{d}$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{v} = \mathbf{b}(\mathbf{av}) - \mathbf{a}(\mathbf{bv}) = \mathbf{b}[\mathbf{a}(\mathbf{c}\times\mathbf{d})] - \mathbf{a}[\mathbf{b}(\mathbf{c}\times\mathbf{d})] = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}) - \mathbf{a}(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})$$

Geometrische Bedeutung:



Lineare Abhängigkeit von vier Vektoren

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{x}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) &= \mathbf{a}(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{x}) + \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{x})\\ \mathbf{x}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{cx}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{ax}) + (\mathbf{c}\times\mathbf{a})(\mathbf{bx})\end{aligned}}$$

Die erste Darstellung folgt aus dem vektoriellen Quadrupelprodukt

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{x}) - \mathbf{x}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \Rightarrow&\\ \mathbf{x}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{x}) - \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{x}) + \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{x}) =&\\ = \mathbf{a}(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{x}) + \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{x})&\end{aligned}$$

Die zweite Darstellung folgt aus dem Ansatz

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mu\mathbf{b}\times\mathbf{c} + \nu\mathbf{c}\times\mathbf{a} \quad | \quad \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$$

$$\mathbf{ax} = \mu(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}), \quad \mathbf{bx} = \nu(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}), \quad \mathbf{cx} = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{cx}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{ax}) + (\mathbf{c}\times\mathbf{a})(\mathbf{bx})$$

Basisdarstellung eines Vektors. Koordinaten

Drei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ stellen eine Basis eines Vektorraumes dar. Jeder weitere Vektor hat dann die Darstellung

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3$$

Diese Darstellung ist eindeutig. Wäre nämlich

$\mathbf{x} = x_1'\,\mathbf{b}_1 + x_2'\,\mathbf{b}_2 + x_3'\,\mathbf{b}_3$

eine ander Darstellung, so würde folgen

$\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 = x_1'\,\mathbf{b}_1 + x_2'\,\mathbf{b}_2 + x_3'\,\mathbf{b} \Rightarrow$

$\left(x_1 - x_1'\right)\mathbf{b}_1 + \left(x_2 - x_2'\right)\mathbf{b}_2 + \left(x_3 - x_3'\right)\mathbf{b}_3 = \mathbf{o} \Rightarrow$

$\left(x_1 - x_1'\right) = \left(x_2 - x_2'\right) = \left(x_3 - x_3'\right) = 0$

wegen der linearen Unabhä ngigkeit der Basisvektoren $\Rightarrow$

$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3'$

Bei gegebener Basis entsprechen also eine Vektor und seine Koordinaten einander bijektiv. Die Koordinaten eines Vektors schreiben wir folgendermaßen:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 \ldots \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 + y_3\mathbf{b}_3 \ldots \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \left(x_1 + y_1\right)\mathbf{b}_1 + \left(x_2 + y_2\right)\mathbf{b}_2 + \left(x_3 + y_3\right)\mathbf{b}_3 \ldots \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} := \begin{Bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{Bmatrix}$$

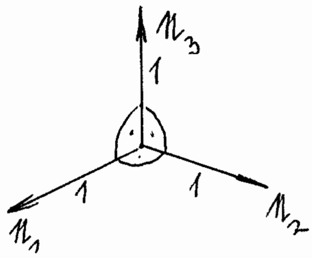
$$\lambda\mathbf{x} = \lambda x_1\mathbf{b}_1 + \lambda x_2\mathbf{b}_2 + \lambda x_3\mathbf{b}_3 \ldots \lambda \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} := \begin{Bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{Bmatrix}$$

Zwischen der Menge der Vektoren und deren Koordinatentripel besteht also ein I*somorphismus*

$$\mathbf{x} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{y} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}+\mathbf{y} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{Bmatrix}, \quad \lambda\mathbf{x} \leftrightarrow \lambda \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{Bmatrix}$$

Durch diesen Isomorphismus wird das Rechnen mit Vektoren auf das Zahlenrechnen zurückgeführt

Orthonormierte Basen



Die Basis sei ein *Rechtssystem* gebildet aus den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, die zu je zweien zueinander orthogonal sind.

Für ein *orthonormiertes* System gilt

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = 1, & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 0, & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = 0 \\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0, & \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = 1, & \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = 0 \\ \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = 0, & \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = 0, & \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = 1 \end{array} \qquad \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

Für ein *orthonormiertes* <u>Rechtssystem</u> gilt

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{o} & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{o} \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{o} & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{o} & (i,j,k) = (1,2,3) \end{array}$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = +1$$

Sind die Produkte für die Basisvektoren bekannt, so kann man die Produkte für beliebige Vektoren berechnen. Es sei

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{z} = z_1\mathbf{e}_1 + z_2\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_3$$

Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3)(y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

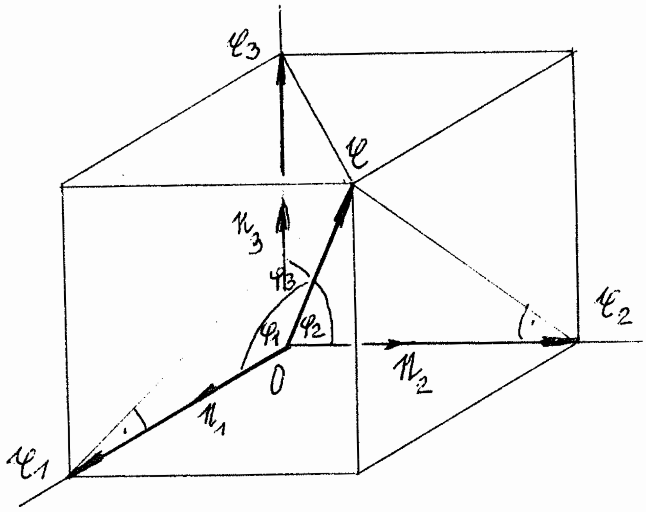
$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Länge eines Vektors

$$\mathbf{xx} = |\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \;, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$cos(\varphi) = \frac{\mathbf{xy}}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

Geometrische Deutung der Koordinaten



$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$

x_1, x_2, x_3...Koordinaten

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$...Komponenten

Die Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ heißen Richtungswinkel.

Definitionsgemä ß gil

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xe}_1 &= |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{e}_1| cos(\varphi_1) = |\mathbf{x}| cos(\varphi_1) \\ \mathbf{xe}_2 &= |\mathbf{x}| cos(\varphi_2) \\ \mathbf{xe}_3 &= |\mathbf{x}| cos(\varphi_3) \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{Projektionssatz} \\ \mathbf{xe}_i = |\mathbf{x}| cos(\varphi_i) \end{array}$$

Da für die Koordinaten der Basisvektoren gilt

$$\mathbf{e}_1 \ldots \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 \ldots \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 \ldots \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

folgt

$\mathbf{xe}_1 = x_1, \quad \mathbf{xe}_2 = x_2, \quad \mathbf{xe}_3 = x_3$ allgemein $\mathbf{xe}_i = x_i$

daher

$|\mathbf{x}| cos(\varphi_1) = x_1, \ldots |\mathbf{x}| cos(\varphi_2) = x_2, \quad |\mathbf{x}| cos(\varphi_3) = x_3,$ allgemein $|\mathbf{x}| cos(\varphi_i) = x_i$

$$x_i = \mathbf{xe}_i = |\mathbf{x}| cos(\varphi_i)$$

Es ist also

$$cos(\varphi_i) = \frac{x_i}{|\mathbf{x}|} = \frac{\mathbf{xe_i}}{|\mathbf{x}|} \ldots \text{Richtungskosinus}$$

Ist $\mathbf{x} = \overset{\circ}{\mathbf{x}}$ ein Einheitvektor, so ist $|\mathbf{x}| = \left|\overset{\circ}{\mathbf{x}}\right| = 1$ und es folgt

$\cos(\varphi_i) = x_i$...Die Koordinaten eines Einheitsvektors sind seine Richtungskosinus

$$\overset{\circ}{\mathbf{x}} \ldots \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_3) \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = |\mathbf{x}| \cdot \overset{\circ}{\mathbf{x}} \ldots \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = |\mathbf{x}| \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_3) \end{Bmatrix}$$

Für die Richtungskosinus gilt wegen $\overset{\circ}{\mathbf{x}}\overset{\circ}{\mathbf{x}} = 1$

$$\boxed{\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2) + \cos^2(\varphi_3) = 1}$$

Vektorprodukt zweier Vektoren

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) \times (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3)$$
$$= -x_2y_1\mathbf{e}_3 + x_3y_1\mathbf{e}_2 + x_1y_2\mathbf{e}_3 - x_3y_2\mathbf{e}_1 - x_1y_3\mathbf{e}_2 + x_2y_3\mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{e}_3$$
$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} := \begin{Bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{Bmatrix}$$

gemischtes Produkt dreier Vektoren

$$(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \left[\left((x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{e}_3\right)\right] \cdot [z_1\mathbf{e}_1 + z_2\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_e] =$$
$$= (x_2y_3 - x_3y_2)z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3$$

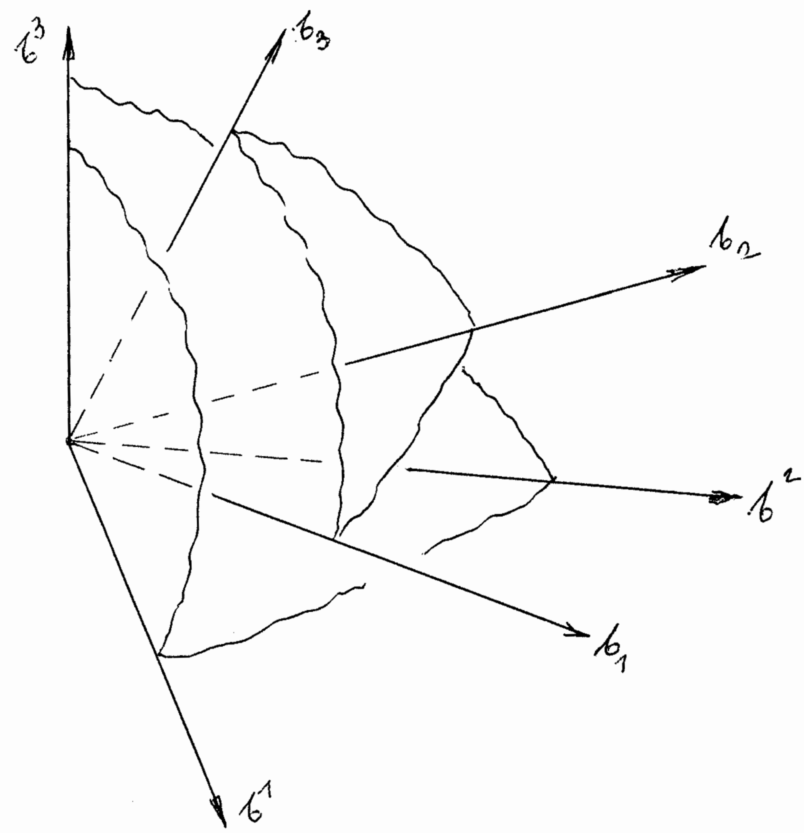
Daraus ergibt sich sofort die Determinantendarstellung des gemischten Produktes

$$\boxed{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

Allgemeine Basen. Reziproke Basen

Die drei Vektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ bilden eine Basis B. Dann gilt

$$\Delta := (\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3) \neq 0$$



Es erweist sich als zweckmäßig, neben der Basis **B** gleichzeitig die *reziproke Basis* **B'** zu betrachten, für deren Basisvektoren $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{b}^3$ gilt

$\mathbf{b}^1 \perp \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}^2 \perp \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}^3 \perp \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ allgemein $\mathbf{b}^i \perp \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k \quad (i, j, k) = (1,2,3)$

Daher gilt

$\mathbf{b}^1\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}^1\mathbf{b}_3 = 0 \qquad \mathbf{b}^2\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}^2\mathbf{b}_1 = 0 \qquad \mathbf{b}^3\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}^3\mathbf{b}_2 = 0$

Durch diese Forderung ist weder die Länge noch die Orientierung der $\mathbf{b}^i$ bestimmt. Diese folgen erst aus den Festsetzungen

$\mathbf{b}^1\mathbf{b}_1 := 1 \qquad \mathbf{b}^2\mathbf{b}_2 := 1 \qquad \mathbf{b}^3\mathbf{b}_3 := 1$

Einheitlich gilt daher

$$\boxed{\mathbf{b}_i\mathbf{b}^j = \delta_i^j}$$

Hierin bedeutet δ_i^j das Symbol von KRONECKER, für welches gilt $\delta_i^j = 1 \Leftrightarrow i = j$ und $\delta_i^j = 0 \Leftrightarrow i \neq j$
(Leopold KRONECKER 1821-1891)

Wegen $\mathbf{b}^1 \perp \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ folgt

$\mathbf{b}^1 = \lambda\, \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3 \quad | \quad \mathbf{b}_1$

$\mathbf{b}^1\mathbf{b}_1 = \lambda(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)\mathbf{b}_1 = \lambda(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_1) = \lambda(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \lambda\Delta = 1$

daher

$$\mathbf{b}^1 = \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_1}{\Delta} \quad \text{analog} \quad \mathbf{b}^2 = \frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{\Delta}, \quad \mathbf{b}^3 = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\Delta}$$

Einheitlich gilt

$$\boxed{\mathbf{b}^i = \frac{\mathbf{b}_j \times \mathbf{b}_k}{\Delta} \qquad (i,j,k) = (1,2,3)}$$

Wir berechnen das gemischte Produkt der $\mathbf{b}^i$

$$\Delta' := (\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3) = \left(\frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{\Delta}, \frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{\Delta}, \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\Delta}\right) = \frac{1}{\Delta^3}(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)$$

es ist

$$(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = [(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) \times (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1)] \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \left[\mathbf{b}_3 \underbrace{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_1)}_{\Delta} - \mathbf{b}_2 \underbrace{(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_1)}_{0}\right](\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) =$$

$$= \Delta\, \mathbf{b}_3(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \Delta^2 \qquad \text{daher} \quad \Delta' = \frac{\Delta^2}{\Delta^3} \quad \text{demnach}$$

$$\boxed{\Delta'\Delta = 1}$$

Daraus folgt zweierlei

1. $\Delta' \neq 0$, d.h $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{b}^3$ sind linear unabhängig, stellen daher eine Basis B dar
2. Δ und Δ' sind beide positiv oder negativ orientiert. **B** und **B'** sind daher beide Rechts- oder Linkssysteme

Wir bestimmen die reziproke Basis **B"** zur reziproken Basis **B'**

$$\frac{\mathbf{b}^1 \times \mathbf{b}^2}{\Delta'} = \frac{1}{\Delta'}\left[\frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{\Delta} \times \frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{\Delta}\right] = \frac{1}{\Delta^2\Delta'}[(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) \times (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1)] =$$

$$\frac{\mathbf{b}_3(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_1) - \mathbf{b}_2(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_1)}{\Delta'\Delta^2} = \frac{\Delta}{\Delta'\Delta^2}\mathbf{b}_3 = \frac{1}{\Delta'\Delta}\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_3$$

Allgemein gilt

$$\boxed{\frac{\mathbf{b}^i \times \mathbf{b}^j}{\Delta'} = \mathbf{b}_k \qquad (i,j,k) = (1,2,3)}$$

d.h. die reziproke Basis zu **B'** ist wieder **B**. Damit ist die Bezeichnung reziproke Basis gerechtfertigt.

Kontravariante und kovariante Koordinaten eines Vektors

Die "gewöhnlichen" Koordinaten

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 \ldots \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

eines Vektors $\mathbf{x}$ bezüglich der allgemeinen Basis $\mathbf{B}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ mögen ab jetzt mit oberen Indizes versehen werden

Man bezeichnet sie als *kontravariante Koordinaten* bezüglich der Basis $\mathbf{B}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{b}_1 + x^2\mathbf{b}_2 + x^3\mathbf{b}_3 \ldots \begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix}$$ Kontravariante Koordinaten bezüglich $\mathbf{B}$

Die "gewöhnlichen" Koordinaten eines Vektors x bezüglich der zu $\mathbf{B}$ *reziproken Basis* $\mathbf{B'}(\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3)$ nennt man *kovariante Koordinaten* bezüglich der *ursprünglichen Basis* $\mathbf{B}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ und kennzeichnet sie durch *untere Indizes.*

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}^1 + x_2\mathbf{b}^2 + x_3\mathbf{b}^3 \ldots \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ Kovariante Koordinaten bezüglich $\mathbf{B}$

Im folgenden verwenden wir die auf EINSTEIN zurückgehende *Summenkonvention*:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} x^i \mathbf{b}_i =: x^i \mathbf{b}_i$$

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{3} x_j \mathbf{b}^j =: x_j \mathbf{b}^j$$

Die EINSTEINsche Summenkonvention besagt, daß auf das Summenzeichen verzichtet werden kann, wenn ein Summationsindex ein oberer und der andere ein unterer Index ist. In diesem Falle wird über die Dimension des vorliegenden Raumes (in unserem Falle also von 1 bis 3) summiert.
Betrachten wir den Vektor

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{b}_i = x_j \mathbf{b}^j$$

so ergibt die Skalarmultiplikation mit $\mathbf{b}^j$ bzw. $\mathbf{b}_i$

$$\mathbf{x}\mathbf{b}^j = x^i \mathbf{b}_i \mathbf{b}^j = x^i \delta_i^j = x^j$$

$$\mathbf{x}\mathbf{b}_i = x_j \mathbf{b}^j \mathbf{b}_i = x_j \delta_i^j = x_i$$

$x^j = \mathbf{x}\mathbf{b}^j$	kontravariante Koordinaten von $\mathbf{x}$
$x_i = \mathbf{x}\mathbf{b}_i$	kovariante Koordinaten von $\mathbf{x}$

Daraus folgt weiter

$$x^i = \mathbf{x}\mathbf{b}^i = \frac{\mathbf{x}(\mathbf{b}_j \times \mathbf{b}_k)}{\Delta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k, \mathbf{x})}{\Delta} = x^i \quad \text{kontravariante Koordinaten von } \mathbf{x} \quad (i,j,k) = (1,2,3)}$$

Daher gilt für die Darstellung von **x** in **B**

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 \frac{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{x})}{\Delta} + \mathbf{b}_2 \frac{(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{x})}{\Delta} + \mathbf{b}_3 \frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{x})}{\Delta}}$$

Für die Darstellung von **x** in B' gilt wegen $\mathbf{b}^i = \frac{\mathbf{b}_j \times \mathbf{b}_k}{\Delta}$

$$\boxed{\mathbf{x} = (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) \frac{\mathbf{b}_3\mathbf{x}}{\Delta} + (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) \frac{\mathbf{b}_1\mathbf{x}}{\Delta} + (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1) \frac{\mathbf{b}_2\mathbf{x}}{\Delta}}$$

Beide Formeln wurden bereits als Folgen des vektoriellen Quadrupelprodukts hergeleitet.
Jeder Vektor **x** läßt sich in den Basen **B** bzw, **B'** darstellen. Insbesondere gilt dies auch für die Darstellung der $\mathbf{b}^j$ in **B** und der $\mathbf{b}_i$ in **B'**

$$\mathbf{b}^i = \beta^{ij}\mathbf{b}_j$$

$$\mathbf{b}_i = \beta_{ij}\mathbf{b}^j$$

Skalarmultiplikation der 1.Gleichung mit $\mathbf{b}^k$ und der 2.Gleichung mit $\mathbf{b}_k$ergibt

$$\mathbf{b}^i\mathbf{b}^k = \beta^{ij}\mathbf{b}_j\mathbf{b}^k = \beta^{ij}\delta_j^k = \beta^{ik}$$

$$\mathbf{b}_i\mathbf{b}_k = \beta_{ij}\mathbf{b}^j\mathbf{b}_k = \beta_{ij}\delta_k^j = \beta_{ik}$$

Die Größen

$$\boxed{\beta_{ik} := \mathbf{b}_i\mathbf{b}_k = \beta_{ki}, \qquad \beta^{ik} := \mathbf{b}^i\mathbf{b}^k = \beta^{ki} \qquad i = 1,2,3}$$

heißen *metrische Fundamentalgrößen.*

Daher gilt

$$\boxed{\mathbf{b}^i = \beta^{ij}\mathbf{b}_j, \qquad \mathbf{b}_i = \beta_{ij}\mathbf{b}^j \qquad i = 1,2,3}$$

Zwischen den Fundamentalgrößen mit unteren und denen mit oberen Indizes bestehen die Beziehungen

$$\mathbf{b}^i\mathbf{b}_j = (\beta^{ik}\mathbf{b}_k)(\beta_{jl}\mathbf{b}^l) = \beta^{ik}\beta_{jl}(\mathbf{b}_k\mathbf{b}^l) = \beta^{ik}\beta_{jl}\delta_k^l = \beta^{ik}\beta_{kj} = \delta_j^i$$

$$\boxed{\beta^{ik}\beta_{kj} = \delta^i_j \qquad i = 1,2,3;\ j = 1,2,3}$$

Zusammenhang zwischen kontravarianten und kovarianten Koordinaten

$$\mathbf{x} = x^i\mathbf{b}_i = x_j\mathbf{b}^j \quad | \quad \mathbf{b}_k$$

$$x^i\mathbf{b}_i\mathbf{b}_k = x_j\mathbf{b}^j\mathbf{b}_k = x_j\delta^j_k = x_k$$

$$x^i\mathbf{b}_i\mathbf{b}^k = x^i\delta^k_i = x_j\mathbf{b}^j\mathbf{b}^k = x^k$$

also

$$\boxed{\begin{matrix} x_k = \beta_{ki}x^i \\ x^k = \beta^{kj}x_j \end{matrix} \qquad k = 1,2,3}$$

Für orthonormierte Basen gilt wegen $\Delta = 1$

$$\boxed{\mathbf{e}^k = \frac{\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j}{\Delta} = \mathbf{e}_k \quad \text{also} \quad \mathbf{e}^k = \mathbf{e}_k}$$

<u>Die orthogonormierte Basis ist selbstreziprok.</u> In diesem Falle sind kontravariante und kovariante Koordinaten identisch und es ist belanglos, ob man sie oben oder unten indiziert.

Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\mathbf{x} = x^i\mathbf{b}_i = x_i\mathbf{b}^i, \quad \mathbf{y} = y^j\mathbf{b}_j = y_j\mathbf{b}^j$$

$$\mathbf{xy} = (x^i\mathbf{b}_i)(y^j\mathbf{b}_j) = x^iy^j\mathbf{b}_i\mathbf{b}_j = x^iy^j\beta_{ij}$$

$$\mathbf{xy} = (x^i\mathbf{b}_i)(y_j\mathbf{b}^j) = x^iy_j\mathbf{b}_i\mathbf{b}^j = x^iy_j\delta^j_i = x^iy_i$$

$$\mathbf{xy} = (x_i\mathbf{b}^i)(y^j\mathbf{b}_j) = x_iy^j\mathbf{b}_j\mathbf{b}^i = x_iy^j\delta^i_j = x_iy^i$$

$$\mathbf{xy} = (x_i\mathbf{b}^i)(y_j\mathbf{b}^j) = x_iy_j\mathbf{b}^i\mathbf{b}^j = x_iy_j\beta^{ij}$$

speziell gilt

$$\mathbf{xx} = |\mathbf{x}|^2 = x^ix^j\beta_{ij} = x^ix_i = x_ix^i = x_ix_j\beta^{ij}$$

In Koordinatenspalten geschrieben lauten diese Ausdrücke

$$\begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{Bmatrix} = x^iy^j\beta_{ij}, \quad \begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x^1y_1 + x^2y_2 + x^3y_3 \ \text{usw.}$$

Vektorprodukt zweier Vektoren

In diesem Falle ist nur die Anwendung gleichartiger Koordinaten zweckmäßig

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y} = \left(x^1\mathbf{b}_1 + x^2\mathbf{b}_2 + x^3\mathbf{b}_3\right)\times\left(y^1\mathbf{b}_1 + y^2\mathbf{b}_2 + y^3\mathbf{b}_3\right) =$$
$$= \left(x^1y^2 - x^2y^1\right)\underbrace{\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2}_{\Delta\,\mathbf{b}^3} + \left(x^2y^3 - x^3y^2\right)\underbrace{\mathbf{b}_2\times\mathbf{b}_3}_{\Delta\,\mathbf{b}^1} + \left(x^3y^1 - x^1y^3\right)\underbrace{\mathbf{b}_3\times\mathbf{b}_1}_{\Delta\,\mathbf{b}^2}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{x}\times\mathbf{y} = \Delta\left[\left(x^2y^3 - x^3y^2\right)\mathbf{b}^1 + \left(x^3y^1 - x^1y^3\right)\mathbf{b}^2 + \left(x^1y^2 - x^2y^1\right)\mathbf{b}^3\right] = z_1\mathbf{b}^1 + z_2\mathbf{b}^2 + z_3\mathbf{b}^3 \\ \begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{Bmatrix} := \Delta\begin{bmatrix} x^2y^3 - x^3y^2 \\ x^3y^1 - x^1y^3 \\ x^1y^2 - x^2y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}\end{gathered}}$$

Analog gilt

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y} = \left(x_1\mathbf{b}^1 + x_2\mathbf{b}^2 + x_3\mathbf{b}^3\right)\times\left(y_1\mathbf{b}^1 + y_2\mathbf{b}^2 + y_3\mathbf{b}^3\right) =$$
$$= \left(x_1y_2 - x_2y_1\right)\underbrace{\mathbf{b}^1\times\mathbf{b}^2}_{\Delta'\mathbf{b}_3} + \left(x_2y_3 - x_3y_2\right)\underbrace{\mathbf{b}^2\times\mathbf{b}^3}_{\Delta'\mathbf{b}_1} + \left(x_2y_3 - x_3y_2\right)\underbrace{\mathbf{b}^2\times\mathbf{b}^3}_{\Delta'\mathbf{b}_2}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{x}\times\mathbf{y} = \Delta'\left[\left(x_2y_3 - x_3y_2\right)\mathbf{b}_1 + \left(x_3y_1 - x_1y_3\right)\mathbf{b}_2 + \left(x_1y_2 - x_2y_1\right)\mathbf{b}_3\right] = z^1\mathbf{b}_1 + z^2\mathbf{b}_2 + z^3\mathbf{b}_3 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \Delta'\begin{Bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{Bmatrix}\end{gathered}}$$

Spatprodukt dreier Vektoren

$$(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = (\mathbf{x}\times\mathbf{y})\mathbf{z} = \Delta\left[\left(x^2y^3 - x^3y^2\right)\mathbf{b}^1 + \left(x^3y^1 - x^1y^3\right)\mathbf{b}^2 + \left(x^1y^2 - x^2y^1\right)\mathbf{b}^3\right]\left(z^1\mathbf{b}_1 + z^2\mathbf{b}_2 + z^3\mathbf{b}_3\right) =$$
$$= \Delta\left[\left(x^2y^3 - x^3y^2\right)z^1 + \left(x^3y^1 - x^1y^3\right)z^2 + \left(x^1y^2 - x^2y^1\right)\ z^3\right]$$

daher

$$\boxed{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \Delta\begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} \quad \text{analog} \quad (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \Delta'\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

Wegen $\Delta = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ und $x_i = \mathbf{x}\mathbf{b}_i, y_i = \mathbf{y}\mathbf{b}_i, z_i = \mathbf{z}\mathbf{b}_i$ nimmt die letzte Formel folgende Gestalt an

$$(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{x}\mathbf{b}_1 & \mathbf{y}\mathbf{b}_1 & \mathbf{z}\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{x}\mathbf{b}_2 & \mathbf{y}\mathbf{b}_2 & \mathbf{z}\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{x}\mathbf{b}_3 & \mathbf{y}\mathbf{b}_3 & \mathbf{z}\mathbf{b}_3 \end{vmatrix}$$

Mit entsprechender Umbenennung folgt die Formel für

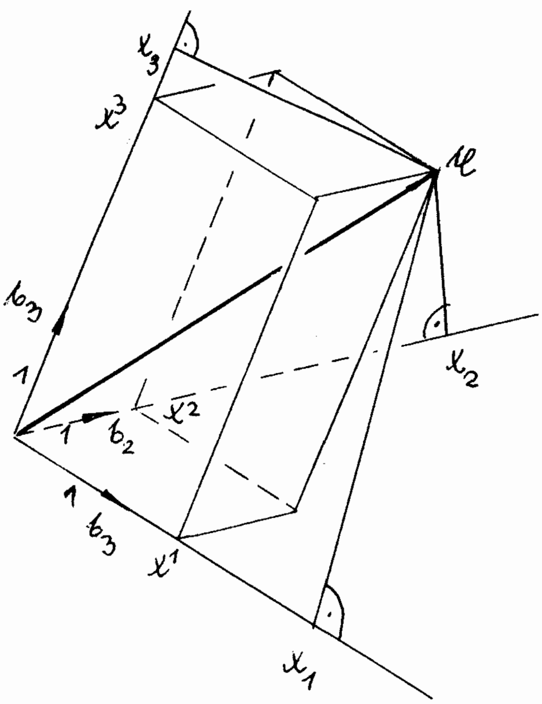
Das skalare Sechserprodukt

$$(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_1\mathbf{b}_3 & \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3 & \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3 \end{vmatrix}$$

speziell gilt

$$(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)^2 = (\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} > 0$$

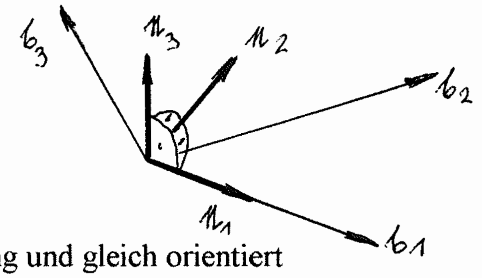
Die letze Deteminante heißt GRAMsche Determinante (Jorgen P. GRAM 1850-1916)
Wenn die Basisvektoren normiert sind ($|\mathbf{b}_i| = 1$), läßt sich eine einfache geometrischen Deutung der kovarianten Koordinaten angeben.



Aus $x_i = \mathbf{x}.\mathbf{b}_i$ und $|\mathbf{b}_i|=1$ folgt nach dem Projektionssatz, daß der Betrag der kovarianten Koordinaten gleich der Länge der Normalprojektion von $\mathbf{x}$ auf die Vektoren von $\mathbf{B}$ sind, oder, was dasselbe ist, der Normalsbstand von den Koordinatenebenen von $\mathbf{B'}$.
Die kontravarianten Koordinaten sind die üblichen schiefwinkeligen Koordinaten.
Aus dieser geometrischen Interpretation folgt wiederum, daß orthonormierte Basen zu sich selbst reziprok sind.

Orthonormierung einer Basis nach E.SCHMIDT
(Erhard SCHMIDT 1876-1959)

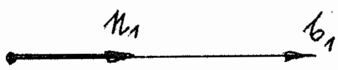
Ausgehend von drei beliebigen Basisvektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ wird eine othonomierte Basis mit folgenden Eigenschaften gesucht



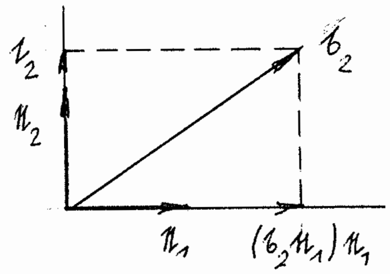
1. $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{b}_1$ sind linear abhängig und gleich orientiert
2. $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ spannen dieselbe Ebene wie $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ auf. Diese Ebene wird durch $\mathbf{b}_1$ in zwei Halbebenen getrennt. $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{b}_2$ gehören derselben Halbebene an.
3. Die von $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ aufgespannte Ebene trennt den Raum in zwei Halbräume. $\mathbf{e}_3$ und $\mathbf{b}_3$ gehören demselben Halbraum an

Schrittweise Konstruktion der orthonormierten Basis

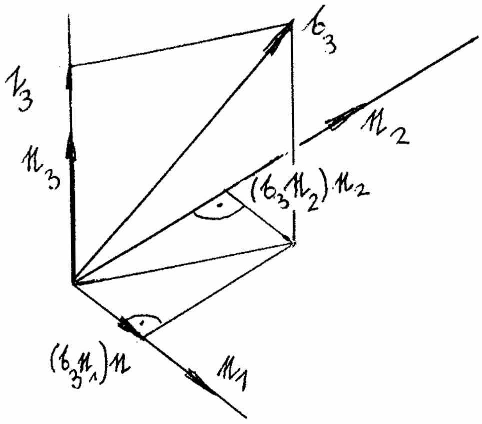
$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}$$



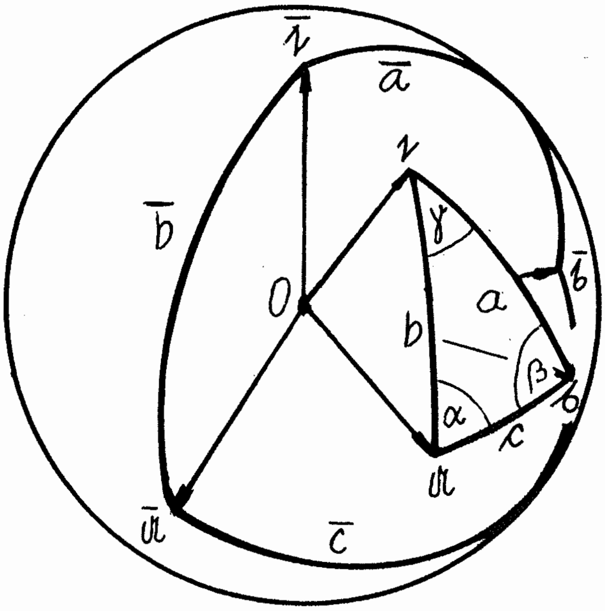
$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_2 + (\mathbf{b}_2\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2 - (\mathbf{b}_2\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{c}_2}{|\mathbf{c}_2|}$$



$$\mathbf{b}_3 = (\mathbf{b}_3\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{b}_3\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + \mathbf{c}_3$$
$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_3 - (\mathbf{b}_3\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{b}_3\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{c}_3}{|\mathbf{c}_3|}$$



Normierte Basis. Polare Basis. Sphärische Trigonometrie



Wir betrachten drei Einheitsvektoren **a,b,c** mit $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$ und $\Delta = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \neq 0$. Die Eckpunkte dieser Vektoren liegen auf einer Kugel vom Radius 1 und bilden dort die Eckpunkte eines *sphärischen Dreiecks*[1].

Die *Seiten des sphärischen Dreiecks* werden durch die die Eckpunkte verbindenden Großkreisbögen gebildet, die *Seitenlängen* $a := \angle\, \mathbf{bc}$, $b := \angle\, \mathbf{ca}$, $c := \angle\, \mathbf{ab}$ sind die den Großkreisbögen entsprechenden Zentriwinkel $< \pi$.

Die *Dreieckswinkel* α,β,γ, des sphärischen Dreiecks sind die Winkel der in einer Dreiecksecke einander schneidenden Durchmesserebenen der Kugel, in denen die Dreiecksseiten liegen und daher auch gleich den Winkeln der Normalenvektoren auf diese Ebenen.. Die Dreieckswinkel sind auch die Winkel der Tangenten an die Dreiecksseiten in den Eckpunkten.

Es gilt

$\mathbf{ab} = \cos(c), \qquad \mathbf{bc} = \cos(a), \qquad \mathbf{ca} = \cos(b)$

Das polare Dreiecks zu einem sphärischen Dreieck hat als Eckpunkte die Endpunkte der Einheitsvektoren

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin(a)}, \qquad \bar{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin(b)}, \qquad \bar{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin(c)}$$

$$|\bar{\mathbf{a}}| = |\bar{\mathbf{b}}| = |\bar{\mathbf{c}}| = 1$$

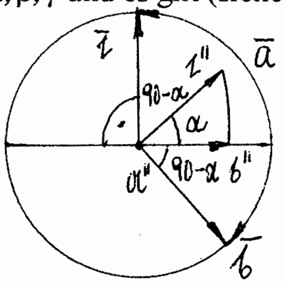
also jener Vektoren, die auf die Seitenebenen des gegebenen sphärischen Dreiecks normal stehen.

---

[1] Wir betrachten im folgenden nur EULERsche Dreiecke (Leonhard EULER 1707-1783). Es ind dies sphärische Dreiecke, deren Seiten und Winkel kleiner gleich π sind.
Die MÖBIUSschen Dreiecke (Ferdinand MÖBIUS1790-1868) können beliebige Seiten und Winkel modulo 2π haben. Durch drei Kugelpunkte werden 8 MÖBIUSsche Dreiecke bestimmt

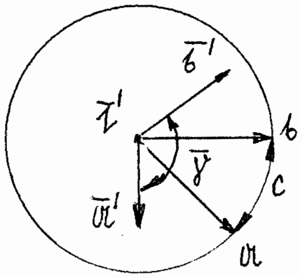
Beziehungen zwischen sphärischem Dreieck und Polardreieck

Die Seiten des Polardreiecks heißen $\bar{\mathsf{a}},\bar{\mathsf{b}},\bar{\mathsf{c}}$, die Winkel $\bar\alpha,\bar\beta,\bar\gamma$ und es gilt (siehe Figur)



$$\bar{\mathsf{a}} = \pi - \alpha \qquad \mathsf{a} = \pi - \bar\alpha$$
$$\bar{\mathsf{b}} = \pi - \beta \qquad \mathsf{b} = \pi - \bar\beta$$
$$\bar{\mathsf{c}} = \pi - \gamma \qquad \mathsf{c} = \pi - \bar\gamma$$

Wie beim gegebenen Dreieck gilt



$$\left.\begin{aligned}\overline{\mathbf{ab}} &= \cos(\bar{\mathsf{c}}) = \cos(\pi-\gamma) = -\cos(\gamma)\\ \overline{\mathbf{bc}} &= -\cos(\alpha)\\ \overline{\mathbf{ca}} &= -\cos(\beta)\end{aligned}\right\}\ \text{zyklisch}$$

Anderseits gilt

$$\overline{\mathbf{ab}} = \frac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{c}\times\mathbf{a})}{\sin(\mathsf{a})\sin(\mathsf{b})} = \frac{(\mathbf{bc})(\mathbf{ca})-(\mathbf{ab})(\mathbf{cc})}{\sin(\mathsf{a})\sin(\mathsf{b})} = \frac{\cos(\mathsf{a})\cos(\mathsf{b})-\cos(\mathsf{c})\cdot 1}{\sin(\mathsf{a})\sin(\mathsf{b})} = \cos(\bar{\mathsf{c}}) = -\cos(\gamma)$$

$$\cos(\mathsf{a})\cos(\mathsf{b}) - \cos(\mathsf{c}) = -\sin(\mathsf{a})\sin(\mathsf{b})\cos(\gamma)$$

Daher gilt zyklisch

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\mathsf{c}) &= \cos(\mathsf{a})\cos(\mathsf{b}) + \sin(\mathsf{a})\sin(\mathsf{b})\cos(\gamma)\\ \cos(\mathsf{a}) &= \cos(\mathsf{b})\cos(\mathsf{c}) + \sin(\mathsf{b})\sin(\mathsf{c})\cos(\alpha) \qquad \text{Seitenkosinussatz}\\ \cos(\mathsf{b}) &= \cos(\mathsf{c})\cos(\mathsf{a}) + \sin(\mathsf{c})\sin(\mathsf{a})\cos(\beta)\end{aligned}}$$

Das Polardreieck des Polardreiecks ist wieder das ursprüngliche: Dreieck
Daher gilt

$$\mathbf{a} = \frac{\bar{\mathbf{b}}\times\bar{\mathbf{c}}}{\sin(\bar{\mathsf{a}})}, \qquad \mathbf{b} = \frac{\bar{\mathbf{c}}\times\bar{\mathbf{a}}}{\sin(\mathsf{b})}, \qquad \mathbf{c} = \frac{\bar{\mathbf{a}}\times\bar{\mathbf{b}}}{\sin(\mathsf{c})} \qquad (*)$$

Genau wie oben finden wir den Seitenkosinussatz für das Polardreieck

$$\cos(\bar{\mathsf{c}}) = \cos(\bar{\mathsf{a}})\cos(\bar{\mathsf{b}}) + \sin(\bar{\mathsf{a}})\sin(\bar{\mathsf{b}})\cos(\bar\gamma)$$
$$\cos(\pi-\gamma) = \cos(\pi-\alpha)\cos(\pi-\beta) + \sin(\pi-\alpha)\sin(\pi-\beta)\cos(\pi-\mathsf{c})$$
$$-\cos(\gamma) = +\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\mathsf{c})$$

Daher zyklisch

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\gamma) &= -\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\mathsf{c})\\ \cos(\alpha) &= -\cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\cos(\mathsf{a}) \qquad \text{Winkelkosinussatz}\\ \cos(\beta) &= -\cos(\gamma)\cos(\alpha) + \sin(\gamma)\sin(\alpha)\cos(\mathsf{b})\end{aligned}}$$

Aus (*) folgt

$$\mathbf{a} = \frac{\overline{\mathbf{b}} \times \overline{\mathbf{c}}}{\sin(\overline{\mathbf{a}})} = \frac{(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\sin(\pi-\alpha)\sin(\mathrm{b})\sin(\mathrm{c})} = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}) - \mathbf{c}\overbrace{(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b})}^{0}}{\sin(\alpha)\sin(\mathrm{b})\sin(\mathrm{c})} = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}{\sin(\alpha)\sin(\mathrm{b})\sin(\mathrm{c})}\cdot\mathbf{a}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}{\sin(\alpha)\sin(\mathrm{b})\sin(\mathrm{c})}$$

Daraus folgt durch zyklische Vertauschung bei Beachtung des Vertausschungssatzes

$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \sin(\alpha)\sin(\mathrm{b})\sin(\mathrm{c})$ $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \sin(\beta)\sin(\mathrm{c})\sin(\mathrm{a})$ $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \sin(\gamma)\sin(\mathrm{a})\sin(\mathrm{b})$	"Eckensinus" des normierten Dreibeins $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$

und weiters

$$\sin(\alpha)\sin(\mathrm{b})\sin(\mathrm{c}) = \sin(\beta)\sin(\mathrm{c})\sin(\mathrm{a}) = \sin(\gamma)\sin(\mathrm{a})\sin(\mathrm{b}) \quad \Big| \; :\sin(\alpha)\sin(\mathrm{b})\sin(\mathrm{c})$$

$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\mathrm{a})} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\mathrm{b})} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\mathrm{c})}$	Sphä rischer Sinussatz

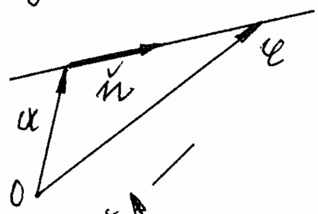
Anwendung der Vektorrechnung auf Geometrie und Mechanik

Darstellung des Punktes

$X(\mathbf{x})$

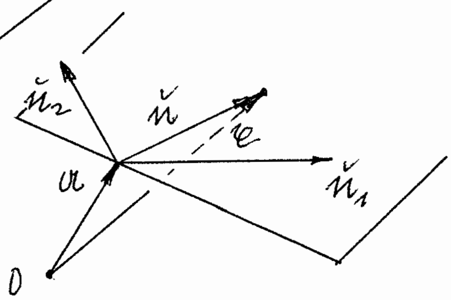
Parameterdarstellung der Geraden

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{u}$$

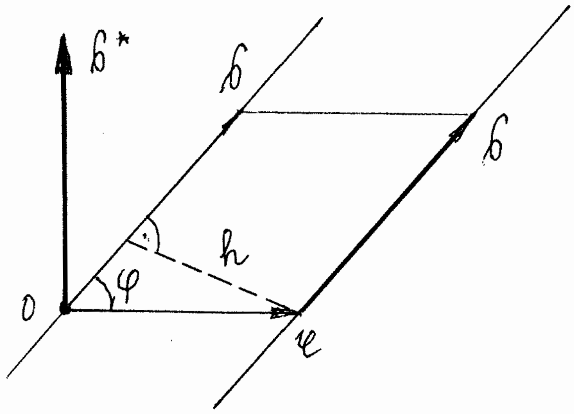


Parameterdarstellung der Ebene

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2$$



Moment einer Kraft um 0



Die Trägergerade (Wirkungslinie) sei durch den Orstvektor $\mathbf{x}$ und den Kraftvektor $\mathbf{s}$ als Richtungsvektor gegeben. Dann gilt für den *Momentenvektor* $\mathbf{s}^*$ um 0

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{s}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{s} \\ |\mathbf{s}^*| = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{s}| \, sin(\varphi) = \mathrm{h} \cdot |\mathbf{s}| = \mathrm{F} \end{array}}$$

<u>Der Momentenvektor ist unabhängig von der Wahl des Ortsvektors auf der Trägergeraden:</u>

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{s} \Rightarrow \mathbf{y} \times \mathbf{s} = (\mathbf{x} + \lambda \mathbf{s}) \times \mathbf{s} = \mathbf{x} \times \mathbf{s} + \lambda \mathbf{s} \times \mathbf{s} = \mathbf{x} \times \mathbf{s} = \mathbf{s}^*$$

<u>Durch Vorgabe der orthogonalen Vektoren</u>

$$\boxed{\mathbf{s}, \mathbf{s}^* \qquad (\mathbf{s}\mathbf{s}^* = 0)}$$

ist die Wirkungslinie der Kraft eindeutig festgelegt

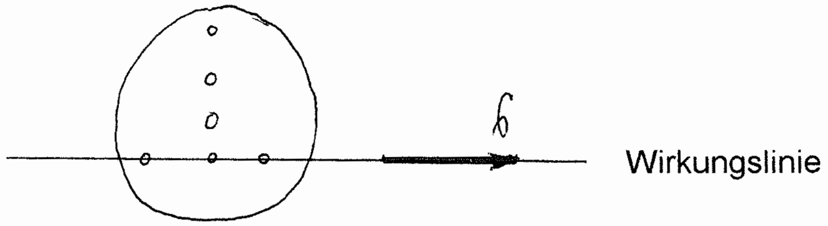
s* legt zunächst die Verbindungsebene von 0 und der Wirkungslinie eindeutig fest. Aus

$$|\mathbf{s}^*| = h \cdot |\mathbf{s}|$$

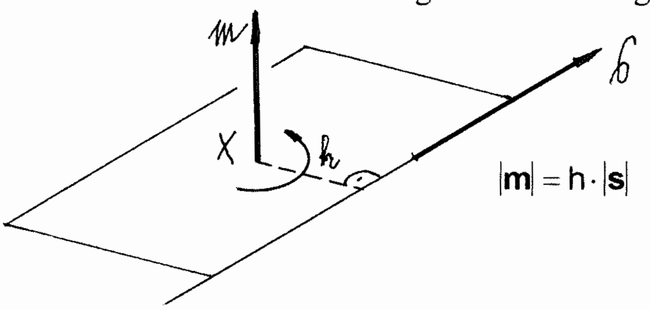
kann der Abstand h der Wirkungslinie von 0 berechnet werden. Die Wirkungslinie ist dadurch zweideutig bestimmt. Durch den durch **s*** bestimmten Drehsinn ist die Wirkungslinie eindeutig bestimmt.

Darstellung einer Einzelkraft

Eine Kraft wird festgelegt durch Angabe ihrer Wirkungslinie, Größe und Orientierung. Die Wirkung einer Kraft auf einen Körper besteht in der Zug- (Druck-) Wirkung und der Drehwirkung.



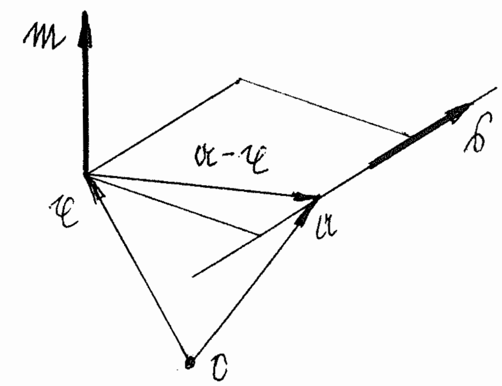
Die *Drehwirkung* wird gemessen durch das *statische Moment*, welches gleich dem Produkt aus dem Betrag der Kraft und dem Abstand ihrer Wirkungslinie vom Bezugspunkt ist (*Hebelgesetz*)[1] .



Dargestellt wird das Drehmoment durch den *Momentenvektor*, welcher auf der Verbindungsebene von Wirkungslinie und Bezugspunkt normal steht, dessen Länge gleich dem Betrag des Drehmomentes ist und der so orientiert ist, daß, von seiner Spitze aus gesehen, die Drehung um den Bezugspunkt positiven Sinn hat.

Eine Einzelkraft übt nur dann keine Drehwirkung auf einen Körper aus, wenn die Wirkungslinie der Kraft durch den *Schwerpunkt* des Körpers geht.

Kennt man das Moment **s*** einer Kraft um 0. so kann man das Moment **m** um jeden beliebigen Punkt berechnen. Es gilt



[1] Das statische Moment tritt, dem Begriffe nach, bereits bei LEONARDO da VINCI (1452-1519) auf. Die Bezeichnung stammt vermutlich von Ernst MACH:

$$\mathbf{m} = (\mathbf{a} - \mathbf{x}) \times \mathbf{s} = \mathbf{a} \times \mathbf{s} - \mathbf{x} \times \mathbf{s} = \mathbf{s}^* - \mathbf{x} \times \mathbf{s}$$

also

$$\mathbf{m} = \mathbf{s}^* - \mathbf{x} \times \mathbf{s}$$

Daraus folgt: Die Raumlage und die Wirkung einer Kraft wird durch die beiden Vektoren

$$\mathbf{s}, \mathbf{s}^* \qquad (\mathbf{s}\mathbf{s}^* = 0)$$

beschrieben.

Stäbe[1)]

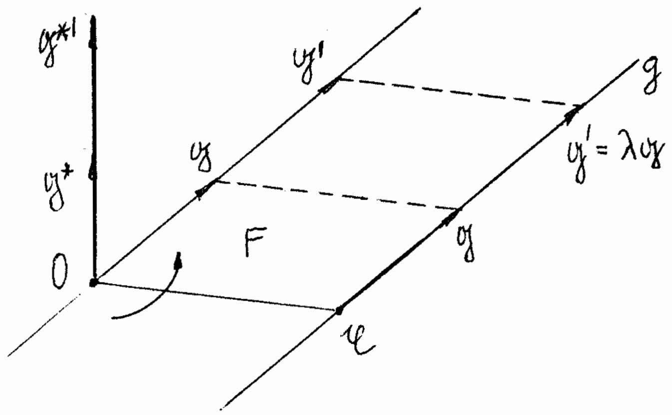
Ein Stab ist die Menge aller gleich langen und gleich orientierten Strecken auf derselben Trägergeraden. Ein Stab ist also das geometrische Gegenstück zum mechanischen Begriff der Kraft. Ein Stab wird daher festgelegt durch die Vorgabe der beiden orthogonalen Vektoren

$\mathbf{s}$ ... *Stabvektor*
$\mathbf{s}^*$ ... *Momentenvektor des Stabes um* 0

Diese beiden Vektoren bilden die

$$\boxed{\mathbf{s}, \mathbf{s}^* \quad \mathbf{s}\mathbf{s}^* = 0 \quad \textit{Stabkoordinaten}}$$

Die PLÜCKER- Vektoren einer Geraden



Legt man in die gegeben Gerade g einen beliebigen Vektor $\mathbf{g} \neq \mathbf{o}$, so wird die Gerade g zum Stab. Dieser Stab wird durch $\mathbf{g}$ und $\mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{g}$ festgelegt, wobei $\mathbf{x}$ ein beliebiger Ortsvektor von g ist. Bei der Umwandlung von g in einen Stab ist die Wahl des Stabvektors willkürlich. $\mathbf{g}$ hätte durch einen anderen Vektor $\mathbf{g'}$ ersetzt werden können. In diesem Fall wäre

$$\mathbf{g}' = \lambda \mathbf{g} \quad (\lambda \neq 0) \Rightarrow \mathbf{g}^{*\prime} = (\mathbf{x} \times \mathbf{g}') = \mathbf{x} \times (\lambda \mathbf{g}) = \lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{g}) = \lambda \mathbf{g}^*$$

[1)] Die Bezeichnung "Stab" stammt von Hermann GRASSMANN (1809-1877) d.h. ersetzt man den Stabvektor $\mathbf{g}$ durch ein Vielfaches $\lambda\mathbf{g}$, so multipliziert sich auch der Momentenvektor $\mathbf{g}^*$ mit demselben Skalarfaktor λ

> Durch Vorgabe des bis auf einen gemeinsamen Skalarfaktor $\lambda \neq 0$ vorgegebenen *homogenen Vektorpaares* (PLÜCKER - Vektoren)
> $$\lambda\mathbf{g}, \lambda\mathbf{g}^*$$
> die der PLÜCKER-Bedingung
> $$\mathbf{g}\mathbf{g}^* = 0$$
> genügen, ist eine Gerade eindeutig bestimmt.

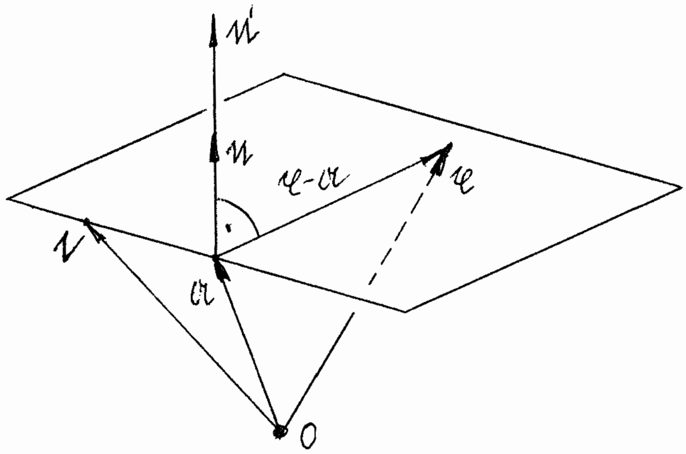
Sonderfall: Die Geraden durch 0 sind durch $\mathbf{g}^* = \mathbf{o}$ gekennzeichnet.

Man kann die Stabvektoren auf zwei Arten als *Einheitsvektoren* wählen. Auf diese Weise wird eine der beiden möglichen Orientierungen der Geraden festgelegt. Eine orientierte Gerade nennt man einen *Speer*. Jede Gerade trägt zwei Speere. Man bezeichnet

$$\mathring{\mathbf{g}}, \mathbf{g}^* \qquad \left(\mathring{\mathbf{g}}\mathbf{g}^* = 0, \left|\mathring{\mathbf{g}}\right| = 1\right)$$

als *Speerkoordinaten*. Die Koordinaten eines Speeres sind *inhomogen*. Sie stellen *spezielle Stäbe* dar.

Homogene Ebenenkoordinaten



Es sei n der Normalenvektor auf die Ebene ε. Dann gilt für jeden Vektor $\mathbf{x} \in \varepsilon$

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \mathbf{nx} - \mathbf{na} = 0 \Rightarrow \mathbf{nx} = \mathbf{na} =: d$$

Ist die Ebene ε durchden Repräsentanten $\mathbf{a}$ und den Normalenvektor $\mathbf{n}$ gegeben, so ist der Skalar d:= $\mathbf{an}$ eindeutig bestimmt. d ist also unabhängig von der Wahl des Repräsentanten. Sei nämlich $\mathbf{c}$ ein beliebiger Punkt der Ebene, so gilt

$$\mathbf{nc} = \mathbf{n}[\mathbf{a} + (\mathbf{c}-\mathbf{a})] = \mathbf{na} + \underbrace{\mathbf{n}(\mathbf{c}-\mathbf{a})}_{\perp} = \mathbf{na} = d$$

Für jeden Vektor $\mathbf{x}$ in der durch $\mathbf{n}$ und $\mathbf{a}$ bestimmten Ebene gilt also $\mathbf{nx} = d$.

Sei umgekehrt das Paar (**n**,d) gegeben. so liegen alle Punkte **x**, für welche **nx** = d gilt, in derselben Ebene. Es sei **a** ein Vektor, für den gilt **na** = d. Dann gilt für jeden weitern Vektor **x** mit der Eigenschaft **nx** = d:

$$\mathbf{nx} = \mathrm{d} = \mathbf{na} \Rightarrow \mathbf{nx} - \mathbf{na} = 0 \Rightarrow \mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \perp (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

d.h. **x** liegt in der durch **a** und **n** bestimmten Ebene. Bei gegebener Ebene ist ihr Normalenvektor nicht eindeutig bestimmt, aber alle Normalenvektoren sind linear abhängig. Sei also $\mathbf{n}' = \lambda\mathbf{n}$ ein anderer Normalenvektor der gegebenen Ebene. Dann gilt

$$\mathrm{d}' = \mathbf{n}'\mathbf{a} = (\lambda\mathbf{n})\mathbf{a} = \lambda(\mathbf{na}) = \lambda\mathrm{d}$$

Wir werden also

$$\boxed{\lambda\mathbf{n}, \lambda\mathrm{d} \qquad \lambda \neq 0}$$

als *homogene Ebenenkoordinaten* bezeichnen.

Grundaufgaben der Geometrie

Festlegung der Raumelemente

Punkte:	$\mathbf{x}\ldots$ Ortsvektoren
Gerade:	$\lambda\mathbf{g}, \lambda\mathbf{g}^*\ldots$ homogene PLÜCKER - Vektoren
	$\mathbf{gg}^* = 0\ldots$ PLÜCKER - Bedingung
Ebene:	$\lambda\mathbf{n}, \lambda\mathrm{d}\ldots$ homogene Ebenen - Koordinaten

Inzidenzen

Inzidenz Punkt-Gerade

1.Gegeben sei der Ortsvektor **x** und der Richtungsvektor **g**. Dann gilt für jedenVektor

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \rho\mathbf{g}$$

der Geraden

$$\mathbf{y} \times \mathbf{g} = (\mathbf{x} + \rho\mathbf{g}) \times \mathbf{g} = \mathbf{x} \times \mathbf{g} + \rho\mathbf{g} \times \mathbf{g} = \mathbf{x} \times \mathbf{g} = \mathbf{g}^*$$

2. Gegeben sei das Vektorpaar (**g**, **g***), (**gg*** = 0), und **a** sei ein Vektor, für den gilt $\mathbf{g}^* = \mathbf{a}\times\mathbf{g}$. Ist dann **x** ein beliebiger Vektor, für den gleichfalls gilt $\mathbf{g}^* = \mathbf{x}\times\mathbf{g}$, so folgt

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{a} \times \mathbf{g} = \mathbf{x} \times \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{x} \times \mathbf{g} - \mathbf{a} \times \mathbf{g} = \mathbf{o} \Rightarrow (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \times \mathbf{g} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{a},\ \ \mathbf{g}\ \text{l.a} \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{a} = \rho\mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a} + \rho\mathbf{g}$$

Ein Punkt **x** liegt genau dann auf der Geraden **g**,**g***, wenn gilt

$$\boxed{\mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{g} \quad \text{Inzidenzbedingung Punkt - Gerade}}$$

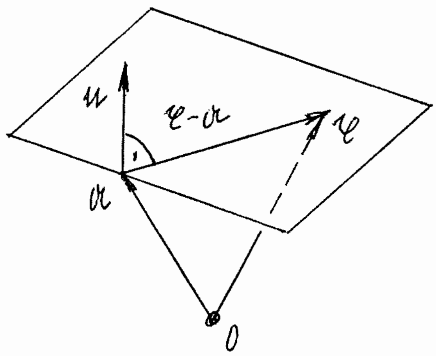
Geht die Gerade g durch den Ursprung, so enthält sie den Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ und es gilt

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{g}^* = \mathbf{0} \quad \text{Gerade durch den Ursprung}}$$

$$\boxed{\mathbf{g}^* \neq \mathbf{o}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{o} \quad \text{"Ferngerade" der Ebene} \perp \mathbf{g}^*}$$

Inzidenz Punkt-Ebene

1. Gegeben sei derOrtsvektor $\mathbf{x}$ und der Normalenvektor $\mathbf{n}$ einer Ebene. Sind $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ zwei linear unabhängige Richtungsvektoren in der Ebene, so gilt $\mathbf{u}_1\mathbf{n} = \mathbf{u}_2\mathbf{n} = 0$ und ein beliebiger Ortsvektor $\mathbf{y}$ der Ebene hat die Darstellung



$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2$$

Dann gilt

$$\mathbf{ny} = \mathbf{n}(\mathbf{x} + \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2) = \mathbf{nx} + \lambda_1\underbrace{\mathbf{nu}_1}_{0} + \lambda_2\underbrace{\mathbf{nu}_2}_{0} = \mathbf{nx} = \mathbf{d}$$

2. Gegeben sei das Paar ($\mathbf{n}$, d),
und $\mathbf{a}$ sei ein Vektor, für den gilt $\mathbf{na} = \mathrm{d}$. Ist dann $\mathbf{x}$ ein weiterer Vektor mit $\mathbf{nx} = \mathrm{d}$, so gilt

$$\mathrm{d} = \mathbf{nx} = \mathbf{na} \Rightarrow \mathbf{nx} - \mathbf{na} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{n} \perp \mathbf{x} - \mathbf{a} \Rightarrow$$

$\mathbf{x}$ liegt in der durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{n}$ bestimmten Ebene.

Der Punkt $\mathbf{x}$ liegt genau dann in der Ebene $\mathbf{n}$, d, wenn gilt

$$\boxed{\mathbf{nx} = \mathrm{d} \quad \text{Inzidenzbedingung Punkt - Ebene}}$$

Sind $\begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$ die Koordinaten von $\mathbf{n}$ bzw. $\mathbf{x}$ bezüglich einer orthonormierten Basis, so stellt

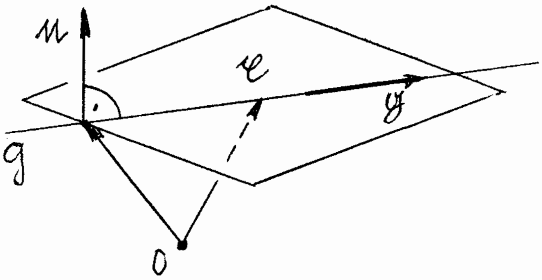
$$\boxed{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d}$$

die *Gleichung der Ebene* bezüglich dieser Basis dar

Inzidenz Gerade Ebene

Grundaufgaben der Geometrie

1. Liegt die Gerade ($\mathbf{g}$, $\mathbf{g}^*$) in der Ebene ($\mathbf{n}$, d), so muß $\mathbf{n} \perp \mathbf{g}$ sein und jeder Punkt $\mathbf{x}$ der Geraden muß auch in der Ebene liegen. Es gilt daher simultan



$$\mathbf{ng} = 0$$
$$\mathbf{nx} = \mathrm{d}$$
$$\underline{\mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{g} \;\mid\; \times \mathbf{n}}$$
$$\mathbf{g}^* \times \mathbf{n} \Rightarrow (\mathbf{x} \times \mathbf{g}) \times \mathbf{n} = \mathbf{g}(\mathbf{xn}) - \mathbf{x}(\mathbf{gn}) = \mathbf{g}\mathrm{d}$$

2. Zwischen den Koordinaten ($\mathbf{g}$, $\mathbf{g}^*$) einer Geraden und den Koordinaten einer Ebene ($\mathbf{n}$, d) bestehen die Beziehungen $\mathbf{g}^* \times \mathbf{n} = \mathrm{d}\mathbf{g}$ und $\mathbf{ng} = 0$. Dann gilt für alle auf der Geraden liegenden Punkte $\mathbf{x}$

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{g}^* \times \mathbf{n} = (\mathbf{x} \times \mathbf{g}) \times \mathbf{n} = \mathbf{g}(\mathbf{xn}) - \mathbf{x}(\mathbf{gn}) = \mathrm{d}\mathbf{g}$$

Da aus der Voraussetzung folgt $\mathbf{g}^* \times \mathbf{n} = \mathrm{d}\mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{n} \perp \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{ng} = 0$

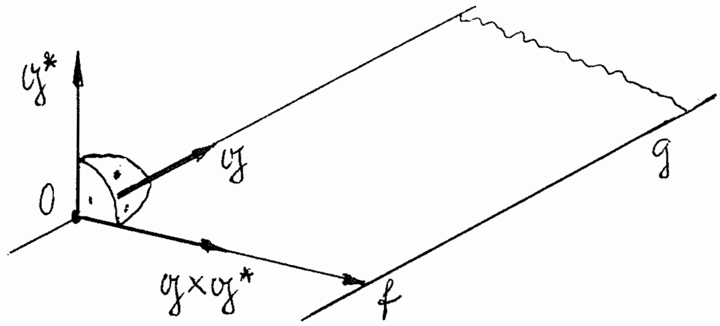
gilt $\mathbf{g}(\mathbf{xn}) = \mathbf{g}\mathrm{d} \Rightarrow \mathrm{d} = \mathbf{xn} \Rightarrow g$ liegt in der Ebene

Die Gerade ($\mathbf{g}$, $\mathbf{g}^*$) liegt also genau dann in der Ebene ($\mathbf{n}$, d), wenn gilt

$$\boxed{\mathbf{g}^* \times \mathbf{n} = \mathrm{d}\mathbf{g}, \quad \mathbf{gn} = 0 \quad \text{Inzidenzbedingung Gerade - Ebene}}$$

Die Bedingung $\mathbf{gn} = 0$ muß man hinzufügen, um auch die Fälle d = 0 und $\mathbf{g}^* = \mathbf{o}$ (Gerade und Ebene durch 0) zu erfassen.

Punkte auf Geraden



Es sei $\mathbf{f}$ der Lotfußpunkt aus 0 auf der Geraden g($\mathbf{g}$,$\mathbf{g}^*$). Dann gilt

$$\mathbf{f} = \lambda(\mathbf{g} \times \mathbf{g}^*)$$

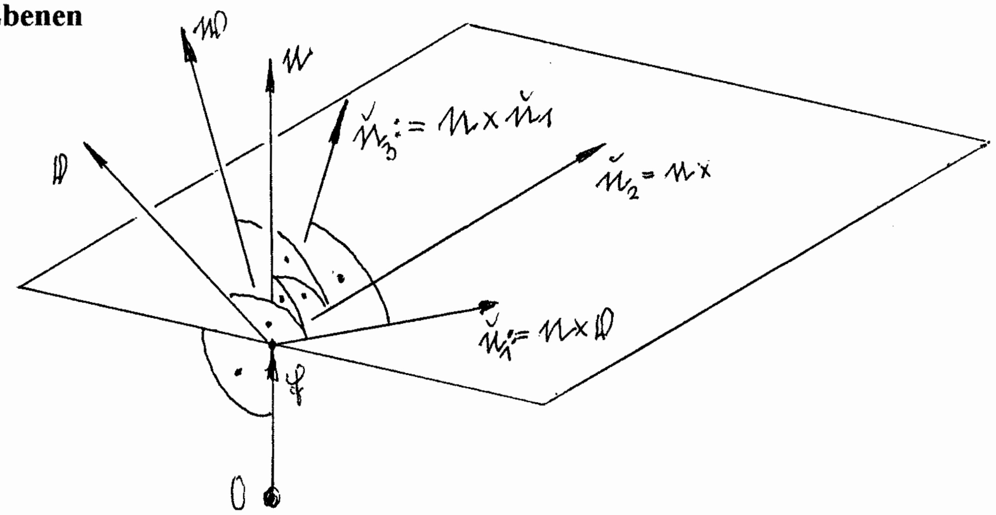
Wegen der Inzidenzbedingung Punkt-Gerade folgt

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{f} \times \mathbf{g} = \lambda(\mathbf{g} \times \mathbf{g}^*) \times \mathbf{g} = \lambda\left[\mathbf{g}^* |\mathbf{g}|^2 - \mathbf{g}(\mathbf{gg}^*)\right] = \lambda |\mathbf{g}|^2 \mathbf{g}^* \Rightarrow \lambda |\mathbf{g}|^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{|\mathbf{g}|^2}$$

$$\boxed{\mathbf{f} = \frac{1}{|\mathbf{g}|^2} \mathbf{g} \times \mathbf{g}^* \quad \text{Lotfußpunkt auf g}}$$

$$\boxed{\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{g}|^2}\mathbf{g}\times\mathbf{g}^* + \mu\mathbf{g} \quad \text{Parameterdarstellung der Geraden}}$$

Punkte in Ebenen



Es sei $\mathbf{f} = \lambda\mathbf{n}$ der Lotfußpunkt aus 0 in $\varepsilon(\mathbf{n},d)$. Wegen der Inzidenzbedingung Punkt-Ebene gilt

$$\mathbf{nf} = \lambda|\mathbf{n}|^2 = d \Rightarrow \lambda = \frac{d}{|\mathbf{n}|^2}$$

Für den Lotfußpunkt gilt daher

$$\boxed{\mathbf{f} = \frac{d}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} \quad \text{Lotfußpunkt auf } \varepsilon}$$

Wir wählen beliebig zwei Vektoren $\mathbf{v},\mathbf{w}$ aus, die zusammen mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}$ ein linear unabhängiges Tripel bilden, dh. es gilt $(\mathbf{n},\mathbf{v},\mathbf{w}) \neq 0$. Die Vektoren $\mathbf{u}_1 := \mathbf{n}\times\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_2 := \mathbf{n}\times\mathbf{w}$ liegen dann in der Ebene und sind linear unbhängig, denn es ist

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = (\mathbf{n}\times\mathbf{v})\times(\mathbf{n}\times\mathbf{w}) = \mathbf{n}(\mathbf{n},\mathbf{v},\mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{n},\mathbf{v},\mathbf{n}) = \mathbf{n}(\mathbf{n},\mathbf{v},\mathbf{w}) \neq \mathbf{0}$$

Daher gilt für die Parameterdarstellung der Ebene

$$\boxed{\mathbf{x} = \frac{d}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} + \mu_1(\mathbf{n}\times\mathbf{v}) + \mu_2(\mathbf{n}\times\mathbf{w}) \quad \text{Parameterdarstellung der Ebene}}$$

Wünscht man in der Ebene eine <u>orthonormierte</u> Basis, so stellen zunächst die Vektoren $\mathbf{u}_1 :=$ $\mathbf{n}\times\mathbf{v}$ und $\mathbf{u}_3 := \mathbf{n}\times\mathbf{u}_1$ ein orthogonales Bezugssystem in ε dar. Durch Normierung entsteht daraus ein orthonormiertes System in ε.

Komplanare Lage zweier Geraden (Inzidenz zweier Geraden mit derselben Ebene)

1. Im allgemeinen sind zwei Gerade des Raumes windschief. Es kann aber eintreten, daß zwei Gerade a(**a**,**a***); b(**b**,**b***) in derselben Ebene ε(**n**,d) liegen. Dann gilt simultan

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{a}^*\times\mathbf{n}=d\mathbf{a} & \mathbf{b}^* \\ \mathbf{b}^*\times\mathbf{n}=d\mathbf{b} & \mathbf{a}^* \end{array}$$

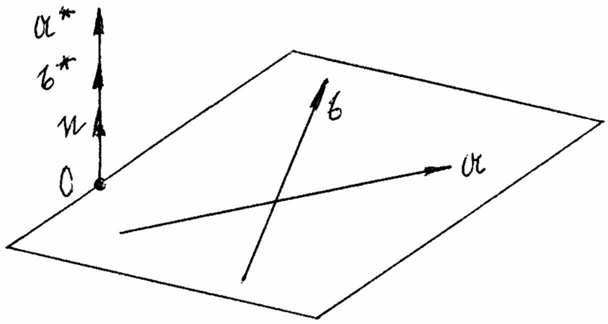
$$(\mathbf{a}^*,\mathbf{n},\mathbf{b}^*)+(\mathbf{b}^*,\mathbf{n},\mathbf{a}^*)=d\mathbf{a}\mathbf{b}^*+d\mathbf{a}^*\mathbf{b}\Rightarrow$$

$$-(\mathbf{a}^*,\mathbf{b}^*,\mathbf{n})+(\mathbf{a}^*,\mathbf{b}^*,\mathbf{n})=0=d(\mathbf{a}\mathbf{b}^*+\mathbf{a}^*\mathbf{b})$$

Ist d ≠ 0,so kann man kürzen, dann stellt

$$\boxed{\mathbf{a}\mathbf{b}^*+\mathbf{a}^*\mathbf{b}=\mathbf{0}\quad \text{komplanare Lage zweier Geraden}}$$

die Bedingungfür die komplanare Lage zweier Geraden dar. a und b schneiden dann einander oder sie sind parallel. Die Bezeichnung der obigen Formel als *Schnittbedingung zweier Geraden* ist daher nicht ganz korrekt, aber üblich.
Obige Formel gilt auch, wenn d = 0 ist. In diesem Falle liegen a, b in einer Eben durch 0.



Die Vektoren **n**,**a***,**b*** sind dann linear abhängig und es gilt

$$\mathbf{a}^*\perp\mathbf{b},\quad \mathbf{b}^*\perp\mathbf{a}\Rightarrow\mathbf{a}^*\mathbf{b}=0,\quad \mathbf{a}\mathbf{b}^*=0\Rightarrow\mathbf{a}\mathbf{b}^*+\mathbf{a}^*\mathbf{b}=0$$

wie oben.
2. Es gelte umgekehrt für zwei Gerade a(**a**,**a***); b(**b**,**b***):

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^*+\mathbf{a}^*\mathbf{b}=0$$

Ist $\mathbf{x}$ ein beliebiger Punkt auf a, so gilt

$$\mathbf{a}^*=\mathbf{x}\times\mathbf{a}$$

Setz man das in die Voraussetzung ein, so folgt

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^*+(\mathbf{x}\times\mathbf{a})\mathbf{b}=\mathbf{a}\mathbf{b}^*+\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{x})=\mathbf{a}\left[\underbrace{\mathbf{b}^*+\mathbf{b}\times\mathbf{x}}_{\mathbf{n}}\right]=0\Rightarrow\mathbf{a}\mathbf{n}=0$$

Die durch

$$\mathbf{n}:=\mathbf{b}^*+\mathbf{b}\times\mathbf{x},\quad d:=\mathbf{b}^*\mathbf{x}$$

definierte Ebene enthält sowohl a als b, wie die Anwendung der Inzidenzbedingung zeigt

Grundaufgaben der Geometrie

$$\mathbf{a}^*\times\mathbf{n}=(\mathbf{x}\times\mathbf{a})\times\mathbf{n}=\mathbf{a}(\mathbf{n}\mathbf{x})-\mathbf{x}\underbrace{(\mathbf{a}\mathbf{n})}_{0}=\mathbf{a}[(\mathbf{b}^*+\mathbf{b}\times\mathbf{x})\mathbf{x}]=\mathbf{a}\left[\mathbf{b}^*\mathbf{x}+\underbrace{(\mathbf{b},\mathbf{x},\mathbf{x})}_{0}\right]=\mathbf{a}(\mathbf{b}^*\mathbf{x})=d\mathbf{a}$$

$$\mathbf{b}^*\times\mathbf{n}=\mathbf{b}^*\times[\mathbf{b}^*+\mathbf{b}\times\mathbf{x}]=\underbrace{\mathbf{b}^*\times\mathbf{b}^*}_{\mathbf{o}}+\mathbf{b}^*\times(\mathbf{b}\times\mathbf{x})=\mathbf{b}\underbrace{(\mathbf{b}^*\mathbf{x})}_{d}-\mathbf{x}\underbrace{(\mathbf{b}\mathbf{b}^*)}_{0}=d\mathbf{b}$$

Zwei Geraden liegen daher genau dann in der selben Ebene, wenn gilt

$$\boxed{\mathbf{a}\mathbf{b}^*+\mathbf{a}^*\mathbf{b}=\mathbf{0}\quad\text{komplanare Lage zweier Geraden, Schnittbedingung}}$$

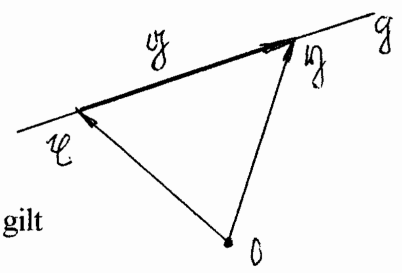
<u>Zur Bezeichnung "Schnittbedingung" für obige Formel:</u>
Sei $\mathbf{x}$ derSchnittpunkt der Geraden a($\mathbf{a},\mathbf{a}^*$); b($\mathbf{b},\mathbf{b}^*$). Dann folgt aus der Inzidenzbedingung:

$$\mathbf{a}^*=\mathbf{x}\times\mathbf{a}\quad|\ \mathbf{b}$$
$$\mathbf{b}^*=\mathbf{x}\times\mathbf{b}\quad|\ \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}^*\mathbf{b}+\mathbf{a}\mathbf{b}^*=(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{x},\mathbf{b},\mathbf{a})=(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{b})-(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{b})=0$$

Im allgemeinen kann man aber aus obiger Beziehung nur auf die Komplanarität (Schnitt *oder* Parallelität) der Geraden schließen.

Verbindung der Grundelemente



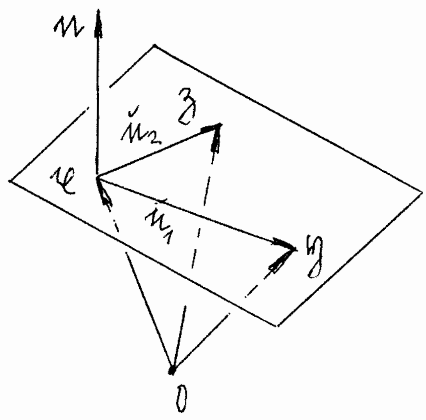
Verbindungsgerade zweier Punkte

Die Gerade sei durch die beiden Punkte $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ festgelegt. Dann gilt

$$\mathbf{g}:=\mathbf{y}-\mathbf{x},\quad \mathbf{g}^*=\mathbf{x}\times\mathbf{g}=\mathbf{x}\times(\mathbf{y}-\mathbf{x})=\mathbf{x}\times\mathbf{y}$$

$$\boxed{\mathbf{g}=\mathbf{y}-\mathbf{x},\quad \mathbf{g}^*=\mathbf{x}\times\mathbf{y}\quad\text{PLÜCKER - Vektoren der Verbindungsgeraden}}$$

Verbindungsebene dreier Punkte



Die Ebene sei durch die drei Punkte $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ festgelegt. Dann gilt

$$\mathbf{u}_1 := \mathbf{y}-\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{z}-\mathbf{x},$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = (\mathbf{y}-\mathbf{x}) \times (\mathbf{z}-\mathbf{x}) =$$

$$= \mathbf{y}\times\mathbf{z} - \mathbf{x}\times\mathbf{z} - \mathbf{y}\times\mathbf{x} + \mathbf{x}\times\mathbf{x} = \mathbf{x}\times\mathbf{y} + \mathbf{y}\times\mathbf{z} + \mathbf{z}\times\mathbf{x}$$

$$d = \mathbf{x}\mathbf{n} = \mathbf{x}[\mathbf{x}\times\mathbf{y} + \mathbf{y}\times\mathbf{z} + \mathbf{z}\times\mathbf{x}] = (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$$

$\mathbf{n} = \mathbf{x}\times\mathbf{y} + \mathbf{y}\times\mathbf{z} + \mathbf{z}\times\mathbf{x}$	Verbindungsebene
$d = (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$	dreier Punkte

Verbindungsebene von Punkt und Gerade

Sowohl der Punkt $\mathbf{x}$ als die Gerade g($\mathbf{g},\mathbf{g}^*$) müssen mit der gesuchten Ebene inzidieren:

$$\mathbf{n}\mathbf{x} = d$$

$$\underline{\mathbf{g}^*\times\mathbf{n} = d\mathbf{g} \quad | \quad \times\mathbf{x}}$$

$$(\mathbf{g}^*\times\mathbf{n})\times\mathbf{x} = \mathbf{n}(\mathbf{g}^*\mathbf{x}) - \mathbf{g}^*\underbrace{(\mathbf{n}\mathbf{x})}_{d} = \mathbf{n}(\mathbf{g}^*\mathbf{x}) - d\mathbf{g}^* = d\mathbf{g}\times\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{n}(\mathbf{g}^*\mathbf{x}) = d[\mathbf{g}^* + \mathbf{g}\times\mathbf{x}]$$

Wegen der Homogenität der Ebenekoordinaten wird diese Beziehung durch

$\mathbf{n} = \mathbf{g}^* + \mathbf{g}\times\mathbf{x}$	Verbindungsebene von
$d = \mathbf{g}^*\mathbf{x}$	Punkt und Gerade

erfüllt.

Verbindungsebene schneidender oder paralleler Geraden

Gegeben seien die schneidenden bzw. parallelen Geraden a($\mathbf{a},\mathbf{a}^*$), b($\mathbf{b},\mathbf{b}^*$), die demnach die Bedingung

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b} = 0$$

erfüllen. Wir wählen einen Punkt etwa auf der Geraden a, z.B. den Lotfußpunkt

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{a}^*}{|\mathbf{a}|^2}$$

und bilden dessen Verbindungsebene mit der Geraden b:

$$\mathbf{n}' = \mathbf{b}^* + \mathbf{b}\times\mathbf{f} = \mathbf{b}^* + \mathbf{b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{a}^*}{|\mathbf{a}|^2}, \qquad d' = \mathbf{b}^*\mathbf{f} = \mathbf{b}^*\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{a}^*}{|\mathbf{a}|^2}$$

Wegen der Homogenität der Ebenenkoordinaten ersetzen wir $\mathbf{n}'$ und $\mathbf{d}'$ durch $\mathbf{n} := |\mathbf{a}|^2\mathbf{n}'$,bzw $\mathbf{d} := |\mathbf{a}|^2\mathbf{d}'$. Dann gilt

$\mathrm{d} = (\mathbf{b}^*, \mathbf{a}, \mathbf{a}^*) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*)$

$\mathbf{n} = |\mathbf{a}|^2 \mathbf{b}^* + \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{a}^*) = |\mathbf{a}|^2 \mathbf{b}^* + \mathbf{a}(\mathbf{a}^*\mathbf{b}) - \mathbf{a}^*(\mathbf{ab})$

Da nach Voraussetzung gilt

$\mathbf{a}^*\mathbf{b} = -\mathbf{ab}^*$

erhä lt man

$$\mathbf{n} = \left[|\mathbf{a}|^2 \mathbf{b}^* - \mathbf{a}(\mathbf{ab}^*)\right] + \left[-\mathbf{a}^*(\mathbf{ab}) + \mathbf{b}\overbrace{(\mathbf{aa}^*)}^{0}\right] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}^*) \times \mathbf{a} + (\mathbf{a}^* \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}^* + \mathbf{a}^* \times \mathbf{b}] \times \mathbf{a}$$

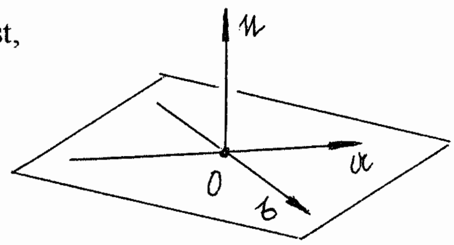
Für die Verbindungsebene zweier Geraden ergibt sich daher

$\mathbf{n} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}^* + \mathbf{a}^* \times \mathbf{b}] \times \mathbf{a}$	$\mathbf{ab}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b} = 0$
$\mathrm{d} = (\mathbf{a}, \mathbf{a}^*, \mathbf{b})$	Verbindungsbene zweier Geraden

Vertauschung der beiden Vektoren ergibt

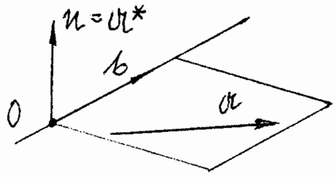
$\mathbf{n} = [\mathbf{b} \times \mathbf{a}^* + \mathbf{b}^* \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b}$	$\mathbf{ab}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b} = 0$
$\mathrm{d} = (\mathbf{b}, \mathbf{b}^*, \mathbf{a})$	Verbindungsebenezweier Geraden

Obige Formeln versagen dann wenn $\mathbf{a}^* = \mathbf{b}^* = \mathbf{o}$ ist,
d.h. wenn beide Geraden einander in 0 schneiden.
Dann gilt trivialerweise



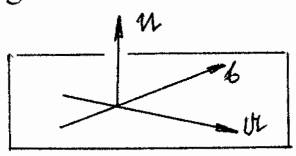
$\mathbf{a}^* = \mathbf{b}^* = \mathbf{o}$	$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b},$	$\mathrm{d} = 0$

Geht nur eine der beiden Geraden durch 0, so gilt trivialerweise



$\mathbf{a}^* = \mathbf{o}$	$\mathbf{n} = \mathbf{b}^*,$	$\mathrm{d} = 0$
$\mathbf{b}^* = \mathbf{o}$	$\mathbf{n} = \mathbf{a}^*,$	$\mathrm{d} = 0$

Zu etwas einfacheren Formeln gelangt man, wenn die beiden Geraden einander echt schneiden und man $\mathbf{n}$ und d direkt aus den Inzidenzbedingungen Ebene-Gerade ermittelt:



$\mathbf{a}^* \times \mathbf{n} = \mathrm{d}\mathbf{a}$

$\mathbf{b}^* \times \mathbf{n} = \mathrm{d}\mathbf{b}$

Es ist naheliegend $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ zu setzen. Dann folgt aus den obigen Inzidenzbedingungen

$\mathbf{a}^* \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\mathbf{a}^*\mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{aa}^*) = \mathbf{a}(\mathbf{a}^*\mathbf{b}) = \mathrm{d}\mathbf{a} \Rightarrow \mathrm{d} = \mathbf{a}^*\mathbf{b}$

$\mathbf{b}^* \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\mathbf{bb}^*) - \mathbf{b}(\mathbf{ab}^*) = -\mathbf{b}(\mathbf{ab}^*) = \mathrm{d}\mathbf{b} \Rightarrow \mathrm{d} = -\mathbf{ab}^*$

Daher

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{o}$	$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b},$	$\mathrm{d} = \mathbf{a}^*\mathbf{b} = -\mathbf{ab}^*$
Verbindungsebene schneidender Geraden		

Schnitte der Grundelemente

Schnittpunkt Gerade-Ebene

Der Schnittpunkt $\mathbf{x}$ von Gerade und Eben muß die Inzidenzbedingungen mit der Ebene $\varepsilon(\mathbf{n},d)$ und der Geraden $g(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)$ erfüllen

$$\mathbf{n}\mathbf{x} = d$$

$$\underline{\mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{g} \quad | \quad \times \mathbf{n}}$$

$$\mathbf{g}^* \times \mathbf{n} = (\mathbf{x} \times \mathbf{g}) \times \mathbf{n} = \mathbf{g}(\mathbf{x}\mathbf{n}) - \mathbf{x}(\mathbf{n}\mathbf{g}) = d\mathbf{g} \quad - \mathbf{x}(\mathbf{n}\mathbf{g})$$

Daher

$$\boxed{\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{g} + \mathbf{n} \times \mathbf{g}^*}{\mathbf{n}\mathbf{g}} \quad \text{Schnittpunkt Gerade - Ebene}}$$

Schnittgerade Ebene-Ebene

Die gesuchte Schnittgerade $g(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)$ der beiden Ebenen $\varepsilon_1(\mathbf{n}_1,d_1)$, $\varepsilon_2(\mathbf{n}_2,d_2)$ muß die Inzidenzbedingungen mit beiden Ebenen erfüllen

$$\mathbf{g}^* \times \mathbf{n}_1 = d_1\mathbf{g} \quad | \quad d_2$$

$$\underline{\mathbf{g}^* \times \mathbf{n}_2 = d_2\mathbf{g} \quad | \quad -d_1}$$

$$d_2\mathbf{g}^* \times \mathbf{n}_1 - d_1\mathbf{g}^* \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{g}^* \times [d_2\mathbf{n}_1 - d_1\mathbf{n}] = \mathbf{o}$$

Wegen des Verschwindens des Vektorproduktes sind die beiden Vektoren linear abhängig. Wegen der Homogenität der Ebenen- bzw. Geradenkoordinaten können wir setzen

$$\mathbf{g}^* = d_2\mathbf{n}_1 - d_1\mathbf{n}_2$$

Daher

$$\mathbf{g}^* \times \mathbf{n}_1 = (d_2\mathbf{n}_1 - d_1\mathbf{n}_2) \times \mathbf{n}_1 = d_1(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) = d_1\mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{g} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 & \\ & \text{Schnittgerade zweier Ebenen} \\ \mathbf{g}^* = d_2\mathbf{n}_1 - d_1\mathbf{n}_2 & \end{array}}$$

Schnittpunkt dreier Ebenen

Wir bestimmen zunächst die Schnittgerade $g(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)$ der beiden Ebenen $\varepsilon_1(\mathbf{n}_1,d_1)$, $\varepsilon_2(\mathbf{n}_2,d_2)$:

$$\mathbf{g} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$$
$$\mathbf{g}^* = d_2\mathbf{n}_1 - d_1\mathbf{n}_2$$

und schneiden dieselbe mir der dritten Ebene $\varepsilon_3(\mathbf{n}_3, d_3)$. Für den Schnittpunklt $\mathbf{X}$

$$\mathbf{x} = \frac{d_3\mathbf{g} + \mathbf{n}_3 \times \mathbf{g}^*}{\mathbf{n}_3\mathbf{g}} = \frac{d_3(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) + \mathbf{n}_3 \times (d_2\mathbf{n}_1 - d_1\mathbf{n}_2)}{\mathbf{n}_3(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)}$$

also

$$\boxed{\mathbf{x} = \frac{d_1(\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) + d_2(\mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_1) + d_3(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)}{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)} \quad \text{Schnittpunkt dreier Ebenen}}$$

Schnittpunkt zweier Geraden

Die Geraden $a(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*)$, $b(\mathbf{b}, \mathbf{b}^*)$ müssen derselben Ebene angehören und dürfen nicht parallel sein. Daher gelten die Voraussetzungen

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b} = 0 \text{ und } \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{o}$$

Der Schnittpunkt $\mathbf{x}$ der beiden Geraden muß die Inzidenzbedingungen erfüllen:

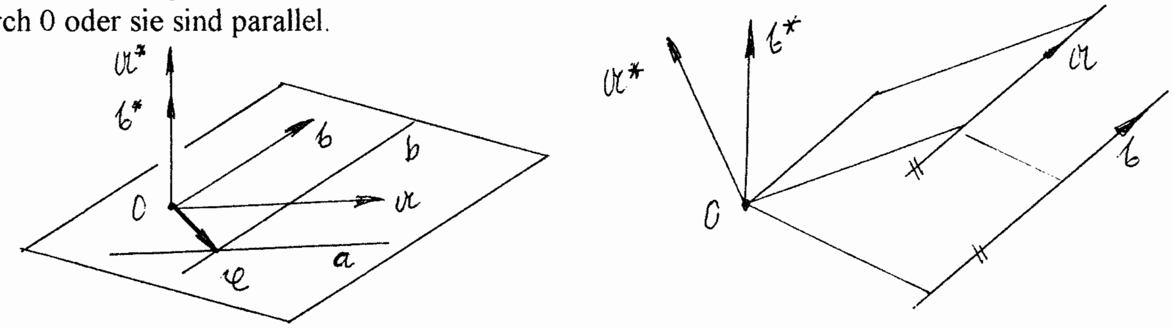
$$\mathbf{a}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{a} \quad | \quad \times \mathbf{b}^*$$
$$\mathbf{b}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{b} \qquad (*)$$

$$\mathbf{a}^* \times \mathbf{b}^* = (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}^* = \mathbf{a}\underbrace{(\mathbf{x}\mathbf{b}^*)}_{\perp \text{wegen}(*)} - \mathbf{x}(\mathbf{a}\mathbf{b}^*) = -\mathbf{x}(\mathbf{a}\mathbf{b}^*) = \mathbf{x}(\mathbf{a}^*\mathbf{b}) \text{ (Schnittbedingung)}$$

Daher

$$\boxed{\mathbf{a}^*\mathbf{b} = -\mathbf{a}\mathbf{b}^* \neq \mathbf{o} \qquad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}^* \times \mathbf{b}^*}{\mathbf{a}^*\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}^* \times \mathbf{a}^*}{\mathbf{b}^*\mathbf{a}} \quad \text{Schnittpunkt komplanarer Geraden}}$$

Diese Formel versagt, wenn $\mathbf{a}^*\mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^* = 0$ ist. In diesem Falle liegen a und b in derselben Ebene durch 0 oder sie sind parallel.



Da wir den Schnittpunkt bestimmen wollen, interessiert uns nur der 1.Fall. Hier gilt

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{x}\times\mathbf{a} = (\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b})\times\mathbf{a} = \beta(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = -\beta(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \quad | \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{x}\times\mathbf{b} = (\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b})\times\mathbf{b} = \qquad = \alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \quad | \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

$$(\mathbf{a}^*,\mathbf{a},\mathbf{b}) = -(\mathbf{a},\mathbf{a}^*,\mathbf{b}) = -\beta|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 \Rightarrow \beta = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{a}^*,\mathbf{b})}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2}$$

$$(\mathbf{b}^*,\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{b}^*,\mathbf{a}) = \alpha|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 \Rightarrow \alpha = \frac{(\mathbf{b},\mathbf{b}^*,\mathbf{a})}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2}$$

Daher

$$\boxed{\mathbf{a}\mathbf{b}^* = \mathbf{a}^*\mathbf{b} = 0 \qquad \mathbf{x} = \frac{(\mathbf{b},\mathbf{b}^*,\mathbf{a})\mathbf{a}+(\mathbf{a},\mathbf{a}^*,\mathbf{b})\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2} \quad \text{Schnittpunkt zweier Geraden in einer Ebene durch 0}}$$

Eine symmetrische Darstellung des Schnittpunktes ergibt sich, wenn man $\mathbf{x}$ im Basissystem

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

darstellt. Dann gilt

$$\Delta = (\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2$$
$$\Delta x^1 = (\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{x}) = (\mathbf{b}_3,\mathbf{x},\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_3(\mathbf{x}\times\mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{x}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{b}^* = (\mathbf{b},\mathbf{b}^*,\mathbf{a})$$
$$\Delta x^2 = (\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_1,\mathbf{x}) = \mathbf{b}_3(\mathbf{b}_1\times\mathbf{x}) = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{x}\times\mathbf{a}) = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{a}^* = -(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}^*) = (\mathbf{a},\mathbf{a}^*,\mathbf{b})$$
$$\Delta x^3 = (\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{x}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{x}) = -\mathbf{a}\mathbf{b}^* = (\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{x}\times\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}^*\mathbf{b}$$

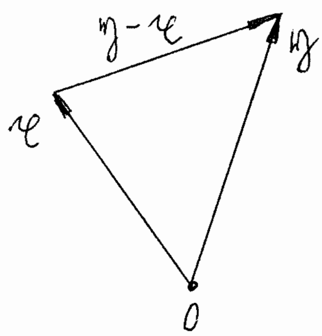
daher

$$\boxed{\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{b},\mathbf{b}^*,\mathbf{a})\mathbf{a}+(\mathbf{a},\mathbf{a}^*,\mathbf{b})\mathbf{b}+(\mathbf{a}^*\mathbf{b})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2} \quad \text{Schnittpunkt komplanarer Geraden}}$$

Maßaufgaben

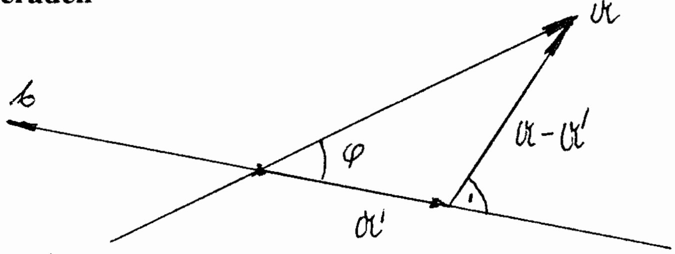
Abstand zweier Punkte

$$\boxed{s = |\mathbf{y}-\mathbf{x}|}$$



Grundaufgaben der Geometrie

Winkel zweier Geraden



Der Winkel φ der beiden Geraden a(**a**,**a***), b(**b**,**b***), kann durch den Kosinus der beiden Richtungsvektoren gemessen werden

$$cos(\varphi) = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

Dann ergibt sich je nach der willkürlichen Wahl der Orientierung der spitze oder stumpfe Winkel der Geraden.
Um immer den spitzen Winkel zu erhalten(soferne a und b nicht orthogonal sind), kann man den Winkel zwischen den Geraden definieren als den Winkel eines beliebigen Vektors **a** der einen Geraden mit seiner Normalprojektion auf die andere Gerade. Sei **a'** die Normalprojektion von **a**, so gilt

$$\mathbf{a}' = \lambda\mathbf{b}, \quad (\mathbf{a} - \mathbf{a}')\perp\mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b})\mathbf{b} = 0 \Rightarrow \mathbf{ab} - \lambda|\mathbf{b}|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|^2} \Rightarrow \mathbf{a}' = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|^2} \cdot \mathbf{b}, \quad |\mathbf{a}'| = \frac{|\mathbf{ab}|}{|\mathbf{b}|^2} \cdot |\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{ab}|}{|\mathbf{b}|}$$

daher

$$cos(\varphi) = \frac{(\mathbf{aa}')}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}'|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \cdot \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{ab}|} \cdot \frac{(\mathbf{ab})}{|\mathbf{b}|^2}(\mathbf{ab}) = \frac{|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{ab}|^2}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|^2 \cdot |\mathbf{ab}|} = \frac{|\mathbf{ab}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

Wir definieren daher zweckmä ßigerweise als Winkel zweier Geraden

$$\boxed{cos(\varphi) = \frac{|\mathbf{ab}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \text{Winkel zweier Geraden}}$$

Wegen

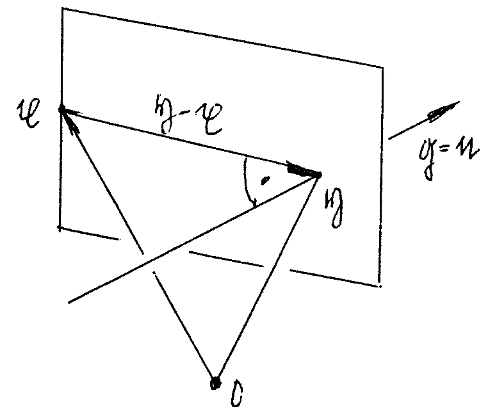
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot sin(\varphi)$$

gilt auch

$$\boxed{tan(\varphi) = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|} \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}}$$

Anmerkung: Unter dem Winkel zweier Geraden wird auch der Winkel *windschiefer Geraden* verstanden. Man denke sich die Geraden parallel durch einen Punkt verschoben. Der Winkel dieser schneiden den Geraden wird als Winkel der windschiefen Geraden definiert.

Abstand Punkt-Gerade



Zur Ermittlung des Abstandes des Punktes $\mathbf{x}$ von der Geraden g($\mathbf{g}$,$\mathbf{g}$*) fällen wir aus $\mathbf{x}$ die Normalebene ν auf g und schneiden sie mit g im Punkte $\mathbf{y}$.
Die Länge von $\mathbf{y}$ - $\mathbf{x}$ stellt dann den Abstand h von $\mathbf{x}$ und g dar.

$$\nu\ldots\mathbf{n}=\mathbf{g},\quad \mathrm{d}=\mathbf{xn}=\mathbf{xg}$$

$$\mathbf{y}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{g}+\mathbf{n}\times\mathbf{g}^*}{\mathbf{ng}}=\frac{(\mathbf{xg})\mathbf{g}+\mathbf{g}\times\mathbf{g}^*}{|\mathbf{g}|^2}$$

$$\mathbf{y}-\mathbf{x}=\frac{1}{|\mathbf{g}|^2}\left[\underline{(\mathbf{xg})\mathbf{g}}+\mathbf{g}\times\mathbf{g}^*-\underline{|\mathbf{g}|^2\mathbf{x}}\right]=\frac{1}{|\mathbf{g}|^2}\left[\mathbf{g}\times(\mathbf{g}\times\mathbf{x})+\mathbf{g}\times\mathbf{g}^*\right]=\frac{1}{|\mathbf{g}|^2}\mathbf{g}\times[\mathbf{g}\times\mathbf{x}+\mathbf{g}^*]$$

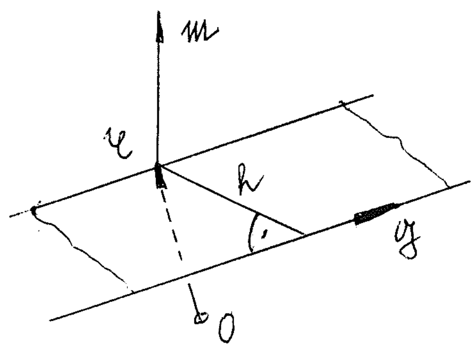
daher folgt nach LAGRANGE

$$\mathrm{h}^2=|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2=\frac{1}{|\mathbf{g}|^4}|\mathbf{g}\times(\mathbf{g}\times\mathbf{x}+\mathbf{g}^*)|^2=\frac{1}{|\mathbf{g}|^4}\left\{|\mathbf{g}|^2|\mathbf{g}\times\mathbf{x}+\mathbf{g}^*|^2-[\mathbf{g}(\mathbf{g}\times\mathbf{x}+\mathbf{g}^*)]^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{|\mathbf{g}|^4}\left\{|\mathbf{g}|^2|\mathbf{g}\times\mathbf{x}+\mathbf{g}^*|^2-\left[\underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{x}\times\mathbf{g})}_{0}+\underbrace{\mathbf{gg}^*}_{0}\right]^2\right\}=\frac{1}{|\mathbf{g}|^2}|\mathbf{g}\times\mathbf{x}+\mathbf{g}^*|^2$$

Daher

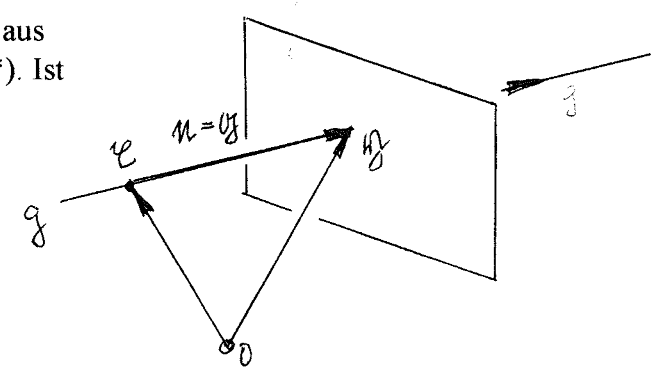
$$\boxed{\mathrm{h}=\frac{|\mathbf{m}|}{|\mathbf{g}|}\qquad \mathbf{m}:=\mathbf{g}\times\mathbf{x}+\mathbf{g}^*\quad \text{Abstand Punkt - Gerade}}$$



Der hier definierte Vektor $\mathbf{m}$ heißt *Momentenvektor* der Kraft $\mathbf{g}$ um den Punkt $\mathbf{x}$. Nach dem *Hebelgesetz* gilt

$$|\mathbf{m}|=\mathrm{h}|\mathbf{g}|\Rightarrow\mathrm{h}=\frac{|\mathbf{m}|}{|\mathbf{g}|}$$

Abstand Punkt-Ebene



Wir schneiden die Ebene ε($\mathbf{n}$,d) mit dem aus dem Punkt $\mathbf{x}$ auf sie gefällten Lot g($\mathbf{g}$,$\mathbf{g}$*). Ist $\mathbf{y}$ dessen Schnittpunkt mit ε, so gilt

$h = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|, \quad \mathbf{g} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{g^*} = \mathbf{x} \times \mathbf{n}$

$$\mathbf{y} = \frac{d\mathbf{g} + \mathbf{n} \times \mathbf{g^*}}{\mathbf{ng}} = \frac{d\mathbf{n} + \mathbf{n} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2} = \frac{d\mathbf{n} + \mathbf{x}|\mathbf{n}|^2 - \mathbf{n}(\mathbf{nx})}{|\mathbf{n}|^2} = \mathbf{x} + \frac{d - (\mathbf{nx})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} = \frac{d - (\mathbf{nx})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$$

$$h = |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = \frac{|d - (\mathbf{nx})|}{|\mathbf{n}|^2}|\mathbf{n}| = \frac{|d - (\mathbf{nx})|}{|\mathbf{n}|}$$

also

$$\boxed{h = \frac{|d - (\mathbf{nx})|}{|\mathbf{n}|} \quad \text{Abstand Punkt - Ebene}}$$

Die obige Formel stellt die Abstandsbestimmung Punkt Gerade mit Hilfe der HESSE*schen Normalform* einer Gleichung dar.

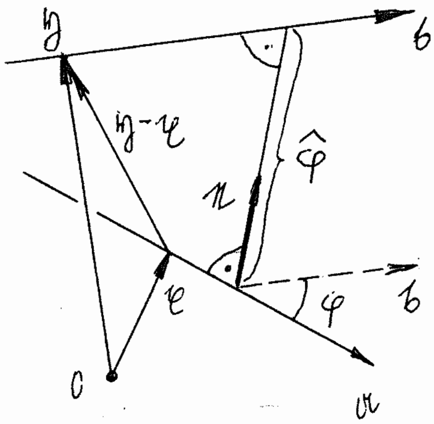
Abstand nichtschneidender Geraden

Der Abstand $|\hat{\varphi}|$ der Geraden $a(\mathbf{a}, \mathbf{a^*})$, $b(\mathbf{b}, \mathbf{b^*})$ wird auf dem Gemeinlot von a, b gemessen.

$\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$ sei der Einheitsvektor in Richtung des Gemeinlotes. Der Projektionssatz ergibt

$$\hat{\varphi} = (\mathbf{y} - \mathbf{x})\mathbf{e} = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x})(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{y}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - \mathbf{x}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{-\mathbf{y}(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - \mathbf{x}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = -\frac{(\mathbf{y} \times \mathbf{b})\mathbf{a} + (\mathbf{x} \times \mathbf{a})\mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} =$$

$$= -\frac{\mathbf{b^*a} + \mathbf{a^*b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$



Nun gilt

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\varphi), \quad \mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| = \frac{\mathbf{ab}}{\cos|\varphi|}$$

also

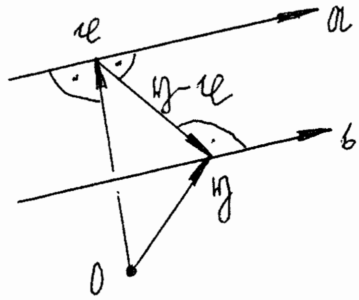
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{\mathbf{ab}}{\cos|\varphi|} \cdot \sin(\varphi) = \frac{\mathbf{ab}}{\cot(\varphi)}$$

Daher ist

$$\boxed{\begin{array}{c} \hat{\varphi} = -\dfrac{\mathbf{ab^*} + \mathbf{a^*b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = -\dfrac{\mathbf{ab^*} + \mathbf{a^*b}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|.\sin(\varphi)} = -\dfrac{\mathbf{ab^*} + \mathbf{a^*b}}{\mathbf{ab}}.\cot(\varphi) \\ |\hat{\varphi}| \ldots \ \text{Abstand windschiefer Geraden} \end{array}}$$

Das Vorzeichen von $\hat{\varphi}$ ist geometrisch bedeutungslos und hängt nur von der Orientierung der Richtungsvektoren ab. Der ~~zweite~~ dritte Ausdruck für $\hat{\varphi}$ versagt für orthogonale Gerade.

Abstand paralleler Geraden

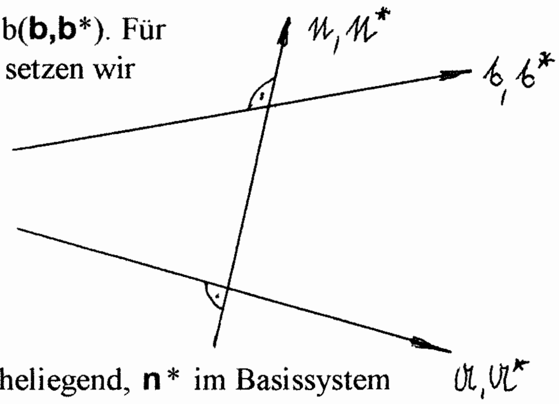


Die voranstehende Formel versagt für parallele Gerade. Sind **x** und **y** die Lotfußpunkte aus 0 auf a(**a**,**a***) bzw. b(**b**,**b***), (**b** = λ**a**), so gilt

$$|\hat{\varphi}| = |\mathbf{y}-\mathbf{x}|, \qquad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{a}^*}{|\mathbf{a}|^2}, \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{b}^*}{|\mathbf{b}|^2}, \qquad \mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$$

Abstand paralleler Geraden

Gemeinlot windschiefer Geraden



Die beiden Geraden seien a(**a**,**a***), bzw. b(**b**,**b***). Für den Richtungsvektor **n** des Gemeinlotes setzen wir

$\mathbf{n} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$

Für $\mathbf{n}^*$ gilt dann:

$\mathbf{n}\mathbf{n}^* = 0$

$\mathbf{a}\mathbf{n}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{n} = 0$

$\underline{\mathbf{b}\mathbf{n}^* + \mathbf{b}^*\mathbf{n} = 0}$

Auf Grund dieser Beziehungen ist es naheliegend, $\mathbf{n}^*$ im Basissystem

$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{n}$

durch seine ***kovarianten Koordinaten*** darzustellen. Dann gilt (Seite 23)

$\mathbf{n}^* = x_1\mathbf{b}^1 + x_2\mathbf{b}^2 + x_3\mathbf{b}^3$

mit

$x_1 = \mathbf{b}_1\mathbf{n}^* = \mathbf{a}\mathbf{n}^* = -\mathbf{a}^*\mathbf{n}$

$x_2 = \mathbf{b}_2\mathbf{n}^* = \mathbf{b}\mathbf{n}^* = -\mathbf{b}^*\mathbf{n}$

$x_3 = \mathbf{b}_3\mathbf{n}^* = \mathbf{n}\mathbf{n}^* = 0$

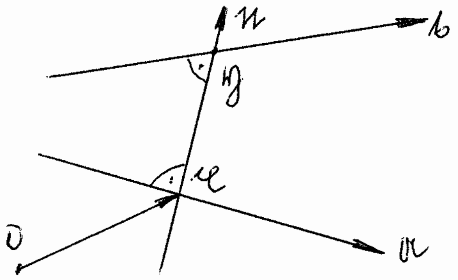
mit

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{b}^1 &= \frac{1}{\Delta}\mathbf{b}_2\times\mathbf{b}_3 = \frac{1}{\Delta}\mathbf{b}\times\mathbf{n} \\ \mathbf{b}^2 &= \frac{1}{\Delta}\mathbf{b}_3\times\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\Delta}\mathbf{n}\times\mathbf{a} \\ \mathbf{b}^3 &= \frac{1}{\Delta}\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\Delta}\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \frac{1}{\Delta}\mathbf{n} \end{aligned}\right\} \qquad \Delta = (\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{n} = |\mathbf{n}|^2$$

Daher

$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ $\mathbf{n}^* = \dfrac{(\mathbf{a}^*\mathbf{n})(\mathbf{n}\times\mathbf{b}) - (\mathbf{b}^*\mathbf{n})(\mathbf{n}\times\mathbf{a})}{\lvert\mathbf{n}\rvert^2}$	Gemeinlot windschiefer Geraden

Fußpunkte des Gemeinlotes



Für die Fußpunkte des Gemeinlotes auf der Geraden a gilt

$\mathbf{a}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{a}$

$\mathbf{n}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{n}$

Wir stellen den Ortsvektor von $\mathbf{x}$ wieder in der Basis $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a},\quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b},\quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b},$ diesmal in ***kontravarianten Koordinaten*** dar. Dann gilt wir früher

$\Delta = \lvert\mathbf{n}\rvert^2$

und es ist

$\Delta x^1 = (\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{x}) = (\mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{x}) = -(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{x} \times \mathbf{n})\mathbf{b} = -\mathbf{n}^*\mathbf{b}$

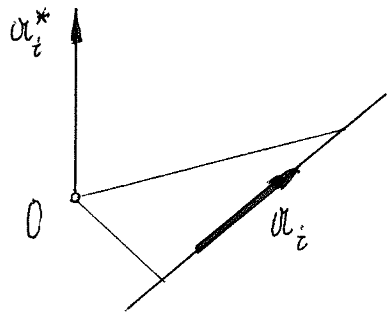
$\Delta x^2 = (\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{x}) = (\mathbf{n}, \mathbf{a}, \mathbf{x}) = -\mathbf{n}(\mathbf{x} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{n}\mathbf{a}^*$

$\Delta x^3 = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}^*\mathbf{b}$

Es gilt daher für den Fußpunkt $\mathbf{x}$ auf a und (analog durch Vertauschen von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ und Beachtung der Vorzeichenä nderung bei $(\mathbf{n}, \mathbf{n}^*)$) für den Fußpunkt $\mathbf{y}$ auf b

$\mathbf{x} = \dfrac{-(\mathbf{n}^*\mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{n}\mathbf{a}^*)\mathbf{b} + (\mathbf{a}^*\mathbf{b})\mathbf{n}}{\lvert\mathbf{n}\rvert^2}$	Fußpunkt des Gemeinlotes auf a
$\mathbf{y} = \dfrac{(\mathbf{n}^*\mathbf{a})\mathbf{b} + (\mathbf{n}\mathbf{b}^*)\mathbf{a} - (\mathbf{b}^*\mathbf{a})\mathbf{n}}{\lvert\mathbf{n}\rvert^2}$	Fußpunkt des Gemeinlotes auf b

Kräftesysteme (Stabwerke, Liniengeometrie)



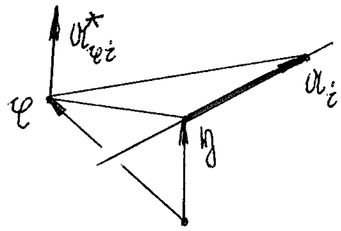
Da die Vektorrechnung ihren historischen Ursprung in der Mechanik hat, erscheint es angemessen, Kapitel der Geometrie, wie zum Beispiel die Liniengeometrie, in ihrer ursprünglichen Gestalt als Lehre von den Kräftesystemen darzustellen.
Da einer Einzelkraft[1)] ein Stab entspricht, kann man statt von Kräftesysteme*n* auch von *Stabwerken* sprechen.
Ein Kräftesystem sei gegeben durch (endlich viele) Einzelstäbe, die durch die Kraftvektoren $\mathbf{a}_i$ und deren Momente $\mathbf{a}_i^*$ um den Ursprung O festgelegt werden. Dabei gilt stets

$$\mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^* = 0$$

Folgende Bezeichnungsweisen sind üblich

$$\mathbf{a} := \sum \mathbf{a}_i \ldots \textit{Reduktionseinzelkraft}$$
$$\hat{\mathbf{a}} := \sum \mathbf{a}_i^* \ldots \textit{Reduktionsmoment um } \mathrm{O}$$

Man beachte, daß i.a. das Skalarprodukt $\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} \neq 0$ nicht verschwindet. Wählt man als Reduktionspunkt nicht den Ursprung O, sondern einen beliebigen Punkt $\mathbf{x}$, dann hat die Einzelkraft $\mathbf{a}_i$ um $\mathbf{x}$ das Moment (Seite 39)



$$\mathbf{a}_{xi}^* = \mathbf{a}_i^* - \mathbf{x} \times \mathbf{a}_i$$

dann gilt

$$\hat{\mathbf{a}}_x = \sum \mathbf{a}_{xi}^* = \sum \mathbf{a}_i^* - \mathbf{x} \times \sum \mathbf{a}_i = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{x} \times \mathbf{a}$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{a}}_x = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{x} \times \mathbf{a} \quad \textit{Reduktionsmoment} \quad \textit{bezüglich} \quad \mathbf{x}}$$

Bezüglich jedes Reduktionspunktes $\mathbf{x}$ gilt

$$\boxed{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}_x = \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} = \mathrm{const}}$$

Zwei Kräftesysteme heißen *äquivalent*, wenn sie dieselbe Reduktionseinzelkraft $\mathbf{a}$ und bezüglich jedes Punktes $\mathbf{x}$ dasselbe Reduktionsmoment $\hat{\mathbf{a}}_x$ besitzen. Jedes Kräftesystem kann bezüglich seiner Auswirkung auf einen Körper durch ein äquivalentes ersetzt werden.

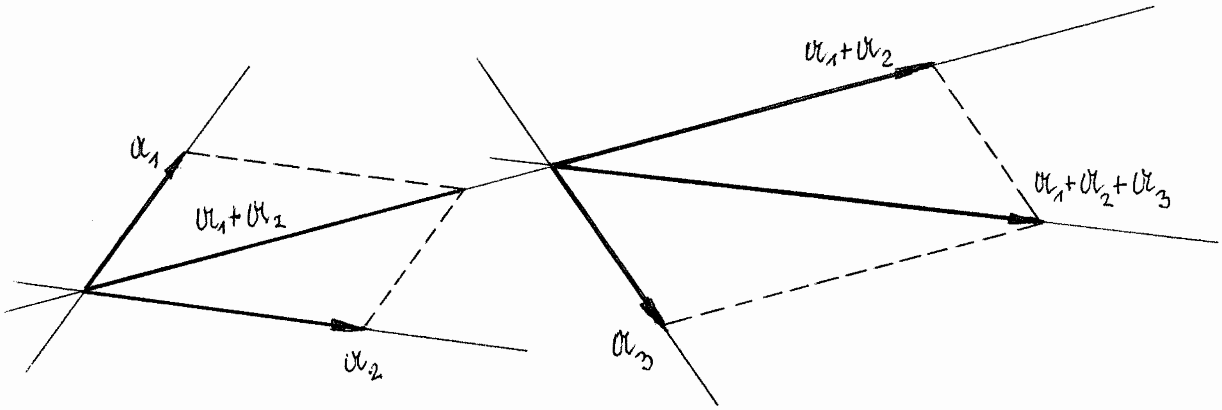
[1)] Da eine Kraft auf ihrer Wirkungslinie beliebig verschiebbar ist (wenn man etwa ein Zugseil kürzer oder länger faßt), wurde früher ein Stabvektor auch als "linienflüchtiger Vektor" bezeichnet

Reduktion eines ebenen Kräftesystems

Bei einem ebenen Kräftesystem sind alle Momentenvektoren linear abhängig. Sie stehen alle normal auf die Ebene des Kräftesystems. Daher gilt in diesem Falle

$$\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} = 0$$

I.a. lassen sich je zwei Vektoren zu einer resultierenden Einzelkraft zusammensetzen:



Obige Konstruktion versagt, wenn die gegebenen Kräfte parallele Wirkungslinien besitzen. Dabei hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

1. <u>Beide Kräfte drehen um O positiv.</u>

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \ldots |\mathbf{a}| = |\mathbf{a}_1| + |\mathbf{a}_2|$$

Für das resultierende Moment um O gilt daher

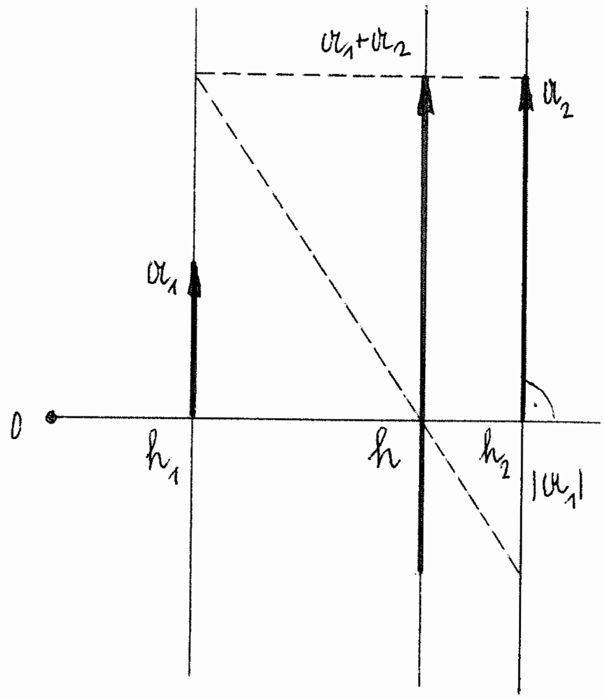
$$|\hat{\mathbf{a}}| = h|\mathbf{a}| = h(|\mathbf{a}_1| + |\mathbf{a}_2|) = h_1|\mathbf{a}_1| + h_2|\mathbf{a}_2| \Rightarrow$$

$$h = \frac{h_1|\mathbf{a}_1| + h_2|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1| + |\mathbf{a}_2|} \Rightarrow$$

$$h - h_1 = \frac{(h_2 - h_1)|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1| + |\mathbf{a}_2|}$$

$$h_2 - h = \frac{(h_2 - h_1)|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_1| + |\mathbf{a}_2|} \Rightarrow$$

$$\frac{h - h_1}{h_2 - h} = \frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1|}$$



Daraus ergibt sich unmittelbar nebenstehende Konstruktion für die Resultierende

2. Die beiden Kräfte drehen in entgegengesetzten Sinn um O

$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \ldots |\mathbf{a}| = |\mathbf{a}_1| - |\mathbf{a}_2|$

Für das resultierende Moment um O gilt daher

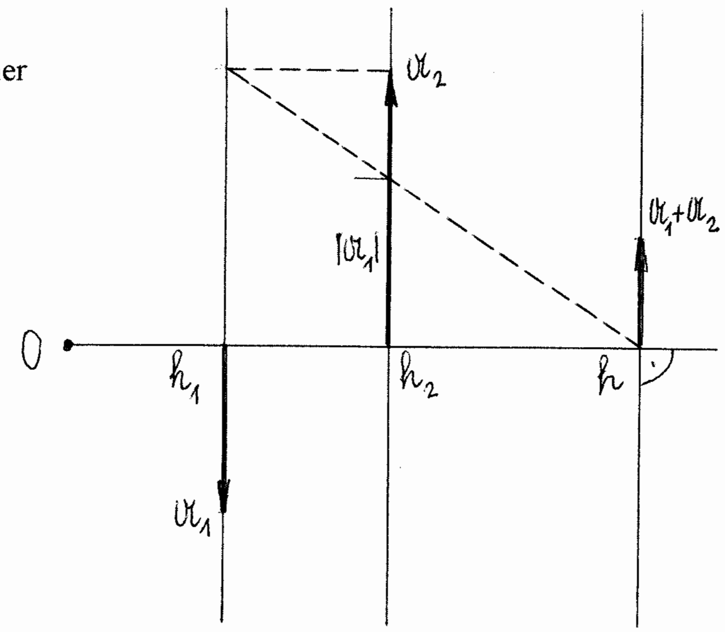
$|\hat{\mathbf{a}}| = h|\mathbf{a}| = h(|\mathbf{a}_2| - |\mathbf{a}_1|) = h_2|\mathbf{a}_2| - h_1|\mathbf{a}_1| \Rightarrow$

$$h = \frac{h_2|\mathbf{a}_2| - h_1|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_2| - |\mathbf{a}_1|} \Rightarrow$$

$$h - h_1 = \frac{(h_2 - h_1)|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_2| - |\mathbf{a}_1|}$$

$$h - h_2 = \frac{(h_2 - h_1)|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_2| - |\mathbf{a}_1|} \Rightarrow$$

$$\frac{h - h_1}{h - h_2} = \frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1|}$$

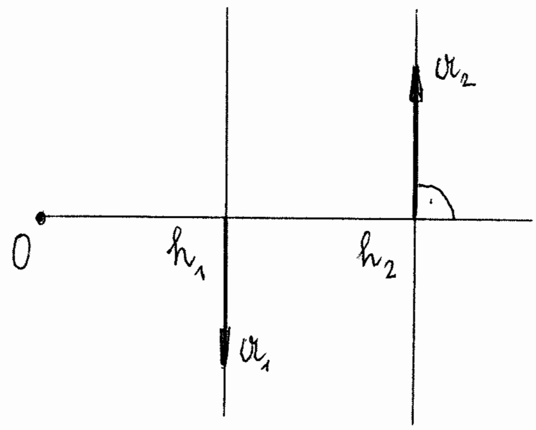


Daraus folgt wieder nebenstehende Konstruktion

3. Die beiden Kräfte sind entgegengesetzt gleich.

Wegen $\mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_2$ ist die Größe der Einzelkraft der Nullvektor $\mathbf{o}$.
Der Momentenvektor um O ist jedoch keineswegs der Nullvektor $\mathbf{o}$. Es gilt vielmehr

$|\hat{\mathbf{a}}| = h_2|\mathbf{a}_2| - h_1|\mathbf{a}_1| = (h_2 - h_1)|\mathbf{a}_1|$



Der Betrag des Reduktionsmomentes ist also unabhängig vom Bezugspunkt. Das Moment ist demnach bezüglich jedes Punktes der Ebene gleich. In diesem Fall spricht man von einem *Drehmoment* oder gleichbedeutend von einem *Kräftepaar*.

Wir haben daher folgendes Ergebnis gewonnen

Ein ebenes Kräftesystem reduziert sich auf eine Einzelkraft oder ein *Kräftepaar* (*Drehmoment*)

Reduktion eines räumlichen Kräftesystems

Ein räumliches Kräftesystem sei durch die Reduktionseinzelkraft $\mathbf{a}$ und das Reduktionsmoment $\hat{\mathbf{a}}$ bezüglich O festgelegt. Dadurch ist wegen

$$\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{x} \times \mathbf{a}$$

das Reduktionsmoment bezüglich jedes beliebigen Punktes bestimmt. Da $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}$ seine Richtung von Punkt zu Punkt ändert, erhebt sich die Frage:

Gibt es einen Punkt $\mathbf{x}$, in welchem $\mathbf{a}$ und $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}$ kollinear sind?

In diesem Falle muß sein

$$\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{a} \times (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{x} \times \mathbf{a}) = \mathbf{a} \times \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) = \mathbf{a} \times \hat{\mathbf{a}} - \left[\mathbf{x}|\mathbf{a}|^2 - \mathbf{a}(\mathbf{ax})\right] = \mathbf{o}$$

Es gilt also

$$\underline{\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{x}|\mathbf{a}|^2 + \mathbf{a}(\mathbf{ax}) = \mathbf{o} \quad | \quad \times \mathbf{a}}$$

$$(\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{a}}) \times \mathbf{a} - (\mathbf{x} \times \mathbf{a})|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{o} \Rightarrow \hat{\mathbf{a}}|\mathbf{a}|^2 - \mathbf{a}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) - (\mathbf{x} \times \mathbf{a})|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{o} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}} - \frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} =: \mathbf{a}^*$$

Der Vektor $\mathbf{a}^*$ ist also *konstant*. Aus

$$\mathbf{aa}^* = \mathbf{a}\left(\hat{\mathbf{a}} - \frac{(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}\right) = (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) - \frac{(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})}{|\mathbf{a}|^2}|\mathbf{a}|^2 = 0$$

folgt, daß die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{a}^*$ PLÜCKER - Vektoren einer Geraden sind

Setzen wir

$$\mathrm{p} := \frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|^2} \qquad \textit{Parameter des Kräftesystems}$$

so können wir sagen:

> In allen Punkten der Geraden
>
> $$(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*), \quad \mathbf{a}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}} - \mathrm{p}\mathbf{a} \quad \mathrm{p} = \frac{(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})}{|\mathbf{a}|^2} \qquad (*)$$
>
> sind die Reduktionseinzelkraft und das Reduktionsmoment kollinear. Die Gerade $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*)$ heißt *Zentralachse* des Kräftesystems[1].

Wir suchen das Reduktionsmoment für die Punkte der Zentralachse. Ist $\mathbf{x}$ ein Punkt der Zentralachse, so gilt

$$\hat{\mathbf{a}}_0 := \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{x} \times \mathbf{a}$$

Wegen $(*)$ folgt daraus

[1] Louis POINSOT (1777-1859)

$$\hat{\mathbf{a}}_0 = \hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}} + p\mathbf{a} = p\mathbf{a}$$

Durch die Zentralachse $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*)$ sowie den Parameter p ist das Krä ftesystem eindeutig bestimmt. Man nenn das Tripel

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*, p)$$

eine *Kraftschraube* oder *Dyname*.

Wann ist ein Kräftesystem einer einzelnen Kraft äquivalent?

Die Ersatzkraft habe die Stabkoordinaten $(\mathbf{k}, \mathbf{k}^*)$. In diesem Falle müßte der Kraftvektor $\mathbf{k}$ dem Vektor $\mathbf{a}$ der resultierenden Einzelkraft und das Moment $\mathbf{k}^*_{\mathbf{x}}$ bezüglich jeden Punktes $\mathbf{x}$ denselben Wert aufweisen wie das Reduktionsmoment $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}$ des gegebenen Kräftesystems. Dann müßte gelten

$\mathbf{k} = \mathbf{a}$

$\mathbf{k}^*_{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{k}^* - \mathbf{x} \times \mathbf{k}} = \mathbf{a}_{\mathbf{x}} = \underline{\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{x} \times \mathbf{a}} \Rightarrow \mathbf{k}^* = \hat{\mathbf{a}}$

Wegen $\mathbf{k}\mathbf{k}^* = 0$ müßte also $\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} = 0$ sein. Dies ist aber i.a. nicht der Fall

Ein Kräftesystem ist dann einer Einzelkraft äquivalent, wenn Reduktionseinzelkraft und Reduktionsmoment für jeden beliebigen Punkt stets orthogonal sind ($\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} \equiv 0$)

Beispiel: Ebenes Kräftesystem

Kann man ein räumliches Kräftesystem durch zwei Einzelkräfte ersetzen?

Es seien $(\mathbf{k}, \mathbf{k}^*)$ und $(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{k}}^*)$ die beiden Ersatzkrä fte. Bei Äquiv alenz muß gelten

$\mathbf{a} = \mathbf{k} + \bar{\mathbf{k}}$

$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{k}^* + \bar{\mathbf{k}}^*$

Dann ist

$\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{k} + \bar{\mathbf{k}})(\mathbf{k}^* + \bar{\mathbf{k}}^*) = \mathbf{k}\mathbf{k}^* + \bar{\mathbf{k}}\mathbf{k}^* + \mathbf{k}\bar{\mathbf{k}}^* + \bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{k}}^* = \bar{\mathbf{k}}\mathbf{k}^* + \mathbf{k}\bar{\mathbf{k}}^*$

Daher gilt die notwendige Bedingung

$$\boxed{\mathbf{k}\bar{\mathbf{k}}^* + \bar{\mathbf{k}}\mathbf{k}^* = \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} \qquad (1)}$$

Demnach folgt aus (1), daß die Trägergeraden der beiden Kräfte windschief sein müssen, wenn das System nicht, entgegen der Voraussetzung, einer Einzelkraft äquivalent ist.
Wie hat man also die Trägergeraden zu wählen? Wegen

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{a} - \mathbf{k}$$
$$\bar{\mathbf{k}}^* = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{k}^*$$

ist $(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{k}}^*)$ bestimmt, sobald $(\mathbf{k}, \mathbf{k}^*)$ bekannt ist. Aus (1) ergibt sich

$$\mathbf{k}(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{k}^*) + (\mathbf{a} - \mathbf{k})\mathbf{k}^* = \mathbf{k}\hat{\mathbf{a}} - \underbrace{\mathbf{k}\mathbf{k}^*}_{0} + \mathbf{a}\mathbf{k}^* - \underbrace{\mathbf{k}\mathbf{k}^*}_{0} = \mathbf{k}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a}\mathbf{k}^* = \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}$$

Für die Wahl der Kraft $(\mathbf{k}, \mathbf{k}^*)$ ergibt sich also als notwendige Bedingung

$$\boxed{\mathbf{k}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a}\mathbf{k}^* = \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}, \quad \mathbf{k}\mathbf{k}^* = 0 \qquad (2)}$$

Diese Bedingung ist für die Wahl von $(\mathbf{k}, \mathbf{k}^*)$ auch hinreichend. Denn wählt man $(\mathbf{k}, \mathbf{k}^*)$ der Bedingung (2) entsprechend, dann stellen auch

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{k}} &= \mathbf{a} - \mathbf{k} \\ \bar{\mathbf{k}}^* &= \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{k}^* \end{aligned} \qquad (3)$$

die Koordinaten einer Kraft dar, denn es gilt

$$\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{k}}^* = (\mathbf{a} - \mathbf{k})(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{k}^*) = \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} - \underbrace{(\mathbf{k}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a}\mathbf{k}^*)}_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}} + \underbrace{\mathbf{k}\mathbf{k}^*}_{0} = 0$$

und die beiden Kräfte bilden zum gegebenen Kräftesystem ein Äquivalenzsystem wegen

$$\mathbf{k} + \bar{\mathbf{k}} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{k}^* + \bar{\mathbf{k}}^* = \hat{\mathbf{a}}$$

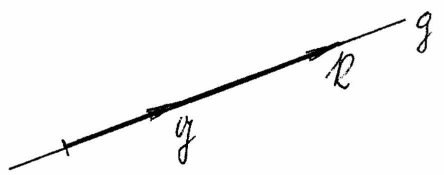
Um eine Kraft zu finden, welche die notwendige und hinreichende Bedingung (2) erfüllt, gehen wir folgendermaßen vor:

Wir wählen als Trägergerade für die Kraft $(\mathbf{k}, \mathbf{k}^*)$ eine beliebige Gerade

$(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$, $\mathbf{g}\mathbf{g}^* = 0$

Dann gilt für den in ihr liegenden Kraftvektor

$\mathbf{k} = \lambda\mathbf{g}$, $\mathbf{k}^* = \lambda\mathbf{g}^*$



Wegen (2) muß gelten

$$\mathbf{k}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{k}^*\mathbf{a} = \lambda(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) = \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}$$

also

$$\lambda = \frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}} \qquad (4)$$

Die Berechnung von λ ist nur möglich, wenn gilt

$$\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a} \neq 0 \qquad (5)$$

Dadurch ist $(\mathbf{k}, \mathbf{k}^*)$ bestimmt, wegen (3) aber auch die 2.Kraft. Wir suchen die Wirkungslinie der 2.Kraft

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{a} - \lambda\mathbf{g} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})}{\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}}\mathbf{g} = \frac{1}{\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}}\left[\mathbf{a}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})\right]$$

$$\bar{\mathbf{k}}^* = \hat{\mathbf{a}} - \lambda\mathbf{g}^* = \hat{\mathbf{a}} - \frac{(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})}{\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}}\mathbf{g}^* = \frac{1}{\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}}\left[\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})\right]$$

Wegen der Homogenität der PLÜCKER-Vektoren können wir setzen

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{\mathbf{g}} &= \mathbf{a}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}}+\mathbf{g}^*\mathbf{a})-\mathbf{g}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})\\ \overline{\mathbf{g}}^* &= \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}}+\mathbf{g}^*\mathbf{a})-\mathbf{g}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})\end{aligned}\qquad (6)}$$

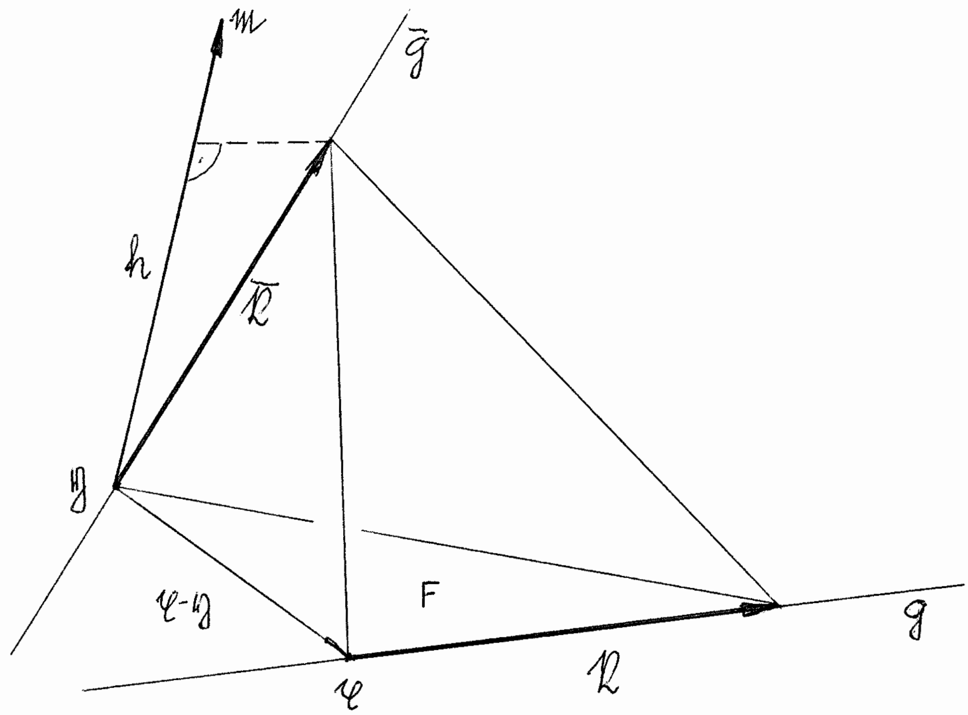
Die Trägergeraden g, $\overline{g}$ des äquivalenten Kräftepaares heißen *reziproke Polare* bezüglich des räumlichen Kräftesystems.
Wir erkennen, daß die Gerade g weitgehend beliebig gewählt werden kann, als Trägergerade der Kraft $(\mathbf{k},\mathbf{k}^*)$ muß sie allerdings die Bedingung (5) erfüllen.

Ein räumliches Kräftesystem $(\mathbf{a},\hat{\mathbf{a}})$ mit $\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} \neq 0$ ist stets einem Paar windschiefer Kräfte äquivalent. Die Trägergerade $(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)$ der 1.Kraft kann man unter der Bedingung (5) beliebig wählen. Die Trägergerade der 2.Kraft ist dann die reziproke Polare $\overline{g}$ (6) von g bezüglich des Kräftesystems.
Für die äquivalenten Kräfte gilt

$$\mathbf{k}=\lambda\mathbf{g},\quad \mathbf{k}^*=\lambda\mathbf{g}^* \qquad \text{mit } \lambda=\frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g}+\mathbf{a}\mathbf{g}^*}$$

$$\overline{\mathbf{k}}=\frac{\lambda}{(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})}\overline{\mathbf{g}},\quad \overline{\mathbf{k}}^*=\frac{\lambda}{(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})}\overline{\mathbf{g}}^*$$

Es seien g und $\overline{g}$ reziproke Polare des gegebenen Kräftesystems, $\mathbf{k}$ bzw. $\overline{\mathbf{k}}$ die entsprechenden Kraftvektoren. Wählen wir auf g beliebig den Punkt $\mathbf{x}$, auf $\overline{g}$ beliebig den Punkt $\mathbf{y}$ und heften wir in diesen Punkten die entsprechenden Kraftvektoren an, so bilden die diese Vektoren darstellenden Strecken ein Tetraeder, dessen Volumen berechnet werden soll.
Ist F der Inhalt des von $|\mathbf{k}|$ und $\mathbf{y}$ aufgespannten Dreiecks und V das Volumen desTetraeders, so gilt:



$|\mathbf{F}| = \frac{1}{2}|\mathbf{m}|$ mit dem Momentenvektor $\mathbf{m}$ von $\mathbf{k}$ um $\mathbf{y}$

$\mathbf{m} = (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \times \mathbf{k} = \mathbf{x} \times \mathbf{k} - \mathbf{y} \times \mathbf{k} = \mathbf{k}^* - \mathbf{y} \times \mathbf{k}$

Unter Berücksichtigung der Vorzeichen gilt daher

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\mathbf{m}}{2}\overline{\mathbf{k}} = \frac{1}{6}[\mathbf{k}^* - \mathbf{y} \times \mathbf{k}]\overline{\mathbf{k}} = \frac{1}{6}[\mathbf{k}^*\overline{\mathbf{k}} - (\mathbf{y},\mathbf{k},\overline{\mathbf{k}})] = \frac{1}{6}\left[\mathbf{k}^*\overline{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\underbrace{(\overline{\mathbf{k}} \times \mathbf{y})}_{-\overline{\mathbf{k}}^*}\right] = \frac{1}{6}[\mathbf{k}^*\overline{\mathbf{k}} + \mathbf{k}\overline{\mathbf{k}}^*] = (1) = \frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{6}$$

Daher gilt für alle zu einem Kräftesystem äquivalenten Kräftepaare:

$$\boxed{V = \frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{6}}$$

Satz von Michel CHASLES (1793-1880)

Strahlgewinde

Aus (5) folgt, daß gerade Linien, die der Bedingung

$$\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g} + \mathbf{a}\mathbf{g}^* = 0 \qquad (7)$$

genügen, <u>nicht</u> als Trägergeraden von Ersatzkräften in Frage kommen. Man nennt diese Geraden daher die *Nullgeraden* (*Nullinien*) des Kräftesystems. Die Menge aller Nullgeraden eines Kräftesystems bilden ein *Nullsystem* (*Strahlgewinde*)[1]
Versucht man die reziproke Polare einer Nullgeraden zu finden, so folgt wegen (7) aus (6):

$$\overline{\mathbf{g}} = \mathbf{a}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) = -\mathbf{g}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})$$

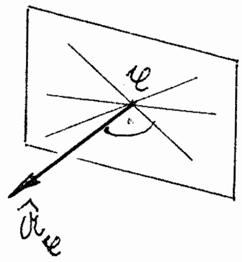
$$\overline{\mathbf{g}}^* = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) = -\mathbf{g}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})$$

Wegen der Homogenität der Plückervektoren gilt daher $\overline{g} = g$

$$\boxed{\text{Die Nullgeraden sind ihre eigenen reziproken Polaren}}$$

[1] <u>Anmerkung:</u> Die Menge aller Geraden des Raumes hängt von vier Parametern ab (man kann eine Gerade etwa durch die Koordinaten ihrer Schnittpunkte mit zwei Koordinatenebenen festlegen). Eine dreiparametrige Geradenmenge nennt man einen *Geradenkomplex*. Sie wird durch <u>eine</u> Gleichung zwischen den PLÜCKER-Koordinaten festgelegt. Demnach ist das Nullsystem, da es durch die lineare Gleichung (7) festgelegt wird, ein *linearer Geradenkomplex*. Durch jeden Punkt des Raumes gibt es eine einparametrige Geradenmenge, den *Komplexkegel*. Eine zweiparametrige Geradenmenge heißt *Geradenkongruenz*. Sie wird durch <u>zwei</u> Gleichungen zwischen den PLÜCKER-Koordinaten festgelegt (Beispiel: Menge der Treffgeraden an zwei windschiefe Gerade). Durch jeden Raumpunkt gibt es nur eine endliche Anzahl von Kongruenzgeraden. Eine einparametrige Geradenmenge bildet eine *Strahlfläche* (Beispiel: Hyperboloid)

Wir suchen die Menge der Nullgeraden durch einen vorgegebenen Punkt $\mathbf{x}$



$\mathbf{g^*} = \mathbf{x} \times \mathbf{g}$ ... einsetzen!

$\underline{\mathbf{\hat{a}g} + \mathbf{ag^*} = 0}$

$\mathbf{\hat{a}g} + \mathbf{a}(\mathbf{x} \times \mathbf{g}) = \mathbf{\hat{a}g} + (\mathbf{a} \times \mathbf{x})\mathbf{g} = [\mathbf{\hat{a}} + \mathbf{a} \times \mathbf{x}]\mathbf{g} = 0$

Nun stellt

$$\mathbf{\hat{a}} + \mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{\hat{a}} - \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{\hat{a}_x}$$

das Reduktionsmoment des Kräftesystems bezüglich des Punktes $\mathbf{x}$ dar. Es gilt also

$$\mathbf{\hat{a}_x g} = 0 \Rightarrow \mathbf{g} \perp \mathbf{\hat{a}_x}$$

D.h.:die Menge aller Nullstrahlen durch den Punkt $\mathbf{x}$ liegt in jener Ebene durch $\mathbf{x}$, deren Normalenvektor $\mathbf{\hat{a}_x}$ Reduktionsmoment des Kräftesystems bezüglich $\mathbf{x}$ ist. Diese Ebene heißt *Nullebene* des Punktes $\mathbf{x}$.

Für die Nullebene von $\mathbf{x}$ gilt also

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{n} = \mathbf{\hat{a}_x} = \mathbf{\hat{a}} - \mathbf{x} \times \mathbf{a} & \\ \mathrm{d} = \mathbf{x\hat{a}_x} = \mathbf{\hat{a}x} & \text{Nullebene von } \mathbf{x} \end{array}}$$

Umgekehrt gilt für die Menge aller Nullgeraden, die in einer vorgegebenen Ebene ($\mathbf{n}$,d) liegen:

$\mathbf{g^*} \times \mathbf{n} = \mathrm{d}\mathbf{g}$

$\underline{\mathbf{\hat{a}g} + \mathbf{ag^*} = 0 \quad | \quad \mathrm{d}}$

$\mathbf{\hat{a}}(\mathrm{d}\mathbf{g}) + \mathrm{d}\mathbf{ag^*} = \mathbf{\hat{a}}(\mathbf{g^*} \times \mathbf{n}) + \mathrm{d}\mathbf{ag^*} = 0$

$(\mathbf{n} \times \mathbf{\hat{a}})\mathbf{g^*} + \mathrm{d}\mathbf{ag^*} = 0$

$[\mathbf{n} \times \mathbf{\hat{a}} + \mathrm{d}\mathbf{a}]\mathbf{g^*} = 0 \Rightarrow \mathbf{g^*} \perp [\mathbf{n} \times \mathbf{\hat{a}} + \mathrm{d}\mathbf{a}]$

Da $\mathbf{g^*}$ außerdem noch auf $\mathbf{g}$ normal steht, muß gelten

$$\lambda\mathbf{g^*} = [\mathbf{n} \times \mathbf{\hat{a}} + \mathrm{d}\mathbf{a}] \times \mathbf{g} = (\mathbf{n} \times \mathbf{\hat{a}}) \times \mathbf{g} + \mathrm{d}(\mathbf{a} \times \mathbf{g}) = \mathbf{\hat{a}}\underbrace{(\mathbf{ng})}_{\perp} - \mathbf{n}(\mathbf{\hat{a}g}) + \mathrm{d}(\mathbf{a} \times \mathbf{g})$$

also

$$\lambda\mathbf{g^*} = \mathrm{d}(\mathbf{a} \times \mathbf{g}) - \mathbf{n}(\mathbf{\hat{a}g}) \quad | \quad \times\mathbf{n}$$

$$\lambda\mathbf{g^*} \times \mathbf{n} = \lambda(\mathrm{d}\mathbf{g}) = \mathrm{d}(\mathbf{a} \times \mathbf{g}) \times \mathbf{n} = \mathrm{d}\left[\mathbf{g}(\mathbf{an}) - \mathbf{a}\underbrace{(\mathbf{gn})}_{\perp}\right]$$

$$(\lambda\mathrm{d})\mathbf{g} = \mathrm{d}(\mathbf{an})\mathbf{g} \Rightarrow \lambda\mathrm{d} = \mathrm{d}(\mathbf{an}) \Rightarrow \lambda = \mathbf{an}$$

[1] Der Komplexkegel eines Gewindes entartet also in die Nullebene des betrachteten Punktes

daher

$$\mathbf{g}^* = \frac{[\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}} + d\mathbf{a}]}{\mathbf{an}} \times \mathbf{g}$$

Definieren wir den von g unabhä ngigen Punkt

$$\mathbf{x} := \frac{[\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}} + d\mathbf{a}]}{\mathbf{an}} \Rightarrow \mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{g}$$

so folgt

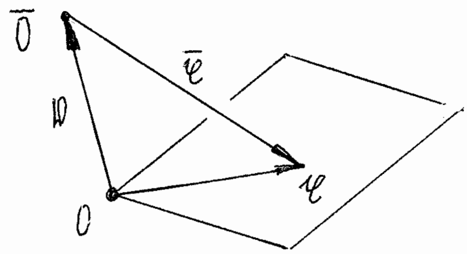
Alle Nullgeraden in einer gegebenen Ebene (**n**,d) gehen durch einen festen Punkt

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}} + d\mathbf{a}}{\mathbf{an}} \qquad \mathbf{an} \neq 0$$

den *Nullpunkt* der Ebene. Den zur Zentralachse parallelen Ebenen (**an** = 0) entspricht kein Nullpunkt.

Jedem Punkt des Raumes ist in eindeutiger Weise seine Nullebene zugeordnet. Jeder Ebene, die nicht parallel zur Zentralachse ist (**an** $\neq 0$) entspricht genau ihr Nullpunkt

<u>Sonderfälle</u>: 1) Bei der Herleitung obiger Formeln wurde zur Berechnung von λ durch $d \neq 0$ dividiert. Um den Fall d = 0 (Ebene durch O) zu klären, wählen wir einen neuen Ursprung $\overline{O}$ mit dem Ortsvektor **v**. Dann gilt die Koordinatentransformation



$\mathbf{x} = \mathbf{v} + \overline{\mathbf{x}}$, für $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ ist dann $\overline{\mathbf{x}} = -\mathbf{v}$

Die neuen Koordinaten der Ebene $(\mathbf{n}, d)$ lauten dann

$\mathbf{n}$ und $\overline{d} = \overline{\mathbf{x}}\mathbf{n} = -\mathbf{vn}$

Für das Reduktionsmoment um den neuen Ursprung folgt

$\hat{\overline{\mathbf{a}}} = \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{v} \times \mathbf{a}$

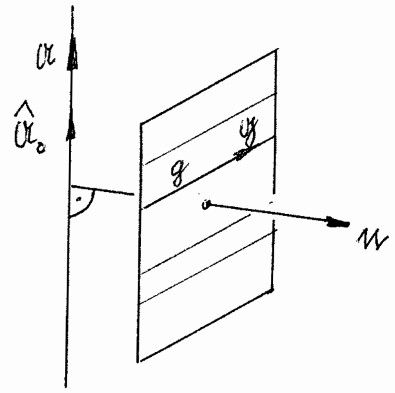
Dann hat in der Ebene $(\mathbf{n}, \overline{d})$ der feste Punkt **x** die Darstellung

$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{n} \times \hat{\overline{\mathbf{a}}} + \overline{d}\mathbf{a}}{\mathbf{an}} = \frac{\mathbf{n} \times (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{v} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{vn})\mathbf{a}}{\mathbf{an}} = \frac{\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{vn})\mathbf{a}}{\mathbf{an}} =$$

$$= \frac{\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{v}(\mathbf{an}) + \mathbf{a}(\mathbf{vn}) - (\mathbf{vn})\mathbf{a}}{\mathbf{an}} \Rightarrow \overline{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{an}} - \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} + \mathbf{v} = \frac{\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{an}}$$

d.h. <u>obige Formel gilt auch im Falle d = 0.</u>

2) Die Formel für den Nullpunkt einer Eben versagt, wenn **an** = 0 ist, d.h. wenn die Ebene parallel zur Zentralachse ist. Dann gilt für eine Nullgerade dieser Ebene



$\mathbf{g}^*\times\mathbf{n} = d\mathbf{g} \quad | \quad \times\mathbf{a}$

$\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g} + \mathbf{a}\mathbf{g}^* = 0$

$\mathbf{a}\mathbf{n} = 0$

$(\mathbf{g}^*\times\mathbf{n})\times\mathbf{a} = d(\mathbf{g}\times\mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{n}(\mathbf{a}\mathbf{g}^*) - \mathbf{g}^*(\mathbf{a}\mathbf{n}) = d(\mathbf{g}\times\mathbf{a})$

also

$$\mathbf{n}(\mathbf{a}\mathbf{g}^*) = d(\mathbf{g}\times\mathbf{a})$$

Wegen den Homogenitär von $\mathbf{g},\mathbf{g}^*$ können wir setzen

$\mathbf{g}\times\mathbf{a} = \mathbf{n}, \quad d = \mathbf{a}\mathbf{g}^* = -\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g}$

daraus weiter

$\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{g}\times\mathbf{a})\times\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) = -d\mathbf{a} - \mathbf{g}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})$

daher

$$\mathbf{g} = -\frac{\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{a}} + d\mathbf{a}}{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}$$

> Die Nullgeraden in einer zu Zentralachse parallelen Ebene sind untereinander parallel

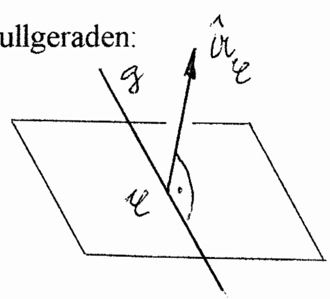
3) Steht eine Ebene auf die Zentralachse normal, so gilt $\mathbf{n} = \mathbf{a}$, daher ist der Nullpunkt dieser Ebene

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{a}} + d\mathbf{a}}{\mathbf{a}\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{a}\times\hat{\mathbf{a}} + d\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}, \text{ also}$$

$$\mathbf{x}\times\mathbf{a} = \frac{(\mathbf{a}\times\hat{\mathbf{a}})\times\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{\hat{\mathbf{a}}|\mathbf{a}|^2 - \mathbf{a}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})}{|\mathbf{a}|^2} = \hat{\mathbf{a}} - \frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}} - p\mathbf{a} = \mathbf{a}^* = \mathbf{x}\times\mathbf{a}$$

> Der Nullpunkt einer zur Zentralachse normalen Ebene liegt auf der Zentralachse. Alle Nullgeraden, welche die Zentralachse schneiden, schneiden sie unter rechtem Winkel.

Wir berechnen das Reduktionsmoment in den Punkten einer Nullgeraden:



$\mathbf{x}\times\mathbf{g} = \mathbf{g}^*$

$\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g} + \mathbf{a}\mathbf{g}^* = 0$

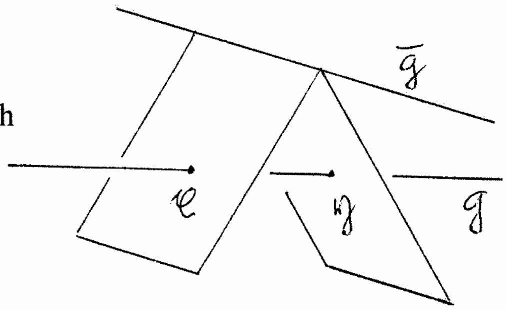
$\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{x}\times\mathbf{a}$

$\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g} + \mathbf{a}(\mathbf{x}\times\mathbf{g}) = \hat{\mathbf{a}}\mathbf{g} + (\mathbf{a}\times\mathbf{x})\mathbf{g} = (\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a}\times\mathbf{x})\mathbf{g} = \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}\mathbf{g} = 0$

> In jedemPunkt einer Nullgeraden steht das Reduktionsmoment auf die Nullgerade normal. Durchläuft ein Punkt ein Nullgerade g, so dreht sich seine Nullebene um g

Wir betrachten zwei Punkte **x** und **y** mit der Verbindungsgeraden

$\mathbf{g} = \mathbf{y} - \mathbf{x}, \quad \mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$



Die Nullebenen in diesen Punkten werden festgelegt durch

$\mathbf{n}_1 = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{x} \times \mathbf{a} \quad d_1 = \hat{\mathbf{a}}\mathbf{x}$

$\mathbf{n}_2 = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{y} \times \mathbf{a} \quad d_2 = \hat{\mathbf{a}}\mathbf{y}$

Wir bestimmen die Schnittgerade ($\bar{\mathbf{g}}$, $\bar{\mathbf{g}}^*$) dieser Ebenen

$$\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{x} \times \mathbf{a}) \times (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{y} \times \mathbf{a}) = \hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{a}} - (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \times \hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{y} \times \mathbf{a}) =$$

$$= -\mathbf{a}(\mathbf{x}\hat{\mathbf{a}}) + \mathbf{x}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) - \mathbf{y}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}\hat{\mathbf{a}}) + \mathbf{a}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{a}) - \mathbf{x}(\mathbf{a},\mathbf{y},\mathbf{a}) = \mathbf{a}[(\mathbf{y}\hat{\mathbf{a}}) - (\mathbf{x}\hat{\mathbf{a}}) + (\mathbf{x} \times \mathbf{y})\mathbf{a}] - (\mathbf{y} - \mathbf{x})(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) =$$

$$= \mathbf{a}[(\mathbf{y} - \mathbf{x})\hat{\mathbf{a}} + (\mathbf{x} \times \mathbf{y})\mathbf{a}] - (\mathbf{y} - \mathbf{x})(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) \Rightarrow \underline{\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{a}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})}$$

$$\bar{\mathbf{g}}^* = d_2\mathbf{n}_1 - d_1\mathbf{n}_2 = (\hat{\mathbf{a}}\mathbf{y})(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{x} \times \mathbf{a}) - (\hat{\mathbf{a}}\mathbf{x})(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{y} \times \mathbf{a}) = \hat{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{a}}\mathbf{y} - \hat{\mathbf{a}}\mathbf{x}) - (\hat{\mathbf{a}}\mathbf{y})(\mathbf{x} \times \mathbf{a}) + (\hat{\mathbf{a}}\mathbf{x})(\mathbf{y} \times \mathbf{a}) =$$

$$= \hat{\mathbf{a}}[\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{y} - \mathbf{x})] + [(\hat{\mathbf{a}}\mathbf{x})\mathbf{y} - (\hat{\mathbf{a}}\mathbf{y})\mathbf{x}] \times \mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}[\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g}] + [(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \hat{\mathbf{a}}] \times \mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}}) + (\mathbf{g}^* \times \hat{\mathbf{a}}) \times \mathbf{a} =$$

$$= \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}}) + \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) \Rightarrow \underline{\bar{\mathbf{g}}^* = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})}$$

Durchläuft ein Punkt eine Gerade g, so dreht sich seine Nullebene um deren reziproke Polare $\bar{g}$ und umgekehrt

Zum Nachweis der Umkehrung haben wir zu zeigen: Sind g, $\bar{g}$ reziproke Polare, so gilt $\bar{\bar{g}} = g$. Gegeben sei die Gerade g(**g**,**g***). Dann gilt für deren reziproke Polare

$$\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{a}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})$$

$$\bar{\mathbf{g}}^* = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})$$

Dann ist

$$\bar{\bar{\mathbf{g}}} = \mathbf{a}(\bar{\mathbf{g}}\hat{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{g}}^*\mathbf{a}) - \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})$$

$$\bar{\bar{\mathbf{g}}}^* = \hat{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{g}}\hat{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{g}}^*\mathbf{a}) - \bar{\mathbf{g}}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})$$

Daher gilt

$$\bar{\bar{\mathbf{g}}} = \mathbf{a}[(\mathbf{a}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}))\hat{\mathbf{a}} + (\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}))\mathbf{a}] - (\mathbf{a}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}))(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) = \ldots =$$

$$= \underline{(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})^2\mathbf{g}}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{g}}}^* = \hat{\mathbf{a}}[(\mathbf{a}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}))\hat{\mathbf{a}} + (\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}))\mathbf{a}] - (\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{g}^*\mathbf{a}) - \mathbf{g}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}))(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) = \ldots =$$

$$= \underline{(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})^2\mathbf{g}^*}$$

Wegen der Homogenität der PLÜCKER -Vektoren gilt $\bar{\bar{g}} = g$

Ferner gilt

Trifft eine Nullgerade eine beliebige Gerade, so trifft sie auch deren reziproke Polare. Jede Gerade, die zwei reziproke Polare trifft, ist eine Nullgerade

$(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)$ mit $\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g}+\mathbf{a}\mathbf{g}^*=\mathbf{0}$ sei eine Nullgerade. Ferner sei

$(\mathbf{m},\mathbf{m}^*)$ eine beliebige Gerade, die diese Nullgerade schneidet. Dann erfüllt sie die Schnittbedingung

$\mathbf{m}\mathbf{g}^*+\mathbf{m}^*\mathbf{g}=\mathbf{0}$

Die reziproke Polare hat die PLÜCKER - Vektoren

$\overline{\mathbf{m}}=\mathbf{a}(\mathbf{m}\hat{\mathbf{a}}+\mathbf{m}^*\mathbf{a})-\mathbf{m}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})$

$\overline{\mathbf{m}}^*=\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{m}\hat{\mathbf{a}}+\mathbf{m}^*\mathbf{a})-\mathbf{m}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^*\overline{\mathbf{m}}+\mathbf{g}\overline{\mathbf{m}}^* &= \mathbf{g}^*[\mathbf{a}(\mathbf{m}\hat{\mathbf{a}}+\mathbf{m}^*\mathbf{a})-\mathbf{m}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})]+\mathbf{g}[\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{m}\hat{\mathbf{a}}+\mathbf{m}^*\mathbf{a})-\mathbf{m}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})]= \\ &=(\mathbf{g}^*\mathbf{a}+\mathbf{g}\hat{\mathbf{a}})(\mathbf{m}\hat{\mathbf{a}}+\mathbf{m}^*\mathbf{a})-(\mathbf{g}^*\mathbf{m}+\mathbf{g}\mathbf{m}^*)(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})=0 \text{ nach den Voraussetzungen}\end{aligned}$$

Gilt umgekehrt

$\mathbf{m}\mathbf{g}^*+\mathbf{m}^*\mathbf{g}=0$

$\overline{\mathbf{m}}\mathbf{g}^*+\overline{\mathbf{m}}^*\mathbf{g}=0$ Durch Rückwärtslauf des obigen Beweises folgt dann

$\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g}+\mathbf{a}\mathbf{g}^*=0\Rightarrow(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)$ ist Nullgerade

Das Gemeinlot zweier reziproken Polaren trifft die Zentralachse unter einem rechten Winkel

Es sei $(\mathbf{m},\mathbf{m}^*)$ eine beliebige Gerade. Dann ist ihre reziproke Polare

$\overline{\mathbf{m}}=\mathbf{a}(\mathbf{m}\hat{\mathbf{a}}+\mathbf{m}^*\mathbf{a})-\mathbf{m}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})$

$\overline{\mathbf{m}}^*=\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{m}\hat{\mathbf{a}}+\mathbf{m}^*\mathbf{a})-\mathbf{m}^*(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})$

Für das Gemeinlot $(\mathbf{n},\mathbf{n}^*)$ gilt dann $\mathbf{n}\mathbf{m}=0$, $\mathbf{n}\overline{\mathbf{m}}=0$ sowie $\mathbf{n}\hat{\mathbf{a}}+\mathbf{n}^*\mathbf{a}=0$, da das Gemeinlot als Treffgerade an zwei reziproke Polare Nullgerade ist.

Da für die Zentralchse gilt

$\mathbf{a},\mathbf{a}^*=\hat{\mathbf{a}}-p\mathbf{a}$ mit $p=\dfrac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|^2}$, folgt aus $\mathbf{n}\overline{\mathbf{m}}=0$

$$0=\mathbf{n}\overline{\mathbf{m}}=(\mathbf{n}\mathbf{a})\underbrace{(\mathbf{m}\hat{\mathbf{a}}+\mathbf{m}^*\mathbf{a})}_{\neq 0}-\underbrace{(\mathbf{n}\mathbf{m})}_{\perp}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})\Rightarrow\mathbf{n}\mathbf{a}=0\Rightarrow\mathbf{n}\perp\mathbf{a}$$

Ferner ist die Schnittbedingung mit der Zentralachse wegen

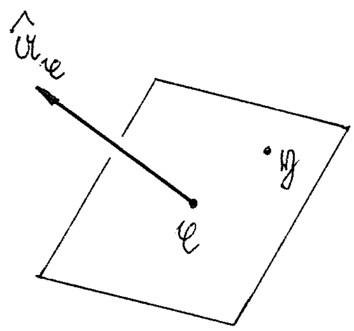
$\mathbf{n}\hat{\mathbf{a}}+\mathbf{n}^*\mathbf{a}=\mathbf{n}(\mathbf{a}^*+p\mathbf{a})+\mathbf{n}^*\mathbf{a}=p(\mathbf{n}\mathbf{a})+\underline{(\mathbf{n}\mathbf{a}^*+\mathbf{n}^*\mathbf{a})}=\underline{0}$

erfüllt.

Das Nullsystem (Die Nullkorrelation)

Jedem Punkt $\mathbf{x}$ des Raumes wird durch das Strahlgewinde in eindeutiger Weise seine Nullebene

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{x} \times \mathbf{a}, \quad d = \hat{\mathbf{a}}\mathbf{x}$$



zugeordnet. Dadurch wird jedem Punkt des Raumes in eindeutiger Weise eine Ebene zugeordnet. Die Umkehrung gilt nicht, da nach unserer bisherigen Auffassung den Ebenen parallel zur Zentral achse kein Nullpunkt entsprach. Die in ihnen enthaltenen Nullstrahlen bildeten ein Parallelenbüschel. Um die Zuordnung zwischen den Punkten des Raumes und den Nullebenen bijektiv zu gestalten, führen wird den Begriff des *Fernpunktes* ein. Dann entspricht jeder Ebene ein Nullpunkt, der eventuell ein Fernpunkt sein kann.
Durch diese Festsetzung wird zwischen den Punkten und Ebenen des Raumes eine bijektive Abbildung definiert, die man als *Nullsystem* oder *Nullkorrelation* bezeichnet
Für einen beliebigen Punkt $\mathbf{y}$ dieser Ebene gilt dann $\mathbf{ny} = d$. Es sei nun

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{Bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2a_3 - x_3a_2 \\ x_3a_1 - x_1a_3 \\ x_1a_2 - x_2a_1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \hat{a}_1 - x_2a_3 + x_3a_2 \\ \hat{a}_2 - x_3a_1 + x_1a_3 \\ \hat{a}_3 - x_1a_2 + x_2a_1 \end{Bmatrix} \quad d = \hat{\mathbf{a}}\mathbf{x} = x_1\hat{a}_1 + x_2\hat{a}_2 + x_3\hat{a}_3$$

Daher lautet die Gleichung der Nullebene im Punkte $\mathbf{x}$ in den laufenden Koordinaten $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{ny} = d$$

$$y_1(\hat{a}_1 - x_2a_3 + x_3a_2) + y_2(\hat{a}_2 - x_3a_1 + x_1a_3) + y_3(\hat{a}_3 - x_1a_2 + x_2a_1) = x_1\hat{a}_1 + x_2\hat{a}_2 + x_3\hat{a}_3$$

Führt man aus Symmetriegründen die zusätzlichen Koordinaten ein:

$x_0 := 1$, $y_0 := 1$, so folgt

$$y_1(\hat{a}_1x_0 - x_2a_3 + x_3a_2) + y_2(\hat{a}_2x_0 - x_3a_1 + x_1a_3) + y_3(\hat{a}_3x_0 - x_1a_2 + x_2a_1) + y_0(-x_1\hat{a}_1 - x_2\hat{a}_2 - x_3\hat{a}_3) = 0$$

Bilden wir die Koeffizientenmatrix der Produkte x_iy_j, so ergibt sich

$$\begin{Vmatrix} 0 & \hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \hat{a}_3 \\ -\hat{a}_1 & 0 & a_3 & -a_2 \\ -\hat{a}_2 & -a_3 & 0 & a_1 \\ -\hat{a}_3 & a_2 & -a_1 & 0 \end{Vmatrix} = B_4 = -B_4^T \text{ ... Schiefsymmetrische Matrix}$$

Setzt man $\breve{\mathbf{x}} = \|x_0, x_1, x_2, x_3\| = \|1, x_1, x_2, x_3\|$, $\breve{\mathbf{y}} = \|y_0, y_1, y_2, y_3\| = \|1, y_1, y_2, y_3\|$
so stellt

$$\mathbf{ny} - d = \breve{\mathbf{x}} B_4 \breve{\mathbf{y}}^T = 0$$

die Gleichung des Nullsystems in Matrizenschreibweise dar, während

$$y_1(\hat{a}_1 x_0 - x_2 a_3 + x_3 a_2) + y_2(\hat{a}_2 x_0 - x_3 a_1 + x_1 a_3) + y_3(\hat{a}_3 x_0 - x_1 a_2 + x_2 a_1) - y_0(-x_1\hat{a}_1 - x_2\hat{a}_2 - x_3\hat{a}_3) = 0$$

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1$$

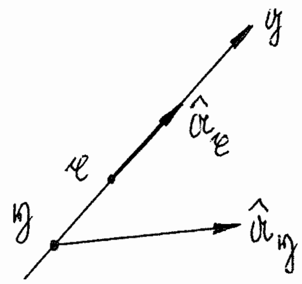
die Gleichung der Nulleben im Punkt **x** in den laufenden Koordinaten darstellt.

Der Komplex der Reduktionsachsen

Jedem Punkt **x** des Raumes entspricht ein wohlbestimmtes Reduktionsmoment $\mathbf{a}_x$. Wir bestimmen die Menge der Geraden, welche Trägergeraden des Reduktionsmoments $\mathbf{a}_x$ eines ihrer Punkte sind. Für diese Geraden (**g**,**g***) muß gelten:

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{g} \qquad \mathbf{a}$$

$$\mathbf{g} = \lambda \hat{\mathbf{a}}_x = \lambda \lfloor \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{x} \times \mathbf{a} \rfloor \quad | \mathbf{a} \qquad \mathbf{g}$$



Skalare Multiplikation der 2. Gleichung mit **a** liefert

$$\mathbf{ga} = \lambda \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}$$

daher

$$\lambda = \frac{\mathbf{ag}}{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}$$

Skalare Multiplikation der 1.Gleichung mit **a** und der 2.Gleichung mit **g** ergibt

$$\mathbf{ag}^* = (\mathbf{xga}) \qquad -\lambda$$

$$|\mathbf{g}|^2 = \lambda[\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g} - (\mathbf{gxa})] = \lambda(\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g} + (\mathbf{xga})) \qquad (+1)$$

$$|\mathbf{g}|^2 - \lambda \mathbf{ag}^* = \lambda \hat{\mathbf{a}}\mathbf{g}$$

$$|\mathbf{g}|^2 = \lambda(\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g} + \mathbf{ag}^*) = \frac{\mathbf{ag}}{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}(\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g} + \mathbf{ag}^*)$$

also

$$\boxed{|\mathbf{g}^2|(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) = (\mathbf{a}\mathbf{g})(\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g} + \mathbf{a}\mathbf{g}^*) \qquad (*)}$$

Diese Bedingung ist *notwendig und hinreichend* dafür, daß die Gerade $(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)$ mit dem Reduktionsmoment eines ihrer Punkte kollinear ist. Die Notwendigkeit dieser Bedingung wurde soeben gezeigt. Das Hinreichen folgt daraus, daß bei gegebener Geraden der Punkt $\mathbf{x}$ eindeutig berechenbar ist. Es gilt nämlich

$$\mathbf{x}\times\mathbf{g} = \mathbf{g}^* \qquad \Rightarrow \mathbf{x}\perp\mathbf{g}^*$$

$$\mathbf{x}\times\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}} - \frac{\mathbf{g}}{\lambda} \qquad \Rightarrow \mathbf{x}\perp\hat{\mathbf{a}} - \frac{\mathbf{g}}{\lambda}$$

Daher

$$\mathbf{x} = \mu\mathbf{g}^*\times\left[\hat{\mathbf{a}} - \frac{\mathbf{g}}{\lambda}\right] \quad \Big| \times\mathbf{g}$$

Vektormultiplikation mit mit $\mathbf{g}$ liefert

$$\mathbf{x}\times\mathbf{g} = \underline{\mathbf{g}^*} = \mu\left(\mathbf{g}^*\times\left[\hat{\mathbf{a}} - \frac{\mathbf{g}}{\lambda}\right]\right)\times\mathbf{g} = \mu\left(\left[\hat{\mathbf{a}} - \frac{\mathbf{g}}{\lambda}\right](\mathbf{g}\mathbf{g}^*) - \mathbf{g}^*\left(\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g} - \frac{|\mathbf{g}|^2}{\lambda}\right)\right) = \underline{-\left[\mu\left(\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g} - \frac{|\mathbf{g}|^2}{\lambda}\right)\right]\mathbf{g}^*}$$

Daraus folgt

$$-1 = \mu\left(\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g} - |\mathbf{g}|^2\frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}\mathbf{g}}\right) = \frac{\mu}{\mathbf{a}\mathbf{g}}\left((\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g})(\mathbf{a}\mathbf{g}) - |\mathbf{g}|^2(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})\right)$$

Daher wegen (*)

$$-1 = \frac{\mu}{\mathbf{a}\mathbf{g}}\left((\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g})(\mathbf{a}\mathbf{g}) - (\mathbf{a}\mathbf{g})(\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g}) - (\mathbf{a}\mathbf{g})(\mathbf{a}\mathbf{g}^*)\right) = -\mu(\mathbf{a}\mathbf{g}^*)$$

Daraus $\mu = \dfrac{1}{\mathbf{a}\mathbf{g}^*}$ und $\mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{g}^*}{\mathbf{a}\mathbf{g}^*}\times\left[\hat{\mathbf{a}} - \dfrac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}\mathbf{g}}\mathbf{g}\right]$

Es gilt also

$$\boxed{\mathbf{x} = \frac{\mathbf{g}^*\times[\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\mathbf{g}) - (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})\mathbf{g}]}{(\mathbf{a}\mathbf{g})(\mathbf{a}\mathbf{g}^*)} = \frac{\mathbf{g}^*\times[(\mathbf{g}\times\hat{\mathbf{a}})\times\mathbf{a}]}{(\mathbf{a}\mathbf{g})(\mathbf{a}\mathbf{g}^*)}}$$

Da die Menge der Reduktionsachsen demnach durch die in den PLÜCKER-Koordinaten quadratische Gleichung (*) festgelegt ist, bildet die Menge der Reduktionsachsen einen *quadratischen Geradenkomplex*.

Komplexkegel der Reduktionsachsen durch einen Punkt

Geht eine Gerade $(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)$ durch den Punkt $\mathbf{z}$, so gilt

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{z}\times\mathbf{g}$$

und aus (*) folgt

$$|\mathbf{g}|^2(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) = (\mathbf{a}\mathbf{g})[\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g} + \mathbf{a}(\mathbf{z}\times\mathbf{g})] = (\mathbf{a}\mathbf{g})[\hat{\mathbf{a}}\mathbf{g} + (\mathbf{a}\times\mathbf{z})\mathbf{g}]$$

Daher lautet die *Gleichung des Komplexkegels* in PLÜCKER-Koordinaten

$$\boxed{|\mathbf{g}|^2(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) = (\mathbf{a}\mathbf{g})[(\hat{\mathbf{a}} - (\mathbf{z}\times\mathbf{a}))\mathbf{g}] = (\mathbf{a}\mathbf{g})(\hat{\mathbf{a}}_Z\mathbf{g})}$$

Zunächst erkennt man, daß die Parallele zur Zentralachse durch $\mathbf{z}$ auf dem Komplexkegel liegt. Denn $\mathbf{g} = \mathbf{a}$ erfüllt obige Gleichung:

$$|\mathbf{a}|^2(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) = |\mathbf{a}|^2\left[\hat{\mathbf{a}}\mathbf{a} - \underbrace{(\mathbf{z}\times\mathbf{a})\mathbf{a}}_{0}\right] = \underline{|\mathbf{a}|^2(\hat{\mathbf{a}}\mathbf{a})}$$

Selbstverständlich liegt auch die Reduktionsachse des Punktes $\mathbf{z}$ auf dem Kegel. Denn mit $\mathbf{g} = \hat{\mathbf{a}}_Z$ gilt

$$\underline{|\mathbf{a}_Z|^2(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})} = \underline{(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})|\mathbf{a}_Z|^2}$$

Um genauere Eigenschaften des Komplexkegels zu erkennen, schneiden wir ihn mit einer Ebene orthogonal zu $\mathbf{a}$, z.B. mit der Ebene

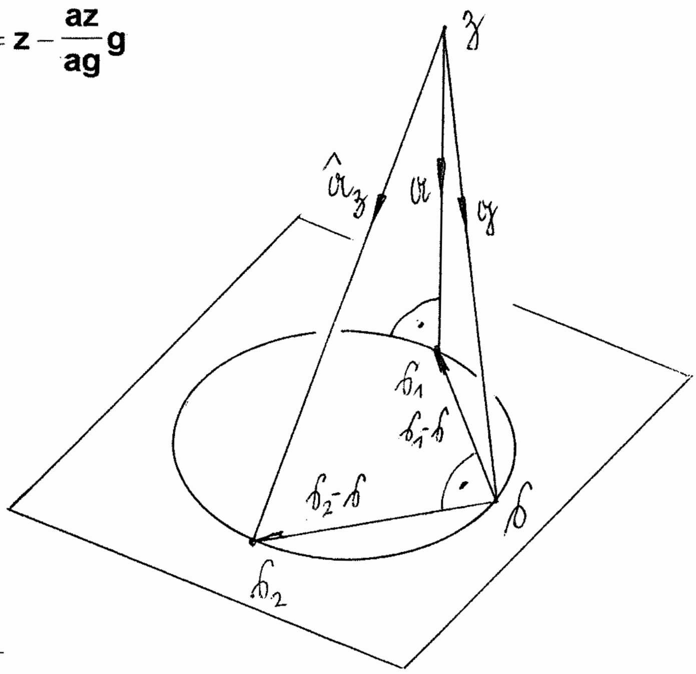
$$\mathbf{n} = \mathbf{a},\ d = 0$$

Eine beliebige Erzeugende $(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)$des Komplexkegels hat dann mit dieser Ebene den Schnittpunkt

$$\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{g} + \mathbf{n}\times\mathbf{g}^*}{\mathbf{n}\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{g}^*}{\mathbf{a}\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{a}\times(\mathbf{z}\times\mathbf{g})}{\mathbf{a}\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{z}(\mathbf{a}\mathbf{g}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}\mathbf{z})}{\mathbf{a}\mathbf{g}} = \mathbf{z} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{z}}{\mathbf{a}\mathbf{g}}\mathbf{g}$$

also

$$\mathbf{s} = \mathbf{z} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{z}}{\mathbf{a}\mathbf{g}}\mathbf{g}$$



Für $\mathbf{g} = \mathbf{a}$ folgt speziell

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{z} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{z}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$$

und für $\mathbf{g} = \hat{\mathbf{a}}_Z$

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{z} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{z}}{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}_Z}\hat{\mathbf{a}}_Z = \mathbf{z} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{z}}{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}\hat{\mathbf{a}}_Z$$

Für die Vektoren $\mathbf{s}_1$-$\mathbf{s}$ und $\mathbf{s}_2$-$\mathbf{s}$ gilt

$$\mathbf{s}_1 - \mathbf{s} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{z}}{\mathbf{a}\mathbf{g}}\mathbf{g} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{z}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} = (\mathbf{a}\mathbf{z})\frac{\mathbf{g}|\mathbf{a}^2| - \mathbf{a}(\mathbf{a}\mathbf{g})}{(\mathbf{a}\mathbf{g})|\mathbf{a}|^2}$$

$$\mathbf{s}_2 - \mathbf{s} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{z}}{\mathbf{a}\mathbf{g}}\mathbf{g} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{z}}{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}\hat{\mathbf{a}}_z = (\mathbf{a}\mathbf{z})\frac{\mathbf{g}(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) - \hat{\mathbf{a}}_z(\mathbf{a}\mathbf{g})}{(\mathbf{a}\mathbf{g})(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})}$$

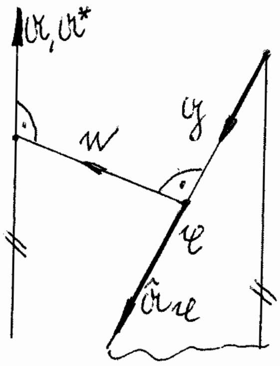
Dann gilt

$$(\mathbf{s}_1-\mathbf{s})(\mathbf{s}_2-\mathbf{s})=\frac{(\mathbf{az})^2}{(\mathbf{ag})^2(\mathbf{a\hat{a}})|\mathbf{a}|^2}\left[\left(\mathbf{g}|\mathbf{a}|^2-\mathbf{a}(\mathbf{ag})\right)\left(\mathbf{g}(\mathbf{a\hat{a}})-\mathbf{\hat{a}}_z(\mathbf{ag})\right)\right]=$$

$$=\frac{(\mathbf{az})^2}{(\mathbf{ag})^2(\mathbf{a\hat{a}})|\mathbf{a}|^2}\left[|\mathbf{g}|^2|\mathbf{a}|^2(\mathbf{a\hat{a}})-(\mathbf{ag})^2(\mathbf{a\hat{a}})-(\mathbf{g\hat{a}}_z)(\mathbf{ag})|\mathbf{a}|^2+\underbrace{(\mathbf{a\hat{a}}_z)}_{(\mathbf{a\hat{a}})}(\mathbf{ag})^2\right]=$$

$$=\frac{(\mathbf{az})^2}{(\mathbf{ag})^2(\mathbf{a\hat{a}})}\underbrace{\left[|\mathbf{g}|^2(\mathbf{a\hat{a}})-(\mathbf{ag})(\mathbf{g\hat{a}}_z)\right]}_{0}=0$$

Wegent $\mathbf{s}_1-\mathbf{s}\perp\mathbf{s}_2-\mathbf{s}$ ist die Schnittkurve ein Kreis. *Der Komplexkegel ist daher ein schiefer Kreiskegel.*
Auf jeder Erzeugenden des Komplexkegels liegt genau ein Punkt $\mathbf{x}$, in dem diese Erzeugende und das Reduktionsmoment $\mathbf{\hat{a}}_x$ kollinear sind. Wir untersuchen die Menge dieser Punkte.
Hilfssatz: Die Normale in $\mathbf{x}$ auf die von den beiden Erzeugenden g und a aufgespannte Ebene schneidet die Zentralachse unter rechtem Winkel.



Die Zentralachse wird durch

$\mathbf{a},\ \ \mathbf{a}^*=\mathbf{\hat{a}}-p\mathbf{a}$

festgelegt. Für die oben genannte Ebenennormale gilt

$\mathbf{n}=\mathbf{a}\times\mathbf{g},\ \ \mathbf{n}^*=\mathbf{x}\times\mathbf{n}$

Es ist zu zeigen:

$\mathbf{a}^*\mathbf{n}+\mathbf{a}\mathbf{n}^*=\mathbf{0}$

Nun gilt

$\mathbf{a}^*\mathbf{n}=(\mathbf{\hat{a}}-p\mathbf{a})\mathbf{n}=\mathbf{\hat{a}n}$

$\mathbf{n}^*\mathbf{a}=(\mathbf{x}\times\mathbf{n})\mathbf{a}=\mathbf{n}(\mathbf{a}\times\mathbf{x})=-\mathbf{n}(\mathbf{x}\times\mathbf{a})$

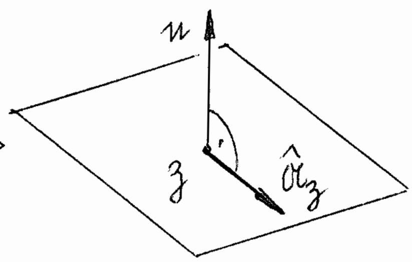
$\mathbf{a}^*\mathbf{n}+\mathbf{n}^*\mathbf{a}=\mathbf{\hat{a}n}-(\mathbf{x}\times\mathbf{a})\mathbf{n}=[\mathbf{\hat{a}}-\mathbf{x}\times\mathbf{a}]\mathbf{n}=\mathbf{n\hat{a}}_x=0$

Die Punkte $\mathbf{x}$ liegen daher im Schnitt des Komplexkegels mit einem Zylinder, der die auf den Basiskreis des schiefen Kreiskegels orthogonale Erzeugende enthält. Die entstehende Kurve heißt *schiefer Kreis.*

Beispiel: Parameterdarstellung des schiefen Kreises Gleichung des Komplexkegels

Die Komplexkurve der Reduktionsachsen in einer Ebene

Gegeben sei die Ebene ($\mathbf{n}$,d). Wir suchen in ihr jene Punkte $\mathbf{z}$, deren Reduktionsmomenentenvektoren in dieser Ebene liegen. Für diese Punkte muß gelten:



$\mathbf{nz}=\mathrm{d}$

$\mathbf{n\hat{a}}_z=0\Rightarrow\mathbf{n}(\mathbf{\hat{a}}-\mathbf{z}\times\mathbf{a})=0\Rightarrow\mathbf{n\hat{a}}-\mathbf{n}(\mathbf{z}\times\mathbf{a})=0\Rightarrow\mathbf{n\hat{a}}-\mathbf{z}(\mathbf{a}\times\mathbf{n})=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\mathbf{z}(\mathbf{a}\times\mathbf{n})=\mathbf{n\hat{a}}$

also zusammengefaßt

$$\boxed{\begin{array}{ll}\mathbf{nz}=\mathrm{d} & \\ (\mathbf{a}\times\mathbf{n})\mathbf{z}=\mathbf{n\hat{a}} & (*)\end{array}}$$

Setzen wir

$\mathbf{a}\times\mathbf{n}=\mathbf{n} \quad \mathbf{n\hat{a}}=\mathrm{d}_1$

so liegt $\mathbf{z}$ in den beiden Ebenen ($\mathbf{n}$,d) und ($\mathbf{n}_1$,d_1). Die Punkte $\mathbf{z}$ liegen daher auf der Schnittgeraden

$$\mathbf{c}=\mathbf{n}\times\mathbf{n}_1=\mathbf{n}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{n})$$

$$\mathbf{c}^*=\mathrm{d}_1\mathbf{n}-\mathrm{d}\mathbf{n}_1=(\mathbf{n\hat{a}})\mathbf{n}-\mathrm{d}(\mathbf{a}\times\mathbf{n})$$

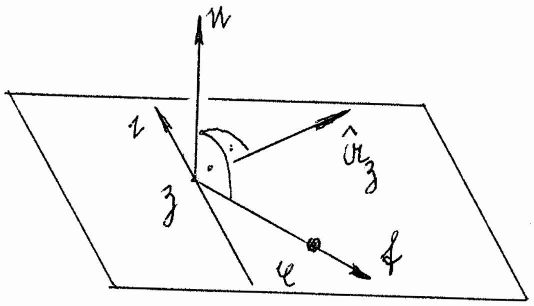
Man nennt diese Gerade die *Charakteristik der Ebene*.

Wir bestimmen den Richtungsvektor jener Geraden durch $\mathbf{z}$, welche in der betrachteten Ebene liegen und auf $\mathbf{a}_Z$ normal stehen. Dann gilt

$$\mathbf{f}=\mathbf{n}\times\mathbf{\hat{a}}_z=\mathbf{n}\times(\mathbf{\hat{a}}-\mathbf{z}\times\mathbf{a})=\mathbf{n}\times\mathbf{\hat{a}}-\mathbf{n}\times(\mathbf{z}\times\mathbf{a})=\mathbf{n}\times\mathbf{\hat{a}}-\mathbf{z}(\mathbf{n\hat{a}})+\mathbf{a}(\mathbf{nz})=\mathbf{n}\times\mathbf{\hat{a}}-\mathbf{z}(\mathbf{an})+\mathbf{a}\mathrm{d}$$

Also

$$\mathbf{f}=(\mathbf{an})\left(\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{\hat{a}}+\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathbf{an}}-\mathbf{z}\right)=(\mathbf{an})(\mathbf{x}-\mathbf{z})$$



Da

$$\mathbf{x}=\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{\hat{a}}+\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathbf{an}}$$

der Nullpunkt der Ebene ist, gehen alle Normalen f durch denselben Punkt. Die Hüllkurve aller Trägergeraden der Reduktionsmomentenvektoren in einer Ebene ist also eine *Parabel*. Man nennt die Hüllkurve aller Geraden eines Komplexes, die in derselben Ebene liegen, die *Komplexkurve* in dieser Ebene. Die Komplexkurve des Reduktionsmomentenkomplexes ist also eine Parabel.

Wir zeigen nun folgenden Satz:

Die reziproke Polare der Charakteristik der Ebene ($\mathbf{n}$,d) ist deren Normale im Nullpunkt $\mathbf{x}$ der Ebene ≡ Reduktionsachse des Punktes $\mathbf{x}$

Für die reziproke Polare der Charakteristik

$$\mathbf{c}=\mathbf{n}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{n})=\mathbf{a}|\mathbf{n}|^2-\mathbf{n}(\mathbf{an})$$

$$\mathbf{c}^*=(\mathbf{n\hat{a}})\mathbf{n}-\mathrm{d}(\mathbf{a}\times\mathbf{n})$$

gilt nämlich

$$\overline{\mathbf{c}}=\mathbf{a}(\mathbf{c\hat{a}}+\mathbf{c}^*\mathbf{a})-\mathbf{c}(\mathbf{a\hat{a}})$$

$$\overline{\mathbf{c}}^*=\mathbf{\hat{a}}(\mathbf{c\hat{a}}+\mathbf{c}^*\mathbf{a})-\mathbf{c}^*(\mathbf{a\hat{a}})$$

Nun ist

$$(\mathbf{c\hat{a}}+\mathbf{c}^*\mathbf{a})=(\mathbf{a\hat{a}})|\mathbf{n}|^2-(\mathbf{\hat{a}n})(\mathbf{an})+(\mathbf{n\hat{a}})(\mathbf{an})=(\mathbf{a\hat{a}})|\mathbf{n}|^2$$

also weiter unter Beachtung der Tatsache, daß

$$\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}}) + d\mathbf{a}}{(\mathbf{an})}$$

der Nullpunkt der Ebene ($\mathbf{n}$,d) ist:

$$\underline{\bar{\mathbf{c}}} = (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})|\mathbf{n}|^2 \mathbf{a} - (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})|\mathbf{n}|^2 \mathbf{a} + (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})(\mathbf{an})\mathbf{n} = \underline{(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})(\mathbf{an})\mathbf{n}}$$

$$\underline{\bar{\mathbf{c}}*} = (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})|\mathbf{n}|^2 \hat{\mathbf{a}} - (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})(\mathbf{n}\hat{\mathbf{a}})\mathbf{n} + (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})d(\mathbf{a} \times \mathbf{n}) = (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})\left[|\mathbf{n}|^2 \hat{\mathbf{a}} - (\mathbf{n}\hat{\mathbf{a}})\mathbf{n} + d(\mathbf{a} \times \mathbf{n})\right] =$$

$$= (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})[(\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}}) \times \mathbf{n} + d(\mathbf{a} \times \mathbf{n})] = (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})[(\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}}) + d\mathbf{a}] \times \mathbf{n} = (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})(\mathbf{an}) \frac{(\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}}) + d\mathbf{a}}{(\mathbf{an})} \times \mathbf{n} =$$

$$= (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})(\mathbf{an})(\mathbf{x} \times \mathbf{n}) = \underline{(\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})(\mathbf{an})\mathbf{n}*}$$

Somit folgt

$$\bar{\mathbf{c}} = (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})(\mathbf{an})\mathbf{n}$$

$$\bar{\mathbf{c}}* = (\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})(\mathbf{an})\mathbf{n}*$$

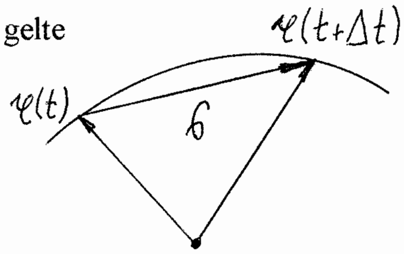
Aus den Homogenität der PLÜCKER-Vektoren folgt die Behauptung.

Elementare Differentialgeometrie der Raumkurven

Der Ortsvektor $\mathbf{x}$ sei eine Funktion der Zeit t. Das durch

$$T: t \mapsto \mathbf{x}(t)$$

festgelegt *Zeitgesetz* sei bijektiv. Bezüglich einer Orthonormalbasis gelte



$$\mathbf{x} \cdots \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix}$$

Der Punkt $\mathbf{x}$ beschreibt abhängig vom Zeitparameter t eine *Bahnkurve*.
Der *Sehnenvektor* der Bahnkurve wird festgelegt durch

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)$$

Für den *Vektor der mittleren Geschwindigkeit* gilt

$$\frac{\mathbf{s}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t}$$

Der *Vektor der momentanen Geschwindigkeit* lautet dann

$$\dot{\mathbf{x}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} = \mathbf{v}$$

Sein Betrag

$$v = |\mathbf{v}|$$

ist die *Geschwindigkeit* von $\mathbf{x}$ im Zeitpunkt t

$$\dot{\mathbf{x}} \cdots \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{Bmatrix}$$

ist der *Ableitungsvektor* nach der Zeit[1]

[1] Es ist üblich, nach Isaac NEWTON (1642-1727) die Ableitungen („Fluxionen") nach der Zeit durch Punkte zu bezeichnen („Fluxionspunkte")

Ableitungsregeln

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$$

$$(\mathbf{xy})^{\bullet} = \dot{\mathbf{x}}\mathbf{y} + \mathbf{x}\dot{\mathbf{y}}$$

$$(\mathbf{x}\times\mathbf{y})^{\bullet} = \dot{\mathbf{x}}\times\mathbf{y} + \mathbf{x}\times\dot{\mathbf{y}}$$

$$\underline{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})^{\bullet}} = [\mathbf{x}(\mathbf{y}\times\mathbf{z})]^{\bullet} = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{y}\times\mathbf{z}) + \mathbf{x}(\dot{\mathbf{y}}\times\mathbf{z} + \mathbf{y}\times\dot{\mathbf{z}}) = \underline{(\dot{\mathbf{x}},\mathbf{y},\mathbf{z}) + (\mathbf{x},\dot{\mathbf{y}},\mathbf{z}) + (\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{z}})}$$

$$\underline{|\mathbf{x}|^{\bullet}} = \left(\sqrt{\mathbf{xx}}\right)^{\bullet} = \frac{\dot{\mathbf{x}}\mathbf{x} + \mathbf{x}\dot{\mathbf{x}}}{2\sqrt{\mathbf{xx}}} = \frac{2\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}}}{2\sqrt{\mathbf{xx}}} = \underline{\frac{\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|}}$$

Geschwindigkeit, Tangente

Vermöge der Beziehung
$T_1 : t_1 \mapsto \mathbf{x}(t_1) \ldots T_1$ ist bijektiv
$t \;=\; f(t_1) \ldots f$ ist bijektiv
werde ein neues Zeitgesetz eingeführt. Dann sei

$$\mathbf{x}' := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t_1}, \quad f' := \frac{\partial t}{\partial t_1}$$

$$\mathbf{x}' = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t_1} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial t_1} = f' . \dot{\mathbf{x}} = f' . \mathbf{v} = \mathbf{v}_1$$

Wegen

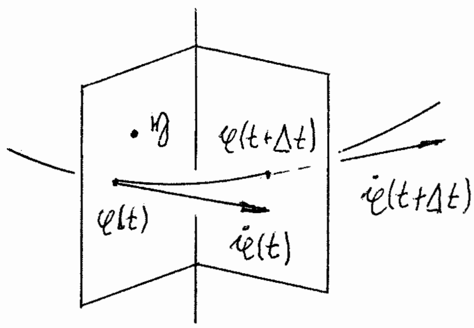
$$\boxed{\mathbf{v}_1 = f'\mathbf{v}}$$

gilt.

$$\boxed{\text{Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ist vom Zeitgesetz unabhängig.}}$$

Die Trägergerade des Geschwindigkeitsvektors ist die *Tangent*e an die Bahnkurve.

Krümmungsachse



Sei $\mathbf{y}$ ein laufender Punkt der Bahnnormalebene in $\mathbf{x}(t)$, so ist

$$\mathbf{ny} = \mathrm{d}$$

die Gleichung der Bahnnormalebene. Dabei gilt

$$\mathbf{n}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t), \quad \mathrm{d}(t) = \mathbf{n}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t)\dot{\mathbf{x}}(t)$$

Es gilt dann für zwei benachbarte Normalebenen

$$\mathbf{n}(t)\mathbf{y} = d(t)$$
$$\mathbf{n}(t+\Delta t)\mathbf{y} = d(t+\Delta t)$$

Jede Ebene, deren Gleichung eine Linearkombination obiger Gleichungen ist, geht durch deren Schnittgerade, also speziell auch die Ebene mit derGleichung

$$\frac{\mathbf{n}(t+\Delta t)-\mathbf{n}(t)}{\Delta t}\mathbf{y} = \frac{d(\Delta t+t)-d(t)}{\Delta t}$$

Der Grenzübergang $\Delta t \to 0$ ergibt eine Ebene mit der Gleichung

$$\dot{\mathbf{n}}\mathbf{y} = \dot{d}$$

Schnitt dieser Ebene mit der ursprünglich gegebenen

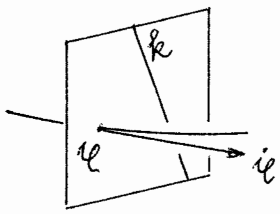
$$\mathbf{n}\mathbf{y} = d$$

ergibt die Grenzlage der Schnittgeraden der beiden Normalebenen. Dabei gilt

$$\dot{\mathbf{n}} = \ddot{\mathbf{x}}, \quad \dot{d} = (\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}})^\bullet = |\dot{\mathbf{x}}|^2 + \mathbf{x}\ddot{\mathbf{x}}$$

Die Schnittgerade der beiden Ebenen mit den Gleichungen in den laufenden Koordinaten

$$\dot{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \mathbf{x}\dot{\mathbf{x}}$$
$$\ddot{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \mathbf{x}\ddot{\mathbf{x}} + |\dot{\mathbf{x}}|^2$$



stellt die Grenzlage der Schnittgeraden der Normalebenen der Kurve an den Stellen t und $\Delta t+t$ für $t \to 0$ dar. Diese Grenzlage ist die *Krümmungsachse* k der Raumkurve im Punkte $\mathbf{x}$. Für deren PLÜCKER-Koordinaten gilt

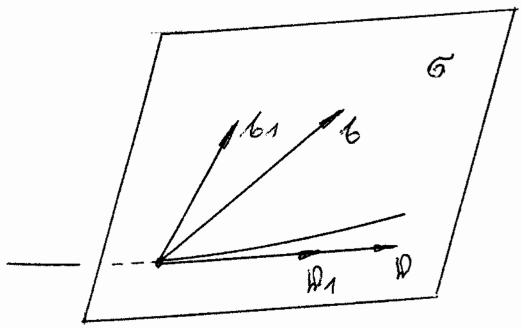
$$\mathbf{k} = \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}$$
$$\mathbf{k}^* = \left(\mathbf{x}\ddot{\mathbf{x}} + |\dot{\mathbf{x}}|^2\right)\dot{\mathbf{x}} - (\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}})\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) + |\dot{\mathbf{x}}|^2\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times \mathbf{k} + |\dot{\mathbf{x}}|^2\dot{\mathbf{x}}$$

Der Vektor

$$\mathbf{b} := \ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

heißt *Beschleunigungsvektor* im Zeitpunkt t. Sein Betrag

$$|\mathbf{b}| = b$$



stellt die *Beschleunigung* dar.

Änderung des Zeitgesetzes ergibt folgende Zusammenhänge:

$$\underline{\mathbf{b}_1} = \mathbf{x}'' = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t_1} = \frac{\partial(f'\dot{\mathbf{x}})}{\partial t_1} = f''\dot{\mathbf{x}} + f'\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial t_1} = \underline{f''\mathbf{v} + f'^2\mathbf{b}}$$

Der Beschleunigungsvektor ist also vom Zeitgesetz abhängig, hat also keine geometrische Bedeutung, wohl aber die von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannte Ebene (soferne sie existiert). Sie heißt *Schmiegebene* σ der Raumkurve im Punkte $\mathbf{x}$. Für sie gilt

$$\mathbf{n} = \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}, \quad d = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}\mathbf{k}$$

Für die Krümmungsachse gilt bei Wechsel des Zeitgesetzes:

$$\mathbf{k_1} = \mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' = \left(f'\dot{\mathbf{x}}\right) \times \left(f''\dot{\mathbf{x}} + f'^2\ddot{\mathbf{x}}\right) = f'^3(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) = f'^3\mathbf{k}$$

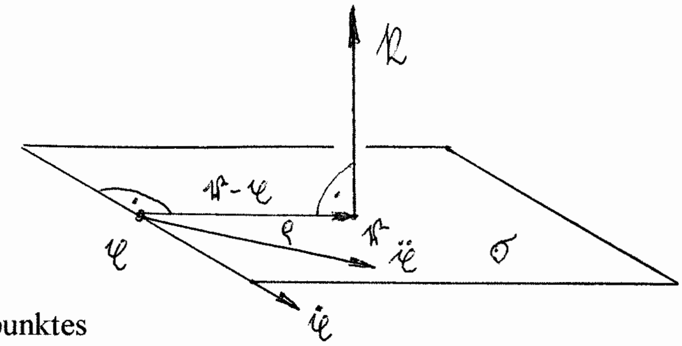
$$\mathbf{k}_1{}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{k}_1 + |\mathbf{x}'|^2\mathbf{x}' = \mathbf{x} \times \left(f'^3\mathbf{k}\right) + \left(f'^2|\dot{\mathbf{x}}|^2\right)\left(f'\dot{\mathbf{x}}\right) = f'^3\left(\mathbf{x} \times \mathbf{k} + |\dot{\mathbf{x}}|^2\dot{\mathbf{x}}\right) = f'^3\mathbf{k}^*$$

Wegen der Homogenität der PLÜCKER-Vektoren ist die Krümmungsachse unabhängig von der Wahl des Parameters. Sie hat daher geometrische Bedeutung und steht auf der Schmiegebene normal.

Wir suchen den Schnittpunkt $\mathbf{r}$ der Krümmungsachse mit der Schmiegebene. Es gilt

$$\sigma \ldots \mathbf{n} = \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{k}, \quad d = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{xk}$$

$$k \ldots \mathbf{k} = \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{k}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{k} + \left(\dot{\mathbf{x}}^2\right)\dot{\mathbf{x}}$$



Daher ergibt sich der Ortsvektor des Schnittpunktes

$$\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{k} + \mathbf{n} \times \mathbf{k}^*}{|\mathbf{k}^2|} = \frac{(\mathbf{xk})\mathbf{k} + \mathbf{k} \times \left(\mathbf{x} \times \mathbf{k} + |\dot{\mathbf{x}}|^2\dot{\mathbf{x}}\right)}{|\mathbf{k}^2|} = \frac{(\mathbf{xk})\mathbf{k} + \mathbf{k} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{k}) + |\dot{\mathbf{x}}|^2(\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{x}})}{|\mathbf{k}^2|} =$$

$$= \frac{(\mathbf{xk})\mathbf{k} + \mathbf{x}|\mathbf{k}|^2 - \mathbf{k}(\mathbf{xk}) + |\dot{\mathbf{x}}|^2(\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{x}})}{|\mathbf{k}^2|} = \mathbf{x} + |\dot{\mathbf{x}}|^2\frac{\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}^2|}$$

Der Punkt

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + |\dot{\mathbf{x}}|^2\frac{(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \times \dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|^2}$$

ist der *Krümmungsmittelpunkt* $\mathbf{r}$ der Raumkurve im Punkte $\mathbf{x}$

Aus der Beziehung

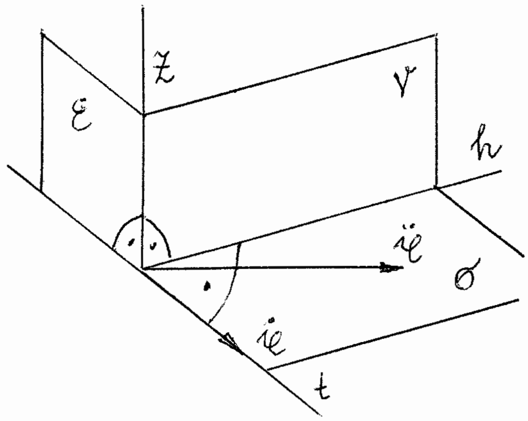
$$(\mathbf{r} - \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = |\dot{\mathbf{x}}|^2\frac{(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \times \dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|^2}.\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{x} \perp \dot{\mathbf{x}}$$

folgt, daß der Krümmungsmittelpunkt $\mathbf{r}$ auf einer Normalen auf die Tangent im Punkte $\mathbf{x}$ liegt.
Die in der Schmiegebene σ liegende Normale auf die Tangente ist die *Hauptnormale* der Kurve im Punkte x.

Ferner gilt

$$|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^2 = \left[|\dot{\mathbf{x}}|^2\frac{(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \times \dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|^2}\right]^2 = \frac{|\dot{\mathbf{x}}|^4}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|^4}\left[|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|^2.|\dot{\mathbf{x}}|^2 - \underbrace{[(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}]^2}_{0}\right] = \frac{|\dot{\mathbf{x}}|^6}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|^2}$$

Die Größe



$$\rho = \frac{|\dot{\mathbf{x}}|^3}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|} = \frac{v^3}{|\mathbf{v} \times \mathbf{b}|}$$

isr der *Krümmungsradius* der Raumkurve im Punkte $\mathbf{x}$.
Dessen reziproker Wert

$$\kappa = \frac{1}{\rho}$$

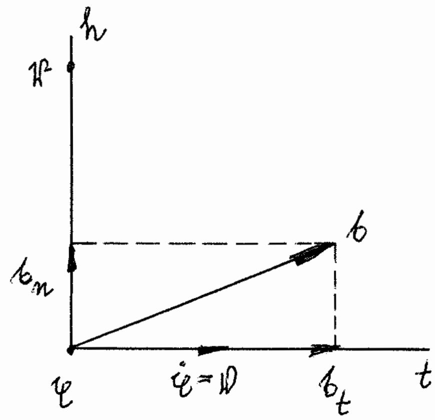
heißt *Krümmung* der Raumkurve im Punkte $\mathbf{x}$.

Das begleitende Dreibein einer Raumkurve

Die Normale $\mathbf{z}$ im Punkte $\mathbf{x}$ auf die Schmiegebene σ der Raumkurve nennen wir *Binormale* der Raumkurve in $\mathbf{x}$.
Tangente t, Hauptnormale h und Binormale z bilden das *begleitende Dreibein* der Raumkurve im Punkte $\mathbf{x}$.
Die Verbindungsebene ν von Hauptnormale h und Binormale z heißt *Normalebene* der Kurve in $\mathbf{x}$, die Verbindungsebene ε der Tangente t und der Binormalen z heißt *rektifizierende Ebene* der Raumkurve in $\mathbf{x}$.

Für die Achsen des begleitenden Dreibeins gelten folgende Beziehungen:

Tangente t...$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{x}}$, $\mathbf{t}^* = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times \mathbf{t}$
Binormale z...$\mathbf{z} = \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}$, $\mathbf{z}^* = \mathbf{x} \times (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{x} \times \mathbf{z}$
Hauptnormale h...$\mathbf{h} = \mathbf{z} \times \mathbf{t}$, $\mathbf{h}^* = \mathbf{x} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{t})$



Für die Koordinatenebenen des begleitenden Dreibeins gilt

Schmiegebene σ...$\mathbf{n} = \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{z}$, $d = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}})$
Normalebene ν...$\mathbf{n} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{t}$, $d = \mathbf{x}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{xt}$
Rektifizierende Ebene ε...$\mathbf{n} = \mathbf{h}$, $d = \mathbf{xh}$

Es ist zweckmäßig, den Beschleunigungsvektor in zwei Komponenten zu zerlegen, von denen eine in der Tangente, die andere in der Hauptnormale liegt:

$\mathbf{b} = \mathbf{b}_t + \mathbf{b}_n$

$\mathbf{b}_t$...***Tangentialbeschleunigungsvektor,*** $|\mathbf{b}_t| = b_t$...***Tangentialbeschleunigung***

$\mathbf{b}_n$...***Normalbeschleunigungsvektor,*** $|\mathbf{b}_n| = b_n$...***Normalbeschleunigung***

Da der Vektor der Normalbeschleunigung auf den Geschwindigkeitsvektor normal steht, folgt

$$\mathbf{b}_n \perp \mathbf{v} \Rightarrow |\mathbf{v}\times\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{v}\times(\mathbf{b}_t+\mathbf{b}_n)|^2 = |\mathbf{v}\times\mathbf{b}_n|^2 = |\mathbf{v}|^2.|\mathbf{b}_n|^2 - (\mathbf{v}\mathbf{b}_n)^2 \Rightarrow |\mathbf{v}\times\mathbf{b}| = v.b_n$$

Daher gilt

$$\rho = \frac{v^3}{|\mathbf{v}\times\mathbf{b}|} = \frac{v^3}{vb_n}$$

Somit

$$\boxed{\rho = \frac{v^2}{b_n}}$$

Der Beschleunigungsvektor weist in der Schmiegebene auf jene Seite der Tangente, in welcher der Krümmungmittelpunkt liegt, denn es gilt

$$(\mathbf{r}-\mathbf{x})\mathbf{b} = v^2\frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{b})\times\mathbf{v}}{|\mathbf{v}\times\mathbf{b}|^2}.\mathbf{b} = \frac{v^2}{|\mathbf{v}\times\mathbf{b}|^2}(\mathbf{v}\times\mathbf{b},\mathbf{v},\mathbf{b}) = \frac{v^2}{|\mathbf{v}\times\mathbf{b}|^2}|\mathbf{v}\times\mathbf{b}|^2 > 0$$

Grenzlage der Schnittgeraden zweier Schmiegebenen

Die Schmiegebene im Punkte $\mathbf{x}$ hat in den laufenden Koordinaten $\mathbf{y}$ die Gleichung

$$\underline{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\mathbf{y} = (\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}})}$$

Ableitung nach der Zeit t ergibt

$$[(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\mathbf{y}]^\bullet = [(\ddot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})+(\dot{\mathbf{x}}\times\dddot{\mathbf{x}})]\mathbf{y} = (\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}})^\bullet = (\dot{\mathbf{x}},\dot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}})+(\mathbf{x},\ddot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}})+(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}})$$

also

$$\underline{(\dot{\mathbf{x}}\times\dddot{\mathbf{x}})\mathbf{y} = (\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}})}$$

Da der Punkt $\mathbf{x}$ in beiden Ebenen liegt, geht auch die Schnittgerade beider Ebenen durch $\mathbf{x}$. Für den Richtungsvektor der Schnittgeraden ergibt sich

$$\mathbf{g} = (\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\times(\dot{\mathbf{x}}\times\dddot{\mathbf{x}}) = \ddot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}},\dot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}}) - \dot{\mathbf{x}}(\ddot{\mathbf{x}},\dot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}}) = \dot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}})$$

Wegen der Homogenität ist die Schnittgerade die Tangente

Gerade und Winkel von DARBOUX

Wir suchen die Grenzlage der Schnittgeraden benachbarter rektifizierender Ebenen

$\mathbf{h}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{h}$ ableiten nach t!

$$\dot{\mathbf{h}}\mathbf{y} = \underbrace{\dot{\mathbf{x}}\mathbf{h}}_{\perp} + \mathbf{x}\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{x}\dot{\mathbf{h}}$$

$\mathbf{x}$ liegt wieder in beiden Ebenen. Für den Richtungsvektor der Schnittgeraden gilt

$$\mathbf{g}=\mathbf{h}\times\dot{\mathbf{h}}=[(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\times\dot{\mathbf{x}}]\times[(\dot{\mathbf{x}}\times\dddot{\mathbf{x}})\times\dot{\mathbf{x}}+(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\times\ddot{\mathbf{x}}]=$$

$$=[(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\times\dot{\mathbf{x}}]\times[(\dot{\mathbf{x}}\times\dddot{\mathbf{x}})\times\dot{\mathbf{x}}]+[(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\times\dot{\mathbf{x}}]\times[(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\times\ddot{\mathbf{x}}]=$$

$$=\dot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}},\dot{\mathbf{x}}\times\dddot{\mathbf{x}},\dot{\mathbf{x}})-(\dot{\mathbf{x}}\times\dddot{\mathbf{x}})\underbrace{(\dot{\mathbf{x}},\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}},\dot{\mathbf{x}})}_{0}+\dot{\mathbf{x}}\underbrace{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}},\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}})}_{0}-(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})(\dot{\mathbf{x}},\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}})=$$

$$=\dot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}},\dot{\mathbf{x}}\times\dddot{\mathbf{x}},\dot{\mathbf{x}})+(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})|\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}}|^2$$

Eine Zwischenrechnung ergibt für den ersten Summanden

$$(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}},\dot{\mathbf{x}}\times\dddot{\mathbf{x}},\dot{\mathbf{x}})=(\dot{\mathbf{x}}\times\dddot{\mathbf{x}})[\dot{\mathbf{x}}\times(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})]=(\dot{\mathbf{x}}\times\dddot{\mathbf{x}})\left[\dot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}})-\ddot{\mathbf{x}}|\dot{\mathbf{x}}|^2\right]=-(\dot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}})|\dot{\mathbf{x}}|^2=(\dot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}})|\dot{\mathbf{x}}|^2$$

Daher gilt

$$\mathbf{g}=|\dot{\mathbf{x}}|^2(\dot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}}).\dot{\mathbf{x}}+|\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}}|^2(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})$$

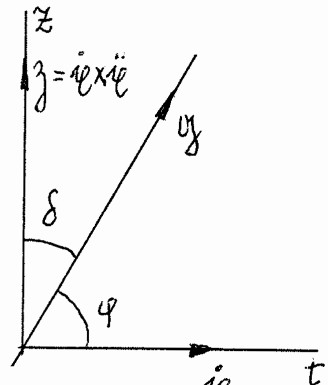
Diese Gerade heißt *Gerade von DARBOUX*[1]: Ihr Winkel δ mit der Binormalen heißt *Winkel von DARBOUX*. Da δ zum Winkel φ der DARBOUXschen Geraden mit der Tangente komplementär ist, gilt wegen

$$\dot{\mathbf{x}}\mathbf{g}=|\dot{\mathbf{x}}|.|\mathbf{g}|.\cos(\varphi)$$

$$|\dot{\mathbf{x}}\times\mathbf{g}|=|\dot{\mathbf{x}}|.|\mathbf{g}|.\sin(\varphi)$$

Daraus folgt

$$\tan(\delta)=\cot(\varphi)=\frac{\dot{\mathbf{x}}\mathbf{g}}{|\dot{\mathbf{x}}\times\mathbf{g}|}$$



Gerade von DARBOUX

Wegen

$$\dot{\mathbf{x}}\mathbf{g}=|\dot{\mathbf{x}}|^4(\dot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}})$$

$$\dot{\mathbf{x}}\times\mathbf{g}=|\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}}|^2[\dot{\mathbf{x}}\times(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})]\Rightarrow|\dot{\mathbf{x}}\times\mathbf{g}|^2=|\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}}|^4|\dot{\mathbf{x}}\times(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})|^2=$$

$$=|\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}}|^4\left[|\dot{\mathbf{x}}|^2.|\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}}|^2-(\dot{\mathbf{x}},\dot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}})^2\right]=|\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}}|^6.|\dot{\mathbf{x}}|^2$$

Daher gilt

$$\boxed{\tan(\delta)=\frac{|\dot{\mathbf{x}}|^4(\dot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}})}{|\dot{\mathbf{x}}|.|\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}}|^3}=\frac{|\dot{\mathbf{x}}|^3(\dot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}})}{|\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}}|^3}\ldots\textit{Winkel von DARBOUX}}$$

Setzt man

$$\tan(\delta)=\frac{|\dot{\mathbf{x}}|^3(\dot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}})}{|\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}}|^3}=\frac{\dfrac{(\dot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}})}{|\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}}|^2}}{\dfrac{|\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}}|}{|\dot{\mathbf{x}}|^3}}=\frac{\tau}{\kappa}$$

so ist κ die bereits bekannte Krümmung. Die Größe

$$\tau=\frac{(\dot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}})}{|\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}}|^2}$$

heiß *Torsion* der Raumkurve im Punkte $\mathbf{x}$.

[1] Gaston DARBOUX 1842-1917

Geometrische Bedeutung von Krümmung und Torsion

Die *Geraden* sind dadurch gekennzeichnet, daß in jedem ihrer Punkte die *Krümmung* verschwindet. Es durchlaufe nämlich der Punkt $\mathbf{x}(t)$ die gegebene Gerade $(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)$. Dann gilt

$\mathbf{g}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{g}$ ableiten nach t!

$\mathbf{o} = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{g}$ ableiten nach t!

$\mathbf{o} = \ddot{\mathbf{x}} \times \mathbf{g}$

Da $\dot{\mathbf{x}}$ und $\ddot{\mathbf{x}}$ mit $\mathbf{g}$ kollinear sind, sind sie auch untereinander kollinear und es gilt

$$\ddot{\mathbf{x}} = \lambda(t)\dot{\mathbf{x}} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{o} \Rightarrow \kappa = \frac{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|}{|\dot{\mathbf{x}}^3|} = 0$$

Diese Bedingung ist auch hinreichend, denn aus $\kappa = 0$ folgt

$\kappa = 0 \Rightarrow |\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}| = 0 \Rightarrow \ddot{\mathbf{x}} = \lambda(t)\dot{\mathbf{x}}$

Es gilt daher koordinatenweise

$$\ddot{x}_i = \lambda(t)\dot{x}_i, \quad \dot{x}_i = p_i(t), \quad \ddot{x}_i = \dot{p}_i(t), \quad (i = 1,2,3)$$

$$\dot{p}_i = \lambda p \Rightarrow \lambda = \frac{\dot{p}_i}{p_i} \Rightarrow \int \lambda.\partial t + c_i = \int \frac{\dot{p}_i}{p_i}.\partial t \qquad = \boldsymbol{ln}(p_i) \Rightarrow$$

$$p_i = e^{\int \lambda.\partial t + c_i} = e^{c_i}.e^{\int \lambda.\partial t} = g_i.\mu(t) = \dot{x}_i$$

Daraus folgt für die einzelnen Koordinaten

$$x_i = g_i \int \mu(t).\partial t + a_i = g_i.\nu(t) + a_i$$

Mit $\mathbf{g} := \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix}$ und $\mathbf{a} := \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$ gilt $\underline{\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + \nu(t)\mathbf{g} \ldots \text{Gerade}}$

Die *ebenen Kurven* sind dadurch gekennzeichnet, daß in jedem ihrer Punkte die *Torsion* verschwindet. Es bewege sich nämlich der Punkt $\mathbf{x}(t)$ in der festen Ebene $(\mathbf{n},d)$

$\mathbf{n}\mathbf{x} = d$ ableiten nach t!

$\mathbf{n}\dot{\mathbf{x}} = 0$ ableiten nach t!

$\mathbf{n}\ddot{\mathbf{x}} = 0$ ableiten nach t!

$\mathbf{n}\dddot{\mathbf{x}} = 0$

Da $\dot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}}$ auf denselben Vektor $\mathbf{n}$ normal stehen, liegen sind sie komplanar, daher linear abhä ngig. $\Rightarrow (\dot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}}) = 0 \Rightarrow \tau = 0$

Umgekehrt sei $\tau = 0 \Rightarrow (\dot{\mathbf{x}},\ddot{\mathbf{x}},\dddot{\mathbf{x}}) = 0 \Rightarrow \dddot{\mathbf{x}} = \lambda\dot{\mathbf{x}} + \mu\ddot{\mathbf{x}}$

Wir untersuchen die Lagenänderung der Schmiegebene

$\mathbf{ny} = \mathrm{d}$ ableiten nach t!

$\dot{\mathbf{n}}\mathbf{y} = \dot{\mathrm{d}}$

$\underline{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}} \Rightarrow \dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{x}} \times \dddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} \times (\lambda\dot{\mathbf{x}} + \mu\ddot{\mathbf{x}}) = \mu\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}} = \underline{\mu\mathbf{n}}$

$\underline{\mathrm{d}} = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}), \quad \dot{\mathrm{d}} = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda\dot{\mathbf{x}} + \mu\ddot{\mathbf{x}}) = \mu(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) = \underline{\mu\mathrm{d}}$

Die beiden Ebenen sind demnach identisch, d.h. die Schmiegebene ist konstant, die Kurve ist eine ebene Kurve.

Die Bogenlänge als Parameter

Es sei s die von einem bestimmten Anfangspunkt aus gemessene Bogenlänge auf der betrachteten Kurve. Es gelte

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s), \quad \mathbf{x}' = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = v = |\dot{\mathbf{x}}| \Rightarrow \mathbf{x}' = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial s} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{1}{v} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|}$$

$\mathbf{x}' = \dfrac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|}$ ist demnach ***Einheitvektor***

Daraus ergibt sich

$|\mathbf{x}'|^2 = \mathbf{x}' . \mathbf{x}' = 1$ ableiten nach s!

$\mathbf{x}'' . \mathbf{x}' + \mathbf{x}' . \mathbf{x}'' = 0 \Rightarrow \mathbf{x}' . \mathbf{x}'' = 0 \Rightarrow \underline{\mathbf{x}' \perp \mathbf{x}''}$

$\mathbf{x}' . \mathbf{x}'' = 0$ ableiten nach s!

$|\mathbf{x}''|^2 + \mathbf{x}'\mathbf{x}''' = 0$ usw.

Für die Ableitungen nach der Bogenlänge gilt

$$|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|^2 = |\mathbf{x}'|^2 . |\mathbf{x}''|^2 - (\mathbf{x}'\mathbf{x}'')^2 = |\mathbf{x}''|^2 \Rightarrow \underline{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''| = |\mathbf{x}''|}$$

Daher gilt

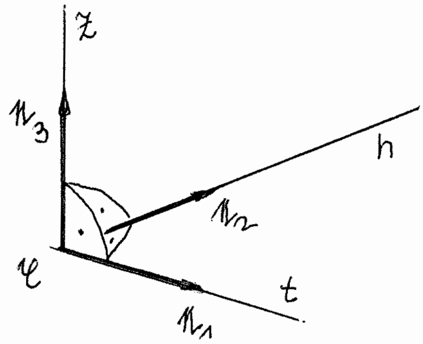
$$\kappa = \frac{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|}{|\mathbf{x}'|^3} = |\mathbf{x}''|$$

$$\tau = \frac{(\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''')}{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|^2} = \frac{(\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''')}{|\mathbf{x}''|^2}$$

Es ist also

$$\boxed{\begin{aligned}\kappa &= |\mathbf{x}''| \\ \tau &= \frac{(\mathbf{x}',\mathbf{x}'',\mathbf{x}''')}{|\mathbf{x}''|^2}\end{aligned}}$$

Die Ableitungsformeln von FRENET



Wir normieren das begleitende Dreibein

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{x}''}{|\mathbf{x}''|}$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''}{|\mathbf{x}''|}$$

Im begleitenden Dreibein sollen die Ableitungen der $\mathbf{e}_i$ dargestellt werden. Es gilt:

$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ ableiten nach s!

$$\mathbf{e}_i' \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j' = 0 \qquad (1)$$

speziell

$$\mathbf{e}_i' \mathbf{e}_i = 0 \qquad (2)$$

Wir machen den Ansatz

$$\mathbf{e}_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbf{e}_j \quad | \mathbf{e}_k$$

$$\mathbf{e}_i' \mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \delta_{jk} = a_{ik} \overset{(1)}{=} -\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k' = -a_{ki}$$

$$a_{ii} = 0$$

Die Koeffizientenmatrix ist also schiefsymmetrisch, daher gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1' &= \phantom{-a_{12}\mathbf{e}_1} \quad a_{12}\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}_2' &= -a_{12}\mathbf{e}_1 \qquad\qquad + a_{23}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}_3' &= -a_{13}\mathbf{e}_1 - a_{23}\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}' \Rightarrow \mathbf{e}_1' = \mathbf{x}'' = |\mathbf{x}''|\mathbf{e}_2 = \kappa \mathbf{e}_2 = a_{12}\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_3 \Rightarrow a_{12} = \kappa, \quad a_{13} = 0$$

Daher gilt zunächst

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1' &= \qquad\quad \kappa\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{e}_2' &= -\kappa\mathbf{e}_1 \qquad\quad + a_{23}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}_3' &= \qquad\quad - a_{23}\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\mathbf{e}_3'\mathbf{e}_2 = -a_{23} = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)'\mathbf{e}_2 = [\mathbf{e}_1' \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2']\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow +a_{23} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2') = \left(\mathbf{x}', \frac{\mathbf{x}''}{|\mathbf{x}''|}, \frac{\mathbf{x}'''|\mathbf{x}''| - \mathbf{x}''|\mathbf{x}''|^{\bullet}}{|\mathbf{x}''|^2}\right) = \left(\mathbf{x}', \frac{\mathbf{x}''}{|\mathbf{x}''|}, \frac{\mathbf{x}'''}{|\mathbf{x}''|^2}\right) = \frac{(\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}}{|\mathbf{x}''|^2} = \tau = a_{23}$$

Daher Lauten die Ableitungsgleichungen von FRENET (1847)

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathbf{e}_1' &= \qquad\quad \kappa\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{e}_2' &= -\kappa\mathbf{e}_1 \qquad\quad + \tau\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}_3' &= \qquad\quad - \tau\mathbf{e}_2
\end{aligned}}$$

Stichwortverzeichnis

—T—

—U—

—V—

—W—

—Z—

Inhaltsverzeichnis